

# Основы наивной теории множеств.

Лектор — Станислав Олегович Сперанский

Создатель конспекта — Глеб Минаев \*

## TODOs

Добавить конспекты теории из упражнений. Слить аккуратно воедино. Добавить ссылку на упражнения. . . . . 1

## Содержание

<b>1</b>	<b>Аксиоматика</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Отношения</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Натуральные числа и индукция</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Мощности</b>	<b>6</b>
4.1	Основные свойства конечных множеств . . . . .	8
4.2	Основные свойства (не более чем) счётных множеств . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Упорядоченность</b>	<b>12</b>
5.1	Трансфинитная индукция и фундированность . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Ординалы, кардиналы и важные теоремы ZFC</b>	<b>16</b>
6.1	Ординалы . . . . .	16
6.2	Кардиналы . . . . .	21
6.3	Важные теоремы в ZFC . . . . .	22

Материалы лекций: ссылка

Добавить конспекты теории из упражнений. Слить аккуратно воедино. Добавить ссылку на упражнения.

Литература:

- K. Hrbacek and T. Jech. Introduction to Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Marcel Dekker, Inc., 1999.
- T. Jech. Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.

---

\*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

# 1 Аксиоматика

Будем рассматривать как базовые выражения “ $x$  равен (совпадает с)  $y$ ” (“ $x = y$ ”) “ $x$  лежит в  $y$ ” (“ $x \in y$ ”).

**Определение 1** (Наивная схема аксиом выделения). Пусть  $\Phi(x)$  — произвольное условие на объекты. Тогда существует  $X$ , что  $\forall u(\Phi(u) \leftrightarrow u \in X)$ . В этом случае  $X$  обозначается как  $\{u \mid \Phi(u)\}$ .

**Утверждение 1** (парадокс Рассела). Пусть  $R = \{u \mid u \notin u\}$ . Тогда  $R$  не может лежать в себе и не может не лежать в себе одновременно.

**Утверждение 2** (парадокс Берри). Пусть  $n$  — наименьшее натуральное число, которое нельзя описать менее чем одиннадцатью словами. Тогда  $n$  описывается 10 словами.

Из-за данного парадокса будем рассматривать только условия, образованные переменными и  $\in, =, \neg, \wedge, \vee, \leftarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$ .

**Определение 2** (аксиомы ZFC (= ZF (аксиомы Цермело-Френкеля) + C (аксиома выбора))).

**Ext)** “Аксиома экстенциональности”:

$$\forall X \forall Y (\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y)$$

**Empty)** “Аксиома пустого множества”:

$$\exists \emptyset \forall u (u \notin \emptyset)$$

**Pair)** “Аксиома пары”:

$$\forall X \forall Y \exists Z (\forall u (u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)))$$

Обозначение:  $Z = \{X, Y\}$ .

**Sep)** “Схема аксиом выделения”:

$$\forall \Phi(x) \quad \forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u)))$$

Обозначение:  $Y = \{u \in X \mid \Phi(u)\}$ .

**Следствие. Операторы**

$$X \cap Y := \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\}$$

$$X \setminus Y := \{u \in X \mid u \notin Y\}$$

$$\bigcap X := \{u \mid \forall v \in X \quad u \in v\}$$

определены корректно.

**Union)** “Аксиома объединения”:

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists v (v \in X \wedge u \in v))$$

Обозначение:  $Y = \bigcup X$ .

**Следствие.** Оператор

$$X \cup Y := \bigcup \{X, Y\} = \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\}$$

определён корректно.

**Power)** Пусть  $x \subseteq y := \forall v \{v \in x \rightarrow v \in y\}$ . “Аксиома степени”:

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$$

Обозначение:  $Y = \mathcal{P}(X) := \{u \mid u \subseteq X\}$ .  $\mathcal{P}(X)$  — “множество-степень  $X$ ” или “булеан  $X$ ”.

**Определение 3.** Упорядоченная пара — это объект от некоторых  $X_1$  и  $Y_1$ , который равен другому такому объекту от  $X_2$  и  $Y_2$  тогда и только тогда, когда  $X_1 = X_2 \wedge Y_1 = Y_2$ .

**Определение 4.** Декартово произведение  $X$  и  $Y$  ( $X \times Y$ ) —  $\{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ .

*Замечание 1.* Можно несложно показать, что декартово произведение определено корректно.

**Inf)** Пусть  $\text{Ind}(X) := \emptyset \in X \wedge \forall u (u \in X \wedge u \cup \{u\} \in X)$ . Если  $\text{Ind}(X)$ , то  $X$  называется индуктивным. “Аксиома бесконечности”: существует индуктивное множество.

**Repl)** “Схема аксиом подстановки”:

$$\begin{aligned} & \forall \Phi(x, y) \\ & \forall x \forall y_1 \forall y_2 ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \rightarrow y_1 = y_2) \rightarrow \\ & \forall X \exists Y \forall y (y \in Y \leftrightarrow \exists x (x \in X \wedge \Phi(x, y))) \end{aligned}$$

**Reg)** “Аксиома регулярности”:

$$\forall X (X \neq \emptyset \rightarrow \exists u (u \in X \wedge X \cap u = \emptyset))$$

## 2 Отношения

**Определение 5.** Бинарное (или двухместное) отношение  $R$  между  $X$  и  $Y$  — подмножество  $X \times Y$ . Если  $Y = X$ ,  $R$  называется бинарным (или двухместным) отношением на  $X$ .

Обозначение:  $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$ .

**Определение 6.**

$$\begin{aligned} \text{dom}(R) &:= \{u \in X \mid \exists v \quad uRv\} && \text{“область определения } R\text{”} \\ \text{range}(R) &:= \{v \in Y \mid \exists u \quad uRv\} && \text{“область значений } R\text{”} \\ R[U] &:= \text{range}(R \cap (U \times Y)) \\ R^{-1} &:= \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} \end{aligned}$$

*Замечание 2.*

$$\begin{aligned} \text{range}(R) &= \text{dom}(R^{-1}) = R[X] \\ \text{range}(R^{-1}) &= \text{dom}(R) = R^{-1}[Y] \end{aligned}$$

**Определение 7.** Бинарные отношения можно естественным образом комбинировать: для любых отношений  $R$  и  $Q$  между  $X$  и  $Y$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно отношение

$$S = R \circ Q := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y : xRy \wedge yQz\}$$

называется композицией  $R$  и  $Q$ .

**Определение 8.** Тожественное отображение на  $X$  —  $id_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$ .

*Замечание 3.* Тожественное отображение при композиции (не важно, правой или левой) с другим отношением не меняет его.

**Определение 9.** Отношение  $R$  между  $X$  и  $Y$  называется функциональным, если

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 ((xRy_1 \wedge xRy_2) \rightarrow y_1 = y_2).$$

**Определение 10.** Функция из  $X$  в  $Y$  — функциональное отношение  $R$  между  $X$  и  $Y$ , в котором  $\text{dom}(R) = X$ . Обозначение:  $R : X \rightarrow Y$ .

**Определение 11.** Ограничение или сужение функции  $f : X \rightarrow Y$  на  $U \subseteq X$  — функция  $f \upharpoonright_U := f \cap (U \times Y)$ .

Если  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : U \rightarrow Y$ , где  $U \subseteq X$ , таковы, что  $f \upharpoonright_U = g$ , то  $f$  называется *расширением*  $g$ , а  $g$  — *ограничением*  $f$ .

**Определение 12.**  $Y^X := \{f : X \rightarrow Y\}$ .

**Определение 13.** Функция  $f : X \rightarrow Y$  называется

- *сюръекцией*, если  $\text{range}(f) = Y$ ;
- *инъекцией*, если  $f^{-1}$  функционально;
- *биекцией*, если  $f$  сюръективно и инъективно.

С) “Аксиома выбора”:

$$\forall X (\emptyset \notin X \rightarrow \exists f (f : X \rightarrow \bigcup X \wedge \forall u \in X (f(u) \in u)))$$

### 3 Натуральные числа и индукция

Важным следствием Inf является

$$\exists X (\text{Ind}(X) \wedge \forall Y (\text{Ind}(Y) \rightarrow X \subseteq Y)) \quad (\text{Nat})$$

Nat описывает минимальное по включению индуктивное множество —  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0$  или  $\omega$ .

**Вывод Nat из Inf.** Пусть есть какое-то индуктивное  $X_0$ . Тогда рассмотрим

$$\mathbb{N} := \{x \in X_0 \mid \forall X (\text{Ind}(X) \rightarrow x \in X)\}$$

По построению  $\text{Ind}(X) \rightarrow \mathbb{N} \subseteq X$ . Также  $\text{Ind}(\mathbb{N})$ . □

**Определение 14.** Определим функцию последователя  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  как

$$s := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \cup \{n\}\}$$

Вместо  $s(n)$  часто пишут  $n + 1$ .

**Определение 15.** (Естественный) порядок на  $\mathbb{N} - < := \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in m\}$ .

*Замечание 4.* Для всех  $n, m \in \mathbb{N}$  верно:

1.  $\neg(n < 0)$ ;
2.  $n < m + 1 \leftrightarrow (n < m \vee n = m)$ .

**Теорема 3** (принцип индукции). Пусть  $X$  удовлетворяет условию

$$0 \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}(n \in X \rightarrow n + 1 \in X).$$

Тогда  $\mathbb{N} \subseteq X$ .

**Доказательство.** Из условия на  $X$  следует, что  $\mathbb{N} \cap X$  индуктивно. Тогда из определения  $\mathbb{N}$  следует, что  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cap X \subseteq X$ , значит  $\mathbb{N} \subseteq X$ .  $\square$

*Замечание 5.* В качестве  $X$  могут быть  $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ .

**Следствие 3.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  верно  $n \subseteq \mathbb{N}$ .

**Теорема 4** (возвратная индукция). Пусть дан  $X$ , что  $\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n \ m \in X \rightarrow n \in X)$ . Тогда  $\mathbb{N} \subseteq X$ .

**Доказательство.** Докажем, что  $\forall n \in \mathbb{N} \ n \subseteq X$ , по индукции. База для 0 очевидна. Шаг очевиден, так как  $n \subseteq X$ , значит  $n \in X$ , значит  $n + 1 \subseteq X$ .  $\square$

**Определение 16.**  $\text{Min}(X) := \{x \in X \mid \neg \exists u \in X \ u \in x\}$ .

**Теорема 5** (принцип минимального элемента). Если  $X \subset \mathbb{N}$  и  $X \neq \emptyset$ , то  $\text{Min}(X) \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Пусть  $\text{Min}(X) = \emptyset$ . Возьмём  $Y := \mathbb{N} \setminus X$ . Заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n \ m \in Y \rightarrow n \in Y)$$

Тогда по принципу возвратной индукции  $Y = \mathbb{N}$ , а тогда  $X = \emptyset$  — противоречие.  $\square$

**Теорема 6** (о рекурсии). Пусть есть  $y_0 \in Y$  и  $h : \mathbb{N} \times Y \rightarrow Y$ . Тогда существует и единственная  $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$  такая, что для любого  $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0 \\ h(m, f(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

**Доказательство.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда будем называть функцию  $f : k + 1 \rightarrow Y$  *правильной*, если условие в определении рекурсии верно для всех  $n \in k + 1$ . Также рассмотрим

$$S := \{k \in \mathbb{N} \mid \text{существует единственная правильная } f : k + 1 \rightarrow Y\}$$

Будем обозначать для каждого  $k \in S$  через  $f_k$  соответствующую правильную функцию из  $k + 1$  в  $Y$ .

Докажем по индукции, что  $S = \mathbb{N}$ .

**База.** Очевидно,  $\{(0, y_0)\}$  — единственная правильная функция из  $0 + 1$  в  $Y$ . Поэтому  $0 \in S$ .

**Шаг.** Легко заметить, что сужение любой правильной функции на  $k + 2$  на множество  $k + 1$  правильно. Поэтому все правильные функции на  $k + 2$  определены на  $k + 1$  как  $f_k$ . Тогда значение в  $k + 1$  определяется однозначно, значит правильная функция на  $k + 2$  существует и единственна.  $\square$

**Теорема 7** (о рекурсии, параметризованная). Пусть  $g_0 \in Y^X$  и  $h : X \times \mathbb{N} \times Y \rightarrow Y$ . Тогда существует и единственна  $f : X \times \mathbb{N} \rightarrow Y$ , что  $\forall x \in X, n \in \mathbb{N}$

$$f(x, n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

**Доказательство.** Рассмотрим для каждого  $x \in X$  функцию  $h_x : \mathbb{N} \times Y \rightarrow Y, (n, y) \mapsto h(x, n, y)$ . Тогда по теореме о рекурсии есть  $f_x : \mathbb{N} \rightarrow Y$ , что

$$f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Тогда определим  $f : X \times \mathbb{N} \rightarrow Y, (x, n) \mapsto f_x(n)$ . В этом случае

$$f(x, n) = f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases} = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

□

*Замечание 6.* Заметим, что с помощью теоремы о параметризованной рекурсии можно определить сложение, умножение и возведение в степень на натуральных числах.

**Определение 17.** Несложно заметить, что функциональные отношения  $R \subseteq X \times Y$  — функции из подмножества  $X$  в  $Y$ . Поэтому будем называть их *частичными функциями* и обозначать как  $R : \subseteq X \rightarrow Y$ .

**Теорема 8** (о рекурсии, частичной). Пусть  $y_0 \in Y$  и  $h : \subseteq \mathbb{N} \times Y \rightarrow Y$ . Тогда существует и единственна  $f : \subseteq \mathbb{N} \rightarrow Y$ , что

- для любого  $n \in \text{dom}(f)$ ,

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0 \\ h(m, f(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

- либо  $\text{dom}(f) = \mathbb{N}$ , либо  $\text{dom}(f) = k + 1$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ , что  $(k, f(k)) \notin \text{dom}(h)$ .

**Доказательство.** Зафиксируем некоторое  $y \notin Y$  и положим  $Y' := Y \cup \{y\}$ . Теперь расширим  $h$  до  $h' : \mathbb{N} \times Y' \rightarrow Y'$  следующим образом:

$$h'(n, y') := \begin{cases} h(n, y') & \text{если } (n, y') \in \text{dom}(h) \\ y & \text{иначе} \end{cases}$$

В силу теоремы о рекурсии существует и единственна  $f' : \mathbb{N} \rightarrow Y'$  такая, что для любого  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f'(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0 \\ h'(m, f'(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Возьмём  $f := f' \cup (\mathbb{N} \times Y)$ . Несложно убедиться, что  $f$  будет искомой. □

**Определение 18.** Конечными последовательностями элементов  $X$  называются элементы множества  $X^* := \{f \mid \exists n \in \mathbb{N}(f : n \rightarrow X)\}$ .

**Теорема 9** (о возвратной индукции). Пусть  $h : \mathbb{N} \times Y^* \rightarrow Y$ . Тогда существует единственная  $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$  такая, что для любого  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = h(n, f \upharpoonright_n)$ .

**Доказательство.** По аналогии с доказательством теоремы о рекурсии, однако вместо обычной индукции тут используется возвратная. [...]  $\square$

**Определение 19.** Условие  $\Phi(x, y)$  называется *функциональным*, если

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \rightarrow y_1 = y_2)$$

Если для некоторого  $x$  нашёлся тот самый  $y$ , что  $\Phi(x, y)$ , тогда данный  $y$  обозначается как  $\llbracket \Phi \rrbracket(x)$ .

Функциональное условие  $\Phi(x, y)$  называется *тотальным*, если  $\forall x \exists y \Phi(x, y)$ .

**Теорема 10** (о возвратной “классовой рекурсии”). Пусть  $\Phi(x, y)$  — тотальное функциональное условие. Тогда существует единственная функция  $f$  с  $\text{dom}(f) = \mathbb{N}$ , что  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \llbracket \Phi \rrbracket(f \upharpoonright_n)$$

**Доказательство.** Идея здесь та же, хотя деталей побольше. В нашем модуле эта теорема не будет играть особой роли, однако именно “классовая рекурсия” является базовым инструментом в ТМ. [...]  $\square$

## 4 Мощности

**Определение 20.**  $X$  и  $Y$  *равномощны*, если существует биекция  $f : X \rightarrow Y$ . Обозначение:  $X \sim Y$ .

**Теорема 11.** Для всех  $X, Y$  и  $Z$  верно следующее:

1.  $X \sim X$ ;
2.  $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$ ;
3.  $X \sim Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$ .

*Пример 1.*  $\mathcal{P}(X) \sim 2^X$ . Действительно, рассмотрим для каждого  $Y \subseteq X$  функцию  $\chi_Y : X \rightarrow 2$ , что

$$\chi_Y(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x \in Y \\ 0 & \text{если } x \in X \setminus Y \end{cases}$$

Несложно заметить, что отображение, сопоставляющее  $Y$  функцию  $\chi_Y$  есть биекция из  $\mathcal{P}(X)$  в  $2^X$ .

**Определение 21.** Множество  $X$  *по мощности менее или равно*  $Y$  ( $X \preceq Y$ ), если существует инъекция из  $X$  в  $Y$ .

Множество  $X$  *по мощности (строго) менее*  $Y$  ( $X \prec Y$ ), если  $X \preceq Y \wedge X \not\sim Y$ .

*Замечание 7.* Тогда очевидно, что  $X \preceq Y$  тогда и только тогда, когда  $X$  равномощно некоторому подмножеству  $Y$ .

**Теорема 12.**

1.  $X \preceq X$ .

2.  $X \sim Y \Rightarrow X \preceq Y$ .
3.  $X \preceq Y \sim Z \Rightarrow X \preceq Z$ .
4.  $X \sim Y \preceq Z \Rightarrow X \preceq Z$ .
5.  $X \preceq Y \preceq Z \Rightarrow X \preceq Z$ .

**Теорема 13** (Кантора, обобщённая).  $X \prec \mathcal{P}(X)$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X), x \mapsto \{x\}$  есть инъекция, поэтому  $X \preceq \mathcal{P}(X)$ . Покажем, что между ними нет биекции.

Предположим противное, т.е. есть биекция  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Рассмотрим  $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ . Поскольку  $f$  — биекция, то  $f(y) = Y$  для некоторого  $y$ . В итоге мы получаем

$$y \in Y \iff y \notin f(Y) \iff y \notin Y$$

Получаем противоречие. □

**Теорема 14** (Кантора-Шрёдера-Бернштейна). Если  $X \preceq Y$  и  $Y \preceq X$ , то  $X \sim Y$ .

**Доказательство.**

**Лемма 14.1.** Если  $X \supseteq Y \supseteq X'$  и  $X \sim X'$ , то  $X \sim Y \sim X'$ .

**Доказательство.** Пусть  $f : X \rightarrow X'$  — биекция. Определим по рекурсии  $\{X_i\}_{i=0}^\infty$  и  $\{Y_i\}_{i=0}^\infty$ :

$$X_n := \begin{cases} X & \text{если } n = 0 \\ f[X_m] & \text{если } n = m + 1 \end{cases} \quad Y_n := \begin{cases} Y & \text{если } n = 0 \\ f[Y_m] & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

По условию  $X_0 = X \supseteq Y = Y_0$  и  $Y_0 = Y \supseteq X' = f(X) = X_1$ . Тогда несложно убедиться по индукции по  $n$ , что  $X_n \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1}$ , так как  $X_{n-1} \supseteq Y_{n-1} \supseteq X_n$ , значит  $f(X_{n-1}) \supseteq f(Y_{n-1}) \supseteq f(X_n)$ , что буквально означает, что  $X_n \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1}$ .

Тогда для каждого  $n \in \mathbb{N}$  определим  $U_n := X_n \setminus Y_n$ . Пусть также  $U := \bigcup_{n=0}^\infty U_n$ ,  $Z := X \setminus U$ . Несложно видеть, что

$$X = \bigcup_{n=0}^\infty U_n \cup Z \quad Y = \bigcup_{n=0}^\infty U_n \cup Z$$

Также несложно видеть, что  $f[U_n] = f[X_n \setminus Y_n] = f[X_n] \setminus f[Y_n] = X_{n+1} \setminus Y_{n+1} = U_{n+1}$ , а потому  $f[U] = U \setminus U_0$ .

Тогда определим  $g : X \rightarrow X$  по правилу

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in U \\ x & \text{если } x \in Z \end{cases}$$

Несложно видеть, что это инъекция. Действительно,  $g$  на  $U$  равна  $f$ , а значит есть биекция из  $U$  в  $U \setminus U_0$ , также является биекцией из  $Z$  в себя, а поскольку  $U$  и  $Z$  дизъюнкты, то  $g$  является биекцией из  $U \cup Z$  в  $U \setminus U_0 \cup Z$ , т.е. из  $X$  в  $Y$ . Значит  $Y \sim X$ . □

Пусть  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow X$  — инъекции. Несложно видеть, что  $g[Y] \subseteq X$ , а  $f[X] \subseteq Y$ , значит  $g[f[X]] \subseteq g[Y]$ . Т.е.  $X \supseteq g[Y] \supseteq g[f[X]]$ . При этом  $X \sim f[X] \sim g[f[X]]$ , поэтому применяя лемму 14.1, имеем, что  $X \sim g[Y] \sim Y$ , значит  $X \sim Y$ . □



**Определение 22.** Будем говорить, что  $X$  имеет  $n$  элементов (где  $n \in \mathbb{N}$ ), если  $X \sim n$ .  
 $X$  конечно, если для какого-то  $n \in \mathbb{N}$ , что  $X \sim n$ .

**Утверждение 15.**  $X$  бесконечно, значит  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |X| \geq n$ .

**Доказательство.** Докажем по индукции по  $n$ .

**База:**  $|X| \geq 0$  — очевидно.

**Шаг:** Пусть  $|X| > n$ , тогда существует инъекция  $f : n \rightarrow X$ .  $f(n) \neq X$ , поэтому есть  $x \in X \setminus f(n)$ , значит есть  $f' = f \cup \{(n; x)\}$  — инъекция из  $n + 1$  в  $X$ .  $\square$

## 4.1 Основные свойства конечных множеств

**Утверждение 16.**  $X$  конечно, а  $|Y| \leq |X|$ , то  $|Y|$  конечно.

**Доказательство.** Существует  $n \in \mathbb{N}$ , что  $|X| = n$ . Тогда  $Y$  конечно, так как иначе  $n = |X| \geq |Y| \geq n + 1$ .  $\square$

**Утверждение 17.** Пусть есть сюръекция из  $X$  в  $Y$ , и  $X$  конечно. Тогда  $|Y| \leq |X|$ .

**Доказательство.** WLOG  $X = n$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Определим  $g : Y \rightarrow n$  по правилу

$$g(y) := \text{“минимальный элемент в } f^{-1}[\{y\}]”$$

Легко понять, что  $g : Y \rightarrow n$  — инъекция. Стало быть,  $|Y| \leq |n| = n$ .  $\square$

**Утверждение 18.** Пусть  $X$  и  $Y$  конечны, причём  $X \cup Y = \emptyset$ . Тогда  $X \cap Y$  конечно и  $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ .

**Доказательство.** Докажем утверждение индукцией по  $|Y|$ .

**База.** Очевидно, если  $|Y| = 0$ , то  $|Y| = \emptyset$ , а потому  $|X \cup Y| = |X| = |X| + 0 = |X| + |Y|$ .

**Шаг.** Пусть  $|Y| = n + 1$ , т.е. существует биекция  $f : n + 1 \rightarrow Y$ . Рассмотрим  $y = f^{-1}(n)$  и  $Z := Y \setminus \{y\}$ . Очевидно, что  $|Z| = n$ . Тогда

$$\begin{aligned} |X \cup Y| &= |(X \cup Z) \cup \{y\}| &= |X \cup Z| + 1 &= (|X| + |Z|) + 1 \\ &= |X| + (|Z| + 1) &= |X| + |Y| \end{aligned}$$

$\square$

**Утверждение 19.** Пусть  $X$  и  $Y$  конечны. Тогда  $X \times Y$  и  $X^Y$  конечны и  $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ ,  $|X^Y| = |X|^{|Y|}$ .

## 4.2 Основные свойства (не более чем) счётных множеств

**Утверждение 20** (в ZFC). Пусть  $X$  бесконечно, тогда оно содержит счётное подмножество.

**Доказательство.** Пусть  $\eta$  — какая-нибудь функция выбора для  $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ . Используя рекурсию, определим  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  по правилу

$$f(k) := \eta(X \setminus \text{range}(f \upharpoonright_k))$$

Как легко видеть,  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  — инъекция. Поэтому  $\text{range}(f)$  будет счётным подмножеством  $X$ .  $\square$

**Определение 23.**  $\aleph$  является кардиналом и обычно обозначается  $\aleph_0$ .

**Следствие 20.1** (в ZFC).  $|X| > \aleph_0$  тогда и только тогда, когда  $X$  бесконечно и несчётно.

**Утверждение 21.**  $|X| \leq \aleph_0$  тогда и только тогда, когда  $X$  конечно или счётно.

**Доказательство.** Если  $X$  конечно или счётно, то, очевидно,  $|X| \leq \aleph_0$ .

Если  $|X| \leq \aleph_0$ , то WLOG  $X \subseteq \mathbb{N}$ . Если  $X$  бесконечно, то рекурсивно определим  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  по правилу

$$f(k) := \text{“минимальный элемент в } X \setminus \text{range}(f \upharpoonright_k)\text{”}$$

Нетрудно проверить, что  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  — биекция. □

**Следствие 21.1** (в ZFC).  $|X| \not\leq \aleph_0$  тогда и только тогда, когда  $|X| \leq \aleph_0$ .

**Утверждение 22.** Есть сюръекция из  $X$  в  $Y$ , причём  $|X| \leq \aleph_0$ . Тогда  $|Y| \leq \aleph_0$ .

**Доказательство.** WLOG  $X \subseteq \mathbb{N}$ . Определим  $g : Y \rightarrow X$  по правилу

$$g(y) := \text{“минимальный элемент в } f^{-1}[\{y\}]\text{”}$$

Легко понять, что  $g : Y \rightarrow X$  — инъекция. Стало быть,  $|Y| \leq |X| \leq \aleph_0$ . □

**Следствие 22.1.** Непустое  $X$  не более чем счётно тогда и только тогда, когда существует сюръекция из  $\mathbb{N}$  в  $X$ .

**Следствие 22.2.** Пусть  $R$  — отношение эквивалентности на  $X$ , причём  $X$  не более, чем счётно. Тогда  $X/R$  не более чем счётно.

**Утверждение 23.** Пусть  $X$  и  $Y$  не более чем счётны, тогда  $X \times Y$  не более чем счётно.

**Доказательство.** WLOG  $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ . Тогда  $X \times Y \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , а значит нужно показать, что счётность  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Определим  $\nu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  по правилу

$$\nu(n, m) := \frac{(n + m)(n + m + 1)}{2} + n$$

Нетрудно проверить, что  $\nu$  биективна. □

**Следствие 23.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_n$$

счётно.

**Следствие 23.2.** Пусть  $X$  и  $Y$  не более чем счётны, тогда  $X \cup Y$  не более чем счётно.

**Доказательство.** Поскольку  $X$  и  $Y \setminus X$  равномощны некоторым подмножествам  $\mathbb{N} \times \{0\}$  и  $\mathbb{N} \times \{1\}$ , то  $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$  равномощно подмножеству  $\mathbb{N} \times \{0, 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , а потому не более чем счётно. □

**Утверждение 24.**  $X$  конечно, а элементы  $X$  не более чем счётны. Тогда  $\bigcup X$  не более чем счётно.

**Доказательство.** По индукции по  $|X|$ . □

**Определение 24.** Условие “быть (бесконечной) последовательностью” —  $\text{Seq}(F) := \exists Y : F : \mathbb{N} \rightarrow Y$ . Если  $\text{Seq}(F)$ , то для любого  $n \in \mathbb{N}$  вместо  $F(n)$  нередко пишут  $F_n$ .

**Утверждение 25.** Если  $F$  — последовательность последовательностей, то тогда

$$\bigcup \{\text{range}(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

не более чем счётно.

**Доказательство.** Определим  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup \{\text{range}(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  по правилу

$$g(n, m) := F_n(m) = F(n)(m)$$

Легко понять, что  $g$  сюръективна. □

**Следствие 25.1** (в ZFC). Пусть  $X$  не более чем счётно, и все его элементы не более чем счётны, тогда  $\bigcup X$  не более чем счётно.

**Доказательство.** WLOG  $X \neq \emptyset$  и  $\emptyset \notin X$ . Пусть  $g$  — сюръекция из  $\mathbb{N}$  на  $X$ . Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  положим

$$S_n := \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow g(n) \text{ — сюръекция}\}$$

Очевидно,  $S_n \neq \emptyset$  для всякого  $n \in \mathbb{N}$ . Обозначим  $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  через  $\mathcal{J}$ . Пусть  $\eta$  — какая-нибудь функция выбора для  $\mathcal{J}$ . Наконец, определим  $F : \mathbb{N} \rightarrow \bigcup \mathcal{J}$  по правилу

$$F(n) := \eta(S_n)$$

Ясно, что  $\bigcup \{\text{range}(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup \{g(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup X$ . □

**Теорема 26.** Пусть непустое  $X$  не более чем счётно. Тогда  $X^*$  счётно.

**Доказательство.** Зафиксируем сюръекцию  $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Очевидно,  $f \circ g \in X^*$  для всякого  $f \in \mathbb{N}^*$ . Определим  $G : \mathbb{N}^* \rightarrow X^*$  по правилу

$$G(f) := f \circ g$$

Легко убедиться, что  $G$  сюръективна. Поэтому достаточно показать, что  $\mathbb{N}^*$  не более чем счётно, а  $X^*$  бесконечно.

Пусть  $\nu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — биекция. Разумеется, можно построить функции  $\text{left} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  и  $\text{right} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такие, что для любых  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{left}(\nu(n, m)) = n \quad \text{и} \quad \text{right}(\nu(n, m)) = m$$

Используя рекурсию, можно определить последовательность последовательностей  $f$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} f_0(i) &= \emptyset \\ f_{n+1}(i) &= f_n(\text{left}(i)) \cup \{(n, \text{right}(i))\} \end{aligned}$$

Далее несложно доказать по индукции, что для каждого  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{range}(f_n) = \{g \mid g : n \rightarrow \mathbb{N}\}$$

В таком случае  $\bigcup \{\text{range}(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^*$ . Поэтому  $\mathbb{N}^*$  не более чем счётно.

Осталось показать, что  $X^*$  бесконечно. Для этого выберем какой-нибудь  $x_0 \in X$  и определим  $h : \mathbb{N} \rightarrow X^*$  по правилу

$$h(n) := n \times \{x_0\},$$

т.е.  $h(n)$  — последовательность длины  $n$  только из элемента  $x_0$ . Очевидно, что  $h$  инъективна, а потому  $X^*$  не может быть конечным. □

**Определение 25.** Для произвольного множества  $X$  обозначим

$$\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X \text{ и } Y \text{ конечно}\}$$

Говоря просто,  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$  — семейство конечных подмножеств  $X$ .

**Следствие 26.1.** Пусть  $X$  счётно. Тогда  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$  счётно.

**Доказательство.** Рассмотрим  $h : X^* \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ , действующую по правилу

$$h(f) := \text{range}(f)$$

Легко видеть, что  $h$  сюръективна, значит  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$  не более чем счётно.

С другой стороны пусть  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow X$  — инъекция. Тогда рассмотрим  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ , что

$$g(n) := \nu[n]$$

Несложно проверить, что  $|\nu[n]| = n$ , поэтому  $g$  инъективна, значит  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$  бесконечно, а значит счётно.  $\square$

**Следствие 26.2.** В следствие теоремы Кантора  $\mathcal{P}$  нельзя заменить на  $\mathcal{P}_{\text{fin}}$ .

**Теорема 27** (в ZFC). Пусть  $X$  бесконечно, а  $Y$  не более чем счётно. Тогда  $|X \cup Y| = |X|$ .

**Доказательство.** Заменяя  $Y$  на  $Y \setminus X$ , имеем, что WLOG  $X \cap Y = \emptyset$ . При этом у  $X$  есть счётное подмножество  $Z$ . Тогда понятно, что  $Z \cup Y$  счётно, а значит есть биекция  $f : Z \cup Y \rightarrow Z$ . Тогда определим  $g : X \cup Y \rightarrow X$  так, что

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in Z \cup Y \\ x & \text{если } x \in X \setminus Z \end{cases}$$

Очевидно, что  $g$  биективна.  $\square$

**Следствие 27.1.** Пусть  $X$  более чем счётно, а  $Y$  не более чем счётно. Тогда  $|X \setminus Y| = |X|$ .

**Доказательство.** Пусть  $U := X \cap Y$ , а  $V := X \setminus U$ . Ясно, что  $U$  не более чем счётно,  $V$  бесконечно. Значит,  $|X| = |V \cup U| = |V| = |X \setminus Y|$ .  $\square$

## 5 Упорядоченность

**Определение 26.** Частично упорядоченное множество (ЧУМ) — пара из множества и частичного порядка на нём.

Линейно упорядоченное множество (ЛУМ) — пара из множества и линейного порядка на нём.

Обозначение:  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ .

**Определение 27.** Пусть даны ЧУМ  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$  и непустое  $S \subseteq A$ . Тогда  $a \in A$  является

- *максимальным элементом для  $S$  в  $\mathfrak{A}$* , если  $a \in S \wedge \neg(\exists x \in S : a < x)$ ;
- *минимальным элементом для  $S$  в  $\mathfrak{A}$* , если  $a \in S \wedge \neg(\exists x \in S : x < a)$ ;
- *наибольшим элементом для  $S$  в  $\mathfrak{A}$* , если  $a \in S \wedge (\forall x \in S \quad x \leq a)$ ;
- *наименьшим элементом для  $S$  в  $\mathfrak{A}$* , если  $a \in S \wedge (\forall x \in S \quad a \leq x)$ .

Если  $S = A$ , то уточнение “для  $S$ ” опускают.  
Также  $a$  является

- *верхней гранью* для  $S$  в  $\mathfrak{A}$ , если  $\forall x \in S \quad x \leq a$ ;
- *нижней гранью* для  $S$  в  $\mathfrak{A}$ , если  $\forall x \in S \quad x \geq a$ ;
- *супремумом* гранью для  $S$  в  $\mathfrak{A}$ , если  $a$  — наименьшая верхняя грань для  $S$  в  $\mathfrak{A}$ ;
- *инфимумом* гранью для  $S$  в  $\mathfrak{A}$ , если  $a$  — наибольшая нижняя грань для  $S$  в  $\mathfrak{A}$ .

**Утверждение 28.** В ЧУМ  $\mathfrak{A}$

- не более одного наибольшего в  $\mathfrak{A}$  элемента;
- всякий наибольший в  $\mathfrak{A}$  максимален в  $\mathfrak{A}$ ;
- любые два максимальных в  $\mathfrak{A}$  несравнимы.

Аналогично для наименьших и минимальных элементов.

**Утверждение 29.** В ЛУМ все максимальные наибольшие и наоборот. Аналогично для минимальных и наименьших.

**Определение 28.** Гомоморфизм из  $\langle A, \leq_A \rangle$  в  $\langle B, \leq_B \rangle$  — отображение  $f : A \rightarrow B$ , что

$$a_1 \leq_A a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq_B f(a_2)$$

В таком случае ещё говорят, что  $f$  сохраняет порядок.

Если  $f$  инъективно, а последнее условие усиливается до равносильности (а не остаётся следствием), то  $f$  называется *вложением* из  $\langle A, \leq_A \rangle$  в  $\langle B, \leq_B \rangle$ .

**Утверждение 30.** Любой инъективный гомоморфизм из ЛУМ в ЧУМ является вложением.

**Определение 29.** Изоморфизм из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$  — сюръективное вложение из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$ . Обозначение:  $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ .

**Утверждение 31.** “Изоморфность” — “отношение эквивалентности” на ЧУМах. Т.е. для любых  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$  верно:

1.  $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}$ ;
2.  $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$ ;
3.  $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}$ .

**Определение 30.** Изоморфизм из  $\mathfrak{A}$  на себя — *автоморфизм*.

С ЧУМами можно делать базовые преобразования:

1. Пусть даны ЧУМ  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$  и  $S \subseteq A$ . Возьмём

$$\leq_S := \leq \cap S \times S$$

Тогда  $\langle S, \leq_S \rangle$  — ЧУМ. Оно называется *индуцированным в  $\mathfrak{A}$  по  $S$* . При этом из ЛУМ получится ЛУМ.

2. Пусть даны ЧУМ  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq_A \rangle$  и  $\mathfrak{B} = \langle B, \leq_B \rangle$ , причём  $A$  и  $B$  дизъюнкты. Возьмём

$$\leq := \leq_A \cup A \times B \cup \leq_B$$

Тогда  $\langle A \cup B, \leq \rangle$  — ЧУМ, которое обозначается  $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ . При этом из двух ЛУМ всегда получится ЛУМ.

3. Пусть даны ЧУМ  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq_A \rangle$  и  $\mathfrak{B} = \langle B, \leq_B \rangle$ . Определим  $\leq$  на  $A \times B$  по правилу

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 \leq_A a_2 \wedge b_1 \leq_B b_2$$

Тогда  $\langle A \times B, \leq \rangle$  — ЧУМ, где  $\leq$  традиционно называют *покоординатным порядком*. Понятно, что  $\leq$  мало когда бывает линейным.

4. Модифицируем предыдущую конструкцию, сделав одну из координат главной. Например, первую:

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 < a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \leq b_2)$$

Тогда  $\langle A \times B, \leq \rangle$  — ЧУМ, которое обозначается  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ . В таком случае из двух ЛУМ получается ЛУМ.

## 5.1 Трансфинитная индукция и фундированность

**Определение 31.** Для ЧУМ  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$  верен *принцип трансфинитной индукции*, если для всякого  $X \subseteq A$ ,

$$\forall x \in A ((\forall y < x) y \in X \rightarrow x \in X) \rightarrow X = A$$

**Определение 32.** Для ЧУМ  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$  верен *принцип минимального элемента*, если для всякого  $X \subseteq A$ ,

$$X \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in X ((\forall y \in X) y \not< x)$$

Такие ЧУМ называются *фундированными*.

**Теорема 32.** Для ЧУМ верен принцип трансфинитной индукции тогда и только тогда, когда оно фундировано.

**Доказательство.** Пусть  $X \subseteq A$ . Обозначим  $A \setminus X$  через  $\overline{X}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \forall x \in A ((\forall y < x) y \in X \rightarrow x \in X) \rightarrow X = A &\Leftrightarrow \\ X \neq A \rightarrow \neg \forall x \in A ((\forall y < x) y \in X \rightarrow x \in X) &\Leftrightarrow \\ X \neq A \rightarrow \exists x \in A \neg ((\forall y < x) y \in X \rightarrow x \in X) &\Leftrightarrow \\ X \neq A \rightarrow \exists x \in A ((\forall y < x) y \in X \wedge x \notin X) &\Leftrightarrow \\ X \neq A \rightarrow \exists x \in A ((\forall y \notin X) y \not< x \wedge x \notin X) &\Leftrightarrow \\ \overline{X} \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in \overline{X} ((\forall y \in \overline{X}) y \not< x) &\end{aligned}$$

□

**Утверждение 33.**

1. Пусть даны фундированные ЧУМ  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ , что  $A \cap B = \emptyset$ . Тогда  $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$  будет фундированным.
2. Пусть даны фундированные ЧУМ  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ . Тогда  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  будет фундированным.

**Определение 33.** *Вполне упорядоченное множество (ВУМ) — фундированное ЛУМ. Порядки ВУМ называются полными порядками.*

**Определение 34.** Пусть дано ВУМ  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ . *Начальный сегмент* — множество  $S \subseteq A$ , если для  $\forall a_1, a_2 \in A$

$$(a_1 \leq a_2 \wedge a_2 \in S) \Rightarrow a_1 \in S$$

**Определение 35.** Пусть дано ВУМ  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ . Множество

$$[0, a)_{\mathfrak{A}} := \{x \in A \mid x < a\}$$

является начальным сегментом  $\mathfrak{A}$ . Когда ясно, о каком  $\mathfrak{A}$  идёт речь, нижний индекс  $_{\mathfrak{A}}$  обычно опускается.

**Утверждение 34.** *Пусть  $\mathfrak{A}$  — ВУМ, а  $S$  — начальный сегмент  $\mathfrak{A}$ , отличный от  $A$ . Тогда существует единственный  $a \in A$ , что  $S = [0, a)$ .*

**Определение 36.**  $\text{IS}_{\mathfrak{A}}$  — множество всех начальных сегментов  $\mathfrak{A}$ , отличных от  $A$ , а

$$\subseteq_{\text{IS}_{\mathfrak{A}}} := \{(U, V) \in \text{IS}_{\mathfrak{A}} \times \text{IS}_{\mathfrak{A}} \mid U \subseteq V\}$$

**Утверждение 35.** *Для любого ВУМ  $\mathfrak{A}$  верно, что  $\mathfrak{A} \simeq \langle \text{IS}_{\mathfrak{A}}, \subseteq_{\text{IS}_{\mathfrak{A}}} \rangle$ .*

**Доказательство.** Несложно видеть, что

$$f : A \rightarrow \text{IS}_{\mathfrak{A}}, a \mapsto [0, a)$$

есть изоморфизм из  $\mathfrak{A}$  в  $\langle \text{IS}_{\mathfrak{A}}, \subseteq_{\text{IS}_{\mathfrak{A}}} \rangle$ . □

**Утверждение 36.** *Пусть  $\mathfrak{A}$  — ВУМ, а  $f$  — вложение из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{A}$ . Тогда  $f(a) \geq a$  для всех  $a \in A$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим

$$X := \{a \in A \mid f(a) < a\}$$

Предположим, что  $X$  непусто. Пусть  $a'$  — наименьший элемент для  $X$  в  $\mathfrak{A}$ . Тогда  $f(a') < a'$ , поэтому  $f(f(a')) < f(a')$ , что значит  $f(a') \in X$ . В таком случае  $a' \leq f(a')$  — противоречие. □

**Следствие 36.1.** *Для каждого ВУМ  $\mathfrak{A}$  единственным автоморфизмом  $\mathfrak{A}$  является  $\text{id}_A$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f$  — автоморфизм  $\mathfrak{A}$ . Очевидно, что  $f^{-1}$  также будет автоморфизмом  $\mathfrak{A}$ . Тогда для любого  $a \in A$  имеем, что  $f(a) \geq a$  и  $f^{-1}(a) \geq a$ , а значит  $a \geq f(a) \geq a$ , т.е.  $f(a) = a$ . Таким образом  $f = \text{id}_A$ . □

**Следствие 36.2.** *Для любых ВУМ  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  имеется не более одного изоморфизма из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f$  и  $g$  — изоморфизмы из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$ . Тогда несложно понять, что  $f \circ g^{-1}$  есть автоморфизм, а значит  $f \circ g^{-1} = \text{id}_A$ . Следовательно  $f = f \circ g^{-1} \circ g = \text{id}_A \circ g = g$ . □

**Лемма 37.** *Никакой собственный начальный сегмент ВУМ  $\mathfrak{A}$  не изоморфен самому  $\mathfrak{A}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f$  — изоморфизм из  $\mathfrak{A}$  на некоторый собственный начальный сегмент  $\mathfrak{A}$ . Тогда  $\text{range}(f) = [0, a)$  для некоторого  $a \in A$ . Поэтому  $f(a) < a$  — противоречие. □

**Теорема 38** (о сравнении ВУМ). *Для любых ВУМ  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  имеет место ровно один из трёх случаев:*

1.  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  изоморфны;
2.  $\mathfrak{A}$  изоморфно собственному начальному сегменту  $\mathfrak{B}$ ;
3.  $\mathfrak{B}$  изоморфно собственному начальному сегменту  $\mathfrak{A}$ .

При этом в пунктах (2) и (3) соответствующие собственные начальные сегменты определяются однозначно.

**Доказательство.** Единственность сегментов в (2) и (3) и взаимная исключаемость пунктов (1), (2) и (3) следуют из предыдущей леммы. Поэтому осталось показать, что один из трёх случаев точно будет иметь место.

Рассмотрим

$$\xi := \{(a, b) \in A \times B \mid [0, a)_{\mathfrak{A}} \simeq [0, b)_{\mathfrak{B}}\}$$

По предыдущей лемме  $\xi$  и  $\xi^{-1}$  являются функциональными.

Также несложно видеть, что если  $f$  — изоморфизм из  $[0, a)_{\mathfrak{A}}$  на  $[0, b)_{\mathfrak{B}}$ , а  $a' <_A a$  и  $b' <_B b$ , то

- $f \upharpoonright_{[0, a')_{\mathfrak{A}}}$  является изоморфизмом из  $[0, a')_{\mathfrak{A}}$  на  $[0, f(a'))_{\mathfrak{B}}$ ;
- $f^{-1} \upharpoonright_{[0, b')_{\mathfrak{B}}}$  является изоморфизмом из  $[0, b')_{\mathfrak{B}}$  на  $[0, f^{-1}(b'))_{\mathfrak{A}}$ .

Следовательно, если  $a \in \text{dom}(\xi)$ , то  $[0, a)_{\mathfrak{A}} \subseteq \text{dom}(\xi)$ ; если  $b \in \text{range}(\xi)$ , то  $[0, b)_{\mathfrak{B}} \subseteq \text{range}(\xi)$ . Поэтому  $\xi$  — биекция между начальными сегментами  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ . Также следует и то, что  $a_1 <_A a_2 \Leftrightarrow f(a_1) <_B f(a_2)$ , что значит, что  $\xi$  — изоморфизм между начальными сегментами  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ .

Если  $\text{dom}(\xi) \neq A$ , а  $\text{range}(\xi) \neq B$ , то существуют  $a \in A$  и  $b \in B$ , что  $\text{dom}(\xi) = [0, a)_{\mathfrak{A}}$ , а  $\text{range}(\xi) = [0, b)_{\mathfrak{B}}$ . Это значит, что  $(a, b) \in \xi$  — противоречие. Значит  $\text{dom}(\xi) = A$  или  $\text{range}(\xi) = B$ , откуда следует желаемое.  $\square$

## 6 Ординалы, кардиналы и важные теоремы ZFC

### 6.1 Ординалы

**Определение 37.**  $X$  называется *транзитивным*, если  $\bigcup X \subseteq X$  (или, что равносильно,  $X \subseteq \mathcal{P}(X)$ ).

**Определение 38.**

$$\in_X := \{(u, v) \in X \times X \mid u \in v\}$$

**Определение 39.** *Ординал* или *ординальное число* — трансфинитное множество  $X$ , что  $\in_X$  — строгий полный порядок на  $X$ . Обозначение:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Поскольку  $\mathbb{N}$  (и все его элементы) являются ординалами, то когда речь идёт об ординалах, то пишут не  $\mathbb{N}$ , а  $\omega$ .

Также вместо  $\alpha \in \beta$  можно писать  $\alpha < \beta$ .

*Замечание 8.* Важно заметить, что для любого ординала  $\alpha$  ЛУМ  $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$  является ВУМ. Так как иначе есть некоторое  $X \subseteq \alpha$ , что у него нет минимального элемента, значит для любого  $x \in X$  найдётся  $x' \in X$ , что  $x' < x$ , значит есть бесконечная убывающая последовательность (элементов  $X$ ), но это противоречит аксиоме регулярности.

**Утверждение 39.** Пусть  $\alpha$  — ординал, а  $X \in \alpha$ . Тогда  $X$  — ординал.

**Доказательство.**



1. Проверим, что  $X$  транзитивно. Пусть  $E \in X$ , тогда нужно показать, что  $E \subseteq X$ . Пусть  $u \in E$ . Тогда  $E \in \alpha$ , значит  $u \in \alpha$ . При этом  $u \in_\alpha E \in_\alpha X$ , значит  $u \in_\alpha X$ . Это и значит, что  $E \subseteq X$ .
2. Заметим, что  $X \subseteq \alpha$ . Поэтому  $\in_X = \in_\alpha \cap (X \times X)$ , поэтому  $\in_X$  — строгий полный порядок.

□

**Утверждение 40.** Пусть  $\alpha$  — ординал, а  $\beta \in \alpha$ . Тогда  $\beta = [0, \beta)$ .

**Доказательство.** Очевидно следует из транзитивности  $\in_\alpha$ .

□

**Утверждение 41.** Для любых ординалов  $\alpha$  и  $\beta$

$$\alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta$$

**Доказательство.**

- Пусть  $\alpha \in \beta$ . Тогда  $\alpha \subseteq \beta$ . Если  $\alpha = \beta$ , то  $\beta \in \beta$ , значит  $\alpha \in_\beta \beta$ , значит  $\beta \in_\beta \beta$  — противоречие со строгостью  $\in_\beta$ . Значит  $\alpha \neq \beta$ , значит  $\alpha \subsetneq \beta$ .
- Пусть  $\alpha \subsetneq \beta$ . Тогда  $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$ , а значит мы можем определить

$$y := \text{“наименьший элемент } \beta \setminus \alpha \text{ в } \langle \beta, \in_\beta \rangle\text{”}$$

Нетрудно убедиться, что  $\alpha$  совпадает с  $\{x \in \beta \mid x < y\}$ :

- если  $x \in \alpha$ , то  $y \not\leq x$  (так как иначе  $y \leq x \in \alpha$ , а значит  $y \in \alpha$ ), а потому  $x < y$ ;
- если  $x \in \beta$  и  $x < y$ , то  $x \notin \beta \setminus \alpha$ , т.е.  $x \in \alpha$ .

Таким образом  $\alpha = [0, y) = y$ .

□

**Теорема 42.** Для любых ординалов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ :

1.  $\alpha \not\leq \alpha$ ;
2.  $\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ ;
3. либо  $\alpha < \beta$ , либо  $\alpha = \beta$ , либо  $\alpha > \beta$ ;

Более того для любого непустого множества ординалов  $X$ :

4.  $\bigcap X \in X$ , причём  $\bigcap$  — наименьший элемент  $X$  в  $\langle X, \in_X \rangle$ .

**Доказательство.**

1. Иначе  $\alpha \in \alpha$ , значит  $\alpha \in_\alpha \alpha$  — противоречие.
2.  $\beta \subseteq \gamma$ , следовательно  $\alpha \in \gamma$ .
4. Легко видеть, что  $\bigcap X$  — ординал. При этом для любого  $\alpha \in X$  верно, что  $\bigcap X \subseteq \alpha$ , а значит  $\bigcap X \leq \alpha$ . Заметим, что  $\bigcap X \not\leq \bigcap X$ , значит есть  $\alpha \in X$ , что  $\bigcap X \not\leq \alpha$ , т.е.  $\bigcap X = \alpha$ , следовательно  $\bigcap X \in X$ .
3. В силу предыдущего пункта, в  $\{\alpha, \beta\}$  есть наименьший элемент. Стало быть  $\alpha$  и  $\beta$  сравнимы по  $\leq$ .

□

**Следствие 42.1.** Пусть  $X$  — транзитивное множество ординалов. Тогда  $X$  — ординал.

**Доказательство.** Действительно,  $\in_X$  — полный порядок на  $X$  по только доказанной теореме, значит  $X$  — ординал. □

**Теорема 43.** Пусть  $X$  — множество ординалов. Тогда  $\bigcup X$  — ординал, причём  $\bigcup X$  является “супремумом  $X$ ” в классе всех ординалов относительно  $\in$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $\bigcup X$  — множество ординалов и что оно транзитивно. Поэтому  $\bigcup X$  — ординал.

Разумеется,  $\bigcup X$  является “супремумом  $X$ ” в классе всех ординалов относительно  $\subsetneq$ , что на ординалах совпадает с  $\in$ . □

**Определение 40.** Пусть  $\alpha$  — ординал. Тогда

$$\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$$

является ординалом.

*Замечание 9.* Не сложно понять, что  $\alpha \subsetneq \alpha + 1$  и нет такого  $X$ , что  $\alpha \subsetneq X \subsetneq \alpha + 1$ .

**Определение 41.** Ненулевой ординал  $\alpha$  называется *непредельным*, если есть ординал  $\beta$ , что  $\alpha = \beta + 1$ , и *предельным* иначе.

**Утверждение 44.**

1.  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + 1 = \beta + 1$ . (Что значит, что у каждого непредельного ординала  $\alpha$  есть единственный “предшественник”  $\alpha - 1$ .)

2.

$$\bigcup \alpha = \begin{cases} \alpha & \text{если } \alpha \text{ предельный} \\ \alpha - 1 & \text{если } \alpha \text{ непредельный} \end{cases}$$

**Теорема 45** (о связи ординалов и ВУМ). Пусть  $\mathfrak{A}$  — строгий ВУМ. Тогда существует единственный ординал  $\alpha$ , что  $\mathfrak{A} \simeq \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ .

**Доказательство.** Единственность очевидна: для любых ординалов  $\alpha$  и  $\beta$

$$\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \simeq \langle \beta, \in_\beta \rangle \iff \alpha = \beta$$

Осталось показать существование  $\alpha$ .

Рассмотрим

$$S := \{a \in A \mid \text{существует ординал } \alpha_a, \text{ что } [0, a)_{\mathfrak{A}} \simeq \langle \alpha_a, \in_{\alpha_a} \rangle\}$$

Само собой, для каждого  $a \in S$  ординал  $\alpha_a$  строго единственен. Поэтому есть

$$X := \{\alpha_a \mid a \in S\}$$

Поскольку изоморфизмы переводят начальные сегменты в начальные, то поэтому  $X$  транзитивно, да и  $\in_X$  является полным строгим порядком. Значит  $X$  — ординал. Рассматривая

$$f : S \rightarrow X, a \mapsto \alpha_a$$

имеем, что  $f$  — изоморфизм. Тогда если  $A \setminus S \neq \emptyset$ , то  $S = [0, a)$ , где  $a$  — наименьший элемент  $A \setminus S$ . Но тогда  $[0, a)_{\mathfrak{A}} \simeq X$ , а значит  $a \in S$ . Значит  $S = A$ . □

**Определение 42.** Если  $\mathfrak{A}$  — ВУМ, то  $\text{ord}(\mathfrak{A})$  — это такой ординал  $\alpha$ , что  $\mathfrak{A} \simeq \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ .

**Определение 43.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — ординалы. Тогда определим операции

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &:= \text{ord}(\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \oplus \langle \beta, \in_\beta \rangle) \\ \alpha \cdot \beta &:= \text{ord}(\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \otimes \langle \beta, \in_\beta \rangle)\end{aligned}$$

*Замечание 10.* Важно заметить, что класс  $\text{Ord}$  всех ординалов не является множеством. Действительно, если  $\text{Ord}$  — множество, то  $\text{Ord}$  — само ординал, а значит  $\text{Ord} \in \text{Ord}$ , чего не может быть.

**Определение 44.** Пусть  $X$  — любое множество, а  $\alpha$  — ординал. Тогда определим

$$X^{<\alpha} := \{f \mid (\exists \beta < \alpha) f : \beta \rightarrow X\} = \bigcup \{X^\beta \mid \beta < \alpha\}$$

**Определение 45.** Если  $f : \beta \rightarrow X$ , где  $\beta$  — ординал, то  $f$  называют  $\beta$ -последовательностью

**Теорема 46** (о трансфинитной рекурсии). *Фиксируем некоторый ординал  $\alpha$ . Пусть  $h : X^{<\alpha} \rightarrow X$ . Тогда существует единственная  $f : \alpha \rightarrow X$ , что для всякого  $\beta \in \alpha$*

$$f(\beta) = h(f \upharpoonright_\beta)$$

**Доказательство.** Пусть  $\gamma \in \alpha$ . Будем называть  $t : \gamma + 1 \rightarrow X$  *чудесной*, если для любого  $\beta \in \gamma + 1$

$$t(\beta) = h(t \upharpoonright_\beta)$$

Рассмотрим

$$S := \{\gamma \in \alpha \mid \text{существует единственная чудесная } t : \gamma + 1 \rightarrow X\}$$

Тогда для каждого  $\gamma \in S$  обозначим соответствующую (единственную) чудесную функцию из  $\gamma + 1$  в  $X$  как  $f_\gamma$ .

Заметим, что если  $t : \gamma + 1 \rightarrow X$  чудесна, то для каждого  $\beta < \gamma$  функция  $t \cap ((\beta + 1) \times X)$  тоже чудесна. Таким образом, если  $\gamma, \beta \in S$ , то  $f_\beta = f_\gamma \cap ((\beta + 1) \times X)$  (и т.е.  $f_\beta \subseteq f_\gamma$ ).

Заметим также, что если для некоторого  $\gamma \in \alpha$  все  $\beta < \gamma$  лежат в  $S$ , то и  $\gamma$  лежит в  $S$ . Действительно, можно рассмотреть

$$t_0 := \bigcup \{f_\beta \mid \beta < \gamma\}$$

Несложно видеть, что  $t_0 : \gamma \rightarrow X$ . В таком случае рассмотрим

$$t := t_0 \cup \{(\gamma, h(t_0))\}$$

Несложно видеть, что ограничение  $t$  на  $\beta + 1$  для всех  $\beta < \gamma$  есть  $f_\beta$ . Поэтому для всех  $\beta \in \gamma + 1$  либо  $\beta = \gamma$ , и тогда

$$t(\beta) = t(\gamma) = h(t_0) = h(t \upharpoonright_\beta),$$

либо  $\beta < \gamma$ , и тогда

$$t(\beta) = t_0(\beta) = f_\beta(\beta) = h(f_\beta \upharpoonright_\beta) = h(t_0 \upharpoonright_\beta) = h(t \upharpoonright_\beta)$$

Это значит, что  $t$  чудесна. При этом если бы была отличная от  $t$  чудесная функция  $t' : \gamma + 1 \rightarrow X$ , то у неё должны быть такие же сужения на  $\beta + 1$  для каждого  $\beta < \gamma$ , что и у  $t$ . Значит она может отличаться только в  $\gamma$ ; но это тоже невозможно, так как

$$t(\gamma) = h(t \upharpoonright_\gamma) = h(t' \upharpoonright_\gamma) = t'(\gamma)$$

Поэтому  $t$  является единственной чудесной функцией для  $\gamma + 1$ , что и значит, что  $\gamma \in S$ .

Тогда по трансфинитной индукции имеем, что  $S = \alpha$ .

Рассмотрим

$$f := \bigcup \{f_\gamma \mid \gamma \in \alpha\}$$

Несложно видеть, что  $f : \alpha \rightarrow X$  и  $f$  тоже окажется чудесной (что и требуется). Также если будет вдруг существовать ещё одна чудесная  $f' : \alpha \rightarrow X$ , то у неё будут такие же сужения на  $\beta + 1$  для каждого  $\beta \in \alpha$ , что и у  $f$ , значит  $f'$  не будет ничем отличаться от  $f$ .  $\square$

*Замечание.* Теорему о трансфинитной рекурсии можно обобщить до параметризованной, используя уже готовую рекурсию.

**Теорема 47** (о трансфинитной рекурсии, частичной). *Фиксируем некоторый ординал  $\alpha$ . Пусть  $h : \subseteq X^{<\alpha} \rightarrow X$ . Тогда существует единственная  $f : \subseteq \alpha \rightarrow X$ , что*

1. для всякого  $\beta \in \text{dom}(f)$

$$f(\beta) = h(f \upharpoonright_\beta);$$

2. либо  $\text{dom}(f) = \alpha$ , либо  $\text{dom}(f) = \gamma$  для некоторого  $\gamma < \alpha$ , причём  $f \notin \text{dom}(h)$ .

**Доказательство.** Как обычно, рассмотрим  $y \notin X$  и положим  $X' := X \cup \{y\}$ . Затем расширим  $h$  до  $h : (X')^{<\alpha} \rightarrow X'$  следующим образом:

$$h'(g') := \begin{cases} h(g') & \text{если } g' \in \text{dom}(h) \\ y & \text{иначе} \end{cases}$$

В силу теоремы о трансфинитной рекурсии, найдётся единственная  $f' : \alpha \rightarrow X$ , что для любого  $\beta \in \alpha$

$$f'(\beta) = h'(f' \upharpoonright_\beta)$$

Возьмём

$$f := f' \cap (\alpha \times X)$$

Нетрудно убедиться, что  $f$  является искомой.  $\square$

**Теорема 48** (о трансфинитной “классовой рекурсии”). *Фиксируем некоторый ординал  $\alpha$ . Пусть  $\Phi(x, y)$  — тотальное функциональное условие. Тогда существует единственная функция  $f$  с  $\text{dom}(f) = \alpha$ , что для всякого  $\beta \in \alpha$*

$$f(\beta) = \llbracket \Phi \rrbracket (f \upharpoonright_\beta)$$

**Доказательство.** Несложная модификация доказательства теоремы о трансфинитной рекурсии.  $\square$

**Теорема 49** (Цермело о полном упорядочении; в ZFC). *Для любого  $A$  существует  $\leq$ , что  $\langle A, \leq \rangle$  — ВУМ.*

**Доказательство.** Пусть  $\eta$  — функция выбора на  $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ . Тогда для каждого ординала  $\alpha$  существует единственная  $f_\alpha : \subseteq \alpha \rightarrow A$ , что

1. для любого  $\beta \in \text{dom}(f_\alpha)$

$$f_\alpha(\beta) = \eta(A \setminus \text{range}(f_\alpha \upharpoonright_\beta))$$

2. либо  $\text{dom}(f_\alpha) = \alpha$ , либо  $\text{dom}(f_\alpha) = \gamma \in \alpha$ , причём  $\text{range}(f_\alpha) = A$ .

Несложно видеть, что  $f_\alpha$  — биекция между  $\text{dom}(f_\alpha)$  и  $\text{range}(f_\alpha)$ , а значит с помощью неё можно построить на  $\text{range}(f_\alpha)$  ВУМ, изоморфный  $\text{dom}(f_\alpha)$ . Поэтому если для некоторого ординала  $\alpha$  окажется, что  $\text{dom}(f_\alpha) \neq \alpha$ , то тогда  $\text{range}(\alpha) = A$ , а значит мы сможем построить на  $A$  ВУМ. Осталось показать, что такое  $\alpha$  найдётся.

Предположим противное: для каждого ординала  $\alpha$  верно, что  $\text{dom}(f_\alpha) = \alpha$ . Рассмотрим

$$\Phi(x, y) := “y — ординал” \wedge x = f_{y+1}(y)$$

Ясно, что если  $\alpha < \beta$ , то  $f_\alpha \subseteq f_\beta$ . Поэтому для любых  $\alpha$  и  $\beta$

$$f_{\alpha+1}(\alpha) = f_{\beta+1}(\beta) \implies \alpha = \beta$$

Это значит, что  $\Phi$  функционально. Поэтому по аксиоме подстановки можно выделить

$$X := \{y \mid (\exists x \in A)\Phi(x, y)\}$$

Однако  $X$  должно совпадать с  $\text{Ord}$  — противоречие. □

## 6.2 Кардиналы

**Теорема 50** (о сравнимости по мощности; в ZFC). *Для любых  $X$  и  $Y$  верно, что  $X \preceq Y$  или  $X \succ Y$ .*

**Доказательство.** Прямое следствие из теоремы Цермело и теоремы о сравнении ВУМ. □

**Определение 46.** *Кардинал* или *кардинальное число* — ординал, неравномо́щный никакому меньшему ординалу. Обозначение:  $\kappa, \mu, \lambda$ .

**Утверждение 51.** *Для любых кардиналов  $\kappa$  и  $\mu$*

$$\kappa \sim \mu \iff \kappa = \mu$$

**Утверждение 52.** *Для любых кардиналов  $\kappa$  и  $\mu$*

$$\kappa \preceq \mu \iff \kappa \leq \mu$$

**Доказательство.**

1. Если  $\kappa \leq \mu$ , то очевидно, что  $\kappa \preceq \mu$ .
2. Пусть  $\kappa \preceq \mu$ . Предположим противное:  $\kappa \not\leq \mu$ . Тогда  $\kappa > \mu$ , значит  $\kappa \succ \mu$ . Ввиду теоремы Кантора-Шрёдера-Бернштейна, мы получаем, что  $\kappa \sim \mu$ , а значит  $\kappa = \mu$  — противоречие. □

**Теорема 53** (в ZFC). *Для любого множества есть единственный кардинал ему равномо́щный.*

**Доказательство.** По теореме Цермело есть ординал  $\alpha$ , равномо́щный  $X$ . Тогда можно определить

$$\kappa := \bigcap \{\beta \in \alpha + 1 \mid \beta \sim X\}$$

По уже доказанным утверждениям  $\kappa \in \{\beta \in \alpha + 1 \mid \beta \sim X\}$ , поэтому  $\kappa \sim X$ . При этом  $\kappa$  является кардиналом, так как иначе есть  $\gamma < \kappa$ , что  $\gamma \sim \kappa$ , но тогда  $\gamma \in \alpha + 1$  и  $\gamma \sim X$ , а тогда  $\kappa \in \gamma$  — противоречие. Поэтому у  $X$  есть равномо́щный ему кардинал. А его единственность очевидна. □

**Определение 47.** Кардинал, равномогущий множеству обозначается как  $\text{card}(X)$  или  $|X|$ .

**Утверждение 54.** Для любых  $X$  и  $Y$

1.  $X \sim Y$  тогда и только тогда, когда  $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$ ;

2.  $X \preccurlyeq Y$  тогда и только тогда, когда  $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ .

**Определение 48.** Для любых кардиналов  $\kappa$  и  $\mu$  определим

$$\kappa + \mu := \text{card}(\kappa \times \{0\} \cup \mu \times \{1\}) \quad (1)$$

$$\kappa \cdot \mu := \text{card}(\kappa \times \mu) \quad (2)$$

*Замечание.* Важно заметить, что  $+$  и  $\cdot$  отличаются между ординалами и кардиналами. Например, ординалы

$$\omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + \omega, \quad \omega \cdot \omega$$

являются попарно различными, а при этом кардиналы

$$\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0$$

совпадают.

**Утверждение 55.** Для любого ординала существует больший кардинал.

**Доказательство.** Пусть  $\kappa := \text{card}(\mathcal{P}(\alpha))$ . Если  $\alpha \not\leq \kappa$ , то  $\kappa \leq \alpha$ , а значит  $\kappa \subseteq \alpha$ ,  $\kappa \preccurlyeq \alpha$ , т.е.  $\mathcal{P}(\alpha) \preccurlyeq \alpha$  — противоречие с теоремой Кантора. А поэтому  $\alpha < \kappa$ .  $\square$

*Замечание 11.* Как и  $\text{Ord}$ , класс всех кардиналов  $\text{Card}$  также не является множеством. Действительно, если  $\text{Card}$  — множество, то  $\bigcup \text{Card} = \text{Ord}$  тоже является множеством, чего быть не может.

**Определение 49.** Когда речь идёт о кардиналах, будем говорить, что для всякого кардинала  $\kappa$

$$2^\kappa := \text{card}(\mathcal{P}(\kappa))$$

**Определение 50.** Для каждого кардинала  $\kappa$  обозначим

$$\kappa^+ := \text{“наименьший кардинал, больший } \kappa\text{”}$$

$\aleph_0^+$  обозначают  $\aleph_1$ ,  $\aleph_1^+ = \aleph_2$ , и т.д. На само деле, можно было бы определить  $\aleph_\alpha$  для произвольного ординала  $\alpha$ .

**Утверждение 56** (Континуум-гипотеза, CH).

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

**Теорема 57** (Гёдель, 1940). Можно доказать, что  $\neg \text{CH}$  нельзя доказать в ZFC.

**Теорема 58** (Коэн, 1963). Можно доказать, что CH нельзя доказать в ZFC.

### 6.3 Важные теоремы в ZFC

**Определение 51.** Пусть  $\mathfrak{A}$  — ЧУМ. Цепь в  $\mathfrak{A}$  — непустое  $S \subseteq A$ , индуцирующее ЛУМ.

**Теорема 59** (лемма Цорна; в ZFC). Пусть  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq_A \rangle$  — ЧУМ с непустым носителем, в которой у любой цепи имеется верхняя грань. Тогда в  $\mathfrak{A}$  есть максимальный элемент.

**Доказательство.** Пусть  $\kappa$  — какой-нибудь кардинал, больший  $|A|$ , например,  $2^{|A|}$ . Пусть также  $\eta$  — функция выбора для  $\mathcal{P}(A) \setminus \emptyset$ . Используя трансфинитную рекурсию, определим  $f : \subseteq \kappa \rightarrow A$  по правилу

$$f(\beta) = \eta(\{a' \in A \mid a' >_A a \quad \forall a \in \text{range}(f \upharpoonright_\beta)\})$$

Легко видеть, что для любых  $\beta_1, \beta_2 \in \text{dom}(f)$

$$\beta_1 < \beta_2 \implies f(\beta_1) <_A f(\beta_2)$$

Из этого мы получаем, что

1.  $f$  инъективна. Поэтому  $\text{dom}(f) \neq \kappa$ , а значит  $\text{dom}(f) = \alpha < \kappa$ . Причём в  $A$  нет элементов, строго больших всех элементов из  $\text{range}(f)$ .
2.  $\text{range}(f)$  является цепью в  $\mathfrak{A}$ , значит у него есть верхняя грань  $s$ .

Отсюда выходит, что  $s \in \text{range}(f)$ , а значит нет элементов как внутри цепи  $\text{range}(f)$ , так и вне неё больших  $s$ . Значит  $s$  — максимальный элемент в  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

**Следствие 59.1** (в ZFC). Пусть  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq_A \rangle$  — ЧУМ, в котором у любой цепи имеется верхняя грань. Тогда для каждого  $a \in A$  в  $\mathfrak{A}$  есть максимальный элемент  $a' \geq_A a$ .

**Доказательство.** Случай  $A = \emptyset$  тривиален, поэтому будем считать, что  $A \neq \emptyset$ . Зафиксируем произвольное  $a \in A$ . Возьмём

$$B := \{b \in A \mid a \leq_A b\} \quad \text{и} \quad \leq_B := \leq_A \cap B \times B$$

Очевидно, что  $\mathfrak{B} = \langle B, \leq_B \rangle$  будет ЧУМ, которое удовлетворяет условию леммы Цорна. Поэтому в  $\mathfrak{B}$  есть максимальный элемент  $a'$ . Тогда несложно понять, что  $a'$  будет максимальным и в  $\mathfrak{A}$ , а также  $a' \geq_A a$ .  $\square$

**Теорема 60** (в ZFC). Пусть  $X$  бесконечно. Тогда  $|X \times X| = |X|$ .

**Доказательство.** Рассмотрим

$$M := \{f \mid f : U \rightarrow U \times U \text{ — биекция, где } U \subseteq X \text{ и } U \text{ бесконечно}\}$$

Поскольку  $X$  бесконечно, у него есть счётное подмножество, равномоощное собственному декартовому квадрату, то  $M$  непусто. Определим

$$\leq := \{(f_1, f_2) \in M \times M \mid f_1 \subseteq f_2\}$$

Далее будем рассматривать ЧУМ  $\mathfrak{M} = \langle M, \leq \rangle$ .

Покажем, что условие леммы Цорна для  $\mathfrak{M}$  выполнено. Пусть  $S$  — произвольная цепь в  $\mathfrak{M}$ . Возьмём

$$f_S := \bigcup_{f \in S} f$$

Понятно, что  $f_S$  — биекция из  $\text{dom}(f_S)$  в  $\text{range}(f_S)$ , и при этом

$$\text{dom}(f_S) = \bigcup_{f \in S} \text{dom}(f) \qquad \text{range}(f_S) = \bigcup_{f \in S} \text{range}(f)$$

Очевидно, что  $\text{range}(f_S) \subseteq \text{dom}(f_S) \times \text{dom}(f_S)$ . Также заметим, что для любых  $a_1, a_2 \in \text{dom}(f_S)$  существуют  $f_1, f_2 \in S$ , что  $a_1 \in \text{dom}(f_1)$  и  $a_2 \in \text{dom}(f_2)$ , а значит  $f = f_1 \cup f_2 \in S$  содержит в области определения  $a_1$  и  $a_2$ , что значит, что  $(a_1, a_2) \in \text{range}(f) \subseteq \text{range}(f_S)$ . Это значит, что  $\text{range}(f_S) = \text{dom}(f_S) \times \text{dom}(f_S)$ , а значит  $f_S \in M$ . Так мы имеем, что  $f_S$  — верхняя грань (и даже супремум) для  $S$  в  $\mathfrak{M}$ .

Тогда, применяя лемму Цорна, получаем максимальный элемент  $f_*$ . Обозначим  $\text{dom}(f_*)$  за  $Y$ .

Предположим, что  $|Y| < |X \setminus Y|$ . Тогда  $Y$  равномощно некоторому  $Z \subseteq X \setminus Y$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} |Z| &\leq |Z \times Z| && \leq 3 \cdot |Z \times Z| \\ &= |Y \times Z| + |Z \times Y| + |Z \times Z| && = |(Y \cup Z) \times (Y \cup Z) \setminus Y \times Y| \\ &\leq |(2 \times Z) \times (2 \times Z)| && = |4 \times Z \times Z| \leq |Z \times Z \times Z| \\ &= |Z| \end{aligned}$$

Следовательно по теореме Кантора-Шрёдера-Бернштейна есть биекция  $g$  из  $Y \times Z \cup Z \times Y \cup Z \times Z$  в  $Z$ . Рассмотрим  $h : (Y \cup Z) \rightarrow (Y \cup Z) \times (Y \cup Z)$ , определённую по правилу

$$h(x) := \begin{cases} f_*(x) & x \in Y \\ g(x) & x \in Z \end{cases}$$

Следовательно  $h \in M$  и  $h > f_*$  — противоречие. Поэтому  $|Y| \geq |X \setminus Y|$ .

В таком случае

$$|Y| \leq |X| = |Y| + |X \setminus Y| \leq |Y| + |Y| = 2 \cdot |Y| \leq |Y| \cdot |Y| = |Y|$$

а значит по теореме Кантора-Шрёдера-Бернштейна  $|Y| = |X|$ , а потому  $|X| = |X \times X|$ . □

**Следствие 60.1** (в ZFC). Если  $0 < |X| \leq |Y|$  и  $Y$  бесконечно, то  $|X \times Y| = |Y|$ .

**Доказательство.** Ясно, что

$$|Y| = |1 \times Y| \leq |X \times Y| \leq |Y \times Y| = |Y|,$$

откуда по теореме Кантора-Шрёдера-Бернштейна  $|X \times Y| = |Y|$ . □

**Следствие 60.2.** Пусть  $|X| \leq |Y|$  и  $Y$  бесконечно. Тогда  $|X \cup Y| = |Y|$ .

**Доказательство.** Легко видеть, что

$$|Y| \leq |X \cup Y| \leq |X| + |Y| \leq 2 \cdot |Y| \leq |Y|^2 = |Y|,$$

откуда по теореме Кантора-Шрёдера-Бернштейна  $|X \cup Y| = |Y|$ . □

**Следствие 60.3.** Пусть  $|X| < |Y|$  и  $Y$  бесконечно. Тогда  $|Y \setminus X| = |Y|$ .

**Доказательство.** Легко видеть, что

$$|Y| = \max\{|X|, |Y|\} = |X \cup Y| = |X \cup (Y \setminus X)| = \max\{|X|, |Y \setminus X|\}$$

Поскольку  $|X| \neq |Y|$ , то  $|Y| = |Y \setminus X|$ . □



**Следствие 60.4.** Пусть  $X$  бесконечно. Тогда  $|X^*| = |X|$ .

**Доказательство.** По определению  $|X^*| = |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n|$ . При этом очевидно по индукции, что  $|X^n| = |X|$  для  $n > 0$ ;  $|X^0| = |\{\emptyset\}| = 1$ . Поэтому

$$|X^*| = |X^0| + \sum_{n \in \mathbb{N}} |X^{n+1}| = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} |X| = 1 + |\mathbb{N}| \cdot |X| = 1 + |X| = |X|$$

□