Занятие от 11.03.
Геометрия и топология. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

31 марта 2021 г.

Задача 114. Давайте определим функцию

$$g : V \times V \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \frac{p(u+v)^2 - p(u)^2 - p(v)^2}{2}$$

Покажем, что g является скалярным произведением на V.

1. Симметричность очевидна:

$$g(u, v) = \frac{p(u+v)^2 - p(u)^2 - p(v)^2}{2} = \frac{p(v+u)^2 - p(v)^2 - p(u)^2}{2} = g(v, u)$$

2. Теперь покажем аддитивность по аргументу (покажем для правого, а для левого будет следовать из симметричности). Вспомним тождество, заданное на p

$$p(u+v)^2 + p(u-v)^2 = 2(p(u)^2 + p(v)^2)$$

Применим его трижды для пар u и v, u и $v - w$, u и $v + w$:

$$p(u+v)^2 + p(u-v)^2 = 2(p(u)^2 + p(v)^2) \tag{1}$$
$$p(u+v-w)^2 + p(u-v+w)^2 = 2(p(u)^2 + p(v-w)^2) \tag{2}$$
$$p(u+v+w)^2 + p(-u+v+w)^2 = 2(p(u)^2 + p(v+w)^2) \tag{3}$$

Рассмотрим таблицу 1: в ней циклично просуммированы выражения выше и показано, какие квадраты модулей с какими коэффициентами входят. Суммируя всё вместе с правильными (указанными в таблице) коэффициентами мы получаем

$$p(u+v+w)^2 - p(u+v)^2 - p(v+w)^2 - p(w+u)^2 + p(u)^2 + p(v)^2 + p(w)^2 = 0$$

так как сложили несколько выражений равных нулю. При этом несложно видеть, что полученное равенство равносильно равенству

$$2g(u, v+w) - 2g(u, v) - 2g(v, w) = 0$$

Отсюда мы и получаем, что

$$g(u, v+w) = g(u, v) + g(u, w)$$

$p(\ldots)^2$	$\frac{1}{3}\sum_{\text{cyc}}(1)$	$\frac{-1}{6}\sum_{\text{cyc}}(2)$	$\frac{-1}{3}\sum_{\text{cyc}}(3)$	Сумма
$u+v+w$	$3\cdot\frac{1}{3}$			1
$u+v-w$	$1\cdot\frac{1}{3}$	$2\cdot\frac{-1}{6}$		0
$v+w-u$	$1\cdot\frac{1}{3}$	$2\cdot\frac{-1}{6}$		0
$w+u-v$	$1\cdot\frac{1}{3}$	$2\cdot\frac{-1}{6}$		0
$u+v$	$-2\cdot\frac{1}{3}$		$1\cdot\frac{-1}{3}$	-1
$v+w$	$-2\cdot\frac{1}{3}$		$1\cdot\frac{-1}{3}$	-1
$w+u$	$-2\cdot\frac{1}{3}$		$1\cdot\frac{-1}{3}$	-1
$u-v$		$-2\cdot\frac{-1}{6}$	$1\cdot\frac{-1}{3}$	0
$v-w$		$-2\cdot\frac{-1}{6}$	$1\cdot\frac{-1}{3}$	0
$w-u$		$-2\cdot\frac{-1}{6}$	$1\cdot\frac{-1}{3}$	0
u	$-2\cdot\frac{1}{3}$	$-2\cdot\frac{-1}{6}$	$-4\cdot\frac{-1}{3}$	1
v	$-2\cdot\frac{1}{3}$	$-2\cdot\frac{-1}{6}$	$-4\cdot\frac{-1}{3}$	1
w	$-2\cdot\frac{1}{3}$	$-2\cdot\frac{-1}{6}$	$-4\cdot\frac{-1}{3}$	1

Таблица 1:

3. Теперь покажем, пропорциональность по правому аргументу, т.е. что $g(u, \lambda v) = \lambda g(u, v)$. Для этого заметим, что

   (a)
$$g(u, \overrightarrow{0}) = \frac{p(u)^2 - p(u)^2 - p(\overrightarrow{0})^2}{2} = 0$$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$
$$g(u, nv) = \underbrace{g(u, v) + \dots + g(u, v)}_{n} = ng(u, v)$$

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$
$$g\left(u, \frac{1}{n}v\right) = \frac{1}{n} \cdot ng\left(u, \frac{1}{n}v\right) = \frac{1}{n}g\left(u, n\frac{1}{n}v\right) = \frac{1}{n}g(u, v)$$

   (d)
$$g(u, -v) = g(u, -v) + g(u, v) - g(u, v) = \\ g(u, -v + v) - g(u, v) = g(u, \overrightarrow{0}) - g(u, v) = -g(u, v)$$

   (e) $\forall n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$
$$g\left(u, \frac{n}{m}v\right) = \mathrm{sign}(n)g\left(u, \frac{|n|}{m}v\right) = ng\left(u, \frac{1}{m}v\right) = \frac{n}{m}g\left(u, v\right)$$

   т.е. для всех рациональных λ утверждение доказано. При этом заметим, что сама по себе функция p непрерывна, поэтому непрерывна и g (хотя потребуется непрерывность только по одному аргументу). Следовательно
$$g(u, \lambda v) = \lim_{n\to\infty} g(u, q_n v) = \lim_{n\to\infty} q_n g(u, v) = \lambda g(u, v)$$
   где $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ — случайная последовательность рациональных, сходящаяся к λ.

4. И последнее.
$$g(u, u) = \frac{p(u+u)^2 - p(u)^2 - p(u)^2}{2} = p(u)^2 \geqslant 0$$
   При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда $u \neq \overrightarrow{0}$.

Задача 115. Для начала заметим, что биекция
$$\varphi : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}, \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto (a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{n,n})$$
сопоставляет скалярному произведению $\mathrm{tr}(A^T B)$ в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n^2}$. Действительно,
$$\mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} (A^T B)_{i,i} \qquad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (A^T)_{i,j} \cdot B_{j,i} \qquad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{j,i} \cdot B_{j,i} \qquad = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$$

В таком случае будем рассматривать вместо $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}^4$.

Также заметим, что U описывается как пространство, перпендикулярное векторам $K = \varphi(E^T) = \varphi(E) = (1;0;0;1)$ и $L = \varphi(J^T) = (0;-1;1;0)$. Поскольку $X = X^{\parallel} + X^{\perp}$, где $X^{\parallel} \in U$, а $X^{\perp} \perp U$, то $X^{\perp} \in \langle K, L\rangle$, а $X^{\parallel} \perp \langle K, L\rangle$. Таким образом

$$X = \alpha K + \beta L + X^{\parallel}$$

Ещё раз напомним конкретные значения:

$$K = (1;0;0;1) \qquad L = (0;-1;1;0) \qquad X = (3;4;2;-5)$$

Запишем банальные уравнения:

$$\alpha(K \cdot K) + \beta(L \cdot K) = X \cdot K \qquad \alpha(K \cdot L) + \beta(L \cdot L) = X \cdot L$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} K \cdot K & K \cdot L \\ L \cdot K & L \cdot L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \cdot K \\ X \cdot L \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} K \cdot K & K \cdot L \\ L \cdot K & L \cdot L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X \cdot K \\ X \cdot L \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(K \cdot K)(L \cdot L) - (K \cdot L)^2} \begin{pmatrix} L \cdot L & -K \cdot L \\ -L \cdot K & K \cdot K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \cdot K \\ X \cdot L \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2 - 0^2} \begin{pmatrix} 2 & -0 \\ -0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Тогда

$$X^{\perp} = \alpha K + \beta L = (-1;1;-1;-1) \qquad X^{\parallel} = X - X^{\perp} = (4;3;3;-4)$$

Прообразы этих векторов легко восстанавливаются:

$$X^{\perp} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad X^{\parallel} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$
