Домашнее задание от 21.09.
Теоретическая информатика. 2 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 204 (20.Б04-мкн)

23 сентября 2021 г.

Содержание

Задача 3. Рассмотрим НКА $A = (\Sigma, Q, S, F, \delta)$, реализующий язык K. Тогда рассмотрим автомат

$$B = (\Sigma, Q, S, F', \delta), \qquad \text{где } F' := \{q \in Q \mid \exists v \in L\colon\ \delta^*(q, v) \cap F \neq \varnothing\}$$

т.е. автомат A с новым множеством принимающих состояний. Тогда B будет распознавать $K \cdot L^{-1}$, так как есть следующая последовательность равносильных утверждений.

- u распознаётся автоматом B.
- Есть некоторое состояние $q \in \delta^*(S, u) \cap F'$.
- Есть некоторое состояние $q \in \delta^*(S, u)$ и некоторое слово $v \in L$, что $\delta^*(q, v) \cap F \neq \varnothing$.
- Есть некоторое слово $v \in L$, что $\delta^*(S, uv) \cap F \neq \varnothing$.
- Есть некоторое слово $v \in L$, что $uv \in K$.
- $u \in K \cdot L^{-1}$.

P.S. Регулярность L не нужна!

Задача 4. Пусть даны ДКА $A_1 = (\Sigma, Q_1, q_{0,1}, F_1, \delta_1)$ и $A_2 = (\Sigma, Q_2, q_{0,2}, F_2, \delta_2)$. Рассмотрим ДКА $\widehat{A} = (\Sigma, \widehat{Q}, \widehat{q}_0, \widehat{F}, \widehat{\delta})$, где

$$\widehat{Q} := Q_1 \times Q_2 \times \{0; 1\}, \qquad \widehat{q}_0 := (q_{0,1}, q_{0,2}, 0), \qquad \widehat{F} := F_1 \times F_2 \times \{0\},$$
$$\widehat{\delta}((q_1, q_2, r), s) := \begin{cases} (\delta_1(q_1, s), q_2, 1) & \text{если } r = 0, \\ (q_1, \delta_2(q_2, s), 0) & \text{если } r = 1. \end{cases}$$

Говоря на пальцах,

- $\widehat{Q}$ хранит хранит текущие состояния двух автоматов и информацию о том, какой номер хода по модулю 2 был последним,

- $\widehat{\delta}$ использует автомат, соответствующий остатку по модулю 2 номера хода, не трогая другой автомат, и меняет остаток хода на следующий,

- $\widehat{q}_0$ указывает на то, что в самом начале автоматы поставлены в свои обычные начальные конфигурации и будут использованы в порядке A_1, A_2, A_1, A_2, $\ldots$,

- $\widehat{F}$ указывает на то, что признаны будут строки только чётной длины, где строка из нечётных символов принимается автоматом A_1, а из чётных — A_2 (формально будет следовать из утверждения дальше).

В таком случае несложно показать по индукции, что

$$\widehat{\delta}^*(\widehat{q}_0, u_1v_1u_2v_2\ldots u_nv_n) = (\delta_1^*(q_{0,1}, u_1\ldots u_n), \delta_2^*(q_{0,2}, v_1\ldots v_n), 0),$$
$$\text{и}$$
$$\widehat{\delta}^*(\widehat{q}_0, u_1v_1u_2v_2\ldots u_nv_nu_{n+1}) = (\delta_1^*(q_{0,1}, u_1\ldots u_{n+1}), \delta_2^*(q_{0,2}, v_1\ldots v_n), 1).$$

Таким образом главное свойство F доказано: действительно, $\widehat{A}$ принимает строку тогда и только тогда, когда строка имеет вид $u_1v_1\ldots u_nv_n$, A_1 принимает строку $u_1\ldots u_n$ и A_2 принимает строку $v_1\ldots v_n$. А это и значит, что

$$L(\widehat{A}) = \mathrm{PerfectShuffle}(L(A_1), L(A_2)).$$
