Листочек 6. Снова многомерный. Математический анализ. 1 курс. Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

24 мая 2021 г.

Содержание

Базовые задачи

Задача 1. TBP

Задача 2. Введём новые обозначения:

- $P := \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$;
- C — выпуклая оболочка множества точек $\{z_j\}_{j=1}^{n}$.

Лемма 1. *Множество корней многочлена P' есть объединение множества кратных корней P и множества корней функции*

$$\varphi(z) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j}$$

Доказательство. Заметим, что общие корни P и P' суть кратные корни P, а кратные корни P являются корнями P и P'. Тогда покажем, что остальные корни P' суть корни φ. Заметим, что алгебраически

$$P'(z) = P(z)\varphi(z)$$

Следовательно всякий корень P', не являющийся корнем P, будет корнем φ, а всякий корень φ будет корнем P'. И при этом множества корней φ и P не пересекаются. □

а) Если ζ есть кратный корень P, то утверждение очевидно; следовательно предположим обратное. Тогда мы имеем, что

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\zeta - z_j} = 0$$

Отсюда понятным образом следует, что нет прямой, относительно которой все вектора из набора

$$\left\{ \frac{1}{\zeta - z_j} \right\}_{j=1}^{n}$$

лежат в одной (открытой!) полуплоскости, так как иначе проекция их суммы на нормаль будет равна сумме проекций с одним и тем же знаком, а значит не равна нулю. Поэтому тем же свойством обладают и вектора из набора

$$\{\zeta - z_j\}_{j=1}^{n}$$

(так как их направления отражаются относительно вещественной оси). Значит нет разделяющей прямой C и точки ζ: если бы у них была разделяющая прямая, то, параллельно перенеся её в ζ, мы получим прямую, относительно которой все вектора из

$$\{\zeta - z_j\}_{j=1}^{n}$$

лежат в одной открытой полуплоскости. Следовательно ζ лежит в C.

б) Введём немного другие обозначения.

> Пусть даны комплексные α и $\beta_1, \ldots, \beta_n$. P — многочлен с корнями α, β_1, $\ldots \beta_n$. Нужно показать, что
>
> $$|\zeta - \alpha| \geqslant \frac{1}{n+1} \min_i |\beta_i - \alpha|.$$

Если ζ есть кратный корень P, то утверждение очевидно: есть $\beta_j = \zeta$, а значит

$$|\zeta - \alpha| = |\beta_j - \alpha| \geqslant \min_i |\beta_i - \alpha| \geqslant \frac{1}{n+1} \min_i |\beta_i - \alpha|;$$

следовательно предположим обратное. Обозначим

$$a := \frac{1}{\zeta - \alpha} \qquad \text{и} \qquad b_i := \frac{1}{\zeta - \beta_i}.$$

Так нам надо показать, что

$$\frac{1}{|a|} \geqslant \frac{1}{n+1} \min_i \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b_i} \right|.$$

Вспомним, что

$$\frac{1}{\zeta - \alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\zeta - \beta_i} = 0$$

т.е.

$$a + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0$$

Тогда

$$\frac{1}{n+1}\min_i \frac{|b_i-a|}{|b_i|} = \frac{1}{n+1}\min_i \frac{|b_i+\sum_{j=1}^n b_j|}{|b_i|}$$
$$\leqslant \frac{1}{n+1}\min_i \frac{|b_i|+\sum_{j=1}^n |b_j|}{|b_i|}$$
$$\leqslant \frac{1}{n+1}\left(1+\min_i \sum_{j=1}^n \frac{|b_j|}{|b_i|}\right)$$

Заметим, что в последней сумме чем больше $|b_i|$, тем меньше значение суммы. Следовательно пусть

$$|b_k| = \max_i |b_i|$$

Значит

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\min_i \sum_{j=1}^n \frac{|b_j|}{|b_i|}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1+\sum_{j=1}^n \frac{|b_j|}{|b_k|}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}\left(1+\sum_{j=1}^n \frac{|b_k|}{|b_k|}\right) = \frac{1}{n+1}(1+n) = 1$$

Таким образом

$$\frac{1}{n+1}\min_i \left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b_i}\right| = \frac{1}{n+1}\min_i \frac{|b_i-a|}{|a||b_i|} = \frac{1}{|a|}\frac{1}{n+1}\min_i \frac{|b_i-a|}{|b_i|} \leqslant \frac{1}{|a|}\cdot 1 = \frac{1}{|a|}$$

Задача 3. Обозначим $\{\overline{e}_i\}_{i=1}^d$ стандартный базис $\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим

$$G(x) := F(x) - \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(0)$$

Функция G будет выпуклой и имеет нулевые частные производные в нуле. Если мы покажем, что G будет дифференцируема в нуле, то и F будет таковой.

Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $\{\delta_i\}_{i=1}^d$, что для всякого $i \in \{1;\ldots;d\}$

$$\forall x \in (-\delta_i;\delta_i) \quad |G(x\overline{e}_i)| < \varepsilon|x|$$

Следовательно для всяких $\{x_i\}_{i=1}^d$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^d$, что $x_i \in (-\delta_i;\delta_i)$, $\alpha_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$, если $x = (\alpha_i x_i)_{i=1}^d = \sum_{i=1}^d \alpha_i(x_i\overline{e}_i)$, то

$$G(x) \leqslant \sum_{i=1}^d \alpha_i G(x_i\overline{e}_i) < \varepsilon \sum_{i=1}^d \alpha_i|x_i| \leqslant \varepsilon\sqrt{d}\sqrt{\sum_{i=1}^d (\alpha_i x_i)^2} = \varepsilon\sqrt{d}|x|.$$

В таком случае множество рассмотренных точек x есть выпуклая оболочка $\{\pm x_i\overline{e}_i\}_{i=1}^d$ ($2d$ точек).

Также если зафиксировать $j \in \{1;\ldots;d\}$ и

$$x = \frac{1}{\alpha_j}\left(x_j\overline{e}_j + \alpha_j x_j\overline{e}_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\overline{e}_i\right)$$

то

$$\alpha_1(x_1\overline{e}_1)+\cdots+\alpha_{j-1}(x_{j-1}\overline{e}_{j-1})+\alpha_j x+\alpha_{j+1}(x_{j+1}\overline{e}_{j+1})+\cdots+\alpha_d(x_d\overline{e}_d)=x_j\overline{e}_j$$

Следовательно

$$G(x_j\overline{e}_j)\leqslant \alpha_1 G(x_1\overline{e}_1)+\cdots+\alpha_{j-1}G(x_{j-1}\overline{e}_{j-1})+\alpha_j G(x)+\alpha_{j+1}G(x_{j+1}\overline{e}_{j+1})+\cdots+\alpha_d G(x_d\overline{e}_d)$$

а

$$|x|=\frac{1}{\alpha_j}\sqrt{(\alpha_1x_1)^2+\cdots+(\alpha_{j-1}x_{j-1})^2+x_j^2+(\alpha_{j+1}x_{j+1})^2+\cdots+(\alpha_d x_d)^2}$$

Значит

$$\begin{aligned} G(x)\geqslant \frac{1}{\alpha_j}\left(G(x_j\overline{e}_j)+\alpha_j G(x_j\overline{e}_j)-\sum_{i=1}^{d}\alpha_i G(x_i\overline{e}_i)\right) &\geqslant -\varepsilon\frac{1}{\alpha_j}\left(|x_j|-\alpha_j|x_j|+\sum_{i=1}^{d}\alpha_i|x_i|\right)\\ \geqslant -\varepsilon\sqrt{d}\frac{1}{\alpha_j}\sqrt{x_j^2-(\alpha_j x_j)^2+\sum_{i=1}^{d}(\alpha_i|x_i|)^2} &= -\varepsilon\sqrt{d}|x| \end{aligned}$$

В таком случае множество рассмотренных точек x есть всё $\mathbb{R}^n$, так как для всякой точки $p\in\mathbb{R}^d$, проводя прямую через p, пересекающуюся с осью Ox_j очень близко к нулю и по ту же сторону, что и p относительно гиперплоскости всех остальных координат, её пересечение с гиперплоскостью остальных координат будет лежать в выпуклой оболочке, описанной выше. Таким образом, поскольку мы всё делаем близко к нулю и всё попадает в правильные выпуклые оболочки, то $\{x_i\}_{i=1}^d$ будут лежать в необходимых промежутках, а так как пересечение прямой с осью Ox_j лежит между пересечением с гиперплоскостью остальных координат и p, то комбинация $\{\alpha_i\}_{i=1}^d$ будет выпуклой и $\alpha_j>0$.

Задача 4. ТВР

Задача 5.

а) По интегральному правилу Лейбница

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f_h(x)&=\frac{1}{2h}\frac{d}{dx}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt\\ &=\frac{1}{2h}\left(f(x+h)\cdot 1-f(x-h)\cdot 1+\int_{x-h}^{x+h}\frac{\partial}{\partial x}f(t)dt\right)\\ &=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\end{aligned}$$

Это значит, что f_h непрерывно дифференцируема.

б) Пусть $f([x-h;x+h])\subseteq[f(x)-\varepsilon;f(x)+\varepsilon]$. Тогда

$$|f_h(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}(f(t)-f(x))dt\right|\leqslant\varepsilon$$

При этом по непрерывности на компакте есть такое $\delta>0$, что для всякого $x\in C$

$$f(U_\delta(x))\subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

и следовательно для всякого $h\in(0;\delta)$

$$|f_h(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$$

Это и означает равномерную сходимость $f_h\to f$ на C.

Задача 6. Заметим, что

$$F''_{xx} \cdot (F'_y)^2 - 2F''_{xy} \cdot F'_x \cdot F'_y + F''_{yy} \cdot (F'_x)^2 = \begin{pmatrix} -F'_y & F'_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F'_y \\ F'_x \end{pmatrix}$$

Векторы по бокам — вектор, перпендикулярный $\mathrm{grad}(F)$ и той же длины, а матрица посередине — матрица Гессе функции F. В итоге всё произведение есть изменение второго порядка функции F по направлению этого перпендикулярного вектора. Значит если мы повернём базис так, что $\mathrm{grad}(F)$ будет сонаправлен $(0, 1)$, то значение формулы выше не изменится. Поэтому повернём базис таковым образом. А также домножим F на такую константу, что $\mathrm{grad}(F)(P_0) = (0, 1)$. Тогда $F'_x(P_0) = 0$, а $F'_y(P_0) = 1$; значит формула выше вырождается в $F''_{xx}(P_0)$.

Пусть $P_0 = (p_x, p_y)$ — точка, что в ней зануляется F, но не её градиент. Нам нужно показать, что касание прямой $\Lambda : P_0 + t(1, 0)$ и M имеет второй порядок тогда и только тогда, когда $F''_{xx}(P_0) = 0$.

Пусть касание Λ и M имеет второй порядок. Тогда есть последовательность точек

$$(Q_n)_{n=0}^{\infty} = (P_0 + (x_n, y_n))_{n=0}^{\infty} \to P_0,$$

которые являются корнями F и что

$$(y_n)_{n=0}^{\infty} = o\Big((x_n^2)_{n=0}^{\infty}\Big).$$

При этом по формуле Тейлора в форме Коши

$$\begin{aligned} F(x, y) = F(P_0) & \\ &+ F'_x(P_0) \cdot (x - p_x) + F'_y(P_0) \cdot (y - p_y) \\ &+ F''_{xx}(P_0) \cdot (x - p_x)^2 + 2F''_{xy}(P_0) \cdot (x - p_x)(y - p_y) + F''_{yy}(P_0) \cdot (y - p_y)^2 \\ &+ o((x - p_x)^2 + (y - p_y)^2) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} 0 &= F(Q_n) \\ &= y_n + F''_{xx}(P_0) \cdot x_n^2 + 2F''_{xy}(P_0) \cdot x_n y_n + F''_{yy}(P_0) \cdot y_n^2 + o(x_n^2 + y_n^2) \\ &= o(x_n^2) + F''_{xx}(P_0) \cdot x_n^2 + o(x_n^3) + o(x_n^4) + o(x_n^2) \\ &= F''_{xx}(P_0) \cdot x_n^2 + o(x_n^2) \end{aligned}$$

Таким образом $F''_{xx}(P_0) = 0$.

Пусть теперь наоборот $F''_{xx}(P_0) = 0$. Тогда мы видим, что

$$\begin{aligned} F(P_0 + (x, y)) &= y + 2F''_{xy}(P_0) \cdot xy + F''_{yy}(P_0) \cdot y^2 + o(x^2 + y^2) \\ &= y(1 + 2F''_{xy}(P_0) \cdot x + F''_{yy}(P_0) \cdot y) + o(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Рассмотрим манхэттенскую окрестность U точки P_0 (т.е. произведение ε-окретсности по x и ε-окрестности по y для некоторого $\varepsilon > 0$), где F'_y меняется не сильно, например, не более чем на α от своей абсолютной величины, где $\alpha < 1$. Тогда для всякой точки $Q = P_0 + (x, 0)$ прямой Λ из U верно, что

$$F(Q) = o(x^2),$$

а значит для всех Q некоторой подокрестности U есть точка $Q' = Q + (0, y)$, что $F(Q') = 0$, так как

$$F(Q)/F'_y(P_0) = o(x^2)$$

и следовательно

$$y = C\frac{F(Q)}{F'_y(P_0)}, \qquad C \in \left[\frac{1}{1+\alpha}; \frac{1}{1-\alpha}\right].$$

Значит расстояние от всякой точки Q прямой Λ до M есть $o(|Q - P_0|^2)$.

Задача 7. Предположим можно. Тогда у нас есть норма $||\cdot||$, порождающая в точности равномерную сходимость на компактах.

Для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определим функцию

$$f_n(x) := \begin{cases} \sin(x\pi)^2 & \text{если } x \in [n; n+1], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что для всякого набора $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ последовательность

$$(g_n)_{n=0}^\infty = \left(\sum_{k=0}^n a_n f_n\right)_{n=0}^\infty$$

будет равномерно сходится на любом компакте, да и вообще поточечно сходится к некоторой функции g. Тогда мы получаем, что $(g_n)_{n=0}^\infty$ и по норме будет сходится к g, значит, в частности, будет фундаментальной.

Тогда давайте построим конкретный набор $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ следующим рекуррентным образом. Будем подразумевать, что g_{-1} есть тождественно нулевая функция. Тогда несложно видеть, что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (так как $||f_n|| > 0$)

$$||g_n|| \geqslant |a_n| \cdot ||f_n|| - ||g_{n-1}||.$$

Значит можно взять такое a_n, что $||g_n|| \geqslant ||g_{n-1}|| + 1$.

Для такой последовательности мы получаем, что для всяких $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$||g_n - g_m|| \geqslant \Big|||g_n|| - ||g_m||\Big| \geqslant |n - m|,$$

что банальным образом противоречит фундаментальности $\{g_n\}_{n=0}^\infty$.

Рейтинговые задачи

Задача 8. ТВР

Задача 9. ТВР

Задача 10. ТВР
