Математический анализ — 1.

Юрий Сергеевич Белов

Литература:

- В. А. Зорич "Математический анализ"
- О. Л. Виноградов "Математический анализ"
- (подходит попозже) Г. М. Фихтенгельц "Курс дифференциального и интегрального исчисления"
- У. Рудин "Основы анализа"
- М. Спивак "Математический анализ на многообразиях"

1 Множества, аксиоматика и вещественные числа.

Мы начинаем с теории множеств.

Определение 1.

- Множества и элемменты — понятно.
- $a \in B$ — понятно.
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — объединение.
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — пересечение.
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$ — разность.
- $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$ — симметрическая разница.
- $A^C := X \setminus A$ — *дополнение*, где X — некоторое фиксированное рассматриваемое множество.
- $A \subset B$ — "A — подмножество B", т.е. $\forall x (X \in A \Rightarrow x \in B)$.

Следствие.

- *(первое правило Моргана)* $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A^c \\ x \in B^C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$$

- *(второе правило Моргана)* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. *Аналогично.*

Определение 2. (Аксиома индукции.) Пусть есть функция $A : \mathbb{N} \to true; false$, что:

1. $A(1) = true$;
2. $\forall n(A(n) \to A(n+1))$.

Тогда $\forall n A(n)$.

Определение натуральных чисел сложно, рассматривать его не будем. Важно также иметь в виду натуральные числа с операциями сложения и умножения.

Определение 3. Пусть есть кольцо без делителей нуля R. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на $R \times (R \setminus \{0\})$, что $(a; b) \sim (c; d) \Leftrightarrow ad = bc$. Тогда $\mathrm{Quot}(R)$ — фактор-множество по $\sim$ и поле.

Определение 4. Рациональные числа — $\mathbb{Q} := \mathrm{Quot}(\mathbb{Z})$.

Теорема 1. $\nexists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существуют взаимно простые $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, что $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Тогда $m^2 = n^2$. Очевидно, что тогда $m^2 \vdots 2$, значит $m \vdots 2$, значит $m \vdots 4$, значит $n^2 \vdots 2$, значит $n \vdots 2$, значит n и m не взаимно просты, так как делятся на 2 — противоречие. $\square$

Теперь мы хотим понять, что есть вещественные числа. Тут есть несколько подходов.

Определение 5 (аксиоматический подход)**.** Вещественные числа — это полное упорядоченное поле $\mathbb{R}$, состоящее не из одного элемента.

Здесь "поле" значит, что на множестве (вместе с его операциями и выделенными элементами) верны аксиомы поля A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4 и D (т.е. сложение и умножение ассоциативны, коммутативны имеют нейтральные элементы и удовлетворяют условию существованию обратных (по умножению — для всех кроме нуля), а также дистрибутивности).

Упорядоченность значит, что есть рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение $\preccurlyeq$, что все элементы сравнимы, согласованное с операциями, т.е.:

$A)$ $a \preccurlyeq b \Rightarrow a + x \preccurlyeq b + x$.

$M)$ $0 \preccurlyeq a \wedge 0 \preccurlyeq b \Rightarrow 0 \preccurlyeq ab$.

Полнота поля значит любое из следующих утверждений (они равносильны):

- любое ограниченное сверху (снизу) подмножество поля имеет точную верхнюю (нижнюю) грань;
- (аксиома Кантора-Дедекинда) для любых двух множеств A и B, что $A \preccurlyeq B$, есть разделяющий их элемент.

Итого мы имеем 9 аксиом поля, 2 аксиомы упорядоченности и 1 акиома полноты упорядоченности.

Утверждение. *Над $\mathbb{Q}$ нет элемента разделяющего $A := \{a > 0 \mid a^2 < 2\}$ и $B := \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. есть $c > 0$, что $A < c < B$.

Если $c^2 < 2$, то найдём ε, что $\varepsilon \in (0; 1)$ и $(c+\varepsilon)^2 < 2$. Заметим, что $(c+\varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < c^2 + (2c+1)\varepsilon$. Пусть $\varepsilon < \frac{2-c^2}{2c+1}$, тогда такое ε точно подойдёт, ну а посокольку $\frac{2-c^2}{2c+1} > 0$, то такое ε есть. Значит $c^2 \geqslant 2$.

Аналогично имеем, что $\varepsilon \leqslant 2$. А значит $c^2 = 2$, что не бывает над $\mathbb{Q}$. $\square$

Следствие. $\mathbb{Q}$ *не полно.*

Определение 6.

- *Закрытый интервал* или *отрезок* $[a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.
- *Открытый интервал* или просто *интервал* $(a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- *Полуоткрытый интервал* или *полуинтервал* $(a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $[a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$.

Теорема 2 (Лемма о вложенных отрезках)**.** *Пусть имеется* $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ *— множество вложенных (непустых) отрезков, т.е.* $\forall n > 1\ I_{n+1} \subset I_n$. *Тогда* $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \varnothing$.

Доказательство. Заметим, что для любых натуральных $n < m$ верно, что $a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$, где $I_n = [a_n; b_n]$. Тогда для $A := \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $B := \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ верно, что $A \leqslant B$. Значит есть разделяющий их элемент t, значит $A \leqslant t \leqslant B$, значит $t \in I_i$ для всех i, значит $t \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$. □

Замечание 1. Теорема 2 не верна для не отрезков.

Замечание 2. Если в теореме 2 $b_i - a_i$ "сходится к 0", т.е. $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : \forall i > n\, b_i - a_i < \varepsilon$, то пересечение всех отрезков состоит из ровно одного элемента.

Теорема 3 (индукция на вещественных числах)**.** *Пусть дано множество* $X \subseteq [0;1]$*, что*

1. $0 \in X$*;*
2. $\forall x \in X\ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap [0;1] \subseteq X$*;*
3. $\forall Y \subseteq X\ \sup(Y) \in X$.

Тогда $X = [0;1]$.

Доказательство. Предположим противное: $X \neq [0;1]$. Рассмотрим $Z := [0;1] \setminus X$ ($Z \neq \varnothing$!) и $Y := \{y \in [0;1] \mid y < Z\}$ ($Y \neq \varnothing$!). Заметим, что $Y \subseteq X$ и $\sup(Y) = \inf(Z) = t$. Тогда $t \in X$ по второму условию. Значит для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $U_\varepsilon(t) \cap [0;1] \in X$, а т.е. $(U_\varepsilon(t) \cap [0;1]) \cap Z = \varnothing$, а тогда $t \neq \inf(Z)$ — противоречие. Значит $X = [0;1]$. □

2 Топология прямой, пределы и непрерывность.

2.1 Топология

Определение 7. *ε-окрестность* точки x (для $\varepsilon > 0$) — $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$. Обозначение: $U_\varepsilon(x)$.
Проколотая ε-окрестность точки x — $(x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon)$. Обозначение: $V_\varepsilon(x)$.

Определение 8. Пусть дано некоторое множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Тогда точка $x \in X$ называется *внутренней точкой множества* X, если она содержится в X вместе со своей окрестностью.
Само множество X называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Пример 1. Следующие множества открыты:

- $(a;b)$;
- $(a;+\infty)$;
- $\mathbb{R}$;

- $\varnothing$;
- $\bigcup_{i=0}^{\infty}(a_i; b_i)$ (интервалы не обязательно не должны пересекаться).

Определение 9. Пусть дано множесство $X \subseteq \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества, если в любой проколотой окрестности x будет какая-либо точка X.

Множество предельных точек X называется *производным множеством* множества X и обозначается как X'.

Множество X называется замкнутым, если $X \supseteq X'$.

Определение 10. Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Если у любой последовательности его точек есть предельная точка из самого множества X, то X называется *компактным.*

Утверждение 4. *Подмножество $\mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда замкнуто и ограничено.*

2.2 Последовательности, пределы и ряды

Определение 11. *Предел последовательности* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x, что для любой окрестности x эта последовательность с некоторого момента будет лежать в этой окрестности:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Обозначение: $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = x$.

Предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x, что в любой его окрестности после любого момента появится элемент данной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n > N : \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Определение 12. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \, \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$$

Теорема 5. *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда фундаментальна.*

Доказательство.

1. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к некоторому значению X, тогда

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \, \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon/2 \Rightarrow \\ &\qquad \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| = |x_{n_1} - X + X - x_{n_2}| \leqslant |x_{n_1} - X| + |X - x_{n_2}| < \varepsilon\end{aligned}$$

2. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна. Мы знаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ все члены, начиная с некоторого различаются менее чем на ε. Тогда возьмём какой-нибудь такой член y_0 для некоторого ε, затем какой-нибудь такой член y_1 для $\varepsilon/2$, который идёт после y_0 и так далее. Получим последовательность, что все члены, начиная с n-ого лежат в $\varepsilon/2^n$-окрестности y_n. Тогда рассмотрим последовательность $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $I_n = [y_n - \varepsilon/2^{n-1}; y_n + \varepsilon/2^{n-1}]$. Несложно понять, что $I_n \supseteq I_{n+1}$, поэтому в пересечении $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ лежит некоторый X. Несложно понять, что все члены начальной последовательности, начиная с y_{n+2}, лежат в $\varepsilon/2^{n+2}$-окрестности y_{n+2}. При этом $|y_{n+2} - X| \leqslant \varepsilon/2^{n+1}$, что значит, что все члены главной последовательности, начиная с y_{n+2} лежат в $3\varepsilon/2^{n+2}$-окрестности X, а значит и в $\varepsilon/2^n$.

$\square$

Утверждение 6. *Для последовательностей $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ верно (если определено), что*

1. $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} + \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$
2. $-\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$
3. $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n y_n\}_{n=0}^{\infty}$
4. $\frac{1}{\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}} = \lim\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$ *(если $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \neq 0$)*

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

Доказательство.

1. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \varepsilon/2 \quad \wedge \quad \forall m > M\ |y_m - Y| < \varepsilon/2,$$

тогда

$$\forall n > \max(N, M) \quad |(x_n + y_n) - (X + Y)| \leqslant |x_n - X| + |y_n - Y| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $X + Y$.

2. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \varepsilon,$$

тогда

$$\forall n > N \quad |(-x_n) - (-X)| = |X - x_n| = |x_n - X| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $-X$.

3. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$. Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \to \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} + \frac{|x|+|y|}{2}} = \sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} - \frac{|x|+|y|}{2}$$

Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда положительно. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $t^2 + t(|X| + |Y|) = \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \delta(\varepsilon) \quad \wedge \quad \forall m > M\ |y_m - Y| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\begin{aligned}
\forall n > \max(N, M) \quad |x_n \cdot y_n - X \cdot Y| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot Y + x_n \cdot Y - X \cdot Y| \\
&\leqslant |x_n \cdot (y_n - Y)| + |(x_n - X) \cdot Y| \\
&< |x_n| \cdot \delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \cdot |Y| \\
&< (|X| + \delta(\varepsilon)) \cdot \delta(\varepsilon) + |Y| \cdot \delta(\varepsilon) \\
&= \delta(\varepsilon)^2 + (|X| + |Y|)\delta(\varepsilon) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

что означает, что $\{x_n \cdot y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $X \cdot Y$.

4. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$. Определим также
$$\delta : (0; +\infty) \to \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon|X|}{1+\varepsilon|X|}$$
Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда меньше $|X|$. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $\frac{t}{|X|(|X|-t)} = \varepsilon$. Тогда
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \delta(\varepsilon),$$
тогда
$$\forall n > N \quad \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{X}\right| = \left|\frac{X - x_n}{X \cdot x_n}\right| < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X| \cdot |x_n|} < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X|(|X| - \delta(\varepsilon))} = \varepsilon,$$
что означает, что $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $1/X$.

□

Определение 13. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ассимптотически больше* последовательности $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, если $x_n > y_n$ для всех натуральных n, начиная с некоторого. Обозначение: $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Аналогично определяются *ассимптотически меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \prec \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$), *ассимптотически не больше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \preccurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$) и *ассимптотически не меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$).

Утверждение 7. *Если $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \geqslant \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. $Y > X$, где $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ находятся в ε-окрестностях X и Y соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $y_n > Y - \varepsilon = X + \varepsilon > x_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \prec \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — противоречие. Значит $X \geqslant Y$. □

Утверждение 8. *Если $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} > \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

Доказательство. Пусть $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ находятся в ε-окрестностях X и Y соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $x_n > X - \varepsilon = Y + \varepsilon > y_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. □

Утверждение 9 (леммма о двух полицейских)**.** *Если*
$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$$
и
$$\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{z_n\}_{n=0}^{\infty} = A,$$
то предел $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ определён и равен A.

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ есть $N, M \in \mathbb{N}$, что
$$\forall n > N\ |x_n - A| < \varepsilon \quad \wedge \quad \forall m > M\ |z_n - A| < \varepsilon,$$
значит
$$\forall n > \max(N, M) \quad A + \varepsilon > x_n \geqslant y_n \geqslant z_n > A - \varepsilon \quad \text{т.е. } |y_n - A| < \varepsilon,$$
что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к A. □

Утверждение 10. *Если $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = A$, а $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, неубывает (с некоторого момента), то предел $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ существует и не превосходит A.*

Доказательство. Если последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ возрастает не с самого начала, то отрежем её начало с до момента начала возрастания. Заметим, что она ограничена сверху (из-за последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$), тогда определим $B := \sup(\{y_n\}_{n=0}^{\infty})$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \quad |B - x_N| < \varepsilon$, тогда $\forall n > N \quad |B - x_n| < \varepsilon$, что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к B. По утверждению 7 $A \geqslant B$. $\square$

Определение 14. Сумма ряда $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ есть значение $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim \left\{\sum_{i=0}^{k}\right\}_{k=0}^{\infty}$. Частичной же суммой s_k этого ряда называется просто $\sum_{i=0}^{k} a_i$.

Определение 15. Ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *сильно сходится*, если $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ сходится.

Теорема 11. *Если ряд сильно сходится сходится, то он сходится.*

Доказательство.

Лемма 11.1. *Пусть ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ сходится, тогда сходится любой его "хвост" (суффикс), и для любого $\varepsilon > 0$ есть такой хвост, сумма которого меньше ε.*

Доказательство. Пусть $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$ верно, что $\sum_{i=0}^{n} |a_i| \in U_\varepsilon(A)$. Тогда заметим, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=N+1}^{n} |a_i| = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| - \sum_{i=0}^{N} |a_i| \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |a_i| - \sum_{i=0}^{N} |a_i| = A - \sum_{i=0}^{N} |a_i| \in U_\varepsilon(0)$$

Это и означает, что любой хвост сходится. И так мы для каждого ε нашли такой хвост, что его сумма меньше ε. $\square$

Пусть дан сильно сходящийся ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Пусть $\varepsilon_n := \sum_{i=n}^{\infty} |a_i|$. Несложно видеть, что $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно уменьшается, сходясь к 0 (последнее следует из леммы 11.1). Также несложно видеть по рассуждениям леммы 11.1, что $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = |a_n|$. Тогда определим

$$S_n := \overline{U}_{\varepsilon_{n+1}}(\sum_{i=0}^{n} a_i),$$

где $\overline{U}_\varepsilon(x)$ — закрытая ε-окрестность точки x. Тогда несложно видеть, что

$$\left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i \right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| \leqslant \varepsilon_{n+1}$$

Тем самым сумма любого префикса длины хотя бы $n + 1$ лежит в $\overline{U}_{\varepsilon_{n+1}}(\sum_{i=0}^{n} a_i) = S_n$. Также несложно видеть, что $S_{n+1} \subseteq S_n$. А также понятно, что S_i замкнуто и ограничено ("компактно").

Пусть $A := \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$ (поскольку диаметры шаров сходятся к нулю, то в пересечении лежит не более одной точки). Тогда мы видим, что $|\sum_{i=0}^{n} a_i - A| \leqslant \varepsilon_{n+1} \to 0$, поэтому $\sum_{i=0}^{n} a_i$ сходится и сходится к A. $\square$

Следствие 11.1. *Если $\{b_i\}_{i=0}^{\infty} \succcurlyeq \{|a_i|\}_{i=0}^{n}$ и $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ существует, то и $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ существует.*

Теорема 12 (признак Лейбница)**.** *Пусть дана последовательность $\{a_n\}$, монотонно сверху сходящаяся к 0. Тогда ряд $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$ сходится.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$\{P_n\}_{n=0}^\infty := \{S_{2n}\}_{n=0}^\infty = \left\{\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i a_i\right\}_{n=0}^\infty \qquad \{Q_n\}_{n=0}^\infty := \{S_{2n+1}\}_{n=0}^\infty = \left\{\sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^i a_i\right\}_{n=0}^\infty$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant 0 &\qquad Q_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} - a_{2n-3} \geqslant 0 \\ Q_n - P_n &= -a_{2n+1} \leqslant 0 & P_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Тогда имеем, что $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ монотонно убывает, $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ монотонно возрастает, а также

$$\{P_n\}_{n=0}^\infty \geqslant \{Q_n\}_{n=0}^\infty.$$

Тогда последовательности $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ сходятся и сходятся к P и Q соответственно. При этом последовательность

$$\{P_n\}_{n=0}^\infty - \{Q_n\}_{n=0}^\infty = \{P_n - Q_n\}_{n=0}^\infty = a_{2n+1}$$

тоже сходится по условию и сходится к 0. Поэтому

$$P - Q = \lim\{P_n\}_{n=0}^\infty - \lim\{Q_n\}_{n=0}^\infty = 0$$

значит $P = Q$. Значит и последовательность префиксных сумм тоже сходится к $P = Q$. □

Лемма 13 (преобразование Абеля)**.**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$$

где $B_n := \sum_{i=0}^n b_i$.

Теорема 14 (признак Дирихле)**.** *Если даны* $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ *и* $\{b_i\}_{i=0}^\infty$*, что* $\{a_i\}_{i=0}^\infty \searrow 0$*, а* $\{B_n\}_{n=0}^\infty = \{\sum_{i=0}^n b_i\}_{i=0}^\infty$ *ограничена, то ряд* $\sum_{i=0}^\infty a_i b_i$ *сходится.*

Доказательство.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_k b_k = \sum_{i=0}^{n}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$$

Пусть $|B_n| < C$ для всех n. Несложно видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} |a_n B_n| \leqslant \lim a_n C = C \lim a_n = 0,$$

поэтому $\lim a_n B_n = 0$. Также

$$|(a_k - a_{k+1})B_k| < C|a_k - a_{k+1}| = C(a_k - a_{k+1}),$$

поэтому

$$|S_n - a_n B_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1})B_k| < C\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = C(a_1 - a_{n+1}),$$

что тоже сходится. Поэтому $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ сходится, т.е. и ряд сходится. □

2.3 Пределы функций, непрерывность

Определение 16 (по Коши)**.** *Предел* функции $f : X \to \mathbb{R}$ при в точке x — такое значение y, что

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0 : f(V_\delta(x) \cap X) = U_\varepsilon(y)$$

Обозначение: $\lim\limits_{t\to x} f(t) = y$.

Определение 17 (по Гейне)**.** *Предел* функции $f : X \to \mathbb{R}$ при в точке x — такое значение y, что для любой последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ элементов $X \setminus \{x\}$ последовательность $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к y. Обозначение: $\lim\limits_{t\to x} f(t) = y$.

Теорема 15. *Определения пределов по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Будем доказывать равносильность отрицаний утверждений, ставимых в определениях.

1. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ не сходится по Коши в x к значению y. Значит есть такое $\varepsilon > 0$, что в любой проколотой окрестности x (в множестве X) есть точка, значение f в которой не лежит в ε-окрестности. Рассмотрев любую такую проколотую окрестность $I_0 = V_{\delta_0}(x)$, берём в ней любую такую точку x_0. Далее рассмотрев $I_1 = V_{\delta_1}(x)$, где $\delta_1 = \min(\delta_0/2, |x - x_0|)$, берём там любую точку x_1, где значение f вылетает вне ε-окрестности y. Так далее строим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся к x, значения f в которой не лежат в ε-окрестности y, что означает, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ не сходится к y, что означает, что f не сходится по Гейне в x к значению y.

2. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ не сходится по Гейне в x к значению y. Значит есть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящаяся к x, что последовательность её значений не сходится к y. Значит есть $\varepsilon > 0$, что после любого момента в последовательности будет член, значение в котором вылезает вне ε-окрестности y. Поскольку для любой проколотой окрестности x есть момент, начиная с которого вся последовательность лежит в этой окрестности, то в любой проколотой окрестности x есть член, значение которого вылезает вне ε-окрестности y, что означает, что f не сходится по Коши в x к y.

□

Утверждение 16. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в x предел тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in V_\delta(x) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Доказательство. Такое же как для последовательностей: см. теорему 5. □

Утверждение 17. *Для функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ верно, что*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a}(f + g)(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a}(-f)(x) = -\lim\limits_{x\to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim(f \cdot g)(x)$
4. $\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \lim\limits_{x\to a}(\frac{1}{f})(x)$ *(если $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$)*
5. $\lim\limits_{y\to \lim\limits_{x\to a} g(x)} f(y) = \lim\limits_{x\to a}(f \circ g)(x)$

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

Замечание 3. Утверждения 7, 8 и 9 верны, если заменить последовательности на функции, пределы последовательностей на пределы функций в некоторой точке x, а асимптотические неравенства на неравенства на окрестности x.

Определение 18. *Осцелляцией* называется $\operatorname{osc}_E f = \sup_E f - \inf_E f$.

Определение 19. *Верхним пределом* функции f в точке x_0 называется

$$\varlimsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{\delta > 0}(\sup_{V_\delta(x_0)} f)$$

Нижним пределом функции f в точке x_0 называется

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{\delta > 0}(\inf_{V_\delta(x_0)} f)$$

Утверждение 18. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в x предел тогда и только тогда, когда $\varlimsup_{t \to x} f(t) = \varliminf_{t \to x} f(t)$.*

Определение 20. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* x, если $\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$. В изолированных точках f всегда непрерывна.

Определение 21. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной на множестве* $Y \subseteq X$, если она непрерывна во всех точках Y.

Утверждение 19. *Для непрерывных на X функций f и g верно, что*

- *$f + g$ непрерывна на X;*
- *fg непрерывна на X;*
- *$\frac{1}{f}$ непрерывна на X (если $f \neq 0$).*