Дифференциальные уравнения и динамические системы.

Лектор — С.Ю.Пилюгин
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

TODOs

Содержание

Литература:

- В.И. Арнольд, "Обыкновенные дифференциальные уравнения".
- Ю.Н. Бибиков, "Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений".
- С.Ю. Пилюгин, "Пространства динамических систем", 2008.

Определение 1. *Дифференциальное уравнение* — уравнение вида

$$f(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0,$$

где x — независимая переменная, f — данная функция, а $y(x)$ — искомая функция.

Обыкновенное дифференциальное уравнение — дифференциальное уравнение над $\mathbb{R}$

Замечание. Бывают ещё дифференциальные уравнения над комплексными числами и дифференциальные уравнения в частных производных. Но это уже совершенно другие области; а мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

0.1 Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешённые относительно производных

Пусть x — независимая переменная, $y(x)$ — искомая функция. Тогда будем рассматривать уравнения вида

$$y' = f(x, y).$$

f будет всегда рассматриваться непрерывной.

Зафиксируем область (открытое связное множество) G в $\mathbb{R}^2_{x,y}$. Будем также писать $f \in C(G)$.

Определение 2. $y : (a; b) \to \mathbb{R}$ называется решением данного уравнения на $(a; b)$, если

- если y дифференцируема на $(a; b)$,
- для всякого $x \in (a; b)$ $(x, y(x)) \in G$,
- $y'(x) = f(x, y(x))$ на $(a; b)$.

Пример 1. При $k > 0$, $f(x, y) := ky$, $G = \mathbb{R}^2$ имеем уравнение

$$y = ky'.$$

Тогда всем известно, что $y(x) = ce^{kx}$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

Определение 3. *Интегральная кривая* — график решения.

Определение 4 (задача Коши)**.** Пусть фиксирована $(x_0, y_0) \in G$. $y(x)$ — *решение задачи Коши с начальными данными* (x_0, y_0), если

- $y(x)$ — решение дифференциального уравнения на некотором интервале $(a; b) \ni x_0$,
- $y(x_0) = y_0$.

Пример 2. В случае того же уравнения

$$y' = ky$$

решением будет $y(x) = y_0 e^{k(x - x_0)}$.

Определение 5. $(x_0; y_0)$ называется *точкой единственности*, если для всяких решений y_1 и y_2 задачи Коши с входными данными $(x_0; y_0)$ есть некоторая окрестность x_0, где y_1 и y_2 совпадают.

Пример 3. Возьмём уравнение

$$y' = 3y^{2/3}$$

с входными данными $(0; 0)$. Понятно, что сюда подойдёт всякое решение вида $y(x) = cx^3$ ($c \in \mathbb{R}$), что уже говорит о неединственности данной точки. Но есть случаи ещё хуже: можно склеить кусок слева одного решения и кусок справа другого и получить новое решение!

Определение 6 (поле направлений)**.** Зададим в области G поле направлений: в каждой точке $(x_0; y_0)$ поставим направление соответствующее производной $f(x_0, y_0)$. Это равносильно векторному полю, где вектор в точке $(x_0; y_0)$ — $(1; f(x_0; y_0))$. Следовательно график всякого решения $y(x)$ будет касаться поля направлений в области определения, а векторное поле будет градиентом графиком решения с нативной параметризацией по x.

Теорема 1 (существования для дифференциального уравнения 1-го порядка)**.** *Пусть имеется дифференциальное уравнение*

$$y' = f(x, y)$$

и $f \in C(G)$. Тогда для всякой точки $(x_0; y_0) \in G$ существует решение задачи Коши с начальными данными $(x_0; y_0)$.

Теорема 2 (единственности для дифференциального уравнения 1-го порядка)**.** *Пусть имеется дифференциальное уравнение*

$$y' = f(x, y)$$

и $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$. Тогда всякая точка $(x_0; y_0) \in G$ является точкой единственности.

0.2 Интегрируемые дифференциальные уравнения 1-го порядка

Первый случай. Наше уравнение имеет вид

$$y' = f(x).$$

В таком случае

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Определение 7. Пусть имеется уравнение

$$y' = f(x, y),$$

где $f \in C(G)$, а H — подобласть G. Функция $U \in C^1(H, \mathbb{R})$ (т.е. $U : H \to \mathbb{R}$ и U дифференцируема на H) называется *интегралом* этого уравнения в H, если

- $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$ в H,
- если $y : (a; b) \to \mathbb{R}$ — решение в H, то $U(x, y(x)) = \text{const}$ на $(a; b)$.

Теорема 3 (о неявной функции)**.** *Пусть дана $F \in C^1(H, \mathbb{R})$ и есть некоторая точка $(x_0; y_0) \in H$, что $F(x_0, y_0) = 0$, а $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда есть некоторые окрестности I и J точек x_0 и y_0 и функция $z \in C^1(I)$, что $z(x_0) = y_0$ и для всякой точки $(x; y) \in I \times J$, что $F(x, y) = 0$, будет верно $y = z(x)$.*

Теорема 4 (об интеграле для дифференциального уравнения 1-го порядка)**.** *Пусть имеется интеграл U уравнения $y' = f(x, y)$ в $H \subseteq G$. Тогда для всякой точки $(x_0; y_0) \in H$ будут открытые I и J, что $I \times J \subseteq H$, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, и некоторое $y(x) \in C^1(I)$, что*

- *$y(x)$ — решение задачи Коши с начальными данными $(x_0; y_0)$,*
- *для всякой точки $(x_1; y_1) \in H$, что $U(x_1; y_1) = U(x_0; y_0)$, верно $y_1 = y(x_1)$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$F(x, y) := U(x, y) - U(x_0, y_0).$$

Заметим, что $F(x_0, y_0) = 0$, а $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, т.е. F удовлетворяет условию теоремы о неявной функции. Тогда по данной теореме существуют некоторые окрестности I_0 и J_0 точек x_0 и y_0 и функция $y(x) \in C^1(I)$.

По теореме о существовании существует решение $z(x)$ задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) на $I \ni x_0$, что $(x, z(x)) \in I \times J$. По определению интеграла U имеем, что $U(x, z(x)) = U(x_0, y_0)$, а значит $F(x, z(x)) = 0$. Тогда по теореме о неявной функции $z(x) = y(x)$ на всей области определения y и z. $\square$

Замечание 1. Равенство $U(x, y) = c$ называют общим интегралом.

0.2.1 Дифференицальные уравнения с разделяющимися переменными

Будем рассматривать уравнение вида

$$y' = m(x)n(y),$$

$m \in C((a;b))$, $n \in C((\alpha;\beta))$, $G = (a;b) \times (\alpha;\beta)$.

Первый случай. Пусть $n(y_0) = 0$. Тогда есть решение $y(x) \equiv y_0$.

Второй случай. Рассмотрим некоторый интервал $I \subseteq (\alpha;\beta)$, что для всякого $y \in I$ верно $n(y) \neq 0$. Рассмотрим $y(x)$, что $(x, y(x)) \in (a;b) \times I$. Несложным преобразованием получаем, что

$$\frac{y'(x)}{n(y(x))} = m(x).$$

значит

$$\int_{x_0}^{x} m(s)ds = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)dt}{n(y(t))} = \int_{x_0}^{x} \frac{dy(t)}{n(y(t))} = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{n(z)}.$$

Обозначим первообразные

$$N(y) := \int \frac{dy}{n(y)} \qquad \text{и} \qquad M(x) := \int m(x)dx.$$

Тогда мы имеем, что

$$N(y(x)) - N(y(x_0)) = M(x) - M(x_0).$$

Определим

$$U(x,y) := N(y) - M(x).$$

Тогда

$$U(x, y(x)) = N(y(x)) - M(x) = N(y(x_0)) - M(x_0) = \mathrm{const}\,.$$

Также

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N' = \frac{1}{n(y)} \neq 0.$$

Таким образом U — интеграл данного уравнения в $(a;b) \times I$.

Теорема 5 ("критерий" интеграла)**.** *Пусть U — интеграл уравнения*

$$y' = f(x,y).$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0.$$

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение уравнения. Тогда

$$0 = \frac{d}{dx} U(x, y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)).$$

$\square$

0.2.2 Замена переменных

Идея проста и заключается в смене независимой переменной и искомой функции на новые по некоторым зависимостям от старых.

Пример 4. Пусть имеется уравнение $y' = f(ax + by)$, где a, b — ненулевые константы. Тогда можно рассмотреть функцию $v := ax + by$. Тогда

$$\frac{dv}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(v).$$

Так мы получили разделение переменных.

Пример 5. Пусть имеется уравнение $y' = m(x)n(y)$. Пусть $n(y) \neq 0$ в области определения. Тогда рассмотрим замену

$$v := N(y) = \int \frac{1}{n(y)} dy.$$

Тогда

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{n(y(x))} y'(x) = m(x).$$

Откуда мы получаем решение

$$v(x) = \int m(x)dx, \qquad \Longrightarrow \qquad N(y) = M(x) + C.$$

0.2.3 Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка

Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка — уравнения вида

$$y' = p(x)y + q(x),$$

$p, q \in C(a, b)$.

Если $q(x) \equiv 0$, то такое уравнение мы решать умеем:

$$U = \int \frac{dy}{y} - \int p(x)dx = \ln(y) - \int p(x)dx$$
$$y = Ce^{\int p(x)dx}.$$

Теперь в общем случае сделаем следующее; это называется методом Лагранжа (метод вариации произвольной переменной). Сделаем замену

$$y(x) = v(x)e^{\int p(x)dx}.$$

В таком случае уравнение приводится в вид

$$v' = \frac{q(x)}{e^{\int p(x)dx}}.$$

Уравнение Бернулли. $y' = p(x)y + q(x)y^m$ ($m = \text{const}$, $m \notin \{0; 1\}$). Если $m > 0$, то есть решение $y \equiv 0$. В общем случае сделаем замену $v = y^{1-m}$. Тогда

$$y = v^{\frac{1}{1-m}}, \qquad v' = \frac{y'}{y^m}.$$

Тогда уравнение получит вид

$$v' = p(x)v + q(x).$$

Уравнение Риккати. $y' = ay^2 + bx^\alpha$.

0.2.4 Дифференциальные уравнения 1 порядка в симметричной форме (дифференциальные уравнения Пфаффа)

Это уравнения вида $m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$.

Назовём дифференциальной 1-формой выражение вида

$$F = m(x,y)dx + n(x,y)dy,$$

где m и n не равны 0 одновременно. А интегральной кривой формы F назовём кривую $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, что

$$m(\gamma(t))\dot{\gamma_1}(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma_2}(t) = 0.$$

Можно сделать замену $y = \gamma_2(\gamma_1^{-1}(x))$. Тогда уравнение приведётся к обычному

$$m(x,y) + n(x,y)y' = 0.$$

Аналогично можно превратить всякое решение последнего уравнения обратно в решение уравнения Пфаффа.

Форма F называется *точной*, если есть $U(x,y) \in C^2(G)$, что

$$F = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

Если F точная, то $F = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах.

Теорема 6. *Если F — точная форма, то в окрестности всякой точки $(x_0; y_0) \in G$ будет интеграл U, что*

$$y' = -\frac{m}{n} \qquad \text{или} \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{n}{m}.$$

Доказательство. Рассмотрим точку $(x_0; y_0) \in G$. WLOG $n(x_0, y_0) \neq 0$. Следовательно, $n(x_0, y_0) \neq 0$ в окрестности $(x_0; y_0)$. Там рассмотрим уравнение $y' = -\frac{m}{n}$. Пусть $y(x)$ — его решение. Заметим, что

$$0 \equiv \frac{d}{dx}U(x, y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx} = m + n \cdot \left(-\frac{m}{n}\right) = 0.$$

$\square$

0.2.5 Условие точности 1-формы

Заметим, что если $U \in C^2$, то

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Т.е. для всякой точной формы $F = mdx + ndy$ верно, что

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Теорема 7. *Если для 1-формы $F = mdx + ndy$ выполнено*

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$$

на некоторой области $G = I \times J$, то она там же точна.

Доказательство. Фиксируем $(x_0, y_0) \in I \times J$ и рассмотрим функцию

$$U(x,y) := \int_{x_0}^{x} m(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} n(x,s)ds.$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial n}{\partial x}(x,s)ds = m(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial m}{\partial y}(x,s)ds = m(x,y_0) + m(x,y) - m(x,y_0) = m,$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 + n(x,y) = n.$$

□

0.2.6 Интегрирующий множитель

Определение 8. *Интегрирующий множитель* формы F — такая функция $\mu \in C^1$, что $\mu \neq 0$ и μF — точная.

Пример 6. Для уравнения с разделяющимися переменными

$$dy + m(x)n(y)dx = 0$$

интегрирующим множителем будет $1/n$ (если $n \neq 0$).

0.3 Системы дифференциальных уравнений

Определение 9. Пусть фиксировано $n \in \mathbb{N}$. Ищем n функций $x_1(t)$, …, $x_n(t)$ (t называется “переменной”). Фиксируем $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$. Система дифференциальных уравнений общего вида (система разрешённая относительно старших производных) есть система уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{d^{m_1}x_1}{(dt)^{m_1}} = f_1\left(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m_1-1}x_1}{(dt)^{m_1-1}}, \ldots, x_n, \dfrac{dx_n}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m_n-1}x_n}{(dt)^{m_n-1}}\right) \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{d^{m_n}x_n}{(dt)^{m_n}} = f_n\left(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m_1-1}x_1}{(dt)^{m_1-1}}, \ldots, x_n, \dfrac{dx_n}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m_n-1}x_n}{(dt)^{m_n-1}}\right) \end{cases}$$

Число $m = m_1 + \cdots + m_n$ называется порядком системы.

Нормальная система дифференциальных уравнений порядка n — система д. у., в которой $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$.

Дифференциальное уравнение порядка m — система д. у., в которой $n = 1$.

Лемма 8. *Всякая система д. у. порядка n равносильна некоторой нормальной системе д. у. порядка n.*

Доказательство. Пусть дана система

$$\begin{cases} \dfrac{d^{m_1}x_1}{(dt)^{m_1}} = f_1\left(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m_1-1}x_1}{(dt)^{m_1-1}}, \ldots, x_k, \dfrac{dx_k}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m_k-1}x_k}{(dt)^{m_k-1}}\right) \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{d^{m_k}x_k}{(dt)^{m_k}} = f_n\left(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m_1-1}x_1}{(dt)^{m_1-1}}, \ldots, x_k, \dfrac{dx_k}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m_k-1}x_k}{(dt)^{m_k-1}}\right) \end{cases}$$

Рассмотрим биекцию

$$\varphi : \{(i,p) \mid i \in \{1;\ldots;k\} \wedge p \in \{0;\ldots;m_i-1\}\} \to \{1;\ldots;n\}, (i,p) \mapsto \sum_{j=1}^{i-1} m_j + p + 1.$$

Тогда рассмотрим систему д.у.

$$\begin{cases} \forall i \in \{1;\ldots;k\}, p \in \{0;\ldots;m_i-2\} & \dfrac{dy_{\varphi(i,p)}}{dt} = y_{\varphi(i,p+1)} \\ \forall i \in \{1;\ldots;k\}, p = m_i - 1 & \dfrac{dy_{\varphi(i,p)}}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Несложно заметить, что системы равносильны, если сделать "соответствие" $y_{\varphi(i,p)} = \frac{d^p x_i}{(dt)^p}$. Т.е. переход к новой системе — объявление производных x_i как переменных и установка на них соответствующих ограничений, а обратно к старой — забывание промежуточных производных и восстановление сложных уравнений. □

Замечание. Далее мы будем писать (особенно для нормальных систем) производные в точечной нотации: как $\dot{x}_i$.

Замечание 2. Для всякой нормальной системы порядка n можно определить вектор $x := (x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ и оператор $f(t,x) := (f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x)) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$. Тогда система имеет вид

$$\dot{x} = f(t,x).$$

Это называется векторной записью нормальной системы д.у.

Поэтому также будем пользоваться в $\mathbb{R}^n$ нормой

$$|x| = \max_i |x_i|.$$

Таким образом рассматриваем нормальные системы

$$\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n.$$

Будем всегда предполагать, что $f \in C(G)$, где G — открытая связная область в $\mathbb{R}^{1+n}_{t,x}$.

Определение 10. $x : (a;b) \to \mathbb{R}^n$ называется *решением* этой системы, если

1. $\dot{x}$ определено на $(a;b)$,
2. $(t, x(t)) \in G$ для всякого $t \in (a;b)$,
3. $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ для всякого $t \in (a;b)$.

Определение 11. $x : (a;b) \to \mathbb{R}^n$ — *решение задачи Коши* с начальными данными $(t_0, x_0) \in G$, если

1. $t_0 \in (a;b)$,
2. $x(t)$ — решение на $(a;b)$,
3. $x(t_0) = x_0$.

Определение 12. *Интегральное уравнение*:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Решение интегрального уравнения — функция $x : (a; b) \to \mathbb{R}^n$:

1. $x \in C(a; b)$,
2. $(t, x(t)) \in G$ для всякого $t \in (a; b)$,
3. $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$ для всякого $t \in (a; b)$.

Лемма 9. *Для всякого $f \in C(G)$ и $(t_0, x_0) \in G$ задача Коши для*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

и интегральное уравнение

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

равносильны.

Определение 13. Пусть есть какое-то разбиение отрезка $[a; b]$ $t_0 = a, t_1, \ldots, t_N = b$. Пусть также рассматривается интегральное уравнение для $(a, x_0) \in G$ и $f \in C(G)$. Ломанной Эйлера называется функция $g : [a; b] \to \mathbb{R}^n$, что $g(t_0) = x_0$, а на каждом отрезке $[t_{k-1}; t_k]$ $g(t) = g(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, g(t_{k-1}))(t - t_k)$.

Теорема 10 (Пеано)**.** *Для всякой $f \in C(G)$ и $(t_0, x_0) \in G$ есть решение задачи Коши.*

Доказательство. Существуют $\alpha, \beta > 0$, что

$$R := \{(t, x) \mid |t - t_0| \leqslant \alpha \land |x - x_0| \leqslant \beta\}$$

будет подмножеством G. R компактно, а значит есть $M > 0$, что $\left| f|_R \right| \leqslant M$. Пусть $h := \min(\alpha, \beta/M)$. Покажем, что есть решение задачи Коши на промежутке $(t_0 - h; t_0 + h)$ (так называемый *промежуток Пеано*). □