Теоретическое домашнее задание от 01.10
Дифференциальные уравнения и динамические системы

Глеб Минаев @ 204 (20.Б04-мкн)

3 октября 2021 г.

Задача 5. Пусть γ_1 и γ_2 — два различных решения задачи Коши для уравнений $y' = f(x, y)$ для входных данных (x_0, y_0). Тогда рассмотрим функции

$$\delta := \gamma_2 - \gamma_1 \qquad \text{и} \qquad g(x, y) := f(x, y + \gamma_1(x)) - f(x, \gamma_1(y)).$$

Понятно, что g определена и непрерывна в той же окрестности точки (x_0, y_0), а δ — нетривиальное (т.е. $\not\equiv 0$) решение задачи Коши для уравнения $y' = g(x, y)$ для входных данных (x_0, y_0). При этом

$$|g(x, y)| = |f(x, y + \gamma_1(x)) - f(x, \gamma_1(y))| \leqslant \varphi(|y|).$$

Следовательно,

$$|\delta'| \leqslant \varphi(|\delta|), \qquad \frac{\delta'}{\varphi(|\delta|)} \in [-1; 1].$$

Поскольку $\delta(0) = 0$, но $\delta \not\equiv 0$, то есть некоторые a и b, что $\delta(a)$, что $\delta(a) = 0$, $\delta((a; b]) > 0$. Действительно, мы живём в некоторой окрестности (x_0, y_0), а множество точек, где $\delta \neq 0$, есть тоже открытое множество, то оно является дизъюнктным объединением интервалов (при этом не вся окрестность, так как $\delta(0) = 0$). Т.е. есть интервал (любой интервал из описанного разбиения), где $\delta \neq 0$, а на концах $\delta = 0$ (если определено; но точно определено хотя бы в одном из концов, так как иначе данный интервал совпадает с окрестностью, в которой мы живём). Тогда сузив интервал с одного из концов, получаем интервал $(a; b)$, где $\delta((a; b)) > 0$, $\delta(a) = 0$ и $\delta(b) > 0$ (есть также вариант, где $\delta < 0$ на $(a; b]$, но там задача очевидна). Тогда мы имеем, для всякого $t \in (a; b)$, что

$$\int_t^b \frac{\delta'}{\varphi(|\delta|)} dx = \int_t^b \frac{1}{\varphi(\delta(x))} d\delta(x) = \int_{\delta(t)}^{\delta(b)} \frac{1}{\varphi(\lambda)} d\lambda,$$

и при этом

$$\left| \int_t^b \frac{\delta'}{\varphi(|\delta|)} dx \right| \leqslant \int_t^b \left| \frac{\delta'}{\varphi(|\delta|)} \right| dx \leqslant \int_t^b 1 dx = |b - t| \leqslant |b - a|.$$

Но тогда

$$+\infty = \int_{\delta(a)}^{\delta(b)} \frac{1}{\varphi(\lambda)} d\lambda = \lim_{t \to a^+} \int_{\delta(t)}^{\delta(b)} \frac{1}{\varphi(\lambda)} d\lambda \leqslant \lim_{t \to a^+} |b - a| = |b - a|$$

— противоречие. Значит δ тривиально, т.е. $\gamma_1 = \gamma_2$, т.е. (x_0, y_0) — точка единственности.
