

# Математический анализ — 1.

Юрий Сергеевич Белов

Литература:

- В. А. Зорич “Математический анализ”
- О. Л. Виноградов “Математический анализ”
- (подходит попозже) Г. М. Фихтенгельц “Курс дифференциального и интегрального исчисления”
- У. Рудин “Основы анализа”
- М. Спивак “Математический анализ на многообразиях”
- В. М. Тихомиров “Рассказы о максимумах и минимумах”

## 1 Множества, аксиоматика и вещественные числа.

Мы начинаем с теории множеств.

**Определение 1.**

- Множества и элементы — понятно.
- $a \in B$  — понятно.
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$  — объединение.
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$  — пересечение.
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$  — разность.
- $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$  — симметрическая разница.
- $A^C := X \setminus A$  — дополнение, где  $X$  — некоторое фиксированное рассматриваемое множество.
- $A \subset B$  — “ $A$  — подмножество  $B$ ”, т.е.  $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ .

**Следствие.**

- (первое правило Моргана)  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ .

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A^C \\ x \in B^C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$$

- (второе правило Моргана)  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ . Аналогично.

**Определение 2.** (Аксиома индукции.) Пусть есть функция  $A : \mathbb{N} \rightarrow \text{true}; \text{false}$ , что:

1.  $A(1) = \text{true}$ ;
2.  $\forall n(A(n) \rightarrow A(n+1))$ .

Тогда  $\forall n A(n)$ .

Определение натуральных чисел сложно, рассматривать его не будем. Важно также иметь в виду натуральные числа с операциями сложения и умножения.

**Определение 3.** Пусть есть кольцо без делителей нуля  $R$ . Рассмотрим отношение эквивалентности  $\sim$  на  $R \times (R \setminus \{0\})$ , что  $(a; b) \sim (c; d) \Leftrightarrow ad = bc$ . Тогда  $\text{Quot}(R)$  — фактор-множество по  $\sim$  и поле.

**Определение 4.** Рациональные числа —  $\mathbb{Q} := \text{Quot}(\mathbb{Z})$ .

**Теорема 1.**  $\nexists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$ .

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существуют взаимно простые  $m \in \mathbb{Z}$  и  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , что  $(\frac{m}{n})^2 = 2$ . Тогда  $m^2 = n^2$ . Очевидно, что тогда  $m^2 : 2$ , значит  $m : 2$ , значит  $m : 4$ , значит  $n^2 : 2$ , значит  $n : 2$ , значит  $n$  и  $m$  не взаимно просты, так как делятся на 2 — противоречие.  $\square$

Теперь мы хотим понять, что есть вещественные числа. Тут есть несколько подходов.

**Определение 5** (аксиоматический подход). Вещественные числа — это полное упорядоченное поле  $\mathbb{R}$ , состоящее не из одного элемента.

Здесь “поле” значит, что на множестве (вместе с его операциями и выделенными элементами) верны аксиомы поля  $A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4$  и  $D$  (т.е. сложение и умножение ассоциативны, коммутативны имеют нейтральные элементы и удовлетворяют условию существованию обратных (по умножению — для всех кроме нуля), а также дистрибутивности).

Упорядоченность значит, что есть рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение  $\preceq$ , что все элементы сравнимы, согласованное с операциями, т.е.:

$$A) a \preceq b \Rightarrow a + x \preceq b + x.$$

$$M) 0 \preceq a \wedge 0 \preceq b \Rightarrow 0 \preceq ab.$$

Полнота поля значит любое из следующих утверждений (они равносильны):

- любое ограниченное сверху (снизу) подмножество поля имеет точную верхнюю (нижнюю) грань;
- (аксиома Кантора-Дедекинда) для любых двух множеств  $A$  и  $B$ , что  $A \preceq B$ , есть разделяющий их элемент.

Итого мы имеем 9 аксиом поля, 2 аксиомы упорядоченности и 1 аксиома полноты упорядоченности.

**Утверждение.** Над  $\mathbb{Q}$  нет элемента разделяющего  $A := \{a > 0 \mid a^2 < 2\}$  и  $B := \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$ .

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. есть  $c > 0$ , что  $A < c < B$ .

Если  $c^2 < 2$ , то найдём  $\varepsilon$ , что  $\varepsilon \in (0; 1)$  и  $(c + \varepsilon)^2 < 2$ . Заметим, что  $(c + \varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < c^2 + (2c + 1)\varepsilon$ . Пусть  $\varepsilon < \frac{2-c^2}{2c+1}$ , тогда такое  $\varepsilon$  точно подойдёт, ну а поскольку  $\frac{2-c^2}{2c+1} > 0$ , то такое  $\varepsilon$  есть. Значит  $c^2 \geq 2$ .

Аналогично имеем, что  $\varepsilon \leq 2$ . А значит  $c^2 = 2$ , что не бывает над  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

**Следствие.**  $\mathbb{Q}$  не полно.

**Определение 6.**

- **Закрытый интервал** или **отрезок**  $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ .
- **Открытый интервал** или просто **интервал**  $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ .
- **Полуоткрытый интервал** или **полуинтервал**  $(a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ,  $[a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ .

**Теорема 2** (Лемма о вложенных отрезках). Пусть имеется  $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$  — множество вложенных (непустых) отрезков, т.е.  $\forall n > 1 \ I_{n+1} \subset I_n$ . Тогда  $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Заметим, что для любых натуральных  $n < m$  верно, что  $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$ , где  $I_n = [a_n; b_n]$ . Тогда для  $A := \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  и  $B := \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$  верно, что  $A \leq B$ . Значит есть разделяющий их элемент  $t$ , значит  $A \leq t \leq B$ , значит  $t \in I_i$  для всех  $i$ , значит  $t \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$ .  $\square$

**Замечание 1.** Теорема 2 не верна для не отрезков.

**Замечание 2.** Если в теореме 2  $b_i - a_i$  “сходится к 0”, т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall i > n \ b_i - a_i < \varepsilon$ , то пересечение всех отрезков состоит из ровно одного элемента.

**Теорема 3** (индукция на вещественных числах). Пусть дано множество  $X \subseteq [0; 1]$ , что

1.  $0 \in X$ ;
2.  $\forall x \in X \exists \varepsilon > 0 : U_{\varepsilon}(x) \cap [0; 1] \subseteq X$ ;
3.  $\forall Y \subseteq X \sup(Y) \in X$ .

Тогда  $X = [0; 1]$ .

**Доказательство.** Предположим противное:  $X \neq [0; 1]$ . Рассмотрим  $Z := [0; 1] \setminus X$  ( $Z \neq \emptyset$ ) и  $Y := \{y \in [0; 1] \mid y < Z\}$  ( $Y \neq \emptyset$ ). Заметим, что  $Y \subseteq X$  и  $\sup(Y) = \inf(Z) = t$ . Тогда  $t \in X$  по второму условию. Значит для некоторого  $\varepsilon > 0$  верно, что  $U_{\varepsilon}(t) \cap [0; 1] \in X$ , а т.е.  $(U_{\varepsilon}(t) \cap [0; 1]) \cap Z = \emptyset$ , а тогда  $t \neq \inf(Z)$  — противоречие. Значит  $X = [0; 1]$ .  $\square$

## 2 Топология прямой, пределы и непрерывность.

### 2.1 Топология

**Определение 7.**  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$  (для  $\varepsilon > 0$ ) —  $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ . Обозначение:  $U_{\varepsilon}(x)$ .

Проколотая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$  —  $(x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon)$ . Обозначение:  $V_{\varepsilon}(x)$ .

**Определение 8.** Пусть дано некоторое множество  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Тогда точка  $x \in X$  называется внутренней точкой множества  $X$ , если она содержится в  $X$  вместе со своей окрестностью.

Само множество  $X$  называется открытым, если все его точки внутренние.

**Пример 1.** Следующие множества открыты:

- $(a; b)$ ;
- $(a; +\infty)$ ;
- $\mathbb{R}$ ;

- $\emptyset$ ;
- $\bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i; b_i)$  (интервалы не обязательно не должны пересекаться).

**Определение 9.** Пусть дано множество  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется *предельной точкой* множества, если в любой проколотой окрестности  $x$  будет какая-либо точка  $X$ .

Множество предельных точек  $X$  называется *производным множеством* множества  $X$  и обозначается как  $X'$ .

Множество  $X$  называется *замкнутым*, если  $X \supseteq X'$ .

**Определение 10.** Пусть дано множество  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Если у любой последовательности его точек есть предельная точка из самого множества  $X$ , то  $X$  называется *компактным*.

**Утверждение 4.** Подмножество  $\mathbb{R}$  компактно тогда и только тогда, когда замкнуто и ограничено.

## 2.2 Последовательности, пределы и ряды

**Определение 11.** Предел последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  — такое число  $x$ , что для любой окрестности  $x$  эта последовательность с некоторого момента будет лежать в этой окрестности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad x_n \in U_{\varepsilon}(x)$$

Обозначение:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = x$ .

*Предельная точка последовательности*  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  — такое число  $x$ , что в любой его окрестности после любого момента появится элемент данной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : \quad x_n \in U_{\varepsilon}(x)$$

**Определение 12.** Последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$$

**Теорема 5.** Последовательность сходится тогда и только тогда, когда фундаментальна.

**Доказательство.**

1. Пусть последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится к некоторому значению  $X$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| = |x_{n_1} - X + X - x_{n_2}| \leq |x_{n_1} - X| + |X - x_{n_2}| < \varepsilon$$

2. Пусть последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  фундаментальна. Мы знаем, что для каждого  $\varepsilon > 0$  все члены, начиная с некоторого различаются менее чем на  $\varepsilon$ . Тогда возьмём какой-нибудь такой член  $y_0$  для некоторого  $\varepsilon$ , затем какой-нибудь такой член  $y_1$  для  $\varepsilon/2$ , который идёт после  $y_0$  и так далее. Получим последовательность, что все члены, начиная с  $n$ -ого лежат в  $\varepsilon/2^n$ -окрестности  $y_n$ . Тогда рассмотрим последовательность  $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ , где  $I_n = [y_n - \varepsilon/2^{n-1}; y_n + \varepsilon/2^{n-1}]$ . Несложно понять, что  $I_n \supseteq I_{n+1}$ , поэтому в пересечении  $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$  лежит некоторый  $X$ . Несложно понять, что все члены начальной последовательности, начиная с  $y_{n+2}$ , лежат в  $\varepsilon/2^{n+2}$ -окрестности  $y_{n+2}$ . При этом  $|y_{n+2} - X| \leq \varepsilon/2^{n+1}$ , что значит, что все члены главной последовательности, начиная с  $y_{n+2}$  лежат в  $3\varepsilon/2^{n+2}$ -окрестности  $X$ , а значит и в  $\varepsilon/2^n$ .

□

**Утверждение 6.** Для последовательностей  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  и  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  верно (если определено), что

1.  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} + \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$
2.  $-\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$
3.  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n y_n\}_{n=0}^{\infty}$
4.  $\frac{1}{\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}} = \lim\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$  (если  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \neq 0$ )

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

**Доказательство.**

1. Пусть  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$ ,  $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, M \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon/2 \quad \wedge \quad \forall m > M \quad |y_m - Y| < \varepsilon/2,$$

тогда

$$\forall n > \max(N, M) \quad |(x_n + y_n) - (X + Y)| \leq |x_n - X| + |y_n - Y| < \varepsilon,$$

что означает, что  $\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится и сходится к  $X + Y$ .

2. Пусть  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon,$$

тогда

$$\forall n > N \quad |(-x_n) - (-X)| = |X - x_n| = |x_n - X| < \varepsilon,$$

что означает, что  $\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится и сходится к  $-X$ .

3. Пусть  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$ ,  $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$ . Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} + \frac{|x|+|y|}{2}} = \sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} - \frac{|x|+|y|}{2}$$

Несложно видеть, что  $\delta(\varepsilon)$  всегда определено и всегда положительно. Также несложно видеть, что  $\delta(\varepsilon)$  есть корень уравнения  $t^2 + t(|X| + |Y|) = \varepsilon$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, M \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad |x_n - X| < \delta(\varepsilon) \quad \wedge \quad \forall m > M \quad |y_m - Y| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\begin{aligned} \forall n > \max(N, M) \quad |x_n \cdot y_n - X \cdot Y| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot Y + x_n \cdot Y - X \cdot Y| \\ &\leq |x_n \cdot (y_n - Y)| + |(x_n - X) \cdot Y| \\ &< |x_n| \cdot \delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \cdot |Y| \\ &< (|X| + \delta(\varepsilon)) \cdot \delta(\varepsilon) + |Y| \cdot \delta(\varepsilon) \\ &= \delta(\varepsilon)^2 + (|X| + |Y|)\delta(\varepsilon) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

что означает, что  $\{x_n \cdot y_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится и сходится к  $X \cdot Y$ .

4. Пусть  $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = X$ . Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon|X|}{1 + \varepsilon|X|}$$

Несложно видеть, что  $\delta(\varepsilon)$  всегда определено и всегда меньше  $|X|$ . Также несложно видеть, что  $\delta(\varepsilon)$  есть корень уравнения  $\frac{t}{|X|(|X|-t)} = \varepsilon$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad |x_n - X| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\forall n > N \quad \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{X} \right| = \left| \frac{X - x_n}{X \cdot x_n} \right| < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X| \cdot |x_n|} < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X|(|X| - \delta(\varepsilon))} = \varepsilon,$$

что означает, что  $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^\infty$  сходится и сходится к  $1/X$ .

□

**Определение 13.** Последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  *асимптотически больше* последовательности  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ , если  $x_n > y_n$  для всех натуральных  $n$ , начиная с некоторого. Обозначение:  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$ .

Аналогично определяются *асимптотически меньше* ( $\{x_n\}_{n=0}^\infty \prec \{y_n\}_{n=0}^\infty$ ), *асимптотически не больше* ( $\{x_n\}_{n=0}^\infty \preceq \{y_n\}_{n=0}^\infty$ ) и *асимптотически не меньше* ( $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$ ).

**Утверждение 7.** Если  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$ , то  $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty \geq \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$ .

**Доказательство.** Предположим противное, т.е.  $Y > X$ , где  $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$ . Тогда пусть  $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$ . С каких-то моментов  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  и  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  находятся в  $\varepsilon$ -окрестностях  $X$  и  $Y$  соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов,  $y_n > Y - \varepsilon = X + \varepsilon > x_n$ , т.е.  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \prec \{y_n\}_{n=0}^\infty$  — противоречие. Значит  $X \geq Y$ . □

**Утверждение 8.** Если  $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty > \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$ , то  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$ . Тогда пусть  $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$ . С каких-то моментов  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  и  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  находятся в  $\varepsilon$ -окрестностях  $X$  и  $Y$  соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов,  $x_n > X - \varepsilon = Y + \varepsilon > y_n$ , т.е.  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$ . □

**Утверждение 9** (лемма о двух полицейских). Если

$$\{x_n\}_{n=0}^\infty \succeq \{y_n\}_{n=0}^\infty \succeq \{z_n\}_{n=0}^\infty$$

и

$$\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = \lim\{z_n\}_{n=0}^\infty = A,$$

то предел  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  определён и равен  $A$ .

**Доказательство.** Для каждого  $\varepsilon > 0$  есть  $N, M \in \mathbb{N}$ , что

$$\forall n > N \quad |x_n - A| < \varepsilon \quad \wedge \quad \forall m > M \quad |z_m - A| < \varepsilon,$$

значит

$$\forall n > \max(N, M) \quad A + \varepsilon > x_n \geq y_n \geq z_n > A - \varepsilon \quad \text{т.е.} \quad |y_n - A| < \varepsilon,$$

что означает, что  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  сходится и сходится к  $A$ . □

**Утверждение 10.** Если  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = A$ , а  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  не убывает (с некоторого момента), то предел  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  существует и не превосходит  $A$ .

**Доказательство.** Если последовательность  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  возрастает не с самого начала, то ототрежем её начало с до момента начала возрастания. Заметим, что она ограничена сверху (из-за последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ), тогда определим  $B := \sup(\{y_n\}_{n=0}^{\infty})$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |B - x_N| < \varepsilon$ , тогда  $\forall n > N \quad |B - x_n| < \varepsilon$ , что означает, что  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится и сходится к  $B$ . По утверждению 7  $A \geq B$ .  $\square$

**Определение 14.** Сумма ряда  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  есть значение  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim \left\{ \sum_{i=0}^k \right\}_{k=0}^{\infty}$ . Частичной же суммой  $s_k$  этого ряда называется просто  $\sum_{i=0}^k a_i$ .

**Определение 15.** Ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  *сильно сходится*, если  $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$  сходится.

**Теорема 11.** Если ряд *сильно сходится* сходится, то он сходится.

**Доказательство.**

**Лемма 11.1.** Пусть ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  сходится, тогда сходится любой его “хвост” (суффикс), и для любого  $\varepsilon > 0$  есть такой хвост, сумма которого меньше  $\varepsilon$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ . Это значит, что для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n \geq N$  верно, что  $\sum_{i=0}^n |a_i| \in U_{\varepsilon}(A)$ . Тогда заметим, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=N+1}^n |a_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^n |a_i| - \sum_{i=0}^N |a_i| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n |a_i| - \sum_{i=0}^N |a_i| = A - \sum_{i=0}^N |a_i| \in U_{\varepsilon}(0)$$

Это и означает, что любой хвост сходится. И так мы для каждого  $\varepsilon$  нашли такой хвост, что его сумма меньше  $\varepsilon$ .  $\square$

Пусть дан сильно сходящийся ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ . Пусть  $\varepsilon_n := \sum_{i=n}^{\infty} |a_i|$ . Несложно видеть, что  $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$  монотонно уменьшается, сходясь к 0 (последнее следует из леммы 11.1). Также несложно видеть по рассуждениям леммы 11.1, что  $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = |a_n|$ . Тогда определим

$$S_n := \overline{U}_{\varepsilon_{n+1}} \left( \sum_{i=0}^n a_i \right),$$

где  $\overline{U}_{\varepsilon}(x)$  — закрытая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$ . Тогда несложно видеть, что

$$\left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i - \sum_{i=0}^n a_i \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| \leq \varepsilon_{n+1}$$

Тем самым сумма любого префикса длины хотя бы  $n+1$  лежит в  $\overline{U}_{\varepsilon_{n+1}}(\sum_{i=0}^n a_i) = S_n$ . Также несложно видеть, что  $S_{n+1} \subseteq S_n$ . А также понятно, что  $S_i$  замкнуто и ограничено (“компактно”).

Пусть  $A := \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$  (поскольку диаметры шаров сходятся к нулю, то в пересечении лежит не более одной точки). Тогда мы видим, что  $|\sum_{i=0}^n a_i - A| \leq \varepsilon_{n+1} \rightarrow 0$ , поэтому  $\sum_{i=0}^n a_i$  сходится и сходится к  $A$ .  $\square$

**Следствие 11.1.** Если  $\{b_i\}_{i=0}^{\infty} \succcurlyeq \{|a_i|\}_{i=0}^n$  и  $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$  существует, то и  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  существует.

**Теорема 12** (признак Лейбница). Пусть дана последовательность  $\{a_n\}$ , монотонно сверху сходящаяся к 0. Тогда ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$  сходится.

**Доказательство.** Рассмотрим последовательности

$$\{P_n\}_{n=0}^\infty := \{S_{2n}\}_{n=0}^\infty = \left\{ \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i \right\}_{n=0}^\infty \quad \{Q_n\}_{n=0}^\infty := \{S_{2n+1}\}_{n=0}^\infty = \left\{ \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i \right\}_{n=0}^\infty$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0 & Q_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0 \\ Q_n - P_n &= -a_{2n+1} \leq 0 & P_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

Тогда имеем, что  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  монотонно убывает,  $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$  монотонно возрастает, а также

$$\{P_n\}_{n=0}^\infty \geq \{Q_n\}_{n=0}^\infty.$$

Тогда последовательности  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  и  $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$  сходятся и сходятся к  $P$  и  $Q$  соответственно. При этом последовательность

$$\{P_n\}_{n=0}^\infty - \{Q_n\}_{n=0}^\infty = \{P_n - Q_n\}_{n=0}^\infty = a_{2n+1}$$

тоже сходится по условию и сходится к 0. Поэтому

$$P - Q = \lim\{P_n\}_{n=0}^\infty - \lim\{Q_n\}_{n=0}^\infty = 0$$

значит  $P = Q$ . Значит и последовательность префиксных сумм тоже сходится к  $P = Q$ .  $\square$

**Лемма 13** (преобразование Абеля).

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

где  $B_n := \sum_{i=0}^n b_i$ .

**Теорема 14** (признак Дирихле). Если даны  $\{a_i\}_{i=0}^\infty$  и  $\{b_i\}_{i=0}^\infty$ , что  $\{a_i\}_{i=0}^\infty \searrow 0$ , а  $\{B_n\}_{n=0}^\infty = \{\sum_{i=0}^n b_i\}_{i=0}^\infty$  ограничена, то ряд  $\sum_{i=0}^\infty a_i b_i$  сходится.

**Доказательство.**

$$S_n = \sum_{i=0}^n a_i b_i = \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) B_i + a_{n+1} B_n$$

Пусть  $|B_n| < C$  для всех  $n$ . Несложно видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n B_n| \leq \lim a_n C = C \lim a_n = 0,$$

поэтому  $\lim a_n B_n = 0$ . Также

$$|(a_k - a_{k+1}) B_k| < C |a_k - a_{k+1}| = C(a_k - a_{k+1}),$$

поэтому

$$|S_n - a_{n+1} B_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k| < C \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = C(a_0 - a_{n+1}),$$

что тоже сходится. Поэтому  $\{S_n\}_{n=0}^\infty$  сходится, т.е. и ряд сходится.  $\square$



## 2.3 Пределы функций, непрерывность

**Определение 16** (по Коши). *Предел функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  при в точке  $x$  — такое значение  $y$ , что*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(V_\delta(x) \cap X) = U_\varepsilon(y)$$

Обозначение:  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = y$ .

**Определение 17** (по Гейне). *Предел функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  при в точке  $x$  — такое значение  $y$ , что для любой последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  элементов  $X \setminus \{x\}$  последовательность  $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$  сходится к  $y$ . Обозначение:  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = y$ .*

**Теорема 15.** *Определения пределов по Коши и по Гейне равносильны.*

**Доказательство.** Будем доказывать равносильность отрицаний утверждений, ставимых в определениях.

1. Пусть функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  не сходится по Коши в  $x$  к значению  $y$ . Значит есть такое  $\varepsilon > 0$ , что в любой проколотой окрестности  $x$  (в множестве  $X$ ) есть точка, значение  $f$  в которой не лежит в  $\varepsilon$ -окрестности. Рассмотрим любую такую проколотую окрестность  $I_0 = V_{\delta_0}(x)$ , берём в ней любую такую точку  $x_0$ . Далее рассмотрим  $I_1 = V_{\delta_1}(x)$ , где  $\delta_1 = \min(\delta_0/2, |x - x_0|)$ , берём там любую точку  $x_1$ , где значение  $f$  вылетает вне  $\varepsilon$ -окрестности  $y$ . Так далее строим последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , сходящуюся к  $x$ , значения  $f$  в которой не лежат в  $\varepsilon$ -окрестности  $y$ , что означает, что  $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$  не сходится к  $y$ , что означает, что  $f$  не сходится по Гейне в  $x$  к значению  $y$ .
2. Пусть функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  не сходится по Гейне в  $x$  к значению  $y$ . Значит есть последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , сходящаяся к  $x$ , что последовательность её значений не сходится к  $y$ . Значит есть  $\varepsilon > 0$ , что после любого момента в последовательности будет член, значение в котором вылезает вне  $\varepsilon$ -окрестности  $y$ . Поскольку для любой проколотой окрестности  $x$  есть момент, начиная с которого вся последовательность лежит в этой окрестности, то в любой проколотой окрестности  $x$  есть член, значение которого вылезает вне  $\varepsilon$ -окрестности  $y$ , что означает, что  $f$  не сходится по Коши в  $x$  к  $y$ .

□

**Утверждение 16.** *Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  имеет в  $x$  предел тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in V_\delta(x) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

**Доказательство.** Такое же как для последовательностей: см. теорему 5.

□

**Утверждение 17.** *Для функций  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  верно, что*

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} (-f)(x) = -\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$
4.  $\frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (\frac{1}{f})(x)$  (если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ )
5.  $\lim_{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x)} f(y) = \lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x)$

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

**Замечание 3.** Утверждения 7, 8 и 9 верны, если заменить последовательности на функции, пределы последовательностей на пределы функций в некоторой точке  $x$ , а асимптотические неравенства на неравенства на окрестности  $x$ .

**Определение 18.** *Осцилляцией* называется  $\text{osc}_E f = \sup_E f - \inf_E f$ .

**Определение 19.** *Верхним пределом* функции  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{\delta > 0} \left( \sup_{V_\delta(x_0)} f \right)$$

*Нижним пределом* функции  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\delta > 0} \left( \inf_{V_\delta(x_0)} f \right)$$

**Утверждение 18.** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  имеет в  $x$  предел тогда и только тогда, когда  $\overline{\lim}_{t \rightarrow x} f(t) = \underline{\lim}_{t \rightarrow x} f(t)$ .

**Определение 20.** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *непрерывной* в точке  $x$ , если  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$ . В изолированных точках  $f$  всегда непрерывна.

**Определение 21.** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *непрерывной на множестве*  $Y \subseteq X$ , если она непрерывна во всех точках  $Y$ .

**Утверждение 19.** Для непрерывных на  $X$  функций  $f$  и  $g$  верно, что

- $f + g$  непрерывна на  $X$ ;
- $fg$  непрерывна на  $X$ ;
- $\frac{1}{f}$  непрерывна на  $X$  (если  $f \neq 0$ ).

**Утверждение 20.** Для  $f$ , непрерывной в  $x_0$ , и  $g$ , непрерывной в  $f(x_0)$ ,  $g \circ f$  непрерывна в  $x_0$ .

**Теорема 21** (Вейерштрасса). Непрерывная функция на компакте ограничена на нём и принимает на нём свои минимум и максимум.

**Доказательство.** Докажем утверждение для ограниченности сверху и максимума; для ограниченности снизу и минимума рассуждения аналогичны.

Пусть множество неограниченно сверху. Тогда есть  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , что  $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty \rightarrow +\infty$ . Тогда рассмотрим подпоследовательность  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , сходящуюся к  $y$ . Тогда

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = +\infty$$

— противоречие.

Тогда существует последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , что  $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$  сходится к супремуму  $S$  функции. Рассмотрим подпоследовательность  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , сходящуюся к  $y$ . Тогда

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = S$$

□

**Следствие 21.1.** Так как отрезок компактен, то любая непрерывная на нём функция ограничена и принимает на нём свои максимум и минимум.

**Теорема 22** (о промежуточном значении). Пусть  $f$  непрерывна на  $[a; b]$ , а  $f(a) < f(b)$ . Тогда  $\forall y \in [f(a); f(b)]$  найдётся  $c \in [a; b]$ , что  $f(c) = y$ .

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность  $\{(a_n; b_n)\}_{n=0}^{\infty}$ , что  $(a; b) = (a_0; b_0)$ , а следующие пары определяются так: если  $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$ , то  $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (\frac{a_n+b_n}{2}; b_n)$ , иначе  $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (a_n; \frac{a_n+b_n}{2})$ . Тогда  $c = \lim\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Тогда

$$f(c) = \lim\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{f(b_n)\}_{n=0}^{\infty},$$

откуда получаем, что  $f(c) \geq y$  и  $f(c) \leq y$ , т.е.  $f(c) = y$ . □

**Определение 22.** Функция  $f$  равномерно непрерывна на  $X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

**Теорема 23** (Кантор). Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна.

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x, y : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Тогда рассмотрим последовательность пар  $x$  и  $y$  построенных так для  $\delta$ , сходящихся к 0. Из неё выделим подпоследовательность, что  $x$  сходится к некоторому  $a$ . Тогда  $y$  сойдутся к нему же. Тогда в любой окрестности  $a$  будет пара точек  $(x'; y')$ , что  $|f(x') - f(y')| > \varepsilon$ , значит будет в любой окрестности  $x$  будет точка, выбивающаяся из  $\varepsilon/2$ -окрестности — противоречие с непрерывностью. □

**Определение 23.** Пусть есть функции  $f$  и  $g$ , что  $|f| \leq C|g|$  в окрестности  $x$  для некоторого  $C \in \mathbb{R}$ , тогда пишут, что  $f = O(g)$  (при  $t \rightarrow x$ ).

Если же  $\forall \varepsilon > 0$  будет такая окрестность  $x_0$ , что  $|f| \leq \varepsilon|g|$  в этой окрестности, тогда пишут, что  $f = o(g)$  (при  $t \rightarrow x$ ).

## 2.4 Гладкость (дифференцируемость)

**Определение 24.** Функция  $f$  называется *гладкой (дифференцируемой)* в  $x$ , если  $f(x + \delta) = f(x) + A\delta + o(\delta)$  для некоторого  $A \in \mathbb{R}$ . В таком случае  $A$  называется *дифференциалом (производной)*  $f$  в точке  $x$ .

Обозначение:  $f'(x) = A$ .

**Определение 25.** Функция  $f$  называется *гладкой (дифференцируемой)* в  $x$ , если предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$$

определён. В таком случае его значение называется *дифференциалом (производной)*  $f$  в точке  $x$ .

**Утверждение 24.** Определения 24 и 25 равносильны.

**Утверждение 25.** Непрерывная в некоторой точке функция там же непрерывна.

**Определение 26.** Функция, значения которой равны производным функции  $f$  в тех же точках называется *производной функцией* (или просто *производной*) функции  $f$ . Обозначение:  $f'$ .

**Лемма 26.** Для дифференцируемых в  $x$  функций  $f$  и  $g$

1.  $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ ;
2.  $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  (правило Лейбница);
3.  $(\frac{1}{f})'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$ ;
4.  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ .

**Лемма 27.** Пусть дана  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция. Тогда существует  $g : [f(a); f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция, что  $g \circ f = Id$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $f$  — монотонно возрастающая (убывающая) биекция из  $[a; b]$  в  $[f(a); f(b)]$ . Тогда существует монотонно возрастающая (убывающая) биекция  $g : [f(a); f(b)] \rightarrow [a; b]$ , что  $g \circ f = id$ . Осталось показать, что  $g$  непрерывна.

Предположим противное, тогда в любой окрестности некоторой точки  $f(x)$  из  $[f(a); f(b)]$  есть точки вылетающие вне  $\varepsilon$ -окрестности. Значит все точки из либо  $(x - \varepsilon; x)$ , либо  $(x; x + \varepsilon)$  не принимаются, значит  $g$  не биекция — противоречие. Значит  $g$  непрерывна.  $\square$

**Лемма 28.**

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

**Доказательство.** Пусть  $g := f^{-1}$ . Тогда

$$1 = Id' = (f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$$

Откуда следует, что

$$(f^{-1})' = g' = \frac{1}{f' \circ g} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

$\square$

**Определение 27.** Функция  $f$  возрастает в точке  $y$ , если есть  $\varepsilon > 0$ , что  $f(x) \leq f(y)$  для любого  $x \in (y - \varepsilon; y)$  и  $f(x) \geq f(y)$  для любого  $x \in (y; y + \varepsilon)$ .

Аналогично определяется убываемость функции в точке.

**Лемма 29.** Если  $f$  возрастает в любой точке на  $[a; b]$ , то  $f(a) \leq f(b)$ .

**Доказательство.**

1. Можно рассмотреть для каждой точки  $[a; b]$  окрестность, для которой верна её возрастательность, и из покрытия, ими образуемого, выделить конечное. А тогда перебираясь между общими точками окрестностей, получим искомое.
2. Также можно предположить противное, рассмотреть последовательность вложенных отрезков, у которых левый конец выше правого, и тогда для точки пересечения отрезков будет противоречие.

$\square$

**Следствие 29.1.**  $f$  возрастает на всём отрезке.

**Теорема 30.** Если  $f$  гладка, а  $f'$  положительна на  $[a; b]$ , то  $f$  строго возрастает на  $[a; b]$ .

**Доказательство.** Несложно видеть, что в любой точке на  $[a; b]$  у функции есть окрестность, где она строго возрастает, так как если  $t \in [a; b]$ , а  $f'(t) = \lambda > 0$ , то в некоторой окрестности

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \in (0; 2\lambda) \quad \implies \quad f(x) \in (f(t); f(t) + 2\lambda(x - t))$$

что значит, что эта окрестность — подтверждение для возрастания  $f$  в  $t$ . Тогда по предыдущему следствию  $f$  возрастает на  $[a; b]$ . Если вдруг функция возрастает не строго, то тогда найдётся подотрезок на  $[a; b]$ , на котором функция константа, а значит на интервале с теми же концами производная тождественно равна нулю.  $\square$

**Теорема 31.** Если  $f$  возрастает, то  $f'$  в своей области определения неотрицательно.

**Доказательство.** Если функция в точке  $t$  равна  $\lambda < 0$ , то в некоторой окрестности  $t$

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \in \left(\frac{3}{2}\lambda; \frac{1}{2}\lambda\right) \quad \implies \quad f(x) \in \left(f(t) + \frac{3}{2}\lambda(x - t); f(t) + \frac{1}{2}\lambda(x - t)\right)$$

что значит, что  $f$  в точке  $t$  "строго" убывает — противоречие. Значит  $f'(t) \geq 0$ .  $\square$

**Определение 28.**  $f$  имеет локальный максимум в  $x$ , если для некоторого  $\varepsilon > 0$  верно, что  $f(x) \geq f(y)$  для любого  $y \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ .

Аналогично определяется точка локального минимума.

**Теорема 32.** В точках локальных максимумов и минимумов функции  $f$  функция  $f'$  принимает нули (если определена).

**Доказательство.** Слева от точки максимума функция возрастает в данной точке, значит производная в данной точке  $\geq 0$ , а справа — убывает, значит производная  $\leq 0$ , значит производная равна 0. Аналогично для точки минимума.  $\square$

**Теорема 33** (Ролль). Если  $f$  — гладкая функция на  $[a; b]$ , и  $f(a) = f(b)$ , то существует  $c \in (a; b)$ , что  $f'(c) = 0$ .

**Доказательство.** В точке максимума или минимума  $f$  на  $[a; b]$  достигается ноль производной. Если они обе совпадают с концами отрезка, то значит функция константа, а тогда в любой точке отрезка производная равна нулю.  $\square$

**Теорема 34.** Если  $f$  и  $g$  непрерывные на  $[a; b]$  и гладкие на  $(a; b)$  функции, а  $g' \neq 0$ , то существует  $c \in (a; b)$ , что

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Доказательство.** Пусть

$$\lambda := \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

а  $\tau(x) := f(x) - \lambda g(x)$ . В таком случае

$$\frac{\tau(a) - \tau(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{(f(a) - f(b) - \lambda(g(a) - g(b)))}{g(a) - g(b)} = \lambda - \lambda = 0$$

значит  $\tau(a) = \tau(b)$ , значит есть  $c \in [a; b]$ , что  $\tau(c) = 0$ . Тогда

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{(\tau + \lambda g)'(c)}{g'(c)} = \frac{\tau'(c)}{g'(c)} + \lambda = \lambda = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

$\square$

**Теорема 35** (Лагранж). Если  $f$  непрерывна на  $[a; b]$  и гладка на  $(a; b)$ , то существует  $c \in (a; b)$ , что

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$$

**Доказательство.** Очевидно следует из предыдущей теоремы с помощью подстановки  $g(x) = x$ .  $\square$

**Теорема 36.** Пусть  $f$  — гладкая на  $(a; b)$  функция.

1. Если  $f' \geq 0$ , то  $f$  возрастающая функция.
2. Если  $f' > 0$ , то  $f$  строго возрастающая функция.
3. Если  $f$  возрастающая функция, то  $f' > 0$ .

**Теорема 37.** Пусть  $f$  — гладкая на  $[a; b]$  функция. Если  $f'(x) = 0$  для всех  $x \in [a; b]$ , то  $f \equiv \text{const}$  на том же отрезке.

*Замечание 4.* Функция  $f(x) := x^2 \sin(1/x)$  (доопределённая в нуле) имеет производную  $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$  в случае ненулевых  $x$  и производную  $f'(0) = 0$ . При этом легко видно, что  $f'$  не является непрерывной функцией (она имеет разрыв в том же нуле).

**Теорема 38.** Если  $f$  гладка на  $(a; b)$ , а  $f'$  не равна нулю, то  $f'$  либо положительна, либо отрицательна.

**Доказательство.**  $f$  не принимает никакого значения на  $(a; b)$  дважды (т.к. иначе у производной был бы корень), значит она либо строго возрастает, либо строго убывает, а значит  $f'$  либо неотрицательна, либо неположительна соответственно. Но ноль принимать не может, поэтому последнее утверждение равносильно тому, что  $f$  либо строго положительна, либо строго отрицательна.  $\square$

**Теорема 39.** Пусть  $f$  гладка на  $(a; b)$  и для некоторых  $u, v \in (a; b)$  верно, что  $f'(u) < \alpha < f'(v)$ . Тогда существует  $c \in (u; v)$ , что  $f'(c) = \alpha$ .

**Доказательство.** Пусть  $g(x) := f(x) - \alpha x$ . Тогда  $g'(u) < 0 < g'(v)$ , значит  $g$  не может строго возрастать или убывать на  $(u; v)$ , значит  $\exists c \in (u; v)$ , что  $g'(c) = 0$ , а значит  $f'(c) = \alpha$ .  $\square$

*Замечание 5.* Данная теорема по сути является теоремой о промежуточном значении для производной.

**Теорема 40.** Пусть  $f$  непрерывна на  $[a; b]$  и гладка на  $(a; b)$ . Пусть также  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$  существует и равен  $d$ . Тогда  $f'(a)$  тоже существует и равна  $d$ .

**Доказательство.** Есть несколько способов:

1. Несложно видеть, что для любого  $\varepsilon > 0$  есть некоторая правая окрестность  $a$ , в которой функция  $f'$  лежит в  $\varepsilon$ -окрестности  $d$ . Тогда  $f(x) - (d - \varepsilon)x$  убывает в данной окрестности, а  $f(x) - (d + \varepsilon)x$  возрастает, значит  $f(x) - f(a) \in ((d + \varepsilon)(x - a); (d - \varepsilon)(x - a))$ . В таком случае  $f'(a)$  определена и равна  $d$ .
2. По теореме Лагранжа для любого  $x \in [a; b]$  найдётся  $\xi \in (a; x)$ , что

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

Значит

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(\xi) = d$$

что буквально значит, что  $f'(a) = d$ .

□

**Теорема 41** (правило Лопиталя). Пусть  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ . Пусть также  $f$  и  $g$  гладки и  $g' \neq 0$  на  $(a; b)$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

если второй предел определён.

**Доказательство.** Пусть дано  $\varepsilon > 0$ , а

$$d := \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

. Тогда есть  $\delta > 0$ , что для любого  $t \in (a; a + \delta)$  значение  $f'(t)/g'(t)$  лежит в  $U_\varepsilon(d)$ . Легко видеть, что для любых  $x, y \in (a; a + \delta)$  существует  $\xi \in (x; y) \subseteq (a; a + \delta)$ , что

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = f'(\xi) \in U_\varepsilon(d)$$

Устремляя  $x$  к  $a$ , получаем, что  $f(y)/g(y)$  тоже лежит в  $U_\varepsilon(d)$ . Тогда по определению предела

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = d = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

**Определение 29.**  $f''$  — вторая производная  $f$ , т.е.  $(f')'$ , а  $f^{(n)}$  —  $n$ -ая производная  $f$ , т.е.  $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ ,  $f^{(0)} := f$ .

**Определение 30.**  $P(x)$  — полином Тейлора степени  $n$  функции  $f$ , если  $\deg(P) \leq n$ , а

$$f(x) - P(x) = o((x - a)^n), \quad x \rightarrow a$$

**Теорема 42.** Если  $P_1$  и  $P_2$  — полиномы Тейлора степени  $n$  функции  $f$ , то  $P_1 = P_2$ .

**Теорема 43.** Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$  определены на  $(t - \delta; t + \delta)$  для некоторого  $\delta > 0$  и определена  $f^{(n)}(t)$ . Тогда

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x - t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + o((x - t)^n)$$

**Доказательство.** Рассмотрим  $g(x) := f(x) - f(t)/0! \cdot (x - t)^0 - \dots - f^{(n)}(t)/n! \cdot (x - t)^n$ . Тогда задача сведена к следующей лемме.

**Лемма 43.1.** Если  $g^{(1)}, \dots, g^{(n-1)}$  определены на  $(t - \delta; t + \delta)$  для некоторого  $\delta > 0$  и

$$g(t) = g^{(1)}(t) = \dots = g^{(n)}(t) = 0.$$

Тогда  $g(x) = o((x - t)^n)$ .

**Доказательство.** Докажем по индукции по  $n$ .

**База.** Пусть  $n = 1$ . Тогда очевидно, что  $f(x) = f(t) + f'(t)(x - t) + o(x - t) = o(x - t)$ .

**Шаг.** По предположению индукции  $f'(x) = o((x - t)^n)$ . Тогда мы имеем, что

$$f(x) - f(t) = f'(\xi)(x - t)$$

для некоторого  $\xi \in (x, t)$ . Тогда

$$\frac{f(x) - f(t)}{(x - t)^n} = \frac{f'(\xi)}{(x - t)^{n-1}} = \frac{o((\xi - t)^{n-1})}{(x - t)^{n-1}} = o(1) \frac{(\xi - t)^{n-1}}{(x - t)^{n-1}} = o(1)$$

□

□

**Теорема 44.** Пусть  $f(t) = f^{(1)}(t) = \dots = f^{(n)}(t) = 0$ , а  $f^{(n+1)} \neq 0$ . Если  $n$  чётно, то  $t$  — не экстремальная точка функции  $f$ , иначе  $t$  — экстремальная точка функции  $f$ .

**Теорема 45.** Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{(1)}, \dots, f^{(n+1)}$  определены на  $(t - \delta; t + \delta)$  для некоторого  $\delta > 0$ . Тогда существует  $\xi \in (x; t)$ , что

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x - t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - t)^{n+1}$$

**Доказательство.** Точно так же сведём  $f$  к  $g$ , что  $g(t) = \dots g^{(n)}(t) = 0$ . Тогда требуется показать, что  $g(x) = g^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! \cdot (x - t)^{n+1}$  для некоторого  $\xi \in (x, t)$ . Докажем это по индукции.

**База.**  $n = 0$ . Теорема Лагранжа.

**Шаг.**

$$\frac{f(x)}{(x - t)^{n+1}} = \frac{f(x) - f(t)}{(x - t)^{n+1} - (t - t)^{n+1}} = \frac{f'(\xi)}{(n+1)(\xi - t)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$$

где  $\xi \in (x, t)$  (существует по теореме Лагранжа), а  $\eta \in (\xi, t) \subseteq (x, t)$  (существует по предположению индукции для  $f'$  и  $\xi$ ). Отсюда следует искомое утверждение. □

## 2.5 Стандартные функции, ряды Тейлора и их сходимость

Тут нужно рассказать про функции  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  и  $(1+x)^\alpha$  и их ряды

**Определение 31.**  $f$  является (поточечным) пределом  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  на  $E$ , если  $\lim\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty = f(x)$  для любого  $x \in E$ .

**Определение 32.**  $f$  является равномерным пределом  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  на  $E$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $N \in \mathbb{N}$ , что  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  для всех  $n > N$  и  $x \in E$ .

**Теорема 46** (Стокс, Зейдель). Пусть  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  — последовательность непрерывных функций, и  $f_n \rightarrow f$  равномерно на  $E$ . Тогда  $f$  непрерывна.

**Доказательство.** Для любого  $\varepsilon > 0$  есть такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$  для всех  $x \in E$ . Тогда существует  $\delta > 0$ , что  $f_n(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(t))$  для данного  $t$ . Тогда

$$f(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(U_\delta(t))) \subseteq U_{2\varepsilon/3}(f_n(t)) \subseteq U_\varepsilon(f(t)).$$

□

**Теорема 47** (Коши). TFAE (the following are equivalent):

1.  $f_n \rightarrow f$  равномерно сходится на  $E$ .
2. Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N \in \mathbb{N}$ , что  $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$  для любых  $k, l > N$  и  $x \in E$ .

**Теорема 48** (Вейерштрасс). Пусть  $\{u_n\}_{n=0}^\infty$  — последовательность непрерывных функций, что есть последовательность чисел  $\{d_n\}_{n=0}^\infty$ , для которой верно, что  $|u_n| < d_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , и  $\sum_{n=0}^\infty d_n$  сходится. Тогда  $\sum_{n=0}^\infty u_n$  равномерно сходится.

**Теорема 49.** Пусть  $f_n \rightarrow f$  на  $E$  и  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  гладкие. Если  $f'_n \rightarrow g$  равномерно, то  $f$  тогда тоже гладка и  $f' = g$ .



**Доказательство.** Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N \in \mathbb{N}$ , что  $|f'_k - f'_l| < \varepsilon/3$  для всех  $k, l > N$ . Тогда имеем, что

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y} \right| = \left| \frac{(f_k - f_l)(x) - (f_k - f_l)(y)}{x - y} \right| = |(f_k - f_l)'(\xi)| < \varepsilon/3$$

Устремляя  $l$  к бесконечности получаем, что

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \varepsilon/3$$

Также имеем, что есть такое  $\delta > 0$ , что для всех  $y \in U_\delta(x)$

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - f'_k(x) \right| < \varepsilon/3$$

Также есть  $M \in \mathbb{N}$ , что  $|f'_k - g| < \varepsilon/3$  для любого  $k > M$ . Складывая всё вместе, получаем, что для всех  $k > \max(N, M)$  и  $y \in U_\delta(x)$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - g(x) \right| < \varepsilon$$

Значит  $f$  гладка и  $f' = g$ . □

**Следствие 49.1.** Если  $\{f^{(0)}\}, \dots, \{f^{(n-1)}\}$  сходятся, а  $f^{(n)}$  равномерно сходится. Тогда то же верно и про первые  $n$  производных.

**Следствие 49.2.** Если ряд Тейлора сходится, то функция бесконечно гладкая.