Математический анализ — 1.

Юрий Сергеевич Белов

Литература:

- В. А. Зорич “Математический анализ”
- О. Л. Виноградов “Математический анализ”
- (подходит попозже) Г. М. Фихтенгельц “Курс дифференциального и интегрального исчисления”
- У. Рудин “Основы анализа”
- М. Спивак “Математический анализ на многообразиях”

1 Множества, аксиоматика и вещественные числа.

Мы начинаем с теории множеств.

Определение 1.

- Множества и элемменты — понятно.
- $a \in B$ — понятно.
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — объединение.
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — пересечение.
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$ — разность.
- $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$ — симметрическая разница.
- $A^C := X \setminus A$ — *дополнение*, где X — некоторое фиксированное рассматриваемое множество.
- $A \subset B$ — “A — подмножество B”, т.е. $\forall x(X \in A \Rightarrow x \in B)$.

Следствие.

- *(первое правило Моргана)* $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A^c \\ x \in B^C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$$

- *(второе правило Моргана)* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. *Аналогично.*

Определение 2. (Аксиома индукции.) Пусть есть функция $A : \mathbb{N} \to true; false$, что:

1. $A(1) = true$;
2. $\forall n (A(n) \to A(n+1))$.

Тогда $\forall n A(n)$.

Определение натуральных чисел сложно, рассматривать его не будем. Важно также иметь в виду натуральные числа с операциями сложения и умножения.

Определение 3. Пусть есть кольцо без делителей нуля R. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на $R \times (R \setminus \{0\})$, что $(a;b) \sim (c;d) \Leftrightarrow ad = bc$. Тогда $\mathrm{Quot}(R)$ — фактор-множество по $\sim$ и поле.

Определение 4. Рациональные числа — $\mathbb{Q} := \mathrm{Quot}(\mathbb{Z})$.

Теорема 1. $\nexists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существуют взаимно простые $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, что $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Тогда $m^2 = n^2$. Очевидно, что тогда $m^2 \vdots 2$, значит $m \vdots 2$, значит $m \vdots 4$, значит $n^2 \vdots 2$, значит $n \vdots 2$, значит n и m не взаимно просты, так как делятся на 2 — противоречие. $\square$

Теперь мы хотим понять, что есть вещественные числа. Тут есть несколько подходов.

Определение 5 (аксиоматический подход)**.** Вещественные числа — это полное упорядоченное поле $\mathbb{R}$, состоящее не из одного элемента.

Здесь "поле" значит, что на множестве (вместе с его операциями и выделенными элементами) верны аксиомы поля A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4 и D (т.е. сложение и умножение ассоциативны, коммутативны имеют нейтральные элементы и удовлетворяют условию существованию обратных (по умножению — для всех кроме нуля), а также дистрибутивности).

Упорядоченность значит, что есть рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение $\preccurlyeq$, что все элементы сравнимы, согласованное с операциями, т.е.:

A) $a \preccurlyeq b \Rightarrow a + x \preccurlyeq b + x$.

M) $0 \preccurlyeq a \wedge 0 \preccurlyeq b \Rightarrow 0 \preccurlyeq ab$.

Полнота поля значит любое из следующих утверждений (они равносильны):

- любое ограниченное сверху (снизу) подмножество поля имеет точную верхнюю (нижнюю) грань;
- (аксиома Кантора-Дедекинда) для любых двух множеств A и B, что $A \preccurlyeq B$, есть разделяющий их элемент.

Итого мы имеем 9 аксиом поля, 2 аксиомы упорядоченности и 1 акиома полноты упорядоченности.

Утверждение. *Над $\mathbb{Q}$ нет элемента разделяющего $A := \{a > 0 \mid a^2 < 2\}$ и $B := \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. есть $c > 0$, что $A < c < B$.

Если $c^2 < 2$, то найдём ε, что $\varepsilon \in (0;1)$ и $(c+\varepsilon)^2 < 2$. Заметим, что $(c+\varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < c^2 + (2c+1)\varepsilon$. Пусть $\varepsilon < \frac{2-c^2}{2c+1}$, тогда такое ε точно подойдёт, ну а посокольку $\frac{2-c^2}{2c+1} > 0$, то такое ε есть. Значит $c^2 \geqslant 2$.

Аналогично имеем, что $\varepsilon \leqslant 2$. А значит $c^2 = 2$, что не бывает над $\mathbb{Q}$. $\square$

Следствие. $\mathbb{Q}$ *не полно.*

Определение 6.

- *Закрытый интервал* или *отрезок* $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.
- *Открытый интервал* или просто *интервал* $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- *Полуоткрытый интервал* или *полуинтервал* $(a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $[a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$.

Теорема 2 (Лемма о вложенных отрезках)**.** *Пусть имеется* $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ *— множество вложенных (непустых) отрезков, т.е.* $\forall n > 1\ I_{n+1} \subset I_n$*. Тогда* $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \varnothing$*.*

Доказательство. Заметим, что для любых натуральных $n < m$ верно, что $a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$, где $I_n = [a_n; b_n]$. Тогда для $A := \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $B := \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ верно, что $A \leqslant B$. Значит есть разделяющий их элемент t, значит $A \leqslant t \leqslant B$, значит $t \in I_i$ для всех i, значит $t \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$. □

Замечание 1. Теорема 2 не верна для не отрезков.

Замечание 2. Если в теореме 2 $b_i - a_i$ "сходится к 0", т.е. $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : \forall i > n\, b_i - a_i < \varepsilon$, то пересечение всех отрезков состоит из ровно одного элемента.

Теорема 3 (индукция на вещественных числах)**.** *Пусть дано множество* $X \subseteq [0; 1]$*, что*

1. $0 \in X$*;*
2. $\forall x \in X\ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap [0; 1] \subseteq X$*;*
3. $\forall Y \subseteq X\ \sup(Y) \in X$*.*

Тогда $X = [0; 1]$*.*

Доказательство. Предположим противное: $X \neq [0; 1]$. Рассмотрим $Z := [0; 1] \setminus X$ ($Z \neq \varnothing$!) и $Y := \{y \in [0; 1] \mid y < Z\}$ ($Y \neq \varnothing$!). Заметим, что $Y \subseteq X$ и $\sup(Y) = \inf(Z) = t$. Тогда $t \in X$ по второму условию. Значит для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $U_\varepsilon(t) \cap [0; 1] \in X$, а т.е. $(U_\varepsilon(t) \cap [0; 1]) \cap Z = \varnothing$, а тогда $t \neq \inf(Z)$ — противоречие. Значит $X = [0; 1]$. □

2 Топология прямой, пределы и непрерывность.

Определение 7. *ε-окрестность* точки x (для $\varepsilon > 0$) — $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$. Обозначение: $U_\varepsilon(x)$.

Проколотая ε-окрестность точки x — $(x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon)$. Обозначение: $V_\varepsilon(x)$.

Определение 8. Пусть дано некоторое множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Тогда точка $x \in X$ называется *внутренней точкой множества* X, если она содержится в X вместе со своей окрестностью.

Само множество X называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Пример 1. Следующие множества открыты:

- $(a; b)$;
- $(a; +\infty)$;
- $\mathbb{R}$;
- $\varnothing$;

- $\bigcup_{i=0}^{\infty}(a_i; b_i)$ (интервалы не обязательно не должны пересекаться).

Определение 9. Пусть дано множесство $X \subseteq \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества, если в любой проколотой окрестности x будет какая-либо точка X.

Множество предельных точек X называется *производным множеством* множества X и обозначается как X'.

Множество X называется замкнутым, если $X \supseteq X'$.

Определение 10. Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Если у любой последовательности его точек есть предельная точка из самого множества X.

Определение 11. *Предел последовательности* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x, что для любой окрестности x эта последовательность с некоторого момента будет лежать в этой окрестности:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Обозначение: $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = x$.

Предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x, что в любой его окрестности после любого момента появится элемент данной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n > N : \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Определение 12. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$$

Теорема 4. *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда фундаментальна.*

Доказательство.

1. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к некоторому значению X, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon/2 \Rightarrow$$
$$\forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| = |x_{n_1} - X + X - x_{n_2}| \leqslant |x_{n_1} - X| + |X - x_{n_2}| < \varepsilon$$

2. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна. Мы знаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ все члены, начиная с некоторого различаются менее чем на ε. Тогда возьмём какой-нибудь такой член y_0 для некоторого ε, затем какой-нибудь такой член y_1 для $\varepsilon/2$, который идёт после y_0 и так далее. Получим последовательность, что все члены, начиная с n-ого лежат в $\varepsilon/2^n$-окрестности y_n. Тогда рассмотрим последовательность $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $I_n = [y_n - \varepsilon/2^{n-1}; y_n + \varepsilon/2^{n-1}]$. Несложно понять, что $I_n \supseteq I_{n+1}$, поэтому в пересечении $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ лежит некоторый X. Несложно понять, что все члены начальной последовательности, начиная с y_{n+2}, лежат в $\varepsilon/2^{n+2}$-окрестности y_{n+2}. При этом $|y_{n+2} - X| \leqslant \varepsilon/2^{n+1}$, что значит, что все члены главной последовательности, начиная с y_{n+2} лежат в $3\varepsilon/2^{n+2}$-окрестности X, а значит и в $\varepsilon/2^n$.

□

Утверждение 1. *Для последовательностей* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *верно (если определено), что*

1. $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} + \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$

2. $-\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$

3. $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty \cdot \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty = \lim\{x_n y_n\}_{n=0}^\infty$

4. $\frac{1}{\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty} = \lim\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^\infty$ *(если* $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty \neq 0$*)*

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

Доказательство.

1. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^\infty = Y$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \varepsilon/2 \quad \wedge \quad \forall m > M\ |y_m - Y| < \varepsilon/2,$$

тогда

$$\forall n > \max(N, M) \quad |(x_n + y_n) - (X + Y)| \leqslant |x_n - X| + |y_n - Y| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{x_n + y_n\}_{n=0}^\infty$ сходится и сходится к $X + Y$.

2. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = X$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \varepsilon,$$

тогда

$$\forall n > N \quad |(-x_n) - (-X)| = |X - x_n| = |x_n - X| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{-x_n\}_{n=0}^\infty$ сходится и сходится к $-X$.

3. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^\infty = Y$. Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \to \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} + \frac{|x|+|y|}{2}} = \sqrt{\left(\frac{|x| + |y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} - \frac{|x| + |y|}{2}$$

Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда положительно. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $t^2 + t(|X| + |Y|) = \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \delta(\varepsilon) \quad \wedge \quad \forall m > M\ |y_m - Y| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\begin{aligned}
\forall n > \max(N, M) \quad |x_n \cdot y_n - X \cdot Y| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot Y + x_n \cdot Y - X \cdot Y| \\
&\leqslant |x_n \cdot (y_n - Y)| + |(x_n - X) \cdot Y| \\
&< |x_n| \cdot \delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \cdot |Y| \\
&< (|X| + \delta(\varepsilon)) \cdot \delta(\varepsilon) + |Y| \cdot \delta(\varepsilon) \\
&= \delta(\varepsilon)^2 + (|X| + |Y|)\delta(\varepsilon) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

что означает, что $\{x_n \cdot y_n\}_{n=0}^\infty$ сходится и сходится к $X \cdot Y$.

4. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = X$. Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \to \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon|X|}{1 + \varepsilon|X|}$$

Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда меньше $|X|$. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $\frac{t}{|X|(|X|-t)} = \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\forall n > N \quad \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{X}\right| = \left|\frac{X - x_n}{X \cdot x_n}\right| < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X| \cdot |x_n|} < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X|(|X| - \delta(\varepsilon))} = \varepsilon,$$

что означает, что $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $1/X$.

$\square$

Определение 13. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ассимптотически больше* последовательности $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, если $x_n > y_n$ для всех натуральных n, начиная с некоторого. Обозначение: $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Аналогично определяются *ассимптотически меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \prec \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$), *ассимптотически не больше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \preccurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$) и *ассимптотически не меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$).

Утверждение 2. *Если* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, *то* $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \geqslant \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $Y > X$, где $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ находятся в ε-окрестностях X и Y соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $y_n > Y - \varepsilon = X + \varepsilon > x_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \prec \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — противоречие. Значит $X \geqslant Y$. $\square$

Утверждение 3. *Если* $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} > \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, *то* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Доказательство. Пусть $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ находятся в ε-окрестностях X и Y соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $x_n > X - \varepsilon = Y + \varepsilon > y_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. $\square$

Утверждение 4 (леммма о двух полицейских)**.** *Если*

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$$

и

$$\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{z_n\}_{n=0}^{\infty} = A,$$

то предел $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *определён и равен* A.

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ есть $N, M \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N\ |x_n - A| < \varepsilon \quad \wedge \quad \forall m > M\ |z_n - A| < \varepsilon,$$

значит

$$\forall n > \max(N, M) \quad A + \varepsilon > x_n \geqslant y_n \geqslant z_n > A - \varepsilon \quad \text{т.е. } |y_n - A| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к A. $\square$

Утверждение 5. *Если* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = A$, *а* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, *неубывает (с некоторого момента), то предел* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *существует и не превосходит* A.

Доказательство. Если последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ возрастает не с самого начала, то отрежем её начало с до момента начала возрастания. Заметим, что она ограничена сверху (из-за последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$), тогда определим $B := \sup(\{y_n\}_{n=0}^{\infty})$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \quad |B - x_N| < \varepsilon$, тогда $\forall n > N \quad |B - x_n| < \varepsilon$, что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к B. По утверждению 2 $A \geqslant B$. $\square$

Определение 14 (по Коши)**.** *Предел* функции $f : X \to \mathbb{R}$ при в точке x — такое значение y, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : f(V_\delta(x) \cap X) = U_\varepsilon(y)$$

Обозначение: $\lim\limits_{t \to x} f(t) = y$.

Определение 15 (по Гейне)**.** *Предел* функции $f : X \to \mathbb{R}$ при в точке x — такое значение y, что для любой последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ элементов $X \setminus \{x\}$ последовательность $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к y. Обозначение: $\lim\limits_{t \to x} f(t) = y$.

Теорема 5. *Определения пределов по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Будем доказывать равносильность отрицаний утверждений, ставимых в определениях.

1. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ не сходится по Коши в x к значению y. Значит есть такое $\varepsilon > 0$, что в любой проколотой окрестности x (в множестве X) есть точка, значение f в которой не лежит в ε-окрестности. Рассмотрев любую такую проколотую окрестность $I_0 = V_{\delta_0}(x)$, берём в ней любую такую точку x_0. Далее рассмотрев $I_1 = V_{\delta_1}(x)$, где $\delta_1 = \min(\delta_0/2, |x - x_0|)$, берём там любую точку x_1, где значение f вылетает вне ε-окрестности y. Так далее строим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся к x, значения f в которой не лежат в ε-окрестности y, что означает, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ не сходится к y, что означает, что f не сходится по Гейне в x к значению y.

2. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ не сходится по Гейне в x к значению y. Значит есть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящаяся к x, что последовательность её значений не сходится к y. Значит есть $\varepsilon > 0$, что после любого момента в последовательности будет член, значение в котором вылезает вне ε-окрестности y. Поскольку для любой проколотой окрестности x есть момент, начиная с которого вся последовательность лежит в этой окрестности, то в любой проколотой окрестности x есть член, значение которого вылезает вне ε-окрестности y, что означает, что f не сходится по Коши в x к y.

$\square$

Утверждение 6. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в x предел тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ \forall x_1, x_2 \in V_\delta(x) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Доказательство. Такое же как для последовательностей: см. теорему 4. $\square$

Утверждение 7. *Для функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ верно, что*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} (f + g)(x)$
2. $\lim\limits_{x \to a} (-f)(x) = -\lim\limits_{x \to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim (f \cdot g)(x)$
4. $\frac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \lim\limits_{x \to a} (\frac{1}{f})(x)$ *(если $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$)*
5. $\lim\limits_{y \to \lim\limits_{x \to a} g(x)} f(y) = \lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x)$

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

Замечание 3. Утверждения 2, 3 и 4 верны, если заменить последовательности на функции, пределы последовательностей на пределы функций в некоторой точке x, а асимптотические неравенства на неравенства на окрестности x.

Определение 16. Сумма ряда $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ есть значение $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim \left\{\sum_{i=0}^{k}\right\}_{k=0}^{\infty}$. Частичной же суммой s_k этого ряда называется просто $\sum_{i=0}^{k} a_i$.

Определение 17. Последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, удовлетворяет условию

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon,$$

то она называется *фундаментальной.*

Теорема 6. *Если* $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ *существует, то и* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *существует.*

Следствие 6.1. *Если* $\{b_i\}_{i=0}^{\infty} \succcurlyeq \{|a_i|\}_{i=0}^{n}$ *и* $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ *существует, то и* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *существует.*

Определение 18. *Осцелляцией* называется $\operatorname{osc}_E f = \sup_E f - \inf_E f$.

Определение 19. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* x, если $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$.