Дифференциальные уравнения и динамические системы.

Лектор — С.Ю.Пилюгин
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

TODOs

Содержание

Литература:

- В.И. Арнольд, "Обыкновенные дифференциальные уравнения".
- Ю.Н. Бибиков, "Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений".
- С.Ю. Пилюгин, "Пространства динамических систем", 2008.

Определение 1. *Дифференциальное уравнение* — уравнение вида

$$f(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0,$$

где x — независимая переменная, f — данная функция, а $y(x)$ — искомая функция.

Обыкновенное дифференциальное уравнение — дифференциальное уравнение над $\mathbb{R}$

Замечание. Бывают ещё дифференциальные уравнения над комплексными числами и дифференциальные уравнения в частных производных. Но это уже совершенно другие области; а мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

0.1 Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешённые относительно производных

Пусть x — независимая переменная, $y(x)$ — искомая функция. Тогда будем рассматривать уравнения вида

$$y' = f(x, y).$$

f будет всегда рассматриваться непрерывной.

Зафиксируем область (открытое связное множество) G в $\mathbb{R}^2_{x,y}$. Будем также писать $f \in C(G)$.

* Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

Определение 2. $y : (a; b) \to \mathbb{R}$ называется решением данного уравнения на $(a; b)$, если

- если y дифференцируема на $(a; b)$,
- для всякого $x \in (a; b)$ $(x, y(x)) \in G$,
- $y'(x) = f(x, y(x))$ на $(a; b)$.

Пример 1. При $k > 0$, $f(x, y) := ky$, $G = \mathbb{R}^2$ имеем уравнение

$$y = ky'.$$

Тогда всем известно, что $y(x) = ce^{kx}$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

Определение 3. *Интегральная кривая* — график решения.

Определение 4 (задача Коши)**.** Пусть фиксирована $(x_0, y_0) \in G$. $y(x)$ — *решение задачи Коши с начальными данными* (x_0, y_0), если

- $y(x)$ — решение дифференциального уравнения на некотором интервале $(a; b) \ni x$,
- $y(x_0) = y_0$.

Пример 2. В случае того же уравнения

$$y' = ky$$

решением будет $y(x) = y_0 e^{k(x - x_0)}$.

Определение 5. $(x_0; y_0)$ называется *точкой единственности*, если для всяких решений y_1 и y_2 задачи Коши с входными данными $(x_0; y_0)$ есть некоторая окрестность x_0, где y_1 и y_2 совпадают.

Пример 3. Возьмём уравнение

$$y' = 3y^{2/3}$$

с входными данными $(0; 0)$. Понятно, что сюда подойдёт всякое решение вида $y(x) = cx^3$ ($c \in \mathbb{R}$), что уже говорит о неединственности данной точки. Но есть случаи ещё хуже: можно склеить кусок слева одного решения и кусок справа другого и получить новое решение!

Определение 6 (поле направлений)**.** Зададим в области G поле направлений: в каждой точке $(x_0; y_0)$ поставим направление соответствующее производной $f(x_0, y_0)$. Это равносильно векторному полю, где вектор в точке $(x_0; y_0)$ — $(1; f(x_0; y_0))$. Следовательно график всякого решения $y(x)$ будет касаться поля направлений в области определения, а векторное поле будет градиентом графиком решения с нативной параметризацией по x.

Теорема 1 (существования для дифференциального уравнения 1-го порядка)**.** *Пусть имеется дифференциальное уравнение*

$$y' = f(x, y)$$

и $f \in C(G)$. Тогда для всякой точки $(x_0; y_0) \in G$ существует решение задачи Коши с начальными данными $(x_0; y_0)$.

Теорема 2 (единственности для дифференциального уравнения 1-го порядка)**.** *Пусть имеется дифференциальное уравнение*

$$y' = f(x, y)$$

и $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$. Тогда всякая точка $(x_0; y_0) \in G$ является точкой единственности.

0.2 Интегрируемые дифференциальные уравнения 1-го порядка

Первый случай. Наше уравнение имеет вид

$$y' = f(x).$$

В таком случае

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Определение 7. Пусть имеется уравнение

$$y' = f(x, y),$$

где $f \in C(G)$, а H — подобласть G. Функция $U \in C^1(H, \mathbb{R})$ (т.е. $U : H \to \mathbb{R}$ и U дифференцируема на H) называется *интегралом* этого уравнения в H, если

- $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$ в H,
- если $y : (a; b) \to \mathbb{R}$ — решение в H, то $U(x, y(x)) = \mathrm{const}$ на $(a; b)$.

Теорема 3 (о неявной функции)**.** *Пусть дана $F \in C^1(H, \mathbb{R})$ и есть некоторая точка $(x_0; y_0) \in H$, что $F(x_0, y_0) = 0$, а $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда есть некоторые окрестности I и J точек x_0 и y_0 и функция $z \in C^1(I)$, что $z(x_0) = y_0$ и для всякой точки $(x; y) \in I \times J$, что $F(x, y) = 0$, будет верно $y = z(x)$.*

Теорема 4 (об интеграле для дифференциального уравнения 1-го порядка)**.** *Пусть имеется интеграл U уравнения $y' = f(x, y)$ в $H \subseteq G$. Тогда для всякой точки $(x_0; y_0) \in H$ будут открытые I и J, что $I \times J \subseteq H$, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, и некоторое $y(x) \in C^1(I)$, что*

- *$y(x)$ — решение задачи Коши с начальными данными $(x_0; y_0)$,*
- *для всякой точки $(x_1; y_1) \in H$, что $U(x_1; y_1) = U(x_0; y_0)$, верно $y_1 = y(x_1)$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$F(x, y) := U(x, y) - U(x_0, y_0).$$

Заметим, что $F(x_0, y_0) = 0$, а $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, т.е. F удовлетворяет условию теоремы о неявной функции. Тогда по данной теореме существуют некоторые окрестности I_0 и J_0 точек x_0 и y_0 и функция $y(x) \in C^1(I)$.

По теореме о существовании существует решение $z(x)$ задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) на $I \ni x_0$, что $(x, z(x)) \in I \times J$. По определению интеграла U имеем, что $U(x, z(x)) = U(x_0, y_0)$, а значит $F(x, z(x)) = 0$. Тогда по теореме о неявной функции $z(x) = y(x)$ на всей области определения y и z. □

Замечание 1. Равенство $U(x, y) = c$ называют общим интегралом.

0.2.1 Дифференицальные уравнения с разделяющимися переменными

Будем рассматривать уравнение вида

$$y' = m(x)n(y),$$

$m \in C((a;b))$, $n \in C((\alpha;\beta))$, $G = (a;b) \times (\alpha;\beta)$.

Первый случай. Пусть $n(y_0) = 0$. Тогда есть решение $y(x) \equiv y_0$.

Второй случай. Рассмотрим некоторый интервал $I \subseteq (\alpha;\beta)$, что для всякого $y \in I$ верно $n(y) \neq 0$. Рассмотрим $y(x)$, что $(x, y(x)) \in (a;b) \times I$. Несложным преобразованием получаем, что

$$\frac{y'(x)}{n(y(x))} = m(x).$$

значит

$$\int_{x_0}^{x} m(s)ds = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)dt}{n(y(t))} = \int_{x_0}^{x} \frac{dy(t)}{n(y(t))} = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{n(z)}.$$

Обозначим первообразные

$$N(y) := \int \frac{dy}{n(y)} \qquad \text{и} \qquad M(x) := \int m(x)dx.$$

Тогда мы имеем, что

$$N(y(x)) - N(y(x_0)) = M(x) - M(x_0).$$

Определим

$$U(x, y) := N(y) - M(x).$$

Тогда

$$U(x, y(x)) = N(y(x)) - M(x) = N(y(x_0)) - M(x_0) = \mathrm{const}\,.$$

Также

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N' = \frac{1}{n(y)} \neq 0.$$

Таким образом U — интеграл данного уравнения в $(a;b) \times I$.