

# Математический анализ — 1.

Лектор — Юрий Сергеевич Белов

Создатель конспекта — Глеб Минаев \*

## TODOs

Тут нужно рассказать про функции $\exp$ , $\sin$ , $\cos$ и $(1+x)^\alpha$ и их ряды . . . . .	19
Название раздела? . . . . .	20
Картиночки! . . . . .	20
Тем более картиночки!!! . . . . .	21

## Содержание

<b>1 Множества, аксиоматика и вещественные числа.</b>	<b>2</b>
<b>2 Топология прямой, пределы и непрерывность.</b>	<b>4</b>
2.1 Последовательности, пределы и ряды . . . . .	4
2.2 Топология . . . . .	9
2.3 Пределы функций, непрерывность . . . . .	12
2.4 Гладкость (дифференцируемость) . . . . .	14
2.5 Стандартные функции, ряды Тейлора и их сходимость . . . . .	19
<b>3 Примеры и контрпримеры</b>	<b>20</b>
<b>4 Интегрирование</b>	<b>22</b>
4.1 Первообразная . . . . .	22
4.2 Суммы Дарбу и интеграл Римана . . . . .	24
4.3 У чего есть выражаемая первообразная? . . . . .	33
<b>5 Логарифм? Полезности?? Что???</b>	<b>34</b>
5.1 Формулы Валлиса и Стирлинга . . . . .	39
5.2 Бернулли обернули . . . . .	42
<b>6 Мои придумки вне лекций</b>	<b>47</b>
6.1 Сильная сходимость . . . . .	47

Литература:

- В. А. Зорич “Математический анализ”

---

\*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

- О. Л. Виноградов “Математический анализ”
- (подходит попозже) Г. М. Фихтенгельц “Курс дифференциального и интегрального исчисления”
- У. Рудин “Основы анализа”
- М. Спивак “Математический анализ на многообразиях”
- В. М. Тихомиров “Рассказы о максимумах и минимумах”

## 1 Множества, аксиоматика и вещественные числа.

Мы начинаем с теории множеств.

### Определение 1.

- Множества и элементы — понятно.
- $a \in B$  — понятно.
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$  — объединение.
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$  — пересечение.
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$  — разность.
- $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$  — симметрическая разница.
- $A^C := X \setminus A$  — дополнение, где  $X$  — некоторое фиксированное рассматриваемое множество.
- $A \subset B$  — “ $A$  — подмножество  $B$ ”, т.е.  $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ .

### Следствие.

- (первое правило Моргана)  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ .

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A^C \\ x \in B^C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$$

- (второе правило Моргана)  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ . Аналогично.

**Определение 2.** (Аксиома индукции.) Пусть есть функция  $A : \mathbb{N} \rightarrow \text{true}; \text{false}$ , что:

1.  $A(1) = \text{true}$ ;
2.  $\forall n (A(n) \rightarrow A(n+1))$ .

Тогда  $\forall n A(n)$ .

Определение натуральных чисел сложно, рассматривать его не будем. Важно также иметь в виду натуральные числа с операциями сложения и умножения.

**Определение 3.** Пусть есть кольцо без делителей нуля  $R$ . Рассмотрим отношение эквивалентности  $\sim$  на  $R \times (R \setminus \{0\})$ , что  $(a; b) \sim (c; d) \Leftrightarrow ad = bc$ . Тогда  $\text{Quot}(R)$  — фактор-множество по  $\sim$  и поле.

**Определение 4.** Рациональные числа —  $\mathbb{Q} := \text{Quot}(\mathbb{Z})$ .

**Теорема 1.**  $\nexists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$ .

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существуют взаимно простые  $m \in \mathbb{Z}$  и  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , что  $(\frac{m}{n})^2 = 2$ . Тогда  $m^2 = 2n^2$ . Очевидно, что тогда  $m^2 : 2$ , значит  $m : 2$ , значит  $m : 4$ , значит  $n^2 : 2$ , значит  $n : 2$ , значит  $n$  и  $m$  не взаимно просты, так как делятся на 2 — противоречие.  $\square$

Теперь мы хотим понять, что есть вещественные числа. Тут есть несколько подходов.

**Определение 5** (аксиоматический подход). Вещественные числа — это полное упорядоченное поле  $\mathbb{R}$ , состоящее не из одного элемента.

Здесь “поле” значит, что на множестве (вместе с его операциями и выделенными элементами) верны аксиомы поля  $A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4$  и  $D$  (т.е. сложение и умножение ассоциативны, коммутативны имеют нейтральные элементы и удовлетворяют условию существованию обратных (по умножению — для всех кроме нуля), а также дистрибутивности).

Упорядоченность значит, что есть рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение  $\preceq$ , что все элементы сравнимы, согласованное с операциями, т.е.:

$$A) a \preceq b \Rightarrow a + x \preceq b + x.$$

$$M) 0 \preceq a \wedge 0 \preceq b \Rightarrow 0 \preceq ab.$$

Полнота поля значит любое из следующих утверждений (они равносильны):

- любое ограниченное сверху (снизу) подмножество поля имеет точную верхнюю (нижнюю) грань;
- (аксиома Кантора-Дедекинда) для любых двух множеств  $A$  и  $B$ , что  $A \preceq B$ , есть разделяющий их элемент.

Итого мы имеем 9 аксиом поля, 2 аксиомы упорядоченности и 1 аксиома полноты упорядоченности.

**Утверждение.** Над  $\mathbb{Q}$  нет элемента разделяющего  $A := \{a > 0 \mid a^2 < 2\}$  и  $B := \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$ .

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. есть  $c > 0$ , что  $A < c < B$ .

Если  $c^2 < 2$ , то найдём  $\varepsilon$ , что  $\varepsilon \in (0; 1)$  и  $(c + \varepsilon)^2 < 2$ . Заметим, что  $(c + \varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < c^2 + (2c + 1)\varepsilon$ . Пусть  $\varepsilon < \frac{2-c^2}{2c+1}$ , тогда такое  $\varepsilon$  точно подойдёт, ну а поскольку  $\frac{2-c^2}{2c+1} > 0$ , то такое  $\varepsilon$  есть. Значит  $c^2 \geq 2$ .

Аналогично имеем, что  $\varepsilon \leq 2$ . А значит  $c^2 = 2$ , что не бывает над  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

**Следствие.**  $\mathbb{Q}$  не полно.

**Определение 6.** Значение  $t$  является *верхней (нижней) гранью* непустого множества  $X \in \mathbb{R}$  тогда и только тогда, когда  $t \geq X$ , т.е. любой элемент  $x$  множества  $X$  не более  $t$ .

*Точная верхняя (нижняя) грань* или *супремум (инфимум)* непустого множества  $X \subseteq \mathbb{R}$  — минимальная верхняя (нижняя) грань множества  $X$ . Он же является элементом разделяющим  $X$  и множество всех его верхних (нижних) граней. Обозначение:  $\sup(X)$  и  $\inf(X)$  соответственно.

*Осцелляцией* множества  $X$  называется значение  $\text{osc } X := \sup X - \inf X$ .

**Определение 7.**

- *Закрытый интервал* или *отрезок*  $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ .
- *Открытый интервал* или просто *интервал*  $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ .
- *Полуоткрытый интервал* или *полуинтервал*  $(a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ,  $[a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ .

**Теорема 2** (Лемма о вложенных отрезках). Пусть имеется  $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$  — множество вложенных (непустых) отрезков, т.е.  $\forall n > 1 \ I_{n+1} \subset I_n$ . Тогда  $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Заметим, что для любых натуральных  $n < m$  верно, что  $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$ , где  $I_n = [a_n; b_n]$ . Тогда для  $A := \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  и  $B := \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$  верно, что  $A \leq B$ . Значит есть разделяющий их элемент  $t$ , значит  $A \leq t \leq B$ , значит  $t \in I_i$  для всех  $i$ , значит  $t \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$ .  $\square$

*Замечание 1.* Теорема 2 не верна для не отрезков.

*Замечание 2.* Если в теореме 2  $b_i - a_i$  “сходится к 0”, т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall i > n \ b_i - a_i < \varepsilon$ , то пересечение всех отрезков состоит из ровно одного элемента.

**Теорема 3** (индукция на вещественных числах). Пусть дано множество  $X \subseteq [0; 1]$ , что

1.  $0 \in X$ ;
2.  $\forall x \in X \exists \varepsilon > 0 : U_{\varepsilon}(x) \cap [0; 1] \subseteq X$ ;
3.  $\forall Y \subseteq X \sup(Y) \in X$ .

Тогда  $X = [0; 1]$ .

**Доказательство.** Предположим противное:  $X \neq [0; 1]$ . Рассмотрим  $Z := [0; 1] \setminus X$  ( $Z \neq \emptyset$ !) и  $Y := \{y \in [0; 1] \mid y < Z\}$  ( $Y \neq \emptyset$ !). Заметим, что  $Y \subseteq X$  и  $\sup(Y) = \inf(Z) = t$ . Тогда  $t \in X$  по второму условию. Значит для некоторого  $\varepsilon > 0$  верно, что  $U_{\varepsilon}(t) \cap [0; 1] \in X$ , а т.е.  $(U_{\varepsilon}(t) \cap [0; 1]) \cap Z = \emptyset$ , а тогда  $t \neq \inf(Z)$  — противоречие. Значит  $X = [0; 1]$ .  $\square$

## 2 Топология прямой, пределы и непрерывность.

### 2.1 Последовательности, пределы и ряды

**Определение 8.** *Предел последовательности*  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  — такое число  $x$ , что для любой окрестности  $x$  эта последовательность с некоторого момента будет лежать в этой окрестности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad x_n \in U_{\varepsilon}(x)$$

Обозначение:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}_{n=0}^{\infty} = x$ .

*Пределная точка последовательности*  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  — такое число  $x$ , что в любой его окрестности после любого момента появится элемент данной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : \quad x_n \in U_{\varepsilon}(x)$$

**Определение 9.** Последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$$

**Теорема 4.** *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда фундаментальна.*

**Доказательство.**

1. Пусть последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится к некоторому значению  $X$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| = |x_{n_1} - X + X - x_{n_2}| \leq |x_{n_1} - X| + |X - x_{n_2}| < \varepsilon$$

2. Пусть последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  фундаментальна. Мы знаем, что для каждого  $\varepsilon > 0$  все члены, начиная с некоторого различаются менее чем на  $\varepsilon$ . Тогда возьмём какой-нибудь такой член  $y_0$  для некоторого  $\varepsilon$ , затем какой-нибудь такой член  $y_1$  для  $\varepsilon/2$ , который идёт после  $y_0$  и так далее. Получим последовательность, что все члены, начиная с  $n$ -ого лежат в  $\varepsilon/2^n$ -окрестности  $y_n$ . Тогда рассмотрим последовательность  $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ , где  $I_n = [y_n - \varepsilon/2^{n-1}; y_n + \varepsilon/2^{n-1}]$ . Несложно понять, что  $I_n \supseteq I_{n+1}$ , поэтому в пересечении  $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$  лежит некоторый  $X$ . Несложно понять, что все члены начальной последовательности, начиная с  $y_{n+2}$ , лежат в  $\varepsilon/2^{n+2}$ -окрестности  $y_{n+2}$ . При этом  $|y_{n+2} - X| \leq \varepsilon/2^{n+1}$ , что значит, что все члены главной последовательности, начиная с  $y_{n+2}$  лежат в  $3\varepsilon/2^{n+2}$ -окрестности  $X$ , а значит и в  $\varepsilon/2^n$ .

□

**Утверждение 5.** Для последовательностей  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  и  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  верно (если определено), что

1.  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} + \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$
2.  $-\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$
3.  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n y_n\}_{n=0}^{\infty}$
4.  $\frac{1}{\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}} = \lim\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$  (если  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \neq 0$ )

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

**Доказательство.**

1. Пусть  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$ ,  $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, M \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon/2 \quad \wedge \quad \forall m > M \quad |y_m - Y| < \varepsilon/2,$$

тогда

$$\forall n > \max(N, M) \quad |(x_n + y_n) - (X + Y)| \leq |x_n - X| + |y_n - Y| < \varepsilon,$$

что означает, что  $\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится и сходится к  $X + Y$ .

2. Пусть  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon,$$

тогда

$$\forall n > N \quad |(-x_n) - (-X)| = |X - x_n| = |x_n - X| < \varepsilon,$$

что означает, что  $\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится и сходится к  $-X$ .

3. Пусть  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$ ,  $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$ . Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} + \frac{|x|+|y|}{2}} = \sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} - \frac{|x|+|y|}{2}$$

Несложно видеть, что  $\delta(\varepsilon)$  всегда определено и всегда положительно. Также несложно видеть, что  $\delta(\varepsilon)$  есть корень уравнения  $t^2 + t(|X| + |Y|) = \varepsilon$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, M \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad |x_n - X| < \delta(\varepsilon) \quad \wedge \quad \forall m > M \quad |y_m - Y| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\begin{aligned} \forall n > \max(N, M) \quad |x_n \cdot y_n - X \cdot Y| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot Y + x_n \cdot Y - X \cdot Y| \\ &\leq |x_n \cdot (y_n - Y)| + |(x_n - X) \cdot Y| \\ &< |x_n| \cdot \delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \cdot |Y| \\ &< (|X| + \delta(\varepsilon)) \cdot \delta(\varepsilon) + |Y| \cdot \delta(\varepsilon) \\ &= \delta(\varepsilon)^2 + (|X| + |Y|)\delta(\varepsilon) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

что означает, что  $\{x_n \cdot y_n\}_{n=0}^\infty$  сходится и сходится к  $X \cdot Y$ .

4. Пусть  $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = X$ . Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon|X|^2}{1 + \varepsilon|X|}$$

Несложно видеть, что  $\delta(\varepsilon)$  всегда определено и всегда меньше  $|X|$ . Также несложно видеть, что  $\delta(\varepsilon)$  есть корень уравнения  $\frac{t}{|X|(|X| - t)} = \varepsilon$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad |x_n - X| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\forall n > N \quad \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{X} \right| = \left| \frac{X - x_n}{X \cdot x_n} \right| < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X| \cdot |x_n|} < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X|(|X| - \delta(\varepsilon))} = \varepsilon,$$

что означает, что  $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^\infty$  сходится и сходится к  $1/X$ .

□

**Определение 10.** Последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  *асимптотически больше* последовательности  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ , если  $x_n > y_n$  для всех натуральных  $n$ , начиная с некоторого. Обозначение:  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$ .

Аналогично определяются *асимптотически меньше* ( $\{x_n\}_{n=0}^\infty \prec \{y_n\}_{n=0}^\infty$ ), *асимптотически не больше* ( $\{x_n\}_{n=0}^\infty \preccurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$ ) и *асимптотически не меньше* ( $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$ ).

**Утверждение 6.** Если  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$ , то  $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty \geq \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$ .

**Доказательство.** Предположим противное, т.е.  $Y > X$ , где  $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$ . Тогда пусть  $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$ . С каких-то моментов  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  и  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  находятся в  $\varepsilon$ -окрестностях  $X$  и  $Y$  соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов,  $y_n > Y - \varepsilon = X + \varepsilon > x_n$ , т.е.  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \prec \{y_n\}_{n=0}^\infty$  — противоречие. Значит  $X \geq Y$ . □

**Утверждение 7.** Если  $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty > \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$ , то  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$ . Тогда пусть  $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$ . С каких-то моментов  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  и  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  находятся в  $\varepsilon$ -окрестностях  $X$  и  $Y$  соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов,  $x_n > X - \varepsilon = Y + \varepsilon > y_n$ , т.е.  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$ . □

**Утверждение 8** (лемма о двух полицейских). Если

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$$

и

$$\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{z_n\}_{n=0}^{\infty} = A,$$

то предел  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  определён и равен  $A$ .

**Доказательство.** Для каждого  $\varepsilon > 0$  есть  $N, M \in \mathbb{N}$ , что

$$\forall n > N \quad |x_n - A| < \varepsilon \quad \wedge \quad \forall m > M \quad |z_m - A| < \varepsilon,$$

значит

$$\forall n > \max(N, M) \quad A + \varepsilon > x_n \geq y_n \geq z_n > A - \varepsilon \quad \text{т.е.} \quad |y_n - A| < \varepsilon,$$

что означает, что  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится и сходится к  $A$ .  $\square$

**Утверждение 9.** Если  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = A$ , а  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  не убывает (с некоторого момента), то предел  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  существует и не превосходит  $A$ .

**Доказательство.** Если последовательность  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  возрастает не с самого начала, то отрезем её начало с до момента начала возрастания. Заметим, что она ограничена сверху (из-за последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ), тогда определим  $B := \sup(\{y_n\}_{n=0}^{\infty})$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |B - x_N| < \varepsilon$ , тогда  $\forall n > N \quad |B - x_n| < \varepsilon$ , что означает, что  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится и сходится к  $B$ . По утверждению 6  $A \geq B$ .  $\square$

**Определение 11.** Сумма ряда  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  есть значение  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim \left\{ \sum_{i=0}^k a_i \right\}_{k=0}^{\infty}$ . Частичной же суммой  $s_k$  этого ряда называется просто  $\sum_{i=0}^k a_i$ .

**Определение 12.** Ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  сильно сходится, если  $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$  сходится.

**Теорема 10.** Если ряд сильно сходится, то он сходится.

**Доказательство.**

**Лемма 10.1.** Пусть ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  сходится, тогда сходится любой его “хвост” (суффикс), и для любого  $\varepsilon > 0$  есть такой хвост, сумма которого меньше  $\varepsilon$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ . Это значит, что для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n \geq N$  верно, что  $\sum_{i=0}^n |a_i| \in U_{\varepsilon}(A)$ . Тогда заметим, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=N+1}^n |a_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^n |a_i| - \sum_{i=0}^N |a_i| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n |a_i| - \sum_{i=0}^N |a_i| = A - \sum_{i=0}^N |a_i| \in U_{\varepsilon}(0)$$

Это и означает, что любой хвост сходится. И так мы для каждого  $\varepsilon$  нашли такой хвост, что его сумма меньше  $\varepsilon$ .  $\square$

Пусть дан сильно сходящийся ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ . Пусть  $\varepsilon_n := \sum_{i=n}^{\infty} |a_i|$ . Несложно видеть, что  $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$  монотонно уменьшается, сходясь к 0 (последнее следует из леммы 10.1). Также несложно видеть по рассуждениям леммы 10.1, что  $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = |a_n|$ . Тогда определим

$$S_n := \overline{U}_{\varepsilon_{n+1}} \left( \sum_{i=0}^n a_i \right),$$

где  $\overline{U}_\varepsilon(x)$  — закрытая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$ . Тогда несложно видеть, что

$$\left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i - \sum_{i=0}^n a_i \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| \leq \varepsilon_{n+1}$$

Тем самым сумма любого префикса длины хотя бы  $n+1$  лежит в  $\overline{U}_{\varepsilon_{n+1}}(\sum_{i=0}^n a_i) = S_n$ . Также несложно видеть, что  $S_{n+1} \subseteq S_n$ . А также понятно, что  $S_i$  замкнуто и ограничено (“компактно”).

Пусть  $A := \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$  (поскольку диаметры шаров сходятся к нулю, то в пересечении лежит не более одной точки). Тогда мы видим, что  $|\sum_{i=0}^n a_i - A| \leq \varepsilon_{n+1} \rightarrow 0$ , поэтому  $\sum_{i=0}^n a_i$  сходится и сходится к  $A$ .  $\square$

**Следствие 10.1.** Если  $\{b_i\}_{i=0}^{\infty} \succcurlyeq \{|a_i|\}_{i=0}^n$  и  $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$  существует, то и  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  существует.

**Теорема 11** (признак Лейбница). Пусть дана последовательность  $\{a_n\}$ , монотонно сверху сходящаяся к 0. Тогда ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$  сходится.

**Доказательство.** Рассмотрим последовательности

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} := \{S_{2n}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i \right\}_{n=0}^{\infty} \quad \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} := \{S_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i \right\}_{n=0}^{\infty}$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0 & Q_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0 \\ Q_n - P_n &= -a_{2n+1} \leq 0 & P_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

Тогда имеем, что  $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$  монотонно убывает,  $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$  монотонно возрастает, а также

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} \geq \{Q_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Тогда последовательности  $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$  и  $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходятся и сходятся к  $P$  и  $Q$  соответственно. При этом последовательность

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} - \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{P_n - Q_n\}_{n=0}^{\infty} = a_{2n+1}$$

тоже сходится по условию и сходится к 0. Поэтому

$$P - Q = \lim \{P_n\}_{n=0}^{\infty} - \lim \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} = 0$$

значит  $P = Q$ . Значит и последовательность префиксных сумм тоже сходится к  $P = Q$ .  $\square$

**Лемма 12** (преобразование Абеля).

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

где  $B_n := \sum_{i=0}^n b_i$ .

**Теорема 13** (признак Дирихле). Если даны  $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$  и  $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ , что  $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \searrow 0$ , а  $\{B_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{i=0}^n b_i\}_{i=0}^{\infty}$  ограничена, то ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$  сходится.



**Доказательство.**

$$S_n = \sum_{i=0}^n a_i b_i = \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n$$

Пусть  $|B_n| < C$  для всех  $n$ . Несложно видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n B_n| \leq \lim a_n C = C \lim a_n = 0,$$

поэтому  $\lim a_n B_n = 0$ . Также

$$|(a_k - a_{k+1}) B_k| < C |a_k - a_{k+1}| = C(a_k - a_{k+1}),$$

поэтому

$$|S_n - a_n B_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k| < C \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = C(a_0 - a_n),$$

что тоже сходится. Поэтому  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится, т.е. и ряд сходится.  $\square$

## 2.2 Топология

**Определение 13.**  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$  (для  $\varepsilon > 0$ ) —  $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ . Обозначение:  $U_\varepsilon(x)$ .

Проколота  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$  —  $(x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon)$ . Обозначение:  $V_\varepsilon(x)$ .

**Определение 14.** Пусть дано некоторое множество  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Тогда точка  $x \in X$  называется *внутренней точкой* множества  $X$ , если она содержится в  $X$  вместе со своей окрестностью.

Само множество  $X$  называется *открытым*, если все его точки внутренние.

*Пример 1.* Следующие множества открыты:

- $(a; b)$ ;
- $(a; +\infty)$ ;
- $\mathbb{R}$ ;
- $\emptyset$ ;
- $\bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i; b_i)$  (интервалы не обязательно не должны пересекаться).

**Определение 15.** Пусть дано множество  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется *предельной точкой* множества, если в любой проколота окрестности  $x$  будет какая-либо точка  $X$ .

Множество предельных точек  $X$  называется *производным множеством* множества  $X$  и обозначается как  $X'$ .

Множество  $X$  называется *замкнутым*, если  $X \supseteq X'$ .

**Определение 16.** Пусть дано множество  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Если у любой последовательности его точек есть предельная точка из самого множества  $X$ , то  $X$  называется *компактным*.

**Теорема 14.** Подмножество  $\mathbb{R}$  компактно тогда и только тогда, когда замкнуто и ограничено.

**Доказательство.**

1. Пусть  $X \subseteq \mathbb{R}$  компактно. Если  $X$  неограниченно, то несложно построить последовательность элементов  $X$ , которая монотонно возрастает или убывает, а разность между членами не меньше любой фиксированной константы (например, не меньше 1); такая последовательность не имеет предельных точек, что противоречит определению  $X$ , а значит  $X$  ограничено. Если  $X$  не замкнуто, то можно рассмотреть предельную точку  $x$ , не лежащую в  $X$ , и построить последовательность, сходящуюся к ней, а значит никаких других точек у последовательности быть не может, а значит опять получаем противоречие с определением  $X$ ; значит  $X$  ещё и замкнуто.
2. Пусть  $X$  замкнуто и ограничено. Пусть также дана некоторая последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  элементов  $X$ . Поскольку  $X$  ограничено, то значит лежит внутри некоторого отрезка  $I_0$ . Определим последовательность  $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$  рекуррентно следующим образом. Пусть  $I_n$  определено; разделим  $I_n$  на две половины и определим  $I_{n+1}$  как любую из половин, в которой находится бесконечное количество членов последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ . После этого определим последовательность  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  как подпоследовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ , что  $y_n \in I_n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$  (это можно сделать рекуррентно: если определён член  $y_n$ , то найдётся ещё бесконечное количество членов начальной последовательности в  $I_{n+1}$ , которые идут после  $y_n$ , так как отброшено конечное количество, а значит можно взять любой). Несложно видеть, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n =: y$ . Из-за замкнутости  $y \in X$ , а значит  $y$  — предельная точка  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  — лежит в  $X$  и доказывает компактность  $X$ .

□

**Лемма 15.** Пусть  $\Sigma$  — семейство интервалов длины больше некоторого  $d > 0$ , покрывающее отрезок  $[a; b]$ . Тогда у  $\Sigma$  есть конечное подсемейство  $\Sigma'$ , покрывающее  $[a; b]$ .

**Доказательство.** Давайте вести индукцию по  $\lceil (b - a)/d \rceil$ .

**База.**  $\lceil (b - a)/d \rceil = 0$ . В таком случае  $a = b$ , а значит, можно взять любой интервал, покрывающий единственную точку и получить всё искомое семейство  $\Sigma'$ .

**Шаг.** Рассмотрим  $\Omega := \{I \in \Sigma \mid a \in I\}$ . Заметим, что если у правых концов интервалов из  $\Omega$  нет верхних граней (т.е. их множество не ограничено сверху), то значит найдётся интервал, покрывающий и  $a$ , и  $b$ , а значит его как единственный элемент семейства  $\Sigma'$  будет достаточно. Иначе определим  $a'$  как супремум правых концов интервалов из  $\Omega$ .

Тогда мы имеем, что есть интервалы из  $\Omega$ , подбирающиеся сколь угодно близко к  $a'$ , а также что все интервалы из  $\Sigma$ , покрывающие  $a'$  не покрывают  $a$ . Если  $a' > b$ , то можно опять же взять интервал, который покроет весь  $[a; b]$ , и остановится. Иначе рассмотрим любой интервал  $I$ , покрывающий  $a'$  и любой интервал  $J$  из  $\Omega$ , перекрывающийся с  $I$ . Пусть  $a''$  — правый конец  $J$ .

Заметим, что  $I$  и  $J$  покрывают  $[a; a'']$ . При этом  $a < J < a''$ , значит  $a'' - a \geq \text{osc}(J) > d$ . Если  $a'' > b$ , то  $\Sigma = \{I, J\}$  будет достаточно. Иначе заметим, что

$$\left\lceil \frac{b - a''}{d} \right\rceil = \left\lceil \frac{b - a}{d} - \frac{a'' - a}{d} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{b - a}{d} - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{b - a}{d} \right\rceil - 1 < \left\lceil \frac{b - a}{d} \right\rceil$$

Тогда по предположению индукции есть конечное подпокрытие  $\Sigma''$  покрытия  $\Sigma$  отрезка  $[a''; b]$ . Значит  $\Sigma' := \Sigma'' \cup \{I, J\}$  является конечным подпокрытием покрытия  $\Sigma$  множества  $[a; b]$ . □

**Лемма 16.** Пусть  $\Sigma$  — семейство интервалов длины больше некоторого  $d > 0$ . Тогда найдётся не более чем счётное подсемейство  $\Sigma'$ , имеющее такое же объединение, т.е.  $|\Sigma'| \leq |\mathbb{N}|$ ,  $a \cup \Sigma = \bigcup \Sigma'$ .

**Доказательство.** Несложно видеть, что  $A := \bigcup \Sigma$  представляется в виде дизъюнктного объединения интервалов. Каждый из них можно представить как объединение не более чем счётного отрезков. Итого мы получим не более чем счётное семейство  $\Omega$  отрезков, что  $\bigcup \Omega = A$ . Для каждого отрезка из  $\Omega$  построим по лемме 15 конечное подпокрытие покрытия  $\Sigma$ , а затем объединив их, получим не более чем счётное семейство  $\Sigma'$ , покрывающее любой из них, а значит и  $\bigcup \Omega = A = \bigcup \Sigma$ . С другой стороны  $\Sigma' — подмножество \Sigma$ , значит и  $\bigcup \Sigma' — подмножество \bigcup \Sigma$ .

В итоге  $\bigcup \Sigma' = \bigcup \Sigma$ , и при этом  $\Sigma' — не более чем счётное подмножество \Sigma$ .  $\square$

**Лемма 17.** Пусть дано семейство  $\Sigma$  интервалов. Тогда из него можно выделить не более чем счётное подсемейство  $\Sigma'$  с тем же объединением, т.е.  $|\Sigma'| \leq |\mathbb{N}|$ , а  $\bigcup \Sigma = \bigcup \Sigma'$ .

**Доказательство.** Рассмотрим для каждого  $n \in \mathbb{Z}$  семейство

$$\Sigma_n = \{I \in \Sigma \mid \text{osc}(I) \in [2^n; 2^{n+1})\}$$

Применим лемму к  $\Sigma_n$  и получим  $\Sigma'_n$ . Тогда  $\Sigma' := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma'_n$  является подмножеством  $\Sigma$ , даёт в объединении то же, что и  $\Sigma$ , и при этом имеет мощность не более  $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ .  $\square$

**Теорема 18.** Подмножество  $\mathbb{R}$  компактно тогда и только тогда, когда из любого его покрытия интервалами можно выделить конечное подпокрытие.

**Доказательство.**

1. Пусть  $X$  компактно, а  $\Sigma — некоторое его покрытие интервалами. Определим для каждого  $d > 0$$

$$\Sigma_d := \{I \in \Sigma \mid \text{osc}(I) > d\}$$

Если никакое из  $\Sigma_d$  не является подпокрытием множества  $X$ , то рассмотрим последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , где  $x_n — любой элемент  $X \setminus \Sigma_{1/2^n}$ . У  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  есть предельная точка  $x \in X$ . Значит должен быть интервал, покрывающий  $x$ , но тогда он же покрывает весь некоторый хвост нашей последовательности, а сам лежит в некотором  $\Sigma_{1/2^n} — противоречие. Значит некоторое  $\Sigma_d$  является подпокрытием, а значит далее можно рассматривать его в качестве  $\Sigma$ .$$

$\bigcup \Sigma — открытое множество, поэтому является дизъюнктным объединением семейства  $\Omega$  интервалов. Поскольку в  $\Sigma$  длины всех интервалов больше  $d$ , то в  $\Omega$  тоже. Но также  $X$  ограничено, поэтому  $\Omega$  конечно, да и все интервалы в нём ограничены. Заметим, что  $X \cap I$ , где  $I — любой интервал из  $\Omega$ , является замкнутым множеством, поэтому его можно накрыть некоторым отрезком  $S \subseteq I$  (для этого можно взять отрезок  $[\inf(X \cap I); \sup(X \cap I)]$ ). Значит из накрытия  $\Sigma$  выделить  $|\Omega|$  конечных подпокрытий для каждого отрезка (по лемме 16), а их объединение даст конечное покрытие  $X$ .$$

2. Пусть  $X$  таково, что из любого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Если  $X$  неограничено, то тогда несложно будет видеть, что покрытие  $\{(n; n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  нельзя уменьшить до конечного. Значит  $X$  конечно.

Если  $X$  не замкнуто, то значит есть точка  $x \notin X$ , что в любой окрестности  $x$  будет точка. Тогда рассмотрим покрытие  $\{(x+2^n; x^{n+2}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x-2^{n+2}; x^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Несложно видеть, что если взять любое конечное подсемейство интервалов, то оно не накроет некоторую окрестность  $x$ , а значит и  $X$ . Значит  $X$  замкнуто.

Итого получаем, что  $X$  компактно.  $\square$

## 2.3 Пределы функций, непрерывность

**Определение 17** (по Коши). *Предел функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x$  — такое значение  $y$ , что*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(V_\delta(x) \cap X) = U_\varepsilon(y)$$

Обозначение:  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = y$ .

**Определение 18** (по Гейне). *Предел функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x$  — такое значение  $y$ , что для любой последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  элементов  $X \setminus \{x\}$  последовательность  $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$  сходится к  $y$ .* Обозначение:  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = y$ .

**Теорема 19.** *Определения пределов по Коши и по Гейне равносильны.*

**Доказательство.** Будем доказывать равносильность отрицаний утверждений, ставимых в определениях.

1. Пусть функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  не сходится по Коши в  $x$  к значению  $y$ . Значит есть такое  $\varepsilon > 0$ , что в любой проколотой окрестности  $x$  (в множестве  $X$ ) есть точка, значение  $f$  в которой не лежит в  $\varepsilon$ -окрестности. Рассмотрим любую такую проколотую окрестность  $I_0 = V_{\delta_0}(x)$ , берём в ней любую такую точку  $x_0$ . Далее рассмотрим  $I_1 = V_{\delta_1}(x)$ , где  $\delta_1 = \min(\delta_0/2, |x - x_0|)$ , берём там любую точку  $x_1$ , где значение  $f$  вылетает вне  $\varepsilon$ -окрестности  $y$ . Так далее строим последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , сходящуюся к  $x$ , значения  $f$  в которой не лежат в  $\varepsilon$ -окрестности  $y$ , что означает, что  $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$  не сходится к  $y$ , что означает, что  $f$  не сходится по Гейне в  $x$  к значению  $y$ .
2. Пусть функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  не сходится по Гейне в  $x$  к значению  $y$ . Значит есть последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , сходящаяся к  $x$ , что последовательность её значений не сходится к  $y$ . Значит есть  $\varepsilon > 0$ , что после любого момента в последовательности будет член, значение в котором вылезает вне  $\varepsilon$ -окрестности  $y$ . Поскольку для любой проколотой окрестности  $x$  есть момент, начиная с которого вся последовательность лежит в этой окрестности, то в любой проколотой окрестности  $x$  есть член, значение которого вылезает вне  $\varepsilon$ -окрестности  $y$ , что означает, что  $f$  не сходится по Коши в  $x$  к  $y$ .

□

**Утверждение 20.** *Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  имеет в  $x$  предел тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in V_\delta(x) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

**Доказательство.** Такое же как для последовательностей: см. теорему 4.

□

**Утверждение 21.** *Для функций  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  верно, что*

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} (-f)(x) = -\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$
4.  $\frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (\frac{1}{f})(x)$  (если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ )
5.  $\lim_{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x)} f(y) = \lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x)$

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

**Замечание 3.** Утверждения 6, 7 и 8 верны, если заменить последовательности на функции, пределы последовательностей на пределы функций в некоторой точке  $x$ , а асимптотические неравенства на неравенства на окрестности  $x$ .

**Определение 19.** Верхним пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{\delta > 0} \left( \sup_{V_\delta(x_0)} f \right)$$

Нижним пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\delta > 0} \left( \inf_{V_\delta(x_0)} f \right)$$

**Утверждение 22.** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  имеет в  $x$  предел тогда и только тогда, когда  $\overline{\lim}_{t \rightarrow x} f(t) = \underline{\lim}_{t \rightarrow x} f(t)$ .

**Определение 20.** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется непрерывной в точке  $x$ , если  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$ . В изолированных точках  $f$  всегда непрерывна.

**Определение 21.** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется непрерывной на множестве  $Y \subseteq X$ , если она непрерывна во всех точках  $Y$ .

**Утверждение 23.** Для непрерывных на  $X$  функций  $f$  и  $g$  верно, что

- $f + g$  непрерывна на  $X$ ;
- $fg$  непрерывна на  $X$ ;
- $\frac{1}{f}$  непрерывна на  $X$  (если  $f \neq 0$ ).

**Утверждение 24.** Для  $f$ , непрерывной в  $x_0$ , и  $g$ , непрерывной в  $f(x_0)$ ,  $g \circ f$  непрерывна в  $x_0$ .

**Теорема 25** (Вейерштрасса). Непрерывная функция на компакте ограничена на нём и принимает на нём свои минимум и максимум.

**Доказательство.** Докажем утверждение для ограниченности сверху и максимума; для ограниченности снизу и минимума рассуждения аналогичны.

Пусть множество неограниченно сверху. Тогда есть  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , что  $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty \rightarrow +\infty$ . Тогда рассмотрим подпоследовательность  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , сходящуюся к  $y$ . Тогда

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = +\infty$$

— противоречие.

Тогда существует последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , что  $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$  сходится к супремуму  $S$  функции. Рассмотрим подпоследовательность  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , сходящуюся к  $y$ . Тогда

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = S$$

□

**Следствие 25.1.** Так как отрезок компактен, то любая непрерывная на нём функция ограничена и принимает на нём свои максимум и минимум.

**Теорема 26** (о промежуточном значении). Пусть  $f$  непрерывна на  $[a; b]$ , а  $f(a) < f(b)$ . Тогда  $\forall y \in [f(a); f(b)]$  найдётся  $c \in [a; b]$ , что  $f(c) = y$ .

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность  $\{(a_n; b_n)\}_{n=0}^{\infty}$ , что  $(a; b) = (a_0; b_0)$ , а следующие пары определяются так: если  $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$ , то  $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (\frac{a_n+b_n}{2}; b_n)$ , иначе  $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (a_n; \frac{a_n+b_n}{2})$ . Тогда  $c = \lim\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Тогда

$$f(c) = \lim\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{f(b_n)\}_{n=0}^{\infty},$$

откуда получаем, что  $f(c) \geq y$  и  $f(c) \leq y$ , т.е.  $f(c) = y$ . □

**Определение 22.** Функция  $f$  равномерно непрерывна на  $X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

**Теорема 27** (Кантор). Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна.

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x, y : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Тогда рассмотрим последовательность пар  $x$  и  $y$  построенных так для  $\delta$ , сходящихся к 0. Из неё выделим подпоследовательность, что  $x$  сходится к некоторому  $a$ . Тогда  $y$  сойдутся к нему же. Тогда в любой окрестности  $a$  будет пара точек  $(x'; y')$ , что  $|f(x') - f(y')| > \varepsilon$ , значит будет в любой окрестности  $x$  будет точка, выбивающаяся из  $\varepsilon/2$ -окрестности — противоречие с непрерывностью. □

**Определение 23.** Пусть есть функции  $f$  и  $g$ , что  $|f| \leq C|g|$  в окрестности  $x$  для некоторого  $C \in \mathbb{R}$ , тогда пишут, что  $f = O(g)$  (при  $t \rightarrow x$ ).

Если же  $\forall \varepsilon > 0$  будет такая окрестность  $x_0$ , что  $|f| \leq \varepsilon|g|$  в этой окрестности, тогда пишут, что  $f = o(g)$  (при  $t \rightarrow x$ ).

## 2.4 Гладкость (дифференцируемость)

**Определение 24.** Функция  $f$  называется гладкой (дифференцируемой) в  $x$ , если  $f(x + \delta) = f(x) + A\delta + o(\delta)$  для некоторого  $A \in \mathbb{R}$ . В таком случае  $A$  называется дифференциалом (производной)  $f$  в точке  $x$ .

Обозначение:  $f'(x) = A$ .

**Определение 25.** Функция  $f$  называется гладкой (дифференцируемой) в  $x$ , если предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$$

определён. В таком случае его значение называется дифференциалом (производной)  $f$  в точке  $x$ .

**Утверждение 28.** Определения 24 и 25 равносильны.

**Утверждение 29.** Непрерывная в некоторой точке функция там же непрерывна.

**Определение 26.** Функция, значения которой равны производным функции  $f$  в тех же точках называется производной функцией (или просто производной) функции  $f$ . Обозначение:  $f'$ .

**Лемма 30.** Для дифференцируемых в  $x$  функций  $f$  и  $g$

1.  $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ ;
2.  $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  (правило Лейбница);
3.  $(\frac{1}{f})'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$ ;
4.  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ .

**Лемма 31.** Пусть дана  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция. Тогда существует  $g : [f(a); f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция, что  $g \circ f = Id$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $f$  — монотонно возрастающая (убывающая) биекция из  $[a; b]$  в  $[f(a); f(b)]$ . Тогда существует монотонно возрастающая (убывающая) биекция  $g : [f(a); f(b)] \rightarrow [a; b]$ , что  $g \circ f = id$ . Осталось показать, что  $g$  непрерывна.

Предположим противное, тогда в любой окрестности некоторой точки  $f(x)$  из  $[f(a); f(b)]$  есть точки вылетающие вне  $\varepsilon$ -окрестности. Значит все точки из либо  $(x - \varepsilon; x)$ , либо  $(x; x + \varepsilon)$  не принимаются, значит  $g$  не биекция — противоречие. Значит  $g$  непрерывна.  $\square$

**Лемма 32.**

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

**Доказательство.** Пусть  $g := f^{-1}$ . Тогда

$$1 = Id' = (f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$$

Откуда следует, что

$$(f^{-1})' = g' = \frac{1}{f' \circ g} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

$\square$

**Определение 27.** Функция  $f$  возрастает в точке  $y$ , если есть  $\varepsilon > 0$ , что  $f(x) \leq f(y)$  для любого  $x \in (y - \varepsilon; y)$  и  $f(x) \geq f(y)$  для любого  $x \in (y; y + \varepsilon)$ .

Аналогично определяется убываемость функции в точке.

**Лемма 33.** Если  $f$  возрастает в любой точке на  $[a; b]$ , то  $f(a) \leq f(b)$ .

**Доказательство.**

1. Можно рассмотреть для каждой точки  $[a; b]$  окрестность, для которой верна её возрастательность, и из покрытия, ими образуемого, выделить конечное. А тогда перебираясь между общими точками окрестностей, получим искомое.
2. Также можно предположить противное, рассмотреть последовательность вложенных отрезков, у которых левый конец выше правого, и тогда для точки пересечения отрезков будет противоречие.

$\square$

**Следствие 33.1.**  $f$  возрастает на всём отрезке.

**Теорема 34.** Если  $f$  гладка, а  $f'$  положительна на  $[a; b]$ , то  $f$  строго возрастает на  $[a; b]$ .

**Доказательство.** Несложно видеть, что в любой точке на  $[a; b]$  у функции есть окрестность, где она строго возрастает, так как если  $t \in [a; b]$ , а  $f'(t) = \lambda > 0$ , то в некоторой окрестности

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \in (0; 2\lambda) \quad \implies \quad f(x) \in (f(t); f(t) + 2\lambda(x - t))$$

что значит, что эта окрестность — подтверждение для возрастания  $f$  в  $t$ . Тогда по предыдущему следствию  $f$  возрастает на  $[a; b]$ . Если вдруг функция возрастает не строго, то тогда найдётся подотрезок на  $[a; b]$ , на котором функция константа, а значит на интервале с теми же концами производная тождественно равна нулю.  $\square$

**Теорема 35.** Если  $f$  возрастает, то  $f'$  в своей области определения неотрицательно.

**Доказательство.** Если функция в точке  $t$  равна  $\lambda < 0$ , то в некоторой окрестности  $t$

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \in \left(\frac{3}{2}\lambda; \frac{1}{2}\lambda\right) \quad \implies \quad f(x) \in \left(f(t) + \frac{3}{2}\lambda(x - t); f(t) + \frac{1}{2}\lambda(x - t)\right)$$

что значит, что  $f$  в точке  $t$  "строго" убывает — противоречие. Значит  $f'(t) \geq 0$ .  $\square$

**Определение 28.**  $f$  имеет локальный максимум в  $x$ , если для некоторого  $\varepsilon > 0$  верно, что  $f(x) \geq f(y)$  для любого  $y \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ .

Аналогично определяется точка локального минимума.

**Теорема 36.** В точках локальных максимумов и минимумов функции  $f$  функция  $f'$  принимает нули (если определена).

**Доказательство.** Слева от точки максимума функция возрастает в данной точке, значит производная в данной точке  $\geq 0$ , а справа — убывает, значит производная  $\leq 0$ , значит производная равна 0. Аналогично для точки минимума.  $\square$

**Теорема 37** (Ролль). Если  $f$  — гладкая функция на  $[a; b]$ , и  $f(a) = f(b)$ , то существует  $c \in (a; b)$ , что  $f'(c) = 0$ .

**Доказательство.** В точке максимума или минимума  $f$  на  $[a; b]$  достигается ноль производной. Если они обе совпадают с концами отрезка, то значит функция константа, а тогда в любой точке отрезка производная равна нулю.  $\square$

**Теорема 38.** Если  $f$  и  $g$  непрерывные на  $[a; b]$  и гладкие на  $(a; b)$  функции, а  $g' \neq 0$ , то существует  $c \in (a; b)$ , что

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Доказательство.** Пусть

$$\lambda := \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

а  $\tau(x) := f(x) - \lambda g(x)$ . В таком случае

$$\frac{\tau(a) - \tau(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{(f(a) - f(b) - \lambda(g(a) - g(b)))}{g(a) - g(b)} = \lambda - \lambda = 0$$

значит  $\tau(a) = \tau(b)$ , значит есть  $c \in [a; b]$ , что  $\tau(c) = 0$ . Тогда

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{(\tau + \lambda g)'(c)}{g'(c)} = \frac{\tau'(c)}{g'(c)} + \lambda = \lambda = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

$\square$



**Теорема 39** (Лагранж). Если  $f$  непрерывна на  $[a; b]$  и гладка на  $(a; b)$ , то существует  $c \in (a; b)$ , что

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$$

**Доказательство.** Очевидно следует из предыдущей теоремы с помощью подстановки  $g(x) = x$ .  $\square$

**Теорема 40.** Пусть  $f$  — гладкая на  $(a; b)$  функция.

1. Если  $f' \geq 0$ , то  $f$  возрастающая функция.
2. Если  $f' > 0$ , то  $f$  строго возрастающая функция.
3. Если  $f$  возрастающая функция, то  $f' > 0$ .

**Теорема 41.** Пусть  $f$  — гладкая на  $[a; b]$  функция. Если  $f'(x) = 0$  для всех  $x \in [a; b]$ , то  $f \equiv \text{const}$  на том же отрезке.

*Замечание 4.* Функция  $f(x) := x^2 \sin(1/x)$  (доопределённая в нуле) имеет производную  $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$  в случае ненулевых  $x$  и производную  $f'(0) = 0$ . При этом легко видно, что  $f'$  не является непрерывной функцией (она имеет разрыв в том же нуле).

**Теорема 42.** Если  $f$  гладка на  $(a; b)$ , а  $f'$  не равна нулю, то  $f'$  либо положительна, либо отрицательна.

**Доказательство.**  $f$  не принимает никакого значения на  $(a; b)$  дважды (т.к. иначе у производной был бы корень), значит она либо строго возрастает, либо строго убывает, а значит  $f'$  либо неотрицательна, либо неположительна соответственно. Но ноль принимать не может, поэтому последнее утверждение равносильно тому, что  $f$  либо строго положительна, либо строго отрицательна.  $\square$

**Теорема 43.** Пусть  $f$  гладка на  $(a; b)$  и для некоторых  $u, v \in (a; b)$  верно, что  $f'(u) < \alpha < f'(v)$ . Тогда существует  $c \in (u; v)$ , что  $f'(c) = \alpha$ .

**Доказательство.** Пусть  $g(x) := f(x) - \alpha x$ . Тогда  $g'(u) < 0 < g'(v)$ , значит  $g$  не может строго возрастать или убывать на  $(u; v)$ , значит  $\exists c \in (u; v)$ , что  $g'(c) = 0$ , а значит  $f'(c) = \alpha$ .  $\square$

*Замечание 5.* Данная теорема по сути является теоремой о промежуточном значении для производной.

**Теорема 44.** Пусть  $f$  непрерывна на  $[a; b]$  и гладка на  $(a; b)$ . Пусть также  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$  существует и равен  $d$ . Тогда  $f'(a)$  тоже существует и равна  $d$ .

**Доказательство.** Есть несколько способов:

1. Несложно видеть, что для любого  $\varepsilon > 0$  есть некоторая правая окрестность  $a$ , в которой функция  $f'$  лежит в  $\varepsilon$ -окрестности  $d$ . Тогда  $f(x) - (d - \varepsilon)x$  убывает в данной окрестности, а  $f(x) - (d + \varepsilon)x$  возрастает, значит  $f(x) - f(a) \in ((d + \varepsilon)(x - a); (d - \varepsilon)(x - a))$ . В таком случае  $f'(a)$  определена и равна  $d$ .
2. По теореме Лагранжа для любого  $x \in [a; b]$  найдётся  $\xi \in (a; x)$ , что

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

Значит

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(\xi) = d$$

что буквально значит, что  $f'(a) = d$ .

□

**Теорема 45** (правило Лопиталя). Пусть  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ . Пусть также  $f$  и  $g$  гладки и  $g' \neq 0$  на  $(a; b)$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

если второй предел определён.

**Доказательство.** Пусть дано  $\varepsilon > 0$ , а

$$d := \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

. Тогда есть  $\delta > 0$ , что для любого  $t \in (a; a + \delta)$  значение  $f'(t)/g'(t)$  лежит в  $U_\varepsilon(d)$ . Легко видеть, что для любых  $x, y \in (a; a + \delta)$  существует  $\xi \in (x; y) \subseteq (a; a + \delta)$ , что

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = f'(\xi) \in U_\varepsilon(d)$$

Устремляя  $x$  к  $a$ , получаем, что  $f(y)/g(y)$  тоже лежит в  $U_\varepsilon(d)$ . Тогда по определению предела

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = d = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

**Определение 29.**  $f''$  — вторая производная  $f$ , т.е.  $(f')'$ , а  $f^{(n)}$  —  $n$ -ая производная  $f$ , т.е.  $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ ,  $f^{(0)} := f$ .

**Определение 30.**  $P(x)$  — полином Тейлора степени  $n$  функции  $f$ , если  $\deg(P) \leq n$ , а

$$f(x) - P(x) = o((x - a)^n), \quad x \rightarrow a$$

**Теорема 46.** Если  $P_1$  и  $P_2$  — полиномы Тейлора степени  $n$  функции  $f$ , то  $P_1 = P_2$ .

**Теорема 47.** Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$  определены на  $(t - \delta; t + \delta)$  для некоторого  $\delta > 0$  и определена  $f^{(n)}(t)$ . Тогда для всякого  $x \in U_\delta(t)$

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x - t) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + o((x - t)^n)$$

**Доказательство.** Рассмотрим  $g(x) := f(x) - f(t)/0! \cdot (x - t)^0 - \dots - f^{(n)}(t)/n! \cdot (x - t)^n$ . Тогда задача сведена к следующей лемме.

**Лемма 47.1.** Если  $g^{(1)}, \dots, g^{(n-1)}$  определены на  $(t - \delta; t + \delta)$  для некоторого  $\delta > 0$  и

$$g(t) = g^{(1)}(t) = \dots = g^{(n-1)}(t) = 0.$$

Тогда  $g(x) = o((x - t)^n)$ .

**Доказательство.** Докажем по индукции по  $n$ .

**База.** Пусть  $n = 1$ . Тогда очевидно, что  $f(x) = f(t) + f'(t)(x - t) + o(x - t) = o(x - t)$ .

**Шаг.** По предположению индукции  $f'(x) = o((x - t)^n)$ . Тогда мы имеем, что

$$f(x) - f(t) = f'(\xi)(x - t)$$

для некоторого  $\xi \in (x, t)$ . Тогда

$$\frac{f(x) - f(t)}{(x - t)^n} = \frac{f'(\xi)}{(x - t)^{n-1}} = \frac{o((\xi - t)^{n-1})}{(x - t)^{n-1}} = o(1) \frac{(\xi - t)^{n-1}}{(x - t)^{n-1}} = o(1)$$

□

□

**Теорема 48.** Пусть  $f(t) = f^{(1)}(t) = \dots = f^{(n)}(t) = 0$ , а  $f^{(n+1)} \neq 0$ . Если  $n$  чётно, то  $t$  — не экстремальная точка функции  $f$ , иначе  $t$  — экстремальная точка функции  $f$ .

**Теорема 49.** Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{(1)}, \dots, f^{(n+1)}$  определены на  $(t - \delta; t + \delta)$  для некоторого  $\delta > 0$ . Тогда для всякого  $x \in U_\delta(t)$  существует  $\xi \in (x; t)$ , что

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

**Доказательство.** Точно так же сведём  $f$  к  $g$ , что  $g(t) = \dots g^{(n)}(t) = 0$ . Тогда требуется показать, что  $g(x) = g^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! \cdot (x-t)^{n+1}$  для некоторого  $\xi \in (x, t)$ . Докажем это по индукции.

**База.**  $n = 0$ . Теорема Лагранжа.

**Шаг.**

$$\frac{f(x)}{(x-t)^{n+1}} = \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{n+1} - (t-t)^{n+1}} = \frac{f'(\xi)}{(n+1)(\xi-t)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$$

где  $\xi \in (x, t)$  (существует по теореме Лагранжа), а  $\eta \in (\xi, t) \subseteq (x, t)$  (существует по предположению индукции для  $f'$  и  $\xi$ ). Отсюда следует искомое утверждение. □

## 2.5 Стандартные функции, ряды Тейлора и их сходимость

Тут нужно рассказать про функции  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  и  $(1+x)^\alpha$  и их ряды

**Определение 31.**  $f$  является (поточечным) пределом  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  на  $E$ , если  $\lim\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty = f(x)$  для любого  $x \in E$ .

**Определение 32.**  $f$  является равномерным пределом  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  на  $E$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $N \in \mathbb{N}$ , что  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  для всех  $n > N$  и  $x \in E$ .

**Теорема 50** (Стокс, Зейдель). Пусть  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  — последовательность непрерывных функций, и  $f_n \rightarrow f$  равномерно на  $E$ . Тогда  $f$  непрерывна.

**Доказательство.** Для любого  $\varepsilon > 0$  есть такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$  для всех  $x \in E$ . Тогда существует  $\delta > 0$ , что  $f_n(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(t))$  для данного  $t$ . Тогда

$$f(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(U_\delta(t))) \subseteq U_{2\varepsilon/3}(f_n(t)) \subseteq U_\varepsilon(f(t)).$$

□

**Теорема 51** (Коши). TFAE (the following are equivalent):

1.  $f_n \rightarrow f$  равномерно сходится на  $E$ .
2. Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N \in \mathbb{N}$ , что  $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$  для любых  $k, l > N$  и  $x \in E$ .

**Теорема 52** (Вейерштрасс). Пусть  $\{u_n\}_{n=0}^\infty$  — последовательность непрерывных функций, что есть последовательность чисел  $\{d_n\}_{n=0}^\infty$ , для которой верно, что  $|u_n| < d_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , и  $\sum_{n=0}^\infty d_n$  сходится. Тогда  $\sum_{n=0}^\infty u_n$  равномерно сходится.

**Теорема 53.** Пусть  $f_n \rightarrow f$  на  $E$  и  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  гладкие. Если  $f'_n \rightarrow g$  равномерно, то  $f$  тогда тоже гладка и  $f' = g$ .

**Доказательство.** Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N \in \mathbb{N}$ , что  $|f'_k - f'_l| < \varepsilon/3$  для всех  $k, l > N$ . Тогда имеем, что

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y} \right| = \left| \frac{(f_k - f_l)(x) - (f_k - f_l)(y)}{x - y} \right| = |(f_k - f_l)'(\xi)| < \varepsilon/3$$

Устремляя  $l$  к бесконечности получаем, что

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \varepsilon/3$$

Также имеем, что есть такое  $\delta > 0$ , что для всех  $y \in U_\delta(x)$

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - f'_k(x) \right| < \varepsilon/3$$

Также есть  $M \in \mathbb{N}$ , что  $|f'_k - g| < \varepsilon/3$  для любого  $k > M$ . Складывая всё вместе, получаем, что для всех  $k > \max(N, M)$  и  $y \in U_\delta(x)$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - g(x) \right| < \varepsilon$$

Значит  $f$  гладка и  $f' = g$ . □

**Следствие 53.1.** Если  $\{f^{(0)}\}, \dots, \{f^{(n-1)}\}$  сходятся, а  $f^{(n)}$  равномерно сходится. Тогда то же верно и про первые  $n$  производных.

**Следствие 53.2.** Если ряд Тейлора сходится, то функция бесконечно гладкая.

### 3 Примеры и контрпримеры

#### Название раздела?

**Теорема 54.** Существует непрерывная функция  $f$  на отрезке  $[a; b]$ , которая не имеет производной ни в какой точке на отрезке  $[a; b]$

**Доказательство.** Можно привести примеры данной функции  $f$ .

1. (функция Вейерштрасса) Определим

$$f_0(x) := \frac{1}{2} - \left| x - [x] - \frac{1}{2} \right| \quad f_n(x) := \frac{f_0(4^n x)}{4^n} \quad f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$$

Поскольку  $|f_n| = 1/4^n$ , а  $\sum_{i=0}^{\infty} 1/4^i$  сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд равномерно сходится к  $f$ , а поскольку каждая  $f_n$  непрерывна, то по теореме Стокса-Зейделя функция  $f$  непрерывна. Теперь осталось показать, что у  $f$  нет производных.

Пусть  $a$  — произвольная точка из  $\mathbb{R}$ . Заметим, что для всяких  $m$  и  $n$ , что  $m \geq n$ , период  $f_m$  равен  $1/4^m$ , значит  $1/4^m \mid 1/4^n$ , а тогда  $f_m(a \pm 1/4^n) = f_m(a)$ . Значит для всякого  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f(a \pm 1/4^n) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(a \pm 1/4^n) - f_i(a)$$

Заметим, что  $a$  находится на отрезке монотонности функции  $f_{n-1}$  длины  $1/(2 \cdot 4^{n-1}) = 2/4^n$ , который также является отрезком монотонности каждой функции из  $f_0, \dots, f_{n-2}$ . Поскольку  $1/4^n$  в два раза меньше, то либо  $a + 1/4^n$ , либо  $a - 1/4^n$  лежит на том же отрезке монотонности; пусть это будет точка  $b_n$ . Тогда имеем, что

$$\left| \frac{f_0(b_n) - f_0(a)}{b_n - a} \right| = \left| \frac{f_1(b_n) - f_1(a)}{b_n - a} \right| = \dots = \left| \frac{f_{n-1}(b_n) - f_{n-1}(a)}{b_n - a} \right| = 1$$

Следовательно

$$\frac{f(b_n) - f(a)}{b_n - a} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(b_n) - f_i(a)}{b_n - a} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i(b_n) - f_i(a)}{b_n - a}$$

— целое число, совпадающее по чётности с  $n$ . Если  $f'(a)$  определено, то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  сходится, а значит должен сойтись и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a)}{b_n - a};$$

но это последовательность целых значений, значит с какого-то момента она должна быть тождественно равна 0, но это не так, так как нечётных членов бесконечно много в этой последовательности.

2. (пример Глеба Минаева) Рассмотрим  $f_0(x) := x$ . Представим её как бесконечную ломанную  $\dots \leftrightarrow (-2, -2) \leftrightarrow (-1, -1) \leftrightarrow (0, 0) \leftrightarrow (1, 1) \leftrightarrow (2, 2) \leftrightarrow \dots$ . Далее будем получать  $f_{n+1}$  из  $f_n$  следующим образом.

$f_n$  будет некоторой бесконечной в обе стороны ломанной, при этом всегда  $f_n(x) = f_n(x+1)$ . Следующая функция будет получаться заменой ребра  $(a_1, b_1) \leftrightarrow (a_2, b_2)$  на три ребра:

$$(a_1, b_1) \longleftrightarrow \left( \frac{a_1 + 2a_2}{3}, \frac{2b_1 + b_2}{3} \right) \longleftrightarrow \left( \frac{2a_1 + a_2}{3}, \frac{b_1 + 2b_2}{3} \right) \longleftrightarrow (a_2, b_2)$$

Так мы получим  $f_{n+1}$ . Рассматриваемой же функцией будет  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ .

Несложно видеть, что звено высоты  $h$  каждый раз заменяется на три ребра: два высоты  $2h/3$  и одно высоты  $h/3$ . При этом описанный прямоугольник любого ребра содержит описанные прямоугольники рёбер, на которые он был заменён, а значит, окажется точка на ребре, из его описанного прямоугольника больше не вылезет. Таким образом после функции  $f_n$  разброс положений  $f_i(x)$  не более  $1/3^n$ , поэтому поточечный предел определён.

При этом значения в точках  $k/3^m$  с некоторого момента неподвижны: после функции  $f_n$  значения во всех точках  $k/3^n$  не меняются. Таким образом мы имеем, что во всякой окрестности будут точки вида  $k/3^n$ ,  $(3k+1)/3^{n+1}$ ,  $(3k+2)/3^{n+1}$  и  $(k+1)/3^n$ , а они ломают монотонность функции на данном интервале. Таким образом  $f$  нигде не монотонна.

Также предположим в точке  $a$  есть производная. Рассмотрим для каждого  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  пару  $(p_n, q_n)$ , что  $p_n$  и  $q_n$  — абсциссы концов звена на котором лежит  $(a, f_n(a))$  в ломаной функции  $f_n$  ( $q_n > p_n$ ). Тогда заметим, что  $q_n - p_n = 1/3^n$ ,  $f_n(p_n) = f(p_n)$ ,  $f_n(q_n) = f(q_n)$ , а тогда

$$\frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n} = \frac{f(q_n) - f(p_n)}{q_n - p_n} = \frac{f(q_n) - f(a)}{q_n - a} \cdot \frac{q_n - a}{q_n - p_n} + \frac{f(a) - f(p_n)}{a - p_n} \cdot \frac{a - p_n}{q_n - p_n}$$

Тем  
бо-  
лее  
кар-  
ти-  
ноч-  
ки!!!

Следовательно значение  $\frac{f_n(q_n)-f_n(p_n)}{q_n-p_n}$  лежит на отрезке между  $\frac{f(q_n)-f(a)}{q_n-a}$  и  $\frac{f(p_n)-f(a)}{p_n-a}$ ; при этом оно является коэффициентом наклона звена  $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$ .

Заметим, что звено  $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$  будет заменено на три, среди которых будет и  $(p_{n+1}, f(p_{n+1})) \leftrightarrow (q_{n+1}, f(q_{n+1}))$ . Значит коэффициент наклона  $(p_{n+1}, f(p_{n+1})) \leftrightarrow (q_{n+1}, f(q_{n+1}))$  можно получить из коэффициента наклона  $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$  домножением либо на 2, либо на  $-1$ .

Таким образом мы имеем, что последовательность

$$\left( \frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n} \right)_{n=0}^{\infty}$$

либо расходится по модулю, либо с некоторого момента не меняет модуль, но знакоперебуется. При этом если  $f'(a)$  определена, то в некоторой окрестности  $a$  значение

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

несильно отличается от  $f'(a)$  (чем меньше окрестность, тем меньше отличается). Но если мы будем рассматривать точки  $p_n$  и  $q_n$ , то для одной из них (обозначим её за  $x_n$ ) верно, что

$$\left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right| \geq \left| \frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n} \right| \quad \text{sign} \left( \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right) = \text{sign} \left( \frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n} \right)$$

Тогда про последовательность

$$\left( \frac{f_n(x_n) - f_n(a)}{x_n - a} \right)_{n=0}^{\infty}$$

с одной стороны можно сказать, что она сходится к  $f'(a)$  (т.к.  $|p_n - a|$  и  $|q_n - a|$  не более  $1/3^n$ , а следовательно и  $|x_n - a|$ ); с другой же стороны эта последовательность либо неограниченно растёт по модулю, либо с некоторого момента знакоперебуется, а значит навряд ли сходится — противоречие. Значит ни в какой точке  $f'$  не определена.

□

## 4 Интегрирование

### 4.1 Первообразная

**Определение 33.**  $g$  — первообразная функции  $f$ , если на области определения  $f$  верно, что  $g' = f$ .

**Теорема 55.** Если  $g_1$  и  $g_2$  — первообразные  $f$  на отрезке  $[a; b]$ , то  $g_1 - g_2 = \text{const}$  на том же отрезке.

**Доказательство.** Очевидно, что  $(g_1 - g_2)' = f' - f' = 0$  на отрезке  $[a; b]$ . Если  $g_1 - g_2$  не константна, то есть две точки на отрезке  $[a; b]$ , в которых принимаются разные значения, а тогда по теореме Лагранжа будет точка строго между ними (а значит и на отрезке), где производная не равна нулю — противоречие. Следовательно  $g_1 - g_2$  является константой. □

*Замечание 6.* Для несвязного множества утверждение неверно. Например, если областью определения  $f$  будут два отрезка, то  $g_1 - g_2$  будет константной на каждом отрезке, но константы могут быть различны.

**Определение 34.** Семейство первообразных функции  $f$  обозначается как

$$\int f$$

**Определение 35.** *Линейная форма* — линейная однородная функция ( $f(x) = \alpha x$ ).

**Теорема 56.**

1.

$$\int \alpha f = \alpha \int f + C$$

3.

$$\int f dg = fg - \int g df$$

2.

$$\int f + g = \int f + \int g$$

4.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left(\int f\right) \circ \varphi$$

**Доказательство.**

1. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int \alpha f\right)' = \alpha f = \alpha \left(\int f\right)' = \left(\alpha \int f\right)'$$

Таким образом обе стороны отличаются на константу: её корректность гарантирует  $+C$ .

2. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f + g\right)' = f + g = \left(\int f\right)' + \left(\int g'\right) = \left(\int f + \int g\right)'$$

Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

3. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f dg\right)' = f \cdot g' = (fg)' - g \cdot f' = \left(fg - \int g df\right)'$$

Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

4. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\right)' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \left(\left(\int f\right) \circ \varphi\right)'$$

Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

□

## 4.2 Суммы Дарбу и интеграл Римана

**Определение 36.** Разбиение отрезка  $[a; b]$  — такое семейство  $\Sigma := \{I_k\}_{k=1}^n$  отрезков (ненулевой длины), что  $[a; b] = \bigcup_{k=1}^n I_k$ , и все отрезки из  $\Sigma$  попарно пересекаются не более, чем по одной точке.

Пусть дана функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $E \supseteq [a; b]$ , и некоторое разбиение  $\Sigma$  отрезка  $[a; b]$ . Тогда верхняя и нижняя суммы Дарбу функции  $f$  при разбиении  $\Sigma$  есть выражения

$$S^+(f, \Sigma) := \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) \quad S^-(f, \Sigma) := \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_{x \in I} f(x)$$

соответственно. (При этом  $\sup$  и  $\inf$  могут принимать значения  $+\infty$  и  $-\infty$  соответственно; и в таких случаях соответствующие суммы Дарбу тоже будут принимать значения  $\pm\infty$ .)

*Пример 2.*

- Пусть  $f(x) := x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $[a; b] := [0; 1]$ , а  $\Sigma := \{[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]\}_{k=1}^n$ . Тогда

$$\begin{aligned} S^+(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \\ S^-(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_{x \in I} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

- Пусть  $f$  — функция Дирихле, отрезок  $[a; b]$  — любой, и его разбиение  $\Sigma$  — любое. Тогда

$$\begin{aligned} S^+(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot 1 = b - a \\ S^-(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_{x \in I} f(x) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

**Лемма 57.** Пусть даны функция  $f$ , отрезка  $[a; b]$  и его разбиение  $\Sigma$ . Назовём его подразбиением семейство отрезков  $\Sigma'$ , которое является объединением разбиений отрезков из  $\Sigma$  (иначе говоря, множество концов отрезков  $\Sigma$  является подмножеством концов отрезков  $\Sigma'$ ). Тогда верны неравенства

$$S^+(f, \Sigma) \geq S^+(f, \Sigma') \quad S^-(f, \Sigma) \leq S^-(f, \Sigma')$$

**Доказательство.** Покажем это для верхних сумм Дарбу; для нижних доказательство аналогично.

Пусть  $\{\Lambda_I\}_{I \in \Sigma}$  — набор разбиений каждого отрезка  $I$  из  $\Sigma$ , что  $\Sigma' = \bigcup_{I \in \Sigma} \Lambda_I$ . Тогда мы имеем, что для всяких  $I \in \Sigma$  и  $J \in \Lambda_I$  верно, что

$$\sup_{x \in I} f(x) \geq \sup_{x \in J} f(x)$$

Следовательно

$$\sum_{J \in \Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x \in J} f(x) \leq \sum_{J \in \Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = \left( \sum_{J \in \Lambda_I} |J| \right) \cdot \sup_{x \in I} f(x) = |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x)$$

Значит, суммируя обе части по  $\Sigma$ , получаем, что

$$S^+(f, \Sigma') = \sum_{J \in \Sigma'} |J| \cdot \sup_{x \in J} f(x) = \sum_{I \in \Sigma} \sum_{J \in \Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x \in J} f(x) \leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = S^+(f, \Sigma)$$

□



**Лемма 58.** Пусть даны функция  $f$ , отрезок  $[a; b]$ , его разбиения  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Тогда

$$S^+(f, \Sigma_1) \geq S^-(f, \Sigma_2)$$

**Доказательство.** Рассмотрим

$$\Sigma := \{I \cap J \mid I \in \Sigma_1 \wedge J \in \Sigma_2 \wedge |I \cap J| > 1\}$$

— (минимальное) подразбиение  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Тогда верно, что

$$S^+(f, \Sigma_1) \geq S^+(f, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma_2)$$

□

**Следствие 58.1.** Пусть фиксированы функция  $f$  и отрезок  $[a; b]$ . Рассмотрим множества

$$D^+ := \{S^+(f, \Sigma) \mid \Sigma \text{ — разбиение } [a; b]\} \quad D^- := \{S^-(f, \Sigma) \mid \Sigma \text{ — разбиение } [a; b]\}$$

Тогда  $D^+ \geq D^-$ .

**Определение 37.** Пусть фиксированы функция  $f$  и отрезок  $[a; b]$ , разбиения которого рассматриваются. Если

$$\sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma) = \inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) = S,$$

то тогда  $f$  называется *интегрируемой по Риману*, а  $S$  называют *интегралом Римана функции  $f$  на отрезке  $[a; b]$* . Обозначение:

$$\int_a^b f(x) dx := S$$

**Лемма 59.** Пусть даны функция  $f$  и отрезок  $[a; b]$ . Тогда если для всякого  $\varepsilon > 0$  есть разбиение  $\Sigma$  отрезка  $[a; b]$ , что

$$\forall I \in \Sigma \quad \text{osc}_I f < \varepsilon$$

то  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ .

**Доказательство.** Обозначим для каждого такого  $\varepsilon$  разбиение из условия за  $\Sigma_\varepsilon$ . Тогда мы имеем, что

$$S^+(f, \Sigma_\varepsilon) - S^-(f, \Sigma_\varepsilon) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot (\sup_I f - \inf_I f) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f < \varepsilon \cdot \sum_{I \in \Sigma} |I| = \varepsilon \cdot (b - a)$$

Т.е. для всякого  $\varepsilon > 0$  верно, что

$$\inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) - \sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma) \leq S^+(f, \Sigma_{\varepsilon/(b-a)}) - S^-(f, \Sigma_{\varepsilon/(b-a)}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Следовательно

$$\inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) = \sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma),$$

что значит, что  $f$  интегрируема по Риману. □

**Лемма 60.** Пусть даны функция  $f$  и отрезок  $[a; b]$ . Тогда  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$  тогда и только тогда, когда для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , что для всякого разбиения  $\Sigma$  отрезка  $[a; b]$ , где  $\forall I \in \Sigma \quad |I| < \delta$ , верно, что

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f < \varepsilon$$

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ . Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$  есть разбиения  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  отрезка  $[a; b]$ , что

$$\{S^+(f, \Sigma_1); S^-(f, \Sigma_2)\} \subseteq U_{\varepsilon/4} \left( \int_a^b f(x) dx \right)$$

Пусть  $\Sigma$  — общее подразбиение  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  (например, минимальное). Тогда

$$S^+(f, \Sigma_1) \geq S^+(f, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma_2)$$

Следовательно,

$$\{S^+(f, \Sigma); S^-(f, \Sigma)\} \subseteq U_{\varepsilon/4} \left( \int_a^b f(x) dx \right)$$

Заметим, что в таком случае  $\sup_{[a;b]} f$  и  $\inf_{[a;b]} f$  ограничены (равны вещественным значениям, а не  $\pm\infty$ ). Поэтому  $A := \text{osc}_{[a;b]} f$  является вещественной величиной. Определим также  $L := \min_{\Sigma} |I|$ .

Пусть  $\Lambda$  — некоторое разбиение  $[a; b]$ , что длина всякого отрезка не больше  $L \cdot \alpha$ , где

$$\alpha := \min \left( 1, \frac{\varepsilon \cdot |\Sigma|}{2 \cdot A \cdot L} \right) \in (0; 1].$$

Тогда мы имеем, что всякий отрезок  $I$  из  $\Lambda$  либо является подотрезком некоторого отрезка  $J_I$  из  $\Sigma$  (обозначим множество таких  $I$  за  $\Gamma$ ), либо является подотрезком объединения двух соседних отрезков  $K_1$  и  $K_2$  из  $\Sigma$  и содержит их общую границу (обозначим множество таких  $I$  за  $\Theta$ ). В случае  $I$  и  $J$  мы имеем, что  $\text{osc}_I f \leq \text{osc}_J f$ ; в случае  $I$ ,  $K_1$  и  $K_2$  мы имеем, что  $\text{osc}_I f \leq \text{osc}_{K_1 \cup K_2} f \leq A$ . Следовательно, используя только что оговоренные оценки,

$$\begin{aligned} & \sum_{I \in \Lambda} |I| \cdot \text{osc}_I f \\ &= \sum_{I \in \Gamma} |I| \cdot \text{osc}_I f + \sum_{I \in \Theta} |I| \cdot \text{osc}_I f \\ &\leq \sum_{I \in \Gamma} |I| \cdot \text{osc}_{J_I} f + \sum_{I \in \Theta} |I| \cdot \text{osc}_{[a;b]} f \\ &\leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f + A \cdot \sum_{I \in \Theta} |I| \\ &\leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f + A \cdot L \cdot \alpha \cdot |\Theta| \\ &\leq S^+(f, \Sigma) - S^-(f, \Sigma) + A \cdot L \cdot \alpha \cdot |\Sigma| \\ &\quad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом  $\delta := L \cdot \alpha$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , что для всякого разбиение  $\Sigma$  отрезка  $[a; b]$ , где  $\forall I \in \Sigma |I| < \delta$ , верно, что

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f < \varepsilon$$

Тогда

$$S^+(f, \Sigma) - S^-(f, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot (\sup_I f - \inf_I f) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \varepsilon$$

Т.е. для всякого  $\varepsilon > 0$

$$\inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) - \sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma) < \varepsilon$$

Следовательно

$$\inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) = \sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma)$$

т.е.  $f$  интегрируема на  $[a; b]$  по Риману.

□

**Теорема 61.** Пусть  $f$  — непрерывная на  $[a; b]$  функция. Тогда она интегрируема по Риману на  $[a; b]$ .

**Доказательство.** Поскольку  $f$  непрерывна на компакте  $[a; b]$ , то она равномерно непрерывна, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in [a; b] \quad f(U_{\delta}(x)) \subseteq U_{\varepsilon}(f(x))$$

Для каждого такого  $\varepsilon$  получаемое  $\delta$  обозначим за  $\delta_{\varepsilon}$ . Тогда для всякого подотрезка  $I$  отрезка  $[a; b]$  длины менее  $\delta_{\varepsilon/2}$  верно, что  $\operatorname{osc}_I f < \varepsilon$ . Следовательно для любого разбиения  $\Sigma$  с шагом не более  $\delta_{\varepsilon/2}$  (т.е.  $\forall I \in \Sigma |I| < \delta_{\varepsilon/2}$ ) мы имеем, что

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < [a; b] \cdot \varepsilon$$

Поэтому  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ .

□

**Теорема 62.**

1.

$$\int_a^b \lambda dx = \lambda(b - a)$$

2. Если  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ , то

$$f \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

3. Если  $f$  и  $g$  интегрируемы по Риману на  $[a; b]$ , то

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

4. Если  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ , то

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

5.  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$  и  $[b; c]$  тогда и только тогда, когда на  $[c; a]$ , и во всех случаях

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

**Доказательство.**

1. Очевидно, что для всякого разбиения  $\Sigma$  верно, что  $S^+(f, \Sigma) = S^-(f, \Sigma) = \lambda(b - a)$ , следовательно и интеграл Римана равен  $\lambda(b - a)$ .

2. Очевидно, что для всякого разбиения  $\Sigma$  верно, что  $S^-(f, \Sigma) \geq 0$ , следовательно, если интеграл Римана определён, то он неотрицателен.

3. Очевидно, что для всякого  $\varepsilon > 0$  есть разбиения  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , что

$$\sum_{I \in \Sigma_1} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \sum_{I \in \Sigma_2} |I| \cdot \operatorname{osc}_I g < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим любое подразбиение  $\Sigma$  разбиений  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} S^+(f+g, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I (f+g) \\ &\leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f + \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I g \\ &\leq \sum_{I \in \Sigma_1} |I| \cdot \sup_I f + \sum_{I \in \Sigma_2} |I| \cdot \sup_I g \\ &= S^+(f, \Sigma_1) + S^+(g, \Sigma_2) \end{aligned}$$

Аналогично мы имеем, что  $S^-(f+g, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma_1) + S^-(g, \Sigma_2)$ . Таким образом отметим две важные строки неравенств.

$$\begin{aligned} S^+(f, \Sigma_1) + S^+(g, \Sigma_2) &\geq S^+(f+g, \Sigma) \geq S^-(f+g, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma_1) + S^-(g, \Sigma_2) \\ S^+(f, \Sigma_1) + S^+(g, \Sigma_2) &\geq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \geq S^-(f, \Sigma_1) + S^-(g, \Sigma_2) \end{aligned}$$

Так мы получаем, что  $S^+(f+g, \Sigma)$ ,  $S^-(f+g, \Sigma)$  и  $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$  — три числа с отрезка

$$[S^-(f, \Sigma_1) + S^-(g, \Sigma_2); S^+(f, \Sigma_1) + S^+(g, \Sigma_2)],$$

длина которого меньше  $\varepsilon$ . Следовательно  $f+g$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ , и интеграл равен

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

4. Докажем сначала для  $\lambda \geq 0$ . Для всякого  $\varepsilon > 0$  есть разбиение  $\Sigma$  отрезка  $[a; b]$ , что

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \varepsilon$$

Также имеем, что

$$\begin{aligned} S^+(\lambda f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I \lambda f = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \lambda \cdot \sup_I f = \lambda \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f = \lambda S^+(f, \Sigma) \\ S^-(\lambda f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I \lambda f = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \lambda \cdot \inf_I f = \lambda \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I f = \lambda S^-(f, \Sigma) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} S^+(\lambda f, \Sigma) &= \lambda S^+(f, \Sigma) \geq \lambda \int_a^b f(x)dx \geq \lambda S^-(f, \Sigma) = S^-(\lambda f, \Sigma) \\ S^+(\lambda f, \Sigma) - S^-(\lambda f, \Sigma) &< \lambda \varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом интеграл  $\lambda f$  по Риману на  $[a; b]$  определён и равен  $\lambda \int_a^b f(x)dx$ .

Теперь покажем для  $\lambda = -1$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} S^+(-f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I -f = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot -\inf_I f = -\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I f = -S^-(f, \Sigma) \\ S^-(-f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I -f = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot -\sup_I f = -\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f = -S^+(f, \Sigma) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} S^+(-f, \Sigma) &= -S^-(f, \Sigma) \geq -\int_a^b f(x)dx \geq -S^+(f, \Sigma) = S^-(-f, \Sigma) \\ S^+(-f, \Sigma) - S^-(-f, \Sigma) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом интеграл  $-f$  по Риману на  $[a; b]$  определён и равен  $-\int_a^b f(x)dx$ .

Используя доказанные утверждения получаем, что для всякого  $\lambda$  верно, что

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f(x)dx &= \int_a^b \text{sign}(\lambda) \cdot |\lambda| f(x)dx \\ &= \text{sign}(\lambda) \int_a^b |\lambda| f(x)dx \\ &= \text{sign}(\lambda) |\lambda| \int_a^b f(x)dx \\ &= \lambda \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

5. Если  $f$  интегрируема по Риману на некотором отрезке  $I$ , то  $\sup_I f$  и  $\inf_I f$  равны некоторым вещественным значениям (не  $\pm\infty$ ).

Таким образом пусть  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$  и  $[b; c]$ . Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$  есть разбиения  $\Sigma_L$  отрезка  $[a; b]$  и  $\Sigma_R$  отрезка  $[b; c]$ , что

$$\sum_{I \in \Sigma_L} |I| \text{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \sum_{I \in \Sigma_R} |I| \text{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2}$$

Следовательно, если определить  $\Sigma := \Sigma_L \cup \Sigma_R$ ,

$$S^+(f, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \sup_I f = \sum_{I \in \Sigma_L} |I| \sup_I f + \sum_{I \in \Sigma_R} |I| \sup_I f \geq \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

По аналогии получаем, что

$$S^+(f, \Sigma) \geq \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \geq S^-(f, \Sigma)$$

При этом

$$S^+(f, \Sigma) - S^-(f, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \text{osc}_I f = \sum_{I \in \Sigma_L} |I| \text{osc}_I f + \sum_{I \in \Sigma_R} |I| \text{osc}_I f < \varepsilon$$

Таким образом  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; c]$ , а интеграл равен  $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ . Пусть теперь  $f$  интегрируема на  $[a; c]$ . Тогда для всякого разбиения  $\Sigma$  отрезка  $[a; c]$  мы можем рассмотреть

$$\Sigma_L := \{I \cap [a; b] \mid I \in \Sigma\}$$

и тогда

$$\sum_{I \in \Sigma_L} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f$$

Следовательно есть разбиения со сколь угодно маленькой осцелляцией  $f$  на них, а значит  $f$  интегрируема на  $[a; b]$ ; аналогично и на  $[b; c]$ . А по предыдущим рассуждениям достигается равенство в тождестве интегралов.

□

**Теорема 63.** Пусть дана функция  $f$ , а  $M = \sup_{[a; b]} |f|$ . Тогда

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a)$$

**Доказательство.** Очевидно, что при разбиении  $\Sigma := \{[a; b]\}$

$$\begin{aligned} S^+(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f = (b-a) \cdot \sup_{[a; b]} f \\ S^-(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I f = (b-a) \cdot \inf_{[a; b]} f \end{aligned}$$

Следовательно

$$M(b-a) \geq (b-a) \sup_{[a; b]} f = S^+(f, \Sigma) \geq \int_a^b f(x)dx \geq S^-(f, \Sigma) = (b-a) \inf_{[a; b]} f \geq -M(b-a)$$

откуда следует требуемое.

□

**Теорема 64.** Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна. Тогда

$$F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

является первообразной  $f$ .

**Доказательство.** Рассмотрим какие-то  $x$  и  $y$ , что  $a \leq x < y \leq b$ . Тогда

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt$$

Следовательно, рассматривая  $\Sigma := \{[x; y]\}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I f &\leq F(y) - F(x) \leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f \\ (y-x) \cdot \inf_{[x; y]} f &\leq F(y) - F(x) \leq (y-x) \cdot \sup_{[x; y]} f \\ \inf_{[x; y]} f &\leq \frac{F(y) - F(x)}{y-x} \leq \sup_{[x; y]} f \end{aligned}$$

Немного меняя обозначения, получаем, что для всякого  $\varepsilon \in [a - x; b - x] \setminus \{0\}$

$$\inf_{U_{|\varepsilon|}(x)} f \leq \frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \leq \sup_{U_{|\varepsilon|}(x)} f$$

Заметим, что по непрерывности  $f$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf_{U_\varepsilon(x)} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{U_\varepsilon(x)} f = f(x)$$

Следовательно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} = f(x)$$

Иначе говоря  $F'(x) = f(x)$ . Таким образом  $F' = f$ . □

**Следствие 64.1** (формула Ньютона-Лейбница). Пусть  $F$  — первообразная непрерывной на  $[a; b]$  функции  $f$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Доказательство.** Заметим, что  $G(x) := \int_a^x f(t) dt$  — первообразная  $f$ . Следовательно  $G(x) - F(x) = C$  на  $[a; b]$ . Значит

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) = G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

□

**Теорема 65.** Пусть  $(f_n)_{n=0}^\infty$  — последовательность интегрируемых по Риману на  $[a; b]$  функций — равномерно сходится к  $f$ . Тогда  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ , и

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

**Доказательство.** Заметим, что для всякого  $\varepsilon > 0$  есть  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , что для всяких  $n, m > N$  верно, что

$$|f_n - f_m| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)};$$

следовательно для всякого  $n > N$  верно, что

$$|f - f_n| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

При этом существует такое разбиение  $\Sigma$  отрезка  $[a; b]$ , что

$$S^+(f_{N+1}, \Sigma) - S^-(f_{N+1}, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом для всякого  $n > N$  верно, что

$$\begin{aligned} S^+(f_n, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f_n \leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \left( \frac{\varepsilon}{3(b-a)} + \sup_I f_{N+1} \right) = \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f_{N+1} \\ &= S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3}; \end{aligned}$$

аналогично  $S^-(f_n, \Sigma) \geq S^-(f_{N+1}, \Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$ . Аналогично данные утверждения верны и для  $f$  (вместо  $f_n$ ).

Заметим, что

$$\begin{aligned} S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} &\geq S^+(f_n, \Sigma) \geq \int_a^b f_n(x) dx \geq S^-(f_n, \Sigma) \geq S^-(f_{N+1}, \Sigma) - \frac{\varepsilon}{3} \\ S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} &\geq S^+(f, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma) \geq S^-(f_{N+1}, \Sigma) - \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Таким образом

$$S^+(f, \Sigma) - S^-(f, \Sigma) < \varepsilon,$$

следовательно  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ . Таким образом мы имеем, что

$$\begin{aligned} S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} &\geq \int_a^b f_n(x) dx \geq S^-(f_{N+1}, \Sigma) - \frac{\varepsilon}{3} \\ S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} &\geq \int_a^b f(x) dx \geq S^-(f_{N+1}, \Sigma) - \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

т.е. для всех  $n > N$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Это значит, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

□

**Лемма 66.** Если  $f$  и  $g$  интегрируемы по Риману на  $[a; b]$ , то и  $f \cdot g$ .

**Доказательство.** Заметим, что, поскольку  $f$  и  $g$  интегрируемы по Риману, есть такие константы  $C_f > 0$  и  $C_g > 0$ , что  $|f| \leq C_f$  и  $|g| \leq C_g$ . Следовательно для всяких  $x, y \in [a; b]$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq C_g |f(x) - f(y)| + C_f |g(x) - g(y)| \end{aligned}$$

Значит для всякого отрезка  $I$  верно, что

$$\text{osc}_I f \cdot g \leq C_g \text{osc}_I f + C_f \text{osc}_I g$$

Следовательно для всякого разбиения  $\Sigma$  отрезка  $[a; b]$

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f \cdot g \leq C_g \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f + C_f \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I g$$

Вспомним, что для всякого  $\varepsilon > 0$  есть разбиения  $\Sigma_f$  и  $\Sigma_g$  отрезка  $[a; b]$ , что

$$\sum_{I \in \Sigma_f} |I| \cdot \text{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2C_g} \qquad \sum_{I \in \Sigma_g} |I| \cdot \text{osc}_I g < \frac{\varepsilon}{2C_f}$$

Рассмотрим общее подразбиение  $\Sigma$  разбиений  $\Sigma_f$  и  $\Sigma_g$ . Для него верны предыдущие предыдущие неравенства. Следовательно

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f \cdot g < C_g \frac{\varepsilon}{2C_g} + C_f \frac{\varepsilon}{2C_f} = \varepsilon$$

Поэтому  $f \cdot g$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ .

□



### 4.3 У чего есть выражаемая первообразная?

Лемма 67.

- |   |  |    |  |
|---|--|----|--|
| 1.  | $\int 0 = C$   | 5. | $\int e^x = e^x + C$                           |
| 2.  | $\int a_0 + \dots + a_n x^n = C + a_0 x + \dots + a_n x^{n+1}$ | 6. | $\int \sin(x) = -\cos(x) + C$                  |
| 3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x > 0$ | $\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$            |    | $\int \cos(x) = \sin(x) + C$                   |
| 4. $\forall x > 0$  | $\int \frac{1}{x} = \ln(x) + C$                                | 7. | $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$        |
|   |  | 8. | $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$ |

**Теорема 68.** Следующие виды функций имеют выражаемую первообразную:

- |  |  |
|--|--|
| 1. рациональные функции;                     | 3. рациональные функции от $\sinh$ и $\cosh$ ;                             |
| 2. рациональные функции от $\sin$ и $\cos$ ; | 4. рациональные функции от $x$ и $\sqrt{ax^2 + bx + 1}$ , где $a \neq 0$ . |

**Доказательство.**

1. Каждая рациональная функция представляется в виде суммы полиномов, членов вида  $\frac{k}{(x+a)^n}$  и членов вида  $\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$ . Покажем, что каждый из них имеет выражаемую первообразную.

- Первообразная многочлена очевидна.

•

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a) + C$$

- Для всякого  $n > 1$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$$

•

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{tg}^{-1}(x)$$

•

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

- Для всякого  $n > 1$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}}$$

- Заметим, что

$$\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)' = \frac{1}{(x^2+1)^n} - 2n \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{2n}{(x^2+1)^{n+1}} - \frac{2n-1}{(x^2+1)^n}$$

Следовательно

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

Таким образом несложно понять по индукции, что  $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$  для  $n > 1$  есть некоторая сумма рациональных функций и  $\operatorname{tg}^{-1}$ .

- Линейными заменами задача нахождения первообразных у  $\frac{1}{(x+a)^n}$  и  $\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$  сводится к нахождению первообразных  $\frac{1}{x^n}$ ,  $\frac{1}{(x^2+1)^n}$  и  $\frac{x}{(x^2+1)^n}$ .

2. Заметим, что

$$\sin(x) = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}(x/2)^2} \quad \cos(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}(x/2)^2}{1 + \operatorname{tg}(x/2)^2} \quad dx = \frac{2d(\operatorname{tg}(x/2))}{1 + \operatorname{tg}(x/2)^2}$$

Следовательно задача сводится к нахождению первообразной рациональной функции при помощи подстановки  $t := \operatorname{tg}(x)$ .

3. С одной стороны это можно свести к предыдущей задаче заменой  $t := ix$ . С другой стороны можно заметить, что

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad dx = \frac{d(e^x)}{e^x}$$

Следовательно задача сводится к нахождению первообразной рациональной функции при помощи подстановки  $t := e^x$ .

4. Линейными подстановками можно свести задачу к нахождению первообразной рациональной функции от  $y$  и  $\sqrt{\pm y^2 \pm 1}$  или только от  $y$ .

- Случай рациональной функции только от  $y$  уже был разобран.
- Если нам дана рациональная функция от  $y$  и  $\sqrt{1-y^2}$ , то заменой  $t := \sin^{-1}(y)$  она сводится к рациональной функции от  $\sin$  и  $\cos$ .
- Если нам дана рациональная функция от  $y$  и  $\sqrt{y^2-1}$ , то заменой  $t := \cosh^{-1}(y)$  она сводится к рациональной функции от  $\sinh$  и  $\cosh$ .
- Если нам дана рациональная функция от  $y$  и  $\sqrt{1+y^2}$ , то заменой  $t := \sinh^{-1}(y)$  она сводится к рациональной функции от  $\sinh$  и  $\cosh$ .

□

## 5 Логарифм? Полезности?? Что???

**Теорема 69.** Пусть дана функция  $\varphi : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , что

- $\forall a, b \in (0; +\infty) \quad \varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$
- $\varphi$  монотонна.

Тогда верны следующие утверждения:

1.  $\varphi(1) = 0$ ;
2.  $\forall a \in (0; +\infty), n \in \mathbb{N} \quad \varphi(a^n) = n\varphi(a)$ ;
3.  $\forall a \in (0; +\infty) \quad \varphi(a^{-1}) = -\varphi(a)$ ;
4.  $\forall a \in (0; +\infty), q \in \mathbb{Q} \quad \varphi(a^q) = q\varphi(a)$ ;
5.  $\varphi$  непрерывна;
6.  $\varphi$  бесконечно дифференцируема;
7.  $\varphi'(x) = \frac{C}{x}$  для некоторого  $C \in \mathbb{R}$ ;
8. все такие  $\phi$  имеют вид  $\int_1^x \frac{C dt}{t}$  для некоторого  $C > 0$  и наоборот: любая такая функция удовлетворяет условиям на  $\phi$ .

**Доказательство.**

1.

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) - \varphi(1) = \varphi(1) - \varphi(1) = 0.$$

2. Докажем по индукции по  $n$ . База при  $n = 0$  и  $n = 1$  очевидна. Весь шаг:

$$\varphi(a^{n+1}) = \varphi(a^n) + \varphi(a) = n\varphi(a) + \varphi(a) = (n+1)\varphi(a).$$

3.

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a \cdot a^{-1}) - \varphi(a) = \varphi(1) - \varphi(a) = -\varphi(a)$$

4. Пусть  $q = \frac{kn}{m}$ , где  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , а  $k = \pm 1$ . Тогда

$$m\varphi(a^q) = \varphi(a^{mq}) = \varphi(a^{kn}) = k\varphi(a^n) = kn\varphi(a) = qm\varphi(a)$$

Следовательно

$$\varphi(a^q) = q\varphi(a)$$

5. Заметим, что  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$  в связи с монотонностью и ограниченностью (например, значением  $\varphi(1/2)$ ) функции  $\varphi$  определён, значит равен некоторому  $b$ . Тогда

$$2b = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x^2) = \lim_{y \rightarrow 1^+} \varphi(y) = b$$

значит  $b = 0$ . Следовательно

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x^{-1}) = - \lim_{y \rightarrow 1^+} \varphi(y) = 0$$

Таким образом  $\varphi$  непрерывна в 1. Следовательно

$$\lim_{x \rightarrow y} \varphi(x) = \varphi(y) + \lim_{x \rightarrow y} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \varphi(y) + \lim_{\alpha \rightarrow 1} \varphi(\alpha)$$

т.е.  $\varphi$  непрерывна во всех точках  $(0; +\infty)$ .

6. Рассмотрим

$$\Phi := (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \varphi(t) dt$$

Тогда мы имеем, что  $\Phi$  — первообразная, поскольку  $\varphi$  непрерывна. А тогда если  $\varphi$  имеет  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  производных, то  $\Phi$  имеет  $n + 1$  производную. Заметим, что

$$\Phi(2x) - \Phi(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt = x \int_x^{2x} \varphi\left(\frac{t}{x}\right) d\frac{t}{x} + x \int_x^{2x} \varphi(x) d\frac{t}{x} = Cx + \varphi(x)x$$

где

$$C := \int_1^2 \varphi(t) dt$$

Следовательно

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$$

Таким образом, если  $\Phi$  имеет  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  производных, то  $\varphi$  тоже. Значит  $\Phi$  и  $\phi$  бесконечно дифференцируемы.

7. Пусть фиксировано некоторое  $y > 0$ . Следовательно

$$y\varphi'(xy) = (\varphi(xy))' = (\varphi(x) + \varphi(y))' = \varphi'(x)$$

а значит, если подставить  $y = x^{-1}$

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi'(1)}{x}$$

Таким образом определяя  $C := \varphi'(1)$  имеем, что

$$\varphi'(x) = \frac{C}{x}$$

8. Действительно, если есть некоторое  $\phi$ , то  $\phi$  и  $\int_1^x \frac{\phi'(1)dt}{t}$  являются первообразными  $\frac{\phi'(1)}{x}$ , значит отличаются на константу. При этом в 1 они обе равны 0, значит функции совпадают.

Теперь же покажем, что  $\psi(x) := \int_1^x \frac{Cdt}{t}$  является корнем функционального уравнения.

- Поскольку  $\frac{C}{x}$  — функция одного знака, то  $\psi$  монотонна.
- 

$$\begin{aligned} \psi(xy) &= \int_1^{xy} \frac{Cdt}{t} &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_x^{xy} \frac{Cdt}{t} \\ &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_x^{xy} \frac{Cd(t/x)}{(t/x)} &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_1^y \frac{Cds}{s} &= \psi(x) + \psi(y) \end{aligned}$$

□

**Определение 38.** *Натуральный логарифм* — функция

$$\ln : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$$

*Экспонента* — функция

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty), x \mapsto \ln^{-1}(x)$$

**Теорема 70.**

1.  $\exp$  корректно определена;
2.  $\exp$  непрерывна;
3.  $\exp$  бесконечно дифференцируема, и каждая производная  $\exp$  равна  $\exp$ ;
4.  $\exp(0) = 1$ ;
5.  $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ ;
- 6.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

**Доказательство.**

1. Поскольку  $\ln$  монотонна, то всякое значение из области значений  $\ln$  — всё  $\mathbb{R}$  — принимается единожды. Следовательно  $\exp$  корректно определена.
2. Поскольку всякая монотонная биекция из интервала в интервал является непрерывной функцией, то и  $\exp$  непрерывна на всяком интервале.
3. По свойству дифференцирования

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x)$$

Таким образом  $\exp$  дифференцируема раз, и при дифференцировании не меняется. Следовательно  $\exp$  бесконечно дифференцируема.

4. Следует из того, что  $\ln(1) = 0$ .
5. Следует из того, что  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ , подстановкой  $x := \ln^{-1}(a)$  и  $y := \ln^{-1}(b)$ .
6. Вспомним, что по теореме 49 для всякого  $x \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  есть  $\xi_n \in (0; x)$ , что

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \frac{\exp^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Вспомним также, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$$

Чтобы показать, что предел этой последовательности реально совпадает с  $\exp(x)$ , покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = 0$$

Действительно,

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \exp(|x|) \left( \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

Пусть  $N = \lceil 2|x| \rceil$ . Тогда для всякого  $n \geq N$  имеем, что

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^N}{N!} \prod_{k=N+1}^{n+1} \frac{|x|}{k} < \frac{|x|^N}{N!} \prod_{k=N+1}^{n+1} \frac{1}{2} = \frac{|x|^N \cdot 2^{N-1}}{N!} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Следовательно, с момента  $N$  последовательность

$$\left( \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right)_{n=0}^{\infty}$$

сходится к 0 не медленнее, чем геометрическая прогрессия, а тогда и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = 0$$

□

**Теорема 71.** 1.  $(a^x)' = \ln(a)a^x$  2.  $(x^a)' = ax^{a-1}$

**Доказательство.**

1.

$$(a^x)' = \exp(x \ln(a))' = (x \ln(a))' a^x = \ln(a)a^x$$

2.

$$(x^a)' = \exp(a \ln(x))' = (a \ln(x))' x^a = \frac{a}{x} x^a = ax^{a-1}$$

□

**Теорема 72.** Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{(1)}, \dots, f^{(n+1)}$  определены на  $(t - \delta; t + \delta)$  для некоторого  $\delta > 0$ . Тогда для всякого  $x \in U_\delta(t)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k + \frac{1}{n!} \int_t^x f^{(n+1)}(s) (x-s)^n ds$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$g(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

Тогда мы имеем, что  $g(t) = g'(t) = g^{(2)}(t) = \dots = g^{(n)}(t) = 0$ , а  $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$ . Тогда нужно показать, что

$$g(x) = \frac{1}{n!} \int_t^x f^{(n+1)}(s) (x-s)^n ds$$

Докажем это по индукции по  $n$ .

**База.**  $n = 0$ . Тогда

$$g(x) = g(t) + \int_t^x g'(s) ds = \frac{1}{n!} \int_t^x g^{(n+1)}(s) (x-s)^n ds$$

**Шаг.** Пусть утверждение верно для  $n$  докажем для  $n + 1$ .

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{n!} \int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^n ds \\
&= \frac{-g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)}}{(n+1)!} \Big|_x^t + \frac{1}{(n+1)!} \int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)} ds \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)} ds
\end{aligned}$$

□

## 5.1 Формулы Валлиса и Стирлинга

**Теорема 73** (формула Валлиса).

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots$$

**Доказательство.** Для всякого  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  определим

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx$$

Заметим, что  $\sin(x)^{n+1} < \sin(x)^n$  на  $(0; \frac{\pi}{2})$ , следовательно  $I_n > I_{n+1}$ . Также

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n+2} dx \\
&= -\sin(x)^{n+1} \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n \cos(x)^2 dx \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n (1 - \sin(x)^2) dx \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx - (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n+2} dx \\
&= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}
\end{aligned}$$

Следовательно  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ . При этом понятно, что  $I_0 = \frac{\pi}{2}$ , а  $I_1 = 1$ . Таким образом для всякого  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \\
I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}
\end{aligned}$$

Вспомним, что  $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ . Следовательно

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} &< \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \\
\frac{(2n)!! \cdot (2n)!!}{(2n-1)!! \cdot (2n+1)!!} &< \frac{\pi}{2} < \frac{(2n)!! \cdot (2n-2)!!}{(2n-1)!! \cdot (2n-1)!!} \\
\left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} &< \frac{\pi}{2} < \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

Заметим, что в последнем неравенстве отношение значений слева и справа сходится к 1, значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

□

**Теорема 74** (формула Стирлинга).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$$

**Доказательство.** Вспомним, что для  $x \in (-1; 1)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Следовательно

$$\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots = 2x \left( 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots \right)$$

Пусть  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Подставим  $x = \frac{1}{2n+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{2x} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots \in \left( 1; 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \right) = \left( 1; 1 + \frac{1}{12n(n+1)} \right) \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательность  $(x_n)_{n=1}^{\infty} := \left( \frac{n! \cdot e^n}{n^{n+1/2}} \right)_{n=1}^{\infty}$ . Заметим, что

$$\ln \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = \ln \left( \frac{(n+1) \cdot e}{(n+1)^{n+3/2} / n^{n+1/2}} \right) = \ln \left( \frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1/2}} \right) = 1 - \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

Таким образом  $\ln(x_{n+1}/x_n) \in (0; \frac{-1}{12n(n+1)})$ . Следовательно  $\ln(x_n) < \ln(x_1)$  и

$$\begin{aligned} \ln(x_n) - \ln(x_1) &> \frac{-1}{12n(n-1)} + \frac{-1}{12(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{-1}{12 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{12} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) \\ &= \frac{1}{12} \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \end{aligned}$$

Значит  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x_n) \geq \frac{-1}{12}$  (предел убывающей ограниченной последовательности), а тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  определён и равен  $\alpha > 0$ . Значит

$$n! \sim \alpha \sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$$

Теперь нужно показать, что  $\alpha = \sqrt{2\pi}$ . По формуле Валлиса

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} &\sim 2 \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 2 \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 2 \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &\sim 2^{2n+1} \frac{\alpha^2 n \left( \frac{n}{e} \right)^{2n}}{\alpha \sqrt{2n} \left( \frac{2n}{e} \right)^{2n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{2^{2n+1} \alpha^2 n}{\alpha (2n) 2^{2n}} = \alpha \end{aligned}$$

Таким образом  $\alpha = \sqrt{2\pi}$ .

□



*Замечание 7.* Из оценки  $\ln(x_n) - \ln(x_1) > \frac{1}{12}(\frac{1}{n} - 1)$  следует, что

$$\begin{aligned}\ln(x_n) - \ln(\alpha) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \ln(x_n) - \ln(x_m) = \sum_{k=n}^{\infty} \ln(x_k) - \ln(x_{k+1}) \\ &< \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{12k(k+1)} = \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{12n}\end{aligned}$$

Таким образом  $x_n = \alpha(1 + O(\frac{1}{n}))$ . А значит

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

**Лемма 75.** Пусть дана функция  $f \geq 0$ , невозрастающая на  $[0; +\infty)$ . Тогда  $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$  сходится тогда и только тогда, когда  $\int_0^{\infty} f(x)dx$  сходится.

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ )

$$\int_0^N f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{N-1} f(k)$$

Следовательно, поскольку  $\int_0^A f(x)dx$  возрастает по  $A$ , но ограничена сверху значением  $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ , то  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  сходится.

( $\Leftarrow$ )

$$\sum_{k=0}^N f(x) \leq f(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)dx = f(0) + \int_0^N f(x)dx$$

Следовательно, поскольку  $\sum_0^N f(x)dx$  возрастает по  $N$ , но ограничена сверху значением  $f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)dx$ , то  $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$  сходится.

□

**Теорема 76.**

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

для некоторой константы  $\gamma$ .

**Определение 39.** Константа  $\gamma$  из прошлой теоремы называется *константой Эйлера* или *константой Эйлера-Маскерони*.

**Доказательство.**

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1)$$

Заметим, что

$$\ln(k-1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \dots$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 - \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \dots \right)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k^3} + \dots < \frac{1}{2k^2} \left( 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots \right) = \frac{1}{2k(k-1)} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k}$$

то

$$\sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \dots \right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Значит

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \dots \right)$$

— ряд положительных значений, ограниченный сверху значением  $1/2$ , следовательно сходится; пусть к некоторой константе  $\lambda$ . Значит мы получаем, что

$$\sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \dots \right) = \lambda - o(1)$$

и следовательно

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 - \lambda + o(1) = \gamma + o(1)$$

□

*Замечание 8.* Таким рассуждением мы получаем, что ряд

$$\sum_{k,l \geq 2} \frac{1}{l \cdot k^l}$$

сильно сходится и равен  $1 - \gamma$ . Следовательно

$$1 - \gamma = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\zeta(l) - 1}{l}$$

## 5.2 Бернулли обернули

**Определение 40.** Определим последовательность чисел Бернулли  $(B_n)_{n=0}^{\infty}$  как последовательность, чья экспоненциальная производящая функция есть  $\frac{x}{\exp(x)-1}$ , т.е. на уровне формальных степенных рядов верно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = \frac{x}{\exp(x) - 1}$$

$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$	$B_8$	$B_9$	$B_{10}$	$\dots$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	$\dots$

**Лемма 77.**

$$B_0 = 1 \qquad \sum_{k=0}^n B_k \binom{n+1}{k} = 0$$

**Доказательство.** На уровне формальных рядов

$$\frac{\exp(x) - 1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

Следовательно

$$1 = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right)$$

Значит, рассматривая коэффициенты при степенях  $x$ , получаем, что

$$B_0 = 1 \qquad \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} = 0$$

Домножая последнее равенство на  $(n+1)!$  получаем, что

$$\sum_{k=0}^n B_k \binom{n+1}{k} = 0$$

□

**Лемма 78.** Ряд Тейлора  $\frac{x}{\exp(x)-1}$  при  $x = 0$  равен  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$  (если доопределить правильно функцию в нуле).

**Доказательство.** Определим

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x = 0 \\ \frac{\exp(x)-1}{x} & \text{иначе} \end{cases} \qquad g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Заметим, что  $f$  просто задаётся рядом  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$  и всюду положительна, поэтому  $g$  определена корректно.

Тогда очевидно равенство  $f \cdot g = 1$ . Продифференцируем его  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  раз:

$$0 = (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

Подставляя в последнее 0 получаем, что

$$g^{(0)}(0) = 1 \qquad \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(0) \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(0) \binom{n}{n-k} \frac{1}{n-k+1} = 0$$

Тем самым последовательность  $(g^{(n)}(0))_{n=0}^{\infty}$  удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и  $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ , значит они совпадают. А это значит, что ряд Тейлора  $g$  есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

□

**Утверждение 79.**

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_{m-k} \frac{n^k}{k+1}$$

**Лемма 80.** Для всякого  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  верно, что  $B_{2n+1} = 0$ .

**Доказательство.** Заметим, что

$$\frac{x}{\exp(x) - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\exp(x) + 1}{\exp(x) - 1} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\exp(x/2) + \exp(-x/2)}{\exp(x/2) - \exp(-x/2)} = \frac{x}{2} \cdot \coth(x/2)$$

При этом  $\frac{x}{2} \coth(x/2)$  является чётной функцией, значит производные всех нечётных степеней равны 0, откуда и получаем, что  $B_{2n+1} = 0$ .<sup>1</sup>  $\square$

**Определение 41.** Многочлены Бернулли — такая последовательность многочленов  $(B_n(t))_{n=0}^\infty$ , что на уровне формальных рядов (теперь от  $x$  и  $y$ )

$$\frac{x \exp(yx)}{\exp(x) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)x^n}{n!}$$

*Замечание.* Определение корректно, поскольку данный формальный ряд по сути является произведением рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$  и  $\exp(yx)$ , что значит, что в каждом мономе степень  $x$  не менее степени  $y$ , значит формальные ряды в разложении  $B_n$  получаются конечными, т.е. являются просто многочленами.

**Следствие 80.1.**  $B_n(0) = B_n$ .

**Лемма 81.**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(y) = (n+1)y^n$$

**Доказательство.** По определению

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xy)^k}{k!} \right) = \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{(l+1)!} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(y)x^m}{m!} \right)$$

Рассматривая коэффициенты при степенях  $x$  получаем, что

$$\frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k+1)!} \cdot \frac{B_k(y)}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(y)$$

Откуда мы и получаем требуемое равенство.  $\square$

**Следствие 81.1.**  $\deg(B_n) = n$ .

**Лемма 82.**  $B'_{n+1} = (n+1)B_n$ .

**Доказательство.** Давайте продифференцируем по  $y$  равенство (на уровне формальных рядов)

$$\frac{x \exp(yx)}{\exp(x) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)}{n!} x^n$$

Получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1}(y)}{(n-1)!} x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)}{n!} x^n = \frac{x^2 \exp(yx)}{\exp(x) - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B'_n(y)}{n!} x^n$$

Следовательно  $B'_n = nB_{n-1}$ .  $\square$

<sup>1</sup>Но для  $n = 0$  мы получаем равенство  $B_1 + \frac{1}{2} = 0$ , поэтому только для  $n = 0$  рассуждение неверно.

**Следствие 82.1.**  $B_n(y) = \sum_{k=0}^n \frac{B_{n-k}}{k!} y^k$ .

**Доказательство.**

$$B_n(y) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{B_{n-k}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{B_{n-k}}{k!} x^k$$

□

**Теорема 83** (формула Эйлера-Маклорена). Пусть даны целые  $a$  и  $b$  и функция  $f$ , которая имеет  $m$  ( $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ) производных на  $[a; b]$ . Тогда

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_a^b + R_m \quad R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x) dx$$

**Доказательство.** Заметим, что достаточно доказать формулу для  $a = 0$  и  $b = 1$ , а  $\{x\}$  можно заменить на  $x$ . Также будем доказывать её по индукции по  $m$ .

**База.**  $m = 1$ . Тогда  $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ . Следовательно по интегрированию по частям (по функциям  $f$  и  $B_1$ )

$$f(x) \left( x - \frac{1}{2} \right) \Big|_0^1 = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$$

Таким образом

$$f(0) = \int_0^1 f(x) dx + \frac{1/2}{1!} f(x) \Big|_0^1 + R_1$$

**Шаг.** Пусть утверждение для  $m$  верно; покажем верность для  $m + 1$ . Заметим, что нужно показать, что

$$R_m = \frac{B_{m+1}}{(m+1)!} f^{(m)}(x) \Big|_0^1 + R_{m+1}$$

Интегрируя по частям по функциям  $f^{(m)}(x)$  и  $B_{m+1}(x)/(m+1)!$ , получаем, что

$$\begin{aligned} (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{B'_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m)}(x) dx &= (-1)^{m+1} \frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m)}(x) \Big|_0^1 + (-1)^{m+2} \int_0^1 \frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x) dx \\ &= (-1)^{m+1} \frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m)}(x) \Big|_0^1 + R_{m+1} \end{aligned}$$

Поскольку  $B'_{m+1}(x) = (m+1)B_m(x)$ , то получаем

$$R_m = (-1)^{m+1} \frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m)}(x) \Big|_0^1 + R_{m+1}$$

Следовательно осталось показать, что  $(-1)^{m+1}B_{m+1} = B_{m+1}(0) = B_{m+1}(1)$ . Первое неравенство верно, поскольку для чётных  $m$  верно, что  $B_{m+1} = B_{m+1}(0) = 0$ , а при нечётных  $B_{m+1} = B_{m+1}(0)$ , а  $(-1)^{m+1} = 1$ . Осталось показать, что  $B_{m+1}(0) = B_{m+1}(1)$ .

Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(0)}{n!} x^n = \frac{x \exp(0 \cdot x)}{\exp(x) - 1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1)}{n!} x^n = \frac{x \exp(1 \cdot x)}{\exp(x) - 1}$$

При этом

$$\frac{x}{\exp(x) - 1} - \frac{x \exp(x)}{\exp(x) - 1} = \frac{x(1 - \exp(x))}{\exp(x) - 1} = -x$$

что значит, что  $B_n(0) = B_n(1)$  для всех  $n \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \setminus \{1\}$ . Этого хватает, так как  $m \geq 2$ . □



## 6 Мои придумки вне лекций

### 6.1 Сильная сходимость

**Определение 42.** Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  *сильно сходится*, если сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ .

*Замечание.* Это понятие распространяемо не только на  $\mathbb{R}$ , а также на  $\mathbb{C}$ . Также можно пытаться рассматривать любые векторные пространства с метрикой и полнотой.

**Лемма 84.** Если ряд сильно сходится, то он сходится.

**Доказательство.** Пусть дан сильно сходящийся ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

**Лемма 84.1.** Для всякого  $\varepsilon > 0$  есть такое натуральное  $N$ , что  $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$ .

**Доказательство.** Давайте рассматривать префиксные суммы  $S_n$  последовательности  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ . Заметим, что  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$  является неубывающей сходящейся последовательностью. Пусть предел равен  $A$ . Следовательно какой-то член  $S_N$  будет в  $\varepsilon$ -окрестности  $A$  (а на деле в  $(A - \varepsilon; A]$ ). Следовательно для всякого  $M > N$

$$\sum_{n=N+1}^M |a_n| = S_M - S_N$$

При этом  $\{S_n - S_N\}_{n=N+1}^{\infty}$  сходится, поскольку равна  $\{S_n\}_{n=N+1}^{\infty} - S_N$ , а последняя последовательность сходится, поскольку является подпоследовательностью сходящейся  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ . При этом  $S_M \in [S_N; A]$ . Следовательно  $S_M - S_N \in [0; A - S_N]$ . Значит и предел  $\{S_n - S_N\}_{n=N+1}^{\infty}$  лежит в  $[0; A - S_N] \subseteq [0; \varepsilon)$ .  $\square$

Заметим, что  $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$ . Пусть  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  — префиксные суммы последовательности  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , т.е.  $S_n := \sum_{k=0}^n a_k$ . Мы видим, что

$$|S_M - S_N| = \left| \sum_{n=N+1}^M a_k \right| \leq \sum_{n=N+1}^M |a_k| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_k|$$

Пусть  $r_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_k|$ . Тогда имеем, что все  $S_M$  для  $M \geq N$  лежат в  $\bar{U}_{r_N}(S_N)$ . Несложно видеть, что

$$(\bar{U}_{r_N}(S_N))_{N=0}^{\infty}$$

— последовательность замкнутых убывающих по включению множеств. Также по доказанной лемме последовательность  $(r_N)_{N=0}^{\infty}$  сходится монотонно сверху к нулю. Таким образом последовательность замкнутых окрестностей имеет предел и ровно один. Поскольку размеры окрестностей сходятся, а для каждой из них верно, что все члены последовательности  $(S_N)_{N=0}^{\infty}$  начиная с некоторого лежат в этой окрестности, то сама последовательность  $(S_N)_{N=0}^{\infty}$  сходится к пересечению окрестностей.  $\square$

**Теорема 85.** Пусть дан ряд  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

1. Если  $f$  сходится в некоторой точке  $t$ , то сильно сходится и во всех точках  $s$ , где  $|s| < |t|$ .
2. При этом если  $f$  сильно сходится в точке  $t$ , то сильно сходится и во всех точках  $s$ , где  $|s| \leq |t|$ .

**Доказательство.**

1. Мы имеем, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  сходится. Это значит, что есть такая константа  $C$ , что для всякого  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  верно, что  $|a_n t^n| \leq C$ , а тогда  $|a_n| \cdot |t|^n \leq C$ .

Пусть дана точка  $s$ , что  $|s| < |t|$ . Тогда

$$|a_n s^n| = |a_n| \cdot |s|^n = |a_n| \cdot |t|^n \cdot \left(\frac{|s|}{|t|}\right)^n \leq C \cdot \left(\frac{|s|}{|t|}\right)^n$$

Обозначим  $|s|/|t|$  за  $\alpha$ . Понятно, что  $\alpha \in [0; 1)$ . Следовательно

$$\sum_{n=0}^N |a_n s^n| \leq \sum_{n=0}^N C \alpha^n = C \frac{1 - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha}$$

Таким образом  $C \frac{1 - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha}$  сходится, а значит сходится и последовательность префиксных сумм  $(|a_n s^n|)_{n=0}^{\infty}$  (так как не убывает и ограничена). Следовательно  $f$  в точке  $s$  сильно сходится.

2. Мы имеем, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  сильно сходится. Пусть дана точка  $s$ , что  $|s| \leq |t|$ . Тогда

$$|a_n s^n| = |a_n| \cdot |s|^n \leq |a_n| \cdot |t|^n = |a_n t^n|$$

Следовательно

$$\sum_{n=0}^N |a_n s^n| \leq \sum_{n=0}^N |a_n t^n|$$

Поскольку последовательность правых сумм сходится, то сходится и последовательность левых сумм (так как не убывает и ограничена). Следовательно  $f$  в точке  $s$  сильно сходится.

□

**Следствие 85.1.** Область определения  $f$  как функция есть открытый шар с центром в нуле (возможно, нулевого радиуса) вместе с некоторыми (возможно, со всеми, возможно, с ни одной) точками на его границе.

**Теорема 86.** Пусть дана функция  $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ . Пусть также известно, что для некоторой точки  $x$  и некоторого  $\varepsilon > 0$  верно, что  $f$  сильно сходится в  $\varepsilon$ -окрестности  $x$ .

1. Значит  $f$  бесконечно дифференцируема в этой окрестности.
2. Для всякого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  функция  $g_k(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} x^n$  сильно сходится в этой окрестности.
3. Для всякого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  верно, что  $f^{(k)} = g_k$  в этой окрестности.

**Доказательство.** Докажем все утверждения теоремы только для первой производной  $f$ . Тогда для всех последующих производных утверждение будет выводиться по индукции. Также докажем сильную сходимую не для всей окрестности, а только для точки  $x$ . Тогда, поскольку все другие точки окрестности так же имеют окрестность, где функция сильно сходится, то для них утверждение будет верно по аналогии.

Возьмём некоторую точку  $y$  из  $\varepsilon$ -окрестности  $x$ , что  $|y| > |x|$ . Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}(n+1)x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}y^n| \cdot (n+1) \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^n$$



Понятно, что  $|x|/|y| < 1$ ; обозначим  $\alpha := |x|/|y|$ . Поэтому последовательность  $\{(n+1)\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$  сходится к нулю, а значит ограничена сверху константой  $C$ . Следовательно

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}(n+1)x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} C|a_{n+1}y^n| = C \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}y^n|,$$

причём последний ряд сходится по условию, значит и первый тоже, что означает сильную сходимость  $g_1$  в  $x$ . Таким образом  $g_1$  сильно сходится на всей  $\varepsilon$ -окрестности  $x$ .

Теперь покажем, что  $f'(x) = g_1(x)$ . Пусть  $t$  — любая точка из проколотой  $\varepsilon$ -окрестности  $x$ . Тогда

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} - g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \left( \frac{t^{n+1} - x^{n+1}}{t - x} - (n+1)x^n \right)$$

Заметим, что

$$\frac{t^{n+1} - x^{n+1}}{t - x} - (n+1)x^n = t^n + t^{n-1}x + \dots + tx^{n-1} - nx^n = (t-x)(t^{n-1} + 2t^{n-2}x + \dots + nx^{n-1})$$

Следовательно

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} - g_1(x) = (t-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)$$

Пусть  $y$  некоторая точка из  $\varepsilon$ -окрестности  $x$ , что  $\delta := |y| - |x| > 0$ . Тогда для всякой точки  $t$  из проколотой  $\delta/2$ -окрестности  $x$

$$\begin{aligned} |a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| &= |a_{n+2}|(|t|^n + 2|t|^{n-1}|x| + \dots + (n+1)|x|^n) \\ &< |a_{n+2}|(|y| - \delta/2)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= |a_{n+2}y^{n+2}| \cdot |y|^{-2} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left( \frac{|y| - \delta/2}{|y|} \right)^n \end{aligned}$$

Тогда мы имеем, что  $\alpha := \frac{|y| - \delta/2}{|y|} \in [0; 1)$ , а тогда последовательность  $\left(|y|^{-2} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \alpha^n\right)_{n=0}^{\infty}$  сходится к 0, значит ограничена сверху константой  $C$ . Следовательно

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| < \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|C = C \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|$$

причём последняя сумма сходится, так как  $f$  сильно сходится в  $y$ . Тогда пусть

$$A := C \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|.$$

Значит

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - g_1(x) \right| &= |t - x| \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n) \right| \\ &\leq |t - x| \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| \\ &< |t - x|A \end{aligned}$$

Таким образом

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = g_1(x),$$

что значит, что  $f'(x) = g_1(x)$ . □

**Лемма 87.** Пусть  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  — сильно сходящийся ряд, а  $(\sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n})_{k=0}^{\infty}$  — последовательность сильно сходящихся рядов, что есть некоторая константа  $C$ , что для всякого  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  верно, что

- $(b_{k,n})_{k=0}^{\infty} \rightarrow a_n$ ,
- $|b_{k,n}| \leq C|a_n|$  для всякого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,
- для всякого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n}$  сходится и равен  $B_k$ .

Тогда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$ .

**Доказательство.** Вспомним, что для всякого  $\varepsilon > 0$  есть  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , что  $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2(C+1)}$ . Следовательно для всякого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n} \right| &\leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| + |b_{k,n}| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + (C+1) \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \\ &< \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + (C+1) \frac{\varepsilon}{2(C+1)} = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Тогда для всякого  $n \in [0; N-1]$  есть такое  $K_n$ , что для всех  $k \geq K_n$  верно, что  $|a_n - b_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{2N}$ . Пусть  $K := \max\{K_n\}_{n=0}^{N-1}$ . Следовательно для всякого  $k \geq K$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n} \right| < \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Таким образом для всякого  $k \geq K$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - B_k \right| < \varepsilon,$$

что значит, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

□

**Теорема 88.** Пусть рассматривается ряд вещественных чисел.

1. Если ряд сильно сходится, то любая его перестановка сильно сходится к тому же значению.
2. Если ряд сходится, но не сильно, то для любого значения  $S$  можно так переставить его члены, что итоговый ряд сойдётся к  $S$ .

**Доказательство.**

1. Пусть даны сильно сходящийся ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  и любая его перестановка  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ . Заметим, что для всякого  $\varepsilon > 0$  есть  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , что  $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$ . Значит есть  $M := \sigma^{-1}(N)$ . Следовательно для всякого  $L \geq M$

$$\left| \sum_{n=0}^L a_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

Таким образом  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ; чтобы показать сильную сходимость достаточно проделать те же рассуждения для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ .

2. Заметим, что сходимость ряда значит, что  $(|a_n|)_{n=0}^{\infty} \rightarrow 0$ . При этом несильная сходимость значит, что сумма положительных членов ряда и сумма отрицательных расходятся (уходят в  $+\infty$  и  $-\infty$  соответственно).

Выделим из последовательности  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  подпоследовательности положительных членов  $(a_n^+)_{n=0}^{\infty}$  и отрицательных  $(a_n^-)_{n=0}^{\infty}$  (в основной последовательности могут быть нули, но их можно раскидывать по последовательности как угодно — это не изменит результат). Заметим, что для всякого  $\varepsilon > 0$  есть  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , что для всякого  $n \geq N$  верно, что  $|a_n^+| < \varepsilon$  и  $|a_n^-| < \varepsilon$ .

Теперь составим нашу последовательность-перестановку следующим образом. В начальный момент у нас есть число  $t = 0$  и пустая последовательность  $T$ . Также у нас есть две бесконечных последовательности: одна с положительными —  $A^+$ , другая с отрицательными членами —  $A^-$ . Суммы обеих бесконечны. Каждый ход мы можем только взять из одной из  $A^+$  и  $A^-$  первое невзятое число, записать его в конец последовательности  $T$  и прибавить это число к  $t$ .

Какие же конкретно ходы мы хотим делать? Пусть  $C_0$  — максимальный размер членов в  $A^+$  и  $A^-$ , а  $C := \max(C_0, S+1)$ . Тогда на итерации №  $n$  ( $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ) будем удерживаться в интервале  $(S - C/2^n; S + C/2^n)$ . Чтобы достичь этой цели будем использовать следующую стратегию:

- если  $t \in (S - C/2^n; S]$ , то возьмём число из  $A^+$ ;
- если  $t \in [S; S + C/2^n)$ , то возьмём число из  $A^-$ .

Заканчивать итерацию №  $n$  будем, когда из обеих последовательностей будут вытащены первые  $N(C/2^{n+1})$  членов. Поскольку к началу каждой итерации №  $n$  оставшиеся члены в  $A^+$  и  $A^-$  по модулю меньше  $C/2^n$ , то описанными выше шагами мы не выйдем из интервала  $(S - C/2^n; S + C/2^n)$ . При этом после каждого момента мы не можем вытаскивать только члены одной из  $A^+$  и  $A^-$ , так как их суммы стремятся к  $\pm\infty$ , значит каждый член каждой последовательности будет взят, а следовательно мы попадём на каждую итерацию. Значит префиксные суммы будут сходиться к  $S$  (после конца каждой итерации префиксные суммы будут находиться во всё меньшей окрестности  $S$ ). Таким образом сумма полученного ряда-перестановки будет равна  $S$ .

□

## Практика

Рассмотрим функцию  $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

**Утверждение 89.**  $\exp(x)$  сильно сходится при любых  $x \in \mathbb{C}$ .

**Доказательство.** Действительно, есть натуральное  $N > 2|x|$ , значит

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &= \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{x^n}{n!} \right| + \frac{|x|^N}{N!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(N+n)!/N!} &< \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{x^n}{n!} \right| + \frac{|x|^N}{N!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{N^n} \\ &< \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{x^n}{n!} \right| + \frac{|x|^N}{N!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{x^n}{n!} \right| + 2 \frac{|x|^N}{N!} \end{aligned}$$

т.е.  $\exp$  сильно сходится во всякой точке  $x \in \mathbb{C}$ .

□

**Следствие 89.1.**  $\exp$  бесконечно дифференцируема. Причём  $\exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = \exp(x)$ .

**Утверждение 90.** Для абсолютных любых  $a$  и  $b$  верно, что  $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ .

**Доказательство.** Давайте рассмотрим следующую таблицу. В ней в верхней строчке написа-

$\times$	$\frac{a^0}{0!}$	$\frac{a^1}{1!}$	$\frac{a^2}{2!}$	$\frac{a^3}{3!}$	$\frac{a^4}{4!}$	$\dots$
$\frac{b^0}{0!}$	$\frac{a^0 \cdot b^0}{0! \cdot 0!}$	$\frac{a^1 \cdot b^0}{1! \cdot 0!}$	$\frac{a^2 \cdot b^0}{2! \cdot 0!}$	$\frac{a^3 \cdot b^0}{3! \cdot 0!}$	$\frac{a^4 \cdot b^0}{4! \cdot 0!}$	$\dots$
$\frac{b^1}{1!}$	$\frac{a^0 \cdot b^1}{0! \cdot 1!}$	$\frac{a^1 \cdot b^1}{1! \cdot 1!}$	$\frac{a^2 \cdot b^1}{2! \cdot 1!}$	$\frac{a^3 \cdot b^1}{3! \cdot 1!}$	$\frac{a^4 \cdot b^1}{4! \cdot 1!}$	$\dots$
$\frac{b^2}{2!}$	$\frac{a^0 \cdot b^2}{0! \cdot 2!}$	$\frac{a^1 \cdot b^2}{1! \cdot 2!}$	$\frac{a^2 \cdot b^2}{2! \cdot 2!}$	$\frac{a^3 \cdot b^2}{3! \cdot 2!}$	$\frac{a^4 \cdot b^2}{4! \cdot 2!}$	$\dots$
$\frac{b^3}{3!}$	$\frac{a^0 \cdot b^3}{0! \cdot 3!}$	$\frac{a^1 \cdot b^3}{1! \cdot 3!}$	$\frac{a^2 \cdot b^3}{2! \cdot 3!}$	$\frac{a^3 \cdot b^3}{3! \cdot 3!}$	$\frac{a^4 \cdot b^3}{4! \cdot 3!}$	$\dots$
$\frac{b^4}{4!}$	$\frac{a^0 \cdot b^4}{0! \cdot 4!}$	$\frac{a^1 \cdot b^4}{1! \cdot 4!}$	$\frac{a^2 \cdot b^4}{2! \cdot 4!}$	$\frac{a^3 \cdot b^4}{3! \cdot 4!}$	$\frac{a^4 \cdot b^4}{4! \cdot 4!}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

ны подряд члены ряда  $\exp(a)$ , в левом столбце —  $\exp(b)$ , а в пересечении строки и столбца — произведение соответствующих членов. Тогда легко видеть, что

$$\exp(a) \exp(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} \right).$$

В таком случае при раскрытии скобок мы получаем члены, находящиеся в угловом квадрате  $n+1 \times n+1$  таблицы. Если же раскрыть скобки у члена  $(a+b)^n/n!$  ряда  $\exp(a+b)$ , то получим члены на диагонали №  $n$  (без учёта особой строки и особого столбца); значит при раскрытии скобок у префиксных суммы в  $\exp(a+b)$  мы получаем члены в равнобедренных прямоугольных треугольниках размера  $n$ , вписанных прямым углом в угол таблицы. Тогда получаем, что  $\exp(a) \exp(b)$  и  $\exp(a+b)$  — просто суммы рядов, членами которых являются значения из таблицы, но в разных порядках.

Заметим, что ряд членов из таблицы сильно сходится. Действительно, давайте в последовательность подряд выпишем члены диагоналей. Получается, что это всё та же последовательность  $\exp(a+b)$ , но только в ней каждый член разбили сразу на несколько подряд идущих. Заметим, что для всякого  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\frac{(|a|+|b|)^n}{n!} = \frac{|a|^n \cdot |b|^0}{n! \cdot 0!} + \dots + \frac{|a|^0 \cdot |b|^n}{0! \cdot n!}.$$

Соответственно выписанный ряд сильно сходится, поскольку сильно сходится ряд  $\exp(|a|+|b|)$ . Значит при любых перестановках мы получим одно и то же, значит  $\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$ .  $\square$

**Утверждение 91.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = \exp(x)$$

**Доказательство.** Давайте раскроем скобки в подпредельном выражении:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{\binom{n}{1}}{n}x + \frac{\binom{n}{2}}{n^2}x^2 + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n^n}x^n$$

Заметим, что при всяком  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  член степени  $k$  равен

$$\frac{\binom{n}{k}}{n^k}x^k = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n}$$

Тогда видно, что для всякого  $k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}x^k = \frac{x^k}{k!}$$

и заодно

$$\left| \frac{\binom{n}{k}}{n^k}x^k \right| < \left| \frac{x^k}{k!} \right|$$

Следовательно по теореме мы получаем, что последовательность рядов, почленно сходящихся к  $\exp(x)$  и почленно ограниченных по модулю константой  $C = 1$ . Значит предел определён и равен  $\exp(x)$ .  $\square$

**Упражнение 1.** Рассмотрим функцию

$$f(x) := x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

1. Покажите, что  $f$  сходится при любом  $x$ .
2. Покажите, что  $f(x+1) = -f(x)$ .
3. Превратите  $f$  в ряд и покажите, что  $f$  сильно сходится при всяком  $x$  (осторожно, аккуратная возня с суммами и не очень аккуратная с оценками).

*Замечание.* До синуса недалеко, но я пока не знаю, что нужно сделать, чтобы окончательно доказать, что это он...

**Упражнение 2.** Рассмотрим функции

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\exp(xi) - \exp(-xi)}{2i} \quad \text{и} \quad c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\exp(xi) + \exp(-xi)}{2}$$

1. Покажите, что  $s$  и  $c$  определены корректно, т.е. они действительно возвращают вещественные значения.
2. Докажите, что  $s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$  и  $c(x+y) = c(x)c(y) - s(y)s(x)$  для всевозможных  $x, y \in \mathbb{R}$ .
3. Докажите, что  $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$  для всевозможных  $x \in \mathbb{R}$ .
4. Докажите, что  $s$  и  $c$  — бесконечно дифференцируемые функции.
5. Докажите, что  $s'(x) = c(x)$  и  $c'(x) = -s(x)$  для всевозможных  $x \in \mathbb{R}$ .
6. Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x} = 1$ .
7. Докажите, что  $s(x) = \sin(x)$ , а  $c(x) = \cos(x)$ .