Занятие от 26.11.
Геометрия и топология. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

2 декабря 2020 г.

Задача 39.

в) Пусть есть некоторые $r_{A,B} > 0$ и $r_{B,C} > 0$, что

$$A \subseteq U_{r_{A,B}}(B) \wedge B \subseteq U_{r_{A,B}}(A) \qquad \text{и} \qquad B \subseteq U_{r_{B,C}}(C) \wedge C \subseteq U_{r_{B,C}}(B)$$

Заметим, что для всяких множеств X и Y и положительных значений r, r_1 и r_2 верно, что $X \subseteq Y \to U_r(X) \subseteq U_r(Y)$, а $U_{r_1}(U_{r_2}(X)) = U_{r_1+r_2}(X)$. Следовательно

$$A \subseteq U_{r_{A,B}}(B) \subseteq U_{r_{A,B}+r_{B,C}}(C) \qquad C \subseteq U_{r_{B,C}}(B) \subseteq U_{r_{A,B}+r_{B,C}}(A)$$

Таким образом

$$\{r > 0 : A \subseteq U_r(B) \wedge B \subseteq U_r(A)\} + \{r > 0 : B \subseteq U_r(C) \wedge C \subseteq U_r(B)\} \\ \subseteq \{r > 0 : A \subseteq U_r(C) \wedge C \subseteq U_r(A)\}$$

Следовательно

$$\inf\{r > 0 : A \subseteq U_r(B) \wedge B \subseteq U_r(A)\} + \inf\{r > 0 : B \subseteq U_r(C) \wedge C \subseteq U_r(B)\} \\ \geqslant \inf\{r > 0 : A \subseteq U_r(C) \wedge C \subseteq U_r(A)\}$$

т.е.

$$d_H(A, B) + d_H(B, C) \geqslant d_H(A, C)$$

г) Заметим, что $B \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ равносильно тому, что во всякой окрестности всякой точки из B есть точка из A. Это равносильно тому, что для всякого $r > 0$ для всякой точки $b \in B$ есть точка $a \in A$, что $a \in U_r(b)$, следовательно $b \in U_r(a)$, что равносильно тому, что всякая точка B находится в r-окрестности A, т.е. $B \subseteq U_r(A)$. Таким образом $B \in \mathrm{Cl}(A)$ равносильно тому, что для всякого $r > 0$ верно, что $B \subseteq U_r(A)$.

При этом $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(B)$ равносильно тому, что $A \subseteq \mathrm{Cl}(B)$ и $B \subseteq \mathrm{Cl}(A)$, а значит равносильно тому, что $d_H(A, B) = 0$.
