

# Геометрия и топология.

Лектор — Евгений Анатольевич Фоминых

Создатель конспекта — Глеб Минаев \*

10 декабря 2020 г.

## TODOs

Разделы! . . . . .	1
Доказать. Пока лень... . . . .	23
Предупреждение: “немного опережая события”. . . . .	26
Просто попытка. Не получилось. Нужна трансфинитная индукция или рекурсия... Сама теорема — анонс. . . . .	29

## Содержание

### Разделы!

Литература:

- Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М., “Элементарная топология”, М.:МЦНМО, 2012.
- Коснёвски Чес, “Начальный курс алгебраической топологии”, М.:Мир, 1983.
- Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко, “Введение в топологию”, М.:Наука. Физматлит, 1995.
- James Munkres, Topology.

**Определение 1.** Функция  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется *метрикой* (или *расстоянием*) в множестве  $X$ , если:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (“неравенство треугольника”).

Пара  $(X, d)$ , где  $d$  — метрика в  $X$ , называется *метрическим пространством*.

---

\*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

*Пример 1.* Пусть  $X$  — произвольное множество. Тогда метрика

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{если } x \neq y \\ 0 & \text{если } x = y \end{cases}$$

называется *дискретной* метрикой на множестве  $X$ .

*Пример 2.*

- $X := \mathbb{R}$ , тогда  $d(x, y) := |x - y|$  — метрика.
- $X := \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Тогда

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

называется *евклидовой* метрикой.

- $X := \mathbb{R}^n$ ,  $d(x, y) := \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- $X := \mathbb{R}^n$ ,  $d(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- $X := C[0; 1]$ ,  $d(x(t), y(t)) = \max_{t \in [0; 1]} |x(t) - y(t)|$ .  $(X, d)$  называют *пространством непрерывных функций*.

**Определение 2.** Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство. Сужение функции  $d$  на  $Y \times Y$  является метрикой в  $Y$ . Метрическое пространство  $(Y, d|_{Y \times Y})$  называется *подпространством* пространства  $(X, d)$ .

**Теорема 1.** Пусть дана  $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , что

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ ;
- $\forall x, y, d \in \mathbb{R}_+ \quad g(x + d, y) \geq g(x, y) \wedge g(x, y + d) \geq g(x, y)$ ;
- $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+ \quad g(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2)$ .

Тогда для любых метрических пространств  $(X, d_X)$  и  $(Y, d_Y)$  функция

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

будет метрикой на  $X \times Y$ .

**Доказательство.** Проверим, что  $d_{X \times Y}$  — метрика.

- $\forall x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$

$$\begin{aligned} d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 & \iff g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) = 0 \\ & \iff d_X(x_1, x_2) = 0 \wedge d_Y(y_1, y_2) = 0 \\ & \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \end{aligned}$$

- $\forall x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$

$$\begin{aligned} d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) = g(d_X(x_2, x_1), d_Y(y_2, y_1)) \\ &= d_{X \times Y}((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \end{aligned}$$

- $\forall x_1, x_2, x_3 \in X, y_1, y_2, y_3 \in Y$

$$\begin{aligned}
d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_3, y_3)) &= g(d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3)) \\
&\leq g(d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3), d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3)) \\
&\leq g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) + g(d_X(x_2, x_3), d_Y(y_2, y_3)) \\
&= d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_{X \times Y}((x_2, y_2), (x_3, y_3))
\end{aligned}$$

□

**Следствие 1.1.** Для любых метрических пространств  $(X, d_X)$  и  $(Y, d_Y)$  пара  $(X \times Y, d_{X \times Y})$ , где

$$d_{X \times Y} := \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

есть метрическое пространство.

**Доказательство.** Необходимо лишь проверить, что  $g(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$  удовлетворяет условиям теоремы.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \leftrightarrow x = 0 = y.$
- $\forall x, y, d \in \mathbb{R}_+ \quad x + d \geq x \Rightarrow (x + d)^2 \geq x^2 \Rightarrow (x + d)^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 \Rightarrow \sqrt{(x + d)^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2 + y^2};$  для  $y$  аналогично.
- $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$  по неравенству Коши-Буняковского-Шварца

$$\begin{aligned}
(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 &\geq 0 \\
x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 &\geq 2 x_1 x_2 y_1 y_2 \\
(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) &\geq (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \\
(x_1^2 + y_1^2) + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + (x_2^2 + y_2^2) &\geq (x_1^2 + y_1^2) + 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2^2 + y_2^2) \\
\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 &\geq (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \\
\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} &\geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}
\end{aligned}$$

□

*Замечание 1.* Если  $g$  ассоциативна (например,  $g(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ ; она заодно коммутативна), то аналогично можно определить метрику на  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = (X_1 \times (X_2 \times (\dots \times X_n) \dots))$ .

Таким образом евклидова метрика есть метрика, так как её можно получить, применяя  $g(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$  к пространствам  $(X_i, d_i) = (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$  (где  $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$ ).

**Определение 3.** Пусть Для  $g(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$  из последней теоремы пространство  $(X \times Y, d_{X \times Y})$  называется (декартовым) произведением метрических пространств  $(X, d_X)$  и  $(Y, d_Y)$ . Аналогично определяется произведение конечного числа пространств.

*Замечание 2.* На роль  $g(x, y)$  подходят следующие функции:

- $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}$  для всех  $\alpha \geq 1$ ;
- $\max(x, y)$ .

А следующие функции уже не подходят:

- $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}$  для всех  $\alpha < 1$  (даже для отрицательных);
- $\min(x, y)$ ;
- $x \cdot y$  и  $x/y$ .

**Определение 4.** Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство,  $a \in X$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ . Тогда:

- $B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$  — (открытый) шар пространства  $(X, d)$  с центром в точке  $a$  и радиусом  $r$ ;
- $\overline{B}_r(a) = D_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$  — замкнутой шар пространства  $(X, d)$  с центром в точке  $a$  и радиусом  $r$ ;
- $S_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$  — сфера пространства  $(X, d)$  с центром в точке  $a$  и радиусом  $r$ .

**Определение 5.** Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство,  $A \subseteq X$ . Множество  $A$  называется открытым в метрическом пространстве, если

$$\forall a \in A \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq A$$

**Теорема 2.** В любом метрическом пространстве  $(X, d)$

1.  $\emptyset$  и  $X$  открыты;
2. для всяких  $a \in X$  и  $r > 0$  открытый шар  $B_r(a)$  открыт;
3. объединение любого семейства открытых множеств открыто;
4. пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.

**Доказательство.**

1. Очевидно.
2. Для всякого  $x \in B_r(a)$  верно, что  $B_{r-d(x,a)}(x) \subseteq B_r(a)$ , откуда утверждение очевидно следует.
3. Пусть дано семейство открытых множеств  $\Sigma$ . Пусть также  $I = \bigcup \Sigma$ . Для любого  $x \in I$  верно, что существует  $J \in \Sigma$ , что  $x \in J$ , а значит есть  $r > 0$ , что  $B_r(x) \subseteq J \subseteq I$ , т.е.  $x$  — внутренняя точка  $I$ . Таким образом  $I$  открыто.
4. Пусть  $I = \bigcap_{i=1}^n I_i$ . Тогда для любого  $x \in I$  верно, что существуют  $r_1, \dots, r_n > 0$ , что  $B_{r_i}(x) \subseteq I_i$ , значит  $B_{\min r_i}(x) \subseteq I$ , значит  $x$  — внутренняя точка  $I$ . Таким образом  $I$  открыто.

□

**Определение 6.** Пусть  $X$  — некоторое множество. Рассмотрим набор  $\Omega$  его подмножеств, для которого:

1.  $\emptyset, X \in \Omega$ ;
2. объединение любого семейства множеств из  $\Omega$  лежит в  $\Omega$ ;

3. пересечение любого конечного семейства множеств, принадлежащих  $\Omega$ , также принадлежит  $\Omega$ .

В таком случае:

- $\Omega$  — *топологическая структура* или просто *топология* в множестве  $X$ ;
- множество  $X$  с выделенной топологической структурой  $\Omega$  (т.е. пара  $(X, \Omega)$ ) называется *топологическим пространством*;
- элементы множества  $\Omega$  называются *открытыми множествами* пространства  $(X, \Omega)$ .

*Пример 3.*

- Если  $\Omega$  — множество открытых множеств в метрическом пространстве  $(X, d)$ , то  $(X, \Omega)$  — топологическое пространство. Таким образом любое метрическое пространство можно отождествлять с соответствующим топологическим пространством.
- Топология, индуцированная евклидовой метрикой в  $\mathbb{R}^n$ , называется *стандартной*.
- $\Omega := 2^X$  — *дискретная* топология на произвольном множестве  $X$ . Именно она порождается дискретной метрикой на  $X$ .
- $\Omega := \{\emptyset, X\}$  — *антидискретная* топология на произвольном множестве  $X$ .
- $X := \mathbb{R}$ ,  $\Omega := \{(a; +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ . Такая топология называется *стрелкой*.
- $\Omega = \{\emptyset\} \cup \{A \in X : |X \setminus A| \in \mathbb{N}\}$  — топология *конечных дополнений* на произвольном множестве  $X$ .

**Определение 7.** Множество  $F \subseteq X$  *замкнуто* в топологическом пространстве  $(X, \Sigma)$ , если его дополнение  $X \setminus F$  открыто (т.е. если  $X \setminus F \in \Sigma$ ).

**Теорема 3.** В любом топологическом пространстве  $X$

- $\emptyset$  и  $X$  — замкнуты;
- объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто;
- пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

**Теорема 4.** Пусть  $U$  — открыто, а  $V$  — замкнуто в  $(X, \Omega)$ . Тогда:

- $U \setminus V$  открыто;
- $V \setminus U$  замкнуто.

**Определение 8.** Пусть  $(X, \Omega)$  — топологическое пространство и  $A \subseteq X$ . Тогда *внутренностью* множества  $A$  называется объединение всех открытых подмножеств  $A$ :

$$\text{Int}(A) := \bigcup_{\substack{U \in \Omega \\ U \subseteq A}} U$$

**Теорема 5.**

- $\text{Int}(A)$  — открытое множество.

- $\text{Int}(A) \subseteq A$ .
- $B - \text{открыто} \wedge B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq \text{Int}(A)$ .
- $A = \text{Int}(A) \Leftrightarrow A - \text{открыто}$ .
- $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$ .
- $A \subseteq B \Rightarrow \text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$ .
- $\text{Int}(\bigcap_{k=1}^n A_k) = \bigcap_{k=1}^n \text{Int}(A_k)$ .
- $\text{Int}(\bigcup_{A \in \Sigma} A) \supseteq \bigcup_{A \in \Sigma} \text{Int}(A)$ .

**Определение 9.** *Окрестность* точки  $a$  в топологическом пространстве  $X$  — открытое множество в  $X$ , содержащее  $a$ .

Точка  $a$  топологического пространства  $X$  называется *внутренней точкой* множества  $A \subseteq X$ , если  $A$  содержит как подмножество некоторую окрестность  $a$ .

**Теорема 6.**

- *Множество открыто тогда и только тогда, когда все его точки внутренние.*
- *Внутренность множества есть множество всех его внутренних точек.*

**Доказательство.**

- $(\Rightarrow)$  Пусть  $A$  открыто, а  $a \in A$ . Тогда  $A$  — та самая окрестность  $a$ , которая является подмножеством  $A$ , поэтому  $a$  — внутренняя точка  $A$ .
- $(\Leftarrow)$  Пусть каждая точка  $A$  внутренняя. Тогда для каждого  $a \in A$  определим окрестность  $I_a$ , лежащую в  $A$  как подмножество (такая есть по определению). Тем самым  $A = \bigcup_{a \in A} I_a$ , т.е.  $A$  есть объединение открытых множеств, следовательно открытое множество.
- $(\subseteq)$  Пусть  $a \in \text{Int}(A)$ . Вспомним, что  $\text{Int}(A)$  — открытое подмножество  $A$ . Следовательно,  $a$  — внутренняя точка  $A$ .
- $(\supseteq)$  Пусть  $a$  — внутренняя точка  $A$ . Следовательно есть открытое  $I$ , что  $a \in I \subseteq A$ , следовательно  $I \subseteq \text{Int}(A)$ , а значит  $a \in \text{Int}(A)$ .

□

**Определение 10.** Пусть  $(X, \Omega)$  — топологическое пространство, а  $A \subseteq X$ . *Замыканием* множества  $A$  называется пересечение всех замкнутых пространств, содержащих  $A$  как подмножество:

$$\text{Cl}(A) := \bigcap_{\substack{X \setminus V \in \Omega \\ V \supseteq A}} V$$

**Теорема 7.**

- $\text{Cl}(A)$  — замкнутое множество.
- $\text{Cl}(A) \supseteq A$ .
- $B - \text{замкнуто} \wedge B \supseteq A \Rightarrow B \supseteq \text{Cl}(A)$ .

- $A = \text{Cl}(A) \Leftrightarrow A$  — замкнуто.
- $\text{Cl}(\text{Cl}(A)) = \text{Cl}(A)$ .
- $A \subseteq B \Rightarrow \text{Cl}(A) \subseteq \text{Cl}(B)$ .
- $\text{Cl}(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \bigcup_{k=1}^n \text{Cl}(A_k)$ .
- $\text{Cl}(\bigcap_{A \in \Sigma} A) \subseteq \bigcap_{A \in \Sigma} \text{Cl}(A)$ .
- $\text{Cl}(A) \sqcup \text{Int}(X \setminus A) = X$ .

**Определение 11.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $A \subseteq X$  и  $b \in X$ . Точка  $b$  называется *точкой прикосновения* множества  $A$ , если всякая её окрестность пересекается с  $A$ .

**Теорема 8.**

- Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно является множеством своих точек прикосновения.
- Замыкание множества есть множество всех его точек прикосновения.

**Определение 12.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $A \subseteq X$  и  $a \in X$ .

*Граница* множества  $A$  — разность замыкания и внутренности  $A$ :  $\text{Fr}(A) := \text{Cl}(A) \setminus \text{Int}(A)$ .

Точка  $a$  — *граничная точка* множества  $A$ , если всякая её окрестность пересекается с  $A$  и с  $X \setminus A$ .

**Теорема 9.** Граница множества совпадает с множеством его граничных точек.

**Теорема 10.**

- $\text{Fr}(A)$  замкнуто.
- $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(X \setminus A)$ .
- $A$  замкнуто  $\Leftrightarrow A \supseteq \text{Fr}(A)$ .
- $A$  открыто  $\Leftrightarrow A \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$ .

**Определение 13.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $A \subseteq X$  и  $a \in X$ .

$a$  — *предельная точка*  $A$ , если в любой окрестности  $a$  есть точка  $A \setminus \{a\}$ .

$a$  — *изолированная точка*  $A$ , если  $a \in A$  и есть окрестность  $a$  без точки  $A \setminus \{a\}$ .

**Теорема 11.**

- $b$  — предельная  $\Rightarrow b$  — точка прикосновения.
- $\text{Cl}(A) = \{\text{внутренние точки } A\} \sqcup \{\text{граничные точки } A\}$ .
- $\text{Cl}(A) = \{\text{предельные точки } A\} \sqcup \{\text{изолированные точки } A\}$ .

**Определение 14.** Пусть  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — топологии на  $X$ . Тогда если  $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ , то говорят, что  $\Omega_1$  слабее (грубее)  $\Omega_2$ , а  $\Omega_2$  сильнее (тоньше)  $\Omega_1$ .

*Пример 4.* Из всех топологий на  $X$  антидискретная — самая грубая, а дискретная — самая тонкая.

**Теорема 12.** Топология метрики  $d_1$  грубее топологии метрики  $d_2$  тогда и только тогда, когда в любом шаре метрики  $d_1$  содержится шар метрики  $d_2$  с тем же центром.

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ ) Пусть топология метрики  $d_1$  грубее топологии метрики  $d_2$ . Тогда любой шар  $B_r^{d_1}(a)$  открыт в  $d_2$ , следовательно по определению открытости есть шар  $B_q^{d_2}(a) \subseteq B_r^{d_1}(a)$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть в любом шаре метрики  $d_1$  содержится шар метрики  $d_2$  с тем же центром. Возьмём любое открытое в  $d_1$  множество  $U$ . Тогда для всякой точки  $a \in U$  есть шар  $B_r^{d_1}(a) \subseteq U$ . При этом есть шар  $B_q^{d_2}(a) \subseteq B_r^{d_1}(a)$ , таким образом  $a$  — внутренняя точка  $U$  в  $d_2$ . Следовательно  $U$  открыто в  $d_2$ .

□

**Следствие 12.1.** Если  $d_1$  и  $d_2$  — метрики на  $X$  и  $d_1 \leq d_2$ , то топология  $d_1$  грубее топологии  $d_2$ .

**Определение 15.** Две метрики на одном множестве называются *эквивалентными*, если они порождают одну топологию.

**Лемма 13.** Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство. Тогда для всякого  $C > 0$  функция  $C \cdot d$  — метрика на  $X$ , эквивалентная  $d$ .

**Следствие 13.1.** Если для метрик  $d_1$  и  $d_2$  на  $X$  есть такое  $C > 0$ , что  $d_1 \leq C d_2$ , то  $d_1$  грубее  $d_2$ .

**Определение 16.** Метрики  $d_1$  и  $d_2$  на одном множестве называются *липшицево эквивалентными*, если существуют  $c, C > 0$ , что  $c \cdot d_1 \leq d_2 \leq C \cdot d_1$ .

**Теорема 14.** Липшицево эквивалентные метрики просто эквивалентны.

**Определение 17.** Топологическое пространство *метризуемо*, если есть метрика, её порождающая.

**Определение 18.** База топологии  $\Omega$  — такое семейство  $\Sigma$  открытых множеств, что всякое открытое  $U$  представимо в виде объединения множеств из  $\Sigma$ .

$$\Sigma \subseteq \Omega \text{ — база} \iff \forall U \in \Omega \exists \Lambda \subseteq \Sigma : U = \bigcup_{W \in \Lambda} W$$

**Определение 19.** Множество  $\Gamma$  подмножеств множества  $X$  называются его *покрытием*, если  $X := \bigcup_{A \in \Gamma} A$ . Часто покрытие записывают в виде  $\Gamma = \{A_i\}_{i \in I}$ .

**Теорема 15** (второе определение базы). Пусть  $(X, \Omega)$  — топологическое пространство и  $\Sigma \subseteq \Omega$ . Тогда  $\Sigma$  — база топологии  $\Omega$  тогда и только тогда, когда для любой точки  $a$  любого открытого множества  $U$  есть окрестность из  $\Sigma$ , лежащая в  $U$  как подмножество.

**Определение 20.** Пусть  $(X, \Omega)$  — топологическое пространство,  $a \in X$  и  $\Lambda \subseteq \Omega$ .  $\Lambda$  называется *базой топологии (базой окрестности) в точке  $a$* , если:

1.  $\forall U \in \Lambda \ a \in U$ ;
2.  $\forall$  окрестности  $U$  точки  $a \exists V_a \in \Lambda : V_a \subseteq U$ .

**Теорема 16.**



- Если  $\Sigma$  — база топологии, то для всякой точки  $a \in X$  множество  $\Sigma_a := \{U \in \Sigma \mid a \in U\}$  — база топологии в точке  $a$ .
- Пусть для каждой точки  $a \in X$  определена база топологии  $\Sigma_a$  в ней. Тогда  $\bigcup_{a \in X} \Sigma_a$  — база топологии.

**Теорема 17.** Пусть  $\Sigma$  — семейство подмножеств  $X$ . Тогда есть не более одной топологии, для которой  $\Sigma$  является базой.

**Доказательство.** Предположим противное: пусть  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — различные топологии на  $X$ , для которых  $\Sigma$  является базой. По определению базы для всякого  $U \in \Omega_1$  есть семейство  $\Gamma \subseteq \Sigma$ , что  $U = \bigcup_{A \in \Gamma} A$ ; но поскольку  $\Gamma \subseteq \Sigma \subseteq \Omega_2$ , то всякое  $A \in \Gamma$  лежит в  $\Omega_2$ , а значит  $U$  тоже лежит в  $\Omega_2$ . Таким образом  $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ ; аналогично наоборот, следовательно  $\Omega_1 = \Omega_2$  — противоречие.

Таким образом для всякого  $\Sigma$  будет не более одной топологии, где для которой оно будет базой.  $\square$

**Следствие 17.1.** Пусть  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  — базы топологий  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  на одном и том же множестве. Тогда если  $\Sigma_1 = \Sigma_2$ , то и  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

**Теорема 18** (критерий базы). Пусть  $X$  — произвольное множество, а  $\Sigma$  — его покрытие.  $\Sigma$  — база некоторой топологии на  $X$  тогда и только тогда, когда для всяких  $A, B \in \Sigma$  есть семейство  $\Lambda \subseteq \Sigma$ , что  $A \cap B = \bigcup_{S \in \Lambda} S$ .

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ ) Если  $\Sigma$  — база, то для всяких  $A, B \in \Sigma$  множество  $A \cap B$  открыто, а поэтому представляется как объединение некоторого подсемейства  $\Sigma$ .

( $\Leftarrow$ ) Рассмотрим топологию  $\Omega$ , образованную всевозможными объединениями множеств из  $\Sigma$ , т.е.

$$\Omega := \left\{ \bigcup_{S \in \Lambda} S \mid \Lambda \subseteq \Sigma \right\}$$

Проверим, что это действительно топология.

1.  $\Sigma$  — покрытие, поэтому  $X = \bigcup_{S \in \Sigma} S \in \Omega$ . Также рассматривая  $\Lambda = \emptyset$ , получаем, что  $\bigcup_{S \in \Lambda} S = \emptyset \in \Omega$ .
2. Пусть  $\Phi \subseteq \Omega$ . Тогда для каждого  $S \in \Phi$  есть семейство  $\Lambda_S \subseteq \Sigma$ , его образующее, т.е.  $S = \bigcup_{T \in \Lambda_S} T$ . В таком случае  $\Lambda := \bigcup_{S \in \Phi} \Lambda_S$  является подмножеством  $\Sigma$ , а тогда

$$\bigcup_{S \in \Phi} S = \bigcup_{S \in \Phi} \bigcup_{T \in \Lambda_S} T = \bigcup_{T \in \Lambda} T \in \Omega$$

3. Пусть  $U, V \in \Omega$ . Тогда существуют  $M, N \subseteq \Sigma$ , что  $U = \bigcup_{S \in M} S$  и  $V = \bigcup_{S \in N} S$ . Также для каждой  $P = (A, B) \in M \times N$  существует  $\Lambda_P \subseteq \Sigma$ , что  $A \cap B = \bigcup_{S \in \Lambda_P} S$ . Пусть  $\Lambda := \bigcup_{P \in M \times N} \Lambda_P$ . Понятно, что  $\Lambda \subseteq \Sigma$ . Следовательно

$$U \cap V = \left( \bigcup_{A \in M} A \right) \cap \left( \bigcup_{B \in N} B \right) = \bigcup_{(A, B) \in M \times N} A \cap B = \bigcup_{P \in M \times N} \bigcup_{S \in \Lambda_P} S = \bigcup_{S \in \Lambda} S \in \Omega$$

$\square$

**Определение 21.** *Предбаза* — семейство  $\Delta$  открытых множеств в пространстве  $(X, \Omega)$ , что  $\Omega$  — наименьшая топология по включению топология, содержащая  $\Delta$ .

**Теорема 19.** *Любое семейство  $\Delta$  подмножеств множества  $X$  является предбазой некоторой топологии.*

**Доказательство.** Определим

$$\Sigma := \{X\} \cup \left\{ \bigcap_{A \in W} A \mid W \subseteq \Delta \wedge |W| \in \mathbb{N} \right\}$$

Заметим, что  $\Delta \subseteq \Sigma$ . Действительно, для всякого  $A \in \Delta$  семейство  $W := \{A\}$  является подмножеством  $\Delta$ , следовательно  $A = \bigcap_{T \in W} T \in \Sigma$ .

Покажем, что любая топология, которая содержит как подмножество  $\Delta$ , содержит и  $\Sigma$  как подмножество. Действительно, пусть  $A \in \Sigma$  (будем считать, что  $A$  — не  $X$  и не  $\emptyset$ ; иначе утверждение очевидно). Тогда есть конечное семейство  $W \subseteq \Delta$ , что  $A = \bigcap_{T \in W} T$ . Пусть  $\Omega$  — любая топология, содержащая  $\Delta$  как подмножество. Тогда  $W \subseteq \Omega$ , а следовательно  $A = \bigcap_{T \in W} T \in \Omega$ . Таким образом  $\Sigma \subseteq \Omega$ . Поэтому для топология, для которой  $\Sigma$  будет предбазой,  $\Delta$  тоже будет предбазой.

Покажем, что  $\Sigma$  удовлетворяет критерию базы.

- $X \in \Sigma$ , значит  $\Sigma$  — покрытие  $X$ .
- Пусть  $A, B \in \Sigma$ . Если  $A = X$ , то  $A \cap B = B = \bigcup_{T \in W} T$ , где  $W := \{B\} \subseteq \Sigma$ . Если  $A = \emptyset$ , то  $A \cap B = \emptyset = \bigcup_{T \in W} T$ , где  $W := \emptyset \subseteq \Sigma$ . Аналогично, если  $B$  есть  $X$  или  $\emptyset$ . Иначе есть непустые  $V, U \subseteq \Delta$ , что  $A = \bigcap_{T \in V} T$ , а  $B = \bigcap_{T \in U} T$ . Следовательно  $A \cap B = \bigcap_{T \in V \cup U} T$ . Но поскольку  $V \cup U \subseteq \Delta$ , то  $A \cap B \in \Sigma$ . Таким образом  $A \cap B = \bigcup_{T \in W} T$ , где  $W := \{A \cap B\} \subseteq \Sigma$ .

Рассмотрим

$$\Omega := \left\{ \bigcup_{S \in \Lambda} S \mid \Lambda \subseteq \Sigma \right\}$$

По теореме о критерии базы  $\Omega$  — топология, где  $\Sigma$  — база. С другой стороны  $\Omega$  — множество, которое содержится как подмножество в любой топологии, которая содержит как подмножество  $\Sigma$ . Следовательно  $\Omega$  — минимальная топология, содержащая как подмножество  $\Sigma$ , а значит и  $\Delta$ . Поэтому  $\Delta$  — предбаза в  $\Omega$ .  $\square$

**Теорема 20.** *Пусть  $(X, \Omega)$  — топологическое пространство, а  $A \subseteq X$ . Тогда множество*

$$\Omega_A := \{U \cap A \mid U \in \Omega\}$$

*есть топология на  $A$ .*

**Определение 22.** Пусть  $(X, \Omega)$  топологическое пространство, а  $A \subseteq X$ . Тогда

$$\Omega_A := \{U \cap A \mid U \in \Omega\}$$

— топология, индуцированная множеством  $A$ , а  $(A, \Omega_A)$  — подпространство  $(X, \Omega)$ .

**Теорема 21.**

- Множества, открытые в подпространстве, не обязательно открыты в обьемлющем пространстве.

- Открытые множества открытого подпространства открыты и во всём пространстве.
- Если  $\Sigma$  — база топологии  $\Omega$ , то

$$\Sigma_A := \{U \cap A \mid U \in \Sigma\}$$

— база индуцированной топологии.

- Пусть  $(X, \Omega)$  — топологическое пространство и  $B \subseteq A \subseteq X$ . Тогда  $(\Omega_A)_B = \Omega_B$ , т.е. топология, которая индуцируется в  $B$  топологией, индуцированной в  $A$ , совпадает с топологией, индуцированной непосредственно из  $X$ .

**Определение 23.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *непрерывным*, если прообраз всякого открытого множества из  $Y$  открыт в  $X$ .

**Теорема 22.**

- Отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз замкнутого замкнут.
- Композиция непрерывных отображений непрерывно.
- Пусть  $Z$  — подпространство  $X$ , а  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно. Тогда  $f|_Z : Z \rightarrow Y$  непрерывно.
- Пусть  $Z$  — подпространство  $Y$ ,  $f : X \rightarrow Y$  и  $f(X) \subseteq Z$ . Пусть  $\tilde{f} : X \rightarrow Z, x \mapsto f(x)$ . Тогда  $f$  непрерывна тогда и только тогда, когда  $\tilde{f}$  непрерывна.

**Определение 24.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *непрерывным в точке*  $a \in X$ , если для любой окрестности  $U$  точки  $f(a)$  существует такая окрестность  $V$  точки  $a$ , что  $f(V) \subseteq U$ .

**Теорема 23.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке пространства  $X$ .

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ ) Очевидно,  $V = f^{-1}(U)$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $U \in \Omega_Y$ . Тогда для всякого  $a \in f^{-1}(U)$  есть окрестность  $V_a$  точки  $a$ , что  $V_a \subseteq f^{-1}(U)$ . Следовательно любая точка  $f^{-1}(U)$  внутренняя, а значит  $f^{-1}(U)$  открыто.

□

**Теорема 24.** Пусть  $X$  и  $Y$  — топологические пространства,  $a \in X$ ,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $\Sigma_a$  — база окрестностей в точке  $a$  и  $\Lambda_{f(a)}$  — база окрестностей в точке  $f(a)$ . Тогда  $f$  непрерывна в точке  $a$  тогда и только тогда, когда для всякого  $U \in \Lambda_{f(a)}$  есть  $V \in \Sigma_a$ , что  $f(V) \subseteq U$ .

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $f$  непрерывна в  $a$ . Рассмотрим любое  $U \in \Lambda_{f(a)}$ .  $U$  — окрестность  $f(a)$ , соответственно есть  $W$  — окрестность  $a$ , что  $f(W) \subseteq U$ . Но тогда есть  $V \in \Sigma_a$ , что  $V \subseteq W$ . Тогда  $V \in \Sigma_a$  и  $f(V) \subseteq U$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть для всякого  $U \in \Lambda_{f(a)}$  найдётся  $V \in \Sigma_a$ , что  $f(V) \subseteq U$ . Рассмотрим любую окрестность  $U$  точки  $f(a)$ . Тогда есть семейство  $W \in \Lambda_{f(a)}$ , что  $W \subseteq U$ . Следовательно найдётся  $V \in \Sigma_a$ , что  $f(V) \subseteq W$ , а следовательно  $V$  — окрестность  $a$ , и  $f(V) \subseteq U$ .

□

**Следствие 24.1.** Пусть  $X, Y$  — метрические пространства,  $a \in X$ ,  $f : X \rightarrow Y$ . Тогда

1.  $f$  непрерывно в точке  $a$  тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$$

2.  $f$  непрерывно в точке  $a$  тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_X(x, a) < \delta \rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

**Определение 25.** Пусть  $X, Y$  — метрические пространства. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *липшицевым*, если:

$$\exists C > 0 : \forall a, b \in X \quad d_Y(f(a), f(b)) \leq C \cdot d_X(a, b)$$

Значение  $C$  называют *константой Липшица* отображения  $f$ .

**Теорема 25.** Всякое липшицево отображение непрерывно.

**Доказательство.** Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \delta := \frac{\varepsilon}{C} \implies \left( d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) \leq C \cdot d_X(x, a) < C \cdot \delta = \varepsilon \right)$$

□

*Пример 5.*

- Пусть фиксирована точка  $x_0$  в метрическом пространстве  $(X, d)$ . Тогда отображение

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \mapsto d(a, x_0),$$

непрерывно.

- Пусть  $A$  — непустое подмножество метрического пространства  $(X, d)$ . *Расстоянием от точки  $x \in X$  до множества  $A$*  называется число

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Отображение

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x, A),$$

непрерывно.

- Метрика  $d$  на множестве  $X$  является непрерывным отображением  $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 26.** Покрывание  $\Gamma$  топологического пространства  $X$  называется *фундаментальным*, если

$$\forall U \subseteq X : \left( \forall A \in \Gamma \quad U \cap A \text{ открыто в } A \right) \implies \left( U \text{ открыто в } X \right)$$

**Лемма 26.** Покрывание  $\Gamma$  топологического пространства  $X$  фундаментально тогда и только тогда, когда

$$\forall V \subseteq X \quad \left( \forall A \in \Gamma \quad V \cap A \text{ замкнуто в } A \right) \implies \left( V \text{ замкнуто в } X \right)$$

### Доказательство.

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\Gamma$  фундаментально. Рассмотрим  $V \subseteq X$ , что для всякого  $A \in \Gamma$  множество  $V \cap A$  замкнуто в  $A$ . Следовательно  $(X \setminus V) \cap A$  открыто в  $A$ , а тогда по фундаментальности  $\Gamma$  множество  $X \setminus V$  открыто, а значит всё  $V$  замкнуто.

( $\Leftarrow$ ) Аналогично, поменяв местами слова "открыто" и "замкнуто".

□

**Теорема 27.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства,  $\Gamma$  — фундаментальное покрытие  $X$  и  $f : X \rightarrow Y$ . Если сужение  $f$  на всякое  $A \in \Gamma$  непрерывно, то и само  $f$  непрерывно.

**Доказательство.** Рассмотрим любое открытое в  $Y$  множество  $U$ . Если  $A \in \Gamma$ , то  $f^{-1}(U) \cap A = (f|_A)^{-1}(U)$  открыто. А в таком случае из фундаментальности  $\Gamma$  следует, что  $f^{-1}(U)$  открыто. Таким образом  $f$  непрерывно. □

**Определение 27.** Покрытие топологического пространства называется

- *открытым*, если оно состоит из открытых множеств;
- *замкнутым* — если из замкнутых;
- *локально конечным* — если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия.

**Теорема 28.**

1. Всякое открытое покрытие фундаментально.
2. Всякое конечное замкнутое покрытие фундаментально.
3. Всякое локально конечное замкнутое покрытие фундаментально.

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma$  — данное покрытие.

1. Пусть дано  $U \subseteq X$ , что для всякого  $A \in \Gamma$  множество  $U \cap A$  открыто в  $A$ , а значит открыто в  $X$ . Тогда

$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$

есть объединение открытых множеств, а значит само открыто. Таким образом  $\Gamma$  фундаментально.

2. Пусть дано  $U \subseteq X$ , что для всякого  $A \in \Gamma$  множество  $U \cap A$  замкнуто в  $A$ , а значит замкнуто в  $X$ . Тогда

$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$

есть конечное объединение замкнутых множеств, а значит само замкнуто. Таким образом  $\Gamma$  фундаментально.

3. Пусть дано  $U \subseteq X$ , что для всякого  $A \in \Gamma$  множество  $U \cap A$  открыто в  $A$ . Рассмотрим некоторую точку  $u \in U$  и её окрестность  $V_u$ , которая пересекается с конечным набором  $\Gamma_u$  элементов из  $\Gamma$ . Тогда для всякого  $A \in \Gamma_u$  множество

$$U \cap A \cap V = (U \cap A) \cap (A \cap V)$$

открыто в  $V \cap A$ . При этом

$$\{V \cap A \mid A \in \Gamma_u\}$$

— конечное замкнутое покрытие, а значит  $U \cap V$  открыто в  $V$ , а значит и в  $X$ . Таким образом  $U \cap V$  — окрестность  $u$ , а значит  $u$  — внутренняя точка  $U$ . Значит  $U$  открыто.

□

**Теорема 29.** Пусть  $(X, \Omega_X)$  и  $(Y, \Omega_Y)$  — топологические пространства. Тогда

$$\Sigma := \{U \times V \mid U \in \Omega_X \wedge V \in \Omega_Y\}$$

является базой топологии на  $X \times Y$ .

**Доказательство.** Проверим критерий базы:

1.  $X \in \Omega_X, Y \in \Omega_Y$ , следовательно  $X \times Y \in \Sigma$ . Таким образом  $\Sigma$  — покрытие  $X \times Y$ .
2. Пусть  $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \Sigma$ . Тогда  $U_1 \cap U_2 \in \Omega_X, V_1 \cap V_2 \in \Omega_Y$ , а значит  $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \Sigma$ .

Таким образом  $\Sigma$  — база.

□

**Определение 28.** Пусть  $(X, \Omega_X)$  и  $(Y, \Omega_Y)$  — топологические пространства, а  $\Omega_{X \times Y}$  — топология, порождённая базой  $\Sigma$  из предыдущей теоремы. Тогда  $(X \times Y, \Omega_{X \times Y})$  называется *произведением* топологических пространств, а сама  $\Omega_{X \times Y}$  называется *стандартной* топологией.

*Замечание 3.* По аналогии если  $\Sigma_X$  и  $\Sigma_Y$  — базы топологий  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$  соответственно, то

$$\Lambda := \{U \times V \mid U \in \Sigma_X \wedge V \in \Sigma_Y\}$$

также являются базой стандартной топологии на  $X \times Y$ .

**Определение 29.** Обозначения:

- $X = \prod_{i \in I} X_i$  — произведение топологических пространств.
- Элементами  $X$  являются такие функции  $x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ , что  $x(i) \in X_i$ .
- $p_i : X \rightarrow X_i$  — координатная проекция, где  $p_i(x) := x(i)$ .

**Определение 30.** Пусть  $\{(X_i, \Omega_i)\}_{i \in I}$  — семейство топологических пространств. Тихоновская топология на  $X = \prod_{i \in I} X_i$  задаётся предбазой, состоящей из всевозможных множеств вида  $p_i^{-1}(U)$ , где  $i \in I$ , а  $U \subseteq \Omega_i$ .

*Замечание 4.* В случае конечного произведения тихоновская топология совпадает со стандартной.

**Теорема 30.** Пусть  $(X, d_X)$  и  $(Y, d_Y)$  — метрические пространства,  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$  — топологии в данных метрических пространствах. Рассмотрим две топологии:

- $\Omega_{X \times Y}$  — топология-произведение топологий  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$ ;
- $\Omega_{\max}$  — топология, порождённая произведением метрик по функции  $g := \max$  (см. теорему 1).

Тогда эти топологии совпадают.

**Доказательство.** Определим

$$d_{\max} : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

Таким образом  $d_{\max}$  — метрика, порождающая  $\Omega_{\max}$ .

**Лемма 30.1.**

$$B_r^{d_{\max}}((x, y)) = B_r^{d_X}(x) \times B_r^{d_Y}(y)$$

**Доказательство.** Очевидно. □

Вспомним, что

$$\Sigma_X := \{B_r^{d_X}(x) \mid r > 0 \wedge x \in X\} \quad \text{и} \quad \Sigma_Y := \{B_r^{d_Y}(y) \mid r > 0 \wedge y \in Y\}$$

являются базами  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$ . Следовательно

$$\Sigma_{X \times Y} := \{U_X \times U_Y \mid U_X \in \Sigma_X \wedge U_Y \in \Sigma_Y\}$$

является базой  $\Omega_{X \times Y}$ . Также заметим, что

$$\Sigma_{\max} := \{B_r^{d_{\max}}((x, y)) \mid r > 0 \wedge x \in X \wedge y \in Y\} = \{B_r^{d_X}(x) \times B_r^{d_Y}(y) \mid r > 0 \wedge x \in X \wedge y \in Y\}$$

является базой  $\Omega_{\max}$ . При этом несложно видеть, что  $\Sigma_{\max} \subseteq \Sigma_{X \times Y}$ , следовательно  $\Omega_{\max}$  грубее  $\Omega_{X \times Y}$ . Осталось показать, что  $\Sigma_{\max}$  порождает  $\Sigma_{X \times Y}$ , т.е. всякое  $U \in \Sigma_{X \times Y}$  представимо в виде объединения некоторых множеств из  $\Sigma_{\max}$ .

Пусть  $U$  — некоторый элемент  $\Sigma_{X \times Y}$ . Тогда есть некоторые  $r_X, r_Y > 0$  и  $(x, y) \in X \times Y$ , что  $U = B_{r_X}^{d_X}(x) \times B_{r_Y}^{d_Y}(y)$ . Пусть  $(x', y') \in U$ , тогда  $x' \in B_{r_X}^{d_X}(x)$ . Следовательно  $q_X := r_X - d_X(x, x') > 0$ , а  $B_{q_X}^{d_X}(x') \subseteq B_{r_X}^{d_X}(x)$ ; аналогично для  $Y$ . Пусть  $q := \min(q_X, q_Y) > 0$ . Тогда

$$V := B_q^{d_X}(x') \times B_q^{d_Y}(y')$$

— окрестность  $(x', y')$ . При этом  $V \subseteq U$ . Значит  $U$  представляется в виде объединения всех таких окрестностей для каждой точки  $(x', y')$  из него. Но  $V \in \Sigma_{\max}$ , поэтому  $\Sigma_{\max}$  порождает  $\Sigma_{X \times Y}$ . Значит топология, которая порождает  $\Sigma_{\max}$ , —  $\Omega_{\max}$  — содержит как подмножество топологию, которую порождает  $\Sigma_{X \times Y}$ , —  $\Omega_{X \times Y}$ .

Таким образом  $\Omega_{\max} = \Omega_{X \times Y}$ . □

**Теорема 31.** Пусть дана  $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , что

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad g(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y = 0$ ;
- $\forall x, y, d \in \mathbb{R}_+ \quad g(x + d, y) \geq g(x, y) \wedge g(x, y + d) \geq g(x, y)$ ;
- $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+ \quad g(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2)$ ;
- $\forall \alpha > 0 \exists x, y > 0 : \quad 0 < g(x, 0) < \alpha \wedge 0 < g(0, y) < \alpha$ .

Тогда для любых метрических пространств  $(X, d_X)$  и  $(Y, d_Y)$  функция

$$d_g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

является метрикой, эквивалентной метрике

$$d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

**Доказательство.** Заметим, что по теореме 1 функция  $d_{\max}$  является метрикой. С помощью теоремы 12 имеем, что нужно показать, что в каждом шаре по одной метрик  $d_{\max}$  и  $d_g$  есть шар с тем же центром по другой метрике.

Рассмотрим шар  $B_r^{d_g}((x, y))$ . Тогда по свойству  $g$  есть  $q_X > 0$ , что  $0 < g(q_X, 0) < r/2$ ; аналогично для  $Y$ . Следовательно для всех точек  $x' \in B_{q_X}^{d_X}(x)$  и  $y' \in B_{q_Y}^{d_Y}(y)$  верно, что

$$\begin{aligned} d_g((x', y'), (x, y)) &= g(d_X(x', x), d_Y(y', y)) \\ &\leq g(d_X(x', x), 0) + g(0, d_Y(y', y)) \\ &\leq g(q_X, 0) + g(0, q_Y) \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \end{aligned}$$

Пусть  $q := \min(q_X, q_Y)$ . Тогда

$$B_q^{d_{\max}}((x, y)) = B_q^{d_X}(x) \times B_q^{d_Y}(y) \subseteq B_{q_X}^{d_X}(x) \times B_{q_Y}^{d_Y}(y) \subseteq B_r^{d_g}((x, y))$$

Т.е. для каждого шара по  $d_g$  нашёлся подшар по  $d_{\max}$ .

**Лемма 31.1.** Для всякого  $r > 0$  есть такое  $q_X > 0$ , что

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x, 0) < q_X \longrightarrow x < r$$

Аналогично для  $Y$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $q_X := g(r, 0) > 0$ . Тогда если  $x \geq r$ , то  $g(x, 0) \geq g(r, 0) = q_X$ . Следовательно

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x, 0) < q_X \longrightarrow x < r$$

Аналогично для  $Y$ . □

Рассмотрим шар  $B_r^{d_{\max}}((x, y))$ . Тогда определим  $q_X$  и  $q_Y$  по прошлой лемме для  $r$  и координат  $X$  и  $Y$  соответственно. Пусть также  $q := \min(q_X, q_Y)$  Тогда

$$\begin{aligned} \forall (x', y') \in B_q^{d_g}((x, y)) &\begin{cases} g(d_X(x', x), 0) \leq g(d_X(x', x), d_Y(y', y)) = d_g((x', y'), (x, y)) < q \leq q_X \\ g(0, d_Y(y', y)) \leq g(d_X(x', x), d_Y(y', y)) = d_g((x', y'), (x, y)) < q \leq q_Y \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} d_X(x', x) < r \\ d_Y(y', y) < r \end{cases} \\ &\implies d_{\max}((x', y'), (x, y)) = \max(d_X(x', x), d_Y(y', y)) < r \\ &\implies (x', y') \in B_r^{d_{\max}}((x, y)) \end{aligned}$$

□

**Следствие 31.1.** Произведения метрических пространств по функции  $g(x, y) := (x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}$  для всякого  $\alpha \geq 1$  даёт такую же топологию, что и произведение стандартных топологий на метрических пространствах. В случае  $\alpha = 2$  мы имеем стандартное произведение пространств.

**Теорема 32.** Пусть  $X = \prod_{i \in I} X_i$  — произведение топологических пространств. Тогда координатные проекции  $p_i : X \rightarrow X_i$  непрерывны.



**Доказательство.** Для всякого открытого в  $X_i$  множества  $U$  множество  $p_i^{-1}(U)$  — элемент предбазы тихоновской топологии (по определению), поэтому  $p_i^{-1}(U)$  открыто, а значит  $p_i$  непрерывно.  $\square$

**Определение 31** (отображение в  $X \times Y$ ). Пусть  $X, Y, Z$  — топологические пространства. Любое отображение  $f : Z \rightarrow X \times Y$  имеет вид

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z)), \quad \text{для всех } z \in Z,$$

где  $f_1 : Z \rightarrow X, f_2 : Z \rightarrow Y$  — некоторые отображения, называемые *компонентами* отображения  $f$ .

**Определение 32** (отображение в  $\prod_{i \in I} X_i$ ). Пусть  $Z$  и  $\{X_i\}_{i \in I}$  — топологические пространства. *Компонентами* отображения  $f : Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  называются отображения  $f_i : Z \rightarrow X_i$ , задаваемые формулами

$$f_i := p_i \circ f$$

**Теорема 33** (о покоординатной непрерывности). Пусть  $Z$  и  $\{X_i\}_{i \in I}$  — топологические пространства,  $X = \prod_{i \in I} X_i$  — тихоновское произведение. Тогда отображение  $f : Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  непрерывно тогда и только тогда, когда каждая его компонента  $f_i$  непрерывна.

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ )  $f_i = p_i \circ f$ , при этом  $p_i$  и  $f$  непрерывны, следовательно и  $f_i$  непрерывно.

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $U$  — элемент предбазы тихоновской топологии. Тогда существуют  $i \in I$  и  $V \in \Omega_i$ , что  $U = p_i^{-1}(V)$ , следовательно

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(V)) = (p_i \circ f)^{-1}(V) = f_i^{-1}(V)$$

— открытое множество.

Теперь заметим, что для всякого открытого в  $X$  множества  $W$  существует семейство  $\Sigma$  конечных наборов открытых множеств предбазы, что

$$W = \bigcup_{\Lambda \in \Sigma} \bigcap_{T \in \Lambda} T$$

Следовательно

$$f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\bigcup_{\Lambda \in \Sigma} \bigcap_{T \in \Lambda} T\right) = \bigcup_{\Lambda \in \Sigma} f^{-1}\left(\bigcap_{T \in \Lambda} T\right) = \bigcup_{\Lambda \in \Sigma} \bigcap_{T \in \Lambda} f^{-1}(T)$$

является открытым, поскольку каждое  $f^{-1}(T)$  открыто (т.к.  $T$  — элемент предбазы, для него уже показали), а каждое  $\Lambda$  конечно.  $\square$

*Замечание 5.* Также для проверки на непрерывность  $f : X \rightarrow Y$  достаточно проверить открытость  $f^{-1}(U)$  для всякого  $U$  из какой-либо базы или предбазы  $Y$ .

*Замечание 6.* Развёрнутое утверждение неверно: неверно, что если  $f : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$  непрерывно по каждой координате, то непрерывно и в итоге. Для этого несложно проверить, что подходит

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{если } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{иначе} \end{cases}$$

**Определение 33.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *гомеоморфизмом*, если

1.  $f$  — биекция,
2.  $f$  — непрерывно,
3.  $f^{-1}$  — непрерывно.

**Определение 34.** Если существует гомеоморфизм между  $X$  и  $Y$ , то  $X$  и  $Y$  *гомеоморфны*. Обозначение:  $X \simeq Y$ .

**Теорема 34.** *Гомеоморфность — “отношение эквивалентности” на топологических пространствах.*

**Доказательство.**

- Тожественное отображение (любого топологического пространства) есть гомеоморфизм. Следовательно  $A \simeq A$ .
- Отображение, обратное гомеоморфизму, есть гомеоморфизм. Следовательно  $A \simeq B \leftrightarrow B \simeq A$ .
- Композиция гомеоморфизмов есть гомеоморфизм. Следовательно  $A \simeq B \simeq C \rightarrow A \simeq C$ .

□

*Замечание 7.*

- Гомеоморфизм задаёт биекцию между открытыми множествами в  $X$  и  $Y$ .
- Гомеоморфные пространства неотличимы с точки зрения топологии.

**Определение 35.** *Топологическое свойство* — свойство топологического пространства, которое сохраняется при гомеоморфизмах.

*Топологический инвариант* — характеристика топологического пространства (например, число, группа и т.д.), сохраняющаяся при гомеоморфизмах.

*Замечание.* Для доказательства *негомеоморфности* двух топологических пространств, как правило, находят топологическое свойство или инвариант, который их различает.

*Замечание.* С этого момента *счётным множеством* называется всякое множество  $X$ , что есть инъекция  $X \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Определение 36.** Топологическое пространство удовлетворяет

- *первой аксиоме счётности* (1AC или FAC, *first axiom of countability*), если оно обладает счётными базами во всех своих точках (такое пространство называется “first-countable space”);
- *второй аксиоме счётности* (2AC или SAC, *second axiom of countability*), если оно имеет счётную базу (такое пространство называется “second-countable space”).

**Теорема 35.**  $SAC \Rightarrow FAC$ .

**Доказательство.** Если  $\Sigma$  — база топологии, то для всякого  $a \in X$  множество

$$\Sigma_a := \{U \in \Sigma \mid a \in U\}$$

— база в точке  $a$ . При этом  $|\Sigma_a| \leq |\Sigma|$ , следовательно выполнена FАС.  $\square$

**Теорема 36.** *Всякое метрическое пространство удовлетворяет FАС.*

**Доказательство.** Множество

$$\{B_{\frac{1}{n}}(a)\}_{n=1}^{\infty}$$

является счётной базой топологии в точке  $a$ .  $\square$

**Определение 37.** Топологическое свойство называется *наследственным*, если из того, что пространство  $X$  обладает этим свойством, следует, что любое подпространство пространства  $X$  тоже им обладает.

Топологическое свойство называется *наследственным при произведении*, если из того, что пространства  $X$  и  $Y$  обладают этим свойством, следует, что пространство  $X \times Y$  тоже им обладает.

**Теорема 37.** SAC наследственна и наследственна при произведении.

**Доказательство.**

- Пусть  $Y$  — подпространство пространства  $X$ , удовлетворяющего SAC, а  $\Sigma$  — счётная база  $X$  (существует по SAC). Тогда

$$\Sigma_Y := \{U \cap Y \mid U \in \Sigma\}$$

— база  $Y$ . При этом  $|\Sigma_Y| \leq |\Sigma|$ , следовательно  $Y$  удовлетворяет SAC.

- Пусть  $\Sigma_X$  и  $\Sigma_Y$  — базы топологических пространств  $X$  и  $Y$ , удовлетворяющих SAC. Тогда

$$\Sigma := \{U \times V \mid U \in \Sigma_X \wedge V \in \Sigma_Y\}$$

— база  $X \times Y$ , при этом

$$|\Sigma| \leq |\Sigma_X| \times |\Sigma_Y| \leq |\mathbb{N}| \times |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

т.е.  $\Sigma$  счётно. Следовательно  $X \times Y$  удовлетворяет SAC.  $\square$

**Теорема 38.** *Если пространство удовлетворяет SAC, то из всякого его открытого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.*

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma$  — открытое покрытие  $X$ . По SAC есть счётная база  $\Sigma$ . Рассмотрим

$$\Lambda := \{V \in \Sigma \mid \exists U \in \Gamma : V \subseteq U\}$$

Поскольку всякое  $U$  из  $\Gamma$  является открытым, то представляется в виде объединения элементов из  $\Sigma$ , следовательно  $\Lambda$  непусто. По этой же причине  $\Lambda$  является покрытием  $X$ , так как всякая точка  $X$  покрывается некоторым  $U \in \Gamma$ , которое является объединением элементов из  $\Sigma$ ; но все эти элементы лежат в  $\Lambda$ , значит  $\Lambda$  покрывает  $U$ , а значит и выбранную точку.

Теперь для каждого  $U \in \Lambda$  рассмотрим  $V_U \in \Gamma$ , в котором оно содержится. Определим

$$\Gamma' := \{V_U \mid U \in \Lambda\}$$

Тогда  $\Gamma'$  — покрытие, поскольку  $\Lambda$  является покрытием;  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ;  $|\Gamma'| = |\Lambda| \leq |\Sigma| \leq |\mathbb{N}|$ . Таким образом  $\Gamma'$  — счётное подпокрытие покрытия  $\Gamma$ .  $\square$

**Определение 38.**  $A \subseteq X$  называется *всюду плотным*, если  $\text{Cl}(A) = X$ .

**Лемма 39.** *TFAE:*

- $A$  — всюду плотно.
- $\text{Int}(X \setminus A) = \emptyset$ .
- Всякое непустое открытое множество в  $X$  пересекается с  $A$ .
- Всякая точка  $X$  является точкой прикосновения  $A$ .

**Доказательство.**  $A$  всюду плотно тогда и только тогда, когда  $\text{Cl}(A) = X$ , т.е.  $\text{Int}(X \setminus A) = \emptyset$ .

$\text{Int}(X \setminus A) = \emptyset$  тогда и только тогда, когда нет открытых подмножеств у  $X \setminus A$  кроме  $\emptyset$ , что равносильно тому, что всякое непустое открытое множество содержит точки вне  $X \setminus A$ , т.е. пересекается с  $A$ .

Если всякое непустое открытое множество пересекается с  $A$ , то в любой окрестности любой точки будут точки  $A$ , поэтому всякая точка  $X$  является точкой прикосновения. Если же есть непустое открытое множество, непересекающееся с  $A$ , то оно является окрестностью любой своей точки, а значит все его точки не являются точками прикосновения.  $\square$

**Определение 39.** Топологическое пространство *сепарабельно*, если оно содержит счётное всюду плотное множество.

**Теорема 40.**

1. Если топологическое пространство удовлетворяет SAC, то оно сепарабельно.
2. Метрическое сепарабельное пространство удовлетворяет SAC.

**Доказательство.**

1. По SAC есть счётная база  $\Sigma$ . Рассмотрим  $A$  — множество представителей семейства  $\Sigma$ , т.е. множество выделенных элементов в каждом из множеств в  $\Sigma$ . Тогда  $A$  всюду плотно, но  $|A| \leq |\Sigma| \leq |\mathbb{N}|$ .
2. Пусть  $A$  — счётное, всюду плотное множество. Рассмотрим

$$\Sigma := \{B_{\frac{1}{n}}(a) \mid a \in A \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Пусть  $U$  — некоторое открытое множество, а  $x$  — некоторая его точка. Тогда в  $U$  лежит как подмножество некоторый шар  $B_\varepsilon(x)$ . Рассмотрим некоторое  $\delta \in (0; \varepsilon)$ , что

$$\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\varepsilon - \delta} \geq 1$$

(при  $\delta \rightarrow 0^+$  левая сторона стремится к  $+\infty$ , следовательно найдётся достаточно маленькое  $\delta$ , что неравенство будет выполнено). Заметим, что в  $B_\delta(x)$  есть некоторая точка  $a \in A$  (по свойству  $A$ ). При этом есть  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , что

$$\frac{1}{\delta} \geq n \geq \frac{1}{\varepsilon - \delta}$$

т.е.

$$\delta \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon - \delta$$

Тогда  $d(x, a) < \delta \leq \frac{1}{n}$ , следовательно  $x \in B_{\frac{1}{n}}(a)$ ; но с другой стороны  $\frac{1}{n} \leq \varepsilon - \delta < \varepsilon - d(a, x)$ , поэтому  $B_{\frac{1}{n}}(a) \subseteq B_\varepsilon(x)$ . Так можно для всякой точки  $x \in U$  предоставить шар из  $\Sigma$ , лежащий в  $U$  как подмножество и покрывающий  $x$ , значит  $U$  порождается объединением шаров из  $\Sigma$ . А значит  $\Sigma$  — база.

При этом  $|\Sigma| \leq |A| \times |\mathbb{N} \setminus \{0\}| \leq |\mathbb{N}| \times |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ .

□

**Определение 40.** Топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме отделимости*  $T_1$ , если каждая из любых двух различных точек пространства обладает окрестностью, не содержащей другую из этих точек.

**Теорема 41.**  $X$  удовлетворяет  $T_1$  тогда и только тогда, когда все одноточечные множества замкнуты.

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $x$  — случайная точка  $X$ . По  $T_1$  для всякой точки  $a \in X \setminus \{x\}$  есть окрестность  $U_a$  точки  $a$ , не содержащая  $x$ . Следовательно

$$U := \bigcup_{a \in X \setminus \{x\}} U_a$$

— открытое множество, содержащее каждую точку  $X \setminus \{x\}$  и не содержащее  $x$ . Следовательно  $X \setminus \{x\} = U$  — открыто, значит  $\{x\}$  замкнуто.

( $\Leftarrow$ ) Если  $\{x\}$  замкнуто, то  $X \setminus \{x\}$  открыто. Значит для всяких  $x$  и  $y$  множество  $X \setminus \{x\}$  будет окрестностью  $y$ , не содержащей  $x$ . Таким образом выполнена  $T_1$ .

□

**Определение 41.** Топологическое пространство удовлетворяет *второй аксиоме отделимости*  $T_2$ , если любые две различные точки пространства обладают непересекающимися окрестностями.

Пространства, удовлетворяющие аксиоме  $T_2$ , называются *хаусдорфовыми*.

*Замечание.* Всякое метрическое пространство хаусдорфово.

**Теорема 42.**  $X$  хаусдорфово тогда и только тогда, когда множество  $\{(a, a) \mid a \in X\}$  замкнуто в  $X \times X$ .

**Доказательство.** Обозначим

$$\Delta := \{(a, a) \mid a \in X\}$$

( $\Rightarrow$ ) Покажем, что  $(X \times X) \setminus \Delta$  открыто. Пусть  $(b, c) \notin \Delta$ . Тогда по  $T_2$  есть окрестности  $U_b$  и  $U_c$  точек  $b$  и  $c$  в  $X$ , что  $U_b \cap U_c = \emptyset$ . Следовательно  $(U_b \times U_c) \cap \Delta = \emptyset$ , тогда  $U_b \times U_c$  — окрестность  $(b, c)$ , лежащая в  $(X \times X) \setminus \Delta$  как подмножество.

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $b$  и  $c$  — различные точки  $X$ . Тогда  $(b, c) \notin \Delta$ . Поскольку  $\Delta$  замкнуто, то  $(X \times X) \setminus \Delta$  открыто. Поскольку  $\{U \times V \mid U, V \in \Omega_X\}$  — база  $X \times X$ , то есть некоторые открытые в  $X$  множества  $U$  и  $V$ , что

$$(b, c) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta.$$

Следовательно  $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ , а значит  $U \cap V = \emptyset$ . При этом  $b \in U$ , а  $c \in V$ . Значит  $U$  и  $V$  — непересекающиеся окрестности  $b$  и  $c$ . Поскольку  $b$  и  $c$  случайны, то выполнена  $T_2$ .

□

**Определение 42.** Топологическое пространство удовлетворяет *третьей аксиоме отделимости*  $T_3$ , если в нём любое замкнутое множество и любая не содержащаяся в этом множестве точка обладают непересекающимися окрестностями.

Пространства, одновременно удовлетворяющие аксиомам  $T_1$  и  $T_3$ , называются *регулярными*.

**Теорема 43.**  $X$  удовлетворяет  $T_3$  тогда и только тогда, когда для любой окрестности  $U_a$  любой точки  $a$  есть такая окрестность  $V_a$  точки  $a$ , что  $\text{Cl}(V_a) \subseteq U_a$ .

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $U_a$  — некоторая окрестность некоторой точки  $a$  в  $X$ . Тогда  $X \setminus U_a$  замкнуто. По  $T_3$  у  $X \setminus U_a$  и  $a$  есть непересекающиеся окрестности  $W_a$  и  $V_a$  соответственно. Тогда  $X \setminus W_a$  замкнуто; при этом  $W_a \supseteq X \setminus U_a$ , следовательно  $X \setminus W_a \subseteq U_a$ ; аналогично имеем, что  $V_a \subseteq X \setminus W_a$ . Следовательно

$$\text{Cl}(V_a) \subseteq X \setminus W_a \subseteq U_a.$$

Таким образом мы нашли искомую окрестность  $V_a$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть даны замкнутое  $F$  и точка  $a$  вне него. Тогда  $U_a := X \setminus F$  — окрестность  $a$ . Тогда есть окрестность  $V_a$  точки  $a$ , что  $\text{Cl}(V_a) \subseteq U_a$ . Следовательно  $\text{Int}(X \setminus V_a) \supseteq X \setminus U_a = F$ . Значит  $\text{Int}(X \setminus V_a)$  и  $V_a$  — непересекающиеся окрестности  $F$  и  $a$ .

□

**Определение 43.** Топологическое пространство удовлетворяет *четвёртой аксиоме отделимости*  $T_4$ , если в нём любые два непересекающихся замкнутых множества обладают непересекающимися окрестностями.

Пространства, одновременно удовлетворяющие аксиомам  $T_1$  и  $T_4$ , называются *нормальными*.

**Теорема 44.**  $X$  удовлетворяет  $T_4$  тогда и только тогда, когда для любой окрестности  $U_A$  любого замкнутого множества  $A$  есть такая окрестность  $V_A$  множества  $A$ , что  $\text{Cl}(V_A) \subseteq U_A$ .

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $U_A$  — некоторая окрестность некоторого замкнутого множества  $A$ . Тогда  $X \setminus U_A$  замкнуто. По  $T_4$  у  $X \setminus U_A$  и  $A$  есть непересекающиеся окрестности  $W_A$  и  $V_A$  соответственно. Тогда  $X \setminus W_A$  замкнуто; при этом  $W_A \supseteq X \setminus U_A$ , следовательно  $X \setminus W_A \subseteq U_A$ ; аналогично имеем, что  $V_A \subseteq X \setminus W_A$ . Следовательно

$$\text{Cl}(V_A) \subseteq X \setminus W_A \subseteq U_A.$$

Таким образом мы нашли искомую окрестность  $V_A$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть даны замкнутые непересекающиеся  $F$  и  $G$  вне него. Тогда  $U_G := X \setminus F$  — окрестность  $G$ . Тогда есть окрестность  $V_G$  множества  $G$ , что  $\text{Cl}(V_G) \subseteq U_G$ . Следовательно  $\text{Int}(X \setminus V_G) \supseteq X \setminus U_G = F$ . Значит  $\text{Int}(X \setminus V_G)$  и  $V_G$  — непересекающиеся окрестности  $F$  и  $G$ .

□

**Теорема 45.** “ $X$  нормально”  $\Rightarrow$  “ $X$  регулярно”  $\Rightarrow$  “ $X$  хаусдорфово”  $\Rightarrow$  “ $X$  удовлетворяет  $T_1$ ”.

**Доказательство.** По  $T_1$  любое одноточечное множество замкнуто. Следовательно рассматривая как замкнутое множество конкретную точку можно получить следствия  $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$ . Последнее же следствие теоремы очевидно: нужно всего лишь выкинуть аксиому  $T_2$ . □

**Теорема 46.** Всякое метрическое пространство нормально.

**Доказательство.** Очевидно, что всякое метрическое пространство удовлетворяет  $T_1$ . Значит осталось проверить  $T_4$ .

Пусть даны замкнутые непересекающиеся множества  $A$  и  $B$ . Тогда  $X \setminus B$  — окрестность  $A$ . Значит для всякого  $x \in A$  есть  $r_x > 0$ , что  $B_{r_x}(x) \subseteq X \setminus B$ , т.е.  $B_{r_x}(x) \cap B = \emptyset$ . Рассмотрим

$$U_A := \bigcup_{x \in A} B_{r_x/2}(x);$$

аналогично определим  $U_B$ . Очевидно, что  $U_A$  и  $U_B$  — окрестности  $A$  и  $B$ . Покажем, что  $U_A \cap U_B = \emptyset$ .

Предположим противное, т.е. есть  $a \in A$  и  $b \in B$ , что  $B_{r_a/2}(a) \cap B_{r_b/2}(b)$  содержит некоторую точку  $x$ . Тогда

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{r_a}{2} + \frac{r_b}{2}$$

WLOG  $r_a \geq r_b$ . Тогда

$$d(a, b) < \frac{r_a}{2} + \frac{r_b}{2} \leq r_a,$$

т.е.  $b \in B_{r_a}(a)$ . Но мы знаем, что  $B_{r_a}(a) \cap B = \emptyset$  — противоречие. Значит  $U \cap V = \emptyset$ .

Таким образом для случайных непересекающихся замкнутых  $A$  и  $B$  мы построили их непересекающиеся окрестности. Значит выполнена  $T_4$ .  $\square$

**Лемма 47.**

1. Аксиома  $T_1$ , хаусдорфовость и регулярность наследуются подпространствами и произведениями.
2. Существует нормальное пространство  $X$  и подпространство  $Y$  в нём, не являющееся нормальным.
3. Существуют нормальные пространства  $X$  и  $Y$  такие, что  $X \times Y$  не является нормальным.

**Доказательство.**

Доказать. Пока лень...

$\square$

**Определение 44.** Топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества.

**Теорема 48.** *TFAE*

- $X$  связно.
- $X$  нельзя разбить на два непустых замкнутых множества.
- Любое подмножество  $X$ , открытое и замкнутое одновременно, либо пусто, либо совпадает со всем пространством  $X$ .
- Не существует сюръективного непрерывного отображения из  $X$  в  $\{0; 1\}$  с дискретной топологией.

**Доказательство.**

- $X$  связно тогда и только тогда, когда его нельзя разбить на два непустых открытых множества. Заменяя множества разбиения на их дополнения, получаем, что  $X$  нельзя разбить на два непустых открытых множества тогда и только тогда, когда  $X$  нельзя разбить на два несовпадающих с  $X$  замкнутых множества, что равносильно разбиению на два непустых замкнутых множества.
- $X$  нельзя разбить на два непустых открытых множества тогда и только тогда, когда всякое непустое открытое множество не имеет непустого открытого дополнения в  $X$ . Т.е. всякое открытое множество либо совпадает с  $\emptyset$  или  $X$ , либо не является замкнутым, что равносильно тому, что всякое открытое замкнутое множество является либо  $\emptyset$ , либо  $X$ .
- Сюръективное непрерывное отображение из  $X$  в  $\{0; 1\}$  с дискретной топологией равносильно разложению  $X$  на два открытых непустых множества. Так как прообразы 0 и 1 являются множествами, дополняющими друг друга до  $X$ ; при этом сюръективность равносильна непустоте обоих, а непрерывность — открытости обоих.

□

*Замечание.* Когда говорят, что какое-то множество связно, всегда имеют в виду, что множество лежит в некотором топологическом пространстве (в каком именно — должно быть ясно из контекста) и что с индуцированной этим включением топологией оно является связным пространством.

**Теорема 49.** Пусть  $X \subseteq \mathbb{R}$ . TFAE

- $X$  связно.
- $X$  выпукло, т.е. для всяких  $a, b \in X$ , что  $a < b$  отрезок  $[a; b] \subseteq X$ .
- $X$  есть интервал (в широком смысле), точка или  $\emptyset$ .

**Доказательство.**

- Пусть  $X$  связно. Пусть есть такие  $a, b \in X$ , что  $[a; b] \not\subseteq X$ , значит есть  $c \in (a; b)$ , что  $c \notin X$ . Заметим, что  $(-\infty; c)$  и  $(c; +\infty)$  открыты. При этом

$$X = (X \cap (-\infty; c)) \sqcup (X \cap (c; +\infty))$$

Заметим, что  $X \cap (-\infty; c)$  и  $X \cap (c; +\infty)$  открыты в  $X$ , значит  $X$  несвязно — противоречие.

- Пусть  $X$  выпукло. Тогда  $X \supseteq (\inf X; \sup X)$ , где  $\inf$  и  $\sup$  могут принимать значения  $\pm\infty$ . Если  $\inf X < \sup X$ , то  $X$  — интервал с концами  $\inf X$  и  $\sup X$  (каким интервалом  $X$  является — вопрос про то, лежат ли  $\inf X$  и  $\sup X$  в самом  $X$ ); иначе  $X$  — точка или  $\emptyset$ .
- Пусть  $X$  — интервал (в широком смысле), точка или  $\emptyset$ . Если  $X$  — точка или  $\emptyset$ , то очевидно, что  $X$  — связно. Поэтому покажем, что если  $X$  — интервал в широком смысле, то оно связно.

Пусть  $X$  раскладывается в объединение двух непустых открытых  $A$  и  $B$ . Заметим, что ни одно из  $A$  и  $B$  не могут состоять только из концов  $X$  (так как должны содержать и некоторую окрестность). Значит  $X' = X$  без своих концов — раскладывается в объединение двух непустых открытых  $A' := A \cap X'$  и  $B' := B \cap X'$ . Значит  $A'$  и  $B'$  являются объединением непересекающихся интервалов. Пусть  $I$  — некоторый интервал из разложения  $A'$ , а  $t$  — его конец. Понятно, что  $A'$  открыто в  $\mathbb{R}$ , значит  $t \notin A'$ . Если  $t \in X'$ , то  $t \in B'$ , значит некоторая окрестность  $t$  лежит в  $B'$ , а тогда  $B'$  и  $I$  пересекаются, следовательно  $A'$  и  $B'$



тоже — противоречие. Таким образом никакой конец  $I$  не лежит в  $X'$ , значит концы  $I$  совпадают с концами  $X'$ , т.е.  $I = X'$ ; следовательно  $A' = X'$ ,  $B' = \emptyset$  — противоречие. Значит  $X'$  и  $X$  связны.

□

**Теорема 50** (Непрерывный образ связного пространства связан). *Если  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение и пространство  $X$  связно, то и множество  $f(X)$  связно.*

**Доказательство.** Предположим противное: пусть  $f(X)$  несвязно. Тогда  $f(X) = U \cup V$ ,  $U \cap V = \emptyset$ , где  $U, V$  непусты и открыты. Следовательно, мы имеем разбиение пространства  $X$  на два непустых открытых множества —  $f^{-1}(U)$  и  $f^{-1}(V)$ , что противоречит связности  $X$ . □

**Следствие 50.1.** Связность — топологическое свойство.

**Теорема 51** (о промежуточном значении). *Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывное отображение, а  $X$  связно. Тогда для любых  $a, b \in f(X)$  множество  $f(X)$  содержит все числа между  $a$  и  $b$ .*

**Доказательство.**  $f(X)$  связно, значит выпукло, значит содержит  $[a; b]$ . □

**Определение 45.** Компонентой связности пространства  $X$  называется всякое его связное подмножество, не содержащееся ни в каком другом (строго большем) связном подмножестве пространства  $X$ . (Компонента связности пространства  $X$  — максимальное по включению связное множество в  $X$ .)

**Лемма 52.** Объединение любого семейства попарно пересекающихся связных множеств связно.

**Доказательство.** Пусть  $\Sigma$  — семейство попарно пересекающихся связных множеств в  $X$ . Определим

$$Y := \bigcup_{A \in \Sigma} A$$

Предположим противное:  $Y$  раскладывается в объединение непересекающихся открытых в  $Y$  множеств  $U$  и  $V$ . Несложно видеть, что для всякого  $A \in \Sigma$  множества  $U \cap A$  и  $V \cap A$  открыты в  $A$ , не пересекаются, а в объединении дают  $A$ ; следовательно одно из них совпадает с  $A$ , а другое с  $\emptyset$ . Т.е.  $A$  является подмножеством одного из  $U$  и  $V$ , а с другим не пересекается.

Пусть  $A, B \in \Sigma$ . Пусть  $A \subseteq U$ . Тогда  $B$  пересекается с  $U$ , так как пересекается с  $A$ . Значит  $B \subseteq U$ , а  $B \cap V = \emptyset$ . Таким образом если одно из  $U$  и  $V$  содержит как подмножество какой-то элемент  $\Sigma$ , то содержит как подмножества все элементы  $\Sigma$ , а значит и  $Y$ ; следовательно другое пусто — противоречие.

Таким образом  $Y$  связно. □

**Теорема 53.**

1. Каждая точка пространства  $X$  содержится в некоторой компоненте связности.
2. Различные компоненты связности пространства  $X$  не пересекаются.

**Доказательство.**

1. Пусть  $x$  — некоторая точка  $X$ . Пусть  $A_x$  — объединение всех связных множеств, содержащих  $x$  (при этом  $A$  определено корректно, так как  $\{x\}$  связно). Таким образом  $A_x$  является максимальным по включению связным множеством, так как если есть некоторое связное  $B$ , что  $B \supsetneq A_x$ , то  $B$  — связное множество, содержащее  $x$ , а тогда  $B \subseteq A_x$  — противоречие. Значит  $A_x$  — компонента связности, содержащая  $x$ .

2. Если  $U$  и  $V$  — различные компоненты связности  $X$  — пересекаются, то  $U \subsetneq U \cup V$ , а  $U \cup V$  — компонента связности по доказанной теореме. Таким образом  $U$  не максимальное по включению, но связное множество — противоречие с определением компоненты связности.

□

**Следствие 53.1.** Компоненты связности составляют разбиение топологического пространства. (Напомним, что разбиение множества — это его покрытие попарно непересекающимися подмножествами.)

**Следствие 53.2.**

1. Любое связное множество содержится в некоторой связной компоненте пространства как подмножество.
2. Две точки содержатся в одной компоненте связности тогда и только тогда, когда они содержатся в одном связном множестве.
3. Пространство несвязно тогда и только тогда, когда оно имеет как минимум две компоненты связности.

**Следствие 53.3.** Число компонент связности является топологическим инвариантом.

**Теорема 54.** Замыкание связного множества связно.

**Доказательство.** Пусть дано связное множество  $A$  в пространстве  $X$ . Предположим противное:  $\text{Cl}(A)$  разбивается на два замкнутых в  $\text{Cl}(A)$  непустых множествах  $U$  и  $V$ . Поскольку  $\text{Cl}(A)$  замкнуто, то  $U$  и  $V$  замкнуты в  $X$ , следовательно  $U \cap A$  и  $V \cap A$  замкнуты в  $A$ . Из связности  $A$  следует, что  $WLOG U \cap A = A, V \cap A = \emptyset$ , т.е.  $A \subseteq U, A \cap V = \emptyset$ . Соответственно из замкнутости  $U$  следует, что  $\text{Cl}(A) \subseteq U$ . Следовательно  $U = \text{Cl}(A)$ , а  $V = \emptyset$  — противоречие. □

**Следствие 54.1.** Компоненты связности замкнуты.

**Определение 46.** Путём в топологическом пространстве  $X$  называется непрерывное отображение  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ . Началом пути  $\alpha$  называется точка  $\alpha(0)$ , концом — точка  $\alpha(1)$ . При этом говорят, что путь  $\alpha$  соединяет точку  $\alpha(0)$  сточкой  $\alpha(1)$ .

**Определение 47.** Топологическое пространство называется *линейно связным*, если в нём любые две точки можно соединить путём.

*Замечание.* Линейно связным множеством называют подмножество топологического пространства (какого именно, должно быть ясно из контекста), линейно связное как пространство с топологией, индуцированной из объемлющего пространства.

**Теорема 55.** Пусть даны линейно связное пространство  $X$  и непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$ . Тогда и пространство  $f(X)$  линейно связно.

**Доказательство.** Если  $\alpha$  — путь, соединяющий точки  $a$  и  $b$  из  $X$ , то  $f \circ \alpha$  — путь, соединяющий точки  $f(a)$  и  $f(b)$  из  $f(X)$ . □

**Следствие 55.1.** Линейная связность — топологическое свойство.

**Следствие 55.2.** Число компонент линейной связности является топологическим инвариантом.

*Предупреждение: “немного опережая события”.*

**Лемма 56.** *Соединимость путём — отношение эквивалентности на множестве точек пространства.*

**Доказательство.**

- (Рефлексивность.) Для всякой точки  $a \in X$  путь

$$\alpha : [0; 1] \rightarrow X, t \mapsto a$$

соединяет  $a$  с собой.

- (Симметричность.) Для всякого пути  $\alpha$  из точки  $a$  в точку  $b$  отображение

$$\beta : [0; 1] \rightarrow X, t \mapsto \alpha(1 - t)$$

является путём из  $b$  в  $a$ .

- (Транзитивность.) Для всякого пути  $\alpha$  из  $a$  в  $b$  и всякого пути  $\beta$  из  $b$  в  $c$  отображение

$$\gamma : [0; 1] \rightarrow X, t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{если } t \in [0; \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1) & \text{если } t \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

— путь из  $a$  в  $c$ .

□

**Определение 48.** *Компонентой линейной связности пространства  $X$  называется класс эквивалентности отношения соединимости путём.*

**Упражнение 1.** 1. Объединение любого семейства попарно пересекающихся линейно связных множеств линейно связно.

2. Приведите пример линейно связного множества, замыкание которого не является линейно связным.

3. Приведите пример незамкнутой компоненты линейной связности.

**Теорема 57.** *В топологическом пространстве, каждая точка которого имеет линейно связную окрестность,*

1. *компоненты линейной связности открыты;*

2. *компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности.*

**Доказательство.**

1. Пусть  $W$  — компонента линейной связности,  $a \in W$  и  $U$  — линейно связная окрестность точки  $a$ . Тогда  $U \subseteq W$ , что влечёт открытость  $W$ .

2. Пусть  $\Sigma$  — компоненты линейной связности пространства. По предыдущему пункту, каждое  $W$  из  $\Sigma$  открыто. Пусть  $A$  — компонента связности. В силу связности,  $A$  не может пересекать несколько разных элементов  $\Sigma$ , так как иначе будет иметь разбиение на открытые множества. Значит  $A$  содержится в некотором  $W$  из  $\Sigma$ . Отсюда,  $W = A$ .

□

**Лемма 58.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства, а  $f : X \rightarrow Y$  — гомеоморфизм. Тогда для любой точки  $a \in X$  пространства  $X \setminus \{a\}$  и  $Y \setminus \{f(a)\}$  гомеоморфны.

**Теорема 59.** Следующие пространства попарно негомеоморфны:  $[0; 1]$ ,  $[0; 1)$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $S^1$ .

**Доказательство.** У  $[0; 1]$  можно удалить максимум 2 точки, чтобы оно осталось связным, у  $[0; 1)$  и  $S^1$  — по одной, а у  $\mathbb{R}$  — ноль. Следовательно если какие-то из этих пространств гомеоморфны, то только  $[0; 1)$  и  $S^1$ . Но у  $S^1$  какую точку ни удали, оно останется связным, а у  $[0; 1)$  — только 0; следовательно  $[0; 1)$  негомеоморфно  $S^1$ .  $\square$

**Теорема 60.**  $\mathbb{R}^2$  негомеоморфно никакому интервалу (в широком смысле) и  $S^1$ .

**Доказательство.** Если из  $\mathbb{R}^2$  выколоть любое конечное множество точек, то множество останется связным. С другой стороны этим свойством не обладают ни интервалы в широком смысле, ни  $S^1$ .  $\square$

**Определение 49.** Топологическое пространство *компактно*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

*Замечание.* Когда говорят, что какое-то множество *компактно*, всегда имеют в виду, что это множество лежит в топологическом пространстве и что, будучи наделено индуцированной топологией, оно является компактным пространством.

*Замечание.* При определении компактности множества можно использовать два эквивалентных подхода. Первый подход — рассматривать открытые множества в подпространстве. Вторым — рассматривать открытые множества в исходном пространстве.

**Теорема 61.** Отрезок  $[0; 1]$  компактен.

**Доказательство.** Пусть дано некоторое открытое покрытие  $\Sigma$  отрезка  $[0; 1]$ . Обозначим  $I_0 := [0; 1]$ .

Построим индуктивно последовательность  $(I_n)_{n=0}^\infty$  отрезков, которые не покрываются конечным подпокрытием  $\Sigma$ .  $I_0$  уже определён. Если  $I_n$  построен, то разделим его пополам; если оба отрезка-половины покрываются конечными подпокрытиями  $\Sigma$ , значит и  $I_n$  покрывается. Таким образом одна из “половин”  $I_n$  не покрывается: её и обозначим за  $I_{n+1}$ .

Так мы получили последовательность вложенных отрезков, значит по аксиоме полноты есть точка  $c$ , лежащая во всех них. Заметим, что  $c$  покрывается  $\Sigma$ , значит есть некоторый элемент  $U$  покрытия  $\Sigma$ , который покрывает  $c$ . Но поскольку  $\Sigma$  — открытое покрытие, то  $U$  открыто и, следовательно, покрывает некоторую окрестность  $c$ , а с ней и все отрезки последовательности  $(I_n)_{n=0}^\infty$ , начиная с некоторого — противоречие с непокрываемостью конечным подпокрытием  $\Sigma$ .  $\square$

**Теорема 62.** Пусть  $X$  — компактное пространство и  $A$  — замкнутое подмножество. Тогда  $A$  компактно.

**Доказательство.** Пусть  $\Sigma$  — открытое в  $X$  покрытие  $A$ . Поскольку  $X \setminus A$  — открытое, то  $\Sigma \cup \{X \setminus A\}$  — открытое покрытие  $X$ , следовательно из него можно выделить конечное подпокрытие. Убрав из него, если нужно,  $X \setminus A$ , получим конечное подпокрытие  $\Sigma$  множества  $A$ .  $\square$

**Теорема 63.** Пусть  $X, Y$  — компактные пространства. Тогда и пространство  $X \times Y$  компактно.

**Доказательство.** Пусть  $\Sigma$  — некоторое покрытие  $X \times Y$ . Заметим, что, заменив всякое открытое в  $\Sigma$  на элементы базы  $X \times Y$  в качестве объединения которых оно раскладывается, можно свести задачу поиска конечного подпокрытия к новому покрытию. Восстановление подпокрытия для старого покрытия просто: нужно просто для каждого элемента конечного подпокрытия нового покрытия найти тот элемент старого покрытия, который содержит его как подмножество. Тогда получится конечное подпокрытие старого покрытия.

Для каждой точки  $x$  заметим, что  $\Sigma$  является покрытием слоя  $\{x\} \times Y$ . Несложно понять, что этот слой компактен, и выделить из него конечное подпокрытие  $\Lambda_x$ . Рассмотрим

$$W_x := \bigcap_{\substack{U \times V \in \Lambda_x \\ U \subseteq X \\ V \subseteq Y}} U_x$$

Поскольку  $W_x$  открыто, то  $\{W_x\}_{x \in X}$  — покрытие. Тогда мы можем из него выделить конечное подпокрытие  $\{W_{x_i}\}_{i=1}^n$ . Тогда  $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_{x_i}$  — конечное подпокрытие  $\Sigma$  пространства  $X \times Y$ .  $\square$

**Теорема 64** (Тихонова). Пусть  $\{X_i\}_{i \in I}$  — семейство компактных топологических пространств. Тогда тихоновское произведение  $X = \prod_{i \in I} X_i$  компактно.

**Доказательство.** Пусть  $\Sigma$  — покрытие  $X$ . WLOG можно считать, что  $\Sigma$  — подмножество базы тихоновской топологии, причём в качестве базы мы возьмём всевозможные конечные пересечения стандартной предбазы этой же топологии. Несложно видеть, что данная база выглядит как

$$\bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ |J| < |\mathbb{N}|}} \left\{ \left( \bigtimes_{i \in I \setminus J} X_i \right) \times \left( \bigtimes_{j \in J} U_j \right) \mid \forall j \in J \quad U_j \in \Omega_j \right\},$$

т.е. произведение открытых множеств топологических пространств из конечного подсемейства  $\{X_i\}_{i \in I}$  и остальных топологических пространств. (Для конечного множества пространств  $X_i$  верно, что в них есть точка  $x_i$ , не имеющая соответствующего координатного прообраза  $(p_i^{-1}(x_i) \cap U = \emptyset)$  в данном открытом множестве  $U$ .)

Заметим, что ...

Просто попытка. Не получилось. Нужна трансфинитная индукция или рекурсия... Сама теорема — анонс.

$\square$

**Теорема 65.** Пусть  $X$  — хаусдорфово пространство, а  $A \subseteq X$  — компакт. Тогда  $A$  замкнуто в  $X$ .

**Доказательство.** Пусть  $b$  — некоторая точка  $X \setminus A$ . Покажем, что  $b$  является внутренней для  $X \setminus A$ .

Для всякой точки  $a \in A$  найдутся непересекающиеся окрестности  $U_a$  и  $V_a$  точек  $a$  и  $b$ . Тогда  $\{U_a\}_{a \in A}$  — открытое покрытие  $A$ , значит найдётся конечное подпокрытие  $\{U_{a_1}; \dots; U_{a_n}\}$ . Получим, что

$$V := \bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$$

— окрестность  $b$ , непересекающаяся с  $\bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$  — окрестностью  $A$ . Таким образом  $V \subseteq X \setminus A$ . Следовательно  $b$  внутренняя точка  $X \setminus A$ . Значит  $A$  замкнуто в  $X$ .  $\square$

**Теорема 66.** Если пространство  $X$  хаусдорфово и компактно, то оно нормально.

**Доказательство.** Покажем, что  $X$  удовлетворяет  $T_3$ ;  $T_1$  следует из  $T_2$ .

Пусть  $A$  замкнуто в  $X$  и  $b$  — некоторая точка  $X \setminus A$ . Поскольку  $A$  — замкнутое подмножество компакта, то само является компактом.

Для каждой точки  $a$  множества  $A$  выделим непересекающиеся окрестности  $U_a$  и  $V_a$  точек  $a$  и  $b$  (они существуют по хаусдорфовости). Тогда  $\{U_a\}_{a \in A}$  — покрытие  $A$ , значит по компактности из него можно выделить конечное подпокрытие  $\{U_{a_i}\}_{i=1}^n$ . Таким образом

$$U := \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \quad \text{и} \quad V := \bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$$

являются непересекающимися окрестностями  $A$  и  $b$ . Поскольку  $A$  и  $b$  случайны, то  $T_3$  выполнена.

Теперь так же покажем выполняемость  $T_4$ . Пусть  $A$  и  $B$  — непересекающиеся замкнутые множества и, как следствие, компактны. Для каждой точки  $a$  множества  $A$  рассмотрим непересекающиеся окрестности  $U_a$  и  $V_a$  точки  $a$  и множества  $B$  (они существуют по  $T_3$ ). Тогда  $\{U_a\}_{a \in A}$  — покрытие  $A$ , значит по компактности из него можно выделить конечное подпокрытие  $\{U_{a_i}\}_{i=1}^n$ . Таким образом

$$U := \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \quad \text{и} \quad V := \bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$$

являются непересекающимися окрестностями  $A$  и  $B$ . Поскольку  $A$  и  $B$  случайны, то  $T_4$  выполнена.

Таким образом выполнены  $T_3$  и  $T_1$ , и следовательно  $X$  нормально.  $\square$

**Определение 50.** Пусть дано метрическое пространство  $(X, d)$ . Множество  $A \subseteq X$  называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре пространства  $X$ .

**Определение 51.** Пусть дано метрическое пространство  $(X, d)$ . *Диаметр* множества  $A \subseteq X$  — величина

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

**Лемма 67.** Пусть дано метрическое пространство  $(X, d)$ . Тогда для всякого множества  $A \subseteq X$  верно, что оно ограничено тогда и только, когда  $\text{diam}(A) < +\infty$ .

**Теорема 68.** Компактное метрическое пространство ограничено.

**Доказательство.** Возьмём любую точку  $x$  нашего пространства  $X$  и рассмотрим покрытие его всевозможными шарами  $B_r(x)$ ,  $r > 0$ . По компактности будет конечное подпокрытие  $\{B_{r_i}(x)\}_{i=1}^n$ . Значит всё пространство покрывается шаром  $B_r(x)$ , где  $r = \max(r_1, \dots, r_n)$ , т.е.  $X$  ограничено.  $\square$

**Следствие 68.1.** Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

**Доказательство.** Метрическое пространство хаусдорфово, а компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут.  $\square$

**Теорема 69.** Множество в  $\mathbb{R}^n$  компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ ) Очевидно по предыдущему следствию.

( $\Leftarrow$ ) Множество  $A$  ограничено в  $\mathbb{R}^n$ , следовательно содержится в кубе  $[-a; a]^n$ . Поскольку каждый из отрезков  $[-a; a]$  компактен, то их произведение — куб  $[-a; a]^n$  — компактно. Следовательно  $A$  — замкнутое подмножество компакта, а значит само компактно.

□

**Определение 52.** Набор подмножеств множества  $X$  *центрирован*, если пересечение любого его конечный поднабора множеств непусто.

**Теорема 70.**  $X$  компактно тогда и только тогда, когда любой центрированный набор замкнутых множеств в  $X$  имеет непустое пересечение.

**Доказательство.** Заметим, что  $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$  — покрытие  $X$  тогда и только тогда, когда  $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ .

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\{A_i\}_{i \in I}$  — центрированный набор замкнутых множеств. Тогда  $\{B_i\}_{i \in I} := \{X \setminus A_i\}_{i \in I}$  — набор открытых множеств, что никакое их конечное подмножество не является покрытием  $X$ . Следовательно по компактности  $X$  и весь набор  $\{B_i\}_{i \in I}$  не является покрытием. Значит пересечение  $A_i$ ,  $i \in I$  непусто.

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $\{A_i\}_{i \in I}$  — покрытие  $X$ . Следовательно  $\{B_i\}_{i \in I} := \{X \setminus A_i\}_{i \in I}$  — набор замкнутых множеств с пустым общим пересечением. Значит оно не центрировано, что значит, что есть конечный набор  $\{B_{i_k}\}_{k=1}^n$  у которого пустое пересечение. Следовательно  $\{A_{i_k}\}_{k=1}^n$  является конечным подпокрытием изначального покрытия.

□

**Следствие 70.1.** Пусть  $X$  — топологическое пространство, а  $\{A_i\}_{i \in I}$  — центрированный набор замкнутых множеств в  $X$ , хотя бы одно из которых компактно. Тогда  $\bigcap_{i \in I} A_i$  непусто.

**Следствие 70.2.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $\{A_i\}_{i \in I}$  — линейно упорядоченный по включению набор непустых замкнутых множеств в  $X$ , хотя бы одно из которых компактно. Тогда  $\bigcap_{i \in I} A_i$  непусто.

**Теорема 71.** Пусть даны непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$  и компактное пространство  $X$ . Тогда и пространство  $f(X)$  компактно.

**Доказательство.** Пусть  $\Sigma$  — открытое покрытие  $f(X)$ . Тогда

$$\Lambda := \{f^{-1}(U) \mid U \in \Sigma\}$$

— покрытие  $X$ . По компактности  $X$  у него есть конечное подпокрытие  $\Lambda'$ . Значит

$$\Sigma' := \{f(V) \mid V \in \Lambda'\}$$

будет конечным подпокрытием  $\Sigma$ . Следовательно  $f(X)$  компактно.

□

**Следствие 71.1.** Компактность — топологическое свойство.

**Теорема 72** (Вейерштрасса). Если  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция и пространство  $X$  компактно, то  $f(x)$  достигает наибольшего и наименьшего значений.

**Доказательство.**  $f(X)$  компактно. Следовательно замкнуто и ограничено. Значит содержит свои инфимум и супремум.

□

**Теорема 73.** Если  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывная биекция компактного пространства  $X$  на хаусдорфово пространство  $Y$ , то  $f$  — гомеоморфизм.

**Доказательство.** Для гомеоморфизма  $f$  не хватает только обратной непрерывности. Покажем, что образ всякого замкнутого замкнут, и тогда обратная непрерывность будет обеспечена.

Пусть  $V$  — замкнутое подмножество компакта  $X$ . Значит  $V$  — компакт. Следовательно  $f(V)$  — компакт как непрерывный образ компакта. И тогда  $f(V)$  замкнуто, так как является компактом в хаусдорфовом пространстве.  $\square$

**Определение 53.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *вложением*, если  $f$  — гомеоморфизм между  $X$  и  $f(X)$ . Иначе говоря,  $f$  — вложение, если

- $f$  непрерывно;
- $f$  — инъекция;
- $f^{-1}$  непрерывно на области определения.

**Следствие 73.1.** Если  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывная инъекция компактного пространства  $X$  в хаусдорфово пространство  $Y$ , то  $f$  — вложение.

**Лемма 74** (Лебега). Пусть даны компактное метрическое пространство  $X$  и его открытое покрытие  $\Sigma$ . Тогда существует такое  $r > 0$ , что любой шар радиуса  $r$  содержится в одном элементе покрытия.

**Определение 54.** Число  $r$  называется *числом Лебега* покрытия  $\Sigma$ .

**Доказательство.** Для всякого  $x \in X$  есть некоторое  $r_x > 0$ , что шар  $B_{r_x}(x)$  содержится как подмножество некоторого элемента  $\Sigma$ .

Понятно, что  $\{B_{r_x/2}(x)\}_{x \in X}$  — открытое покрытие  $X$ . Следовательно у него есть конечное подпокрытие  $\{B_{r_{x_i}/2}(x_i)\}_{i=1}^n$ . Тогда определим  $r := \min\{r_{x_i}/2\}_{i=1}^n$ .

Если  $y$  — некоторая точка  $X$ , то  $y$  лежит в некотором шаре  $B_{r_{x_k}/2}(x_k)$ . Следовательно

$$B_r(y) \subseteq B_{r_{x_k}}(x_k),$$

т.е. шар  $B_r(y)$  является подмножеством некоторого элемента  $\Sigma$ . Поскольку утверждение не зависит от  $y$ , то  $r$  является числом Лебега покрытия  $\Sigma$ .  $\square$

**Следствие 74.1.** Пусть даны компактное метрическое пространство  $X$ , топологическое пространство  $Y$ , непрерывное  $f : X \rightarrow Y$  и открытое покрытие  $\Sigma$  множества  $Y$ . Тогда существует  $r > 0$ , что для всякой точки  $a$  из  $X$  множество  $f(B_r(a))$  содержится как подмножество в одном из элементов  $\Sigma$ .

**Доказательство.** Применим лемму Лебега к покрытию  $\{f^{-1}(U) \mid U \in \Sigma\}$ .  $\square$

**Определение 55.** Пусть даны метрические пространства  $(X, d_X)$  и  $(Y, d_Y)$ . Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *равномерно непрерывным*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall a, b \in X \quad d_X(a, b) < \delta \longrightarrow d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$$

**Теорема 75.** Пусть даны метрические пространства  $X$  и  $Y$ . Тогда если  $X$  компактно, то любое непрерывное  $f : X \rightarrow Y$  будет равномерно непрерывным.

**Доказательство.** Применим лемму Лебега для отображения  $f$  и покрытия пространства  $Y$  шарами радиуса  $\varepsilon/2$ .  $\square$



**Определение 56.** Пусть  $(a_n)_{n=0}^\infty$  — последовательность точек топологического пространства  $X$ . Точка  $b \in X$  называется её *пределом*, если для всякой окрестности  $U$  точки  $b$  есть  $N \in \mathbb{N}$  такое, что  $a_n \in U$  для всех  $n > N$ .

Если  $b$  — предел последовательности  $(a_n)_{n=0}^\infty$ , то говорят, что  $(a_n)_{n=0}^\infty$  *сходится* к  $b$  ( $(a_n)_{n=0}^\infty \rightarrow b$ ,  $b = \lim (a_n)_{n=0}^\infty$ ).

**Теорема 76.** В хаусдорфовом пространстве ни одна последовательность не может иметь более одного предела.

**Определение 57.** Пусть  $A$  — подмножество топологического пространства  $X$ . Совокупность пределов всевозможных последовательностей точек множества  $A$  называются *секвенциальным замыканием* этого множества. Обозначение:  $\text{SCl}(A)$ .

**Теорема 77.**  $\text{SCl}(A) \subseteq \text{Cl}(A)$ .

**Доказательство.** Предел последовательности точек из  $A$  — точка прикосновения множества  $A$ . □

**Теорема 78.** Если пространство  $X$  удовлетворяет первой аксиоме счётности, то для любого  $A \subseteq X$  верно  $\text{SCl}(A) = \text{Cl}(A)$ .

**Доказательство.** Пусть  $b \in \text{Cl}(A)$ . Если  $\{V_i\}_{i=0}^\infty$  — счетная база в точке  $b$ , то  $U_n = \bigcap_{i=0}^n V_i$  — убывающая база в точке  $b$  ( $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$ ). Для всякого  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  выбираем  $a_n \in U_n \cap A$ . Тогда  $(a_n)_{n=0}^\infty \rightarrow b$ . □