Рейтинговое домашнее задание от 24.09
Дифференциальные уравнения и динамические системы

Глеб Минаев @ 204 (20.Б04-мкн)

Задача 3. Сначала давайте просто решим решим уравнение.

$$y' - y = -\frac{1}{x}$$

Введём функцию

$$\varphi(x) := e^{\int_0^x -1 dt} = e^{-x}.$$

Следовательно,

$$\varphi y' - \varphi y = -\frac{\varphi}{x}$$
$$\varphi y' + \varphi' y = -\frac{\varphi}{x}$$
$$(\varphi y)' = -\frac{\varphi}{x}$$
$$\varphi y = \int -\frac{\varphi(t)}{t} dt = \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t} dt + C = \int_x^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt + C$$
$$y = e^x \left(\int_x^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt + C \right) = \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t} dt + Ce^x$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t} dt = 0,$$

а

$$\lim_{x\to\infty} Ce^x = \begin{cases} \pm\infty & \text{если } C \neq 0, \\ 0 & \text{если } C = 0. \end{cases}$$

Таким образом понятно, что $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $C = 0$. Т.е. единственное решение, обладающее оговоренным в условии свойством, есть функция

$$y(x) = \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t} dt.$$
