Алгебра.

Лектор — В. А. Петров
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

TODOs

Содержание

Литература:

- Ван дер Варден, “Алгебра”.
- Лэнг, “Алгебра”.
- Винберг, “Курс Алгебры”.
- Маклейн, “Категории для работающего математика”.

Немного истории

Зарождение — Аль Хорезин, “Китхаб Альджебр валь мукабалт”. “Альджебр” значит “перенос из одной части уравнения в другую”, а “мукабалт” — “приведение подобных”.

1 Основные понятия.

Определение 1. Алгебраическая структура — это множество M + заданные на нём операции + аксиомы на операциях.

Определение 2. Абелева группа — набор $(M, + : M^2 \to M)$ с аксиомами:

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

$\mathrm{A}_1)$ $\forall a, b, c \in M : (a+b)+c = a+(b+c)$ — ассоциативность сложения

$\mathrm{A}_2)$ $\exists 0 \in M : \forall a \in M : a+0 = a = 0+a$ — нейтральный по сложению элемент

$\mathrm{A}_3)$ $\forall a, b \in M : a+b = b+a$ — коммутативность сложения

$\mathrm{A}_4)$ $\forall a \in M : \exists -a : a+(-a) = 0 = (-a)+a$ — существование противоположного

Определение 3. Опишем следующие аксиомы на наборе $(M, + : M^2 \to M, \cdot : M^2 \to M)$ в добавок к $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_4$:

D) $\forall a, b, k \in M : k(a+b) = ka+kb,\ (a+b)k = ak+bk$ — дистрибутивность

$\mathrm{M}_1)$ $\forall a, b, c \in M : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ — ассоциативность умножения

$\mathrm{M}_2)$ $\exists 1 \in M : \forall a \in M : a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ — нейтральный по умножению элемент

$\mathrm{M}_3)$ $\forall a, b \in M : a \cdot b = b \cdot a$ — коммутативность умножения

$\mathrm{M}_4)$ $\forall a \in M \setminus \{0\} : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$ — существование обратного

По этим аксиомам определим следующие понятия:

Кольцо — набор $(M, +, \cdot, 0)$, что верны A_1, A_2, A_3, A_4 и D.

Ассоциативное кольцо — кольцо с M_1.

Кольцо с единицей — кольцо с M_2.

Тело — кольцо с M_1, M_2, M_4.

Поле — кольцо с M_1, M_2, M_3, M_4.

Полукольцо — кольцо без A_4.

Пример 1. Если взять $\mathbb{R}^3$, то векторное произведение в нём неассоциативно и антикоммутативно. Но есть

Лемма (Тождество Якоби). $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$

Пример 2. Если взять $R^4 = R \times R^3$ и рассмотреть $\cdot : ((a; u); (b; v)) \mapsto (ab - u \cdot v; av + bu + u \times v)$ и $+ : ((a; u); (b; v)) \mapsto (a+b, u+v)$, тогда получим $\mathbb{H}$ — ассоциативное некоммутативное тело кватернионов. Ассоциативность доказал Гамильтон.

Лемма 1. $0 \cdot a = 0$

Определение 4. Коммутативное кольцо без делителей нуля называется *областью (целостности)*.

Определение 5. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда *множество остатков при делении на* m или $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ — это фактор-множество по отношению эквивалентности $a \sim b \Leftrightarrow (a-b) \mid m$.

Определение 6. *Подкольцо* — это подмножество кольца, согласованное с его операциями.

Как следствие ноль и обратимость согласуются автоматически.

Утверждение 2. *Если R — подкольцо области целостности S, то R — область целостности.*

Определение 7. *Целые Гауссовы числа* или $\mathbb{Z}[i]$ — это $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Определение 8. Некоторое подмножество R кольца S *замкнуто относительно сложения (умножения)*, если $\forall a, b \in R : a+b \in R$ ($ab \in R$ соответственно).

Замечание 1. Замкнутое относительно сложения **И** умножения подмножество — подкольцо.

Пример 3. Пусть d — целое, не квадрат. Тогда $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ — область целостности.

2 Теория делимости

Пусть R — область целостности.

Определение 9. “*a делит b*” или же $a \mid b$ значит, что $\exists c \in R : b = ac$.

Утверждение 3. *Отношение “$|$” рефлексивно и транзитивно.*

Определение 10. a и b *ассоциированы*, если $a \mid b$ и $b \mid a$. Обозначение: $a \sim b$.

Утверждение 4. *“$\sim$” — отношение эквивалентности.*

Утверждение 5. *$a \sim b \Leftrightarrow \exists$ обратимый $\varepsilon : a = \varepsilon b$.*

Доказательство. Пусть $a \sim b$. Тогда $\exists c, d : ac = b, bd = a$. Тогда $a(1-cd) = a - acd = a - bd = a - a = 0$, значит либо $a = 0$, либо $cd = 1$. В первом случае $b = ac = 0c = 0$, значит можно просто взять $\varepsilon = 1$. Во втором случае, $cd = 1$, значит c и d обратимы, тогда можно взять $\varepsilon = d$. следствие в одну сторону доказано.

Пусть $a = \varepsilon b$, где ε обратим. Значит:

1. $b \mid a$;

2. $\exists \delta : \delta\varepsilon = 1$, значит $\delta a = \delta\varepsilon b = b$, значит $a \mid b$.

Таким образом $a \sim b$. $\square$

Пример 4. В $\mathbb{Z}[i]$ есть только следующие обратимые элементы: 1, -1, i и $-i$. Поэтому все ассоциативные элементы получаются друг из друга домножением на один из 1, -1, i, $-i$ и вместе образуют квадрат (на комплексной плоскоти) с центром в нуле.

Определение 11. *Главным идеалом* элемента a называется множество $M := \{ak \mid k \in R\} = \{b \mid a \text{ делит } b\}$. Обозначение: (a) или aR.

Утверждение 6. *$a \mid b \Leftrightarrow b \in aR \Leftrightarrow bR \subseteq aR$.*

Утверждение 7. *$a \sim b \Leftrightarrow aR = bR$.*

Утверждение 8. *$\forall a \in R$*

1. $0 \in aR$

2. $x \in aR \Rightarrow -x \in aR$

3. $x, y \in aR \Rightarrow x + y \in aR$

4. $x \in aR, r \in R \Rightarrow xr \in aR$

Замечание 2. То же верно и в некоммутативном R.

Пример 5. В поле есть только $0R$ и $1R$.

Пример 6. В $\mathbb{Z}$ есть только $m\mathbb{Z}$ для каждого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение 12. Пусть P — кольцо. $I \subseteq P$ называется *правым идеалом*, если

1. $0 \in I$;

2. $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$;

3. $a \in I \Rightarrow -a \in I$;

4. $a \in I, r \in R \Rightarrow ar \in I$.

I называется *левым идеалом*, если аксиому 4 заменить на "$a \in I, r \in R \Rightarrow ra \in I$". Также I называется *двухсторонним идеалом*, если является левым и правым идеалом, и обозначается как $I \triangleleft P$.

Замечание 3. В коммутативном кольце (и в частности в области целостности) все идеалы двухсторонние.

Пример 7. Пусть дано кольцо P и фиксированы $a_1, \ldots, a_n \in P$. Тогда $a_1P + \cdots + a_nP = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \mid x_1, \ldots, x_n \in P\}$ есть правый (конечнопорождённый) идеал, порождённый элементами $a_1, \ldots, a_n$. Аналогично $Pa_1 + \cdots + Pa_n = \{x_1a_1 + \cdots + x_na_n \mid x_1, \ldots, x_n \in P\}$ — левый (конечнопорождённый) идеал, порождённый элементами $a_1, \ldots, a_n$.

Определение 13. *Область главных идеалов (ОГИ)* — область целостности, где все идеалы главные.

Определение 14. Область целостности R называется *Евклидовой*, если существует функция ("Евклидова норма") $N : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, что

$$\forall a, b \neq 0 \; \exists q, r : a = bq + r \wedge (r = 0 \vee N(r) < N(b))$$

Теорема 9. *Евклидово кольцо — область главных идеалов.*

Доказательство. Пусть наше кольцо — R. Если $I = \{0\}$, то $I = 0R$. Иначе возьмём $d \in I \setminus \{0\}$ с минимальной Евклидовой нормой. Тогда $\forall a \in I$ либо $d \mid a$, либо $\exists q, r : a = dq - r$. Во втором случае $dq \in I$, $r = a - dq \in I$, но $N(r) < N(d)$ — противоречие. Значит $I = dR$. □

Определение 15. *Общим делителем* a и b называется c, что $c \mid a$ и $c \mid b$. *Наибольшим общим делителем (НОД)* a и b называется общий делитель a и b, делящийся на все другие общие делители a и b.

Теорема 10 (алгоритм Евклида)**.** *В Евклидовом кольце у любых двух чисел есть НОД.*

Доказательство. Заметим, что $(a, b) = (a + bk, b)$.

Пусть даны a и b. Предположим, что $\varphi(a) \geqslant \varphi(b)$, иначе поменяем их местами. Тем самым по аксиоме Евклида найдутся q и r, что $a = bq + r$, а $\varphi(r) < \varphi(b) \leqslant \varphi(a)$, значит $\varphi(a) + \varphi(b) > \varphi(r) + \varphi(b)$. При этом $(a, b) = (r, b)$. Значит бесконечно $\varphi(a) + \varphi(b)$ не может бесконечного уменьшаться, так как натурально, значит за конечное кол-во переходов мы получим, что одно из чисел делит другое, а значит НОД стал определён. □

Теорема 11 (линейное представление НОД)**.** $\forall a, b \in R \; \exists p, q \in R : ap + bq = (a, b)$.

Доказательство. Докажем по индукции по $N(a) + N(b)$.

База. $N(a) + N(b) = 0$. Значит $N(a) = N(b) = 0$, а тогда a и b не могут не делиться друг на друга, значит НОД — любой из них. А в этом случае разложение очевидно.

Шаг. WLOG $N(a) \geqslant N(b)$. Если $b \mid a$, то b — НОД, а тогда разложение очевидно. Иначе по аксиоме Евклида $\exists q, r : a = bq + r$. Заметим, что $(a, b) = (b, r) = d$, но $N(a) + N(b) \geqslant N(b) + N(b) > N(b) + N(r)$. Таким образом по предположению индукции для b и r получаем, что $d = bk + rl$ для некоторых k и l, значит $d = bk + (a - bq)l = al + b(k - ql)$. □

Определение 16. Элемент p области целостности R называется *неприводимым*, если $\forall d \mid p$ либо $d \sim 1$, либо $d \sim p$.

Определение 17. Элемент p области целостности R называется *простым*, если из условия $p \mid ab$ следует, что $p \mid a$ или $p \mid b$.

Утверждение 12. *Любое простое неприводимо.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. некоторое простое p представляется в виде произведения неделителей единицы a и b. Тогда WLOG $p \mid a$. Значит $p \sim a$, а $b \sim 1$ — противоречие. $\square$

Утверждение 13. *В области главных идеалов неприводимые просты.*

Доказательство. Пусть неприводимое p делит ab. Пусть тогда $pR + aR = dR$. В таком случае $d \sim p$, значит либо $d \sim p$, либо $d \sim 1$. Если $d \sim p$, то $p \mid a$. Иначе $px + ay = 1$, значит $pxb + aby = b$. Но $p \mid pxb$ и $p \mid aby$, значит $p \mid b$. Поскольку рассуждение не зависит от a и b, то p просто. $\square$

Определение 18. Область целостности R *удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей главных идеалов (ACCP)*, если не существует последовательности $d_0R \subsetneq d_1R \subsetneq \ldots$. Такое кольцо область целостности называют нётеровой.

Теорема 14. *ОГИ нётерова.*

Доказательство. Пусть наша область — R. Предположим противное, т.е. существует последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, что a_{n+1} — собственный делитель a_n (т.е. $a_{n+1} \mid a_n \wedge a_n \nsim a_{n+1}$). Тогда $a_0R \subsetneq a_1R \subsetneq a_2R \subsetneq \ldots$. Тогда $\exists x : xR = \bigcup_{n=0}^{\infty} a_nR$, так как это объединение — идеал. Но тогда $x \in a_jR$ для некоторого j, а значит $xR \subseteq a_jR$, а тогда $a_{j+1}R \subseteq a_jR$ — противоречие. $\square$

Определение 19. Область целостности называется *факториальной областью*, если в нём все неприводимые просты и оно нётерово.

Пример 8. ОГИ факториальна.

Теорема 15 (основная теорема арифметики)**.** *Пусть R факториально. Тогда любое число представимо единственным образом в виде произведения простых с точностью до перестановки множителей и ассоциированности.*

Доказательство.

Лемма 15.1. *У каждого числа есть неприводимый делитель.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда есть подъём идеалов: $a_0 = a_1b_1$, $a_1 = a_2b_2$ и т.д., значит $a_0R \subsetneq a_1R \subsetneq a_2R \subsetneq \ldots$ — противоречие. $\square$

Лемма 15.2. *Каждое число представимо в виде произведения простых.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда есть подъём идеалов: $a_0 = p_1a_1$, где p_1 прост, $a_1 = p_2a_2$, где p_2 прост, и т.д., значит $a_0R \subsetneq a_1R \subsetneq a_2R \subsetneq \ldots$ — противоречие. $\square$

Это доказывает существование разложения.

Лемма 15.3. *Если $p_1 \cdot \ldots p_n = q_1 \cdot \cdots \cdot q_m$ для простых $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m$, то эти два набора совпадают с точностью до перестановки и ассоциированности.*

Доказательство. Докажем индукцией по n.

База: Для $n = 0$ утверждение очевидно, так как тогда $1 = q_1 \cdot \cdots \cdot q_m$, значит $m = 0$.

Шаг: Несложно видеть, что $p_n \mid q_1 \cdot \cdots \cdot q_m$, значит $p_n \mid q_i$ для некоторого i, значит $p_n \sim q_i$. Переставим q_k, что $q'_m = q_i$. Значит $p_1 \cdot \cdots \cdot p_{n-1} = q'_1 \cdot \cdots \cdot q'_{m-1}$. По предположению индукции эти два набора совпадают с точностью до перестановки и ассоциированности, значит таковы и начальные наборы. $\square$

Это доказывает единственность разложения. $\square$

3 Идеалы и морфизмы

Теорема 16. *Пусть даны* $I \triangleleft R$ *и* $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$. *Тогда* $\sim$ *— отношение эквивалентности, а* $R/I := R/\sim$ *— кольцо.*

Доказательство. Проверим, что $\sim$ — отношение эквивалентности:

- $a - a = 0 \in I$, значит $a \sim a$;
- $a \sim b$, значит $a - b \in I$, значит $b - a = -(a - b) \in I$, значит $a \sim a$;
- $a \sim b$, $b \sim c$, значит $a - b \in I$, $b - c \in I$, значит $a - c = (a - b) + (b - c) \in I$, значит $a \sim c$.

Определим на R/I операции сложения и умножения, нуля, противоположного, единицы и обратного:

- $[a] + [b] := [a + b]$;
- $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$;
- $0 := [0] = I$;
- $-[a] := [-a]$;
- $1 := [1]$;
- $[a]^{-1} := [a^{-1}]$.

Покажем, что R/I — кольцо:

A$_1$) $\forall a, b, c \in R : ([a]+[b])+[c] = [a+b]+[c] = [(a+b)+c] = [a+(b+c)] = [a]+[b+c] = [a]+([b]+[c])$

A$_2$) $\forall a \in R : [a] + [0] = [a + 0] = a = [0 + a] = [0] + [a]$

A$_3$) $\forall a, b \in R : [a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a]$

A$_4$) $\forall a \in R : [a] + -[a] = [a] + [-a] = [a + (-a)] = [0] = [(-a) + a] = [-a] + [a] = -[a] + [a]$

D) $\forall a, b, k \in R : [k]([a] + [b]) = [k][a + b] = [k(a + b)] = [ka + kb] = [ka] + [kb] = [k][a] + [k][b]$, $([a] + [b])[k] = [a + b][k] = [(a + b)k] = [ak + bk] = [ak] + [bk] = [a][k] + [b][k]$

M$_1$) $\forall a, b, c \in R : ([a] \cdot [b]) \cdot [c] = [a \cdot b] \cdot [c] = [(a \cdot b) \cdot c] = [a \cdot (b \cdot c)] = [a] \cdot [b \cdot c] = [a] \cdot ([b] \cdot [c])$

M$_2$) $\forall a \in R : [a] \cdot [1] = [a \cdot 1] = [a] = [1 \cdot a] = [1] \cdot [a]$

M$_3$) $\forall a, b \in R : [a] \cdot [b] = [a \cdot b] = [b \cdot a] = [b] \cdot [a]$

M$_4$) $\forall a \in R \setminus \{0\} : [a] \cdot [a]^{-1} = [a] \cdot [a^{-1}] = [a \cdot a^{-1}] = [1] = [a^{-1} \cdot a] = [a^{-1}] \cdot [a] = [a]^{-1} \cdot [a]$

□

Замечание 4. Доказательство для классов эквивалентности каждой аксиомы основывалось только на соответствующей аксиоме и определениях ранее.

Определение 20. *Гомоморфизм* — такое отображение $\varphi : R \to S$ — это отображение, сохраняющее операции:

- $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;

- $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$;
- $\varphi(0) = 0$;
- $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.

Гомоморфизм кольца с 1 — гомоморфизм, что $\varphi(1) = 1$.

Утверждение 17. *Композиция гомоморфизмов — гомоморфизм.*

Определение 21. Пусть $f : X \to Y$. Несложно видеть, что f раскладывается в композицию сюръекции $f : X \to f(X)$ и инъекции $id : f(X) \to Y$. Тогда $\operatorname{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$ — *множество значений* f, а классы значений X, переходящих в один $y \in Y$ суть *слои* — $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$ для некоторого y.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \\ & f(X) = \operatorname{Im}(f) \arrow[ur, hook, "id"'] & \end{tikzcd}$$

Определение 22. Пусть $\varphi : R \to S$ — гомоморфизм. Тогда *ядром* φ называется $\operatorname{Ker}(\varphi) := \{r \in R \mid \varphi(r) = 0\}$.

Утверждение 18. *Ядро гомоморфизма — двусторонний идеал.*

Определение 23. $\varphi : S \to R$ — *изоморфизм*, если это биективный гомоморфизм.

Определение 24. Два кольца называются изоморфными, если между ними есть изоморфизм. Обозначение: $R \cong S$.

Утверждение 19. *Пусть $R \cong S$. Тогда*

- *Если R коммутативно, то и S коммутативно.*
- *Если R — область целостности, то и S — область целостности.*
- *Если R — ОГИ, то и S — ОГИ.*

Утверждение 20.

1. $R \cong R$.
2. $R \cong S \Leftrightarrow S \cong R$.
3. $R \cong S \cong T \Rightarrow R \cong T$.

Теорема 21 (о гомоморфизме)**.** *Пусть $\varphi : R \to S$ — гомоморфизм. (Вспомним, что* $\operatorname{Ker}(\varphi) \triangleleft R$, *а* $\operatorname{Im}(\varphi) = \varphi(R)$.*) Тогда $R/\operatorname{Ker}(\varphi) \cong \operatorname{Im}(\varphi)$, где изоморфизм переводит $[a] \mapsto \varphi(a)$.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "r \mapsto [r]"'] & S \\ R/\operatorname{Ker}(\varphi) \arrow[r, "\sim", "{[r] \mapsto \varphi(r)}"'] & \operatorname{Im}(\varphi) \arrow[u, hook, "id"'] \end{tikzcd}$$

Доказательство.

1. Корректность. $[a] = [a'] \Leftrightarrow a - a' \in \operatorname{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(a - a') = 0 \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(a')$.

   Замечание 5. Классы эквивалентности по $\operatorname{Ker}(\varphi)$ как раз слои φ.

2. Заметим, что работают следующие операции:

   - $[a] + [b] = [a + b] \mapsto \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b)$;
   - $[a] \cdot [b] = [a \cdot b] \mapsto \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a \cdot b)$.

3. Сюръективность следует из того, что $\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow [a] = [b]$.

4. Инъективность следует из того, что каждый элемент в $\operatorname{Im}(\varphi)$ имеет прообраз.

$\square$

Теорема 22 (китайская теорема об остатках (КТО) для двух чисел)**.** *Пусть m и n взаимно просты. Тогда $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Рассмотрим $\varphi : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, [a]_{mn} \mapsto ([a]_m; [a]_n)$. Несложно заметить, что ядро φ тривиально, поэтому $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}/\operatorname{Ker}(\varphi) \cong \operatorname{Im}(\varphi)$. Но в последнем элементов не менее mn, так как $\operatorname{Im}(\varphi) \cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, но и не более, так как $|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = mn$, поэтому $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, поэтому $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\square$

Теорема 23 (КТО)**.** *Пусть $m_1, \ldots, m_k$ — попарно взаимно простые числа. Тогда*

$$\mathbb{Z}/m_1 \ldots m_k \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$$

Доказательство. По индукции по k с помощью КТО для двух чисел. $\square$

Теорема 24 (Универсальное свойтсво фактор-кольца)**.** *Пусть есть $I \triangleleft R$ и гомоморфизмы $\pi : R \to R/I$ — нативный гомоморфизм, и $\varphi : R \to S$, что $\pi(I) = \{0\}$. Тогда существует и единственен гомоморфизм $\varphi' : R/I \to S$, что $\varphi' \circ \pi = \varphi$.*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & S \\
& R/I \arrow[ur, "\varphi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. $\varphi'([a]) = (\varphi' \circ \pi)(a) = \varphi(a)$ — это означает единственность; так функцию и определим. Осталось показать корректность.

Несложно заметить, что если $[a] = [b]$, то $a - b \in I$, значит $\varphi(a - b) = 0$, значит $\varphi(a) = \varphi(b)$. Теперь проверим операции:

- $\varphi'([a] + [b]) = \varphi'([a + b]) = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi'([a]) + \varphi'([b])$.
- $\varphi'([a] \cdot [b]) = \varphi'([a \cdot b]) = \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi'([a]) \cdot \varphi'([b])$

$\square$

Определение 25. Пусть R — область целостности. Тогда рассмотрим $Q = R \times (R \setminus \{0\})$ и отношение $\sim$ на Q, что $(a; b) \sim (c; d) \Leftrightarrow ad = bc$. Несложно видеть, что $\sim$ — отношение эквивалентности. Тогда *полем частных* области целостности R называется $\operatorname{Frac}(R) = Q/\sim$, где операции:

- $[(a; b)] + [(c; d)] := [(ad + bc; bd)]$;

- $[(a;b)] \cdot [(c;d)] := [(ac;bd)]$;
- $0 := [(0;1)]$;
- $-[(a;b)] := [(-a;b)]$;
- $1 := [(1;1)]$;
- $[(a;b)]^{-1} = [(b;a)]$.

Несложно видеть, что все операции корректны, а поле частных — поле.

Замечание 6. Есть нативный инъективный гомоморфизм из R в $\mathrm{Frac}(R)$:

$$\varphi : R \to \mathrm{Frac}(R), r \mapsto [(r;1)]$$

Теорема 25 (Уникальное свойтсво поля частных)**.** *Пусть R — область целостности, F — поле, $\varphi : R \to F$ — инъективный гомоморфизм, сохраняющий 1, $\pi : R \to \mathrm{Frac}(R)$ — нативный гомоморфизм. Тогда существует единственный гомоморфизм $\varphi' : \mathrm{Frac}(R) \to F$, что $\varphi' \circ \pi = \varphi$.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, hook, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "\pi"'] & & F \\ & \mathrm{Frac}(R) \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

Замечание 7. Если $\varphi : E \to F$ — гомоморфизм полей, сохраняющий 1, то он инъективен. Действительно, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ — идеал, значит 0 или E, так как E поле, но случай E не подходит, так как не сохраняется 0, значит $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$, значит φ инъективно.

Доказательство.

Лемма 25.1. $\varphi'(1/b) = 1/\varphi'(b)$

Доказательство. По замечанию 7 φ' — инъективен, но $\varphi'(0) = 0$, а тогда для всякого $a \neq 0$ верно, что $\varphi'(a) \neq 0$, значит $\varphi'(a) \cdot \varphi'(a^{-1}) = \varphi'(1) = 1$, значит $\varphi'(a)^{-1} = \varphi'(a^{-1})$. □

Лемма 25.2. $\varphi'(a/b) = \varphi'(a)/\varphi'(b)$.

Доказательство. $\varphi'(a/b) = \varphi'(a) \cdot \varphi'(b^{-1}) = \varphi'(a) \cdot \varphi'(b)^{-1} = \varphi'(a)/\varphi'(b)$. □

Заметим, что $\varphi'(a) = \varphi'(\pi(a)) = \varphi(a)$, поэтому $\varphi'(a/b) = \varphi(a)/\varphi(b)$ — это означает единственность φ'.

Теперь рассмотрим соответствующую $\varphi' : a/b \mapsto \varphi(a)/\varphi(b)$. Проверим корректность:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad ad = bc \quad \Rightarrow \quad \varphi(ad) = \varphi(bc) \quad \Rightarrow$$
$$\varphi(a)\varphi(d) = \varphi(b)\varphi(c) \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} = \frac{\varphi(c)}{\varphi(d)} \quad \Rightarrow \quad \varphi'\left(\frac{a}{b}\right) = \varphi'\left(\frac{c}{d}\right)$$

Теперь проверим согласованность с операциями:

- $$\varphi'\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{\varphi(ac)}{\varphi(bd)} = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} \cdot \frac{\varphi(c)}{\varphi(d)} = \varphi'\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \varphi'\left(\frac{c}{d}\right);$$

- $$\varphi'\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \varphi'\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = \frac{\varphi(ad+bc)}{\varphi(bd)} =$$
$$\frac{\varphi(a)\varphi(d) + \varphi(b)\varphi(c)}{\varphi(b)\varphi(d)} = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} + \frac{\varphi(c)}{\varphi(d)} = \varphi'\left(\frac{a}{b}\right) + \varphi'\left(\frac{c}{d}\right)$$

□

4 Многочлены

Теорема 26. *Пусть дано кольцо R. Рассмотрим множество S финитных бесконечных последовательностей элементов из R; т.е. все такие последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, что всякое $a_n \in R$ и есть такое N, что для всякого $n > N$ верно, что $a_n = 0_R$. Также рассмотрим операции сложения и умножения на S:*

$$+ : S^2 \to S, ((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) \mapsto (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty} \quad \cdot : S^2 \to S, ((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty}$$

Тогда

1. *S является кольцом, где $+$ — операция сложения, $\cdot$ — операция умножения, $(0_R)_{n=0}^{\infty}$ — нейтральный по сложению элемент.*

2. *S наследует от R аксиомы M_1, M_2 и M_3.*

3. *R изоморфно подкольцу S, состоящему из элементов вида $(a, 0, 0, \dots)$, где $a \in R$.*

Определение 26. Множество S из прошлой теоремы называется *кольцом многочленов над R* и обозначается $R[x]$. При этом всякий его элемент $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ обозначается как $a_0 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Доказательство.

1. Важно сказать, что из A_1 следует корректность определения умножения. Проверим аксиомы:

   A_1) $\forall (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty} \in S$:

$$\begin{aligned}((a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty}) + (c_n)_{n=0}^{\infty} &= (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty} + (c_n)_{n=0}^{\infty} \\ &= ((a_n + b_n) + c_n)_{n=0}^{\infty} \\ &= (a_n + (b_n + c_n))_{n=0}^{\infty} \\ &= (a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n + c_n)_{n=0}^{\infty} \\ &= (a_n)_{n=0}^{\infty} + ((b_n)_{n=0}^{\infty} + (c_n)_{n=0}^{\infty})\end{aligned}$$

   A_2) $\forall (a_n)_{n=0}^{\infty} \in R$:

$$\begin{aligned}(a_n)_{n=0}^{\infty} + (0)_{n=0}^{\infty} &= (a_n + 0)_{n=0}^{\infty} \\ &= (a_n)_{n=0}^{\infty} \\ &= (0 + a_n)_{n=0}^{\infty} \\ &= (0)_{n=0}^{\infty} + (a_n)_{n=0}^{\infty}\end{aligned}$$

   A_3) $\forall (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in R$:

$$\begin{aligned}(a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty} &= (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty} \\ &= (b_n + a_n)_{n=0}^{\infty} \\ &= (b_n)_{n=0}^{\infty} + (a_n)_{n=0}^{\infty}\end{aligned}$$

A$_4$) $\forall (a_n)_{n=0}^{\infty} \in R:$

$$\begin{aligned}(a_n)_{n=0}^{\infty} + (-a_n)_{n=0}^{\infty} &= (a_n + -a_n)_{n=0}^{\infty}\\ &= (0)_{n=0}^{\infty}\\ &= (-a_n + a_n)_{n=0}^{\infty}\\ &= (-a_n)_{n=0}^{\infty} + (a_n)_{n=0}^{\infty}\end{aligned}$$

D) $\forall (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}, (k_n)_{n=0}^{\infty} \in R:$

$$\begin{aligned}(k_n)_{n=0}^{\infty}((a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty}) &= (k_n)_{n=0}^{\infty} \cdot (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}\\ &= \left(\sum_{t=0}^{n} k_t(a_{n-t} + b_{n-t})\right)_{n=0}^{\infty}\\ &= \left(\sum_{t=0}^{n} k_t \cdot a_{n-t} + \sum_{t=0}^{n} k_t \cdot b_{n-t}\right)_{n=0}^{\infty}\\ &= \left(\sum_{t=0}^{n} k_t \cdot a_{n-t}\right)_{n=0}^{\infty} + \left(\sum_{t=0}^{n} k_t \cdot b_{n-t}\right)_{n=0}^{\infty}\\ &= (k_n)_{n=0}^{\infty}(a_n)_{n=0}^{\infty} + (k_n)_{n=0}^{\infty}(b_n)_{n=0}^{\infty}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}((a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty})(k_n)_{n=0}^{\infty} &= (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty} \cdot (k_n)_{n=0}^{\infty}\\ &= \left(\sum_{t=0}^{n}(a_{n-t} + b_{n-t})k_t\right)_{n=0}^{\infty}\\ &= \left(\sum_{t=0}^{n} a_{n-t} \cdot k_t + \sum_{t=0}^{n} b_{n-t} \cdot k_t\right)_{n=0}^{\infty}\\ &= \left(\sum_{t=0}^{n} a_{n-t} \cdot k_t\right)_{n=0}^{\infty} + \left(\sum_{t=0}^{n} b_{n-t} \cdot k_t\right)_{n=0}^{\infty}\\ &= (a_n)_{n=0}^{\infty}(k_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty}(k_n)_{n=0}^{\infty}\end{aligned}$$

2. Проверим наследственность для каждой аксиомы:

M$_1$) $\forall (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty} \in R:$

$$\begin{aligned}
((a_n)_{n=0}^{\infty} \cdot (b_n)_{n=0}^{\infty}) \cdot (c_n)_{n=0}^{\infty} &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty} \cdot (c_n)_{n=0}^{\infty} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l \cdot b_{k-l}\right) \cdot c_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty} \\
&= \left(\sum_{\substack{0 \leqslant k \\ l \leqslant 0 \\ k+l \leqslant n}} (a_k \cdot b_l) \cdot c_{n-k-l}\right)_{n=0}^{\infty} \\
&= \left(\sum_{\substack{0 \leqslant k \\ l \leqslant 0 \\ k+l \leqslant n}} a_k \cdot (b_l \cdot c_{n-k-l})\right)_{n=0}^{\infty} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \cdot \left(\sum_{l=0}^{k} b_l \cdot c_{k-l}\right)\right)_{n=0}^{\infty} \\
&= (a_n)_{n=0}^{\infty} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \cdot c_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty} \\
&= (a_n)_{n=0}^{\infty} \cdot ((b_n)_{n=0}^{\infty} \cdot (c_n)_{n=0}^{\infty})
\end{aligned}$$

M$_2$) Обозначим за 1 в S последовательность $(t_n)_{n=0}^{\infty}$, где $t_0 = 1$, а все остальные члены равны 0. Тогда $\forall (a_n)_{n=0}^{\infty} \in R:$

$$\begin{aligned}
(a_n)_{n=0}^{\infty} \cdot 1 &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty} \\
&= (a_n)_{n=0}^{\infty} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} t_{n-k} \cdot a_k\right)_{n=0}^{\infty} \\
&= 1 \cdot (a_n)_{n=0}^{\infty}
\end{aligned}$$

M$_3$) $\forall (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in R:$

$$\begin{aligned}
(a_n)_{n=0}^{\infty} \cdot (b_n)_{n=0}^{\infty} &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \cdot a_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty} \\
&= (b_n)_{n=0}^{\infty} \cdot (a_n)_{n=0}^{\infty}
\end{aligned}$$

3. Рассмотрим отображение $\varphi : R \to S, a \mapsto (a, 0, 0, \dots)$. Тогда

- $\varphi(a) + \varphi(b) = (a + b, 0, \dots) = \varphi(a + b)$

- $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = (ab, 0, \dots) = \varphi(a \cdot b)$
- $\varphi(0) = (0, 0, \dots) = 0$
- (в случае M_2) $\varphi(1) = (1, 0, \dots) = 1$

Значит $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$, $R \cong \mathrm{Im}(\phi)$. При этом несложно видеть, что $\mathrm{Im}(\phi)$ и есть множество всех последовательностей вида $(a, 0, 0, \dots)$.

$\square$

5 Теория категорий

Определение 27. *Категория* C есть совокупность семейства (не обязательно множества) объектов $\mathrm{Ob}(C)$ и семейства *морфизмов* (также “стрелки”), что выполнены следующие условия.

1. У всякого морфизма f есть прообраз (также “начало”, “source”, “domain”; обозначение: $s(f)$ или $\mathrm{dom}(f)$) и образ (также “конец”, “target”, “codomain”; обозначение: $t(f)$ или $\mathrm{cod}(f)$), являющиеся объектами из рассмотренного семейства. Семейства всех морфизмов из X в Y (т.е. с прообразом X и образом Y) обозначается $\mathrm{Hom}(X, Y)$ или $\mathrm{Mor}(X, Y)$.

2. На семействе морфизмов введён не полностью определённый бинарный оператор $\circ$ (можно считать, функциональное отношение из $M \times M$ в M, где M — семейство морфизмов), что для всяких $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ и $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Mor}(Y, Z)$ значение $g \circ f$ определено и лежит в $\mathrm{Hom}(X, Z)$. Данный оператор называется *композицией*, а $g \circ f$ — композицией g и f.

3. Операция композиции морфизмов ассоциативна: для всяких $X, Y, Z, T \in \mathrm{Ob}(C)$ и $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$, $h \in \mathrm{Hom}(Z, T)$
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

4. Для всякого $X \in \mathrm{Ob}(C)$ есть выделенный морфизм $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ (также 1_X). Он называется тождественным морфизмом X.

5. Для всяких $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ для всякого $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ верно, что
$$f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f.$$

Пример 9.

1. Sets (Ens):
   - $\mathrm{Ob}(\mathrm{Sets})$ — все множества,
   - $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — все отображения из X в Y,
   - $\circ$ — обычная композиция отображений,
   - id_X — тождественное отображение $X \to X$.

2. $\mathrm{Sets}_\star$:
   - $\mathrm{Ob}(\mathrm{Sets}_\star)$ — пары (A, a), где A — любое множество, а $a \in A$,
   - $\mathrm{Hom}((A, a), (B, b))$ — все отображения из A в B, переводящие a в b,
   - $\circ$ — обычная композиция отображений,
   - id_A — тождественное отображение $A \to A$.

3. Groups:
   - $\mathrm{Ob}(\mathrm{Groups})$ — все группы,
   - $\mathrm{Hom}(G, H)$ — все гомоморфизмы $G \to H$,
   - $\circ$ — обычная композиция гомоморфизмов,
   - id_G — тождественный гомоморфизм $G \to G$.

4. Аналогично описываются категории Rings колец, CommRings коммутативных колец (если в случаях Rings и CommRings рассматриваются кольца с единицей, то надо требовать, чтобы гомоморфизмы переводили единицу в единицу), Vect_F векторных пространств над полем F, $R-\mathrm{Mod}$ R-модулей, и т.д. для всякой алгебраической структуры.

5. Top:

   - $\mathrm{Ob}(\mathrm{Top})$ — все топологические пространства,
   - $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — все непрерывные отображения $X \to Y$,
   - $\circ$ — обычная композиция отображений,
   - id_X — тождественное отображение $X \to X$.

6. Top$\star$:

   - $\mathrm{Ob}(\mathrm{Top}\star)$ — пары вида (X, x), где X — топологическое пространство, а $x \in X$,
   - $\mathrm{Hom}((X, x), (Y, y))$ — все непрерывные отображения $X \to Y$, переводящие x в y,
   - $\circ$ — обычная композиция отображений,
   - $\mathrm{id}_{(X,x)}$ — тождественное отображение $X \to X$.

7. HTop:

   - $\mathrm{Ob}(\mathrm{HTop})$ — все “хорошие” (компактно порождённые) топологические пространства,
   - $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — все непрерывные отображения по модулю гомотопии,
   - $\circ$ — обычная композиция отображений,
   - id_X — тождественное отображение $X \to X$.

8. $\mathrm{Ob}(C) = \{X\}$. В таком случае мы получаем *моноид* некоторых отображений X на себя: у нас есть множество морфизмов X на себя с операцией композиции (произведение в моноиде), которая ассоциативна и имеет нейтральный элемент (но не обязательно обратима).

9. Частичный предпорядок задаёт категорию:

   - $\mathrm{Ob}(C) = M$,
   - $\mathrm{Hom}(x, y) = \begin{cases} \{\star_{x \to y}\} \text{ если } x \leqslant y, \\ \varnothing \text{ иначе}, \end{cases}$
   - $\star_{y \to z} \circ \star_{x \to y} := \star_{x \to z}$,
   - $\mathrm{id}_x := \star_{x \to x}$.

10. Rels — категория отношений:

    - $\mathrm{Ob}(\mathrm{Rels})$ — все множества;
    - $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — все подмножества $X \times Y$;
    - для всяких $S \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ и $R \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$

    $$R \circ S := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : \qquad (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R\};$$

    - $\mathrm{id}_X := \{(x, x)\}_{x \in X}$.

11. Пустая категория: нет объектов, нет морфизмов.

12. Категория с единственным объектом и единственным тождественным морфизмом на нём.

13. Дискретная категория: нет нетождественных морфизмов.

14. *Произведение* категорий C и D — категория H, где $\mathrm{Ob}(H) = \mathrm{Ob}(C) \times \mathrm{Ob}(D)$, а для всяких $X = (X_C; X_D), Y = (Y_C, Y_D) \in H$ $\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathrm{Hom}(X_C, Y_C) \times \mathrm{Hom}(X_D, Y_D)$. При этом $(f_C, f_D) \circ (g_C, g_D) := (f_C \circ g_C, f_D \circ g_D)$, а $\mathrm{id}_{(X_C, X_D)} := (\mathrm{id}_{X_C}, \mathrm{id}_{X_D})$.

Определение 28. $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ называются *изоморфными* (и тогда пишут $X \simeq Y$), если есть $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ и $g \in \mathrm{Hom}(Y, X)$, что

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \qquad \text{и} \qquad g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Определение 29. *Подкатегория* S категории C — категория, семейства объектов и морфизмов которой суть подсемейства объектов и морфизмов категории C соответственно.

Определение 30. Объект A категории C называется

- *инициальным*, если для всякого $X \in \mathrm{Ob}(C)$ существует единственный морфизм $A \to X$,
- *терминальный*, если для всякого $X \in \mathrm{Ob}(C)$ существует единственный морфизм $X \to A$.

Лемма 27. *Инициальный и терминальный объекты не более чем единственны с точностью до изоморфизма (даже, точнее говоря, с точностью до единственного изоморфизма).*

Доказательство. Пусть A и B являются инициальными объектами. Тогда id_A — единственный морфизм $A \to A$ (по инициальности A), а id_B — единственный морфизм $B \to B$. Также по инициальности A и B есть морфизмы $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ и $g \in \mathrm{Hom}(B, A)$. При этом $g \circ f$ — морфизм A, т.е. $g \circ f = \mathrm{id}_A$, и по аналогии $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Следовательно A и B изоморфны по определению. Значит все инициальные объекты изоморфны.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \end{tikzcd}$$

Причём изоморфизм единственен. Так как если есть два изоморфизма: один образован f_1 и g_1, а второй — f_2 и g_2, то $f_2 \circ g_1$ — морфизм $A \to A$, а значит равен id_A. Следовательно

$$f_2 = f_2 \circ \mathrm{id}_B = f_2 \circ (g_1 \circ f_1) = (f_2 \circ g_1) \circ f_1 = \mathrm{id}_A \circ f_1 = f_1;$$

аналогично $g_1 = g_2$.

Утверждение для терминальных объектов доказывается аналогично. □

Определение 31. *Противоположная (двойственная) категория* категории C — категория C^{op}, где

- $\mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(C)$,
- $\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_C(X, Y)$,
- $\mathrm{dom}_{C^{\mathrm{op}}}(f) := \mathrm{cod}_C(f)$, $\mathrm{cod}_{C^{\mathrm{op}}}(f) := \mathrm{dom}_C(f)$,
- $f \circ_{C^{\mathrm{op}}} g := g \circ f$.

Замечание. Инициальные объекты суть двойственны терминальным объектам в двойственном пространстве.

Существование двойственных категорий значит, что всякая теорема без условий, зависимых от инициальности (терминальности) объектов, и верная для инициальных объектов, верна и для терминальных объектов (и наоборот).

Пример 10.

1. В Sets инициальным является только пустое множество, а терминальным — любое одноэлементное множество.

2. В Vect_F единственным инициальным и единственным терминальным является 0-мерное пространство.

3. В Top — тоже самое, что и для Sets.

4. В Top⋆ инициальные и терминальные объекты — одноточечные пространства.

5. В категории порождённой частичным предпорядком инициальный и терминальный объекты — наименьший и наибольший элементы соответственно (если существуют).

Определение 32. Пусть фиксированы объекты X и Y категории C.

- *Произведением* (также "product") объектов X и Y называется объект $X \times Y \in \mathrm{Ob}(C)$ и морфизмы $\mathrm{pr}_X \in \mathrm{Hom}(X \times Y, X)$ и $\mathrm{pr}_Y \in \mathrm{Hom}(X \times Y, Y)$, что для всякого объекта $Z \in \mathrm{Ob}(C)$, у которого есть морфизмы $f \in \mathrm{Hom}(Z, X)$ и $g \in \mathrm{Hom}(Z, Y)$, существует единственный морфизм $h \in \mathrm{Hom}(Z, X \times Y)$, что $f = \mathrm{pr}_X \circ h$ и $g = \mathrm{pr}_Y \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, dashed, "\exists!\, h"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, bend right=15, "g"] & & X \times Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"] & \\
& X & & Y
\end{tikzcd}$$

- *Копроизведением* (также "coproduct" или "categorical sum") объектов X и Y называется объект $X \amalg Y \in \mathrm{Ob}(C)$ (или также обозначается $X \oplus Y$) и морфизмы $i_X \in \mathrm{Hom}(X, X \amalg Y)$ и $i_Y \in \mathrm{Hom}(Y, X \amalg Y)$, что для всякого объекта $Z \in \mathrm{Ob}(C)$, у которого есть морфизмы $f \in \mathrm{Hom}(X, Z)$ и $g \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$, существует единственный морфизм $h \in \mathrm{Hom}(X \amalg Y, Z)$, что $f = h \circ i_X$ и $g = h \circ i_Y$.

$$\begin{tikzcd}
Z & & X \amalg Y \arrow[ll, dashed, "\exists!\, h"'] & \\
& X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "i_X"'] & & Y \arrow[ul, "i_Y"'] \arrow[ulll, bend left=15, "g"']
\end{tikzcd}$$

Лемма 28. *Для всяких $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ их произведение и копроизведение не более чем единственны с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть A и B суть произведения X и Y. Так как A — произведение X и Y, то значит есть единственный морфизм $h \in \mathrm{Hom}(A, A)$, что $\mathrm{pr}_{X,A} = h \circ \mathrm{pr}_{X,A}$ и $\mathrm{pr}_{X,B} = h \circ \mathrm{pr}_{X,B}$; и этот морфизм — id_A. При этом $f \circ \mathrm{pr}_{X,B} = \mathrm{pr}_{X,A}$, а $g \circ \mathrm{pr}_{X,A} = \mathrm{pr}_{X,B}$, следовательно

$$\mathrm{pr}_{X,A} = f \circ \mathrm{pr}_{X,B} = (f \circ g) \circ \mathrm{pr}_{X,A}; \qquad \text{аналогично} \qquad \mathrm{pr}_{Y,A} = (f \circ g) \circ \mathrm{pr}_{Y,A}.$$

Следовательно $f \circ g = \mathrm{id}_A$. Аналогично $g \circ f = \mathrm{id}_B$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{X,A}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{Y,A}"' near end] & B \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{X,B}" near end] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{Y,B}"] \\
X & Y
\end{tikzcd}$$

Утверждение для копроизведений доказывается аналогично. □

Пример 11.

1. В Sets $X \times Y$ — декартово произведение (где pr_X и pr_Y — извлечения первого и второго элемента пары соответственно), а $X \amalg Y$ — дизъюнктное объединение (где i_X и i_Y — нативные вложения).

2. В Groups $G \times H$ — декартово произведение групп, а $G \amalg H$ — свободное произведение.

3. В Top так же, как в Sets.

4. В Top$\star$ $(X, x) \times (Y, y) = (X \times Y, (x, y))$, а $(X, x) \amalg (Y, y)$ — упражнение.

5. В категории, порождённой частичным предпорядком, $x \times y = \min(x, y)$, а $x \amalg y = \max(x, y)$.

Определение 33 (категория стрелки)**.** Пусть даны категория C и объект $A \in \mathrm{Ob}(C)$. Тогда C/A обозначается категория, где

- $\mathrm{Ob}(C/A)$ — пары вида (X, f), где $X \in \mathrm{Ob}(C)$, а $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$,

- $\mathrm{Hom}((X, f), (Y, g))$ — морфизмы $s \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, что $f = s \circ g$ (осторожно: одно и тоже s может быть (и будет) использовано как сразу несколько разных морфизмов в C/A, так как всё зависит от начала и конца морфизма),

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

- $s \circ_{C/A} t := s \circ_C t$,

- id_X — id_X из C.

С другой стороны $C \backslash A$ обозначается категория, где

- $\mathrm{Ob}(C \backslash A)$ — пары вида (X, f), где $X \in \mathrm{Ob}(C)$, а $f \in \mathrm{Hom}(A, X)$,

- $\mathrm{Hom}((X, f), (Y, g))$ — морфизмы $s \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, что $g = f \circ s$ (осторожно: одно и тоже s может быть (и будет) использовано как сразу несколько разных морфизмов в C/A, так как всё зависит от начала и конца морфизма),

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "s"] & & Y \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

- $s \circ_{C \backslash A} t := s \circ_C t$,

- id_X — id_X из C.

Пример 12. В C/A терминальным объектом будет (A, id_A).

Определение 34. Пусть даны $X, Y, A \in \mathrm{Ob}(C)$ и фиксированы морфизмы $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$ и $g \in \mathrm{Hom}(Y, A)$. Тогда если $(X, f) \times (Y, g)$ определено в $\mathrm{Ob}(C)$ и равно (Z, h), то Z называется *расслоёным произведением* $X \times_A Y$.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dr, "f"] & \\
T \arrow[urr, bend left, "s"] \arrow[drr, bend right, "t"'] \arrow[r, dashed, "\exists!\, u"] & X \times_A Y \arrow[ur, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"'] & & A \\
 & & Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Таким образом $X \times_A Y$ — это такой объект в категории C вместе с $\mathrm{pr}_X \in \mathrm{Hom}(X \times_A Y, X)$ и $\mathrm{pr}_Y \in \mathrm{Hom}(X \times_A Y, Y)$, образующие с f и g коммутативный квадрат (так называемый "декартов квадрат"), что для всякого объекта $T \in \mathrm{Ob}(C)$ и морфизмов $s \in \mathrm{Hom}(T, X)$ и $t \in \mathrm{Hom}(T, Y)$, что $s \circ f = t \circ g$, есть единственный морфизм $u \in \mathrm{Hom}(T, X \times_A Y)$, что $s = u \circ \mathrm{pr}_X$ и $t = u \circ \mathrm{pr}_Y$.

Пример 13.

1. В Sets для множеств X, Y, A и отображений $f : X \to A$ и $g : Y \to A$ расслоёное произведение
$$X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}.$$

2. В $\mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}$
$$X \amalg_A Y = (X \sqcup Y)/\sim,$$
где $\sim$ — отношение эквивалентности, порождённое соотношениями $f(a) \sim g(a)$.

   Фактически это работает как склейка в топологии.

3. В Groups $G \times_K H$ — также как в Sets, а $G \amalg_K H$ — свободное произведение с объединённой подгруппой.

Определение 35. Пусть даны категории C и D. *Функтор* (также "ковариантный функтор") $F : C \to D$ — совокупность "функции" $\mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$ и "функции" из класса морфизмов C в класс морфизмов D, что

- для всякого морфизма $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, где $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$, $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$,
- для всяких морфизмов f и g в C $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$,
- для всякого объекта $X \in \mathrm{Ob}(C)$ $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

Пример 14.

1. Взятие фундаментальной группы топологического порождает функтор $\pi_1 : \mathrm{Top}\star \to \mathrm{Groups}$.

2. Пусть M_1 и M_2 — моноиды как категории. Тогда всякий функтор $M_1 \to M_2$ — гомоморфизм моноидов.

3. Пусть M — моноид как категория. Тогда всякий функтор $M \to \mathrm{Vect}_K$ выглядит так: единственному элементу категории M сопоставляется некоторое векторное пространство V, а функтор отображает сам моноид M в $\mathrm{End}(V)$ (моноид по умножению) как гомоморфизм моноидов.

4. Всякий функтор между классами, порождёнными частичными предпорядками, — монотонная функция.

5. Пусть имеется категория S, состоящая из одного объекта и одного морфизма, и любая категория C. Тогда всякий функтор $S \to C$ — выбор объекта в C, а $C \to S$ — отобразить всё в данный единственный объект.

6. Функтор из категории с двумя объектами и двумя морфизмами в категорию C — выбор двух (не обязательно различных) объектов в C.

7. Функтор из категории с двумя объектами и тремя морфизмами в категорию C — выбор двух (не обязательно различных) объектов в C и морфизма между ними.

8. *Забывающий функтор* $U : \mathrm{Groups} \to \mathrm{Sets}$ — функтор, переводящий группу G в множество G, а гомоморфизм f в функцию f.

9. *Свободный функтор* $F : \mathrm{Sets} \to \mathrm{Groups}$ — функтор, где $F(X)$ — свободная группа на образующих X, а $F(f)$ — гомоморфизм, попрождённый соответствием образующих f.

10. ...

11. ...

12. В случае AbGroups и Groups, то есть тривиальный *забывающий функтор* $U : \mathrm{AbGroups} \to \mathrm{Groups}$ и функтор $F : \mathrm{Groups} \to \mathrm{AbGroups}, G \to G/[G,G]$.

13. Есть тривиальный забывающий функтор $U : \mathrm{Sets}_\star \to \mathrm{Sets}, (A, a) \mapsto A, f \mapsto f$. При этом в обратную сторону есть функтор

$$F : \mathrm{Sets} \to \mathrm{Sets}_\star, A \mapsto (A \sqcup \{\varnothing\}, \varnothing), f \mapsto f_\star := \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in A, \\ \varnothing, & \text{если } x = \varnothing. \end{cases}$$

14. Пусть имеется категория C и фиксирован объект $A \in \mathrm{Ob}(C)$. Тогда можно определить функтор $F : C \to \mathrm{Sets}, X \mapsto \mathrm{Hom}(A, X), f \mapsto F(f) := f \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] & & Y \\ & A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "F(f)(\varphi)"'] & \end{tikzcd}$$

Функтор F называется *копредставимым*.

Лемма 29. *Пусть дан функтор $F : C \to D$. Тогда если объекты X и Y категории C изоморфны, то $F(X)$ и $F(Y)$ изоморфны.*

Определение 36. *Контрвариантный функтор* $F : C \to D$ — это обычный функтор $C^{op} \to D$. Т.е. это совокупность “функции” $\mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$ и “функции” из класса морфизмов C в класс морфизмов D, что

- для всякого морфизма $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, где $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$, $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(Y), F(X))$,
- для всяких морфизмов f и g в C $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$,
- для всякого объекта $X \in \mathrm{Ob}(C)$ $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

Пример 15.

1. Есть контравариантный функтор $F : \mathrm{Top} \to \mathbb{C}-\mathrm{CommAlg}$, где $F(X) = C(X)$ — множество комплекснозначных непрерывных функций на X, а $F(f)(\varphi) := \varphi \circ f$.

2. *Представимые функторы.* Пусть дана категория C и фиксирован объект $A \in \mathrm{Ob}(C)$. Тогда есть контравариантный функтор $h_A : C^{op} \to \mathrm{Sets}$, что $h_A(X) = \mathrm{Hom}(X, A)$, а $h_A(f)(\varphi) = \varphi \circ h$.

Определение 37. Категории C и D называются *изоморфными*, если есть функторы $F : C \to D$ и $G : D \to C$, что $GF = \mathrm{Id}_C$, а $FD = \mathrm{Id}_D$.

5.1 Мономорфизмы и эпиморфизмы

Определение 38. Морфизм f называется

- *мономорфизмом*, если для всяких морфизмов g и h будет верно $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ (на f можно сокращать слева).
- *расщепимым мономорфизмом*, если есть морфизм r, что $r \circ f = \mathrm{id}$ (у f есть обратимый слева). r называется *ретракцией* f.
- *эпиморфизмом*, если для всяких морфизмов g и h будет верно $g \circ f = g \circ f \Rightarrow g = h$ (на f можно сокращать справа).
- *расщепимым эпиморфизмом*, если есть морфизм r, что $f \circ r = \mathrm{id}$ (у f есть обратимый справа).

Пример 16.

1. В Sets (расщепимые) мономорфизмы — инъективные отображения, (расщепимые) эпиморфизмы — сюръективные отображения.

2. В Groups (расщепимые) мономорфизмы — инъективные гомоморфизмы, (расщепимые) эпиморфизмы — сюръективные гомоморфизмы.

3. В Rings так же как в Groups.

4. ...

Замечание. Функторы совершенно не всегда сохраняют мономорфизмы и эпиморфизмы.

Лемма 30. *Функторы сохраняют расщепимые мономорфизмы и расщепимые эпиморфизмы.*

Лемма 31.

1. *Всякий морфизм, являющийся расщепимым мономорфизмом и эпиморфизмом, есть изоморфизм.*

2. *Всякий морфизм, являющийся расщепимым эпиморфизмом и мономорфизмом, есть изоморфизм.*

Определение 39. Пусть имеются морфизмы $F, G : C \to D$. *Естественное преобразование* $\alpha : F \to G$ — это совокупность морфизмов $\alpha_X \in \mathrm{Hom}(F(X), G(X))$ для всякого $X \in \mathrm{Ob}(C)$, что для всяких $A, B \in \mathrm{Ob}(C)$ и всякого морфизма $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ верно, что $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Множество всех естественных преобразований $F \to G$ иногда обозначается $\mathrm{Nat}(F, G)$.

Композицией (также вертикальной композицией) естественных преобразований $\alpha : F \to G$ и $\beta : G \to H$, где $F, G, H : C \to D$ называется естественное преобразование $\beta \circ \alpha := \gamma : F \to H$, что $\gamma_X := \beta_X \circ \alpha_X$.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"'] \arrow[rr, bend left, "\gamma_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[r, "\beta_A"'] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] \arrow[rr, bend right, "\gamma_B"'] & G(B) \arrow[r, "\beta_B"] & H(B) \end{tikzcd}$$

Горизонтальной композицией естественных преобразований $\alpha : F \to G$ и $\beta : H \to I$, где $F, G : C \to D$, $H, I : D \to E$ называется естественное преобразование $\beta \cdot \alpha := \gamma : H \circ F \to I \circ G$, где $\gamma_X := \beta_{G(X)} H(\alpha_X) = I(\beta_X)\alpha_{H(X)}$. (В равенстве и определённости композиции можно убедиться, если нарисовать диаграмму всех переходов для каких-нибудь объектов A и B и морфизма $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$; но она будет большая: 14 узлов, 29 стрелок и абсолютная коммутативность.)

Если α обратим, т.е. α_X обратим и его можно заменить на α_X^{-1}, то α называется *естественным изоморфизмом*, а F и G называются *изоморфными*, и пишут $F \simeq G$.

Категории C и D называются *эквивалентными* (и пишут $C \simeq D$), если есть функторы $F : C \to D$, $G : D \to C$ и естественные изоморфизмы $\alpha : \mathrm{id}_D \to F \circ G$ и $\beta : \mathrm{id}_C \to G \circ F$.

Замечание 8. Таким образом мы получили категорию $\mathrm{Funct}(C, D)$ функторов $C \to D$, где морфизмами являются естественные преобразования.

Лемма 32. *Зафиксируем категорию I состоящую из объектов 0 и 1 и единственного нетождественного морфизма $0 \to 1$. Тогда для всяких функторов $F, G : C \to D$ задать естественное преобразование $F \to G$ — всё равно, что задать функционал $H : C \times I \to D$, что $H(\cdot, 0) = F$ и $H(\cdot, 1) = G$.*

Лемма 33. *Горизонтальная и вертикальная композиции коммутируют.*

Пример 17.

1. ...

2. Назовём *топологической группой* группу заданную на топологическом пространстве G, что сама операция группы есть непрерывное отображение $G \times G \to G$. Например, $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^\cdot$ есть топологические группы на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ соответственно. Будем рассматривать категорию LocCompAbGroups локально компактных (у всякой точки есть замкнутая окрестность, являющаяся компактной) топологических абелевых групп. Для всякой группы A определим сопряжённую $A^* := \mathrm{Hom}(A, S^1)$ — группа непрерывных гомоморфизмов $A \to S^1$ с некоторой топологией. Тогда есть тривиальный функтор F и нетривиальный функтор G из рассматриваемой категории в себя, где $G(A) = A^{**}$. При этом естественное преобразование $F \to G$ строится также как для векторных пространств. Таким образом $\mathrm{LocCompAbGroups} \simeq \mathrm{LocCompAbGroups}^*$.

3. $\mathrm{CompAbGroups} \simeq \mathrm{AbGroups}$.

4. Пусть CompTop— категория компактных топологических пространств.

Определение 40. Пусть дан функтор $F : C \to D$. Для всяких $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ временно обозначим функцию

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_C(X, Y) \to \mathrm{Hom}_D(F(X), F(Y)), f \mapsto F(f).$$

Тогда f называется

- *унивалентным* (также "*faithful*"), если $F_{X,Y}$ инъективен
- *полным* (также "*full*"), если $F_{X,Y}$ сюръективен
- *вполне унивалентным* (также "*fully faithful*"), если $F_{X,Y}$ биективен

для всяких $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$.

Также F называется *существенно сюръективным* (также "*по существу сюръективный*", "*плотный*", "*essentially surjective*" или "*dense*"), если для всякого $B \in \mathrm{Ob}(D)$ есть $A \in \mathrm{Ob}(C)$, что

$$B \simeq F(A).$$

Теорема 34. *Функтор $F : C \to D$ задаёт эквивалентность категорий тогда и только тогда, когда*

- *F вполне унивалентен,*
- *F существенно сюръективный.*

Доказательство.

Лемма 34.1. *Пусть даны объекты $X, Y, S, T \in \mathrm{Ob}(C)$ и изоморфизмы $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ и $\beta \in \mathrm{Hom}(S, T)$. Тогда есть единственная отображение, и оно является биекцией, $\varphi : \mathrm{Hom}(X, S) \to \mathrm{Hom}(Y, T)$, что следующая диаграмма коммутативна.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\varphi(f)"] \\ S \arrow[r, "\beta"] & T \end{tikzcd}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi : \mathrm{Hom}(X, S) \to \mathrm{Hom}(Y, T), f \mapsto \beta f \alpha^{-1}.$$

Очевидно, он делает диаграмму коммутативной. При чём φ обратим: если определить функцию

$$\varphi^{-1} : \mathrm{Hom}(Y, T) \to \mathrm{Hom}(X, S), g \mapsto \beta^{-1} g \alpha,$$

то сразу будет понятно, что $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(X,S)}$, а $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(Y,T)}$. Это показывает существование φ и то, что оно биекция.

Если есть другая функция ψ, подходящая тем же требованиям, то мы имеем, что для всякого $f \in \mathrm{Hom}(X, S)$

$$\beta f = \psi(f)\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(f) = \beta f \alpha^{-1} = \psi(f)\alpha\alpha^{-1} = \psi(f),$$

что прямо означает $\varphi = \psi$. Это означает единственность φ. □

Пусть F задаёт эквивалентность категорий. Тогда есть функтор $G : D \to C$ и естественные изоморфизмы $\tau : F \circ G \to \mathrm{Id}_D$, $\sigma : G \circ F \to \mathrm{Id}_C$.

- Для всякого $X \in D$ существование τ означает

  $$F(G(X)) \simeq X.$$

  Это означает существенную сюръективность F.

- Для всякого $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ $(X, Y \in \mathrm{Ob}(C))$ существование σ означает, что есть изоморфизмы $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, G(F(X)))$ и $\beta \in \mathrm{Hom}(Y, G(F(Y)))$, что следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(F(f))"] \\ Y \arrow[r, "\beta"] & G(F(X)) \end{tikzcd}$$

  Следовательно, функция $f \mapsto G(F(f))$ есть биекция $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(G(F(X)), G(F(Y)))$. Аналогично $f \mapsto F(G(f))$ есть биекция. Значит F и G являются и инъекциями и сюръекциями, то бишь биекциями. Это означает вполне унивалентность F.

Теперь пусть F вполне унивалентен и существенно сюръективности. Из существенной сюръективности следует, что для всякого $X \in \mathrm{Ob}(D)$ есть $Y \in \mathrm{Ob}(C)$, что $X \simeq F(Y)$. Тогда определим искомый G на $\mathrm{Ob}(D)$: каждому X сопоставим только что найденный Y. В таком случае $X \simeq F(Y) = F(G(X))$.

Теперь определим искомый G на $\mathrm{Hom}(A, B)$. Мы знаем, что есть изоморфизмы $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, F(G(A)))$ и $\alpha \in \mathrm{Hom}(B, F(G(B)))$. Значит есть единственная отображение (и оно биекция) $\varphi : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(G(A)), F(G(B)))$, что следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & F(G(A)) \arrow[d, "\varphi(f)"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & F(G(B)) \end{tikzcd}$$

При этом $F_{G(A),G(B)}$ биективно по вполне унивалентности, а мы хотим, чтобы $F_{G(A),G(B)} \circ G_{A,B}$ задавала коммутативность диаграммы выше. Значит

$$F_{G(A),G(B)} \circ G_{A,B} = \varphi \qquad \Longrightarrow \qquad G_{A,B} = F^{-1}_{G(A),G(B)} \circ \varphi.$$

Несложно проверить, что G функтор (т.е. что ещё $G(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{G(A)}$ и $G(fg) = G(f)G(g)$). Таким образом мы построили G, что $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_D$.

Теперь покажем, что $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_C$. Мы знаем, что для всякого $A \in \mathrm{Ob}(C)$ есть фиксированные (заданные естественным преобразованием $F \circ G \to \mathrm{Id}_D$)

$$\alpha_{F(A)} \in \mathrm{Hom}(F(A), F(G(F(A)))) \quad \text{и} \quad \alpha^{-1}_{F(A)} \in \mathrm{Hom}(F(G(F(A))), F(A)),$$

вместе образующие изоморфизм $F(A)$ и $F(G(F(A)))$. По вполне унивалентности F есть

$$\beta_A \in \mathrm{Hom}(A, G(F(A))) \text{ и } \beta_A^{-1} \in \mathrm{Hom}(G(F(A)), A),$$

что $F(\beta_A) = \alpha_{F(A)}$ и $F(\beta_A^{-1}) = \alpha^{-1}_{F(A)}$. Следовательно,

$$F(\beta_A \beta_A^{-1}) = F(\beta_A) F(\beta_A^{-1}) = \alpha_{F(A)} \alpha^{-1}_{F(A)} = \mathrm{id}_{F(G(F(A)))} = F(\mathrm{id}_{G(F(A))}), \quad \Longrightarrow \quad \beta_A \beta_A^{-1} = \mathrm{id}_{G(F(A))};$$

аналогично $\beta_A^{-1} \beta_A = \mathrm{id}_A$. Т.е. β_A — изоморфизм $A \to G(F(A))$. Аналогичным образом можно поднять коммутативные диаграммы и понять, что все β_A задают естественный изоморфизм $\mathrm{Id}_C \to G \circ F$. □

Определение 41. Категория называется *скелетной*, если в ней изоморфные объекты совпадают.

Скелет категории C — такая категория D, что

- D — скелетна,
- для всякого объекта $X \in C$ есть объект $Y \in D$, что $X \simeq Y$,
- $\mathrm{Hom}_D(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(X,Y)$,
- $f \circ_D g = f \circ_C g$.

Замечание 9. Вложение D в C — вполне унивалентный существенно сюръективный функтор. Таким образом скелет категории эквивалентен самой категории.

Пример 18.

1. В Sets в качестве объектов скелета можно взять кардиналы.
2. В категории вполне упорядоченных множеств объекты скелета — ординалы.
3. В Vect_F объекты скелета — $F^{(I)}$ для всякого кардинала I.
4. Скелет в предпорядке — порядок.

Лемма 35.

1. *В каждой категории существует скелет.*
2. *Скелет эквивалентен исходной категории.*
3. *Эквивалентность между скелетными категориями — изоморфизм.*
4. *Две категории эквивалентны тогда и только тогда, когда их скелеты изоморфны.*

Доказательство.

1. С помощью аксиомы выбора выделить в каждом классе изоморфности представителя и сузить категорию на них.
2. Вложение скелета категории в саму категорию вполне унивалентно (действительно, если в скелете есть объекты X и Y, то $\mathrm{Hom}(X,Y)$ в скелете был унаследован от изначальной категории, а поэтому обратное вложение задаёт биекцию на $\mathrm{Hom}(X,Y)$) и существенно сюръективно (так как по определению скелета у каждого объекта в изначальной категории у каждого объекта из его класса изоморфности был выделен в скелет какой-то объект в скелет). Значит по доказанной теореме данное вложение задаёт эквивалентность категорий.
3. Пусть категории C и D скелетны и эквивалентны, а эквивалентность задаётся функторами $F : C \to D$ и $G : D \to C$ и естественными изоморфизмами $\tau : GF \to \mathrm{Id}_C$ и $\sigma : FG \to \mathrm{Id}_D$. Тогда для всякого объекта $X \in \mathrm{Ob}(C)$ имеем, что $X \simeq G(F(X))$, а значит GF совпадает с Id_C на $\mathrm{Ob}(C)$. Таким образом F задаёт биекцию: F — биекция на $\mathrm{Ob}(C)$ и на $\mathrm{Hom}(X,Y)$ для всех $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$. Значит можно рассмотреть обратный функтор $F^{-1} : D \to C$, и тогда $F^{-1}F = \mathrm{Id}_C$, $FF^{-1} = \mathrm{Id}_D$. Т.е. всякий функтор, задающий эквивалентность, задаёт изоморфность.
4. По предыдущим пунктам эквивалентность категорий равносильна эквивалентности их скелетов (так как эквивалетность категорий — отношение эквивалентности), что равносильно изоморфности скелетов.

□

Определение 42. Пусть фиксированы категория C и объект $A \in \mathrm{Ob}(C)$. Тогда можно определить ковариантный функтор

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(A,-) = h^A : C &\to \mathrm{Sets}, \\ &\mathrm{Ob}(C) \ni X \mapsto \mathrm{Hom}(A,X), \\ &\mathrm{Hom}(X,Y) \ni k \mapsto (\varphi : \mathrm{Hom}(A,X) \to \mathrm{Hom}(A,Y), f \mapsto k \circ f) \end{aligned}$$

и контравариантный функтор

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(-,A) = h_A : C &\to \mathrm{Sets}, \\ &\mathrm{Ob}(C) \ni X \mapsto \mathrm{Hom}(X,A), \\ &\mathrm{Hom}(X,Y) \ni k \mapsto (\varphi : \mathrm{Hom}(X,A) \to \mathrm{Hom}(Y,A), f \mapsto f \circ k). \end{aligned}$$

Лемма 36 (Йонеды (Yoneda))**.** *Пусть фиксированы категория C и объект $A \in \mathrm{Ob}(C)$.*

1. *Для всякого ковариантного функтора $F : C \to \mathrm{Sets}$ отображение*

$$\Lambda : \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-), F) \to F(A), \tau \mapsto \tau_A(\mathrm{id}_A)$$

является биекцией.

2. *Для всякого контравариантного функтора $F : C \to \mathrm{Sets}$ отображение*

$$\Lambda : \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(-,A), F) \to F(A), \tau \mapsto \tau_A(\mathrm{id}_A)$$

является биекцией.

Доказательство.

1. Пусть дано какое-то естественное преобразование $\tau : h_A \to F$. Нарисуем его диаграмму для $k \in \mathrm{Hom}(A,X)$. Выделим также в этой диаграмме орбиту id_A из $\mathrm{Hom}(A,A)$ (слева сверху). Получим следующую диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,A) \arrow[rrr, "h_A(k): f\mapsto k\circ f"] \arrow[ddd, "\tau_A"'] & & & \mathrm{Hom}(A,X) \arrow[ddd, "\tau_X"] \\
& A \arrow[r, "k"] \arrow[ul, "h_A"'] \arrow[ddl, "F"] & X \arrow[ur, "h_A"] \arrow[ddr, "F"'] & \\
& & & \\
F(A) \arrow[rrr, "F(k)"'] & & & F(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_A \arrow[r, mapsto, "h_A(k)"] \arrow[d, mapsto, "\tau_A"'] & k \arrow[d, mapsto, "\tau_X"] \\
\tau_A(\mathrm{id}_A) \arrow[r, mapsto, "F(k)"'] & F(k)(\tau_A(\mathrm{id}_A))
\end{tikzcd}$$

По ней сразу понятно, что $\tau_X(k) = F(k)(\tau_A(\mathrm{id}_A))$. Это значит, что τ определяется не более чем единственным образом и только по $\tau_A(\mathrm{id}_A)$. Значит Λ — инъекция.

Тогда возьмём всякое $a \in F(A)$ и определим $\tau_X(f) := F(f)(a)$. Т.е. попытаемся восстановить τ для $\tau_A(\mathrm{id}_A) = a$. Совокупность $\{\tau_X\}$ мы восстановили, осталось проверить, что тогда τ действительно является естественным преобразованием.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,X) \arrow[rrr, "h_A(k): f\mapsto k\circ f"] \arrow[ddd, "\tau_X: f\mapsto F(f)(a)"'] & & & \mathrm{Hom}(A,Y) \arrow[ddd, "\tau_Y: g\mapsto F(g)(a)"] \\
& X \arrow[r, "k"] \arrow[ul, "h_A"'] \arrow[ddl, "F"] & Y \arrow[ur, "h_A"] \arrow[ddr, "F"'] & \\
& & & \\
F(A) \arrow[rrr, "F(k)"'] & & & F(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "h_A(k)"] \arrow[dd, mapsto, "\tau_A"'] & k \circ f \arrow[d, mapsto, "\tau_X"] \\
& F(k \circ f)(a) \arrow[d, equal, "?"] \\
F(f)(a) \arrow[r, mapsto, "F(k)"'] & F(k)(F(f)(a))
\end{tikzcd}$$

Несложно видеть по нарисованным диаграммам, что вся суть проблемы коммутативности диаграммы заключается в доказательстве того, что $F(k)(F(f)(a)) = F(k \circ f)(a)$, т.е. $F(k) \circ F(f) = F(k \circ f)$. Но это следует из того, что F функтор. Это значит, что Λ — сюръекция.

Таким образом F — биекция с простым описанием.

2. Поскольку $A_C = A_{C^{\mathrm{op}}}$, $\mathrm{id}_{A_C} = \mathrm{id}_{A_{C^{\mathrm{op}}}}$,

$$\mathrm{Hom}_C(-, A_C) = \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(A_{C^{\mathrm{op}}}, -),$$

F — ковариантный функтор $C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$, а

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_C(-, A_C), F) = \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(A_{C^{\mathrm{op}}}, -), F),$$

то задача сводится к предыдущей.

□

Следствие 36.1. *Выше упомянутые отображения задают биекции*

$$\mathrm{Nat}(h^A, h^B) \leftrightarrow \mathrm{Hom}(B, A) \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Nat}(h_A, h_B) \leftrightarrow \mathrm{Hom}(A, B).$$

Следствие 36.2. *Есть вполне унивалентный функтор*

$$C \to \widehat{C} := \mathrm{Funct}(C^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}).$$

Доказательство. Рассмотрим функтор

$$\begin{aligned} F : C &\to \mathrm{Funct}(C^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}),\\ &\mathrm{Ob}(C) \ni X \mapsto h_X,\\ &\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(h_X, h_Y) = \mathrm{Nat}(h_X, h_Y), \end{aligned}$$

где отображение морфизмов производится согласно биекции из предыдущего следствия. И поскольку это соответствие — биекция, данный функтор вполне унивалентен. □

Определение 43. Функтор $F : C \to \mathrm{Sets}$ называется *представимым*, если изоморфен $\mathrm{Hom}(A, -)$ для некоторого $A \in \mathrm{Ob}(C)$. Аналогично если F контраваринтный, то представим, если изоморфен $\mathrm{Hom}(-, A)$.

Определение 44. Пусть даны категории C и D и объект $Z \in \mathrm{Ob}(D)$. *Постоянный функтор*

$$\begin{aligned} \mathrm{const}_Z : C &\to D,\\ &\mathrm{Ob}(C) \ni X \mapsto Z,\\ &\mathrm{Hom}(X, Y) \ni f \mapsto \mathrm{id}_Z. \end{aligned}$$

Определение 45. Пусть D — малая категория (т.е. категория, где класс объектов является множеством), а F — функтор $D \to C$. *Конус над* F — совокупность (L, φ) объекта $L \in \mathrm{Ob}(C)$ и семейства гомоморфизмов $\varphi_X : L \to F(X)$ для каждого $X \in \mathrm{Ob}(D)$, что для всякого морфизма $f : X \to Y$ в D верно $F(f) \circ \varphi_X = \varphi_Y$. *Предел* F — такой конус (L, φ) над F, что для всякого конуса (N, ψ) над F существует единственный морфизм $u : N \to L$, что $\varphi_X \circ u = \psi_X$.

Аналогично определяется коконус и копредел.

Определение 46. Пусть D — малая категория (т.е. категория, где класс объектов является множеством), а F — функтор $D \to C$. *Предел* F — объект, задающий представимость функтора $Z \mapsto \mathrm{Nat}(\mathrm{const}_Z, F)$, вместе с фиксированным преобразованием $\mathrm{const}_{\lim F} \to F$.

Пример 19.

1. Терминальный и инициальный объекты — это предел и копредел в случае пустой категории D.

2. Произведение и копроизведение — это предел и копредел соответственно для D, состоящего только из 2 объектов.

3. Расслоёные произведение и копроизведение — это предел и копредел соответственно диаграмм (функторов, где D).

$$\begin{tikzcd} \bigcirc \arrow[dr] & & \bigcirc \arrow[dl] \\ & \bigcirc & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} \bigcirc & & \bigcirc \\ & \bigcirc \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

4. Уравниитель — это предел диаграммы

$$\begin{tikzcd} \bigcirc \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bigcirc \end{tikzcd}$$

5. Предел диаграммы из только одного объекта — тот самый объект.

Пример 20. Если рассмотреть в качестве C некоторое множество с порядком (т.е. для всякого элемента i в множестве определим элемент X_i в категории и определить стрелку $X_i \to X_j$ тогда и только тогда, когда $i > j$), то конусами и коконусами всякой диаграммы будут верхние и нижние грани соответствующего подмножества соответственно, а пределом и копределом в нём будут точные верхняя и нижняя грани.

Если же взять категорию коммутативных колец и выделить в ней категорию диаграмму с объектами $X_k := \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ и морфизмами-факторизациями $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ для каждых $n \geqslant m$, то пределом будет кольцо p-адических чисел.

Аналогично, если в коммутативных кольцах выделить диаграмму с объектами $X_k := F[T]/(T^i)$, то получится кольцо степенных рядов $F[[T]]$.