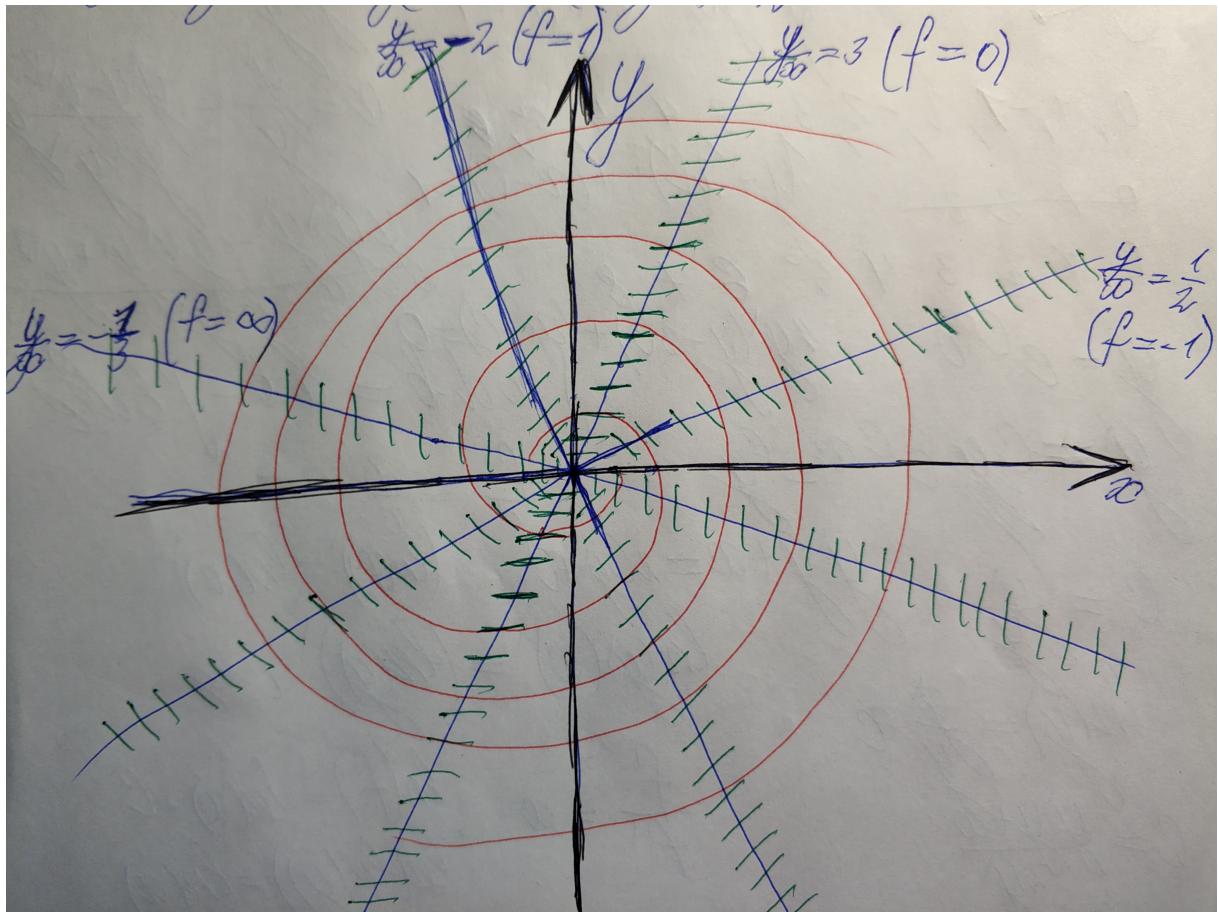


Домашнее задание от 14.09
Дифференциальные уравнения и динамические системы.
Решения.

Глеб Минаев @ 204 (20.Б04-мкн)

15 сентября 2021 г.

Задача 11. Поскольку функция f данного уравнения является однородной дробно-линейной функцией от x и y , то она константна на прямых, проходящих через ноль (и при этом на разных прямых принимает разные результаты). Таким образом строим следующий рисунок.



Синие линии — линии, на которых f достигает значения $\infty, 0, 1$ и -1 (коэффициент наклона и принимаемое значение написано рядом с прямой). Зелёным нарисованы изоклины. Красным нарисованы предположительные траектории.

Задача 54. Перепишем наше уравнение следующим образом:

$$y' = \operatorname{tg}(x)(2 - y).$$

Таким образом $m(x) = \operatorname{tg}(x)$, а $n(y) = 2 - y$. Следовательно, получаем интеграл

$$U(x, y) = \int \frac{dy}{2-y} - \int \operatorname{tg}(x) dx = -\ln(2-y) + \ln(\cos(x)) = \ln\left(\frac{\cos(x)}{2-y}\right).$$

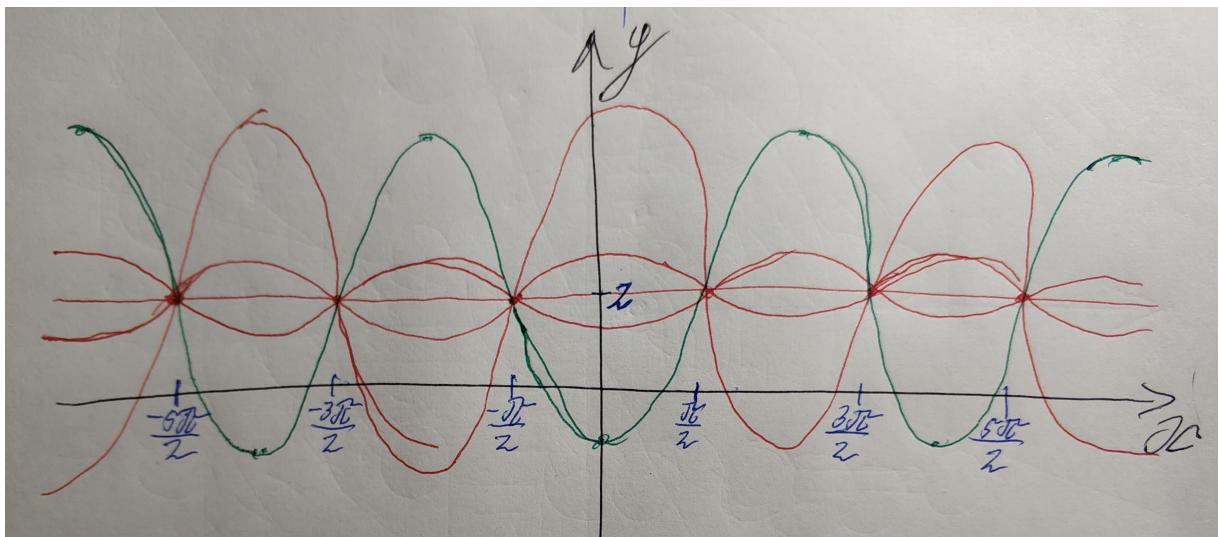
Подставляя $U(x, y) = C$, получаем функциональное уравнение

$$\ln\left(\frac{\cos(x)}{2-y}\right) = C.$$

Очевидно, что его решение есть

$$y = A \cos(x) + 2$$

для некоторой константы A . Рисуя для разных A решения, получаем следующий рисунок.



Заметим, что при $x \rightarrow 0$

$$y(x) = A \cos(x) + 2 \rightarrow A \cos(0) + 2 = A + 2.$$

Таким образом $A = -3$ и мы получаем зелёную кривую на нашем рисунке.

Задача 62. Делая замену $z = y - x$, перепишем наше уравнение следующим образом:

$$z' = \cos(z) - 1.$$

Таким образом $m(x) = 1$, а $n(y) = \cos(z) - 1$. Следовательно, получаем интеграл

$$U(x, y) = \int \frac{dy}{\cos(z)-1} - \int 1 dx = \operatorname{ctg}\left(\frac{z}{2}\right) - x = \operatorname{ctg}\left(\frac{y-x}{2}\right) - x.$$

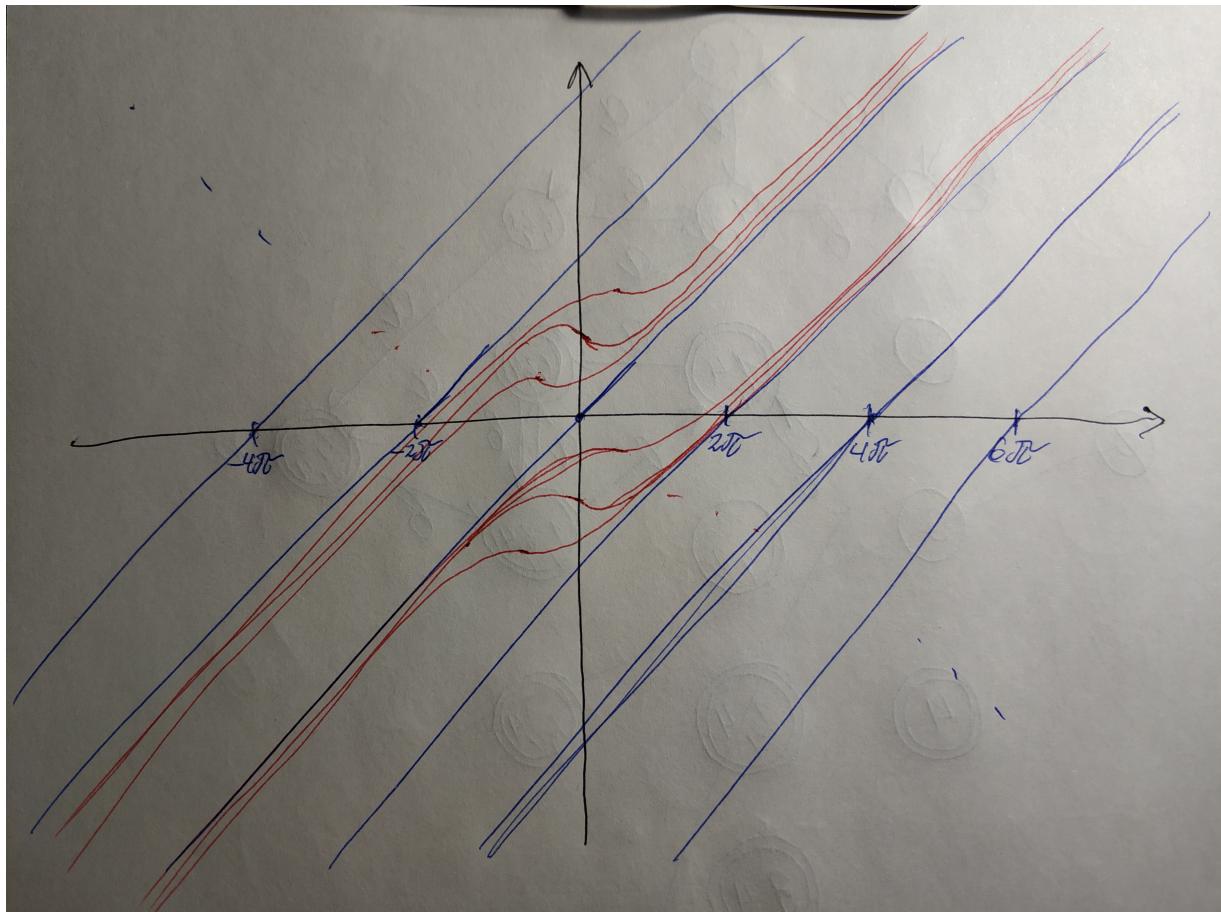
Подставляя $U(x, y) = C$, получаем функциональное уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{y-x}{2}\right) - x = C.$$

Очевидно, что его решение есть

$$y = x + 2 \operatorname{ctg}^{-1}(C+x) + 2\pi n$$

для некоторых константы C и целой константы n (последняя появляется из следствия $\operatorname{ctg}(a) = \operatorname{ctg}(b) \Rightarrow a - b : \pi$). Рисуя для разных C и n решения, получаем следующий рисунок.



Несложно видеть, что из-за константы n область делится на полоски горизонтальной ширины 2π , параллельные прямой $y = x$. А из-за константы C мы имеем расслоение внутри каждой полосы (при этом решения получаются друг из друга сдвигом, параллельным той же прямой $y = x$, или сдвигом на $2\pi n$ по горизонтали).
