Листочек 1. Сходящийся.
Математический анализ. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

10 ноября 2020 г.

Базовые задачи

Задача 1 (сдано)**.**

Лемма 1. *$\phi([\varepsilon; \varepsilon + 11^{-n})) = [0;1]$, где $\varepsilon =_{11} 0{,}d_1 \dots d_{n-1}A$.*

Доказательство. Расмотрим любое число $\gamma =_{10} 0{,}g_1 g_2 \dots \in [0;1]$. Среди данных цифр нет A, поэтому если $\alpha = 0{,}d_1 \dots d_{n-1} A g_1 g_2 \dots$, то $\phi(\alpha) = \gamma$. Но $\alpha \in [\varepsilon; \varepsilon + 11^{-n})$, значит $\phi([\varepsilon; \varepsilon + 11^{-n})) = [0;1]$. □

Замечание 1. Единица включена в отрезок значений, так как равна 0,(9).

Лемма 2. *Для любого интервала I на отрезке $[0;1]$ найдутся n и $\varepsilon = 0{,}d_1 \dots d_{n-1}A$, что $I \supseteq [\varepsilon; \varepsilon + 11^{-n})$.*

Доказательство. Рассмотрим $\delta = 11^{-m}$ для некоторого m, что $2\delta < |I|$. Тогда по принципу кузнечика Кронекера на I найдутся две точки кратные δ, тогда полуинтервал с концами в них будет подходить на роль $[\varepsilon; \varepsilon + 11^{-n})$. □

Используя лемму 2 мы находим в данном интервале I полуинтервал

$$[0{,}d_1 \dots d_{n-1}A, 0{,}d_1 \dots d_{n-1}A + 11^{-n}],$$

образ которого по лемме 1 равен $[0;1]$. Тогда $\phi(I) \supseteq [0;1]$, но и $\phi(I) \subseteq [0;1]$, значит $\phi(I) = [0;1]$. Таким образом $\forall y \in [0;1]$ найдётся $x \in I$, что $\phi(x) = y$.

Задача 2 (сдано)**.** Рассмотрим последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} := \{x_n - 3\}_{n=0}^{\infty}$. Так мы получаем рекуренту

$$y_{n+1} = \frac{3}{y_n + 3} + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n} - \frac{y_n}{y_n + 3}$$

Заметим, что $y_1 = -2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 0$. Тогда несложно видеть по индукции, что $\forall n > 2 \quad |y_n| < 1$:

$$|y_{n+1}| \leqslant \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{y_n}{y_n + 3}\right| < \frac{1}{2} + \frac{|y_n|}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Из этого заметим, что

$$|y_{n+1}| < \frac{1}{n} + \frac{|y_n|}{2}$$

Заметим по индукции, что $|y_n| < \frac{4}{n}$ для всех $n > 2$. База: для $n = 3$ очевидно. Шаг:

$$|y_{n+1}| < \frac{1}{n} + \frac{|y_n|}{2} < \frac{3}{n} \leqslant \frac{3}{n} + \frac{n-3}{n(n+1)} = \frac{3}{n} + \frac{4n-3(n+1)}{n(n+1)} = \frac{3}{n} + \frac{4}{n+1} - \frac{3}{n} = \frac{4}{n+1}$$

Тем самым мы получаем сразу несколько вещей:

- последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится, а с ней и $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$;
- $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} + 3 = 3$;
- $N(\varepsilon) = \max(3, \frac{4}{\varepsilon})$ (эта функция одинакова для обеих последовательностей).

Задача 3 (сдано)**.**

- Пусть f полунепрерывна снизу; требуется показать, что для любого a прообраз $(a; +\infty)$ открыт. Значит треубется показать для любой точки $t \in f^{-1}((a; +\infty))$, что она внутренняя, т.е. у неё есть окрестность, отображающаяся в $(a; +\infty)$. Пусть $b := f(t)$, тогда по определению полунепрерывности снизу

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(U_\delta(t)) \subseteq (b - \varepsilon; +\infty).$$

  Но поскольку $b \in (a; +\infty)$, то $b > a$, значит для $\varepsilon = b - a$ тоже найдётся такое δ. А это и значит, что некоторая окрестность отображается в $(a; +\infty)$.

- Пусть известно, что для любого a прообраз $(a; +\infty)$ открыт; требуется показать, что f полунепрерывна снизу. Значит требуется показать для любой точки t, что

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(U_\delta(t)) \subseteq (f(t) - \varepsilon; +\infty).$$

  Рассмотрим $S := f^{-1}((f(t) - \varepsilon; +\infty))$. поскольку оно открыто и в нём лежит t, то в S содержится некоторая δ-окрестность t как подмножество. Это и означает, что $f(U_\delta(t)) \subseteq (f(t) - \varepsilon; +\infty)$.

Задача 4 (сдано)**.** Обозначим нашу функцию, которая отображает каждый элемент последовательности в следующий, как $f(x)$. Также подним её до функции F над $\mathbb{R}P^1$: $F((x : y)) = (2x^3 : (3x^2 - y^2)y)$. На всякий случай проверим, что она корректна: первая однородная координата зануляется только если $x = 0$, но тогда вторая равна $(3 \cdot 0^2 - 1^2) \cdot 1 = -1$, т.е. всё корректно.

Лемма 3. *Пусть известно, что последовательность сходится, тогда она сходится к неподвижной точке F.*

Доказательство. Заметим, что поскольку F полиномиальна, то непрерывна. Поэтому

$$\lim\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \lim\{F(x_n)\}_{n=0}^{\infty} = F(\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = F(\lim\{x_n\}_{n=1}^{\infty}),$$

что означает, что предел последовательности — непожвижная точка F. $\square$

Лемма 4. *Неподвижные точки F — $(-1 : 1)$, $(0 : 1)$, $(1 : 1)$ и $(1 : 0)$.*

Доказательство. Для этого решим уравнение:

$$(x:y) = (2x^3 : (3x^2 - y^2)y) \qquad xy(3x^2-y^2) = 2x^3y$$
$$0 = y(3x^3 - xy^2 - 2x^3) \qquad 0 = yx(x^2 - y^2)$$
$$0 = y \cdot x \cdot (x-y) \cdot (x+y)$$

□

Также несложно заметить, что прообразы ∞ — сама ∞, а также $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Лемма 5. *$f(-x) = -f(x)$.*

Доказательство. $f(x) = \frac{2x^3}{3x^2-1} = x\frac{2}{3-1/x^2}$. В последнем выражении при замене $x \mapsto -x$ дробь не меняется, а x меняет знак, поэтому Q.E.D. □

Следствие 5.1. *Можно рассматривать только $[0;+\infty)$, чтобы проанализировать данную динаммическую систему.*

Лемма 6. *$\forall x \in (\sqrt{\frac{1}{3}};+\infty)$ верно, что $f(x) \geqslant 1$.*

Доказательство. $3x^2-1>0$, поэтому $f(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow 2x^3 \geqslant 3x^2-1$. Заметим, что $2x^3-3x^2+1 = (x-1)(2x^2-x-1) = (x-1)^2(2x+1)$, что очевидно не меньше 0 на $(-\frac{1}{2};+\infty) \supseteq (\sqrt{\frac{1}{3}};+\infty)$. □

Лемма 7. *$\forall x \in (1;+\infty)$ верно, что $f(x) < x$.*

Доказательство. $f(x) = \frac{2x^3}{3x^2-1} = x\frac{2}{3-1/x^2}$. При $x>1$ имеем, что $x^2>1$, поэтому $1/x^2 \in (0;1)$, поэтому $3-1/x^2 \in (2;3)$, поэтому $\frac{2}{3-1/x^2} \in (0;1)$. Поэтому $f(x)<x$. □

Из последних двух лемм мы получаем, что $f((\sqrt{\frac{1}{3}};1)) = (1;+\infty)$. А если какой-то член последовательности попал в $(1;+\infty)$, то после этого последовательность будет уменьшаться, не принижая 1, значит будет сходиться; но сходиться не к чему кроме как к 1.

Лемма 8. *$\forall x \in (-\sqrt{\frac{1}{3}};\sqrt{\frac{1}{3}})$ верно, что $|f(x)|>|x| \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{1}{5}}$.*

Доказательство. Заметим, что $|f(x)| = |-x\frac{2}{3-1/x^2}| = |x|\frac{2}{1/x^2-3}$, так как $1/x^2>3$. Но

$$\frac{2}{1/x^2-3} > 1 \qquad 2 > 1/x^2 - 3 \qquad 5 > 1/x^2 \qquad x^2 > \frac{1}{5}$$
$$|x| > \sqrt{\frac{1}{5}}$$

□

Замечание 2. Аналогичным рассуждением показывается, что $\sqrt{\frac{1}{5}}$ и $-\sqrt{\frac{1}{5}}$ переходят друг в друга, а всё, что меж ними, уменьшается по модулю.

Следствие 8.1. *Если какой-то член последовательности находится на $(\frac{1}{5};\frac{1}{3})$ (или же ему аналогично $(-\frac{1}{3};-\frac{1}{5})$), то модуль последовательности будет увеличиваться. Остаться последовательность в $(-\sqrt{\frac{1}{3}};\sqrt{\frac{1}{3}})$ не может, так как иначе сойдётся к неправильному значению, поэтому рано или поздно вылетит вне, а значит либо перейдёт в ∞, либо сойдётся к ± 1.*

Следствие 8.2. *Если же какой-то член последовательности находится на* $(-\sqrt{\frac{1}{5}}; \sqrt{\frac{1}{5}})$*, то вся последовательность далее начинает уменьшаться по модулю, сходясь к* 0*.*

Таким образом, чтобы попасть в 0 нужно, чтобы $x_0 \in (-\sqrt{\frac{1}{5}}; \sqrt{\frac{1}{5}})$. А все досягаемые пределы — это -1, 0, -1 и ∞.

Задача 5. TBP

Задача 6 (сдано).

Лемма 9. *Множество* L *предельных точек* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ связно*, т.е.* $\forall a, b \in L \quad [a; b] \subseteq L$*.*

Доказательство. Пусть a, b — предельные точки последовательности. Пусть также $c \in (a; b)$. Заметим, что так как разностная последовательность последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится, то $\forall \varepsilon > 0$ существует такой момент, когда последовательность начинает шагать с шагом меньшим ε. Также поскольку a и b предельные точки, то после любого момента эта последовательность заскочит в любую окрестность a и любую окрестность b. Значит после любого момента будут существовать два других, где в первом она находилась в малой (посравнению с $|a-c|$ и $|b-c|$) окрестности a (и была с одной сторона от c), а во втором — в малой окрестности b (а т.е. с другой стороны c). Значит между этими моментами последовательность “перебегала от a к b”, и был момент, когда она попала в $\varepsilon/2$-окрестность c (т.к. ε — её шаг). Поскольку единственное ограничение на ε — быть > 0, то это значит, что последовательность побывала во всех окрестностях c бесконечно много раз. Значит c — предельная точка. Поскольку на c не ставилось условий кроме “$c \in (a; b)$”, то получаем, что $(a; b) \subseteq S$, или же $[a; b] \subseteq S$. □

Лемма 10. *Множество предельных точек любой последовательности замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — данная последовательность, L — множество её предельных точек, а m — предельная точка L. Тогда имеем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad U_{\varepsilon/2}(m) \cap L \neq \varnothing$, т.е. $\exists l \in L \cap U_{\varepsilon/2}(m)$. При этом по определению L последовательность посетит бесконечно много раз $\varepsilon/2$-окрестность l, а значит и ε-окрестность m. Таким образом последовательность посетит любую окрестность m бесконечно много раз, значит m — тоже предельная.

Так получаем, что L содержит все свои предельные точки, значит L замкнуто. □

Используя леммы выше получаем, что множество L предельных точек связно и замкнуто; осталось доказать, что такими свойствами обладают только отрезок, луч или прямая.

Заметим, что L содержит свои инфимум и супремум, если они определены (каждый по отдельности). Тогда если они оба имеются, то L — отрезок; если L имеет только один из них, то это закрытый луч, так как он содержит все точки между своим инфимумом (супремумом) и сколь угодно большими (маленькими) точками; если же он не имеет ни один из них, то это прямая, поскольку содержит все точки между сколь угодно большими и сколь угодно маленькими точками.

Задача 7 (сдано).

Лемма 11. *Связное открытое множество есть интервал, открытый луч или прямая.*

Доказательство. Пусть дано множество S. Заметим, что для a и b — любых двух точек $S \cup S'$ — интервал $(a;b)$ является подмножеством S, так как $\forall \varepsilon > 0$ найдутся a_ε и b_ε из S, лежащие в ε-окрестностях a и b соответственно. Поскольку тогда $(a_\varepsilon; b_\varepsilon) \subseteq S$, то $(a;b) \subseteq \bigcup_{\varepsilon>0}(a_\varepsilon; b_\varepsilon) \subseteq \bigcup_{\varepsilon>0} S = S$.

Вспоминим, что инфимум и супремум S являются его предельными точками, но не лежат в самом S. Тогда если у множества есть инфимум и супремум, то он является интервалом между ними, а если хотя бы один из них становится "бесконечностью", то соответствующий конец интервала становится бесконечностью (так получаются открытые лучи и вся прямая). ☐

Лемма 12. *Пусть есть семейство Σ попарно непересекающихся интервалов, длина которых хотя бы $L > 0$. Тогда Σ не более, чем счётно.*

Доказательство. Рассмотрим множество U верхних концов. Несложно понять, что расстояние между любыми двумя элементами U хотя бы L. Тогда если разбить $\mathbb{R}$ на полуинтервалы длины L, то на каждом из них будет не более одной точки из U, значит $|U| \leqslant |\mathbb{N}|$. Но поскольку $|\Sigma| = |U|$, то Σ не более, чем счётно. ☐

Лемма 13. *Пусть есть семейство Σ попарно непересекающихся интервалов. Тогда Σ не более, чем счётно.*

Доказательство. Предстваим Σ как дизъюнктное объединение $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, где Σ_n — множество интервалов Σ, длина которых лежит на $[2^n; 2^{n+1})$ (несложно проверить, что это и вправду дизъюнктное объединение). Тогда по лемме 12 каждое Σ_n не более чем счётно, значит Σ является объединением счётного числа не более чем счётных множеств, а значит само не более чем счётно. ☐

Рассмотрим отношение $\sim$ на X, где $a \sim b \Leftrightarrow [a;b] \subseteq X$. Несложно заметить, что $\sim$ — отношение эквивалентности. Тогда можно рассмотреть $\Sigma := X/\sim$.

Заметим, что любой элемент Σ — открытое (т.к. у каждой точки есть окрестность, с которой она лежит в X и которая связна, поэтому лежит в одном класссе эквивалентности) связное (по определению класса эквивалентности) множество, а значит по лемме 11 это интервал, открытый луч или прямая.

Также по лемме 13 Σ не более чем счётно. Таким образом X получилось представимым в виде дизъюнктного объединения не более чем счётного числа интервалов, открытых лучей и прямых.

P.S. Формально задача для $X \neq \mathbb{R}$, а прямых быть не должно, но это две равносильные задачи.

Рейтинговые задачи

Задача 8 (сдано)**.**

a) Заметим, что f неопределена на открытом множестве, которое представимо в виде дизъюнктного объединения интервалов. Тогда на каждом таком интервале определим функцию очень просто: как линейную функцию, интерполированную по значениям в концах интервала.

   Пусть точка $x \in M$. Посмотрим на пределы с каждой из сторон (с правой и с левой); WLOG с правой. Если она является границей интервала с правой стороны, то существует некоторая константа k, что $\forall \varepsilon > 0 : f((x; x + k\varepsilon)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$ (эта константа есть модуль обратного значения к коэффициенту наклона отрезка на данном интервале). В ином же случае есть “сколь угодно близкие интервалы” (всё ещё справа). Тогда $\delta(\varepsilon)$ можно строить следующим образом. Поскольку есть некоторая (правая) окрестность, в которой значения во всех точках M лежат в ε-окрестности $f(x)$, то можно взять за границу новой (правой) окрестности любой элемент M из этой окрестности; в таком случае все линейные промежутки будут из-за простого неравенства лежать в $U_\varepsilon(f(x))$, так как их концы будут. Так мы получаем с обеих сторон по ограничению, и беря минимум, мы получаем искомую функцию $\delta(\varepsilon)$.

Теперь осталось доказать непрерывность для $x \notin M$. Но это очевидно, поскольку тогда x вместе со своей некоторой окрестностью лежит в $\overline{M}$, а значит на некотором (одном!) интервале, образующем $\overline{M}$, а там функция просто линейна. Ну а линейные функции, очевидно непрерывны.

б) Для начала поймём, что липшицевые функции непрерывны. Поэтому доопределим функцию f на M' просто предельными значениями в этих точках. Получим f_1.

Лемма 14. *Пусть дана $n \in M' \setminus M$. Тогда f_1 липшицева с константой L на $M \cup \{n\}$.*

Доказательство. Есть $\{m_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathbb{N}^M$, предел которой есть n. Предположим противное: есть $b \in M$, что $|f_1(b) - f_1(n)| > L|b - n|$. Но поскольку $\{|f_1(b) - f_1(m_i)|\}_{i=0}^{\infty} \leqslant L\{|b - m_i|\}_{i=0}^{\infty}$, то $|f_1(b) - f_1(n)| = \lim\{|f_1(b) - f_1(m_i)|\}_{i=0}^{\infty} \leqslant L \lim\{|b - m_i|\}_{i=0}^{\infty} = L|b - n|$ — противоречие. □

Лемма 15. *f_1 липшицева с константой L на $M \cup M'$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда противное могло вызваться между точками $n_1, n_2 \in M \setminus M'$. Но заметим, что есть $\{m_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathbb{N}^M$, сходящаяся к n_2, тогда $|f_1(n_1) - f_1(n_2)| = \lim\{|f_1(n_1) - f_1(m_i)|\}_{i=0}^{\infty} \leqslant L \lim\{|n_1 - m_i|\}_{i=0}^{\infty} = L|n_1 - n_2|$ — противоречие. □

Теперь дополним f_1 как в пункте (а): на каждом интервале дополняющего множества просто определим линейную функцию. Получим f_2.

Лемма 16. *f_2 липшицева всё с той же константой на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. всё-таки возникает конфликт между какими-то точками p_1 и p_2. Пусть $S := M \cup M'$.

Поймём, что оба p_1 и p_2 не могут лежать в S, так как это противоречит предыдущей аксиоме. WLOG p_1 лежит на некотором интервале $(a; b)$ из дизъюнктного разложения $\overline{S}$. Пусть p_2 лежит не на том же интервале или лежит в S. Тогда

$$
\begin{aligned}
|f_2(p_1) - f_2(p_2)| &= \left| \frac{f_2(a)(p_1 - b) + f_2(b)(a - p_1)}{a - b} - f_2(p_2) \right| \\
&= \left| \frac{(f_2(a) - f_2(p_2))(p_1 - b) + (f_2(b) - f_2(p_2))(a - p_1)}{a - b} \right| \\
&\leqslant \frac{|f_2(a) - f_2(p_2)|(p_1 - b) + |f_2(b) - f_2(p_2)|(a - p_1)}{a - b} \\
&\leqslant \frac{L|a - p_2|(p_1 - b) + L|b - p_2|(a - p_1)}{a - b} \\
&= L\frac{|a - p_2|(p_1 - b) + |b - p_2|(a - p_1)}{a - b}
\end{aligned}
$$

Поскольку p_2 не лежит на $(a;b)$, то несложно видеть, что

$$\frac{|a-p_2|(p_1-b)+|b-p_2|(a-p_1)}{a-b}=|p_1-p_2|$$

А тогда $|f_2(p_1)-f_2(p_2)|\leqslant L|p_1-p_2|$ — противоречие.

Пусть же p_1 и p_2 лежат на одном интервале $(a;b)$, тогда $|f_2(p_1)-f_2(p_2)|\leqslant L|p_1-p_2|$ очевидно следует из того, что $\frac{|f_2(p_1)-f_2(p_2)|}{|p_1-p_2|}=\frac{|f_2(a)-f_2(b)|}{|a-b|}\leqslant L$. $\square$

Тем самым задача решена.

в)

Задача 9. TBP

Задача 10. TBP

Задача 11. TBP

Задача 12. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{\infty}$, сходящаяся к $(0,0)$, что значение

$$\frac{\ln(P(x_i,y_i))}{\ln(x_i^2+y_i^2)}$$

не органичено сверху. Тогда рассмотрим подпоследовательность, для которой это значение монотонно сходится к $+\infty$.

Затем выделим подпоследовательность, что направление (по модулю 2π, а не π) вектора (x_i,y_i) сходится; затем уберём лишние члены, чтобы сходимость была монотонной и с одной стороны от этого направления. Сделаем поворот координат, чтобы направление сходилось к направлению $(1,0)$, а дальше сделаем при необходимости замену $(x_i,y_i)\mapsto(x_i,-y_i)$, чтобы $y_i\geqslant 0$. Таким же образом затребуем монотонную сходимость по x. Таким образом мы получили последовательность $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{\infty}$ и многочлен P, что сама последовательность сходится к нулю, $x_i>0$ и монотонно сходится к 0, $y_i\geqslant 0$, значение y_i/x_i монотонно сходится к 0, а значение

$$\frac{\ln(P(x_i,y_i))}{\ln(x_i^2+y_i^2)}$$

монотонно сходится к $+\infty$.

В таком случае сразу заметим, что

$$\ln(x_i^2+y_i^2)=\ln(x_i^2)+\ln\left(1+\frac{y_i^2}{x_i^2}\right)=2\ln(x_i)+\ln\left(1+\frac{y_i^2}{x_i^2}\right)$$

При этом $y_i^2/x_i^2\to 0$, и тем самым полуачается, что $2\ln(x)\to-\infty$, а $\ln\left(1+\frac{y_i^2}{x_i^2}\right)\to 0$, поэтому можно рассматривать не $\ln(P)/\ln(x^2+y^2)$, а $\ln(P)/\ln(x)$.

Если $\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ в какой-то момент занулилась, то после этого она тождественно равна нулю. А тогда мы имеем, что P вырождается в полином от одной переменной, а тогда этот полином от одной переменной в нуле уменьшается быстрее любого монома, что очевидно неверно (хватит просто взять самый младший ненулевой член: все остальные мономы будут o-малыми от него, а значит в достаточно малой окрестности нуля, многочлен будет больше чем половина своего младшего ненулевого члена). Таким образом $y_i > 0$.

Расмотрим $c_i := \frac{\ln(y_i)}{\ln(x_i)}$. Мы и так знаем, что $\ln(x_i) \to -\infty$ и $\ln(y_i) - \ln(x_i) \to -\infty$. Поэтому с некоторого момента $0 > \ln(x_i) > \ln(y_i)$, а значит $c_i \geqslant 1$. Если c_i неограничено сверху, то можно выделить подпоследовательность, что c_i будет монотонно сходиться к $+\infty$, а тогда мы имеем, что для любого многочлена Q, не равного тождественно нулю, верно, что $|Q(x)|/y \to +\infty$. Это значит, что если мы распишем $P(x, y)$ как $P_k(x)y^k + \cdots + P_n(x)y^n$, то $P_0(x)y^0$ (а он ненулевой, так как иначе P занулялся бы на всей прямой $y = 0$) на фоне остальных членов суммы будет бесконечно великим, поэтому $P(x, y) \approx P_0(x)y^0 \succ x^{\deg(P_0)+1}$ — противоречие.

Тогда c_i ограничено, а значит есть подпоследовательность, что c_i сходится к некоторому c. В таком случае $y = x^c\tau$, а значит $\frac{\ln(\tau)}{\ln(x)} \to 0$. Отсюда следует, что любой полином от τ, разделённый на x, стремится к бесконечности. В таком случае $P(x, y) = P_1(\tau)x^{d_1} + \cdots + P_m(\tau)x^{d_m}$, где $0 < d_1 < \cdots < d_m$ (d_i не обязательно целое, так как равно $p + cq$ для $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), а тогда $P(x, y) \approx P_1(\tau)x^{d_1} \succ x^{d_1+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$ — противоречие.

Если τ не имеет предельной точкой корень P_1 (который ненулевой), то $P_1(\tau)$ имеет оценку снизу в виде константы. Иначе выделим подпоследовательность, что τ сходится к константе t. Тогда сделаем замену $\tau = t + \sigma$. Заметим, что тогда $P_1(\tau) \approx \sigma^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. А значит $P \approx x^{d_1}\sigma^k$. Но мы также получаем, что $x^{d_1}\sigma^k$ асимптотически меньше любого мономы от x, значит то же верно для σ^k, а значит и для σ.

Тогда представим P как многочлен от x и σ, но только степени x могут быть не только целыми. Заметим, что если выделить многочлен при σ^0, то он тождественно равен 0, так как иначе мы получаем мономиальную от x оценку снизу на P. Тогда можем рассмотреть последовательность точек отличающейся от данной лишь тем, что значения x те же, а σ — 0. Тогда значение P равно 0 в этой последовательности, чего быть не может.

Задача 12. ТВР
