

Алгебраическая геометрия.

Лектор — Иван Александрович Панин

Создатель конспекта — Глеб Минаев *

TODOs

Дописать.	2
Дописать.	3
Ref	4
Дописать?	8
Обозначить это по-нормальному.	9
Написать леммы про пересечения и объединения $I(X)$	12
Дописать?	18
Надо как-то разобраться с повторами	18
Обещанно рассказать на следующей лекции.	19

Содержание

1 Коммутативноалгебраическое введение	1
1.1 Алгебраические и чисто трансцендентные расширения полей	5
2 Аффинная геометрия	9

Литература:

- Хартсхорн, “Алгебраическая геометрия”.
- Атья, Макдональд, “Введение в коммутативную алгебру”.

Замечание 1. Все кольца ассоциативны, коммутативны и с единицей.

1 Коммутативноалгебраическое введение

Определение 1. Пусть I — частично упорядоченное по порядку \leq множество, т.е.

$$a \leq b \leq c \implies a \leq c.$$

ОВУ: всякая последовательности элементов $i_1 \leq i_2 \leq \dots$ стабилизируется с некоторого момента (т.е. последовательность имеет константный хвост).

Наличие минимального элемента. Для всякого $J \subseteq I$ существует $j_{\max} \in J$, что для всякого $j \in J$ имеет место следствие $j_{\max} \leq j \Rightarrow j = j_{\max}$.

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

Лемма 1. I удовлетворяет ОВУ тогда и только тогда, когда I удовлетворяет наличию минимального элемента.

Доказательство.

\Rightarrow) Предположим, что максимального элемента, т.е. для всякого элемента есть строго больший. Тогда мы можем построить строго возрастающую последовательность, что противоречит ОВУ.

\Leftarrow) Пусть дана нестрогая возрастающая последовательность $(i_m)_{m=1}^\infty$. Тогда применяя свойство наличия максимального элемента для $J := \{i_m\}_{m=1}^\infty$, получаем, что есть $j_M \in J$ (для некоторого M), для которого нет строго большего в J . Значит после j_M все элементы с ним совпадают.

□

Определение 2. Пусть A — кольцо, а M — A -модуль. Тогда $\text{mod}(A)$ — множество всех подмодулей в M , упорядоченных по включению $((0), M \in \text{mod}(M))$.

M нётеров, если $\text{mod}(A)$ удовлетворяет ОВУ (или наличию максимального элемента).

Лемма 2.

1. Если M нётеров, то любой подмодуль $N \subseteq M$ конечнопорождён (как A -модуль).

2. Если любой подмодуль M конечнопорождён, то M нётеров.

Доказательство.

1 \Rightarrow 2) Пусть M нётеров, $N \subseteq M$ — подмодуль. Пусть I — все конечнопорождённые модули в N .

I непуст, так как $(0) \in I$. Следовательно, в I есть максимальный элемент, пусть N_{\max} . Если $N_{\max} = N$, то N конечнопорождён. Если $N_{\max} \neq N$, то существует $x \in N \setminus N_{\max}$, что $N_{\max} \not\subseteq N_{\max} + x \cdot A \subseteq N$ — противоречие.

2 \Rightarrow 1) Пусть имеется последовательность $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ подмодулей M . Определим

$$M_\infty := \bigcup_{m=1}^\infty M_m.$$

M_∞ тоже подмодуль M . Значит M_∞ конечнопорождён. $x_1, \dots, x_n \in M_\infty$, значит есть n_0 , что $x_1, \dots, x_n \in M_{n_0}$. Следовательно,

$$M_{n_0} = M_{n_0+1} = M_{n_0+2} = \dots$$

□

Лемма 3. M' — подмодуль M и есть сюръективный гомоморфизм $\pi : M \rightarrow M/M' = M''$. Тогда M нётеров тогда и только тогда, когда M' и M'' нётеровы.

Доказательство. Пусть M — нётерово. Покажем, что M' нётерово. Пусть есть цепочка $M'_1 \subseteq M'_2 \subseteq \dots$ подмодулей M . M нётерово, значит цепочка стабилизируется, значит M' нётерово.

Покажем, что M'' нётерово. Пусть есть цепочка подмодулей $M''_1 \subseteq M''_2 \subseteq \dots$. Следовательно $[\pi(\pi^{-1}(M''_1) \subseteq \pi^{-1}(M''_2) \subseteq \dots)] \subseteq M$. Значит цепочка стабилизируется. Значит стабилизируется изначальная цепочка, значит M'' нётерово.

Теперь предположим, что M' и M'' нётеровы.

Дописать.

□

Определение 3. Кольцо A нётерово, если как модуль над собой нётерово.

Замечание 2. 1 — образующая A как A -модуля. Всякий идеал I является подмодулем A , но может не иметь одного образующего.

Определение 4. Идеал I кольца A — непустое подмножество A , что для всяких $a, b \in I$ $a + b \in I$ и для всяких $a \in I, k \in A$ $ak \in I$.

Лемма 4. Пусть дано кольцо A . TFAE

1. A нётерово.
2. Любая цепочка идеалов $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ стабилизируется.
3. Всякий идеал I конечнопорождён.

Доказательство.

$1 \Leftrightarrow 2$) По определению.

$1 \Leftrightarrow 3$) По лемме 2.

□

Лемма 5. Пусть дано нётерово кольцо A . Тогда для всякого $n \geq 0$ A^n — нётеров модуль.

Доказательство. (0) — нётеров. $A^1 = A$ — нётеров. Далее легко провести по индукции, что A^{n-1} нётерово и $A^n/A^{n-1} = A$ нётерово, а тогда A^n нётерово. □

Следствие 5.1. Если A — нётерово кольцо, то всякий конечнопорождённый A -модуль M нётеров.

Доказательство. Пусть $m_1, \dots, m_r \in M$ — система порождающих модуля M . Тогда имеем сюръективный гомоморфизм $A^r \rightarrow M$, порождённый $e_i \mapsto m_i$. Следовательно, по лемме 3 из нётеровости A^r следует нётеровость M . □

Следствие 5.2. Если M — конечнопорождённый модуль и N — подмодуль M , то N конечнопорождён. В частности всякий подмодуль $N \subseteq A^r$ конечнопорождён.

Доказательство.

Дописать.

□

Теорема 6 (Гильберта). Если кольцо A нётерово, то $A[t]$ нётерово.

Доказательство. Пусть фиксирован некоторый идеал I в $A[t]$. Как только мы покажем, что I конечнопорождён, то применяя лемму 4, получим нётеровость $A[t]$.

Пусть $\mathcal{A} \subseteq A$ — множество старших членов многочленов из I .

Лемма 6.1. \mathcal{A} — идеал. И, следовательно, конечнопорождено.

Доказательство. Действительно, для всяких $a, b \in \mathcal{A}$ есть многочлены $f_a, f_b \in I$ со старшими коэффициентами a и b соответственно. Следовательно $f_a t^{\deg(f_b)} + f_b t^{\deg(f_a)}$ лежит в I и имеет старший коэффициент $a + b$ (если только $a + b \neq 0$; иначе очевидно). Также если $a \in \mathcal{A}$, а $k \in A$, то есть многочлен $f_a \in I$ с данным старшим коэффициентом. Но тогда $k f_a$ (если $ak \neq 0$; иначе очевидно) лежит в I и имеет старший член ak . □

Рассмотрим a_1, \dots, a_r — система порождающих \mathcal{A} , а f_1, \dots, f_r — многочлены из I с данными старшими коэффициентами.

Тогда всякий $f \in I$ порождается тогда и только тогда, когда порождается соответствующий ему $g \in I$ степени меньше $n := \max_k \deg(f_k)$, так как иначе с помощью старших членов f_i можно породить старший член f , вычесть его из f и тем самым понизить степень. Значит вопрос свёлся к порождаемости многочленов из I степени не выше n .

Заметим, что описанные многочлены образуют модуль $I \cap (A \oplus At \oplus \dots \oplus At^{n-1})$ — подмодуль A^n . Значит $I \cap (A \oplus At \oplus \dots \oplus At^{n-1})$ конечнопорождён, а отсюда I конечнопорождён. \square

Лемма 7. Если B — нётерово кольцо, C — кольцо, а $\varphi : B \rightarrow C$ — гомоморфизм колец, то $\varphi(B)$ — нётерово.

Доказательство. Пусть дана последовательность идеалов $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ в $\varphi(B)$. Тогда $\varphi^{-1}(I_i)$ — идеалы и

$$\varphi^{-1}(I_1) \subseteq \varphi^{-1}(I_2) \subseteq \dots$$

Значит с какого-то момента эта цепочка стабилизируется, а значит стабилизируется образ этой цепочки по φ , т.е. изначальная цепочка. \square

Лемма 8. Если $\psi : A \rightarrow C$ — гомоморфизм колец, такой что C — конечная A -алгебра, порождённая элементами x_1, \dots, x_n . Тогда C нётерово.

Доказательство. Мы можем рассмотреть нативное вложение A в $A[t_1, \dots, t_n]$ и гомоморфизм A -алгебр $\varphi : A[t_1, \dots, t_n] \rightarrow C$, порождённый ψ и соотношениями $\varphi(t_i) = x_i$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & C \\ & \searrow & \nearrow \varphi \\ & A[t_1, \dots, t_n] & \end{array}$$

φ сюръективен, а $A[t_1, \dots, t_n]$ нётерово. Таким образом $\varphi(B) = C$ нётерово. \square

Замечание 3. Всякое поле нётерово.

Следствие 8.1. Любая конечнопорождённая F -алгебра, где F — поле, нётерова.

Замечание 4. • \mathbb{Z} — нётерово кольцо.

- Всякое кольцо является \mathbb{Z} -кольцом.
- Если кольцо R — конечнопорождённая \mathbb{Z} -алгебра, то оно нётерово.

Лемма 9. Пусть A — нётерово кольцо, а M'' — A -модуль. Тогда M конечнопорождён тогда и только тогда, когда нётеров.

Доказательство. Если M'' нётеров, то уже доказано, что M'' конечнопорождён, так как является собственным подмодулем (см. лемму).

Если M'' конечнопорождено, то есть система порождающих m_1, \dots, m_s . Тогда есть сюръективный гомоморфизм

$$\varphi : A^s \rightarrow M'', e_i \mapsto m_i.$$

При этом A^s нётеров, значит M'' нётеров. \square

Лемма 10. Пусть даны кольца $A \subseteq B \subseteq C$, что A — нётерово, C — конечнопорождённый B -модуль и конечнопорождённая A -алгебра. Тогда B — конечнопорождённая A -алгебра.

Доказательство. Пусть y_1, \dots, y_n — система порождающих C как A -алгебру, а x_1, \dots, x_m — система порождающих C как B -модуль. Тогда есть $b_{i,j} \in B$, что

$$y_i = \sum b_{i,j} x_j,$$

и $b_{i,j,k} \in B$, что

$$x_i x_j = \sum b_{i,j,k} x_k.$$

Пусть B_0 — это A -подалгебра в B , порождённая всеми $b_{i,j}$ и $b_{i,j,k}$. Заметим, что количество перечисленных порождающих конечно, т.е. B_0 — конечнопорождённая алгебра. Следовательно, B_0 нётерова.

Поймём, что C порождается уже над B_0 элементами x_1, \dots, x_m . Действительно, для всякого $c \in C$ есть $F \in A[t_1, \dots, t_n]$, что $c = F(y_1, \dots, y_n)$. При этом $y_i = \sum b_{i,j} x_j$. Значит

$$c = G(x_1, \dots, x_m) \in B_0 x_1 + \dots + B_0 x_m,$$

так как при раскрытии скобок каждый квадратный $x_i x_j$ член заменяется на линейную сумму $\sum b_{i,j,k} x_k$, т.е. можно запустить банальный алгоритм понижения степени и получить линейное по x_i выражение.

Таким образом C как B_0 -модуль конечнопорождён (а B_0 нётеров), значит всякий B_0 -подмодуль в C конечнопорождён, значит B — конечнопорождённый B_0 -модуль. Поскольку $B_0 \subseteq B$, то B — конечнопорождённая B_0 -алгебра. Следовательно, B — конечнопорождённая B_0 -алгебра, а B_0 — конечнопорождённая A -алгебра, и тогда B — конечнопорождённая A -алгебра. \square

1.1 Алгебраические и чисто трансцендентные расширения полей

Определение 5. Пусть есть поле F , содержащееся в поле E . Элемент $x \in E$ называется *алгебраическим над F* , если есть $g \in F[t]$, что $g(x) = 0 \in E$. Иначе x называется *трансцендентным над F* .

Лемма 11. Если x алгебраический над F , то рассмотрим F -подалгебру $F[x]$ в E , порождённую x , т.е. есть гомоморфизм алгебр $\varphi : F[t] \rightarrow E$, порождённый соотношением $\varphi(t) = x$, определяет алгебру $\varphi(F[t])$. Тогда существует неприводимый многочлен $f \in F[t]$, что $f(x) = 0$ и $F[x] = \varphi(F[t]) = F[t]/(f)$.

Доказательство. φ — гомоморфизм алгебр, а значит гомоморфизм колец, значит $\text{Ker}(\varphi) \subseteq F[t]$ непуст (из-за алгебраичности x) и является идеалом. Но всякий идеал в $F[t]$ является главным, следовательно $\text{Ker}(\varphi) = (f(t))$ для некоторого $f \in F[t]$. При этом, так как E поле, $\text{Ker}(\varphi)$ — простой идеал, т.е. $f(t)$ неприводим. Отсюда получаем искомое. \square

Следствие 11.1. Уже $F[x]$ является подполем в E .

Следствие 11.2. $\dim_F F[x] = \deg f(t) < \infty$.

Следствие 11.3. $F[x]$ порождается как векторное пространство над F элементами (базисом) $1, x, \dots, x^d$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$.

Определение 6. Пусть $K \subseteq L$ — поля. Если $y_1, \dots, y_m \in L$ алгебраичны над K и

$$K \subseteq K[y_1] \subseteq K[y_1][y_2] \subseteq \dots \subseteq K[y_1] \dots [y_m] = L,$$

то L называется *конечнопорождённым алгебраически порождённым алгебраическим расширением поля K* .

Лемма 12. Если даны поля $K \subseteq L$, что L — конечнопорождённое алгебраическое расширение K , то $\dim_K L < \infty$.

Доказательство. Если $m = 1$, то утверждение превращается в следствие 11.2.

По следствию 11.3 $1, \dots, y_2^{d_2}$ порождают $K[y_1][y_2]$ как векторное пространство над $K[y_1]$. При этом $K[y_1]$ порождается $1, \dots, y_1^{d_1}$ как векторное пространство над K . Следовательно, все элементы вида $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2}$, $\alpha_1 \in \{0; \dots; d_1\}$, $\alpha_2 \in \{0; \dots; d_2\}$, порождают $K[y_1][y_2]$ как векторное пространство над K . Следовательно

$$\dim_K K[y_1][y_2] = \dim_K K[y_1] \cdot \dim_{K[y_1]} K[y_1][y_2] < \infty.$$

□

Упражнение 1. Верно и обратное: если $\dim_K L < \infty$, то L — конечнопорождённое алгебраическое расширение поля K .

Определение 7. Пусть даны поля $F \subseteq E$ и $x \in E$, трансцендентный в F . Тогда

$$F(x) := \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in F[t], g(t) \neq 0 \right\}.$$

Лемма 13. 1. $F(x)$ корректно определено.

2. $F(x)$ — поле.

Доказательство.

1. Если $g(x) = 0$, то x алгебраично. Значит $f(x)/g(x)$ определено.
2. Операции наследуются от поля. Несложно видеть, что $F(x)$ относительно них замкнуто.

□

Лемма 14. $F(x) \cong F(t)$ как поля, где $F(t)$ — поле рациональных функций.

Доказательство. Построим понятный гомоморфизм полей

$$\varphi : F(t) \rightarrow F(x), f/g \mapsto f(x)/g(x).$$

По построению φ сюръективен. $\text{Ker}(\varphi)$ — идеал в поле, т.е. либо (0) , либо всё $F(t)$. Но φ сохраняет F , значит $\text{Ker}(\varphi) = 0$, т.е. φ инъективен. Итого φ — изоморфизм. □

Лемма 15. Пусть x трансцендентно. Тогда $1, x, x^2, \dots$ линейно независимы.

Доказательство. В противном случае это означает, что есть некоторое $n \in \mathbb{N}$ и $a_0, \dots, a_n \in F$, что

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0.$$

Тогда $f(x) = 0$, где

$$f(t) := \sum_{k=0}^n a_k t^k.$$

Это противоречит с трансцендентностью x . □

Лемма 16. Пусть даны поле L и независимая переменная t . Тогда

$$L(t) := \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \mid f(t), g(t) \in L[t], g(t) \neq 0 \right\}$$

не является конечнопорождённой L -алгеброй.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $L(t) = L[y_1, \dots, y_s]$ — конечнопорождённая L -алгебра, где $y_i = \frac{f_i(t)}{g_i(t)}$. Тогда есть гомоморфизм

$$\varphi : L[T_1, \dots, T_s] \rightarrow L(t), T_i \mapsto y_i.$$

Понятно, что

$$L[y_1, \dots, y_s] = \varphi(L[T_1, \dots, T_s]).$$

Тогда рассмотрим $h(t)$ — неприводимый делитель значения

$$1 - \prod_{i=1}^s q_i(t).$$

Поскольку $L = L[y_1, \dots, y_s]$, то $1/h(t) \in L[y_1, \dots, y_s]$, то есть $G(T_1, \dots, T_s) \in L[T_1, \dots, T_s]$, что $G(y_1, \dots, y_s) = \frac{1}{h(t)}$. Понятно, что есть некоторое $N \in \mathbb{N}$, что

$$G(y_1, \dots, y_s) = \frac{F(t)}{(\prod q_i(t))^N}.$$

Тогда

$$\left(\prod q_i(t) \right)^N = h(t)F(t).$$

Вспомним, что

$$\begin{aligned} \prod g_i(t) - 1 = h(t) \cdot h_1(t) &\implies \prod g_i(t) \equiv 1 \pmod{h(t)} \implies \left(\prod g_i(t) \right)^N \equiv 1 \pmod{h(t)}, \\ \left(\prod g_i(t) \right)^N = h(t)F(t) &\implies \left(\prod g_i(t) \right)^N \equiv 0 \pmod{h(t)}, \end{aligned}$$

т.е. $0 \equiv 1 \pmod{h(t)}$. □

Лемма 17. Пусть $F \subseteq E$ — поля, и $E = F[x_1, \dots, x_n]$ конечнопорождено как F -алгебра. Тогда $[x_1, \dots, x_n]$ алгебраичны над F и $\dim_F E < \infty$.

Доказательство. Среди x_1, \dots, x_n может оказаться элемент трансцендентный над F , WLOG x_1 . Получим

$$F \subseteq F(x_1) \subseteq E.$$

Среди оставшихся может оказаться элемент, трансцендентный над $F(x_1)$, WLOG x_2 . Получим

$$F \subseteq F(x_1) \subseteq F(x_1)(x_2) \subseteq E.$$

Будем повторять данную операцию до конца. Таким образом выделим x_1, \dots, x_r , получим

$$F \subseteq F(x_1) \subseteq F(x_1)(x_2) \subseteq \dots \subseteq \underbrace{F(x_1) \dots (x_r)}_K \subseteq E,$$

что все x_{r+1}, \dots, x_n алгебраичны над K . Тогда E как векторное пространство над K конечномерно (лемма 12).

Тогда имеем, что

$$F \subseteq K \subseteq E,$$

где E — конечнопорождённый K -модуль и конечнопорождённая F -алгебра. Следовательно, по лемме 10 K — конечнопорождённая F -алгебра.

Пусть $r \neq 0$. Пусть $L = F(x_1) \dots (x_{r-1})$. Тогда $L(x_r) = K$, где $x_r \in K$ трансцендентен над L . Следовательно, $L(x_r) \cong L(t)$, т.е. $K = L(x_r)$ — не конечнопорождённая L -алгебра, и тем более не конечнопорождённая F -алгебра. Противоречие. \square

Следствие 17.1. Пусть $F \rightarrow A$ — конечнопорождённая F -алгебра, а \mathcal{M} — максимальный идеал A . Тогда $F \hookrightarrow A/\mathcal{M}$ — конечное алгебраическое расширение поля.

Доказательство.

Дописать?

\square

Следствие 17.2. Пусть F — алгебраически замкнутое поле, а $F \rightarrow A$ — конечнопорождённая F -алгебра. Тогда $F \rightarrow A/\mathcal{M}$ — изоморфизм.

Доказательство. A/\mathcal{M} — конечное алгебраическое расширение поля F , т.е. совпадает с F . \square

Упражнение 2. Пусть R — кольцо, $I \subseteq J \subseteq R$ — два идеала в R . Тогда TFAE.

1. $I = J$.

2. $\bar{\varphi} : R/I \rightarrow R/J, r \bmod I \mapsto r \bmod J$ — изоморфизм колец.

Доказательство. Если $I = J$, то очевидно что $r \bmod I = r \bmod J$, а $R/I = R/J$, а тогда $\bar{\varphi}$, являясь тождественным отображением, является изоморфизмом колец.

Пусть $\bar{\varphi}$ — изоморфизм колец. Рассмотрим вложения $\pi_I : R \rightarrow R/I, r \mapsto r \bmod I$ и $\pi_J : R \rightarrow R/J, r \mapsto r \bmod J$. Следовательно, имеем коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ p_I \swarrow & & \searrow p_J \\ R/I & \xrightarrow[\bar{\varphi}]{\sim} & R/J \end{array}$$

Следовательно,

$$r \in I \Leftrightarrow r \in \text{Ker}(p_I) \Leftrightarrow p_I(r) = 0 \Leftrightarrow p_J(r) = 0 \Leftrightarrow r \in \text{Ker}(p_J) \Leftrightarrow r \in J,$$

т.е. $I = J$. \square

Упражнение 3. Пусть $\mathcal{M} \subseteq R$ — идеал. Тогда TFAE.

1. \mathcal{M} максимален.

2. R/\mathcal{M} — поле.

Теорема 18 (Гильберта о нулях, Nullstellensatz (слабая)). Пусть K — алгебраически замкнутое поле (например, \mathbb{C}), $\mathcal{M} \subseteq K[t_1, \dots, t_n]$ — максимальный идеал. Тогда $\mathcal{M} = (t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n)$, где $x_i \in F$.

Доказательство. Зафиксируем некоторые значения $x_1, \dots, x_n \in K$ и рассмотрим идеал $I := (t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n)$. Также рассмотрим следующие гомоморфизмы:

$$\begin{aligned} in : K &\rightarrow K[t_1, \dots, t_n], r \mapsto r, \\ \pi_{\mathcal{M}} : K[t_1, \dots, t_n] &\rightarrow K[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{M}, r \mapsto r \bmod \mathcal{M}, & i_{\mathcal{M}} &:= \pi_{\mathcal{M}} \circ in, \\ \pi_I : K[t_1, \dots, t_n] &\rightarrow K[t_1, \dots, t_n]/I, r \mapsto r \bmod I, & i_I &:= \pi_I \circ in. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & & K[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{M} \\ & \nearrow i_{\mathcal{M}} & \uparrow \pi_{\mathcal{M}} \\ K & \xrightarrow{in} & K[t_1, \dots, t_n] \\ & \searrow i_I & \downarrow \pi_I \\ & & K[t_1, \dots, t_n]/I \end{array}$$

(Note: The diagram shows a commutative diagram with K on the left, $K[t_1, \dots, t_n]$ in the middle, $K[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{M}$ at the top right, and $K[t_1, \dots, t_n]/I$ at the bottom right. Arrows are labeled in , $i_{\mathcal{M}}$, i_I , $\pi_{\mathcal{M}}$, π_I , and φ .)

Заметим, что $i_{\mathcal{M}}$ — изоморфизм колец, так как \mathcal{M} максимален. При этом для всякого многочлена $F \in K[t_1, \dots, t_n]$ по теореме Безу $F(t_1, \dots, t_n) \equiv F(x_1, \dots, x_n) \pmod{I}$, а значит i_I инъективен, так как K поле, и сюръективен, так как $[F]_I = [F(x_1, \dots, x_n)]_I = i_I(F(x_1, \dots, x_n))$. Следовательно i_I тоже изоморфизм колец. Следовательно есть изоморфизм колец $\varphi = i_{\mathcal{M}}^{-1} \circ i_I$, т.е. для всякого $r \in K$

$$\varphi(r \bmod \mathcal{M}) = r \bmod I.$$

Осталось показать, что $\varphi \circ \pi_{\mathcal{M}} = \pi_I$, т.е. для всякого $F \in K[t_1, \dots, t_n]$ $\varphi : F \bmod \mathcal{M} \mapsto F \bmod I$.

На деле для случайных x_1, \dots, x_n это не верно. Поэтому возьмём $x_k := i_{\mathcal{M}}^{-1}(t_k \bmod \mathcal{M})$, т.е. чтобы $t_k - x_k \in \mathcal{M}$. Тогда получим, что

$$\varphi(t_k \bmod \mathcal{M}) = \varphi(x_k \bmod \mathcal{M}) = x_k \bmod I = t_k \bmod I.$$

Поскольку φ — гомоморфизм колец, а всякий многочлен представляется в виду суммы произведений элементов K и t_1, \dots, t_n , то теперь это верно для всех многочленов. Значит $\mathcal{M} = I$. \square

2 Аффинная геометрия

Замечание. Глава I. §1. Замкнутые подмножества A_k^n .

Обозначить это по-нормальному.

Определение 8. Пусть фиксировано поле k . Аффинное пространство над полем k размерности n — есть пространство

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_k^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in k\} = k^n.$$

Пусть $A := k[T_1, \dots, T_n]$, $f \in A$. Тогда f — отображение $\mathbb{A}^n \rightarrow k$. Пусть фиксировано $S \subseteq A$. Тогда множеством общих нулей многочленов из S (также “общие нули многочленов из S ” или “нули S ”) — это множество

$$Z(S) := \{x \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in S \ f(x) = 0\}.$$

Все подмножества $Z(S)$ называются замкнутыми подмножествами в \mathbb{A}^n или аффинными подмножествами в \mathbb{A}^n .

Пример 1.

1. $\emptyset = Z(\{a\}_{a \in k}) = Z(A)$.
2. $\mathbb{A}^n = Z(\emptyset) = Z(\{0\})$.
3. $\{(x_1, \dots, x_n)\} = Z(\{T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n\})$.
4. Замкнутые подмножества в \mathbb{A}^1 — это \mathbb{A} , \emptyset и любое конечное подмножество.
5. Если $n = 2$, то $Z(f)$ называется *плоской кривой*.

Лемма 19.

1. Если $S \subseteq S'$, то $Z(S') \subseteq Z(S)$.
2. Пусть I — идеал, порождённый многочленами из S . Тогда $Z(I) = Z(S)$.
3. Для всякого S есть конечное S' , что $Z(S) = Z(S')$.
4. Пусть есть семейство $\{S_i\}_{i \in I}$. Тогда

$$Z\left(\bigcup_{i \in I} S_i\right) = \bigcap_{i \in I} Z(S_i).$$

5. Пусть дано семейство идеалов $\{I_j\}_{j \in J}$. Тогда

$$Z\left(\sum_{j \in J} I_j\right) = \bigcap_{j \in J} Z(I_j).$$

6. Пусть дано семейство $\{S_i\}_{i=1}^n$. $S' := S_1 S_2 \dots S_n = \{f_1 \dots f_n \mid f_1 \in S_1 \wedge \dots \wedge f_n \in S_n\}$. Тогда

$$Z(S') = \bigcup_{i=1}^n Z(S_i).$$

7. Пусть дано семейство идеалов $\{I_j\}_{j=1}^n$. Тогда

$$Z\left(\bigcap_{j=1}^n I_j\right) = \bigcup_{j=1}^n Z(I_j).$$

Доказательство.

1. Действительно, для всякой точки $x \in Z(S')$ верно, что для всякого $f \in S'$ $f(x) = 0$, а значит то же верно для всякого $f \in S$ (так как $S \subseteq S'$), т.е. $x \in Z(S)$.
2. Поскольку $S \subseteq I$, то $Z(I) \subseteq Z(S)$. При этом для всякого $x \in Z(S)$ верно, что для всякого $f \in S$ $f(x) = 0$, а значит то же верно для всех $f \in I$ (так как I — идеал, порождённый S), т.е. $x \in Z(I)$. Т.е. $Z(S) \subseteq Z(I)$. Следовательно, $Z(S) = Z(I)$.
3. Если известно, что S и S' порождают одинаковые идеалы, то $Z(S) = Z(S')$. Но всякий идеал в $k[T_1, \dots, T_n]$ конечнопорождён, а значит у идеала, порождённого S , есть конечное порождающее множество S' — искомое S' .

4. Заметим, что $x \in Z(\bigcup_{i \in I} S_i)$ тогда и только тогда, когда на x зануляются все многочлены из $\bigcup_{i \in I} S_i$, что равносильно тому, что на x зануляются все многочлены из каждого S_i , что равносильно тому, что x лежит в каждом $Z(S_i)$, что равносильно тому, что $x \in \bigcap_{i \in I} Z(S_i)$. Отсюда следует требуемое.

5. По прошлому пункту.

$$Z\left(\bigcup_{j \in J} I_j\right) = \bigcap_{j \in J} Z(I_j).$$

Но также несложно видеть, что идеал, порождённый $\bigcup_{j \in J} I_j$, есть $\sum_{j \in J} I_j$. Отсюда сиюминутно следует искомое (по ранее доказанному пункту).

6. Покажем утверждение для $n = 2$. Заметим, что если $x \in Z(S_1)$, то на x зануляются все многочлены из S_1 , а значит и из $S_1 \cdot S_2$, т.е. $x \in Z(S_1 S_2)$. Следовательно $Z(S_1) \subseteq Z(S_1 S_2)$. Из аналогичного утверждения получаем, что $Z(S_1) \cup Z(S_2) \subseteq Z(S_1 S_2)$. При этом если $x \in Z(S_1 S_2) \setminus Z(S_1)$, то есть многочлен $f \in S_1$, что $f(x) \neq 0$. Но для всякого $g \in S_2$ верно $fg \in S_1 S_2$, а значит $f(x)g(x) = 0$, а тогда $g(x) = 0$, т.е. $x \in Z(S_2)$. Итого $Z(S_1 S_2) = Z(S_1) \cup Z(S_2)$. Утверждение для всякого n получается по индукции с помощью данного.

7. Покажем для $n = 2$; общий случай получается по индукции. Пусть даны идеалы I и J . Имеем по прошлому пункту

$$Z(I \cdot J) = Z(I) \cup Z(J).$$

При этом $I \cdot J \subseteq I \cap J$, а $I \cap J \subseteq I$, $I \cap J \subseteq J$. Следовательно $Z(I \cdot J) \supseteq Z(I \cap J)$, $Z(I \cap J) \supseteq Z(I)$, $Z(I \cap J) \supseteq Z(J)$. Итого

$$Z(I \cdot J) \supseteq Z(I \cap J) \supseteq Z(I) \cup Z(J),$$

откуда

$$Z(I \cdot J) = Z(I \cap J) = Z(I) \cup Z(J).$$

□

Следствие 19.1. *Мораль такова.*

1. *Замкнутые идеалы образуют топологию, где они являются замкнутыми. Т.е. их дополнения образуют топологию (являясь открытыми).*
2. *Каждое замкнутое подмножество имеет вид $Z(I)$, где I — идеал.*
3. *Сумма идеалов соответствует пересечению замкнутых множеств (и наоборот). Т.е. для всякого семейства идеалов $\{I_j\}_{j \in J}$ верно, что*

$$\bigcap_{j \in J} Z(I_j) = Z\left(\sum_{j \in J} I_j\right).$$

4. *Конечные пересечения идеалов соответствуют конечным объединениям замкнутых множеств. Т.е. для всякого семейства идеалов $\{I_j\}_{j=1}^n$ верно, что*

$$\bigcup_{j=1}^n Z(I_j) = Z\left(\bigcap_{j=1}^n I_j\right).$$

Определение 9. Пусть имеется множество точек $X \subseteq A_k^n$. Определим множество

$$I(X) := \{f \in A \mid \forall x \in X \ f(x) = 0\}.$$

Лемма 20.

1. $I(X)$ — идеал.
2. Если $X \subseteq Y$, то $I(X) \supseteq I(Y)$.
3. $I(X) = I(\overline{X})$ (\overline{X} — замыкание X в смысле рассмотренной топологии).
- 4.

Написать леммы про пересечения и объединения $I(X)$:

$$(a) \sum_{j \in J} I(X_j) = I(\bigcap_{j \in J} X_j)?$$

$$(b) \bigcap_{j \in J} I(X_j) = I(\bigcup_{j \in J} X_j)?$$

5. Если $X \subseteq Y$, то $ZI(X) \subseteq ZI(Y)$.
6. Если $S \subseteq T$, то $IZ(S) \subseteq IZ(T)$.
7. $ZI(X) \supseteq X$.
8. $IZ(S) \supseteq S$.

Доказательство.

1. Если $f, g \in I(X)$, то для всякой точки $x \in X$ верно $f(x) = g(x) = 0$, а тогда $(f+g)(x) = 0$, т.е. $f+g \in I(X)$. Если же $f \in I(X)$, $g \in A$, то для всякой точки $x \in X$ верно $f(x) = 0$, а значит $(fg)(x) = 0$, т.е. $fg \in I(X)$.
2. Если $f \in I(Y)$, то $f(Y) = 0$, значит $f(X) = 0$, тогда $f \in I(X)$.
3. Понятно, что $X \subseteq \overline{X}$, а значит $I(\overline{X}) \subseteq I(X)$. Покажем обратное. Пусть есть $x \in \overline{X} \setminus X$. Если есть какой-то многочлен $f \in A$, что f зануляется на X , но не на x , то $Y := Z(f)$ является замкнутым, $X \subseteq Y$, а $x \notin Y$. Следовательно, так как $\overline{X} \subseteq Y$, то $x \notin \overline{X}$ — противоречие. Это значит, что всякий многочлен, зануляющийся на X , зануляется на всякой точке из $\overline{X} \setminus X$, а значит на всём \overline{X} . Следовательно $I(X) \subseteq I(\overline{X})$.
4. $X \subseteq Y \Rightarrow I(X) \supseteq I(Y) \Rightarrow ZI(X) \subseteq ZI(Y)$.
5. $S \subseteq T \Rightarrow Z(S) \supseteq Z(T) \Rightarrow IZ(S) \subseteq IZ(T)$.
6. Поскольку $I(X)$ — множество всех многочленов, зануляющихся на X , то всё $I(X)$ зануляется на X , т.е. $ZI(X) \supseteq X$.
7. Поскольку $Z(S)$ — множество всех точек, на которых зануляется S , то S на нём зануляется, а тогда $IZ(S) \supseteq S$.

□

Определение 10. Пусть I — некоторый идеал. *Радикал из идеала* $\sqrt{I} := \{h \in A \mid \exists N: h^N \in I\}$.

Идеал I называется *радикальным* тогда и только тогда, когда для всякого $g \in A$, что есть $m \geq 1$, что $g^m \in I$ верно, что $g \in I$.

Лемма 21.

1. \sqrt{I} — идеал.
2. $Z(\sqrt{I}) = Z(I)$.
3. Идеал I радикален тогда и только тогда, когда $\sqrt{I} \subseteq I$.
4. \sqrt{I} радикален.
5. $I(X)$ радикален.

Доказательство.

1. Пусть $h \in \sqrt{I}$. Тогда есть N , что $h^N \in I$. Значит для всякого $f \in A$

$$(hf)^N = h^N f^N \in IA \subseteq I.$$

Т.е. $hf \in \sqrt{I}$. Значит $hA \subseteq \sqrt{I}$.

Пусть $h_1, h_2 \in \sqrt{I}$. Тогда есть N_1 и N_2 , что $h_1^{N_1}, h_2^{N_2} \in I$. Тогда

$$(h_1 + h_2)^{N_1+N_2} = \sum_{k=0}^{N_1+N_2} h_1^k h_2^{N_1+N_2-k} \binom{N_1+N_2}{N_1}.$$

При этом при $k \leq N_1$

$$h_2^{N_2} \in I, \quad h_1^k h_2^{N_1-k} \binom{N_1+N_2}{N_1} \in A, \quad \implies \quad h_1^k h_2^{N_1+N_2-k} \binom{N_1+N_2}{N_1} \in I;$$

аналогично для $k \geq N_1$.

2. Поскольку $I \subseteq \sqrt{I}$, то $Z(\sqrt{I}) \subseteq Z(I)$. При этом для всякого $x \in Z(I)$ верно, что для всякого $f \in S$ $f(x) = 0$, а значит для всякого $f \in \sqrt{I}$ есть N , что $f^N(x) = 0$, а тогда $f(x) = 0$, т.е. $x \in Z(\sqrt{I})$. Т.е. $Z(I) \subseteq Z(\sqrt{I})$. Следовательно, $Z(\sqrt{I}) = Z(I)$.
3. Определение по-другому написанное.
4. Несложно видеть, что $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ по определению радикала. Значит $\sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I}$, т.е. \sqrt{I} радикален.
5. $I(X)$ — максимальный идеал, что $X \subseteq Z(I(X))$. При этом $Z(\sqrt{I(X)}) = Z(I(X))$, значит $\sqrt{I} \subseteq I$. Таким образом I максимален.

□

Лемма 22. Если X замкнуто, то $ZI(X) = X$.

Доказательство. Как мы уже знаем, $X \subseteq ZI(X)$; покажем обратное. Заметим, что $X = Z(S)$. Тогда $I(X) = IZ(X) \supseteq S$. Тогда $ZI(X) \subseteq Z(S) = X$. □

Теорема 23 (Гильберта о нулях, Nullstellensatz). Если I — радикальный идеал, то $IZ(I) = I$.

Следствие 23.1. I и Z — биекции из множества замкнутых множеств в A и обратно. При этом $Z \circ I$ и $I \circ Z$ — тождественные отображения.

Доказательство. Как мы уже знаем, I — функция из множества замкнутых множеств в A , а Z — наоборот. При этом по следствию двух предыдущих утверждений ZI и IZ — тождественные функции из множества замкнутых функций в себя и из A в себя. Из первого следует, что I инъективно, а Z сюръективно; из второго следует, что Z инъективно, а I сюръективно. Т.е. I и Z — биекции. \square

Следствие 23.2.

1. $ZI(X) = \overline{X}$.
2. $IZ(I) = \sqrt{I}$.

Доказательство.

1. $ZI(X) = ZI(\overline{X}) = \overline{X}$.
2. $IZ(I) = IZ(\sqrt{I}) = \sqrt{I}$.

\square

Замечание 5. Точки в \mathbb{A}^n находятся во взаимнооднозначном соответствии с максимальными идеалами в A — это говорит слабая теорема Гильберта о нулях. Т.е. всякой точке $x \in \mathbb{A}^n$ сопоставляется $I(x)$, а максимальному идеалу \mathcal{M} сопоставляется $Z(\mathcal{M})$, которое является точкой, так как $\mathcal{M} = (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n)$, а значит подходит только точка $(x_1; \dots; x_n)$.

Определение 11. Пусть X замкнуто. Тогда $k[X] := A/I(X)$ — *кольцо регулярных функций на X* .

Лемма 24. Пусть X_1 и X_2 замкнуты.

1. $X := X_1 \sqcup X_2$ замкнуто.
2. *Отображение*

$$\varphi : k[X] \rightarrow k[X_1] \times k[X_2], F \bmod I(X) \mapsto (F \bmod I(X_1), F \bmod I(X_2))$$

задаёт изоморфизм колец.

Определение 12. Пусть X — замкнутое множество. Функция $f : X \rightarrow k$ называется *регулярной*, если есть $F \in A$, что $f = F|_X$.

Замечание 6. Множество $k[X]$ регулярных функций на X является кольцом и даже k -алгеброй.

При этом $T_i \in A = k[T_1, \dots, T_n]$ образуют A , значит функции $t_i : X \rightarrow k, x \mapsto T_i(x)$ образуют $k[X]$. Значит получается сюръективный гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow k[X], F \mapsto F|_X$, который на деле порождается соотношениями $T_i \mapsto t_i$.

Лемма 25. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow k[X], F \mapsto F|_X$.

1. $\text{Ker}(\varphi) = I(X)$.
2. $A/I(X) \xrightarrow[\sim]{\varphi} k[X]$.

Доказательство.

1. $\varphi(F) = 0$ iff $F|_X \equiv 0$, iff $F(X) = 0$, iff $F \in I(X)$.

2. φ , очевидно, сюръективно. Следовательно, φ индуцирует изоморфизм

$$A/I(X) = A/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow k[X].$$

□

Лемма 26. Пусть даны замкнутые множества X_1 и X_2 . Тогда $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ равносильно $I(X_1) + I(X_2) = A$.

Доказательство. Понятно, что если $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

$$A = I(\emptyset) = I(X_1 \cap X_2) = I(ZI(X_1) \cap ZI(X_2)) = IZ(I(X_1) + I(X_2)) = I(X_1) + I(X_2).$$

А если $A = I(X_1) + I(X_2)$, то

$$X_1 \cap X_2 = ZI(X_1) \cap ZI(X_2) = Z(I(X_1) + I(X_2)) = Z(A) = \emptyset.$$

□

Теорема 27. Пусть X_1, X_2 — замкнутые множества, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, а $X := X_1 \sqcup X_2$. $\psi : k[X] \rightarrow k[X_1] \times k[X_2], f \mapsto (f|_{X_1}, f|_{X_2})$ — изоморфизм колец (и даже алгебр).

Доказательство. Понятно, что ψ определено корректно и является гомоморфизмом алгебр. Также понятно, что ψ инъективно, так как всякая функция f , зануляющаяся на X_1 и X_2 , зануляется на X , т.е. ядро ψ тривиально.

Покажем, что ψ сюръективно. Пусть $(f_1, f_2) \in k[X_1] \times k[X_2]$. Тогда есть $F_1, F_2 \in A$, что $f_1 = F_1|_{X_1}, f_2 = F_2|_{X_2}$. Мы знаем, что $I(X_1) + I(X_2) = A$. Тогда $F_1 - F_2 = H_1 - H_2$, где $H_1 \in I(X_1), H_2 \in I(X_2)$. Тогда $F_1 - H_1 = F_2 - H_2 =: F$. Имеем, что $F|_{X_1} = (F_1 - H_1)|_{X_1} = f_1 - 0 = f_1$; аналогично $F|_{X_2} = f_2$. □

Определение 13. Кольцо R называется *редуцированным*, если для всякого $a \in R$ и всякого $m \geq 1$ из того, что $a^m = 0$ следует, что $a = 0$ (т.е. в R нет нильпотентов).

Замечание. $k[X]$ редуцированно.

Лемма 28. Любая конечнопорождённая редуцируемая k -алгебра B изоморфна k -алгебре $k[X]$ регулярных функций для некоторого замкнутого подмножества $X \subseteq A$.

Доказательство. Пусть $B = k[t_1, \dots, t_m]$, где $t_1, \dots, t_m \in B$ (они порождают B над k). Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : k[T_1, \dots, T_m] \rightarrow B, T_i \mapsto t_i$ алгебр. Понятно, что φ сюръективен. Пусть $I := \text{Ker}(\varphi)$. Тогда есть изоморфизм $\bar{\varphi} : A/I \rightarrow B$. Поскольку B редуцированно, то I радикален:

$$f^m \in I \implies \varphi(f)^m = \varphi(f^m) = 0 \implies \varphi(f) = 0 \implies f \in I.$$

Тогда пусть $X := Z(I)$. Следовательно $I = I(X)$, а тогда $B \cong A/I = A/I(X) = k[X]$. □

Лемма 29. Пусть R — кольцо, I — радикальный идеал в R ,

$$\pi : R \rightarrow \bar{R} := R/I, f \mapsto f \pmod{I}.$$

Тогда имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством радикальных идеалов $J \supseteq I$ в R и множеством радикальных идеалов \mathfrak{A} в \bar{R} , заданное отображениями $J \mapsto \bar{J} := J/I$ и $\mathfrak{A} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Обозначим

- множество радикальных идеалов $J \supseteq I$ в R за D_R ,
- множество радикальных идеалов \mathfrak{A} в \bar{R} за $D_{\bar{R}}$.

Тогда заданные в условии отображения $D_R \rightarrow D_{\bar{R}}$ и $D_{\bar{R}} \rightarrow D_R$ индуцируются π и π^{-1} . Но непонятна их корректность и биективность; это и обсудим.

Пусть $J \supseteq I$ — радикальный идеал в R . Тогда $\pi(J) = J/I$. При этом если $\bar{f}^m \in J/I$ в \bar{R} , где $\bar{f} = f \pmod{I}$, то $(f + I)^m \subseteq J$. При этом $f^m \in (f + I)^m \subseteq J$, т.е. $f^m \in J$, значит $f \in J$. Следовательно $f + I \subseteq J$. Тогда $\bar{f} \in J/I$. Таким образом J/I радикален в \bar{R} .

Пусть \mathfrak{A} — радикальный идеал в \bar{R} . Тогда $J := \pi^{-1}(\mathfrak{A})$. Следовательно, $\mathfrak{A} = J/I$. Если $f^m \in J$, то $\bar{f}^m \in \mathfrak{A}$. Тогда $\bar{f} \in J/I$. Следовательно, $f + I \subseteq J$, т.е. $f \in J$. Следовательно J радикален.

Таким образом π и π^{-1} индуцируют корректные отображения $D_R \rightarrow D_{\bar{R}}$ и $D_{\bar{R}} \rightarrow D_R$. Таким образом осталось показать, что они образуют взаимнооднозначное соответствие.

Заметим, что π и π^{-1} образуют взаимнооднозначное соответствие между $\{f + I \mid f \in R\}$ и \bar{R} . Так как π переводит идеал, содержащий I , в идеал, а π^{-1} идеал в идеал, содержащий I , то π и π^{-1} образуют взаимнооднозначное соответствие между идеалами $J \supseteq I$ в R и идеалами \mathfrak{A} в \bar{R} . Значит, аналогично, они образуют взаимнооднозначное соответствие между D_R и $D_{\bar{R}}$. \square

Определение 14. Пусть X — замкнутое множество в \mathbb{A}^n . *Замкнутые подмножества в X* — это множества вида $Z' \cap X$, где Z' — замкнутое в \mathbb{A}^n .

Замечание. Сравнить с топологией, индуцированной на (замкнутом) подмножестве.

Замечание. Замкнутые подмножества в X — замкнутые подмножества Z в \mathbb{A}^n , что $Z \subseteq X$.

Следствие 29.1. Пусть X замкнуто в \mathbb{A}^n . Тогда имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством замкнутых $Z \subseteq X$ и радикальными идеалами \bar{J} в $A/I(X)$, заданное отображениями $Z \mapsto \bar{I}(Z)$ и $\mathfrak{B} \mapsto Z(\pi^{-1}(\mathfrak{B}))$.

Определение 15. Пусть $X \subseteq \mathbb{A}^n$ и $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ — замкнутые подмножества. Временно обозначим $t_i := T_i|_X \in k[X]$ — координатная функция на X . Отображение $\varphi : Y \rightarrow X$ называется *регулярным*, если $t_i \circ \varphi \in k[Y]$ (т.е. каждая координата φ как отображение является регулярной).

Замечание 7. Пусть B — k -алгебра. Пусть $f_1, \dots, f_n \in B$ и $F(T_1, \dots, T_n) \in k[T_1, \dots, T_n]$. Тогда $F(f_1, \dots, f_n) \in B$.

В частности, если даны $B = k[Y]$, $f_1, \dots, f_n \in B$, $F \in k[T_1, \dots, T_n]$, то $F(f_1, \dots, f_n) \in B = k[Y]$. Более того, $F(f_1, \dots, f_n)(y) = F(f_1(y), \dots, f_n(y))$.

Лемма 30 (следствие замечания). Пусть дано некоторое отображение $\varphi : Y \rightarrow X$. TFAE

1. φ — регулярно.
2. Для всякого $f \in k[X]$ функция $f \circ \varphi : Y \rightarrow k$ регулярна.

Доказательство.

2 \Rightarrow 1) $t_i \circ \varphi$ регулярно для всякого $i = 1, \dots, n$. Следовательно, φ регулярно.

1 \Rightarrow 2) $t_i \circ \varphi$ регулярно для всякого $i = 1, \dots, n$ по определению. При этом $k[X]$ — k -алгебра, порождённая t_1, \dots, t_n (как элементы $k[X]$). Следовательно, есть $F(T_1, \dots, T_n) \in k[T_1, \dots, T_n]$, что $F(t_1, \dots, t_n) = f$. Тогда

$$f \circ \varphi = F(t_1, \dots, t_n) \circ \varphi = F(t_1 \circ \varphi, \dots, t_n \circ \varphi).$$

Поскольку $t_i \circ \varphi$ — элементы k -алгебры $k[Y]$, то и $F(t_1 \circ \varphi, \dots, t_n \circ \varphi) \in k[Y]$.

□

Замечание 8. Это означает, что отображение $\varphi : Y \rightarrow X$ регулярно тогда и только тогда, когда $\varphi^* : \text{Func}(X, k) \rightarrow \text{Func}(Y, k)$, $f \mapsto f \circ \varphi$ переводит $k[X]$ в $k[Y]$.

Определение 16. Отображение $\varphi : Y \rightarrow X$ называется *регулярным*, если для всякого $f \in k[X]$ функция $f \circ \varphi \in k[Y]$. Словами говоря, φ — регулярно, если она регулярные функции над X переводит в регулярные функции над Y .

Часто пишут $\varphi^*(f)$ вместо $f \circ \varphi$, а функцию $\varphi^*(f) : Y \rightarrow k$ называют переносом функции $f : X \rightarrow k$ на Y посредством φ .

Ещё другими словами,

$$\begin{array}{ccc} \text{Func}(X, k) & \xrightarrow[\varphi \mapsto \varphi^*]{\varphi^*} & \text{Func}(Y, k) \\ \uparrow & \text{---} & \uparrow \\ k[X] & & k[Y] \end{array}$$

Т.е. φ регулярно тогда и только тогда, когда $\varphi^*(k[X]) \subseteq k[Y]$.

Замечание. В этот момент Иван Александрович начинает по ошибке постоянно называть замкнутые множества *аффинными множествами*.

Лемма 31. Пусть X, Y, Z — аффинные множества, а $\varphi : Y \rightarrow X$ и $\psi : X \rightarrow Z$ регулярны. Тогда $\psi \circ \varphi : Y \rightarrow Z$ регулярны.

Доказательство. Для всякого $f \in k[Z]$ верно $f \circ \psi \in k[X]$, а тогда $f \circ (\psi \circ \varphi) = (f \circ \psi) \circ \varphi \in k[Y]$. Таким образом $\psi \circ \varphi$ регулярно по второму определению. □

Замечание. $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Замечание 9. Пусть B — конечно порождённая редуцированная k -алгебра. Тогда есть некоторая система порождающих $t_1, \dots, t_n \in B$, можно построить

$$\psi : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow k[t_1, \dots, t_n] = B, T_i \mapsto t_i.$$

Следовательно, $B \cong A/\text{Ker}(\psi) = k[X]$, где $X = Z(\text{Ker}(\psi))$.

Тогда можно наблюдать, что

$$\text{Max}(B) \cong \text{Max}(k[X]) \cong \text{точки из } X = X.$$

Формальнее, $\text{Max}(k[X]) = \{I(\{x\})\}_{x \in X}$. Тогда мы можем рассмотреть гомоморфизм $i_X : k \rightarrow k[X]$, $a \mapsto \text{const}_a$ (const_a — константная функция со значением a) и для всякого $x \in X$ гомоморфизм $x^* : k[X] \rightarrow k$, $f \mapsto f(x)$. Тогда $x^* \circ i_X = \text{Id}_k$.

Определение 17. Назовём гомоморфизм $s : k[X] \rightarrow k$ k -алгебр *сечением*, если $s \circ i_X = \text{Id}_k$. Тогда $\text{Ker}(s) \in \text{Max}(k[X]) = \{\mathcal{M}_x\}_{x \in X}$. Тогда у нас есть биекция между сечениями $k[X]$ и точками X .

Множество сечений из B обозначается $\text{Sect}(B, k)$. Также назовём отображение $\text{can}_X : X \rightarrow \text{Sect}(k[X], k)$, $x \mapsto x^*$ *каноническим*.

Лемма 32 (пока без доказательства). Пусть $\varphi : X' \rightarrow X$ — регулярное отображение. Тогда есть $\psi : X' \rightarrow X$, которое переводит каждое x' в такое x , что $\varphi^*(s) = s'$, где s и s' — сечения, соответствующие x и x' .

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\text{can}_{X'}} & \text{Sect}(X', k) \\ \psi \downarrow & & \uparrow \varphi^* \\ X & \xrightarrow{\text{can}_X} & \text{Sect}(X, k) \end{array} \quad \begin{array}{c} X' \\ \downarrow \varphi \\ X \end{array}$$

Тогда $\psi = \varphi$.

Замечание 10. Пусть B — конечно порождённая редуцированная k -алгебра. Тогда у нас есть взаимнооднозначное соответствие между $\text{Max}(B)$ и сечениями вложения $i : k \rightarrow B$.

Дописать?

Замечание 11. Поскольку $\text{Max}(B)$ — то же, что и множество сечений в B . Значит можно рассмотреть включение $B \rightarrow \text{Func}(\text{Max}(B), k), b \mapsto (\mathcal{M} \mapsto s_{\mathcal{M}}(b))$

Определение 18. Категория Aff — категория, чьи объекты есть пары $(B, \text{Max}(B))$, а морфизмы $\text{Mor}((B, \text{Max}(B)), (B', \text{Max}(B')))$ есть отображения $\varphi : \text{Max}(B') \rightarrow \text{Max}(B)$, что $\varphi^*(B) \subseteq B'$, т.е. $B \subseteq \text{Func}(\text{Max}(B), k)$ и то же для B' , φ индуцирует $\varphi^* : \text{Func}(\text{Max}(B), k) \rightarrow \text{Func}(\text{Max}(B'), k)$ и мы хотим, чтобы B переходило в B' по φ .

Замечание 12. Мы знаем, что конечно порождённые редуцированные k -алгебры изоморфны k -алгебрам $k[X]$

Локальная цель. У нас есть категория Aff аффинных множеств и регулярных отображений между ними и категория f.g.r. k -alg. конечно порождённых k -алгебр и гомоморфизмов k -алгебр между ними. Хотим показать, что они контравариантно изоморфны, где $X \in C_1 \mapsto k[X]$, $C_2 \ni B \cong k[Y] \mapsto Y$.

Лемма 33. Пусть X — аффинное множество, $k[X]$ — k -алгебра его регулярных функций. Тогда имеется биекция между X и $\text{Sect}(k[X], k)$.

Определение 19. Будем обозначать такие отображения $\text{can}_X : X \rightarrow \text{Sect}(k[X], k)$ и называть каноническими.

Надо как-то разобраться с повторами определений и утверждений между двумя лекциями

Доказательство. Давайте рассмотрим $\varphi(x) := s_x$, где $s_x : k[X] \rightarrow k, f \mapsto f(x)$. Понятно, что $s_x \circ i = \text{Id}_k$. Т.е. φ — инъекция.

Теперь в обратную сторону. Пусть имеется сечение s . s — сюръекция, $\mathcal{M} := \text{Ker}(s)$. Тогда $k[X]/\mathcal{M} = k$, т.е. \mathcal{M} максимален, а значит есть $x \in X$, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}_x := \{f \in k[X] \mid f(x) = 0\}$. \square

Упражнение 4. Проверить, что это взаимно обратные биекции.

Лемма 34. Пусть $\varphi : X' \rightarrow X$ — регулярное отображение. Пусть тогда φ^* — отображение, переводящее $k[X] \rightarrow k[X']$ по правилу $f \mapsto f \circ \varphi$. Также определим $\varphi_* : \text{Sect}(k[X'], k) \rightarrow \text{Sect}(k[X], k)$ по правилу $s' \mapsto s' \circ \varphi^*$. Тогда следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \text{can}_{X'} \downarrow & & \downarrow \text{can}_X \\ \text{Sect}(k[X'], k) & \xrightarrow{\varphi_*} & \text{Sect}(k[X], k) \end{array}$$

Доказательство. $\varphi_* \circ \text{can}_{X'} = \text{can}_X \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда для всякого $x' \in X'$ верно

$$\varphi_*(\text{can}_{X'}(x')) = \text{can}_X(\varphi(x')),$$

что верно тогда и только тогда, когда для всякого $f \in k[X]$

$$\varphi_*(\text{can}_{X'}(x'))(f) = \text{can}_X(\varphi(x'))(f).$$

При этом

$$\varphi_*(\text{can}_{X'}(x'))(f) = \text{can}_{X'}(x')(\varphi^*(f)) = \varphi^*(f)(x') = f(\varphi(x)) = \text{can}_X(\varphi(x))(f).$$

\square

Определение 20. Пусть R — конечно порождённая редуцированная k -алгебра и $i : k \hookrightarrow R$ (константы). (Модельный случай: $R = k[X]$.) Тогда будем обозначать $X(R) := \text{Sect}(R, k)$. (Оно будет напоминать нам множество замкнутых множеств.)

Рассмотрим пару $(R, X(R))$. Тогда у нас есть простые отображения забывания $(R, X(R)) \mapsto R$ и восстановления $R \mapsto (R, X(R))$. Так мы распрощались с понятием аффинных множеств в категории аффинных пространств и регулярных отображений между ними.

Так переопределим категорию Aff как категорию, где множество объектов — это пары $(R, X(R))$, где R — конечно порождённая редуцированная k -алгебра, а морфизмы $\text{Mor}((R', X(R')), (R, X(R)))$ — отображения $\varphi : X(R') \rightarrow X(R)$, что $\varphi^* : \text{Func}(X(R), k) \rightarrow \text{Func}(X(R'), k)$, $f \mapsto f \circ \varphi$ переводит R в R' ($\varphi^*(R) \subseteq R'$).

Тут R играет роль $k[X]$, а $X(R)$ — роль X . В этом же случае вычисление $f \in R$ на точке $x \in X(R)$ происходит по правилу $x(f)$ (ср. с модельным случаем).

Категории конечно порождённых редуцированных k -алгебр (category of finitely generated reduced k -algebras) за $\text{f.g.r.}k\text{-alg.}$.

Теорема 35. Aff и $\text{f.g.r.}k\text{-alg.}$ контравариантно эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим функтор $\Phi : \text{Aff} \rightarrow \text{f.g.r.}k\text{-alg.}$, определённый по правилу $(R, X(R)) \mapsto R$, а $\varphi : (R', X(R')) \rightarrow (R, X(R))$ переводится в $\varphi^*|_R : R \rightarrow R'$. Понятно, что Φ контравариантен. Теперь функтор $\Psi : \text{f.g.r.}k\text{-alg.} \rightarrow \text{Aff}$, определённый по правилу $R \mapsto (R, X(R))$, а гомоморфизм $\alpha : R \rightarrow R'$ переводится в морфизм $\varphi : (R', X(R')) \rightarrow (R, X(R))$, т.е. отображение $\varphi : X(R') \rightarrow X(R)$, что $\varphi(s) := s \circ \alpha$. Для корректности нужно понять, почему $\varphi^*(R) \subseteq R'$.

Обещанно рассказать на следующей лекции.

□

Определение 21. Аффинное многообразие — это объект категории Aff , т.е. пара $(R, X(R))$. Множество регулярных отображений $(R', X(R'))$ в $(R, X(R))$ — множество морфизмов $\text{Mor}((R', X(R')), (R, X(R)))$.

Пример 2 (нетривиальные).

1. Пусть R — $\text{f.g.r.} k\text{-algebra}$, а $f \in R$, что $f \neq 0$. Кольцо $R_f := \{g/f^n \mid g \in R \wedge n \in \mathbb{N}\}$ (т.е. пары (g, f^n) по модулю отношения эквивалентности $(g, f^n) \sim (g', f^{n'}) \Leftrightarrow g \cdot f^{n'} = g' \cdot f^n$) — конечно порождённая k -алгебра. Это верно, потому что нужно рассмотреть $R[t]/(ft - 1)$, где обратным к (образу) f будет (образ) t , а тогда $R[t] \xrightarrow{\sim} R_f$.