Занятие от 18.02.
Геометрия и топология. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

4 марта 2021 г.

Задача 28. Пронумеруем школьников последовательно целыми числами так, что выбранный школьник имеет индекс 0. Посмотрим с какой вероятностью он может подсмотреть решение у соседа справа.

Заметим, что он сможет подсмотреть решение у соседа справа тогда и только тогда, когда будет выполнено следующее условие. Существует $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что школьники 0, 1, ..., n подсмотрели решение у соседа справа, а школьник $n+1$ смог придумать решение сам. Для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ рассмотрим событие A_n заключающееся в том, что школьники 0, ..., n не смогли сами придумать решение, но смогли подсмотреть у соседа справа, а школьник $n+1$ смог придумать его сам. Тогда понятно, что все события $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ дизъюнктны, а в объединении дают исходное событие (где также считается, что школьник 0 не решил задачу сам). Тогда

$$\mathbb{P}(A_n) = \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

Следовательно

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{14}$$

Таким образом школьник сможет подсмотреть задачу справа при условии, что не решил её сам, с вероятностью $1/14$, а значит сможет подсмотреть её вообще с вероятностью $1/7$. Следовательно он не сможет подсмотреть её с одной стороны с вероятностью $6/7$, а с обеих — с вероятностью $36/49$. А значит не получит решение с вероятностью $18/49$.

Задача 29. Пусть вероятности выпадения цифр равны $p_1, \dots, p_6$ соответственно ($p_1 + \dots + p_6 = 1$). Следовательно вероятность выпадения совпадающих цифр равна

$$p_1^2 + \dots + p_6^2 \geqslant \frac{(p_1 + \dots + p_6)^2}{6} = \frac{1}{6}$$

При этом мы знаем, что соблюдается равенство, следовательно $p_1 = \dots = p_6$.

Задача 13. Мы имеем, что

$$\frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})}$$

Следовательно
$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})}{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\mathbb{P}(B)}{1} = \mathbb{P}(B)$$
Таким образом события независимы.

Задача 3. Представим более общую задачу. Пусть дан ориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ без ориентированных циклов, и в нём выделено две вершины: "вход" s и "выход" t. путешественник выходит из "входа" и с заданным распределением вероятностей на рёбрах идёт в следующую вершину (в нашем случае распределение равномерное: все рёбра выходящие из одной вершины имеют равную вероятность). Тогда для всякой вершины $v \in V$ рассмотрим событие A_v попадания в вершину v. Также пусть вероятность перехода по ребру $e \in E$ равна p_e. Тогда несложно понять, что

- $\mathbb{P}(s) = 1$;
- $\forall v \in V \setminus \{s\} \quad \mathbb{P}(A_v) = \sum_{u \in V \setminus \{v\}} \mathbb{P}(A_u) p_{(u;v)}$.

Несложно понять, что по данным правилам единственным образом восстанавливаются все вероятности попадания в вершины, и сделать это можно легко алгоритмически. Таким образом применим этот алгоритм к нашему случаю.

Несложно видеть, что ответ равен 5/9.

Задача 5. Заметим, что все события делятся на три случая:

1. первое орудие попало, второе – промазало;
2. второе орудие попало, первое – промазало;
3. оба орудия попали и их цели совпали.

Рассмотрим вероятности данных компонент.

1. Очевидно, что вероятность равна $0.2 \cdot (1 - 0.3) = 0.14$.
2. Очевидно, что вероятность равна $0.3 \cdot (1 - 0.2) = 0.24$.
3. Очевидно, что вероятность равна $0.2 \cdot 0.3 \cdot (1/3^2 + 1/3^2 + 1/3^2) = 0.02$.

Итоговая вероятность получается равной 0.4.

Задача 7.

Способ 1. Заметим, что задача равносильна такой.

> Есть счётная последовательность. В каждой ячейки последовательности независимо друг от друга с вероятностью a появляется яйцо; а с вероятностью p всякое яйцо вылупляется. С какой вероятностью вылупится ровно l черепашат?

Тогда получаем, что на всякой ячейке появляется черепашонок с вероятностью ap. А значит вероятность того, что черепашат будет ровно l равна $e^{-ap}\frac{(ap)^l}{l!}$.

Способ 2. Честно посчитаем:

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{+\infty}\left(e^{-a}\frac{a^k}{k!}\right)p^l(1-p)^{k-l}\binom{k}{l} &= \sum_{k=l}^{+\infty}e^{-a}\frac{a^kp^l(1-p)^{k-l}}{l!(k-l)!}\\ &= e^{-a}\frac{a^lp^l}{l!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k(1-p)^k}{k!}\\ &= e^{-a}\frac{a^lp^l}{l!}e^{a(1-p)}\\ &= e^{-ap}\frac{(ap)^l}{l!}\end{aligned}$$

Задача 9. Рассмотрим такую задачу.

> Всё как раньше, но только невеста пропускает первые A женихов и после них берёт первого лучшего чем все предыдущие. С какой вероятностью он будет наилучшим.

Пронумеруем женихов по хорошести от худшего к лучшему числами от 1 до N. Тогда всего случаев $N!$.

Пусть жених N встретился на месте $M+1$ ($A \leqslant M < N$). Тогда случай является подходящим, если среди женихов на первых M местах лучший находится среди первых A мест. Заметим, что вероятность этого события не зависит от того, как набор женихов стоит перед женихом N; поэтому WLOG там стоят первые M женихов.

Несложно видеть, что вероятность того, что жених M будет среди первых A равна A/M. Также несложно видеть, что жених N может быть на каждом месте с одной и той же вероятностью. Следовательно искомая вероятность равна

$$\sum_{M=A}^{N-1}\frac{1}{N}\cdot\frac{A}{M} = \frac{A}{N}\cdot\sum_{M=A}^{N-1}\frac{1}{M} = \frac{A}{N}\cdot\sum_{M=A}^{N-1}\frac{1}{M/N}\cdot\frac{1}{N}$$

Поэтому несложно видеть, что если $N\to\infty$, а $A/N\to a$, то искомый предел равен $a\ln(1/a)$.

Задача 10. Пусть пришло n доноров. Найдём вероятность того, что кровь не подойдёт. Разберём случаи.

1. Если пациент группы I, то вклад в вероятность провала равен $p_{\mathrm{I}}\cdot(1-p_{\mathrm{I}})^n$.
2. Если пациент группы II, то вклад в вероятность провала равен $p_{\mathrm{II}}\cdot(1-p_{\mathrm{I}}-p_{\mathrm{II}})^n$.
3. Если пациент группы III, то вклад в вероятность провала равен $p_{\mathrm{III}}\cdot(1-p_{\mathrm{I}}-p_{\mathrm{III}})^n$.
4. Если пациент группы IV, то вклад в вероятность провала равен 0.

Следовательно вероятность удачи равна

$$1-p_{\mathrm{I}}\cdot(1-p_{\mathrm{I}})^n-p_{\mathrm{II}}\cdot(1-p_{\mathrm{I}}-p_{\mathrm{II}})^n-p_{\mathrm{III}}\cdot(1-p_{\mathrm{I}}-p_{\mathrm{III}})^n = 1-0.337\cdot0.663^n-0.375\cdot0.288^n-0.209\cdot0.454^n$$

а) При $n=1$ вероятность равна 0.573683.

б) Вероятность $\geqslant 0.9$ при $n\geqslant 4$.
