Листочек 3. Интегрируемый.
Математический анализ. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

25 января 2021 г.

Содержание

Базовые задачи

Задача 1. Заметим, что по правилу Лопиталя

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{f''(x_0)}{2}h^2}{h^3/3!}\\
=&\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0) - f''(x_0)h}{h^2/2!}\\
=&\lim_{h\to 0} \frac{f''(x_0+h) - f''(x_0)}{h}\\
=&f'''(x_0)
\end{aligned}$$

При этом

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{f''(x_0)}{2}h^2 = \frac{f''(x_0+h\theta_h) - f''(x_0)}{2}h^2$$

Значит

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h-\frac{f''(x_0)}{2}h^2}{\theta_h h^3/2}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h\theta_h)-f''(x_0)}{\theta_h h}\\
=&f'''(x_0)
\end{aligned}
$$

Значит, деля первый предел на второй, получаем

$$
1=\frac{f'''(x_0)}{f'''(x_0)}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h^3/3!}}{\frac{1}{\theta_h h^3/2!}}=\lim_{h\to 0}\frac{\theta_h}{3}
$$

Задача 2. Пусть $f(x) := \sqrt{1+x^3}$. Заметим, что $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$. Действительно:

$$
\sqrt[3]{\sqrt{1+x^3}^2-1}=\sqrt[3]{x^3}=x
$$

Тогда получим, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{db}\left(\int_a^b f+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}\right)\\
&\qquad=\frac{d}{db}\left(\left(\int f\right)\Big|_a^b+\left(\left(\int f^{-1}\right)\circ f\right)\Big|_a^b\right)\\
&\qquad=\left(\int f\right)'+\left(\left(\int f^{-1}\right)\circ f\right)'\\
&\qquad=f+f'\cdot(f^{-1}\circ f)\\
&\qquad=f+f'\cdot b\\
&\qquad=(bf(b))'
\end{aligned}
$$

Следовательно

$$
\int_0^2\sqrt{1+x^3}dx+\int_1^3\sqrt[3]{x^2-1}dx=\int_0^2 f+\int_{f(0)}^{f(2)} f^{-1}=xf(x)|_0^2=2\cdot 3-0\cdot 1=6
$$

Задача 3.

1. Для начала покажем непрерывность. Пусть у какой-то точки $t\in(a;b)$ оказалось, что $\lim_{x\to t^-} f(x)\neq f(t)$. Тогда есть $\varepsilon>0$ и последовательность точек $(t_n)_{n=0}^{\infty}$, монотонно слева сходящихся к t, что $|f(t_n)-f(t)|\geqslant\varepsilon$. Заметим, что для всякого $s\in(t_0;t)$ верно, что

$$
f(s)\leqslant\frac{(t-s)}{t-t_0}(f(t_0)-f(t))+f(t),
$$

а тогда начиная для некоторого N все члены $(f(t_n))_{n=N}^{\infty}$ будут небольше $f(t)-\varepsilon$, так как быть неменьше $f(t)+\varepsilon$ не могут. А тогда мы имеем, что для всякой точки $r\in(t;b)$ верно, что

$$
f(r)\geqslant\frac{(r-t_n)f(t)+(t-r)f(t_n)}{t-t_n}=f(t)+\frac{r-t}{t-t_n}(f(t)-f(t_n))\geqslant f(t)+\frac{r-t}{t-t_n}\varepsilon
$$

Поскольку $r - t > 0$ и $\varepsilon > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} f(t) + \frac{r-t}{t-t_n}\varepsilon = +\infty$$

— противоречие, так как ограниченная сверху последовательность не может быть сколь угодно большой. Значит есть левая, а по аналогии и правая, непрерывность.

Теперь покажем существование левой и правой производных. Заметим, что для всяких точек t, l_0, l_1, r_0, r_1, что $a < l_0 < l_1 < t < r_1 < r_0 < b$ верно, что

$$\frac{f(l_0) - f(t)}{l_0 - t} \leqslant \frac{f(l_1) - f(t)}{l_1 - t} \leqslant \frac{f(r_1) - f(t)}{r_1 - t} \leqslant \frac{f(r_0) - f(t)}{r_0 - t}$$

Следовательно

$$\lim_{x\to t^-} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to t^+} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$$

— пределы неубывающей и невозрастающей функций соответственно. Но поскольку все значения первой всегда меньше значений второй, то у них обоих есть искомые пределы.

2. Пусть t и s — какие-то точки $(a; b)$, что $t < s$. Тогда из рассуждений прошлого пункта следует, что
$$\lim_{x\to t^+} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \leqslant \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \leqslant \lim_{x\to s^-} \frac{f(x) - f(s)}{x - s}$$
Следовательно, если производная определена в точках t и s, то $f(t) \leqslant f(s)$. Также, не требуя существование производной, мы уже получили, что $f'_-(t) \leqslant f'_+(t) \leqslant f'_-(s) \leqslant f'_+(s)$ (f'_- и f'_+ — левая и правая производная).

3. Пусть даны точки $p < q < r$. Тогда по теореме Лагранжа есть точки $s \in (p; q)$ и $t \in (q; r)$, что

$$f'(s) = \frac{f(p) - f(q)}{p - q} \qquad \text{и} \qquad f'(t) = \frac{f(q) - f(r)}{q - r}$$

Но так как $s < q < t$, то $f'(s) \leqslant f'(t)$. Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{f(p) - f(q)}{p - q} &\leqslant \frac{f(q) - f(r)}{q - r} \\ (f(p) - f(q))(q - r) &\leqslant (f(q) - f(r))(p - q) \\ f(p)(q - r) + f(r)(p - q) &\leqslant f(q)(p - r) \\ \frac{f(p)(q - r) + f(r)(p - q)}{p - r} &\geqslant f(q) \end{aligned}$$

Последнее означает выпуклость f.

4. Сделаем несколько замечаний:

   - Будем доказывать утверждение для нормированного интеграла:

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d f \circ \Phi \geqslant f\left(\frac{1}{d-c}\int_c^d \Phi\right)$$

- WLOG $(c;d)=(0;1)$. Действительно, пусть $\Psi:(0;1)\to(a;b), x\to\Phi(c+x(d-c))$. Тогда

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d f\circ\Phi=\int_c^d f(\Phi(t))d\left(\frac{t-c}{d-c}\right)=\int_0^1 f(\Phi(c+x(d-c)))dx=\int_0^1 f\circ\Psi,$$
$$\frac{1}{d-c}\int_c^d \Phi=\int_c^d \Phi(t)d\left(\frac{t-c}{d-c}\right)=\int_0^1 \Phi(c+x(d-c))dx=\int_0^1 \Psi$$

  Следовательно утверждения для Φ и Ψ равносильны.

- Будем считать, что Φ определена на отрезке (а не интервале) $[c;d]$. Так как в случае интервала

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d f(\Phi(t))dt:=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d_n-c_n}\int_{c_n}^{d_n} f(\Phi(t))dt$$

  и

$$f\left(\frac{1}{d-c}\int_c^d \Phi(t)dt\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d_n-c_n}\int_{c_n}^{d_n}\Phi(t)dt\right)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{d_n-c_n}\int_{c_n}^{d_n}\Phi(t)dt\right),$$

  где $(c_n)_{n=0}^{\infty}\to c$ и $(d_n)_{n=0}^{\infty}\to d$, то достаточно доказать утверждение для каждого отрезка $[c_n;d_n]$. Также множество значений Φ есть некоторой подотрезок интервала $(a;b)$, значит и область определения f можно сузить до отрезка.

- Будем рассматривать вместо $f(x)$ функцию $f_1(x):=f(x)-f'_+(a)x$. С одной стороны

$$\int_c^d f(\Phi(t))dt=\int_c^d f_1(\Phi(t))dt+f'_+(a)\int_c^d\Phi(t)dt$$

  и

$$f\left(\int_c^d\Phi(t)dt\right)=f_1\left(\int_c^d\Phi(t)dt\right)+f'_+(a)\int_c^d\Phi(t)dt$$

  поэтому, убирая вторые слагаемые как равные значения в правых сторонах равенств, получаем равносильность утверждения для f и f_1. С другой же стороны мы получаем, что теперь правые производные f_1 неотрицательны (а если вместо $f'_+(a)$ взять что-то побольше, то будут даже положительными), а значит f_1 не убывает.

Будем обозначать за Σ_n разбиение $\{[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}]\}_{k=1}^n$ отрезка $[0;1]$. Тогда

$$S^+(\Phi,\Sigma_n)\geqslant\int_0^1\Phi(t)dt\geqslant S^-(\Phi,\Sigma_n),\quad \lim_{n\to\infty}S^+(\Phi,\Sigma_n)=\int_0^1\Phi(t)dt=\lim_{n\to\infty}S^-(\Phi,\Sigma_n)$$

Заметим, что из неубываемости f следует, что

$$S^+(f\circ\Phi,\Sigma_n)=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\sup_{\left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right]}(f\circ\Phi)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\sup_{\left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right]}\Phi\right);$$

аналогично и для S^-. При этом так же

$$S^+(f\circ\Phi,\Sigma_n)\geqslant\int_0^1 f\circ\Phi\geqslant S^-(f\circ\Phi,\Sigma_n),$$
$$\lim_{n\to\infty}S^+(f\circ\Phi,\Sigma_n)=\int_0^1 f\circ\Phi=\lim_{n\to\infty}S^-(f\circ\Phi,\Sigma_n)$$

Лемма 1. *Пусть дан некоторый набор чисел* $\{a_n\}_{k=1}^n$. *Тогда (даже без условия на монотонность f)*
$$\frac{\sum_{k=1}^n f(a_k)}{n} \geqslant f\left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}\right)$$

Доказательство. Пусть a — среднее арифметическое набора $\{a_k\}_{k=1}^n$. Тогда a находится на отрезке $[a_t; a_{t+1}]$ для какого-то t от 1 до $n-1$. Тогда из выпуклости f следует, что
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f(a_k) &\geqslant \sum_{k=1}^n \frac{(a_k - a_t)f(a_{t+1}) + (a_{t+1} - a_k)f(a_t)}{a_{t+1} - a_t}\\ &= \frac{(\sum_{k=1}^n a_k - na_t)f(a_{t+1}) + (na_{t+1} - \sum_{k=1}^n a_k)f(a_t)}{a_{t+1} - a_t}\\ &= n\frac{(a - a_t)f(a_{t+1}) + (a_{t+1} - a)f(a_t)}{a_{t+1} - a_t}\\ &\geqslant nf(a),\end{aligned}$$

откуда и следует искомое. □

Из полученной леммы следует, что
$$S^+(f\circ\Phi, \Sigma_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\sup_{\left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right]} \Phi\right) \geqslant f\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sup_{\left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right]} \Phi\right) = f(S^+(\Phi, \Sigma_n));$$
аналогично для S^-. Следовательно
$$\int_0^1 f\circ\Phi = \lim_{n\to\infty} S^+(f\circ\Phi, \Sigma_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} f(S^+(\Phi, \Sigma_n)) = f\left(\lim_{n\to\infty} S^+(\Phi, \Sigma_n)\right) = f\left(\int_0^1 \Phi\right)$$

Задача 4. Для всякого $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ рассмотрим следующие функции
$$f_1(x) := \frac{x+1}{2} \qquad g_1(x) := \sqrt{x}$$
$$f_n(x) := \frac{f_{n-1}(x) + g_{n-1}(x)}{2} \qquad g_n(x) := \sqrt{f_{n-1}(x)g_{n-1}(x)}$$

Тогда искомая $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.

Лемма 2. *Для всякого* $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$
$$f_n \geqslant f_{n+1} \geqslant f_n \geqslant g_n$$

Доказательство. Пусть $f_0(x) = \max(x, 1)$, $g_0(x) = \min(x, 1)$. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ мы имеем, что $f_{n+1}(x)$ и $g_{n+1}(x)$ — среднее арифметическое и средннее геометрическое $f_n(x)$ и $g_n(x)$. Следовательно
$$\max(f_n(x), g_n(x)) \geqslant f_{n+1}(x) \geqslant g_{n+1}(x) \geqslant \min(f_n(x), g_n(x))$$
Следовательно для всякого $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$
$$f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \geqslant g_{n+1}(x) \geqslant g_n(x)$$
□

Лемма 3. *Для всякого* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *функция* $\frac{f_n}{g_n}$ *возрастает на* $[1; +\infty)$.

Доказательство. Сначала заметим важный момент:

$$= \left(\frac{\alpha + \frac{1}{\alpha}}{2}\right)' = \frac{\alpha' - \frac{\alpha'}{\alpha^2}}{2} = \alpha' \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha^2}$$

а значит $\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}$ возрастает (говоря про $\alpha > 0$) тогда и только тогда, когда α отдаляется от 1.

Давайте доказывать требуемое утверждение по индукции.

База. $n = 1$.

$$\frac{f_n}{g_n} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}{2}$$

Но $\sqrt{x}$ возрастает, а $\sqrt{1} = 1$, значит $\sqrt{x}$ отдаляется от 1 на $[0; +\infty)$, а следовательно возрастает и f_1/g_1.

Шаг. Пусть утверждение верно для n; докажем для $n+1$. Давайте заметим, что

$$\frac{f_{n+1}}{g_{n+1}} = \frac{f_n + g_n}{2\sqrt{f_n g_n}} = \frac{\sqrt{\frac{f_n}{g_n}} + \sqrt{\frac{g_n}{f_n}}}{2}$$

Если сделать замену $\alpha := \sqrt{\frac{f_n}{g_n}}$, то получаем, что $\frac{f_{n+1}}{g_{n+1}}$ возрастает тогда и только тогда, когда α отдаляется от 1. При этом $\alpha \geqslant 1$, значит возрастание $\frac{f_{n+1}}{g_{n+1}}$ равносильно возрастанию $\frac{f_n}{g_n}$. □

Следствие 3.1. *Для всякого* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *на* $[1; +\infty)$

$$\frac{f'_n}{f_n} \geqslant \frac{g'_n}{g_n}$$

Доказательство.

$$\frac{f'_n}{f_n} \geqslant \frac{g'_n}{g_n} \iff (\ln(f_n))' \geqslant (\ln(g_n))' \iff \left(\ln\left(\frac{f_n}{g_n}\right)\right)' \geqslant 0 \iff \left(\frac{f_n}{g_n}\right)' \geqslant 0$$

Последнее несомненно верно, так как $\frac{f_n}{g_n}$ возрастает. □

Лемма 4. *Для всякого* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *на* $[1; +\infty)$

$$f'_n \geqslant f'_{n+1} \geqslant f'_n \geqslant g'_n$$

Доказательство.

- Заметим, что для всякого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

  $$\frac{f'_n}{g'_n} \geqslant \frac{f_n}{g_n} \geqslant 1$$

  Следовательно $f'_n \geqslant g'_n$.

- Для всякого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

  $$f'_{n+1} = \frac{f'_n + g'_n}{2} \leqslant f'_n$$

  так как $g'_n \leqslant f'_n$.

- Для всякого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$g'_{n+1} = \left(\sqrt{f_n g_n}\right)' = \frac{f'_n g_n + g'_n f_n}{2\sqrt{f_n g_n}} = \frac{f'_n\sqrt{\frac{g_n}{f_n}} + g'_n\sqrt{\frac{f_n}{g_n}}}{2}$$

Тогда получаем последовательность равносильных утверждений:

$$g'_{n+1} \geqslant g'_n$$
$$f'_n\sqrt{\frac{g_n}{f_n}} + g'_n\sqrt{\frac{f_n}{g_n}} \geqslant 2g'_n$$
$$f'_n\sqrt{\frac{g_n}{f_n}} \geqslant g'_n(2 - \sqrt{\frac{f_n}{g_n}})$$
$$f'_n \geqslant g'_n\sqrt{\frac{f_n}{g_n}}(2 - \sqrt{\frac{f_n}{g_n}})$$

Поскольку $t(2-t)$ — парабола с ветвями вниз, чьё максимальное значение — $1 \cdot (2-1) = 1$, то $t(w-t) \leqslant 1$, а значит

$$f'_n \geqslant g'_n \geqslant g'_n\sqrt{\frac{f_n}{g_n}}(2 - \sqrt{\frac{f_n}{g_n}})$$

А значит и $g_{n+1} \geqslant g_n$.

□

Лемма 5. *Пределы* $\lim_{n\to\infty} f_n$ *и* $\lim_{n\to\infty} g_n$ *определены на всём* $[0; +\infty)$ *и равны.*

Доказательство. Мы знаем, что $(f_n)_{n=1}^{\infty} \geqslant (g_n)_{n=1}^{\infty}$, и при этом первая последовательность убывает, а вторая возрастает, значит они имеют пределы f и g. При этом

$$f = \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n + g_n}{2} = \frac{f+g}{2}$$

Следовательно $f = g$. □

Заметим, что для всяких $a_1 \geqslant a_2 \geqslant 0$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$\frac{a_1 + b_1}{2} \geqslant \frac{a_2 + b_2}{2} \qquad\qquad \sqrt{a_1 b_1} \geqslant \sqrt{a_2 b_2}$$

Следовательно легко доказать по индукции, что из возрастания f_1 и g_1 следует неубывание f_n и g_n, а следовательно и f.

Заметим, что для всякого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ верно, что на $[1; +\infty)$

$$f'_1 \geqslant f'_n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2} \geqslant f'_n.$$

Значит $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{2}$. А тогда

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{2},$$

т.е. f липшицева. Следовательно непрерывна (на $[1;+\infty)$).

Рассмотрим также $\varphi : [0;+\infty)^2 \to [0;+\infty)$, которая определяется так. Пусть дана пара (a,b). Тогда построим последовательности $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, где $x_0 = a$, $y_0 = b$. Тогда x_{n+1} и y_{n+1} как среднее арифметическое и среднее геометрическое удовлетворяют неравенствам

$$\max(x_n, y_n) \geqslant x_{n+1} \geqslant y_{n+1} \geqslant \min(x_n, y_n)$$

Следовательно $(x_n)_{n=1}^{\infty} \geqslant (y_n)_{n=1}^{\infty}$, причём первая не увеличивается, а вторая не уменьшается. Следовательно они имеют предел. И так как

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n}{2}$$

то $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. Тогда $\varphi(a,b)$ определяется как $\lim_{n\to\infty} x_n$ с данными начальными членами.

Несложно видеть, что

- $\varphi(a,b) = \varphi(b,a)$.
- $\varphi(a,0) = 0$.
- $\varphi(\lambda a, \lambda b) = \lambda\varphi(a,b)$. Так как $\frac{(\lambda a)+(\lambda b)}{2} = \lambda\frac{a+b}{2}$ и $\sqrt{(\lambda a)(\lambda b)} = \lambda\sqrt{ab}$. Значит строимые последовательности умножаются на λ.
- Для всяких $a_1 \geqslant a_2$ и $b_1 \geqslant b_2$ верно $\varphi(a_1,b_1) \geqslant \varphi(a_2,b_2)$. Получается из того, что при таких условиях $\frac{a_1+b_1}{2} \geqslant \frac{a_2+b_2}{2}$ и $\sqrt{a_1b_1} \geqslant \sqrt{a_2b_2}$. Поэтому при замене a_1 и b_1 на a_2 и b_2 строимые последовательности не увеличиваются.
- $f(x) = \varphi(x,1)$.

Таким образом мы имеем, что

$$f(1/x) = \varphi\left(\frac{1}{x}, 1\right) = \frac{1}{x}\varphi(1,x) = \frac{1}{x}f(x)$$

Следовательно из непрерывности f на $[1;+\infty)$ следует, что непрерывность на $(0;1)$. Теперь покажем непрерывность в 0.

Для этого заметим, что

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to+\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{y}$$

Заметим, что

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{f_1(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y+1}{2y} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{y\to+\infty} \frac{g_1(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\sqrt{y}}{y} = 0$$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{f_{n+1}(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f_n(y)+g_n(y)}{2y} = \frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty} \frac{f_n(y)}{y} + \frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty} \frac{g_n(y)}{y}$$
$$\lim_{y\to+\infty} \frac{f_{n+1}(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\sqrt{f_n(y)g_n(y)}}{y} = \sqrt{\lim_{y\to+\infty} \frac{f_n(y)}{y} \cdot \lim_{y\to+\infty} \frac{g_n(y)}{y}}$$

Тогда по индукции получаем, что

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{f_n(y)}{y}=\frac{1}{2^n} \qquad\qquad \lim_{y\to+\infty}\frac{g_n(y)}{y}=0$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y)}{y}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(y)}{y}=\frac{1}{2^n}$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y)}{y}=0$$

При этом $f(0)=\phi(0,1)=0$, значит f непрерывна и в 0. Таким образом f непрерывна на всём $[0;+\infty)$.

Задача 5. ТВР

Задача 6.

а) Будем считать, что все функции f_n не убывают. Действительно, если все функции неубывающие с некоторого момента, то можно просто отрезать начало, чтобы остались только неубывающие функции, доказать для полученной последовательности, и тогда утверждение будет для всей последовательности. Если же подпоследовательность неубывающих функций и подпоследовательность невозрастающих функций (константные уберём ровно в одну из них) бесконечны, то можно доказать утверждение для каждой из них, а вместо $N(\varepsilon)$ брать максимальный из двух получающихся.

Заметим, что функция $f=\lim_{n\to\infty}f_n$ тоже монотонна на $[0;1]$. Поскольку непрерывна, мы для всякого n можем взять последовательность $(a_{n,k})_{k=0}^{n}$, что $f(a_{n,k})=\frac{k}{n}$. Тогда существует $M=M(n)$, что для всякого $m\geqslant M$ и всякого k от 0 до n верно, что $|f_m(a_{n,k})-f(a_{m,k})|<\frac{1}{n}$ (её легко найти, взяв максимум для каждой точки $a_{n,k}$, их конечное количество). Тогда для всякой точки x верно, что она находится на отрезке $[a_{n,k};a_{n,k+1}]$ для некоторого k, а тогда для всякого $m\geqslant M$ верно, что

$$f_m(x)-f(x)\leqslant f_m(a_{n,k+1})-f(a_{n,k})<\frac{1}{n}+f(a_{n,k+1})-f(a_{n,k})=\frac{1}{n}-\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}=\frac{2}{n}$$

Значит в качестве $N(\varepsilon)$ можно брать $M(\lceil\frac{2}{\varepsilon}\rceil)$.

б) Давайте вместо каждого g_n рассмотрим g_n-g. Тогда каждая g_n останется непрерывной, пределом будет функция, тождественно равная 0, и условие на монотонное убывание $g_n(x)$ по n останется. Поэтому если мы докажем для случая $g\equiv 0$, то для случая любого $g(x)$ будет следовать сразу даже без изменения функции $N(\varepsilon)$.

Тогда мы получаем, что $g_n\geqslant 0$. Рассмотрим для всякой функции g_n значение $b_n:=\sup_{[0;1]}g_n$ и точку t_n в которой он достигается (поскольку g_n — непрерывная функция на компакте, то такая есть). Заметим, что $g_n\geqslant g_{n+1}$, значит $b_n\geqslant b_{n+1}$, а тогда у $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ есть предел b. Пусть $b>0$. Тогда выделим из последовательности $(n)_{n=0}^{\infty}$ такую подпоследовательность $(i_n)_{n=0}^{\infty}$, что $(t_{i_n})_{n=0}^{\infty}$ сходится к некоторой точке t.

Тогда мы получаем, что для всяких n и m, что $n\geqslant m$, верно, что

$$g_m(t_n)\geqslant g_n(t_n)=b_n\geqslant b$$

Значит

$$g_m(t) = g_m\left(\lim_{n\to\infty} t_{i_n}\right) = \lim_{n\to\infty} g_m(t_{i_n}) \geqslant b$$

а следовательно

$$g(t) = \lim_{m\to\infty} g_m(t) \geqslant b$$

— противоречие. Значит $(b_n)_{n=0}^{\infty} \to 0$. Тогда $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходится к g, так как в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять $N(\varepsilon)$ у последовательности $(b_n)_{n=0}^{\infty}$:

$$|g_n(t) - g(t)| \leqslant \sup_{[0;1]} g_n - g = b_n$$

в) Нет. Для примера, возьмём $g_n(x) := e^{-nx^2}$. Заметим, что для всякого $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \exp(-nx^2) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} -nx^2\right) = \exp(-\infty) = 0$$

т.е. $g(x) = 0$. В случае $x = 0$ мы имеем, что $g_n(x) = e^0 = 1$, следовательно $g(0) = 1$. (Иначе говоря, $g \equiv \mathbb{1}_{\{0\}}$.) Поскольку

$$\lim_{x\to 0} g_n(x) - g(x) = \lim_{x\to 0} e^{-nx^2} = \lim_{y\to 0} e^y = 1$$

То для всякого $\varepsilon < 1$ и $n \in \mathbb{N}$ найдётся $x \neq 0$, что $g_n(x) > \varepsilon$. Значит никакой равномерной непрерывности нет.

Задача 7. TBP

Задача 8. Заметим, что из чётности обеих сторон следует, что

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \cosh(u) \leqslant e^{\frac{u^2}{2}} \qquad \iff \qquad \forall x \geqslant 0 \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} \leqslant e^{\frac{x^2}{2}}$$

Значит нужно показать, что

$$\forall x \geqslant 0 \quad \frac{e^{2x} + 1}{2} \leqslant e^{\frac{x^2+2x}{2}}$$

Так как при $x = 0$ достигается равенство, продифференцировав обе стороны сведём задачу к следующей:

$$\forall x \geqslant 0 \quad e^{2x} \leqslant (x+1)e^{\frac{x^2+2x}{2}} \qquad \iff \qquad \forall x \geqslant 0 \quad (x+1)e^{\frac{x^2-2x}{2}} \geqslant 1$$

Так как при $x = 0$ достигается равенство, то продифференцировав ещё раз сведём задачу к следующей:

$$\forall x \geqslant 0 \quad x^2 e^{\frac{x^2-2x}{2}} \geqslant 0$$

Эта задача уже очевидна, так как $x^2 \geqslant 0$, а экспонента всегда > 0.

Рейтинговые задачи

Задача 9. TBP

Задача 10. TBP

Задача 11. TBP

Задача 12. TBP

Задача 13. Заметим, что

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x)(y-z)+f(z)(x-y)+f(y)(z-x)}{(x-y)(x-z)(y-z)}\right|\\=&\frac{1}{|y-z|}\left|\frac{f(x)(y-x)+f(x)(x-z)-f(z)(y-x)-f(y)(x-z)}{(x-y)(x-z)}\right|\\=&\frac{1}{|y-z|}\left|\frac{(f(x)-f(z))(y-x)+(f(x)-f(y))(x-z)}{(x-y)(x-z)}\right|\\=&\frac{1}{|y-z|}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-\frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right|\end{aligned}$$

Рассмотрим для всякого множества T и функции g функцию

$$\kappa_{g,T}:(0;+\infty)\to\mathbb{R},\delta\mapsto$$
$$\delta\sup\left\{\left|\frac{g(x)(y-z)+g(z)(x-y)+g(y)(z-x)}{(x-y)(x-z)(y-z)}\right| \mid x,y,z\in T\wedge\max(|x-y|,|y-z|,|z-x|)=\delta\right\}$$

Тогда предел $\lim_{\delta\to0}\kappa_{f,S}(\delta)=0$ равносилен тому, что для всякого $\varepsilon>0$ есть $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что $\kappa_{f,S}((0;\delta))\subseteq U_\varepsilon(0)$. Это же равносильно (возможно, при другом $\delta(\varepsilon)$) тому, что для всякого $\varepsilon>0$ и для всякой тройки точек x, y, z из S, что $\max(|x-y|,|y-z|,|z-x|)<\delta(\varepsilon)$ верно неравенство:

$$\frac{\delta}{|y-z|}\cdot\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-\frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right|<\varepsilon$$

Следствием из этого является то, что для этой же тройки точек

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-\frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right|<\varepsilon$$

так как $\frac{\delta}{|y-z|}\geqslant 1$.

Пусть $\overline{S}$ — замыкание S.

Лемма 6. *Для всякой предельной точки x множества S верно, что $\lim_{t\to x}f(t)$ определён.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда есть последовательности $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ точек S, сходящиеся к x, что $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ и $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ определены и равны неравным L_y и L_z.

Возьмём любое $\varepsilon > 0$ и соответствующее $\delta = \delta(\varepsilon)$. Тогда WLOG можно считать, что последовательности $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ лежат в $U_\delta(x)$. Также возьмём любую точку $s \in U_{\delta/2}(x)$. Тогда

$$\left|\frac{f(s)-f(y_n)}{s-y_n} - \frac{f(y_n)-f(z_n)}{y_n-z_n}\right| < \varepsilon$$

При этом

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(z_n)}{y_n-z_n}\right| \geqslant |L_y - L_z| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|y_n-z_n|} = C\cdot +\infty = +\infty$$

Следовательно

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(s)-f(y_n)}{s-y_n} - \frac{f(y_n)-f(z_n)}{y_n-z_n}\right| &\geqslant \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(z_n)}{y_n-z_n}\right| - \left|\frac{f(s)-f(y_n)}{s-y_n}\right| \\ &= +\infty - \left|\frac{f(s)-L_y}{s-x}\right| = +\infty\end{aligned}$$

— противоречие. □

Лемма 7. *f доопределяется на $\overline{S}$ для всякой точки $x \in S \setminus \overline{S}$ так, что* $\lim_{\delta\to 0}\kappa_{f,\overline{S}}(\delta) = 0$.

Доказательство. Давайте доопределим f на $\overline{S}$ просто предельными значениями в этих точках.

Заметим, что $\lim_{\delta\to 0}\kappa_{g,\overline{T}}(\delta) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\sup\Bigg\{\frac{\max(|x-y|,|y-z|,|z-x|)}{|y-z|}\cdot\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y} - \frac{g(x)-g(z)}{x-z}\right| \;\Bigg|\; \\ x,y,z\in T \wedge \max(|x-y|,|y-z|,|z-x|) < \delta\Bigg\} = 0\end{aligned}$$

Пусть x, y, z — какая-то тройка точек $\overline{S}$, что $\max(|x-y|,|y-z|,|z-x|) < \delta$. Тогда есть последовательности $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ точек из S, сходящиеся к x, y и z соответственно. Заметим что WLOG можно считать, что $\max(|x_n-y_n|,|y_n-z_n|,|z_n-x_n|) < \delta$ для всякого n, рано или поздно (начиная с некоторого N) это всё равно произойдёт. Значит

$$\begin{aligned}\frac{\max(|x_n-y_n|,|y_n-z_n|,|z_n-x_n|)}{|y_n-z_n|}\cdot\left|\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} - \frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}\right| \in \\ \Bigg\{\frac{\max(|x'-y'|,|y'-z'|,|z'-x'|)}{|y'-z'|}\cdot\left|\frac{f(x')-f(y')}{x'-y'} - \frac{f(x')-f(z')}{x'-z'}\right| \;\Bigg|\; \\ x',y',z'\in S \wedge \max(|x'-y'|,|y'-z'|,|z'-x'|) < \delta\Bigg\} = 0\end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}&\frac{\max(|x-y|,|y-z|,|z-x|)}{|y-z|}\cdot\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - \frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\max(|x_n-y_n|,|y_n-z_n|,|z_n-x_n|)}{|y_n-z_n|}\cdot\left|\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} - \frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}\right| \leqslant \\ &\sup\Bigg\{\frac{\max(|x'-y'|,|y'-z'|,|z'-x'|)}{|y'-z'|}\cdot\left|\frac{f(x')-f(y')}{x'-y'} - \frac{f(x')-f(z')}{x'-z'}\right| \;\Bigg|\; \\ &x',y',z'\in S \wedge \max(|x'-y'|,|y'-z'|,|z'-x'|) < \delta\Bigg\} = 0\end{aligned}$$

Значит при замене S на $\overline{S}$ подпредельный супремум не меняется, а следовательно

$$\lim_{\delta\to 0}\kappa_{f,S}(\delta)=0 \qquad \longleftrightarrow \qquad \lim_{\delta\to 0}\kappa_{f,\overline{S}}(\delta)=0$$

Таким образом f мы доопределили f искомым образом. □

Лемма 8. *f непрерывна на $\overline{S}$.*

Доказательство. Пусть $x \in S$ — точка, предельная для S, что в ней есть разрыв функции f. Тогда есть последовательность $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ точек S, сходящаяся к x, что $|f(x)-f(z_n)|>C$ для некоторого $C>0$. Пусть y — всякая другая точка множества S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x)-f(z_n)}{x-z_n}\right| \geqslant C\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x-z_n|}=C\cdot+\infty=+\infty$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-\frac{f(x)-f(z_n)}{x-z_n}\right| \geqslant -\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|+\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x)-f(z_n)}{x-z_n}\right|$$
$$=-\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|++\infty=+\infty$$

При этом всякое $\varepsilon>0$ и для него $\delta=\delta(\varepsilon)$. Тогда возьмём любую точку y из $U_{\delta/2}(x)\cap S$. Также будет $N\in\mathbb{N}$, что для всякого $n>N$ будет верно, что $|z_n-x|<\delta/2$. Следовательно

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-\frac{f(x)-f(z_n)}{x-z_n}\right|<\varepsilon$$

— противоречие, так как мы показали, что левая часть может принимать сколь угодно большие значения.

Значит f непрерывна. □

Лемма 9. *f дифференцируема на $\overline{S}$.*

Доказательство. Пусть x — некоторая точка $\overline{S}$. Пусть $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ всякая последовательность точек $\overline{S}$, сходящаяся к x. Тогда последовательность

$$\left(\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right)_{n=0}^{\infty}$$

фундаментальна: достаточно брать члены из $\delta(\varepsilon)$-окрестности x, чтобы разность любых двух членов была меньше ε. Значит определён предел

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

т.е. f дифференцируема в x на $\overline{S}$. □

Так мы свели задачу к тому, чтобы один раз дифференцируемо продолжить функцию f, определённую на замкнутом множестве $\overline{S}$, на всё $\mathbb{R}$.

Заметим, что дополнение к $\overline{S}$ есть объединение некоторого семейства Σ непересекающихся интервалов. При этом $|\Sigma|\leqslant|\mathbb{N}|$. Заметим, что для всякого интервала $(a;b)\in\Sigma$ значения f и f' в точках a и b уже определены, поэтому их нужно аккуратно гладко (дифференцируемо) соединить. Таким образом проблем внутри всякого интервала из Σ не возникнет.

Рассмотрим любой интервал $(a;b)$ из Σ. Тогда мы можем соединить точки $(a,f(a))$ и $(b,f(b))$ на этом интервале трёхзвенной ломанной, что конечные звенья имеют правильные наклоны. Также можно подрегулировать длины конечных звеньев так, что по высоте ломаная была бы заключена между $\min(f(a),f(b))-|a-b|^2$ и $\max(f(a),f(b))+|a-b|^2$.

Задача 14. TBP

Задача 15. TBP

Задача 16. TBP