Математический анализ — 1.

Лектор — Юрий Сергеевич Белов
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

Литература:

- В. А. Зорич "Математический анализ"
- О. Л. Виноградов "Математический анализ"
- (подходит попозже) Г. М. Фихтенгельц "Курс дифференциального и интегрального исчисления"
- У. Рудин "Основы анализа"
- М. Спивак "Математический анализ на многообразиях"
- В. М. Тихомиров "Рассказы о максимумах и минимумах"

1 Множества, аксиоматика и вещественные числа.

Мы начинаем с теории множеств.

Определение 1.

- Множества и элементы — понятно.
- $a \in B$ — понятно.
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — объединение.
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — пересечение.
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$ — разность.
- $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$ — симметрическая разница.
- $A^C := X \setminus A$ — *дополнение*, где X — некоторое фиксированное рассматриваемое множество.
- $A \subset B$ — "A — подмножество B", т.е. $\forall x (X \in A \Rightarrow x \in B)$.

Следствие.

- *(первое правило Моргана)* $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A^c \\ x \in B^C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$$

*Оригинал конспекта опубликован расположен GitHub

- *(второе правило Моргана)* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. *Аналогично.*

Определение 2. (Аксиома индукции.) Пусть есть функция $A : \mathbb{N} \to true; false$, что:

1. $A(1) = true$;
2. $\forall n(A(n) \to A(n+1))$.

Тогда $\forall n A(n)$.

Определение натуральных чисел сложно, рассматривать его не будем. Важно также иметь в виду натуральные числа с операциями сложения и умножения.

Определение 3. Пусть есть кольцо без делителей нуля R. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на $R \times (R \setminus \{0\})$, что $(a; b) \sim (c; d) \Leftrightarrow ad = bc$. Тогда $\mathrm{Quot}(R)$ — фактор-множество по $\sim$ и поле.

Определение 4. Рациональные числа — $\mathbb{Q} := \mathrm{Quot}(\mathbb{Z})$.

Теорема 1. $\nexists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существуют взаимно простые $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, что $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Тогда $m^2 = 2n^2$. Очевидно, что тогда $m^2 \,\vdots\, 2$, значит $m \,\vdots\, 2$, значит $m \,\vdots\, 4$, значит $n^2 \,\vdots\, 2$, значит $n \,\vdots\, 2$, значит n и m не взаимно просты, так как делятся на 2 — противоречие. $\square$

Теперь мы хотим понять, что есть вещественные числа. Тут есть несколько подходов.

Определение 5 (аксиоматический подход)**.** Вещественные числа — это полное упорядоченное поле $\mathbb{R}$, состоящее не из одного элемента.

Здесь "поле" значит, что на множестве (вместе с его операциями и выделенными элементами) верны аксиомы поля A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4 и D (т.е. сложение и умножение ассоциативны, коммутативны имеют нейтральные элементы и удовлетворяют условию существованию обратных (по умножению — для всех кроме нуля), а также дистрибутивности).

Упорядоченность значит, что есть рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение $\preccurlyeq$, что все элементы сравнимы, согласованное с операциями, т.е.:

A) $a \preccurlyeq b \Rightarrow a + x \preccurlyeq b + x$.

M) $0 \preccurlyeq a \wedge 0 \preccurlyeq b \Rightarrow 0 \preccurlyeq ab$.

Полнота поля значит любое из следующих утверждений (они равносильны):

- любое ограниченное сверху (снизу) подмножество поля имеет точную верхнюю (нижнюю) грань;
- (аксиома Кантора-Дедекинда) для любых двух множеств A и B, что $A \preccurlyeq B$, есть разделяющий их элемент.

Итого мы имеем 9 аксиом поля, 2 аксиомы упорядоченности и 1 аксиома полноты упорядоченности.

Утверждение. *Над $\mathbb{Q}$ нет элемента разделяющего $A := \{a > 0 \mid a^2 < 2\}$ и $B := \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. есть $c > 0$, что $A < c < B$.

Если $c^2 < 2$, то найдём ε, что $\varepsilon \in (0;1)$ и $(c+\varepsilon)^2 < 2$. Заметим, что $(c+\varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < c^2 + (2c+1)\varepsilon$. Пусть $\varepsilon < \frac{2-c^2}{2c+1}$, тогда такое ε точно подойдёт, ну а поскольку $\frac{2-c^2}{2c+1} > 0$, то такое ε есть. Значит $c^2 \geqslant 2$.

Аналогично имеем, что $\varepsilon \leqslant 2$. А значит $c^2 = 2$, что не бывает над $\mathbb{Q}$. □

Следствие. $\mathbb{Q}$ *не полно.*

Определение 6. Значение t является *верхней (нижней) гранью* непустого множества $X \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $t \geqslant X$, т.е. любой элемент x множества X не более t.

Точная верхняя (нижняя) грань или *супремум (инфимум)* непустого множества $X \subseteq \mathbb{R}$ — минимальная верхняя (нижняя) грань множества X. Он же является элементом разделяющим X и множество всех его верхних (нижних) граней. Обозначение: $\sup(X)$ и $\inf(X)$ соответственно.

Осцелляцией множества X называется значение $\operatorname{osc} X := \sup X - \inf X$.

Определение 7.

- *Закрытый интервал* или *отрезок* $[a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.
- *Открытый интервал* или просто *интервал* $(a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- *Полуоткрытый интервал* или *полуинтервал* $(a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $[a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$.

Теорема 2 (Лемма о вложенных отрезках). *Пусть имеется $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ — множество вложенных (непустых) отрезков, т.е. $\forall n > 1\ I_{n+1} \subset I_n$. Тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \varnothing$.*

Доказательство. Заметим, что для любых натуральных $n < m$ верно, что $a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$, где $I_n = [a_n; b_n]$. Тогда для $A := \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $B := \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ верно, что $A \leqslant B$. Значит есть разделяющий их элемент t, значит $A \leqslant t \leqslant B$, значит $t \in I_i$ для всех i, значит $t \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$. □

Замечание 1. Теорема 2 не верна для не отрезков.

Замечание 2. Если в теореме 2 $b_i - a_i$ “сходится к 0”, т.е. $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : \forall i > n\, b_i - a_i < \varepsilon$, то пересечение всех отрезков состоит из ровно одного элемента.

Теорема 3 (индукция на вещественных числах). *Пусть дано множество $X \subseteq [0;1]$, что*

1. $0 \in X$;
2. $\forall x \in X\ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap [0;1] \subseteq X$;
3. $\forall Y \subseteq X\ \sup(Y) \in X$.

Тогда $X = [0;1]$.

Доказательство. Предположим противное: $X \neq [0;1]$. Рассмотрим $Z := [0;1] \setminus X$ ($Z \neq \varnothing$!) и $Y := \{y \in [0;1] \mid y < Z\}$ ($Y \neq \varnothing$!). Заметим, что $Y \subseteq X$ и $\sup(Y) = \inf(Z) = t$. Тогда $t \in X$ по второму условию. Значит для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $U_\varepsilon(t) \cap [0;1] \in X$, а т.е. $(U_\varepsilon(t) \cap [0;1]) \cap Z = \varnothing$, а тогда $t \neq \inf(Z)$ — противоречие. Значит $X = [0;1]$. □

2 Топология прямой, пределы и непрерывность.

2.1 Последовательности, пределы и ряды

Определение 8. *Предел последовательности* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x, что для любой окрестности x эта последовательность с некоторого момента будет лежать в этой окрестности:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Обозначение: $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = x$.

Предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x, что в любой его окрестности после любого момента появится элемент данной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n > N : \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Определение 9. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$$

Теорема 4. *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда фундаментальна.*

Доказательство.

1. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к некоторому значению X, тогда

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon/2 \Rightarrow \\ &\qquad \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| = |x_{n_1} - X + X - x_{n_2}| \leqslant |x_{n_1} - X| + |X - x_{n_2}| < \varepsilon \end{aligned}$$

2. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна. Мы знаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ все члены, начиная с некоторого различаются менее чем на ε. Тогда возьмём какой-нибудь такой член y_0 для некоторого ε, затем какой-нибудь такой член y_1 для $\varepsilon/2$, который идёт после y_0 и так далее. Получим последовательность, что все члены, начиная с n-ого лежат в $\varepsilon/2^n$-окрестности y_n. Тогда рассмотрим последовательность $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $I_n = [y_n - \varepsilon/2^{n-1}; y_n + \varepsilon/2^{n-1}]$. Несложно понять, что $I_n \supseteq I_{n+1}$, поэтому в пересечении $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ лежит некоторый X. Несложно понять, что все члены начальной последовательности, начиная с y_{n+2}, лежат в $\varepsilon/2^{n+2}$-окрестности y_{n+2}. При этом $|y_{n+2} - X| \leqslant \varepsilon/2^{n+1}$, что значит, что все члены главной последовательности, начиная с y_{n+2} лежат в $3\varepsilon/2^{n+2}$-окрестности X, а значит и в $\varepsilon/2^n$.

□

Утверждение 5. *Для последовательностей* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *верно (если определено), что*

1. $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} + \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$
2. $-\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$
3. $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n y_n\}_{n=0}^{\infty}$
4. $\frac{1}{\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}} = \lim\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$ *(если* $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \neq 0$*)*

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

Доказательство.

1. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \varepsilon/2 \quad \wedge \quad \forall m > M\ |y_m - Y| < \varepsilon/2,$$

тогда

$$\forall n > \max(N, M) \quad |(x_n + y_n) - (X + Y)| \leqslant |x_n - X| + |y_n - Y| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $X + Y$.

2. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \varepsilon,$$

тогда

$$\forall n > N \quad |(-x_n) - (-X)| = |X - x_n| = |x_n - X| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $-X$.

3. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$. Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \to \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} + \frac{|x|+|y|}{2}} = \sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} - \frac{|x|+|y|}{2}$$

Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда положительно. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $t^2 + t(|X| + |Y|) = \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \delta(\varepsilon) \quad \wedge \quad \forall m > M\ |y_m - Y| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\begin{aligned}
\forall n > \max(N, M) \quad |x_n \cdot y_n - X \cdot Y| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot Y + x_n \cdot Y - X \cdot Y| \\
&\leqslant |x_n \cdot (y_n - Y)| + |(x_n - X) \cdot Y| \\
&< |x_n| \cdot \delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \cdot |Y| \\
&< (|X| + \delta(\varepsilon)) \cdot \delta(\varepsilon) + |Y| \cdot \delta(\varepsilon) \\
&= \delta(\varepsilon)^2 + (|X| + |Y|)\delta(\varepsilon) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

что означает, что $\{x_n \cdot y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $X \cdot Y$.

4. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$. Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \to \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon|X|}{1 + \varepsilon|X|}$$

Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда меньше $|X|$. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $\frac{t}{|X|(|X|-t)} = \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\forall n > N \quad \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{X}\right| = \left|\frac{X - x_n}{X \cdot x_n}\right| < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X| \cdot |x_n|} < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X|(|X| - \delta(\varepsilon))} = \varepsilon,$$

что означает, что $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $1/X$.

$\square$

Определение 10. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ *асимптотически больше* последовательности $\{y_n\}_{n=0}^\infty$, если $x_n > y_n$ для всех натуральных n, начиная с некоторого. Обозначение: $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$.

Аналогично определяются *асимптотически меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^\infty \prec \{y_n\}_{n=0}^\infty$), *асимптотически не больше* ($\{x_n\}_{n=0}^\infty \preccurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$) и *асимптотически не меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^\infty \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$).

Утверждение 6. *Если $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$, то $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty \geqslant \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. $Y > X$, где $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^\infty$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ находятся в ε-окрестностях X и Y соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $y_n > Y - \varepsilon = X + \varepsilon > x_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^\infty \prec \{y_n\}_{n=0}^\infty$ — противоречие. Значит $X \geqslant Y$. $\square$

Утверждение 7. *Если $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty > \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$, то $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$.*

Доказательство. Пусть $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^\infty$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ находятся в ε-окрестностях X и Y соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $x_n > X - \varepsilon = Y + \varepsilon > y_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$. $\square$

Утверждение 8 (леммма о двух полицейских)**.** *Если*

$$\{x_n\}_{n=0}^\infty \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty \succcurlyeq \{z_n\}_{n=0}^\infty$$

и

$$\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = \lim\{z_n\}_{n=0}^\infty = A,$$

то предел $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ определён и равен A.

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ есть $N, M \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N\ |x_n - A| < \varepsilon \quad \wedge \quad \forall m > M\ |z_n - A| < \varepsilon,$$

значит

$$\forall n > \max(N, M) \quad A + \varepsilon > x_n \geqslant y_n \geqslant z_n > A - \varepsilon \quad \text{т.е. } |y_n - A| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ сходится и сходится к A. $\square$

Утверждение 9. *Если $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$, $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = A$, а $\{y_n\}_{n=0}^\infty$, не убывает (с некоторого момента), то предел $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ существует и не превосходит A.*

Доказательство. Если последовательность $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ возрастает не с самого начала, то отрежем её начало с до момента начала возрастания. Заметим, что она ограничена сверху (из-за последовательности $\{x_n\}_{n=0}^\infty$), тогда определим $B := \sup(\{y_n\}_{n=0}^\infty)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \quad |B - x_N| < \varepsilon$, тогда $\forall n > N \quad |B - x_n| < \varepsilon$, что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ сходится и сходится к B. По утверждению 6 $A \geqslant B$. $\square$

Определение 11. Сумма ряда $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ есть значение $\sum_{k=0}^\infty a_k := \lim \left\{\sum_{i=0}^k\right\}_{k=0}^\infty$. Частичной же суммой s_k этого ряда называется просто $\sum_{i=0}^k a_i$.

Определение 12. Ряд $\sum_{i=0}^\infty a_i$ *сильно сходится*, если $\sum_{i=0}^\infty |a_i|$ сходится.

Теорема 10. *Если ряд сильно сходится сходится, то он сходится.*

Доказательство.

Лемма 10.1. *Пусть ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ сходится, тогда сходится любой его "хвост" (суффикс), и для любого $\varepsilon > 0$ есть такой хвост, сумма которого меньше ε.*

Доказательство. Пусть $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$ верно, что $\sum_{i=0}^{n} |a_i| \in U_\varepsilon(A)$. Тогда заметим, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=N+1}^{n} |a_i| = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| - \sum_{i=0}^{N} |a_i| \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |a_i| - \sum_{i=0}^{N} |a_i| = A - \sum_{i=0}^{N} |a_i| \in U_\varepsilon(0)$$

Это и означает, что любой хвост сходится. И так мы для каждого ε нашли такой хвост, что его сумма меньше ε. □

Пусть дан сильно сходящийся ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Пусть $\varepsilon_n := \sum_{i=n}^{\infty} |a_i|$. Несложно видеть, что $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно уменьшается, сходясь к 0 (последнее следует из леммы 10.1). Также несложно видеть по рассуждениям леммы 10.1, что $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = |a_n|$. Тогда определим

$$S_n := \overline{U}_{\varepsilon_{n+1}}(\sum_{i=0}^{n} a_i),$$

где $\overline{U}_\varepsilon(x)$ — закрытая ε-окрестность точки x. Тогда несложно видеть, что

$$\left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i \right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| \leqslant \varepsilon_{n+1}$$

Тем самым сумма любого префикса длины хотя бы $n+1$ лежит в $\overline{U}_{\varepsilon_{n+1}}(\sum_{i=0}^{n} a_i) = S_n$. Также несложно видеть, что $S_{n+1} \subseteq S_n$. А также понятно, что S_i замкнуто и ограничено ("компактно").

Пусть $A := \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$ (поскольку диаметры шаров сходятся к нулю, то в пересечении лежит не более одной точки). Тогда мы видим, что $|\sum_{i=0}^{n} a_i - A| \leqslant \varepsilon_{n+1} \to 0$, поэтому $\sum_{i=0}^{n} a_i$ сходится и сходится к A. □

Следствие 10.1. *Если $\{b_i\}_{i=0}^{\infty} \succcurlyeq \{|a_i|\}_{i=0}^{n}$ и $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ существует, то и $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ существует.*

Теорема 11 (признак Лейбница)**.** *Пусть дана последовательность $\{a_n\}$, монотонно сверху сходящаяся к 0. Тогда ряд $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$ сходится.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} := \{S_{2n}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i \right\}_{n=0}^{\infty} \qquad \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} := \{S_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i \right\}_{n=0}^{\infty}$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant 0 \qquad & Q_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} - a_{2n-3} \geqslant 0 \\ Q_n - P_n &= -a_{2n+1} \leqslant 0 & P_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Тогда имеем, что $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно убывает, $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно возрастает, а также

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} \geqslant \{Q_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Тогда последовательности $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходятся и сходятся к P и Q соответственно. При этом последовательность

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} - \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{P_n - Q_n\}_{n=0}^{\infty} = a_{2n+1}$$

тоже сходится по условию и сходится к 0. Поэтому

$$P - Q = \lim\{P_n\}_{n=0}^{\infty} - \lim\{Q_n\}_{n=0}^{\infty} = 0$$

значит $P = Q$. Значит и последовательность префиксных сумм тоже сходится к $P = Q$. □

Лемма 12 (преобразование Абеля)**.**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

где $B_n := \sum_{i=0}^{n} b_i$*.*

Теорема 13 (признак Дирихле)**.** *Если даны* $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ *и* $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$*, что* $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \searrow 0$*, а* $\{B_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{i=0}^{n} b_i\}_{i=0}^{\infty}$ *ограничена, то ряд* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$ *сходится.*

Доказательство.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_k b_k = \sum_{i=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Пусть $|B_n| < C$ для всех n. Несложно видеть, что

$$\lim_{n \to \infty} |a_n B_n| \leqslant \lim a_n C = C \lim a_n = 0,$$

поэтому $\lim a_n B_n = 0$. Также

$$|(a_k - a_{k+1}) B_k| < C |a_k - a_{k+1}| = C(a_k - a_{k+1}),$$

поэтому

$$|S_n - a_n B_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k| < C \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = C(a_1 - a_{n+1}),$$

что тоже сходится. Поэтому $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится, т.е. и ряд сходится. □

2.2 Топология

Определение 13. *ε-окрестность* точки x (для $\varepsilon > 0$) — $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$. Обозначение: $U_\varepsilon(x)$.

Проколотая ε-окрестность точки x — $(x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon)$. Обозначение: $V_\varepsilon(x)$.

Определение 14. Пусть дано некоторое множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Тогда точка $x \in X$ называется *внутренней точкой множества* X, если она содержится в X вместе со своей окрестностью.

Само множество X называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Пример 1. Следующие множества открыты:

- $(a; b)$;
- $(a; +\infty)$;
- $\mathbb{R}$;
- $\varnothing$;
- $\bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i; b_i)$ (интервалы не обязательно не должны пересекаться).

Определение 15. Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества, если в любой проколотой окрестности x будет какая-либо точка X.

Множество предельных точек X называется *производным множеством* множества X и обозначается как X'.

Множество X называется замкнутым, если $X \supseteq X'$.

Определение 16. Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Если у любой последовательности его точек есть предельная точка из самого множества X, то X называется *компактным.*

Теорема 14. *Подмножество $\mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда замкнуто и ограничено.*

Доказательство.

1. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно. Если X неограниченно, то несложно построить последовательность элементов X, которая монотонно возрастает или убывает, а разность между членами не меньше любой фиксированной константы (например, не меньше 1); такая последовательность не имеет предельных точек, что противоречит определению X, а значит X ограничено. Если X не замкнуто, то можно рассмотреть предельную точку x, не лежащую в X, и построить последовательность, сходящуюся к ней, а значит никаких других точек у последовательности быть не может, а значит опять получаем противоречие с определением X; значит X ещё и замкнуто.

2. Пусть X замкнуто и ограничено. Пусть также дана некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ элементов X. Поскольку X ограничено, то значит лежит внутри некоторого отрезка I_0. Определим последовательность $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ рекуррентно следующим образом. Пусть I_n определено; разделим I_n на две половины и определим I_{n+1} как любую из половин, в которой находится бесконечное количество членов последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. после этого определим последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ как подпоследовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $y_n \in I_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (это можно сделать рекуррентно: если определён член y_n, то найдётся ещё бесконечное количество членов начальной последовательности в I_{n+1}, которые идут после y_n, так как отброшено конечное количество, а значит можно взять любой). Несложно видеть, что $\lim_{n\to\infty} y_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n =: y$. Из-за замкнутости $y \in X$, а значит y — предельная точка $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — лежит в X и доказывает компактность X.

□

Лемма 15. *Пусть Σ — семейство интервалов длины больше некоторого $d > 0$, покрывающее отрезок $[a; b]$. Тогда у Σ есть конечное подсемейство Σ', покрывающее $[a; b]$.*

Доказательство. Давайте вести индукцию по $\lceil (b-a)/d \rceil$.

База. $\lceil (b-a)/d \rceil = 0$. В таком случае $a = b$, а значит, можно взять любой интервал, покрывающий единственную точку и получить всё искомое семейство Σ'.

Шаг. Рассмотрим $\Omega := \{I \in \Sigma \mid a \in I\}$. Заметим, что если у правых концов интервалов из Ω нет верхних граней (т.е. их множество не ограничено сверху), то значит найдётся интервал, покрывающий и a, и b, а значит его как единственный элемент семейства Σ' будет достаточно. Иначе определим a' как супремум правых концов интервалов из Ω.

Тогда мы имеем, что есть интервалы из Ω, подбирающиеся сколь угодно близко к a', а также что все интервалы из Σ, покрывающие a' не покрывают a. Если $a' > b$, то можно опять же взять интервал, который покроет весь $[a; b]$, и остановится. Иначе рассмотрим любой интервал I, покрывающий a' и любой интервал J из Ω, перекрывающийся с I. Пусть a'' — правый конец J.

Заметим, что I и J покрывают $[a; a'')$. При этом $a < J < a''$, значит $a'' - a \geqslant \operatorname{osc}(J) > d$. Если $a'' > b$, то $\Sigma = \{I, J\}$ будет достаточно. Иначе заметим, что

$$\left\lceil \frac{b-a''}{d} \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a}{d} - \frac{a''-a}{d} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{b-a}{d} - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a}{d} \right\rceil - 1 < \left\lceil \frac{b-a}{d} \right\rceil$$

Тогда по предположению индукции есть конечное подпокрытие Σ'' покрытия Σ отрезка $[a''; b]$. Значит $\Sigma' := \Sigma'' \cup \{I, J\}$ является конечным подпокрытием покрытия Σ множества $[a; b]$. □

Лемма 16. *Пусть Σ — семейство интервалов длины больше некоторого $d > 0$. Тогда найдётся не более чем счётное подсемейство Σ', имеющее такое же объединение, т.е. $|\Sigma'| \leqslant |\mathbb{N}|$, а $\bigcup \Sigma = \bigcup \Sigma'$.*

Доказательство. Несложно видеть, что $A := \bigcup \Sigma$ представляется в виде дизъюнктного объединения интервалов. Каждый из них можно представить как объединение не более чем счётного отрезков. Итого мы получим не более чем счётное семейство Ω отрезков, что $\bigcup \Omega = A$. Для каждого отрезка из Ω построим по лемме 15 конечное подпокрытие покрытия Σ, а затем объединив их, получим не более чем счётное семейство Σ', покрывающее любой из них, а значит и $\bigcup \Omega = A = \bigcup \Sigma$. С другой стороны Σ' — подмножество Σ, значит и $\bigcup \Sigma'$ — подмножество $\bigcup \Sigma$.

В итоге $\bigcup \Sigma' = \bigcup \Sigma$, и при этом Σ' — не более чем счётное подмножество Σ. $\square$

Лемма 17. *Пусть дано семейство Σ интервалов. Тогда из него можно выделить не более чем счётное подсемейство Σ' с тем же объединением, т.е. $|\Sigma'| \leqslant |\mathbb{N}|$, а $\bigcup \Sigma = \bigcup \Sigma'$.*

Доказательство. Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{Z}$ семейство

$$\Sigma_n = \{I \in \Sigma \mid \operatorname{osc}(I) \in [2^n; 2^{n+1})\}$$

Применим лемму к Σ_n и получим Σ'_n. Тогда $\Sigma' := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma'_n$ является подмножеством Σ, даёт в объединении то же, что и Σ, и при этом имеет мощность не более $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. $\square$

Теорема 18. *Подмножество $\mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда из любого его покрытия интервалами можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство.

1. Пусть X компактно, а Σ — некоторое его покрытие интервалами. Определим для каждого $d > 0$

   $$\Sigma_d := \{I \in \Sigma \mid \operatorname{osc}(I) > d\}$$

   Если никакое из Σ_d не является подпокрытием множества X, то рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, где x_n — любой элемент $X \setminus \Sigma_{1/2^n}$. У $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ есть предельная точка $x \in X$. Значит должен быть интервал, покрывающий x, но тогда он же покрывает весь некоторый хвост нашей последовательности, а сам лежит в некотором $\Sigma_{1/2^n}$ — противоречие. Значит некоторое Σ_d является подпокрытие, а значит далее можно рассматривать его в качестве Σ.

   $\bigcup \Sigma$ — открытое множество, поэтому является дизъюнктным объединением семейства Ω интервалов. Поскольку в Σ длины всех интервалов больше d, то в Ω тоже. Но также X ограничено, поэтому Ω конечно, да и все интервалы в нём ограничены. Заметим, что $X \cap I$, где I — любой интервал из Ω, является замкнутым множеством, поэтому его можно накрыть некоторым отрезком $S \subseteq I$ (для этого можно взять отрезок $[\inf(X \cap I); \sup(X \cap I)]$). Значит из накрытия Σ выделить $|\Omega|$ конечных подпокрытий для каждого отрезка (по лемме 16), а их объединение даст конечное покрытие X.

2. Пусть X таково, что из любого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

   Если X неограничено, то тогда несложно будет видеть, что покрытие $\{(n; n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ нельзя уменьшить до конечного. Значит X конечно.

   Если X не замкнуто, то значит есть точка $x \notin X$, что в любой окрестности x будет точка. Тогда рассмотрим покрытие $\{(x + 2^n; x^{n+2}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x - 2^{n+2}; x^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Несложно видеть, что если взять любое конечное подсемейство интервалов, то оно не накроет некоторую окрестность x, а значит и X. Значит X замкнуто.

   Итого получаем, что X компактно.

$\square$

2.3 Пределы функций, непрерывность

Определение 17 (по Коши)**.** *Предел* функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке x — такое значение y, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : f(V_\delta(x) \cap X) = U_\varepsilon(y)$$

Обозначение: $\lim\limits_{t \to x} f(t) = y$.

Определение 18 (по Гейне)**.** *Предел* функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке x — такое значение y, что для любой последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ элементов $X \setminus \{x\}$ последовательность $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к y. Обозначение: $\lim\limits_{t \to x} f(t) = y$.

Теорема 19. *Определения пределов по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Будем доказывать равносильность отрицаний утверждений, ставимых в определениях.

1. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ не сходится по Коши в x к значению y. Значит есть такое $\varepsilon > 0$, что в любой проколотой окрестности x (в множестве X) есть точка, значение f в которой не лежит в ε-окрестности. Рассмотрев любую такую проколотую окрестность $I_0 = V_{\delta_0}(x)$, берём в ней любую такую точку x_0. Далее рассмотрев $I_1 = V_{\delta_1}(x)$, где $\delta_1 = \min(\delta_0/2, |x - x_0|)$, берём там любую точку x_1, где значение f вылетает вне ε-окрестности y. Так далее строим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся к x, значения f в которой не лежат в ε-окрестности y, что означает, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ не сходится к y, что означает, что f не сходится по Гейне в x к значению y.

2. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ не сходится по Гейне в x к значению y. Значит есть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящаяся к x, что последовательность её значений не сходится к y. Значит есть $\varepsilon > 0$, что после любого момента в последовательности будет член, значение в котором вылезает вне ε-окрестности y. Поскольку для любой проколотой окрестности x есть момент, начиная с которого вся последовательность лежит в этой окрестности, то в любой проколотой окрестности x есть член, значение которого вылезает вне ε-окрестности y, что означает, что f не сходится по Коши в x к y.

□

Утверждение 20. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в x предел тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; \forall x_1, x_2 \in V_\delta(x) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Доказательство. Такое же как для последовательностей: см. теорему 4. □

Утверждение 21. *Для функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ верно, что*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} (f + g)(x)$
2. $\lim\limits_{x \to a} (-f)(x) = -\lim\limits_{x \to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim (f \cdot g)(x)$
4. $\frac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \lim\limits_{x \to a} (\frac{1}{f})(x)$ *(если $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$)*
5. $\lim\limits_{y \to \lim\limits_{x \to a} g(x)} f(y) = \lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x)$

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

Замечание 3. Утверждения 6, 7 и 8 верны, если заменить последовательности на функции, пределы последовательностей на пределы функций в некоторой точке x, а асимптотические неравенства на неравенства на окрестности x.

Определение 19. *Верхним пределом* функции f в точке x_0 называется

$$\varlimsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{\delta > 0}(\sup_{V_\delta(x_0)} f)$$

Нижним пределом функции f в точке x_0 называется

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{\delta > 0}(\inf_{V_\delta(x_0)} f)$$

Утверждение 22. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в x предел тогда и только тогда, когда $\varlimsup\limits_{t \to x} f(t) = \varliminf\limits_{t \to x} f(t)$.*

Определение 20. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* x, если $\lim\limits_{t \to x} f(t) = f(x)$. В изолированных точках f всегда непрерывна.

Определение 21. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной на множестве* $Y \subseteq X$, если она непрерывна во всех точках Y.

Утверждение 23. *Для непрерывных на X функций f и g верно, что*

- *$f + g$ непрерывна на X;*
- *fg непрерывна на X;*
- *$\frac{1}{f}$ непрерывна на X (если $f \neq 0$).*

Утверждение 24. *Для f, непрерывной в x_0, и g, непрерывной в $f(x_0)$, $g \circ f$ непрерывна в x_0.*

Теорема 25 (Вейерштрасса)**.** *Непрерывная функция на компакте ограничена на нём и принимает на нём свои минимум и максимум.*

Доказательство. Докажем утверждение для ограниченности сверху и максимума; для ограниченности снизу и минимума рассуждения аналогичны.

Пусть множество неограниченно сверху. Тогда есть $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty} \to +\infty$. Тогда рассмотрим подпоследовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся к y. Тогда

$$f(y) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = +\infty$$

— противоречие.

Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к супремуму S функции. Рассмотрим подпоследовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся к y. Тогда

$$f(y) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = S$$

$\square$

Следствие 25.1. *Так как отрезок компактен, то любая непрерывная на нём функция ограничена и принимает на нём свои максимум и минимум.*

Теорема 26 (о промежуточном значении). *Пусть f непрерывна на $[a;b]$, а $f(a) < f(b)$. Тогда $\forall y \in [f(a); f(b)]$ найдётся $c \in [a;b]$, что $f(c) = y$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{(a_n; b_n)\}_{n=0}^{\infty}$, что $(a;b) = (a_0; b_0)$, а следующие пары определяются так: если $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$, то $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (\frac{a_n+b_n}{2}; b_n)$, иначе $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (a_n; \frac{a_n+b_n}{2})$. Тогда $c = \lim\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда

$$f(c) = \lim\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{f(b_n)\}_{n=0}^{\infty},$$

откуда получаем, что $f(c) \geqslant y$ и $f(c) \leqslant y$, т.е. $f(c) = y$. $\square$

Определение 22. Функция f *равномерно непрерывна* на X, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in X \quad f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

Теорема 27 (Кантор). *Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x, y : \quad |x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Тогда рассмотрим последовательность пар x и y построенных так для δ, сходящихся к 0. Из неё выделим подпоследовательность, что x сходится к некоторому a. Тогда y сойдутся к нему же. Тогда в любой окрестности a будет пара точек $(x'; y')$, что $|f(x') - f(y')| > \varepsilon$, значит будет в любой окрестности x будет точка, выбивающаяся из $\varepsilon/2$-окрестности — противоречие с непрерывностью. $\square$

Определение 23. Пусть есть функции f и g, что $|f| \leqslant C|g|$ в окрестности x для некоторого $C \in \mathbb{R}$, тогда пишут, что $f = O(g)$ (при $t \to x$).

Если же $\forall \varepsilon > 0$ будет такая окрестность x_0, что $|f| \leqslant \varepsilon |g|$ в этой окрестности, тогда пишут, что $f = o(g)$ (при $t \to x$).

2.4 Гладкость (дифференцируемость)

Определение 24. Функция f называется *гладкой (дифференцируемой)* в x, если $f(x+\delta) = f(x) + A\delta + o(\delta)$ для некоторого $A \in \mathbb{R}$. В таком случае A называется *дифференциалом (производной)* f в точке x.

Обозначение: $f'(x) = A$.

Определение 25. Функция f называется *гладкой (дифференцируемой)* в x, если предел

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

определён. В таком случае его значение называется *дифференциалом (производной)* f в точке x.

Утверждение 28. *Определения 24 и 25 равносильны.*

Утверждение 29. *Непрерывная в некоторой точке функция там же непрерывна.*

Определение 26. Функция, значения которой равны производным функции f в тех же точках называется *производной функцией* (или просто *производной*) функции f. Обозначение: f'.

Лемма 30. *Для дифференцируемых в x функций f и g*

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;

2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *(правило Лейбница)*;

3. $(\frac{1}{f})'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$;

4. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Лемма 31. *Пусть дана $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция. Тогда существует $g : [f(a); f(b)] \to \mathbb{R}$ — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция, что $g \circ f = Id$.*

Доказательство. Заметим, что f — монотонно возрастающая (убывающая) биекция из $[a; b]$ в $[f(a); f(b)]$. Тогда существует монотонно возрастающая (убывающая) биекция $g : [f(a); f(b)] \to [a; b]$, что $g \circ f = id$. Осталось показать, что g непрерывна.

Предположим противное, тогда в любой окрестности некоторой точки $f(x)$ из $[f(a); f(b)]$ есть точки вылетающие вне ε-окрестности. Значит все точки из либо $(x - \varepsilon; x)$, либо $(x; x + \varepsilon)$ не принимаются, значит g не биекция — противоречие. Значит g непрерывна. □

Лемма 32.

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Доказательство. Пусть $g := f^{-1}$. Тогда

$$1 = Id' = (f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$$

Откуда следует, что

$$(f^{-1})' = g' = \frac{1}{f' \circ g} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

□

Определение 27. Функция f *возрастает в точке* y, если есть $\varepsilon > 0$, что $f(x) \leqslant f(y)$ для любого $x \in (y - \varepsilon; y)$ и $f(x) \geqslant f(y)$ для любого $x \in (y; y + \varepsilon)$.

Аналогично определяется убываемость функции в точке.

Лемма 33. *Если f возрастает в любой точке на $[a; b]$, то $f(a) \leqslant f(b)$.*

Доказательство.

1. Можно рассмотреть для каждой точки $[a; b]$ окрестность, для которой верна её возрастаемость, и из покрытия, ими образуемого, выделить конечное. А тогда перебираясь между общими точками окрестностей, получим искомое.

2. Также можно предположить противное, рассмотреть последовательность вложенных отрезков, у которых левый конец выше правого, и тогда для точки пересечения отрезков будет противоречие.

□

Следствие 33.1. *f возрастает на всём отрезке.*

Теорема 34. *Если f гладка, а f' положительна на $[a; b]$, то f строго возрастает на $[a; b]$.*

Доказательство. Несложно видеть, что в любой точке на $[a;b]$ у функции есть окрестность, где она строго возрастает, так как если $t \in [a;b]$, а $f'(t) = \lambda > 0$, то в некоторой окрестности

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \in (0;2\lambda) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \in (f(t);f(t)+2\lambda(x-t))$$

что значит, что эта окрестность — подтверждение для возрастания f в t. Тогда по предыдущему следствию f возрастает на $[a;b]$. Если вдруг функция возрастает нестрого, то тогда найдётся подотрезок на $[a;b]$, на котором функция константа, а значит на интервале с теми же концами производная тождественна равна нулю. □

Теорема 35. *Если f возрастает, то f' в своей области определения неотрицательно.*

Доказательство. Если функция в точке t равна $\lambda < 0$, то в некоторой окрестности t

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \in \left(\frac{3}{2}\lambda; \frac{1}{2}\lambda\right) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \in \left(f(t)+\frac{3}{2}\lambda(x-t); f(t)+\frac{1}{2}\lambda(x-t)\right)$$

что значит, что f в точке t "строго"убывает — противоречие. Значит $f'(t) \geqslant 0$. □

Определение 28. *f имеет локальный максимум в x*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $f(x) \geqslant f(y)$ для любого $y \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)$.

Аналогично определяется точка локального минимума.

Теорема 36. *В точках локальных максимумов и минимумов функции f функция f' принимает нули (если определена).*

Доказательство. Слева от точки максимума функция возрастает в данной точке, значит производная в данной точке $\geqslant 0$, а справа — убывает, значит производная $\leqslant 0$, значит производная равна 0. Аналогично для точки минимума. □

Теорема 37 (Ролль). *Если f — гладкая функция на $[a;b]$, и $f(a) = f(b)$, то существует $c \in (a;b)$, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. В точке максимума или минимума f на $[a;b]$ достигается ноль производной. Если они обе совпадают с концами отрезка, то значит функция константа, а тогда в любой точке отрезка производная равна нулю. □

Теорема 38. *Если f и g непрерывные на $[a;b]$ и гладкие на $(a;b)$ функции, а $g' \neq 0$, то существует $c \in (a;b)$, что*

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Пусть

$$\lambda := \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$$

а $\tau(x) := f(x) - \lambda g(x)$. В таком случае

$$\frac{\tau(a)-\tau(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{(f(a)-f(b)-\lambda(g(a)-g(b)))}{g(a)-g(b)} = \lambda - \lambda = 0$$

значит $\tau(a) = \tau(b)$, значит есть $c \in [a;b]$, что $\tau(c) = 0$. Тогда

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{(\tau+\lambda g)'(c)}{g(c)} = \frac{\tau'(c)}{g(c)} + \lambda = \lambda = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$$

□

Теорема 39 (Лагранж). *Если f непрерывна на $[a;b]$ и гладка на $(a;b)$, то существует $c \in (a;b)$, что*

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$$

Доказательство. Очевидно следует из предыдущей теоремы с помощью подстановки $g(x) = x$. □

Теорема 40. *Пусть f — гладкая на $(a;b)$ функция.*

1. *Если $f' \geqslant 0$, то f возрастающая функция.*
2. *Если $f' > 0$, то f строго возрастающая функция.*
3. *Если f возрастающая функция, то $f' > 0$.*

Теорема 41. *Пусть f — гладкая на $[a;b]$ функция. Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in [a;b]$, то $f \equiv const$ на том же отрезке.*

Замечание 4. Функция $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ (доопределённая в нуле) имеет производную $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ в случае ненулевых x и производную $f'(0) = 0$. При этом легко видно, что f' не является непрерывной функцией (она имеет разрыв в том же нуле).

Теорема 42. *Если f гладка на $(a;b)$, а f' не равна нулю, то f' либо положительна, либо отрицательна.*

Доказательство. f не принимает никакое значение на $(a;b)$ дважды (т.к. иначе у производной был бы корень), значит она либо строго возрастает, либо строго убывает, а значит f' либо неотрицательна, либо неположительна соответственно. Но ноль принимать не может, поэтому последнее утверждение равносильно тому, что f либо строго положительна, либо строго отрицательна. □

Теорема 43. *Пусть f гладка на $(a;b)$ и для некоторых $u, v \in (a;b)$ верно, что $f'(u) < \alpha < f'(v)$. Тогда существует $c \in (u;v)$, что $f'(c) = \alpha$.*

Доказательство. Пусть $g(x) := f(x) - \alpha x$. Тогда $g'(u) < 0 < g'(v)$, значит g не может строго возрастать или убывать на $(u;v)$, значит $\exists c \in (u;v)$, что $g'(c) = 0$, а значит $f'(c) = \alpha$. □

Замечание 5. Данная теорема по сути является теоремой о промежуточном значении для производной.

Теорема 44. *Пусть f непрерывна на $[a;b)$ и гладка на $(a;b)$. Пусть также $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ существует и равен d. Тогда $f'(a)$ тоже существует и равна d.*

Доказательство. Есть несколько способов:

1. Несложно видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ есть некоторая правая окрестность a, в которой функция f' лежит в ε-окрестности d. Тогда $f(x) - (d-\varepsilon)x$ убывает в данной окрестности, а $f(x) - (d+\varepsilon)x$ возрастает, значит $f(x) - f(a) \in ((d+\varepsilon)(x-a); (d-\varepsilon)(x-a))$. В таком случае $f'(a)$ определена и равна d.
2. По теореме Лагранжа для любого $x \in [a;b)$ найдётся $\xi \in (a;x)$, что

   $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$$

   Значит

   $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} f'(\xi) = d$$

   что буквально значит, что $f'(a) = d$.

$\square$

Теорема 45 (правило Лопиталя)**.** *Пусть* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. *Пусть также* f *и* g *гладки и* $g' \neq 0$ *на* $(a;b)$. *Тогда*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

если второй предел определён.

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$, а

$$d := \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

. Тогда есть $\delta > 0$, что для любого $t \in (a; a+\delta)$ значение $f'(t)/g'(t)$ лежит в $U_\varepsilon(d)$. Легко видеть, что для любых $x, y \in (a; a+\delta)$ существует $\xi \in (x; y) \subseteq (a; a+\delta)$, что

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = f'(\xi) \in U_\varepsilon(d)$$

Устремляя x к a, получаем, что $f(y)/g(y)$ тоже лежит в $U_\varepsilon(d)$. Тогда по определению предела

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = d = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$

Определение 29. f'' — вторая производная f, т.е. $(f')'$, а $f^{(n)}$ — n-ая производная f, т.е. $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, $f^{(0)} := f$.

Определение 30. $P(x)$ — полином Тейлора степени n функции f, если $\deg(P) \leqslant n$, а

$$f(x) - P(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a$$

Теорема 46. *Если* P_1 *и* P_2 *— полиномы Тейлора степени* n *функции* f*, то* $P_1 = P_2$.

Теорема 47. *Пусть* $f : (a;b) \to \mathbb{R}$, $f^{(1)}$, ..., $f^{(n-1)}$ *определены на* $(t-\delta; t+\delta)$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и определена* $f^{(n)}(t)$. *Тогда*

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + o((x-t)^n)$$

Доказательство. Рассмотрим $g(x) := f(x) - f(t)/0! \cdot (x-t)^0 - \dots - f^{(n)}(t)/n! \cdot (x-t)^n$. Тогда задача сведена к следующей лемме.

Лемма 47.1. *Если* $g^{(1)}$, ..., $g^{(n-1)}$ *определены на* $(t-\delta; t+\delta)$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и*

$$g(t) = g^{(1)}(t) = \dots = g^{(n)}(t) = 0.$$

Тогда $g(x) = o((x-t)^n)$.

Доказательство. Докажем по индукции по n.

База. Пусть $n = 1$. Тогда очевидно, что $f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + o(x-t) = o(x-t)$.

Шаг. По предположению индукции $f'(x) = o((x-t)^n)$. Тогда мы имеем, что

$$f(x) = f(x) - f(t) = f'(\xi)(x-t)$$

для некоторого $\xi \in (x, t)$. Тогда

$$\frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^n} = \frac{f'(\xi)}{(x-t)^{n-1}} = \frac{o((\xi-t)^{n-1})}{(x-t)^{n-1}} = o(1)\frac{(\xi-t)^{n-1}}{(x-t)^{n-1}} = o(1)$$

$\square$

□

Теорема 48. *Пусть* $f(t) = f^{(1)}(t) = \dots = f^{(n)}(t) = 0$*, а* $f^{(n+1)} \neq 0$*. Если* n *чётно, то* t *— не экстремальные точка функции* f*, иначе* t *— экстремальная точка функции* f*.*

Теорема 49. *Пусть* $f : (a; b) \to \mathbb{R}$*,* $f^{(1)}, \dots, f^{(n+1)}$ *определены на* $(t - \delta; t + \delta)$ *для некоторого* $\delta > 0$*. Тогда существует* $\xi \in (x; t)$*, что*

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x - t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - t)^{n+1}$$

Доказательство. Точно так же сведём f к g, что $g(t) = \dots g^{(n)}(t) = 0$. Тогда требуется показать, что $g(x) = g^{(n+1)}(\xi)/(n + 1)! \cdot (x - t)^{n+1}$ для некоторого $\xi \in (x, t)$. Докажем это по индукции.

База. $n = 0$. Теорема Лагранжа.

Шаг.

$$\frac{f(x)}{(x - t)^{n+1}} = \frac{f(x) - f(t)}{(x - t)^{n+1} - (t - t)^{n+1}} = \frac{f'(\xi)}{(n + 1)(\xi - t)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n + 1)!}$$

где $\xi \in (x, t)$ (существует по теореме Лагранжа), а $\eta \in (\xi, t) \subseteq (x, t)$ (существует по предположению индукции для f' и ξ). Отсюда следует искомое утверждение. □

2.5 Стандартные функции, ряды Тейлора и их сходимость

Тут нужно рассказать про функции exp, sin, cos и $(1 + x)^\alpha$ и их ряды

Определение 31. f является *(поточечным) пределом* $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ на E, если $\lim\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty = f(x)$ для любого $x \in E$.

Определение 32. f является *равномерным пределом* $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и $x \in E$.

Теорема 50 (Стокс, Зейдель)**.** *Пусть* $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ *— последовательность непрерывных функций, и* $f_n \to f$ *равномерно на* E*. Тогда* f *непрерывна.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ есть такое $n \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ для всех $x \in E$. Тогда существует $\delta > 0$, что $f_n(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(t))$ для данного t. Тогда

$$f(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(U_\delta(t))) \subseteq U_{2\varepsilon/3}(f_n(t)) \subseteq U_\varepsilon(f(t)).$$

□

Теорема 51 (Коши)**.** *TFAE (the following are equivalent):*

1. $f_n \to f$ *равномерно сходится на* E*.*
2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N \in \mathbb{N}$*, что* $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$ *для любых* $k, l > N$ *и* $x \in E$*.*

Теорема 52 (Вейерштрасс)**.** *Пусть* $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ *— последовательность непрерывных функций, что есть последовательность чисел* $\{d_n\}_{n=0}^\infty$*, для которой верно, что* $|u_n| < d_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$*, и* $\sum_{n=0}^\infty d_n$ *сходится. Тогда* $\sum_{n=0}^\infty u_n$ *равномерно сходится.*

Теорема 53. *Пусть* $f_n \to f$ *на* E *и* $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ *гладкие. Если* $f'_n \to g$ *равномерно, то* f *тогда тоже гладка и* $f' = g$*.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что $|f_k' - f_l'| < \varepsilon/3$ для всех $k, l > N$. Тогда имеем, что

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y}\right| = \left|\frac{(f_k - f_l)(x) - (f_k - f_l)(y)}{x - y}\right| = |(f_k - f_l)'(\xi)| < \varepsilon/3$$

Устремляя l к бесконечности получаем, что

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant \varepsilon/3$$

Также имеем, что есть такое $\delta > 0$, что для всех $y \in U_\delta(x)$

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - f_k'(x)\right| < \varepsilon/3$$

Также есть $M \in \mathbb{N}$, что $|f_k' - g| < \varepsilon/3$ для любого $k > M$. Складывая всё вместе, получаем, что для всех $k > \max(N, M)$ и $y \in U_\delta(x)$

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - g(x)\right| < \varepsilon$$

Значит f гладка и $f' = g$. □

Следствие 53.1. *Если* $\{f^{(0)}\}$, …, $\{f^{(n-1)}\}$ *сходятся, а* $f^{(n)}$ *равномерно сходится. Тогда то же верно и про первые* n *производных.*

Следствие 53.2. *Если ряд Тейлора сходится, то функция бесконечно гладкая.*