Введение в алгебраическую геометрию.

Лектор — Иван Александрович Панин
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

TODOs

Дописать. 3
Дописать. 3
Ref 5
Дописать? 8
Обозначить это по-нормальному. 9
Написать леммы про пересечения и объединения $I(X)$ 12
Дописать? 18
Надо как-то разобраться с повторами 18
Этот переход непонятно написан, нужно переписать. 20
Здесь пропущенная лекция!!! 21
Опустили случай $f = 0$. 22
Дописать. 22

Содержание

1 Коммутативноалгебраическое введение **1**
1.1 Алгебраические и чисто трансцендентные расширения полей 5

2 Аффинная геометрия **9**

Литература:

- Хартсхорн, “Алгебраическая геометрия”.
- Атья, Макдональд, “Введение в коммутативную алгебру”.

Замечание 1. Все кольца ассоциативны, коммутативны и с единицей.

1 Коммутативноалгебраическое введение

Определение 1. Пусть I — частично упорядоченное по порядку $\leqslant$ множество, т.е.

$$a \leqslant b \leqslant c \implies a \leqslant c.$$

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

ОВУ: всякая последовательности элементов $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots$ стабилизируется с некоторого момента (т.е. последовательность имеет константный хвост).

Наличие минимального элемента. Для всякого $J \subseteq I$ существует $j_{max} \in J$, что для всякого $j \in J$ имеет место следствие $j_{max} \leqslant j \Rightarrow j = j_{max}$.

Лемма 1. *I удовлетворяет ОВУ тогда и только тогда, когда I удовлетворяет наличию минимального элемента.*

Доказательство.

$\Rightarrow$) Предположим, что максимального элемента, т.е. для всякого элемента есть строго больший. Тогда мы можем построить строго возрастающую последовательность, что противоречит ОВУ.

$\Leftarrow$) Пусть дана нестрого возрастающая последовательность $(i_m)_{m=1}^{\infty}$. Тогда применяя свойство наличия максимального элемента для $J := \{i_m\}_{m=1}^{\infty}$, получаем, что есть $j_M \in J$ (для некоторого M), для которого нет строго большего в J. Значит после j_M все элементы с ним совпадают.

$\square$

Определение 2. Пусть A — кольцо, а M — A-модуль. Тогда $\mathrm{mod}(A)$ — множество всех подмодулей в M, упорядоченных по включению ($(0), M \in \mathrm{mod}(M)$).

M *нётеров*, если $\mathrm{mod}(A)$ удовлетворяет ОВУ (или наличию максимального элемента).

Лемма 2.

1. *Если M нётеров, то любой подмодуль $N \subseteq M$ конечнопорождён (как A-модуль).*
2. *Если любой подмодуль M конечнопорождён, то M нётеров.*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$) Пусть M нётеров, $N \subseteq M$ — подмодуль. Пусть I — все конечнопорождённые модули в N.

I непуст, так как $(0) \in I$. Следовательно, в I есть максимальный элемент, пусть N_{max}. Если $N_{max} = N$, то N конечнопорождён. Если $N_{max} \neq N$, то существует $x \in N \setminus N_{max}$, что $N_{max} \subsetneq N_{max} + x \cdot A \subseteq N$ — противоречие.

$2 \Rightarrow 1$) Пусть имеется последовательность $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ подмодулей M. Определим

$$M_\infty := \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m.$$

M_∞ тоже подмодуль M. Значит M_∞ конечнопорождён. $x_1, \ldots, x_n \in M_\infty$, значит есть n_0, что $x_1, \ldots, x_n \in M_{n_0}$. Следовательно,

$$M_{n_0} = M_{n_0+1} = M_{n_0+2} = \ldots$$

$\square$

Лемма 3. *M' — подмодуль M и есть сюръективный гомоморфизм $\pi : M \to M/M' = M''$. Тогда M нётеров тогда и только тогда, когда M' и M'' нётеровы.*

Доказательство. Пусть M — нётерово. Покажем, что M' нётерово. Пусть есть цепочка $M_1' \subseteq M_2' \subseteq \dots$ подмодулей M. M нётерово, значит цепочка стабилизируется, значит M' нётерова.

Покажем, что M'' нётерово. Пусть есть цепочка подмодулей $M_1'' \subseteq M_2'' \subseteq \dots$. Следовательно $[\pi(\pi^{-1}(M_1'') \subseteq \pi^{-1}(M_2'') \subseteq \dots)] \subseteq M$. Значит цепочка стабилизируется. Значит стабилизируется изначальная цепочка, значит M'' нётерово.

Теперь предположим, что M' и M'' нётеровы.

Дописать.

$\square$

Определение 3. Кольцо A *нётерово*, если как модуль над собой нётерово.

Замечание 2. 1 — образующая A как A-модуля. Всякий идеал I является подмодулем A, но может не иметь одного образующего.

Определение 4. *Идеал* I кольца A — непустое подмножество A, что для всяких $a, b \in I$ $a + b \in I$ и для всяких $a \in I$, $k \in A$ $ak \in I$.

Лемма 4. *Пусть дано кольцо A. TFAE*

1. *A нётерово.*
2. *Любая цепочка идеалов $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ стабилизируется.*
3. *Всякий идеал I конечнопорождён.*

Доказательство.

$1 \Leftrightarrow 2)$ По определению.

$1 \Leftrightarrow 3)$ По лемме 2.

$\square$

Лемма 5. *Пусть дано нётерово кольцо A. Тогда для всякого $n \geqslant 0$ A^n — нётеров модуль.*

Доказательство. (0) — нётеров. $A^1 = A$ — нётеров. Далее легко провести по индукции, что A^{n-1} нётерово и $A^n/A^{n-1} = A$ нётерово, а тогда A^n нётерово. $\square$

Следствие 5.1. *Если A — нётерово кольцо, то всякий конечнопорождённый A-модуль M нётеров.*

Доказательство. Пусть $m_1, \dots, m_r \in M$ — система порождающих модуля M. Тогда имеем сюръективный гомоморфизм $A^r \to M$, порождённый $e_i \mapsto m_i$. Следовательно, по лемме 3 из нётеровости A^r следует нётеровость M. $\square$

Следствие 5.2. *Если M — конечнопорождённый модуль и N — подмодуль M, то N конечнопорождён. В частности всякий подмодуль $N \subseteq A^r$ конечнопорождён.*

Доказательство.

Дописать.

$\square$

Теорема 6 (Гильберта)**.** *Если кольцо A нётерово, то $A[t]$ нётерово.*

Доказательство. Пусть фиксирован некоторый идеал I в $A[t]$. Как только мы покажем, что I конечнопорождён, то применяя лемму 4, получим нётеровость $A[t]$.

Пусть $\mathcal{A} \subseteq A$ — множество старших членов многочленов из I.

Лемма 6.1. *$\mathcal{A}$ — идеал. И, следовательно, конечнопорождено.*

Доказательство. Действительно, для всяких $a, b \in \mathcal{A}$ есть многочлены $f_a, f_b \in I$ со старшими коэффициентами a и b соответственно. Следовательно $f_a t^{\deg(f_b)} + f_b t^{\deg(f_a))}$ лежит в I и имеет старший коэффициент $a+b$ (если только $a+b \neq 0$; иначе очевидно). Также если $a \in \mathcal{A}$, а $k \in A$, то есть многочлен $f_a \in I$ с данным старшим коэффициентом. Но тогда kf_a (если $ak \neq 0$; иначе очевидно) лежит в I и имеет старший член ak. $\square$

Рассмотрим $a_1, \ldots, a_r$ — система порождающих $\mathcal{A}$, а $f_1, \ldots, f_r$ — многочлены из I с данными старшими коэффициентами.

Тогда всякий $f \in I$ порождается тогда и только тогда, когда порождается соответствующий ему $g \in I$ степени меньше $n := \max_k \deg(f_k)$, так как иначе с помощью старших членов f_i можно породить старший член f, вычесть его из f и тем самым понизить степень. Значит вопрос свёлся к порождаемости многочленов из I степени не выше n.

Заметим, что описанные многочлены образуют модуль $I \cap (A \oplus At \oplus \cdots \oplus At^{n-1})$ — подмодуль A^n. Значит $I \cap (A \oplus At \oplus \cdots \oplus At^{n-1})$ конечнопорождён, а отсюда I конечнопорождён. $\square$

Лемма 7. *Если B — нётерово кольцо, C — кольцо, а $\varphi : B \to C$ — гомоморфизм колец, то $\varphi(B)$ — нётерово.*

Доказательство. Пусть дана последовательность идеалов $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ в $\varphi(B)$. Тогда $\varphi^{-1}(I_i)$ — идеалы и

$$\varphi^{-1}(I_1) \subseteq \varphi^{-1}(I_2) \subseteq \ldots.$$

Значит с какого-то момента эта цепочка стабилизируется, а значит стабилизируется образ этой цепочки по φ, т.е. изначальная цепочка. $\square$

Лемма 8. *Если $\psi : A \to C$ — гомоморфизм колец, такой что C — конечная A-алгебра, порождённая элементами $x_1, \ldots, x_n$. Тогда C нётеров.*

Доказательство. Мы можем рассмотреть нативное вложение A в $A[t_1, \ldots, t_n]$ и гомоморфизм A-алгебр $\varphi : A[t_1, \ldots, t_n] \to C$, порождённый ψ и соотношениями $\varphi(t_i) = x_i$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, hook] & & C \\
& A[t_1, \ldots, t_n] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

φ сюръективен, а $A[t_1, \ldots, t_n]$ нётерово. Таким образом $\varphi(B) = C$ нётерово. $\square$

Замечание 3. Всякое поле нётерово.

Следствие 8.1. *Любая конечнопорождённая F-алгебра, где F — поле, нётерова.*

Замечание 4.

- $\mathbb{Z}$ — нётерово кольцо.
- Всякое кольцо является $\mathbb{Z}$-кольцом.
- Если кольцо R — конечнопорождённая $\mathbb{Z}$-алгебра, то оно нётерово.

Лемма 9. *Пусть A — нётерово кольцо, а M'' — A-модуль. Тогда M конечнопорождён тогда и только тогда, когда нётеров.*

Доказательство. Если M'' нётеров, то уже доказано, что M'' конечнопорождён, так как является собственным подмодулем (см. лемму). Ref

Если M'' конечнопорождено, то есть система порождающих $m_1, \dots, m_s$. Тогда есть сюръективный гомоморфизм

$$\varphi : A^s \to M'', e_i \mapsto m_i.$$

При этом A^s нётеров, значит M'' нётеров. □

Лемма 10. *Пусть даны кольца $A \subseteq B \subseteq C$, что A — нётерово, C — конечнопорождённый B-модуль и конечнопорождённая A-алгебра. Тогда B — конечнопорождённая A-алгебра.*

Доказательство. Пусть $y_1, \dots, y_n$ — система порождающих C как A-алгебру, а $x_1, \dots, x_m$ — система порождающих C как B-модуль. Тогда есть $b_{i,j} \in B$, что

$$y_i = \sum b_{i,j} x_j,$$

и $b_{i,j,k} \in B$, что

$$x_i x_j = \sum b_{i,j,k} x_k.$$

Пусть B_0 — это A-подалгебра в B, порождённая всеми $b_{i,j}$ и $b_{i,j,k}$. Заметим, что количество перечисленных порождающих конечно, т.е. B_0 — конечнопорождённая алгебра. Следовательно, B_0 нётерова.

Поймём, что C порождается уже над B_0 элементами $x_1, \dots, x_n$. Действительно, для всякого $c \in C$ есть $F \in A[t_1, \dots, t_n]$, что $c = F(y_1, \dots, y_n)$. При этом $y_i = \sum b_{i,j} x_j$. Значит

$$c = G(x_1, \dots, x_m) \in B_0 x_1 + \dots + B_0 x_m,$$

так как при раскрытии скобок каждый квадратный $x_i x_j$ член заменяется на линейную сумму $\sum b_{i,j,k} x_k$, т.е. можно запустить банальный алгоритм понижения степени и получить линейное по x_i выражение.

Таким образом C как B_0-модуль конечнопорождён (а B_0 нётеров), значит всякий B_0-подмодуль в C конечнопорождён, значит B — конечнопорождённый B_0-модуль. Поскольку $B_0 \subseteq B$, то B — конечнопорождённая B_0-алгебра. Следовательно, B — конечнопорождённая B_0-алгебра, а B_0 — конечнопорождённая A-алгебра, и тогда B — конечнопорождённая A-алгебра. □

1.1 Алгебраические и чисто трансцендентные расширения полей

Определение 5. Пусть есть поле F, содержащееся в поле E. Элемент $x \in E$ называется *алгебраическим над F*, если есть $g \in F[t]$, что $g(x) = 0 \in E$. Иначе x называется *трансцендентным над F*.

Лемма 11. *Если x алгебраический над F, то рассмотрим F-подалгебру $F[x]$ в E, порождённую x, т.е. есть гомоморфизм алгебр $\varphi : F[t] \to E$, порождённый соотношением $\varphi(t) = x$, определяет алгебру $\varphi(F[t])$. Тогда существует неприводимый многочлен $f \in F[t]$, что $f(x) = 0$ и $F[x] = \varphi(F[t]) = F[t]/(f)$.*

Доказательство. φ — гомоморфизм алгебр, а значит гомоморфизм колец, значит $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq F[t]$ непуст (из-за алгебраичности x) и является идеалом. Но всякий идеал в $F[t]$ является главным, следовательно $\mathrm{Ker}(\varphi) = (f(t))$ для некоторого $f \in F[t]$. При этом, так как E поле, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ — простой идеал, т.е. $f(t)$ неприводим. Отсюда получаем искомое. □

Следствие 11.1. *Уже $F[x]$ является подполем в E.*

Следствие 11.2. $\dim_F F[x] = \deg f(t) < \infty$.

Следствие 11.3. *$F[x]$ порождается как векторное пространство над F элементами (базисом) 1, x, $\dots$, x^d для некоторого $d \in \mathbb{N}$.*

Определение 6. Пусть $K \subseteq L$ — поля. Если $y_1, ..., y_m \in L$ алгебраичны над K и

$$K \subseteq K[y_1] \subseteq K[y_1][y_2] \subseteq \dots \subseteq K[y_1]\dots[y_m] = L,$$

то L называется *конечнопорождённым алгебраически порождённым алгебраическим расширением поля K*.

Лемма 12. *Если даны поля $K \subseteq L$, что L — конечнопорождённое алгебраическое расширение K, то $\dim_K L < \infty$.*

Доказательство. Если $m = 1$, то утверждение превращается в следствие 11.2.

По следствию 11.3 1, $\dots$, $y_2^{d_2}$ порождают $K[y_1][y_2]$ как векторное пространство над $K[y_1]$. При этом $K[y_1]$ порождается 1, $\dots$, $y_1^{d_1}$ как векторное пространство над K. Следовательно, все элементы вида $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2}$, $\alpha_1 \in \{0; \dots; d_1\}$, $\alpha_2 \in \{0; \dots; d_2\}$, порождают $K[y_1][y_2]$ как векторное пространство над K. Следовательно

$$\dim_K K[y_1][y_2] = \dim_K K[y_1] \cdot \dim_{K[y_1]} K[y_1][y_2] < \infty.$$

□

Упражнение 1. Верно и обратное: если $\dim_K L < \infty$, то L — конечнопорождённое алгебраическое расширение поля K.

Определение 7. Пусть даны поля $F \subseteq E$ и $x \in E$, трансцендентный в F. Тогда

$$F(x) := \{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in F[t], g(t) \neq 0\}.$$

Лемма 13.

1. *$F(x)$ корректно определено.*
2. *$F(x)$ — поле.*

Доказательство.

1. Если $g(x) = 0$, то x алгебраично. Значит $f(x)/g(x)$ определено.
2. Операции наследуются от поля. Несложно видеть, что $F(x)$ относительно них замкнуто.

□

Лемма 14. *$F(x) \cong F(t)$ как поля, где $F(t)$ — поле рациональных функций.*

Доказательство. Построим понятный гомоморфизм полей

$$\varphi : F(t) \to F(x), f/g \mapsto f(x)/g(x).$$

По построению φ сюръективен. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ — идеал в поле, т.е. либо (0), либо всё $F(t)$. Но φ сохраняет F, значит $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$, т.е. φ инъективен. Итого φ — изоморфизм. □

Лемма 15. *Пусть x трансцендентно. Тогда 1, x, x^2, $\dots$ линейно независимы.*

Доказательство. В противном случае это означает, что есть некоторое $n \in \mathbb{N}$ и $a_0, \dots, a_n \in F$, что

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0.$$

Тогда $f(x) = 0$, где

$$f(t) := \sum_{k=0}^{n} a_k t^k.$$

Это противоречит с трансцендентностью x. $\square$

Лемма 16. *Пусть даны поле L и независимая переменная t. Тогда*

$$L(t) := \{\frac{f(t)}{g(t)} \mid f(t), g(t) \in L[t], g(t) \neq 0\}$$

не является конечнопорождённой L-алгеброй.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $L(t) = L[y_1, \dots, y_s]$ — конечнопорождённая L-алгебра, где $y_i = \frac{f_i(t)}{g_i(t)}$. Тогда есть гомоморфизм

$$\varphi : L[T_1, \dots, T_s] \to L(t), T_i \mapsto y_i.$$

Понятно, что

$$L[y_1, \dots, y_s] = \varphi(L[T_1, \dots, T_s]).$$

Тогда рассмотрим $h(t)$ — неприводимый делитель значения

$$1 - \prod_{i=1}^{s} q_i(t).$$

Поскольку $L = L[y_1, \dots, y_s]$, то $1/h(t) \in L[y_1, \dots, y_s]$, то есть $G(T_1, \dots, T_s) \in L[T_1, \dots, T_s]$, что $G(y_1, \dots, y_s) = \frac{1}{h(t)}$. Понятно, что есть некоторое $N \in \mathbb{N}$, что

$$G(y_1, \dots, y_s) = \frac{F(t)}{(\prod q_i(t))^N}.$$

Тогда

$$\left(\prod q_i(t)\right)^N = h(t)F(t).$$

Вспомним, что

$$\prod g_i(t) - 1 = h(t) \cdot h_1(t) \implies \prod g_i(t) \equiv 1 \pmod{h(t)} \implies \left(\prod g_i(t)\right)^N \equiv 1 \pmod{h(t)},$$

$$\left(\prod g_i(t)\right)^N = h(t)F(t) \implies \left(\prod g_i(t)\right)^N \equiv 0 \pmod{h(t)},$$

т.е. $0 \equiv 1 \pmod{h(t)}$. $\square$

Лемма 17. *Пусть $F \subseteq E$ — поля, и $E = F[x_1, \dots, x_n]$ конечнопорождёно как F-алгебра. Тогда $[x_1, \dots, x_n]$ алгебраичны над F и $\dim_F E < \infty$.*

Доказательство. Среди $x_1, \ldots, x_n$ может оказаться элемент трансцендентный над F, WLOG x_1. Получим
$$F \subseteq F(x_1) \subseteq E.$$
Среди оставшихся может оказаться элемент, трансцендентный над $F(x_1)$, WLOG x_2. Получим
$$F \subseteq F(x_1) \subseteq F(x_1)(x_2) \subseteq E.$$
Будем повторять данную операцию до конца. Таким образом выделим $x_1, \ldots, x_r$, получим
$$F \subseteq F(x_1) \subseteq F(x_1)(x_2) \subseteq \cdots \subseteq \underbrace{F(x_1)\ldots(x_r)}_{K} \subseteq E,$$
что все $x_{r+1}, \ldots, x_n$ алгебраичны над K. Тогда E как векторное пространство над K конечномерно (лемма 12).

Тогда имеем, что
$$F \subseteq K \subseteq E,$$
где E — конечнопорождённый K-модуль и конечнопорождённая F-алгебра. Следовательно, по лемме 10 K — конечнопорождённая F-алгебра.

Пусть $r \neq 0$. Пусть $L = F(x_1)\ldots(x_{r-1})$. Тогда $L(x_r) = K$, где $x_r \in K$ трансцендентен над L. Следовательно, $L(x_r) \cong L(t)$, т.е. $K = L(x_r)$ — не конечнопорожденная L-алгебра, и тем более не конечнопорождённая F-алгебра. Противоречие. $\square$

Следствие 17.1. *Пусть $F \to A$ — конечнопорождённая F-алгебра, а $\mathcal{M}$ — максимальный идеал A. Тогда $F \hookrightarrow A/\mathcal{M}$ — конечное алгебраическое расширение поля.*

Доказательство.

Дописать?

$\square$

Следствие 17.2. *Пусть F — алгебраически замкнутое поле, а $F \to A$ — конечнопорождённая F-алгебра. Тогда $F \to A/\mathcal{M}$ — изоморфизм.*

Доказательство. $A/\mathcal{M}$ — конечное алгебраическое расширение поля F, т.е. совпадает с F. $\square$

Упражнение 2. Пусть R — кольцо, $I \subseteq J \subseteq R$ — два иделала в R. Тогда TFAE.

1. $I = J$.

2. $\overline{\varphi} : R/I \to R/J, r \bmod I \mapsto r \bmod J$ — изоморфизм колец.

Доказательство. Если $I = J$, то очевидно что $r \bmod I = r \bmod J$, а $R/I = R/J$, а тогда $\overline{\varphi}$, являясь тождественным отображением, является изоморфизмом колец.

Пусть $\overline{\varphi}$ — изоморфизм колец. Рассмотрим вложения $\pi_I : R \to R/I, r \mapsto r \bmod I$ и $\pi_J : R \to R/J, r \mapsto r \bmod J$. Следовательно, имеем коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "p_I"'] \arrow[dr, "p_J"] & \\ R/I \arrow[rr, "\sim", "\overline{\varphi}"'] & & R/J \end{tikzcd}$$

Следовательно,
$$r \in I \quad \Leftrightarrow \quad r \in \mathrm{Ker}(p_I) \quad \Leftrightarrow \quad p_I(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_J(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \in \mathrm{Ker}(p_J) \quad \Leftrightarrow \quad r \in J,$$
т.е. $I = J$. $\square$

Упражнение 3. Пусть $\mathcal{M} \subseteq R$ — идеал. Тогда TFAE.

1. $\mathcal{M}$ максимален.
2. $R/\mathcal{M}$ — поле.

Теорема 18 (Гильберта о нулях, Nullstellensatz (слабая))**.** *Пусть K — алгебраически замкнутое поле (например, $\mathbb{C}$), $\mathcal{M} \subseteq K[t_1, \ldots, t_n]$ — максимальный идеал. Тогда $\mathcal{M} = (t_1 - x_1, \ldots, t_n - x_n)$, где $x_i \in F$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторые значения $x_1, \ldots, x_n \in K$ и рассмотрим идеал $I := (t_1 - x_1, \ldots, t_n - x_n)$. Также рассмотрим следующие гомоморфизмы:

$$in : K \to K[t_1, \ldots, t_n], r \mapsto r,$$
$$\pi_{\mathcal{M}} : K[t_1, \ldots, t_n] \to K[t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{M}, r \mapsto r \bmod \mathcal{M}, \qquad i_{\mathcal{M}} := \pi_{\mathcal{M}} \circ in,$$
$$\pi_I : K[t_1, \ldots, t_n] \to K[t_1, \ldots, t_n]/I, r \mapsto r \bmod I, \qquad i_I := \pi_I \circ in.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & K[t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{M} \arrow[dd, dashed, "\varphi"] \\
K \arrow[r, "in"] \arrow[urr, bend left, "i_{\mathcal{M}}", "\sim"'] \arrow[drr, bend right, "i_I"', "\sim"] & K[t_1, \ldots, t_n] \arrow[ur, "\pi_{\mathcal{M}}"'] \arrow[dr, "\pi_I"] & \\
 & & K[t_1, \ldots, t_n]/I
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $i_{\mathcal{M}}$ — изоморфизм колец, так как $\mathcal{M}$ максимален. При этом для всякого многочлена $F \in K[t_1, \ldots, t_n]$ по теореме Безу $F(t_1, \ldots, t_n) \equiv F(x_1, \ldots, x_n) \pmod I$, а значит i_I инъективен, так как K поле, и сюръективен, так как $[F]_I = [F(x_1, \ldots, x_n)]_I = i_I(F(x_1, \ldots, x_n))$. Следовательно i_I тоже изоморфизм колец. Следовательно есть изоморфизм колец $\varphi = i_{\mathcal{M}}^{-1} \circ i_I$, т.е. для всякого $r \in K$

$$\varphi(r \bmod \mathcal{M}) = r \bmod I.$$

Осталось показать, что $\varphi \circ \pi_{\mathcal{M}} = \pi_I$, т.е. для всякого $F \in K[t_1, \ldots, t_n]$ $\varphi : F \bmod \mathcal{M} \mapsto F \bmod I$.

На деле для случайных $x_1, \ldots, x_n$ это не верно. Поэтому возьмём $x_k := i_{\mathcal{M}}^{-1}(t_k \bmod \mathcal{M})$, т.е. чтобы $t_k - x_k \in \mathcal{M}$. Тогда получим, что

$$\varphi(t_k \bmod \mathcal{M}) = \varphi(x_k \bmod \mathcal{M}) = x_k \bmod I = t_k \bmod I.$$

Поскольку φ — гомоморфизм колец, а всякий многочлен представляется в виду суммы произведений элементов K и $t_1, \ldots, t_n$, то теперь это верно для всех многочленов. Значит $\mathcal{M} = I$. $\square$

2 Аффинная геометрия

Замечание. Глава I. §1. Замкнутые подмножества A_k^n.

Обозначить это по-нормальному.

Определение 8. Пусть фиксировано поле k. *Аффинное пространство* над полем k размерности n — есть пространство

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_k^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in k\} = k^n.$$

Пусть $A := k[T_1, \dots, T_n]$, $f \in A$. Тогда f — отображение $\mathbb{A}^n \to k$. Пусть фиксировано $S \subseteq A$. Тогда *множеством общих нулей многочленов из* S (также "общие нули многочленов из S" или "нули S") — это множество

$$Z(S) := \{x \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in S\ f(x) = 0\}.$$

Все подмножества $Z(S)$ называются *замкнутыми подмножествами в* $\mathbb{A}^n$ или *аффинными подмножествами в* $\mathbb{A}^n$.

Пример 1.

1. $\varnothing = Z(\{a\}_{a\in k}) = Z(A)$.
2. $\mathbb{A}^n = Z(\varnothing) = Z(\{0\})$.
3. $\{(x_1, \dots, x_n)\} = Z(\{T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n\})$.
4. Замкнутые подмножества в $\mathbb{A}^1$ — это $\mathbb{A}$, $\varnothing$ и любое конечное подмножество.
5. Если $n = 2$, то $Z(f)$ называется *плоской кривой*.

Лемма 19.

1. *Если* $S \subseteq S'$, *то* $Z(S') \subseteq Z(S)$.
2. *Пусть* I — *идеал, порождённый многочленами из* S. *Тогда* $Z(I) = Z(S)$.
3. *Для всякого* S *есть конечное* S', *что* $Z(S) = Z(S')$.
4. *Пусть есть семейство* $\{S_i\}_{i\in I}$. *Тогда*
$$Z\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right) = \bigcap_{i\in I} Z(S_i).$$
5. *Пусть дано семейство идеалов* $\{I_j\}_{j\in J}$. *Тогда*
$$Z\left(\sum_{j\in J} I_j\right) = \bigcap_{j\in J} Z(I_j).$$
6. *Пусть дано семейство* $\{S_i\}_{i=1}^n$. $S' := S_1S_2\dots S_n = \{f_1\dots f_n \mid f_1 \in S_1 \wedge \dots \wedge f_n \in S_n\}$. *Тогда*
$$Z(S') = \bigcup_{i=1}^n Z(S_i).$$
7. *Пусть дано семейство идеалов* $\{I_j\}_{j=1}^n$. *Тогда*
$$Z\left(\bigcap_{j=1}^n I_j\right) = \bigcup_{j=1}^n Z(I_j).$$

Доказательство.

1. Действительно, для всякой точки $x \in Z(S')$ верно, что для всякого $f \in S'$ $f(x) = 0$, а значит то же верно для всякого $f \in S$ (так как $S \subseteq S'$), т.е. $x \in Z(S)$.

2. Поскольку $S \subseteq I$, то $Z(I) \subseteq Z(S)$. При этом для всякого $x \in Z(S)$ верно, что для всякого $f \in S$ $f(x) = 0$, а значит то же верно для всех $f \in I$ (так как I — идеал, порождённый S), т.е. $x \in Z(I)$. Т.е. $Z(S) \subseteq Z(I)$. Следовательно, $Z(S) = Z(I)$.

3. Если известно, что S и S' порождают одинаковые идеалы, то $Z(S) = Z(S')$. Но всякий идеал в $k[T_1, \ldots, T_n]$ конечнопорождён, а значит у идеала, порождённого S, есть конечное порождающее множество S' — искомое S'.

4. Заметим, что $x \in Z(\bigcup_{i \in I} S_i)$ тогда и только тогда, когда на x зануляются все многочлены из $\bigcup_{i \in I} S_i$, что равносильно тому, что на x зануляются все многочлены из каждого S_i, что равносильно тому, что x лежит в каждом $Z(S_i)$, что равносильно тому, что $x \in \bigcap_{i \in I} Z(S_i)$. Отсюда следует требуемое.

5. По прошлому пункту.
$$Z\left(\bigcup_{j \in J} I_j\right) = \bigcap_{j \in J} Z(I_j).$$
Но также несложно видеть, что идеал, порождённый $\bigcup_{j \in J} I_j$, есть $\sum_{j \in J} I_j$. Отсюда сиюминутно следует искомое (по ранее доказанному пункту).

6. Покажем утверждение для $n = 2$. Заметим, что если $x \in Z(S_1)$, то на x зануляются все многочлены из S_1, а значит и из $S_1 \cdot S_2$, т.е. $x \in Z(S_1 S_2)$. Следовательно $Z(S_1) \subseteq Z(S_1 S_2)$. Из аналогичного утверждения получаем, что $Z(S_1) \cup Z(S_2) \subseteq Z(S_1 S_2)$. При этом если $x \in Z(S_1 S_2) \setminus Z(S_1)$, то есть многочлен $f \in S_1$, что $f(x) \neq 0$. Но для всякого $g \in S_2$ верно $fg \in S_1 S_2$, а значит $f(x)g(x) = 0$, а тогда $g(x) = 0$, т.е. $x \in Z(S_2)$. Итого $Z(S_1 S_2) = Z(S_1) \cup Z(S_2)$. Утверждение для всякого n получается по индукции с помощью данного.

7. Покажем для $n = 2$; общий случай получается по индукции. Пусть даны идеалы I и J. Имеем по прошлому пункту
$$Z(I \cdot J) = Z(I) \cup Z(J).$$
При этом $I \cdot J \subseteq I \cap J$, а $I \cap J \subseteq I$, $I \cap J \subseteq J$. Следовательно $Z(I \cdot J) \supseteq Z(I \cap J)$, $Z(I \cap J) \supseteq Z(I)$, $Z(I \cap J) \supseteq Z(J)$. Итого
$$Z(I \cdot J) \supseteq Z(I \cap J) \supseteq Z(I) \cup Z(J),$$
откуда
$$Z(I \cdot J) = Z(I \cap J) = Z(I) \cup Z(J).$$

□

Следствие 19.1. *Мораль такова.*

1. *Замкнутые идеалы образуют топологию, где они являются замкнутыми. Т.е. их дополнения образуют топологию (являясь открытыми).*

2. *Каждое замкнутое подмножество имеет вид $Z(I)$, где I — идеал.*

3. *Сумма идеалов соответствует пересечению замкнутых множеств (и наоборот). Т.е. для всякого семейства идеалов $\{I_j\}_{j \in J}$ верно, что*
$$\bigcap_{j \in J} Z(I_j) = Z\left(\sum_{j \in J} I_j\right).$$

4. *Конечные пересечения идеалов соответствуют конечным объединениям замкнутых множеств. Т.е. для всякого семейства идеалов $\{I_j\}_{j=1}^n$ верно, что*

$$\bigcup_{j=1}^{n} Z(I_j) = Z\left(\bigcap_{j=1}^{n} I_j\right).$$

Определение 9. Пусть имеется множество точек $X \subseteq A_k^n$. Определим множество

$$I(X) := \{f \in A \mid \forall x \in X\ f(x) = 0\}.$$

Лемма 20.

1. *$I(X)$ — идеал.*
2. *Если $X \subseteq Y$, то $I(X) \supseteq I(Y)$.*
3. *$I(X) = I(\overline{X})$ ($\overline{X}$ — замыкание X в смысле рассмотренной топологии).*
4.

Написать леммы про пересечения и объединения $I(X)$:

(a) $\sum_{j \in J} I(X_j) = I(\bigcap_{j \in J} X_j)$?

(b) $\bigcap_{j \in J} I(X_j) = I(\bigcup_{j \in J} X_j)$?

5. *Если $X \subseteq Y$, то $ZI(X) \subseteq ZI(Y)$.*
6. *Если $S \subseteq T$, то $IZ(S) \subseteq IZ(T)$.*
7. *$ZI(X) \supseteq X$.*
8. *$IZ(S) \supseteq S$.*

Доказательство.

1. Если $f, g \in I(X)$, то для всякой точки $x \in X$ верно $f(x) = g(x) = 0$, а тогда $(f+g)(x) = 0$, т.е. $f + g \in I(X)$. Если же $f \in I(X)$, $g \in A$, то для всякой точки $x \in X$ верно $f(x) = 0$, а значит $(fg)(x) = 0$, т.е. $fg \in I(X)$.
2. Если $f \in I(Y)$, то $f(Y) = 0$, значит $f(X) = 0$, тогда $f \in I(X)$.
3. Понятно, что $X \subseteq \overline{X}$, а значит $I(\overline{X}) \subseteq I(X)$. Покажем обратное. Пусть есть $x \in \overline{X} \setminus X$. Если есть какой-то многочлен $f \in A$, что f зануляется на X, но не на x, то $Y := Z(f)$ является замкнутым, $X \subseteq Y$, а $x \notin Y$. Следовательно, так как $\overline{X} \subseteq Y$, то $x \notin \overline{X}$ — противоречие. Это значит, что всякий многочлен, зануляющийся на X, зануляется на всякой точке из $\overline{X} \setminus X$, а значит на всём $\overline{X}$. Следовательно $I(X) \subseteq I(\overline{X})$.
4. $X \subseteq Y \Rightarrow I(X) \supseteq I(Y) \Rightarrow ZI(X) \subseteq ZI(Y)$.
5. $S \subseteq T \Rightarrow Z(S) \supseteq Z(T) \Rightarrow IZ(S) \subseteq IZ(T)$.
6. Поскольку $I(X)$ — множество всех многочленов, зануляющихся на X, то всё $I(X)$ зануляется на X, т.е. $ZI(X) \supseteq X$.

7. Поскольку $Z(S)$ — множество всех точек, на которых зануляется S, то S на нём зануляется, а тогда $IZ(S) \supseteq S$.

$\square$

Определение 10. Пусть I — некоторый идеал. *Радикал из иделала I* — $\sqrt{I} := \{h \in A \mid \exists N\colon\ h^N \in I\}$.

Идеал I называется *радикальным* тогда и только тогда, когда для всякого $g \in A$, что есть $m \geqslant 1$, что $g^m \in I$ верно, что $g \in I$.

Лемма 21.

1. *$\sqrt{I}$ — идеал.*
2. *$Z(\sqrt{I}) = Z(I)$.*
3. *Идеал I радикален тогда и только тогда, когда $\sqrt{I} \subseteq I$.*
4. *$\sqrt{I}$ радикален.*
5. *$I(X)$ радикален.*

Доказательство.

1. Пусть $h \in \sqrt{I}$. Тогда есть N, что $h^N \in I$. Значит для всякого $f \in A$
$$(hf)^N = h^n f^n \in IA \subseteq I.$$
Т.е. $hf \in \sqrt{I}$. Значит $hA \subseteq \sqrt{I}$.
Пусть $h_1, h_2 \in \sqrt{I}$. Тогда есть N_1 и N_2, что $h_1^{N_1}, h_2^{N_2} \in I$. Тогда
$$(h_1 + h_2)^{N_1+N_2} = \sum_{k=0}^{N_1+N_2} h_1^k h_2^{N_1+N_2-k} \binom{N_1 + N_2}{N_1}.$$
При этом при $k \leqslant N_1$
$$h_2^{N_2} \in I, \qquad h_1^k h_2^{N_1-k} \binom{N_1 + N_2}{N_1} \in A, \qquad \Longrightarrow \qquad h_1^k h_2^{N_1+N_2-k} \binom{N_1 + N_2}{N_1} \in I;$$
аналогично для $k \geqslant N_1$.
2. Поскольку $I \subseteq \sqrt{I}$, то $Z(\sqrt{I}) \subseteq Z(I)$. При этом для всякого $x \in Z(I)$ верно, что для всякого $f \in S$ $f(x) = 0$, а значит для всякого $f \in \sqrt{I}$ есть N, что $f^N(x) = 0$, а тогда $f(x) = 0$, т.е. $x \in Z(\sqrt{I})$. Т.е. $Z(I) \subseteq Z(\sqrt{I})$. Следовательно, $Z(\sqrt{I}) = Z(I)$.
3. Определение по-другому написанное.
4. Несложно видеть, что $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ по определению радикала. Значит $\sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I}$, т.е. $\sqrt{I}$ радикален.
5. $I(X)$ — максимальный идеал, что $X \subseteq Z(I(X))$. При этом $Z(\sqrt{I(X)}) = Z(I(X))$, значит $\sqrt{I} \subseteq I$. Таким образом I максимален.

$\square$

Лемма 22. *Если X замкнуто, то $ZI(X) = X$.*

Доказательство. Как мы уже знаем, $X \subseteq ZI(X)$; покажем обратное. Заметим, что $X = Z(S)$. Тогда $I(X) = IZ(X) \supseteq S$. Тогда $ZI(X) \subseteq Z(S) = X$. □

Теорема 23 (Гильберта о нулях, Nullstellensatz)**.** *Если I — радикальный идеал, то $IZ(I) = I$.*

Следствие 23.1. *I и Z — биекции из множества замкнутых множеств в A и обратно. При этом $Z \circ I$ и $I \circ Z$ — тождественные отображения.*

Доказательство. Как мы уже знаем, I — функция из множества замкнутых множеств в A, а Z — наоборот. При этом по следствию двух предыдущих утверждений ZI и IZ — тождественные функции из множества замкнутых функций в себя и из A в себя. Из первого следует, что I инъективно, а Z сюръективно; из второго следует, что Z инъективно, а I сюръективно. Т.е. I и Z — биекции. □

Следствие 23.2.

1. $ZI(X) = \overline{X}$.
2. $IZ(I) = \sqrt{I}$.

Доказательство.

1. $ZI(X) = ZI(\overline{X}) = \overline{X}$.
2. $IZ(I) = IZ(\sqrt{I}) = \sqrt{I}$.

□

Замечание 5. Точки в $\mathbb{A}^n$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с максимальными идеалами в A — это говорит слабая теорема Гильберта о нулях. Т.е. всякой точке $x \in \mathbb{A}^n$ сопоставляется $I(x)$, а максимальному идеалу $\mathcal{M}$ сопоставляется $Z(\mathcal{M})$, которое является точкой, так как $\mathcal{M} = (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$, а значит подходит только точка $(x_1; \ldots; x_n)$.

Определение 11. Пусть X замкнуто. Тогда $k[X] := A/I(X)$ — *кольцо регулярных функций на X*.

Лемма 24. *Пусть X_1 и X_2 замкнуты.*

1. *$X := X_1 \sqcup X_2$ замкнуто.*
2. *Отображение*

$$\varphi : k[X] \to k[X_1] \times k[X_2], F \bmod I(X) \mapsto (F \bmod I(X_1), F \bmod I(X_2))$$

задаёт изоморфизм колец.

Определение 12. Пусть X — замкнутое множество. Функция $f : X \to k$ называется *регулярной*, если есть $F \in A$, что $f = F|_X$.

Замечание 6. Множество $k[X]$ регулярных функций на X является кольцом и даже k-алгеброй.

При этом $T_i \in A = k[T_1, \ldots, T_n]$ образуют A, значит функции $t_i : X \to k, x \mapsto T_i(x)$ образуют $k[X]$. Значит получается сюръективный гомоморфизм $\varphi : A \to k[X], F \mapsto F|_X$, который на деле порождается соотношениями $T_i \mapsto t_i$.

Лемма 25. *Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : A \to k[X], F \to F|_X$.*

1. $\operatorname{Ker}(\varphi) = I(X)$.

2. $A/I(X) \xrightarrow[\sim]{\varphi} k[X]$.

Доказательство.

1. $\varphi(F) = 0$ iff $F|_X \equiv 0$, iff $F(X) = 0$, iff $F \in I(X)$.

2. φ, очевидно, сюръективно. Следовательно, φ индуцирует изоморфизм

$$A/I(X) = A/\mathrm{Ker}(\varphi) \to k[X].$$

$\square$

Лемма 26. *Пусть даны замкнутые множества X_1 и X_2. Тогда $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ равносильно $I(X_1) + I(X_2) = A$.*

Доказательство. Понятно, что если $X_1 \cap X_2 = \varnothing$

$$A = I(\varnothing) = I(X_1 \cap X_2) = I(ZI(X_1) \cap ZI(X_2)) = IZ(I(X_1) + I(X_2)) = I(X_1) + I(X_2).$$

А если $A = I(X_1) + I(X_2)$, то

$$X_1 \cap X_2 = ZI(X_1) \cap ZI(X_2) = Z(I(X_1) + I(X_2)) = Z(A) = \varnothing.$$

$\square$

Теорема 27. *Пусть X_1, X_2 — замкнутые множества, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, а $X := X_1 \sqcup X_2$. $\psi : k[X] \to k[X_1] \times k[X_2], f \mapsto (f|_{X_1}, f|_{X_2})$ — изоморфизм колец (и даже алгебр).*

Доказательство. Понятно, что ψ определено корректно и является гомоморфизмом алгебр. Также понятно, что ψ инъективно, так как всякая функция f, зануляющаяся на X_1 и X_2, зануляется на X, т.е. ядро ψ тривиально.

Покажем, что ψ сюръективно. Пусть $(f_1, f_2) \in k[X_1] \times k[X_2]$. Тогда есть $F_1, F_2 \in A$, что $f_1 = F_1|_{X_1}$, $f_2 = F_2|_{X_2}$. Мы знаем, что $I(X_1) + I(X_2) = A$. Тогда $F_1 - F_2 = H_1 - H_2$, где $H_1 \in I(X_1)$, $H_2 \in I(X_2)$. Тогда $F_1 - H_1 = F_2 - H_2 =: F$. Имеем, что $F|_{X_1} = (F_1 - H_1)|_{X_1} = f_1 - 0 = f_1$; аналогично $F|_{X_2} = f_2$. $\square$

Определение 13. Кольцо R называется *редуцированным*, если для всякого $a \in R$ и всякого $m \geqslant 1$ из того, что $a^m = 0$ следует, что $a = 0$ (т.е. в R нет нильпотентов).

Замечание. $k[X]$ редуцированно.

Лемма 28. *Любая конечнопорождённая редуцируемая k-алгебра B изоморфна k-алгебра $k[X]$ регулярных функций для некоторых замкнутого подмножества $X \subseteq A$.*

Доказательство. Пусть $B = k[t_1, \ldots, t_m]$, где $t_1, \ldots, t_m = B$ (они порождают B над k). Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : k[T_1, \ldots, T_m] \to B, T_i \mapsto t_i$ алгебр. Понятно, что φ сюръективен. Пусть $I := \mathrm{Ker}(\varphi)$. Тогда есть изоморфизм $\overline{\varphi} : A/I \to B$. Поскольку B редуцированно, то I радикален:

$$f^m \in I \quad \Longrightarrow \quad \varphi(f)^m = \varphi(f^m) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(f) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f \in I.$$

Тогда пусть $X := Z(I)$. Следовательно $I = I(X)$, а тогда $B \cong A/I = A/I(X) = k[X]$. $\square$

Лемма 29. *Пусть R — кольцо, I — радикальный идеал в R,*

$$\pi : R \to \overline{R} := R/I, f \mapsto f \pmod{I}.$$

Тогда имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством радикальных идеалов $J \supseteq I$ в R и множеством радикальных идеалов $\mathfrak{A}$ в $\overline{R}$, заданное отображениями $J \mapsto \overline{J} := J/I$ и $\mathfrak{A} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Обозначим

- множество радикальных идеалов $J \supseteq I$ в R за D_R,
- множество радикальных идеалов $\mathfrak{A}$ в $\overline{R}$ за $D_{\overline{R}}$.

Тогда заданные в условии отображения $D_R \to D_{\overline{R}}$ и $D_{\overline{R}} \to D_R$ индуцируются π и π^{-1}. Но непонятна их корректность и биективность; это и обсудим.

Пусть $J \supseteq I$ — радикальный идеал в R. Тогда $\pi(J) = J/I$. При этом если $\overline{f}^m \in J/I$ в $\overline{R}$, где $\overline{f} = f \pmod{I}$, то $(f+I)^m \subseteq J$. При этом $f^m \in (f+I)^m \subseteq J$, т.е. $f^m \in J$, значит $f \in J$. Следовательно $f + I \subseteq J$. Тогда $\overline{f} \in J/I$. Таким образом J/I радикален в $\overline{R}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — радикальный идеал в $\overline{R}$. Тогда $J := \pi^{-1}(\mathfrak{A})$. Следовательно, $\mathfrak{A} = J/I$. Если $f^m \in J$, то $\overline{f}^m \in \mathfrak{A}$. Тогда $\overline{f} \in J/I$. Следовательно, $f + I \subseteq J$, т.е. $f \in J$. Следовательно J радикален.

Таким образом π и π^{-1} индуцируют корректные отображения $D_R \to D_{\overline{R}}$ и $D_{\overline{R}} \to D_R$. Таким образом осталось показать, что они образуют взаимнооднозначное соответствие.

Заметим, что π и π^{-1} образуют взаимнооднозначное соответствие между $\{f + I \mid f \in R\}$ и $\overline{R}$. Так как π переводит идеал, содержащий I, в идеал, а π^{-1} идеал в идеал, содержащий I, то π и π^{-1} образует взаимнооднозначное соответствие между идеалами $J \supseteq I$ в R и идеалами $\mathfrak{A}$ в $\overline{R}$. Значит, аналогично, они образуют взаимнооднозначное соответствие между D_R и $D_{\overline{R}}$. □

Определение 14. Пусть X — замкнутое множество в $\mathbb{A}^n$. *Замкнутые подмножества в X* — это множества вида $Z' \cap X$, где Z' — замкнутое в $\mathbb{A}^n$.

Замечание. Сравнить с топологией, индуцированной на (замкнутом) подмножестве.

Замечание. Замкнутые подмножества в X — замкнутые подмножества Z в $\mathbb{A}^n$, что $Z \subseteq X$.

Следствие 29.1. *Пусть X замкнуто в $\mathbb{A}^n$. Тогда имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством замкнутых $Z \subseteq X$ и радикальными идеалами $\overline{J}$ в $A/I(X)$, заданное отображениями $Z \mapsto \overline{I(Z)}$ и $\mathfrak{B} \mapsto Z(\pi^{-1}(\mathfrak{B}))$.*

Определение 15. Пусть $X \subseteq \mathbb{A}^n$ и $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ — замкнутые подмножества. Временно обозначим $t_i := T_i|_X \in k[X]$ — координатная функция на X. Отображение $\varphi : Y \to X$ называется *регулярным*, если $t_i \circ \varphi \in k[Y]$ (т.е. каждая координата φ как отображение является регулярной).

Замечание 7. Пусть B — k-алгебра. Пусть $f_1, \ldots, f_n \in B$ и $F(T_1, \ldots, T_n) \in k[T_1, \ldots, T_n]$. Тогда $F(f_1, \ldots, f_n) \in B$.

В частности, если даны $B = k[Y]$, $f_1, \ldots, f_n \in B$, $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$, то $F(f_1, \ldots, f_n) \in B = k[Y]$. Более того, $F(f_1, \ldots, f_n)(y) = F(f_1(y), \ldots, f_n(y))$.

Лемма 30 (следствие замечания)**.** *Пусть дано некоторое отображение $\varphi : Y \to X$. TFAE*

1. *φ — регулярно.*
2. *Для всякого $f \in k[X]$ функция $f \circ \varphi : Y \to k$ регулярна.*

Доказательство.

2 ⇒ 1) $t_i \circ \varphi$ регулярно для всякого $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, φ регулярно.

1 ⇒ 2) $t_i \circ \varphi$ регулярно для всякого $i = 1, \ldots, n$ по определению. При этом $k[X]$ — k-алгебра, порождённая $t_1, \ldots, t_n$ (как элементы $k[X]$). Следовательно, есть $F(T_1, \ldots, T_n) \in k[T_1, \ldots, T_n]$, что $F(t_1, \ldots, t_n) = f$. Тогда

$$f \circ \varphi = F(t_1, \ldots, t_n) \circ \varphi = F(t_1 \circ \varphi, \ldots, t_n \circ \varphi).$$

Поскольку $t_i \circ \varphi$ — элементы k-алгебры $k[Y]$, то и $F(t_1 \circ \varphi, \ldots, t_n \circ \varphi) \in k[Y]$.

□

Замечание 8. Это означает, что отображение $\varphi : Y \to X$ регулярно тогда и только тогда, когда $\varphi^* : \mathrm{Func}(X, k) \to \mathrm{Func}(Y, k), f \mapsto f \circ \varphi$ переводит $k[X]$ в $k[Y]$.

Определение 16. Отображение $\varphi : Y \to X$ называется *регулярным*, если для всякого $f \in k[X]$ функция $f \circ \varphi \in k[Y]$. Словами говоря, φ — регулярно, если она регулярные функции над X переводит в регулярные функции над Y.

Часто пишут $\varphi^*(f)$ вместо $f \circ \varphi$, а функцию $\varphi^*(f) : Y \to k$ называют переносом функции $f : X \to k$ на Y посредством φ.

Ещё другими словами,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Func(X, k)} \arrow[r, "\varphi^*", "g \mapsto g \circ \varphi"'] & \mathrm{Func(Y, k)} \\
k[X] \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, bend left] & k[Y] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Т.е. φ регулярно тогда и только тогда, когда $\varphi^*(k[X]) \subseteq k[Y]$.

Замечание. В этот момент Иван Александрович начинает по ошибке постоянно называть замкнутые множества *аффинными множествами.*

Лемма 31. *Пусть X, Y, Z — аффинные множества, а $\varphi : Y \to X$ и $\psi : X \to Z$ регулярны. Тогда $\psi \circ \varphi : Y \to Z$ регулярны.*

Доказательство. Для всякого $f \in k[Z]$ верно $f \circ \psi \in k[X]$, а тогда $f \circ (\psi \circ \varphi) = (f \circ \psi) \circ \varphi \in k[Y]$. Таким образом $\psi \circ \varphi$ регулярно по второму определению. □

Замечание. $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Замечание 9. Пусть B — конечно порождённая редуцированная k-алгебра. Тогда есть некоторая система порождающих $t_1, \ldots, t_n \in B$, можно построить

$$\psi : k[T_1, \ldots, T_n] \to k[t_1, \ldots, t_n] = B, T_i \mapsto t_i.$$

Следовательно, $B \cong A/\mathrm{Ker}(\psi) = k[X]$, где $X = Z(\mathrm{Ker}(\psi))$.

Тогда можно наблюдать, что

$$\mathrm{Max}(B) \cong \mathrm{Max}(k[X]) \cong \text{точки из } X = X.$$

Формальнее, $\mathrm{Max}(k[X]) = \{I(\{x\})\}_{x \in X}$. Тогда мы можем рассмотреть гомоморфизм $i_X : k \to k[X], a \mapsto \mathrm{const}_a$ (const_a — константная функция со значением a) и для всякого $x \in X$ гомоморфизм $x^* : k[X] \to k, f \mapsto f(x)$. Тогда $x^* \circ i_X = \mathrm{Id}_k$.

Определение 17. Назовём гомоморфизм $s : k[X] \to k$ k-алгебр *сечением*, если $s \circ i_X = \mathrm{Id}_k$. Тогда $\mathrm{Ker}(s) \in \mathrm{Max}(k[X]) = \{\mathcal{M}_x\}_{x \in X}$. Тогда у нас есть биекция между сечениями $k[X]$ и точками X.

Множество сечений из B обозначается $\mathrm{Sect}(B, k)$. Также назовём отображение $\mathrm{can}_X : X \to \mathrm{Sect}(k[X], k), x \mapsto x^*$ *каноническим.*

Лемма 32 (пока без доказательства)**.** *Пусть $\varphi : X' \to X$ — регулярное отображение. Тогда есть $\psi : X' \to X$, которое переводит каждое x' в такое x, что $\varphi^*(s) = s'$, где s и s' — сечения, соответствующие x и x'.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\mathrm{can}_{X'}"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathrm{Sect}(X', k) & X' \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{can}_X"'] & \mathrm{Sect}(X, k) \arrow[u, "\varphi^*"'] & X \end{tikzcd}$$

Тогда $\psi = \varphi$.

Замечание 10. Пусть B — конечно порождённая редуцированная k-алгебра. Тогда у нас есть взаимнооднозначное соответствие между $\mathrm{Max}(B)$ и сечениями вложения $i : k \to B$.

Дописать?

Замечание 11. Поскольку $\mathrm{Max}(B)$ — то же, что и множество сечений в B. Значит можно рассмотреть включение $B \to \mathrm{Func}(\mathrm{Max}(B), k), b \mapsto (\mathcal{M} \mapsto s_{\mathcal{M}}(b))$

Определение 18. *Категория* Aff — категория, чьи объекты есть пары $(B, \mathrm{Max}(B))$, а морфизмы $\mathrm{Mor}((B, \mathrm{Max}(B)), (B', \mathrm{Max}(B')))$ есть отображения $\varphi : \mathrm{Max}(B') \to \mathrm{Max}(B)$, что $\varphi^*(B) \subseteq B'$, т.е. $B \subseteq \mathrm{Func}(\mathrm{Max}(B), k)$ и то же для B', φ индуцирует $\varphi^* : \mathrm{Func}(\mathrm{Max}(B), k) \to \mathrm{Func}(\mathrm{Max}(B'), k)$ и мы хотим, чтобы B переходило в B' по φ.

Замечание 12. Мы знаем, что кончено порождённые редуцированные k-алгебры изоморфны k-алгебрам $k[X]$

Локальная цель. У нас есть категория Aff аффинных множеств и регулярных отображений между ними и категория f.g.r.k-alg. конечно порождённых k-алгебр и гомоморфизмов k-алгебр между ними. Хотим показать, что они контравариантно изоморфны, где $X \in C_1 \mapsto k[X]$, $C_2 \ni B \cong k[Y] \mapsto Y$.

Лемма 33. *Пусть X — аффинное множество, $k[X]$ — k-алгебра его регулярных функций. Тогда имеется биекция между X и $\mathrm{Sect}(k[X], k)$.*

Определение 19. Будем обозначать такие отображения $\mathrm{can}_X : X \to \mathrm{Sect}(k[X], k)$ и называть *каноническими.*

Надо как-то разобраться с повторами определений и утверждений между двумя лекциями

Доказательство. Давайте рассмотрим $\varphi(x) := s_x$, где $s_x : k[X] \to k, f \mapsto f(x)$. Понятно, что $s_x \circ i = \mathrm{Id}_k$. Т.е. φ — инъекция.

Теперь в обратную сторону. Пусть имеется сечение s. s — сюръекция, $\mathcal{M} := \mathrm{Ker}(s)$. Тогда $k[X]/\mathcal{M} = k$, т.е. $\mathcal{M}$ максимален, а значит есть $x \in X$, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}_x := \{f \in k[X] \mid f(x) = 0\}$. $\square$

Упражнение 4. Проверить, что это взаимно обратные биекции.

Лемма 34. *Пусть $\varphi : X' \to X$ — регулярное отображение. Пусть тогда φ^* — отображение, переводящее $k[X] \to k[X']$ по правилу $f \mapsto f \circ \varphi$. Также определим $\varphi_* : \mathrm{Sect}(k[X'], k) \to \mathrm{Sect}(k[X], k)$ по правилу $s' \mapsto s' \circ \varphi^*$. Тогда следующая диаграмма коммутативна.*

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{can}_{X'}"'] & X \arrow[d, "\mathrm{can}_X"] \\
\mathrm{Sect}(k[X'], k) \arrow[r, "\varphi_*"'] & \mathrm{Sect}(k[X], k)
\end{tikzcd}$$

Доказательство. $\varphi_* \circ \mathrm{can}_{X'} = \mathrm{can}_X \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда для всякого $x' \in X'$ верно

$$\varphi_*(\mathrm{can}_{X'}(x')) = \mathrm{can}_X(\varphi(x)),$$

что верно тогда и только тогда, когда для всякого $f \in k[X]$

$$\varphi_*(\mathrm{can}_{X'}(x'))(f) = \mathrm{can}_X(\varphi(x))(f).$$

При этом

$$\varphi_*(\mathrm{can}_{X'}(x'))(f) = \mathrm{can}_{X'}(x')(\varphi^*(f)) = \varphi^*(f)(x') = f(\varphi(x)) = \mathrm{can}_X(\varphi(x))(f).$$

$\square$

Определение 20. Пусть R — конечно порождённая редуцированная k-алгебра и $i : k \hookrightarrow R$ (константы). (Модельный случай: $R = k[X]$.) Тогда будем обозначать $X(R) := \mathrm{Sect}(R, k)$. (Оно будет напоминать нам множество замкнутых множеств.)

Рассмотрим пару $(R, X(R))$. Тогда у нас есть простые отображения забывания $(R, X(R)) \mapsto R$ и восстановления $R \mapsto (R, X(R))$. Так мы распрощались с понятием аффинных множеств в категории аффинных пространств и регулярных отображений между ними.

Так переопределим категорию Aff как категорию, где множество объектов — это пары $(R, X(R))$, где R — конечно порождённая редуцированная k-алгебра, а морфизмы $\mathrm{Mor}((R', X(R')), (R, X$ — отображения $\varphi : X(R') \to X(R)$, что $\varphi^* : \mathrm{Func}(X(R), k) \to \mathrm{Func}(X(R'), k)$, $f \mapsto f \circ \varphi$ переводит R в R' ($\varphi^*(R) \subseteq R'$).

Тут R играет роль $k[X]$, а $X(R)$ — роль X. В этом же случае вычисление $f \in R$ на точке $x \in X(R)$ происходит по правилу $x(f)$ (ср. с модельным случаем).

Категории конечно порождённых редуцированных k-алгебр (category of finitely generated reduced k-algebras) за f.g.r.k-alg..

Определение 21. *Аффинное многообразие* — это объект категории Aff, т.е. пара $(R, X(R))$. *Множество регулярных отображений* $(R', X(R'))$ *в* $(R, X(R))$ — множество морфизмов $\mathrm{Mor}((R', X(R')$

Пример 2 (нетривиальные).

1. Пусть R — f.g.r. k-algebra, а $f \in R$, что $f \neq 0$. Кольцо $R_f := \{g/f^n \mid g \in R \wedge n \in \mathbb{N}\}$ (т.е. пары (g, f^n) по модулю отношения эквивалентности $(g, f^n) \sim (g', f^{n'}) \Leftrightarrow g \cdot f^{n'} = g' \cdot f^n$) — конечно порождённая k-алгебра. Это верно, потому что нужно рассмотреть $R[t]/(ft - 1)$, где обратным к (образу) f будет (образ) t, а тогда $R[t] \xrightarrow{\sim} R_f$.

Определение 22. Пусть $\varphi : Y' \to Y$ — отображение множеств, k — наше поле. Зададим отображение $\varphi^* : \mathrm{Func}(Y, k) \to \mathrm{Func}(Y', k)$, $f \mapsto f \circ \varphi$. $\varphi^*(f)$ называется *переносом функции f с Y на Y' посредством φ.*

Замечание. После некоторых обсуждений выяснилось, что $\mathrm{Sect}(R, k)$ ничем не отличаются от $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(R, k)$ — множества гомоморфизмов k-алгебр $R \to k$.

Определение 23. Пусть R — конечнопорождённая редуцированная k-алгебра. Определим

$$i : R \to \mathrm{Func}(X(R), k), f \mapsto i(f)$$
$$i(f)(x) := x(f).$$

Лемма 35. *Отображение i инъективно, и кроме того есть гомоморфизм k-алгебр.*

Доказательство. Как мы помним, $R \cong k[X]$ для некоторого замкнутого множества $X \subseteq \mathbb{A}^n$. В этом случае X находится в биективном соответствии с $\mathrm{Hom}(k[X], k) = X(k[X])$, а именно в соответствии $\pi : x \mapsto [f \mapsto f(x)]$. Тогда $\pi^{-1} \circ i$ выглядит просто как вложение. Отсюда и следует инъективность i. □

Этот переход непонятно написан, нужно переписать.

Следствие 35.1. *Если $g \in R$ и $i(g)(x) = 0$ для всякого $x \in X(R)$, то $g = 0$.*

Доказательство. $i : R \to \mathrm{Func}(X(R), k)$ — инъективно, а тогда для вского $x \in X(R)$

$$i(0)(x) = x(0) = 0 = i(g)(x),$$

т.е. $i(0) = i(g)$, значит $0 = g$. □

Следствие 35.2. *Пусть $g_1, g_2 \in R$ тогда $g_1 = g_2$ тогда и только тогда, когда для всякого $x \in X(R)$ $i(g_1)(x) = i(g_2)(x)$.*

Лемма 36. *Понятно, что гомоморфизм k-алгебр $\varphi : R \to R'$ порождает $\varphi^* : X(R') \to X(R)$ и $\varphi^{**} : \mathrm{Func}(X(R), k) \to \mathrm{Func}(X(R'), k)$. При этом имеются вложения $i : R \to \mathrm{Func}(X(R), k)$ и аналогичное i'. Тогда*

$$\varphi^{**}(i(R)) \subseteq i'(R').$$

Доказательство. Мы докажем, что $\varphi^{**} \circ i = i \circ \varphi$, т.е. неформально $\varphi^{**}|_R = \varphi$. Достаточно доказать, что для всяких $f \in R$ и $x' \in X(R')$ выполняется равенство

$$\varphi^{**}(i(f))(x') = i'(\varphi(f))(x').$$

Имеем по определениям

$$\varphi^{**}(i(f))(x') = i(f)(\varphi^*(x')) = \varphi^*(x')(f) = (x' \circ \varphi)(f) = x'(\varphi(f)) = i'(\varphi(f))(x').$$

Отсюда следует требуемое утверждение. □

Теорема 37. Aff *и f.g.r.k-alg. контравариантно эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим функтор $\Phi : \mathrm{Aff} \to$ f.g.r.k-alg., определённый по правилу $(R, X(R)) \mapsto R$, а $\varphi : (R', X(R')) \to (R, X(R))$ переводится в $\varphi^*|_R : R \to R'$. Понятно, что Φ контравариантен. Теперь функтор Ψ : f.g.r.k-alg. $\to$ Aff, определённый по правилу $R \mapsto (R, X(R))$, а гомоморфизм $\alpha : R \to R'$ переводится в морфизм $\varphi : (R', X(R')) \to (R, X(R))$, т.е. отображение $\varphi : X(R') \to X(R)$, что $\varphi(s) := s \circ \alpha$.

Несложно понять с помощью доказанной леммы, что Φ — функтор, и Φ обратим, т.е. Ψ корректно определён. Тут как раз $\Psi(\alpha)$ можно переопределить как $\alpha^*|_{R'}$. Следовательно, категории контравариантно эквивалентны. □

Определение 24. Пара

$$(\mathbb{A}^n, \{\mathbb{A}^n \setminus X \mid X \text{ замкнуто в } \mathbb{A}^n\})$$

называется топологией Зарисского.

Здесь пропущенная лекция!!!

Пусть даны замкнутое $X \subseteq \mathbb{A}^n$ и $U \subseteq X$ открытое в X. Положим

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) := \{s \in \operatorname{Func}(U, k) \mid \forall x \in U \ \exists \text{ открытое } V \subseteq U, g, f \in k[X] \colon f|_V \neq 0 \wedge s|_V = (g/f)|_V\}.$$

Лемма 38.

1. *Также $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ — k-алгебра.*
2. *Если $U' \subseteq U$, то $\Gamma(U', \mathcal{O}_X)$ получается из $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ сужением каждой функции-элемента на U'.*
3. *Если $U = \bigcup_i V_I$, а $s : U \to k$, то*
$$s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \Longleftrightarrow \forall i \ s|_{V_i} \in \Gamma(V_i, \mathcal{O}_X).$$

Лемма 39.

1. *$k[X] = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.*
2. *Для всякого $g \in k[X] \setminus \{0\}$ верно $k[X]_g = \Gamma(X_g, \mathcal{O}_X)$, где $X_g := \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$, а $R_g := \{\frac{a}{g^n} \mid a \in R \wedge n \geqslant 0\}$.*

Доказательство.

1. Включение $k[X] \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ очевидно. Обозначим его $\operatorname{in} : k[X] \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Пусть теперь есть $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Для всякого $x \in X$ есть окрестность $V(x)$ точки x в X и функции $f_x, g_x \in k[X]$, что $f_x|_{V(x)} \neq 0$ и $s|_{V(x)} = (g_x/f_x)|_{V(x)}$, т.е. $(f_x s)|_{V(x)} = g_x|_{V(x)}$. Пусть $Z(x) := X \setminus V(x)$. $Z(x)$ замкнуто, $x \notin Z(x)$, значит $x \sqcup Z(x)$ замкнуто в X. Тогда есть $h_x \in k[X]$, что $h_x|_{Z(x)} = 0$, но $h_x(x) \neq 0$. Тогда $h_x f_x s = h_x g_x$, но теперь уже на всём X. Пусть $\tilde{f}_x := h_x f_x$ и $\tilde{g}_X := h_x g_x$. Тогда $\tilde{f}_x s = \tilde{h}_x$ и $\tilde{f}_x(x) = h_x(x) f_x(x) \neq 0$. Следовательно, $\{f_x\}_{x \in X}$ порождает единичный идеал в $k[X]$, значит конечнопорождён, т.е. есть $x_1, \dots, x_n \in X$ и $r_1, \dots, r_n \in k[X]$, что
$$r_1 \tilde{f}_{x_1} + \dots + r_n \tilde{f}_{x_n} = 1.$$
Следовательно,
$$s = \sum_{i=1}^n r_i \tilde{f}_{x_i} s = \sum_{i=1}^n r_i \tilde{g}_{x_i} \in k[X].$$

□

Лемма 40. *Для всяких замкнутых X и X' всякое регулярное отображение $\alpha : X' \to X$ будет непрерывным в топологии Зарисского.*

Доказательство. Возьмём $f \in k[X] \setminus \{0\}$ и обозначим $f' := \alpha^*(f)$. Пусть $f' \neq 0$. Тогда $X'_{f'} = \alpha^{-1}(X_f)$. Если же $f' = 0$, то $\alpha^{-1}(X_f) = X'_{f'} = \varnothing$. Поэтому прообраз всякого открытого в X открыт в X', т.е. α непрерывно. □

Следствие 40.1. *Регулярное отображение $\alpha : X' \to X$ есть морфизм окольцованных пространств $(X'\mathcal{O}_{X'}) \to (X\mathcal{O}_X)$.*

Доказательство. α непрерывен по доказанной лемме. Пусть $f \in k[X] \setminus \{0\}$, а $f' = \alpha(f)$. Тогда $\alpha^{-1}(X_f) = X'_{f'}$ (где $X'_{f'} = \varnothing$ в случае $f' = 0$). Т.е.

$$\alpha(\Gamma(X_f, \mathcal{O}_f)) = \alpha(k[X]_f) = k[X']_{f'} = \Gamma(X'_{f'}, \mathcal{O}_{f'}).$$

Опустили случай $f = 0$.

□

Лемма 41. $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Aff}}((k[X'], X'), (k[X], X)) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{O}-\mathrm{spaces}}((X', \mathcal{O}_{X'}), (X, \mathcal{O}_X))$.

Доказательство. Всякий морфизм из Aff — морфизм из $\mathcal{O}-$ spaces по доказанному следствию.

Дописать.

□