Геометрия и топология.

Лектор — Евгений Анатольевич Фоминых
Создатель конспекта — Глеб Минаев [*]

TODOs

Содержание

Литература:

- Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М., “Элементарная топология”, М.:МЦНМО, 2012.
- James Munkres, “Topology”.

1 Алгебраическая топология

1.1 Фундаментальная группа

Определение 1. *Ретракция* — непрерывное отображение $f : X \to A$, где A — подпространство X, что $f|_A = \mathrm{Id}_A$.

Если существует ретракция $f : X \to A$, то A называется *ретрактом* пространства X.

Пример 1.

1. Всякое одноточечное подмножество является ретрактом.
2. Никакое двухточечное подмножество прямой не является ретрактом.

Теорема 1. *Пусть дано подпространство A пространства X. TFAE*

1. *A — ретракт X.*
2. *всякое непрерывное отображение $g : A \to Y$ продолжается до непрерывного отображения $X \to Y$.*

[*] Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

Доказательство. Пусть A — ретракт. Тогда есть ретракция $\rho : X \to A$, а значит $g \circ \rho$ — продолжение g на X.

С другой стороны, если всякое непрерывное $g : A \to Y$ продолжимо до непрерывного $X \to Y$, то ретракцию A можно получить как продолжение $\mathrm{Id}_A : A \to X$. $\square$

Лемма 2. *Пусть дано подпространство A пространства X и точка $x \in A$. Если $\rho : X \to A$ — ретракция, а $\mathrm{in} : A \to X$ — включение (тождественное отображение), то $\rho_\star : \pi_1(X, x) \to \pi_1(A, x)$ — сюръекция, а $\mathrm{in}_\star : \pi_1(A, x) \to \pi_1(X, x)$ — инъекция.*

Доказательство. $\rho \circ \mathrm{in} = \mathrm{Id}_A$. Следовательно $(\rho \circ \mathrm{in})_\star = \rho_\star \circ \mathrm{in}_\star = \mathrm{Id}_\star = \mathrm{Id}$, откуда следует, что $\rho_\star$ — сюръекция, а $\mathrm{in}_\star$ — инъекция. $\square$

Теорема 3 (Борсука)**.** *Не существует ретракции $D^n \to S^{n-1}$.*

Доказательство в размерности 2. Предположим противное. Пусть $\rho : D^2 \to S^1$ — ретракция, $x \in S^1$. Из леммы 2 следует, что $in_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(D^2)$ должно быть инъекцией. Но $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, а $\pi_1(D^2) = \{0\}$. А инъекции $\mathbb{Z} \to \{0\}$ не существует — противоречие. $\square$

Замечание 1. На самом деле рассуждение работает в любой размерности. Только вместо π_1 надо взять π_{n-1}. Там опять же окажется, что лемма верна, $\pi_{n-1}(D^n)$ тривиальна, а $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ — содержит $\mathbb{Z}$ как подгруппу.

Определение 2. Точка $a \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения $f : X \to X$, если $f(a) = a$.

Пространство X, говорят, *обладает свойством неподвижной точки*, если всякое непрерывное отображение $f : X \to X$ имеет неподвижную точку.

Пример 2. $[a; b]$ обладает свойством неподвижной точки.

Теорема 4 (Брауэра)**.** *Любое непрерывное отображение $f : D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку.*

Доказательство в размерности 2. Предположим противное, $f(x) \neq x$ для всех $x \in D^2$. Построим $g : D^2 \to S^1$ как пересечение открытого луча $(f(x); x; \infty)$ и S^1. Несложно удостовериться, что для всех точек x, что $f(x) \neq x$, функция g определена и непрерывна в некоторой окрестности x. Это противоречит теореме Борсука. $\square$

Замечание 2. В точности также это можно доказать для любой размерности, но потребуется теорема Борсука большей размерности.

Определение 3. X и Y называются *гомотопически эквивалентными* (и пишут $X \sim Y$), если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ и $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$.

Такие f и g называются *гомотопически обратными* отображениями. При этом каждое из них называется *гомотопической эквивалентностью.*

Пример 3. $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно $\{0\}$.

Определение 4. Ретракция $f : X \to A$ называется *деформационной ретракцией*, если её композиция с включением $\mathrm{in} : A \to X$ гомотопна тождественному отображению, т.е.

$$\mathrm{in} \circ f \sim \mathrm{Id}_X.$$

Если существует деформационная ретракция X на A, то A называется *деформационным ретрактом* пространства X.

Теорема 5. *Деформационная ретракция — гомотопическая эквивалентность.*

Доказательство. Действительно, если $f : X \to A$ — деформационная ретракция, а $\mathrm{in} : A \to X$ включение, то $f \circ \mathrm{in} = \mathrm{Id}_A \sim \mathrm{Id}_A$ и

$$\mathrm{in} \circ f \sim \mathrm{Id}_A$$

по опеделению деформационной ретракции. Следовательно f и in — гомтопически обратные друг другу деформационные ретракции. □

Следствие 5.1. *Деформационные ретракты гомотопически эквивалентны своим исходным пространствам.*

Пример 4.

1. S^{n-1} — деформационный ретракт $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2. S^1 — деформационный ретракт ленты Мёбиуса и кольца ($S^1 \times [0;1]$).
3. Букет n окружностей и окружность с n радиусами — деформационный ретракт плоскости без n точек.
4. Букет двух окружностей — деформационный ретракт тора с дыркой.

Теорема 6. *Гомотопическая эквивалентность — "отношение эквивалентности" между топологическими пространствами.*

Доказательство.

- **Рефлексивность.** Очевидна, так как Id является деформационным ретрактом $X \to X$.
- **Симметричность.** Если $X \sim Y$, то есть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, что $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ и $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$. Тогда $Y \sim X$.
- **Транзитивность.** Пусть $X \sim Y \sim Z$. Тогда имеются $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $h : Y \to Z$ и $i : Z \to Y$, что $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$, $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$, $i \circ h \sim \mathrm{Id}_Y$, $h \circ i \sim \mathrm{Id}_Z$. Следовательно

  $$(g \circ i) \circ (h \circ f) = g \circ (i \circ h) \circ f \sim g \circ \mathrm{Id}_Y \circ f = g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$$

  и

  $$(h \circ f) \circ (g \circ i) = h \circ (f \circ g) \circ i \sim h \circ \mathrm{Id}_Y \circ i = h \circ i \sim \mathrm{Id}_Z.$$

  Следовательно $(h \circ f)$ и $(g \circ i)$ — гомотопически обратные гомотопические эквивалентности. Значит $X \sim Z$.

□

Определение 5. Класс пространств, гомотопически эквивалентных данному X, называется *гомотопическим типом.* Свойства (характеристики) топологических пространств, одинаковые у гомотопически эквивалентных, — *гомотопические свойства* (*гомотопические инварианты*).

Упражнение 1. Число компонент (линейной) связности — гомотопический инвариант.

Теорема 7. *Пусть X и Y — гомотопно эквивалентные поверхности, а $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ — гомотопически обратные гомотопические эквивалентности. Пусть также фиксирована $x_0 \in X$. Тогда*

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, f(x_0)).$$

Доказательство.

Лемма 7.1. *Пусть $f, g : X \to Y$ — непрерывные отображения, а $H : X \times [0;1] \to Y$ — гомотопия между f и g. Пусть также даны $x_0 \in X$, $y_0 := f(x_0)$, $y_1 := g(x_0)$ и путь $\gamma(t) := H(x_0, t)$ из y_0 в y_1. Обозначим за T_γ — сопряжение по пути γ, т.е. $T_\gamma(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma$. Тогда*

$$f_\star = T_\gamma \circ g_\star.$$

Доказательство. Условие равенства функций $f_\star = T_\gamma \circ g_\star$ означает, что для всякого $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$

$$f_\star([\alpha]) = T_\gamma(g_\star([\alpha])).$$

Последнее значит, что

$$[f \circ \alpha] = [\gamma^{-1}(g \circ \alpha)\gamma],$$

или говоря иначе,

$$f \circ \alpha \sim \gamma^{-1}(g \circ \alpha)\gamma.$$

При этом заметим, что

$$f \circ \alpha = H(\alpha(s), 0), \qquad g \circ \alpha = H(\alpha(s), 1).$$

Рассмотрим

$$F : [0;1]^2 \to X \times [0;1], (s,t) \mapsto (\alpha(s), t).$$

Несложно видеть, что

$$F(s,0) = (\alpha(s), 0), \qquad F(s,1) = (\alpha(s), 1), \qquad F(0,t) = F(1,t) = (x_0, t).$$

Таким образом

$$(H \circ F)(s,0) = f \circ \alpha, \qquad (H \circ F)(s,1) = g \circ \alpha, \qquad (H \circ F)(0,t) = F(1,t) = \gamma.$$

Зафиксируем в $[0;1]^2$ линейные пути $\varphi : (0,0) \mapsto (1,0)$ и $\psi : (0,0) \mapsto (0,1) \mapsto (1,1) \mapsto (1,0)$. Несложно видеть, что

$$H \circ F \circ \varphi = f \circ \alpha, \qquad H \circ F \circ \psi = \gamma^{-1}(g \circ \alpha)\gamma.$$

При этом $[0;1]^2$ выпукло, значит есть гомотопия G, переводящая φ в γ. В таком случае $H \circ F \circ G$ — гомотопия, переводящая $f \circ \alpha$ в $\gamma^{-1}(g \circ \alpha)\gamma$. □

Заметим, что $g \circ f$ гомотопно Id_X. Значит в контексте x_0 и $\pi_1(X, x_0)$ есть некоторое сопряжение T_γ, что

$$T_\gamma \circ (g \circ f)_\star = (\mathrm{Id}_X)_\star = \mathrm{Id}.$$

При этом T_γ есть изоморфизм групп (биекция). Это в частности означает, что $g_\star \circ f_\star$ является биекцией. Отсюда следует, что $g_\star$ инъективно, а $f_\star$ сюръективно.

Повторяя рассуждения в обратную сторону, получаем, что $f_\star$ и $g_\star$ являются биекциями. Поэтому

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, f(x_0)).$$

□

Следствие 7.1. *$f_\star$ (кроме того, что индуцирует биекцию из множества фундаментальных групп компонент линейной связности X в множества тех же у Y) индуцирует изоморфизмы фундаментальных групп компонент линейной связности X.*

Следствие 7.2. *Если X линейно связно (а тогда Y тоже), то $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$.*

Определение 6. Топологическое пространство X *стягиваемо*, если гомотопически эквивалентно точке.

Лемма 8. *TFAE*

1. *X стягиваемо.*
2. *Id_X гомотопно константному отображению.*
3. *Некоторая точка — деформационный ретракт.*
4. *Всякая точка — деформационный ретракт.*

Пример 5. Например, стягиваемы следующие пространства.

1. $\mathbb{R}^n$.
2. Выпуклые множества.
3. Звёздные множества.
4. Деревья.

Лемма 9. *Пусть $h : S^1 \to X$ — непрерывное отображение. TFAE*

1. *h гомотопно постоянному отображению.*
2. *h продолжается до непрерывного отображения $D^2 \to X$.*
3. *$h_\star$ — тривиальный гомоморфизм.*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2)$ Существует гомотопия H между h и константным отображением. Это значит, что $H : S^1 \times [0;1] \to X$ — непрерывно, и $H(x,1) = \mathrm{const}$. Это значит, что пространство $S^1 \times [0;1]$ можно склеить по множеству $S^1 \times \{1\}$ (так как на нём H константна) и H переопределится в некоторую функцию H'. При этом множество-прообраз H' гомеоморфно D^2. Следовательно можно считать, что $H' : D^2 \to X$. При этом H' является доопределением, так как $H'|_{S^1} = H|_{S^1 \times \{0\}} = h$.

$2 \Rightarrow 1)$ Пусть h продолжена до H на D^2. Тогда определим

$$G : S^1 \times [0;1] \to X, (\alpha, r) \mapsto H(re^{\alpha i}).$$

Несложно видеть, что G — гомотопия между h и константным отображением.

$1 \Leftrightarrow 3)$ Если $h_\star$ является тривиальным гомоморфизмом фундаментальных групп, то $h = h \circ \alpha \sim \mathrm{const}$, где α — один оборот по окружности, т.е. h гомотопно константному отображению.

Если h гомотопно постоянному отображению, то $\alpha \circ h = h \sim \mathrm{const}$, т.е. $f_\star([\alpha]) = e$. При этом $[\alpha]$ порождает группу $\pi_1(S^1)$. Следовательно, $h_\star$ — тривиальный гомоморфизм.

□

Теорема 10 (основная теорема алгебры)**.** *Всякий многочлен из $\mathbb{C}[z]$ положительной степени имеет корень.*

Доказательство. WLOG нам дан многочлен

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 z^0.$$

Также WLOG $|a_{n-1}| + \dots + |a_0| < 1$, так как если сделать замену $z = y/c$, то задача сведётся к многочлену

$$y^n + ca_{n-1}y^{n-1} + \dots + c^n a_0.$$

В таком случае

$$|a_{n-1}| + \dots + |a_0| = |c||a_{n-1}| + \dots + |c|^n|a_0|.$$

Значит можно взять достаточно маленькое значение $|c| > 0$, и тогда полученная сумма будет меньше 1.

Предположим противное, т.е. у данного многочлена нет корней. Тогда функция

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 z^0$$

непрерывна и имеет область значений $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следовательно, поскольку f определена D^2, то $f|_{S^1}$ гомотопна постоянному отображению.

Определим функцию

$$g : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^n$$

и функцию

$$H : S^1 \times [0;1] \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 z^0).$$

Заметим, что

$$|H(z,t)| \geqslant |z^n| - |t|(|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_0||z|^0) \geqslant 1 - (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) > 0,$$

т.е. $H \neq 0$. Следовательно, H является гомтопией между f и g в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Таким образом f гомотопно g и константной функции. При этом g не гомотопно константной функции, так как определяет n оборотов по окружности, что не является тривиальным гомоморфизмом $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^1)$ на себя — противоречие. $\square$

Теорема 11 (Борсука-Улама). *Для любой непрерывной функции $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(-x) = f(x)$.*

Доказательство для размерности 1. Функция $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^1, x \mapsto f(x) - f(-x)$ определена на компакте, значит множество её значений есть отрезок. При этом φ нечётна, значит это отрезок с серединой в 0. Таким образом в какой-то точке φ принимает 0, т.е. в этой точке $f(x) = f(-x)$. $\square$

Доказательство для размерности 2. Предположим противное, т.е. $f(x) \neq f(-x)$ ни в какой точке. Тогда можно определить функцию

$$g : S^2 \to S^1, \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Понятно, что g нечётна и непрерывна.

Рассмотрим нативные проекции $p_1 : S^1 \to \mathbb{R}P^1$ и $p_2 : S^2 \to \mathbb{R}P^2$. Поскольку g нечётна, то $p_1 \circ g$ чётна, а значит $\varphi := p_1 \circ g \circ p_2^{-1}$ определена. При этом $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$, а $\pi_1(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$. Т.е. не существует нетривиальных гомоморфизмов $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$. Таким образом $\varphi_\star$ тривиален.

Пусть α — нетривиальная петля в $\mathbb{R}P^2$. Тогда при помощи p_2 её можно поднять в путь $\widetilde{\alpha}$. При этом из нетривиальности α следует, что концы $\widetilde{\alpha}$ не совпадают, а являются противоположными. Следовательно $g \circ \widetilde{\alpha}$ — путь с противоположными концами. Но в таком случае $p_1 \circ g \circ \widetilde{\alpha}$ является нетривиальной петлёй в $\mathbb{R}P^1$. Т.е. $\varphi_\star$ отправил не нейтральный элемент в не нейтральный. Следовательно, $\varphi_\star$ нетривиален — противоречие. $\square$