Домашнее задание от 07.09
Дифференциальные уравнения и динамические системы

Глеб Минаев @ 204 (20.Б04-мкн)

9 сентября 2021 г.

Задача (17)**.** Заметим, что

$$y = e^{Cx} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ln(y) = Cx \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\ln(y)\Big)' = C.$$

Следовательно все линии данного семейства удовлетворяют уравнению

$$\ln(y) = \Big(\ln(y)\Big)' x.$$

Другая форма этого уравнения: $xy' = y\ln(y)$.

Задача (27)**.** Из нашего равенства следует, что

$$\frac{y'}{y} = a + by' \qquad \text{и} \qquad \frac{y''y - y'^2}{y^2} = by''.$$

Из этих равенств мы получаем, что

$$b = \frac{y''y - y'^2}{y^2y''} \qquad \text{и} \qquad a = \frac{y'}{y} - by' = \frac{yy'y'' - yy'y'' + y'^2}{y^2y''} = \frac{y'^2}{y^2y''}.$$

Подставляя в изначальное равенство, получаем

$$\ln(y) = \frac{xy'^2 + y^2y'' - yy'^2}{y^2y''}.$$

Задача (32)**.** Скажем последнее условие на окружности немного по-другому: их центры лежат на прямой $y = x$. Таким образом мы получаем семейство кривых, заданных уравнениями

$$(y-a)^2 + (x-a)^2 = a^2.$$

Дифференцируя, получаем

$$y'(y-a) + (x-a) = 0.$$

Отсюда выражаем a:

$$a = \frac{y'y + x}{y' + 1}.$$

Подставляя в начальное равенство, имеем

$$\left(y - \frac{yy' + x}{y' + 1}\right)^2 + \left(x - \frac{yy' + x}{y' + 1}\right)^2 = \left(\frac{yy' + x}{y' + 1}\right)^2$$

Задача (40)**.** Две кривые пересекаются под углом φ значит, что угол между касательными к ним в их общей точке равен φ. Пусть u — вектор, лежащий на одной касательной, а v — на другой. В таком случае условие на угол выглядит как

$$u \cdot v = |u||v||\cos(\varphi)| \qquad \text{или по-другому} \qquad (u \cdot v)^2 = |u|^2|v|^2\cos(\varphi)^2.$$

Несложно видеть, что вектор касательной нашей кривой есть ничто иное как $(1; y')$. При этом данное семейство кривых является линиями уровней функции x^2+y^2, градиент которой — $(x; y)$; следовательно касательная — перпендикулярный к градиенту вектор $(-y; x)$ Тогда имеем, что

$$(-y + xy')^2 = (x^2 + y^2)(1 + y'^2)\frac{1}{2}.$$