Основы наивной теории множеств.

Станислав Олегович Сперанский

Материалы лекций: ссылка
Литература:

- K. Hrbacek and T. Jech. Introduction to Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Marcel Dekker, Inc., 1999.
- T. Jech. Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.

Будем рассматривать как базовые выражения “x равен (совпадает с) y” (“$x = y$”) “x лежит в y” (“$x \in y$”).

Определение 1 (Наиваная схема аксиом выделения)**.** Пусть $\Phi(x)$ — произвольное условие на объекты. Тогда существует X, что $\forall u(\Phi(u) \leftrightarrow u \in X)$. В этом случае X обозначается как $\{u \mid \Phi(u)\}$.

Утверждение 1 (парадокс Рассела)**.** *Пусть $R = \{u \mid u \notin u\}$. Тогда R не может лежать в себе и не может не лежать в себе одновременно.*

Из-за данного парадокса будем рассматривать только условия, образованные переменными и $\in, =, \neg, \wedge, \vee, \leftarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

Определение 2 (аксиомы ZFC (= ZF (аксиомы Цермело-Френкеля) + C (аксиома выбора)))**.**

Ext) “Аксиома экстенциональности”:

$$\forall X \forall Y (\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y)$$

Empty) “Аксиома пустого множества”:

$$\exists \varnothing \, \forall u \, (u \notin \varnothing)$$

Pair) “Аксиома пары”:

$$\forall X \, \forall Y \, \exists Z (\forall u \, (u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)))$$

Обозначение: $Z = \{X, Y\}$.

Sep) “Схема аксиом выделения”:

$$\forall \Phi(x) \quad \forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u)))$$

Обозначение: $Y = \{u \in X \mid \Phi(u)\}$.

Следствие. *Операторы*

$$X \cap Y := \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\}$$
$$X \setminus Y := \{u \in X \mid u \notin Y\}$$
$$\bigcap X := \{u \mid \forall v \in X \quad u \in v\}$$

определены корректно.

Union) “Аксиома объединения”:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow \exists v\, (v \in X \wedge u \in v))$$

Обозначение: $Y = \bigcup X$.

Следствие. *Оператор*

$$X \cup Y := \bigcup \{X, Y\} = \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\}$$

определён корректно.

Power) Пусть $x \subseteq y := \forall v\, \{v \in x \to v \in y\}$. “Аксиома степени”:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$$

Обозначение: $Y = \mathcal{P}(X) := \{u \mid u \subseteq X\}$. $\mathcal{P}(X)$ — “множество-степень X” или “булеан X”.

Определение 3. Упорядоченная пара — это объект от некоторых X_1 и Y_1, который равен другому такому объекту от X_2 и Y_2 тогда и только тогда, когда $X_1 = X_2 \wedge Y_1 = Y_2$.

Определение 4. *Декартово произведение* X и Y $(X \times Y)$ — $\{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$.

Замечание 1. Можно нелсожно показать, что декартово произведение определено корректно.

Inf) Пусть $\mathrm{Ind}(X) := \varnothing \in X \wedge \forall u\, (u \in X \wedge u \cup \{u\} \in X)$. Если $\mathrm{Ind}(X)$, то X называется индуктивным. “Аксиома бесконечности”: существует индуктивное множество.

Repl) “Схема аксиом подстановки”:

$$\begin{aligned}&\forall \Phi(x, y)\\ &\qquad \forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \to y_1 = y_2) \to\\ &\qquad \forall X\, \exists Y\, \forall y\, (y \in Y \leftrightarrow \exists x (x \in X \wedge \Phi(x, y)))\end{aligned}$$

Reg) “Аксиома регулярности”:

$$\forall X\, (X \neq \varnothing \to \exists u\, (u \in X \wedge X \cap u = \varnothing))$$

1 Отношения.

Определение 5. *Бинарное (или двухместное) отношение* R между X и Y — подмножество $X \times Y$. Если $Y = X$, R называется *бинарным (или двухместным) отношением* на X. Обозначение: $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$.

Определение 6.

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(R) &:= \{u \in X \mid \exists v \quad uRv\} && \text{“область определения } R\text{”}\\ \mathrm{range}(R) &:= \{v \in Y \mid \exists u \quad uRv\} && \text{“область значений } R\text{”}\\ R[U] &:= range(R \cap (U \times Y))\\ R^{-1} &:= \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}\end{aligned}$$

Замечание 2.

$$\operatorname{range}(R) = \operatorname{dom}(R^{-1}) = R[X]$$
$$\operatorname{range}(R^{-1}) = \operatorname{dom}(R) = R^{-1}[Y]$$

Определение 7. Бинарные отношнения можно естественным образом комбинировать: для любых отношений R и Q между X и Y, Y и Z соответственно отношение

$$S = R \circ Q := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y : xRy \wedge yQz\}$$

называется композицией R и Q.

Определение 8. *Тождественное отображение* на X — $id_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Замечание 3. Тождественное отображение при композиции (не важно, правой или левой) с другим отношением не меняет его.

Определение 9. Отношение R между X и Y называется функциональным, если

$$\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, ((xRy_1 \wedge xRy_2) \to y_1 = y_2).$$

Определение 10. *Функция* из X в Y — функциональное отношение R между X и Y, в котором $\operatorname{dom}(R) = X$. Обозначение: $R : X \to Y$.

Определение 11. *Ограничение* или *сужение* функции $f : X \to Y$ на $U \subseteq X$ — функция $f_{\restriction U} := f \cap (U \times Y)$.

Если $f : X \to Y$ и $g : U \to Y$, где $U \subseteq X$, таковы, что $f_{\restriction U} = g$, то f называется *расширением* g, а g — *органичением* f.

Определение 12. $Y^X := \{f : X \to Y\}$.

Определение 13. Функция $f : X \to Y$ называется

- *сюрьекцией*, если $range(f) = Y$;
- *инъекцией*, если f^{-1} функционально;
- *биекцией*, если f сюръективно и инъективно.

C) "Аксиома выбора":

$$\forall X(\varnothing \notin X \to \exists f(f : X \to \bigcup X \wedge \forall u \in X(f(u) \in u)))$$

2 Натуральные числа и индукция

Важным следствием Inf является

$$\exists X(\operatorname{Ind}(X) \wedge \forall Y(\operatorname{Ind}(Y) \to X \subseteq Y)) \tag{Nat}$$

Nat описывает минимальное по включению индуктивное множество — $\mathbb{N}$, $\aleph_0$ или ω.

Доказательство. Пусть есть какое-то индуктивное X_0. Тогда рассмотрим

$$\mathbb{N} := \{x \in X_0 \mid \forall X(\operatorname{Ind}(X) \to x \in X)\}$$

По построению $\operatorname{Ind}(X) \to \mathbb{N} \subseteq X$. Также $\operatorname{Ind}(\mathbb{N})$. □

Определение 14. Определим *функцию последователя* $s : \mathbb{N} \to NN$ как

$$s := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \cup \{n\}\}$$

Вместо $s(n)$ часто пишут $n + 1$.

Определение 15. *(Естественный) порядок* на $\mathbb{N}$ — $<:= \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in m\}$.

Замечание 4. Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно:

1. $\neg(n < 0)$;

2. $n < m + 1 \leftrightarrow (n < m \vee n = m)$.

Теорема 1 (принцип индукции). *Пусть X удовлетворяет условию*

$$0 \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}(n \in X \to n + 1 \in X).$$

Тогда $\mathbb{N} \subseteq X$.

Доказательство. Из условия на X следует, что $\mathbb{N} \cap X$ индуктивно. Тогда из определения $\mathbb{N}$ следует, что $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cap X \subseteq X$, значит $\mathbb{N} \subseteq X$. □

Замечание 5. В качестве X могут быть $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$.

Следствие 1.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ *верно* $n \subseteq \mathbb{N}$.

Теорема 2 (возвратная индукция). *Пусть дан X, что $\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n\ m \in X \to n \in X)$. Тогда $\mathbb{N} \subseteq X$.*

Доказательство. Докажем, что $\forall n \in \mathbb{N} n \subseteq X$, по индукции. База для 0 очевидна. Шаг очевиден, так как $n \subseteq X$, значит $n \in X$, значит $n + 1 \subseteq X$. □

Определение 16. $\mathrm{Min}(X) := \{x \in X \mid \neg\exists u \in X u \in x\}$.

Теорема 3 (принцип минимального элемента). *Если $X \subset \mathbb{N}$ и $X \neq \varnothing$, то $\mathrm{Min}(X) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Min}(X) = \varnothing$. Возьмём $Y := \mathbb{N} \setminus X$. Заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n\ m \in Y \to n \in Y)$$

Тогда по принципу возвратной индукции $Y = \mathbb{N}$, а тогда $X = \varnothing$ — противоречие. □

Теорема 4 (о рекурсии). *Пусть есть $y_0 \in Y$ и $h : \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственная $f : \mathbb{N} \to Y$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0 \\ h(m, f(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда будем называть функцию $f : k + 1 \to Y$ *правильной*, если условие в определении рекурсии верно для всех $n \in k + 1$. Также рассмотрим

$$S := \{k \in \mathbb{N} \mid \text{сущесвтует единственная правильная } f : k + 1 \to Y\}$$

Будем обозначать для каждого $k \in S$ через f_k соответствующую правильную функцию из $k+1$ в Y.

Докажем по индукции, что $S = \mathbb{N}$.

База. Очевидно, $\{(0, y_0)\}$ — единственная правильная функция из $0+1$ в Y. Поэтому $0 \in S$.

Шаг. Легко заметить, что сужение любой правильной функции на $k + 2$ на множество $k + 1$ правильно. Поэтому все правильные функции на $k + 2$ определены на $k + 1$ как f_k. Тогда значение в $k + 1$ определяется однозначно, значит правильная функция на $k + 2$ существует и единственна. □

Теорема 5 (о рекурсии, параммeтризованная). *Пусть* $g_0 \in Y^X$ *и* $h : X \times \mathbb{N} \times Y \to Y$. *Тогда существует и единственна* $f : X \times \mathbb{N} \to Y$, *что* $\forall x \in X, n \in \mathbb{N}$

$$f(x, n) = \begin{cases} g_0(x) & \textit{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \textit{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим для каждого $x \in X$ функцию $h_x : \mathbb{N} \times Y \to Y, (n, y) \mapsto h(x, n, y)$. Тогда по теореме о рекурсии есть $f_x : \mathbb{N} \to Y$, что

$$f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Тогда определим $f : X \times \mathbb{N} \to Y, (x, n) \mapsto f_x(n)$. В этом случае

$$f(x, n) = f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases} = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

$\square$