

# Основы математической логики.

Лектор — Станислав Олегович Сперанский

Создатель конспекта — Глеб Минаев \*

## TODOs

TODO (А надо ли?) . . . . .	4
Непонятно. TODO . . . . .	5
Непонятно. TODO . . . . .	5
TODO . . . . .	5
Уточнить про роль константных символов. . . . .	14
TODO (А надо ли?) . . . . .	23
TODO (А надо ли?) . . . . .	27
Может быть довести. . . . .	33

## Содержание

0.1 Формальности про алфавиты и слова . . . . .	1
0.2 Язык пропозициональной классической логики (Propositional Classic Logic, PCL) . . . . .	2
0.3 Семантика пропозициональной классической логики . . . . .	5
0.4 Гильбертовское исчисление для пропозициональной классической логики . . . . .	6
0.5 Структуры . . . . .	13
0.6 Язык кванторной классической логики (Quantifier Classic Logic, QCL) . . . . .	18
0.7 Семантика кванторной классической логики . . . . .	21
0.8 Гильбертовское исчисление для кванторной классической логики . . . . .	28

Материалы лекций: [ссылка](#)

### 0.1 Формальности про алфавиты и слова

**Определение 1.** *Алфавит*  $A$  — множество элементов произвольной природы.

$A$ -слова или слова над алфавитом  $A$  — элементы  $A^*$  (т.е. всевозможные конечные последовательности элементов из  $A$ ).

Для всякого  $w \in A^*$  длиной слова  $w$  называется  $|w|$  (что также равно  $\text{dom}(w)$ ).

---

\*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

**Определение 2.** Пусть даны слова  $w_1$  и  $w_2$  над  $A$ . Рассмотрим отображение

$$v : |w_1| + |w_2| \rightarrow A, i \mapsto \begin{cases} w_1(i) & \text{если } i < |w_1| \\ w_2(i - |w_1|) & \text{если } i \geq |w_1| \end{cases}$$

Понятно, что  $v \in A^*$ . Полученное  $v$  называется конкатенацией  $w_1$  и  $w_2$  и обозначается  $w_1 w_2$ .

**Определение 3.** Пусть  $w, w' \in A^*$ . Тогда  $w'$  называется *подсловом*  $w$ , если  $w = v_0 w' v_1$  для некоторых  $\{v_0; v_1\} \subseteq A^*$ . Обозначение:  $w' \preceq w$ .

В этом случае  $\langle w'; |v_0| \rangle$  называется *вхождением*  $w'$  в  $w$ .

**Определение 4.** Пусть  $\langle w', k \rangle$  — вхождение  $w'$  в  $w$ , т.е.  $w = v_0 w' v_1$ , где  $|v_0| = k$ . Тогда для всякого  $u \in A^*$  можно определить

$$w[w'/u, k] := v_0 u v_1,$$

т.е. результат замены данного вхождения  $w'$  в  $w$  на  $u$ .

Если никакие два различных вхождения  $w'$  в  $w$  не пересекаются, то можно определить  $w[w'/u]$  как результат одновременной замены всех вхождений  $w'$  в  $w$  на  $u$ .

## 0.2 Язык пропозициональной классической логики (Propositional Classic Logic, PCL)

**Определение 5.** Пусть (навсегда) зафиксировано некоторое счётное множество  $\text{Prop}$ . Будем называть его элементы *пропозициональными переменными* или просто *переменными*.

Алфавит  $\mathcal{L}$  пропозициональной классической логики состоит из элементов  $\text{Prop}$ , а также:

- символов связок:
  - “ $\rightarrow$ ” — символ импликации,
  - “ $\wedge$ ” — символ конъюнкции,
  - “ $\vee$ ” — символ дизъюнкции,
  - “ $\neg$ ” — символ отрицания,
- и вспомогательных символов: “(” и “)”.

Обозначим за  $\text{Form}$  наименьшее подмножество  $\mathcal{L}^*$ , замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если  $p \in \text{Prop}$ , то  $p \in \text{Form}$ ;
- если  $\{\varphi, \psi\} \in \text{Prop}$ , то  $(\varphi \rightarrow \psi) \in \text{Form}$ ;
- если  $\{\varphi, \psi\} \in \text{Prop}$ , то  $(\varphi \wedge \psi) \in \text{Form}$ ;
- если  $\{\varphi, \psi\} \in \text{Prop}$ , то  $(\varphi \vee \psi) \in \text{Form}$ ;
- если  $\varphi \in \text{Form}$ , то  $\neg \varphi \in \text{Form}$ .

Элементы  $\text{Form}$  называются *формулами*.

**Теорема 1.**  $\text{Form}$  существует.

**Доказательство.** Рассмотрим семейство  $T$  всех подмножеств  $\mathcal{L}^*$ , удовлетворяющих порождающим правилам выше. Заметим, что  $T$  не пусто, так как содержит  $\mathcal{L}^*$ . Тогда можно рассмотреть  $F := \bigcap T$ . Несложно убедиться, что оно удовлетворяет всем порождающим правилам, значит лежит в  $T$ . И при этом меньше по включению всех других множеств в  $T$ . Значит его и можно взять в качестве  $\text{Form}$ .  $\square$

**Определение 6.** Будем говорить, что  $\varphi$  является *началом*  $\psi$ , и писать  $\varphi \sqsubseteq \psi$ , если  $\psi = \varphi\tau$  для некоторого  $v \in \mathcal{L}^*$ .

**Лемма 2.** Всякое  $\varphi \in \text{Form}$  имеет один из следующих видов:

1.  $p$  для некоторого  $p \in \text{Prop}$ ;
2.  $(\theta \circ \chi)$  для некоторых  $\{\theta; \chi\} \subseteq \text{Form}$  и  $\circ \in \{\rightarrow; \wedge; \vee\}$ ;
3.  $\neg\theta$  для некоторого  $\theta \in \text{Form}$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда рассмотрим  $F := \text{Form} \setminus \{\varphi\}$ . Заметим, что  $F$  удовлетворяет тем же порождающим правилам, что и  $\text{Form}$ . Действительно:

- Если  $p \in \text{Prop}$ , то  $p \in \text{Form}$ . При этом  $p \neq \varphi$  по условию леммы. Следовательно  $p \in F$ .
- Если  $\{\varphi, \psi\} \in \text{Prop}$ , то  $(\varphi \rightarrow \psi) \in \text{Form}$ . При этом  $(\varphi \rightarrow \psi) \neq \varphi$  по условию леммы. Следовательно  $(\varphi \rightarrow \psi) \in F$ . Аналогично для  $\wedge$  и  $\vee$ .
- Если  $\varphi \in \text{Form}$ , то  $\neg\varphi \in \text{Form}$ . При этом  $\neg\varphi \neq \varphi$  по условию леммы. Следовательно  $\neg\varphi \in F$ .

Значит  $F$  — меньшее по включению чем  $\text{Form}$  множество, удовлетворяющее условиям наложенным на  $\text{Form}$  — противоречие.  $\square$

**Следствие 2.1.** Рассмотрим последовательность множеств  $(F_n)_{n=0}^\infty$ , что  $F_0 = \text{Prop}$ , а

$$F_{n+1} = F_n \cup \{(\varphi \circ \chi) \mid \{\theta; \chi\} \subseteq \text{Form} \wedge \circ \in \{\rightarrow; \wedge; \vee\}\} \cup \{\neg\theta \mid \theta \in \text{Form}\}$$

Тогда

1. всякое  $F_n \subseteq \text{Form}$ ;
2. всякое  $\varphi \in \text{Form}$  лежит в некотором  $F_n$ .

**Следствие 2.2.**  $\bigcup_{n=0}^\infty F_n = \text{Form}$ .

**Лемма 3.** Пусть  $\{\varphi; \psi\} \subseteq \text{Form}$  таковы, что  $\psi \sqsubseteq \varphi$ . Тогда  $\psi = \varphi$ .

**Доказательство.** Докажем утверждение возвратной индукцией по  $|\varphi|$ .

Рассмотрим случаи.

1. Если  $\varphi \in \text{Prop}$ , то, очевидно,  $\psi = \varphi$ .
2. Если  $\varphi = (\theta \circ \chi)$ , где  $\{\theta; \chi\} \in \text{Form}$  и  $\circ \in \{\rightarrow; \wedge; \vee\}$ , то  $\psi$  начинается на “(”, значит имеет вид  $(\theta' \circ' \chi')$ , где  $\{\theta'; \chi'\} \in \text{Form}$  и  $\circ' \in \{\rightarrow; \wedge; \vee\}$ . Следовательно либо  $\theta \sqsubseteq \theta'$ , либо  $\theta' \sqsubseteq \theta$ . Но  $|\theta| < |\varphi| - 3$ , и  $|\theta'| < |\psi| - 3 \leq |\varphi| - 3$ . Тогда можно применить предположение индукции и получить, что  $\theta = \theta'$ . Значит  $\circ = \circ'$ , а далее по аналогии получаем, что  $\chi = \chi'$ . Следовательно  $\varphi = \psi$ .

3. Если  $\varphi = \neg\theta$ , то  $\psi$  начинается на “ $\neg$ ”, следовательно  $\psi = \neg\theta'$ . Тогда  $\theta' \sqsubseteq \theta$ , а тогда по предположению индукции  $\theta' = \theta$ , значит  $\varphi = \psi$ .

□

**Теорема 4** (о единственности представления формул). *Всякая формула в  $\text{Form} \setminus \text{Prop}$  представляется единственным образом в одном из видов*

- $(\theta \rightarrow \chi)$ ,
- $(\theta \wedge \chi)$ ,
- $(\theta \vee \chi)$ ,
- $\neg\theta$ ,

где  $\{\theta; \chi\} \subseteq \text{Form}$ .

**Доказательство.** По доказанной лемме всякое  $\phi$  имеет такое представление. Пусть тогда их несколько; рассмотрим случаи.

1. Если  $\phi$  начинается на “ $($ ”, то тогда  $\phi = (\theta \circ \chi) = (\theta' \circ' \chi')$ . Тогда по доказанной лемме  $\theta = \theta'$ ,  $\circ = \circ'$ ,  $\chi = \chi'$ . Значит представления совпадают.
2. Если  $\phi$  начинается на “ $\neg$ ”, то  $\phi = \neg\theta = \neg\theta'$ . Тогда  $\theta = \theta'$ , а следовательно представления совпадают.

□

**Определение 7.** Для всякого  $\varphi \in \text{Form}$  определим

$$\text{Sub}(\varphi) := \{\psi \in \text{Form} \mid \psi \preceq \varphi\}.$$

Элементы  $\text{Sub}(\varphi)$  называют *подформулами*  $\varphi$ .

**Лемма 5.** Пусть  $\varphi \in \text{Form}$ . Тогда каждое вхождение “ $\neg$ ” или “ $($ ” в  $\varphi$  является началом вхождения некоторой подформулы.

**Доказательство.**

TODO (А надо ли?)

□

**Теорема 6.** Пусть  $\varphi \in \text{Form}$ .

1. Если  $\varphi \in \text{Prop}$ , то  $\text{Sub}(\varphi) = \{\varphi\}$ .
2. Если  $\varphi = (\theta \circ \chi)$ , где  $\{\theta; \chi\} \subseteq \text{Form}$  и  $\circ \in \{\rightarrow; \wedge; \vee\}$ , то

$$\text{Sub}(\varphi) = \text{Sub}(\theta) \cup \text{Sub}(\chi) \cup \{\varphi\}.$$

3. Если  $\varphi = \neg\theta$ , где  $\theta \in \text{Form}$ , то

$$\text{Sub}(\varphi) = \text{Sub}(\theta) \cup \{\varphi\}.$$

**Доказательство.**

1. Очевидно.

2.

Непонятно. TODO

3.

Непонятно. TODO

□

### 0.3 Семантика пропозициональной классической логики

**Определение 8.** Под *оценкой* мы будем понимать произвольную функцию из  $\text{Prop}$  в  $2$  (т.е. в  $\{0; 1\}$ ). Интуитивно  $0$  — «ложь», а  $1$  — «правда».

**Теорема 7.** Пусть дана случайная  $v : \text{Prop} \rightarrow 2$ . Тогда существует единственная  $v^* : \text{Form} \rightarrow 2$ , которая удовлетворяет следующим свойствам:

1.  $\forall p \in \text{Prop} \quad v^*(p) = 1 \iff v(p) = 1;$
2.  $\forall \{\varphi; \psi\} \subseteq \text{Form} \quad v^*(“(\varphi \rightarrow \psi)”) = 1 \iff v^*(\varphi) = 0 \vee v^*(\psi) = 1;$
3.  $\forall \{\varphi; \psi\} \subseteq \text{Form} \quad v^*(“(\varphi \wedge \psi)”) = 1 \iff v^*(\varphi) = 1 \wedge v^*(\psi) = 1;$
4.  $\forall \{\varphi; \psi\} \subseteq \text{Form} \quad v^*(“(\varphi \vee \psi)”) = 1 \iff v^*(\varphi) = 1 \vee v^*(\psi) = 1;$
5.  $\forall \varphi \in \text{Form} \quad v^*(\neg \varphi) = 1 \iff v^*(\varphi) = 0.$

**Доказательство.**

TODO

□

**Определение 9.** Если для некоторой оценки  $v$  и формулы  $\varphi$  верно, что  $v^*(\varphi) = 1$ , то пишут  $v \models \varphi$ .

**Определение 10.** Формулу  $\varphi$  называют:

- *выполнимой*, если  $v \models \varphi$  для некоторой оценки  $v$ ;
- *общеизвестной* (или *тождественно истинной*, или *тавтологией*), если  $v \models \varphi$  для всякой оценки  $v$ .

*Замечание.* Очевидно, например, что

$$\varphi \text{ общеизвестна} \iff \neg \varphi \text{ не выполнима.}$$

**Теорема (Кук-Левин).** Проблема выполнимости для пропозициональной классической логики NP-полна.

**Определение 11.** Пусть  $\Gamma \subseteq \text{Form}$  и  $\varphi \in \text{Form}$ . Говорят, что  $\varphi$  *семантически следует* из  $\Gamma$ , если для любой оценки  $v$

$$(\forall \psi \in \Gamma \quad v \models \psi) \implies v \models \varphi.$$

Обозначение:  $\Gamma \models \varphi$ .

Вместо  $\emptyset \models \varphi$  обычно пишут  $\models \varphi$ .

*Замечание.* Очевидно, например, что

$$\models \varphi \iff \varphi \text{ общезначима.}$$

**Определение 12.** Формулы  $\varphi$  и  $\psi$  называются *семантически эквивалентными*, если  $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ .  
Обозначение:  $\varphi \equiv \psi$ .

*Пример 1.* Для любых  $\{\varphi; \psi; \chi\} \subseteq \text{Form}$ :

- $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \neg\varphi \vee \psi$ ;
- $(\varphi \vee \psi) \wedge \chi \equiv (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$ ;
- $(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \equiv (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$ ;
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ ;
- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ ;
- $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ .

**Упражнение 1.** Всякая формула семантически эквивалентна некоторой ДНФ.

## 0.4 Гильбертовское исчисление для пропозициональной классической логики

**Определение 13.** Рассмотрим следующие аксиомы:

- I1.  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ ;
- I2.  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ ;
- C1.  $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$ ;
- C2.  $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$ ;
- C3.  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$ ;
- D1.  $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ ;
- D2.  $\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$ ;
- D3.  $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$ ;
- N1.  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$ ;
- N2.  $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ ;
- N3.  $\varphi \vee \neg\varphi$ .

Также имеется ровно одно *правило вывода*, именуемое “*modus ponens*”:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{ (MP)}$$

Пусть  $\Gamma \subseteq \text{Form}$ . Вывод из  $\Gamma$  в данном гильбертовском исчислении — конечная последовательность

$$\varphi_0, \dots, \varphi_n$$

(где  $n \in \mathbb{N}$ ) элементов  $\text{Form}$ , что для каждого  $i \in \{0; \dots; n\}$  верно одно из следующих условий:

- $\varphi_i$  есть аксиома;
- $\varphi_i$  является элементом  $\Gamma$ ;
- существуют  $\{j; k\} \subseteq \{0; \dots; i-1\}$  такие, что  $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$ .

При этом  $\varphi_n$  называется *заключением* рассматриваемого вывода, а элементы  $\Gamma$  — его *гипотезами*.

Для  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$  запись  $\Gamma \vdash \varphi$  означает, что существует вывод из  $\Gamma$  с заключением  $\varphi$ . Вместо  $\emptyset \vdash \varphi$  обычно пишут  $\vdash \varphi$ .

**Лемма 8.**

1. **Монотонность.** Если  $\Gamma \subseteq \Delta$  и  $\Gamma \vdash \varphi$ , то  $\Delta \vdash \varphi$ .
2. **Транзитивность.** Если для всякого  $\psi \in \Gamma$  верно  $\Delta \vdash \psi$  и  $\Gamma \vdash \varphi$ , то  $\Delta \vdash \varphi$ .
3. **Компактность.** Если  $\Gamma \vdash \varphi$ , то для некоторого конечного  $\Delta \subseteq \Gamma$  верно  $\Delta \vdash \varphi$ .

**Доказательство.**

1. Рассматривая вывод  $\varphi$  из  $\Gamma$ , сиюминутно получаем вывод  $\varphi$  из  $\Delta$ .
2. Возьмём вывод  $\varphi$  из  $\Gamma$ . Рассмотрим все использованные утверждения  $\Gamma$  в этом выводе; получим конечное множество  $\Gamma'$ . Далее для всякого  $\psi \in \Gamma'$  рассмотрим вывод  $\psi$  из  $\Delta$ , сотрём  $\psi$  на конце этого вывода и припишем его в начало ранее рассмотренного вывода  $\varphi$ . Тогда несложно понять, что мы получаем вывод  $\varphi$  из  $\Delta$ .
3. Хватает просто взять в качестве  $\Delta$  множество всех формул из  $\Gamma$ , использованных в каком-то конкретном выводе  $\varphi$  из  $\Gamma$ . Тогда очевидно, что  $\Delta$  конечно, а рассмотренный вывод станет выводом  $\varphi$  из  $\Delta$ .

□

*Пример 2.* Покажем, что  $\vdash \varphi \vee \psi \rightarrow \psi \vee \varphi$ :

- |   |              |
|---|--------------|
| 1. $(\varphi \rightarrow \psi \vee \varphi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \psi \vee \varphi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \psi \vee \varphi))$ | D3           |
| 2. $\varphi \rightarrow \psi \vee \varphi$  | D2           |
| 3. $\psi \rightarrow \psi \vee \varphi$   | D1           |
| 4. $(\psi \rightarrow \psi \vee \varphi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \psi \vee \varphi)$   | из 2 и 1; МР |
| 5. $\varphi \vee \psi \rightarrow \psi \vee \varphi$  | из 3 и 4; МР |

*Пример 3.* Покажем, что  $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \psi \vee \varphi$ :

- |   |              |
|---|--------------|
| 1. $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi \wedge \varphi)$ | C3           |
| 2. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$                       | C2           |
| 3. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$                    | C1           |
| 4. $\varphi \wedge \psi$  | гипотеза     |
| 5. $\psi$   | из 4 и 2; МР |
| 6. $\varphi$  | из 4 и 3; МР |
| 7. $\varphi \rightarrow \psi \wedge \varphi$                    | из 5 и 1; МР |
| 8. $\psi \wedge \varphi$  | из 6 и 7; МР |

**Лемма 9.**  $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ .

**Доказательство.**

- |    |   |          |
|----|---|----------|
| 1. | $(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ | I2       |
| 2. | $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$   | I1       |
| 3. | $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$   | I1       |
| 4. | $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$   | из 2 и 1 |
| 5. | $\varphi \rightarrow \varphi$   | из 3 и 4 |

□

*Замечание 1.* Важно, что для доказательства были использованы только I1, I2 и МР.

**Теорема 10** (о дедукции в гильбертовском исчислении). *Для любых  $\Gamma \cup \{\varphi; \psi\} \subseteq \text{Form}$  верно, что*

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

**Доказательство.**

$\Leftarrow$ ) Пусть  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ . Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\varphi_0, \dots, \varphi_n$$

из  $\Gamma$ , где  $\varphi_n = \varphi \rightarrow \psi$ . Тогда несложно убедиться, что

$$\varphi_0, \dots, \varphi_n, \varphi, \psi$$

будет выводом  $\psi$  из  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ . Стало быть,  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ .

$\Rightarrow$ ) Пусть  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ . Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\psi_0, \dots, \psi_n$$

из  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ , где  $\psi_n = \psi$ . Покажем по полной индукции по  $i$ , что  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_i$ .

Рассмотрим возможные случаи.

– Пусть  $\psi_i$  — аксиома или элемент  $\Gamma$ . Тогда

- |    |   |                             |
|----|---|-----------------------------|
| 1. | $\psi_i \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_i)$ | I2                          |
| 2. | $\psi_i$  | гипотеза / элемент $\Gamma$ |
| 3. | $\varphi \rightarrow \psi_i$                      | из 2 и 1                    |

будет выводом из  $\emptyset$  или  $\Gamma$  соответственно. Стало быть,  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_i$ .

– Пусть  $\psi_i = \varphi$ . По лемме 9 мы имеем, что  $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ . Стало быть,  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$ .

– Пусть  $\psi_i$  получено из предыдущих  $\psi_j$  и  $\psi_k = \psi_j \rightarrow \psi_i$  по МР. Тогда можно построить следующий “квазивывод” из  $\Gamma$ :

- |    |   |                        |
|----|---|------------------------|
| 1. | $(\varphi \rightarrow (\psi_j \rightarrow \psi_i)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi_j) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_i))$ | I2                     |
| 2. | $\varphi \rightarrow (\psi_j \rightarrow \psi_i)$   | предположение индукции |
| 3. | $\varphi \rightarrow \psi_j$  | предположение индукции |
| 4. | $(\varphi \rightarrow \psi_j) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_i)$   | из 2 и 1               |
| 5. | $\varphi \rightarrow \psi_i$  | из 3 и 4               |

Стало быть,  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_i$ .



В частности, при  $i := n$  мы имеем, что  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_n$ , т.е.  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .

□

*Замечание 2.* Важно, что для доказательства были использованы только I1, I2 и MP.

**Определение 14.** Для удобства введём обозначения

$$\top := p_\star \rightarrow p_\star \quad \text{и} \quad \perp := \neg \top,$$

где  $p_\star$  — фиксированная пропозициональная константа.

**Следствие 10.1.** Для любых  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \vdash \bigwedge_{i=1}^n \psi_i \rightarrow \varphi \text{ для некоторых } \{\psi_1; \dots; \psi_n\} \subseteq \Gamma.$$

(В случае  $n = 0$  соответствующая конъюнкция отождествляется с  $\top$ .)

**Доказательство.** Заметим, что для всяких  $\{\psi_1; \dots; \psi_n; \varphi\} \subseteq \Gamma$ .

$$\vdash \bigwedge_{i=1}^n \psi_i \rightarrow \varphi \iff \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \psi_i \right\} \vdash \varphi$$

и

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \{\psi_1; \dots; \psi_n\} \vdash \varphi \text{ для некоторых } \{\psi_1; \dots; \psi_n\} \subseteq \Gamma.$$

Соответственно нужно лишь показать, что

$$\{\psi_1; \dots; \psi_n\} \vdash \varphi \iff \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \psi_i \right\} \vdash \varphi$$

По C1 и C2 имеем, что  $\{\bigwedge_{i=1}^n \psi_i\} \vdash \{\psi_i\}_{i=1}^n$ , а по C3 — что  $\{\psi_i\}_{i=1}^n \vdash \{\bigwedge_{i=1}^n \psi_i\}$ . Из транзитивности  $\vdash$  получаем искомый равносильный переход. □

**Лемма 11.** Всякая аксиома гильбертовского исчисления общезначима.

**Теорема 12** (о корректности  $\models$ ). Для всяких  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi$$

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma \vdash \varphi$ . Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n$$

$\varphi$  из  $\Gamma$ . Рассмотрим произвольную оценку  $v$  такую, что  $v \models \psi$  для всех  $\psi \in \Gamma$ . Покажем по индукции по  $i \in \{0; \dots; n\}$ , что  $v \models \varphi_i$ . Для этого рассмотрим следующие случаи:

- Если  $\varphi_i$  — аксиома, то  $\models \varphi_i$ , а потому  $v \models \varphi_i$ .
- Если  $\varphi_i$  — элемент  $\Gamma$ , то тогда, очевидно,  $v \models \varphi_i$ .
- Если  $\varphi_i$  получается из предшествующих  $\varphi_j$  и  $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$  по MP. Ввиду предположения индукции,

$$v \models \varphi_j \quad \text{и} \quad v \models \varphi_j \rightarrow \varphi_i,$$

откуда немедленно следует  $v \models \varphi_i$ .

В частности при  $i := n$  мы имеем  $v \Vdash \varphi_n$ , т.е.  $v \Vdash \varphi$ .

Таким образом  $\Gamma \models \varphi$ . □

**Определение 15.**  $\Gamma \subseteq \text{Form}$  называется *простой теорией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- $\Gamma \neg\text{Form}$ ;
- $\{\varphi \in \text{Form} \mid \Gamma \vdash \varphi\} \subseteq \Gamma$ ;
- для любого  $\varphi \vee \psi \in \Gamma$  верно, что  $\varphi \in \Gamma$  или  $\psi \in \Gamma$ .

**Лемма 13.** Пусть  $\Gamma$  — простая теория. Тогда для любых  $\{\varphi; \psi\} \subseteq \text{Form}$ :

$$\begin{aligned} \neg\varphi \in \Gamma & \iff \varphi \notin \Gamma; \\ \varphi \wedge \psi \in \Gamma & \iff \varphi \in \Gamma \text{ и } \psi \in \Gamma; \\ \varphi \vee \psi \in \Gamma & \iff \varphi \in \Gamma \text{ или } \psi \in \Gamma; \\ \varphi \rightarrow \psi \in \Gamma & \iff \varphi \notin \Gamma \text{ или } \psi \in \Gamma. \end{aligned}$$

**Доказательство.**

$\neg, \Rightarrow$ ) Пусть  $\neg\varphi \in \Gamma$ . Предположим, что  $\varphi \in \Gamma$ . Рассмотрим всякое  $\psi \in \text{Form}$ .

- |    |  |          |
|----|--|----------|
| 1. | $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ | N2       |
| 2. | $\neg\varphi$  | гипотеза |
| 3. | $\varphi$  | гипотеза |
| 4. | $\varphi \rightarrow \psi$                           | из 2 и 1 |
| 5. | $\psi$   | из 3 и 4 |

То есть  $\Gamma \vdash \psi$ , а значит  $\Gamma \vdash \text{Form}$ . Следовательно по построению  $\Gamma = \text{Form}$  — противоречие. Значит  $\varphi \notin \Gamma$ .

$\neg, \Leftarrow$ ) Пусть  $\varphi \notin \Gamma$ . Поскольку  $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ , тем более  $\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi$ , то  $\varphi \vee \neg\varphi \in \Gamma$ , откуда по построению  $\neg\varphi \in \Gamma$ .

$\wedge, \Rightarrow$ ) Пусть  $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ . Используя C1 и C2, получаем, что  $\Gamma \vdash \varphi$  и  $\Gamma \vdash \psi$ , следовательно  $\varphi \in \Gamma$  и  $\psi \in \Gamma$ .

$\wedge, \Leftarrow$ ) Пусть  $\varphi \in \Gamma$  и  $\psi \in \Gamma$ . Используя C3, получаем, что  $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ , а следовательно  $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ .

$\vee, \Rightarrow$ ) Пусть  $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ . Тогда по построению  $\Gamma$  имеем  $\varphi \in \Gamma$  или  $\psi \in \Gamma$ .

$\vee, \Leftarrow$ ) Пусть  $\varphi \in \Gamma$  или  $\psi \in \Gamma$ . Тогда применяя D1 или D2, получаем, что  $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ , следовательно  $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ .

$\rightarrow, \Rightarrow$ ) Пусть  $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ . Следовательно если  $\varphi \in \Gamma$ , то  $\Gamma \vdash \psi$ , т.е.  $\psi \in \Gamma$ . Таким образом  $\varphi \notin \Gamma$  или  $\psi \in \Gamma$ .

$\rightarrow, \Leftarrow$ ) Пусть  $\varphi \notin \Gamma$  или  $\psi \in \Gamma$ . В первом случае  $\neg\varphi \in \Gamma$ , откуда с помощью N2 получаем  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ , а значит  $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ . Во втором случае  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$  можно получить с помощью I1.

□

**Лемма 14** (о расширении, aka Линдебаума). Пусть  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$  таковы, что  $\Gamma \not\vdash \varphi$ . Тогда существует простая теория  $\Gamma' \supseteq \Gamma$ , что  $\Gamma' \not\vdash \varphi$ .

**Доказательство.** Ясно, что  $\text{Form}$  счётно. Поэтому его элементы можно расположить в последовательность  $(\psi_n)_{n=0}^\infty$  (т.е.  $\text{Form} = \{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ ). Теперь определим последовательность  $(\Gamma_n)_{n=0}^\infty$  подмножеств  $\text{Form}$  по рекурсии следующим образом.

- Если  $n = 0$ , то  $\Gamma_n = \Gamma$ .
- Если  $n = m + 1$  и  $\Gamma_m \cup \{\psi_m\} \vdash \varphi$ , то  $\Gamma_n := \Gamma_m$ .
- Если  $n = m + 1$  и  $\Gamma_m \cup \{\psi_m\} \not\vdash \varphi$ , то  $\Gamma_n := \Gamma_m \cup \{\psi_m\}$ .

По построению мы имеем  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots$ . Кроме того,  $\Gamma_n \not\vdash \varphi$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Возьмём

$$\Gamma' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

Заметим следующее.

- Безусловно  $\Gamma \subseteq \Gamma'$ .
- $\Gamma' \not\vdash \varphi$ . Действительно, иначе есть конечное  $\Delta \subseteq \Gamma'$ , что  $\Delta \vdash \varphi$ . Следовательно есть  $\Gamma_n \supseteq \Delta$ , т.е.  $\Gamma_n \vdash \varphi$  — противоречие с определением  $\Gamma_n$ .
- Для всякого  $\psi \in \text{Form}$

$$\psi \notin \Gamma' \implies \Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \varphi$$

Действительно,  $\psi = \psi_n$  для некоторого  $n$ . Тогда из  $\psi \notin \Gamma'$  следует, что  $\Gamma_n \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ , и следовательно  $\Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ .

Проверим, что  $\Gamma'$  — простая теория.

- Из  $\Gamma' \not\vdash \varphi$  следует, что  $\Gamma' \neq \text{Form}$ .
- Пусть  $\psi \notin \Gamma'$ . Тогда из того, что  $\Gamma' \not\vdash \varphi$  и  $\Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \varphi$  следует, что  $\Gamma' \not\vdash \psi$ .
- Пусть  $\theta \notin \Gamma'$  и  $\chi \notin \Gamma'$ . Тогда  $\Gamma' \cup \{\theta\} \vdash \varphi$  и  $\Gamma' \cup \{\chi\} \vdash \varphi$ . Следовательно  $\Gamma' \vdash \theta \rightarrow \varphi$  и  $\Gamma' \vdash \chi \rightarrow \varphi$ . Тогда по ДЗ имеем, что  $\Gamma' \vdash \theta \vee \chi \rightarrow \varphi$ , т.е.  $\Gamma' \cup \{\theta \vee \chi\} \vdash \varphi$ , следовательно  $\theta \vee \chi \notin \Gamma'$ .

Таким образом  $\Gamma'$  — простая теория, обладающая необходимыми свойствами.  $\square$

**Доказательство для любой мощности  $\text{Pgor}$ .** Пусть  $\kappa := |\text{Pgor}|$ . Ясно, что  $|\text{Form}| = \kappa$ . Поэтому элементы  $\text{Form}$  можно расположить в трансфинитную последовательность длины  $\kappa$ :

$$\langle \psi_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$$

т.е.  $\text{Form} = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$ . Определим  $\langle \Gamma_\alpha \rangle_{\alpha \in \kappa}$  по трансфинитной рекурсии следующим образом.

- Если  $\alpha = 0$ , то  $\Gamma_\alpha := \Gamma$ .
- Если  $\alpha = \beta + 1$  и  $\Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\} \vdash \psi$ , то  $\Gamma_\alpha := \Gamma_\beta$ .
- Если  $\alpha = \beta + 1$  и  $\Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\} \not\vdash \psi$ , то  $\Gamma_\alpha := \Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\}$ .
- Если  $\alpha$  — предельный ординал, то  $\Gamma_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \Gamma_\beta$ .

По построению мы имеем  $\Gamma_\beta \subseteq \Gamma_\alpha$  для всяких  $\beta \in \alpha \in \kappa$ . Кроме того,  $\Gamma_\alpha \not\vdash \varphi$  для всех  $\alpha \in \kappa$ . Возьмём

$$\Gamma' := \bigcup_{\alpha \in \kappa} \Gamma_\alpha$$

Заметим следующее.

- Безусловно  $\Gamma \subseteq \Gamma'$ .
- $\Gamma' \not\vdash \varphi$ . Действительно, иначе есть конечное  $\Delta \subseteq \Gamma'$ , что  $\Delta \vdash \varphi$ . Следовательно есть  $\Gamma_\alpha \supseteq \Delta$ , т.е.  $\Gamma_\alpha \vdash \varphi$  — противоречие с определением  $\Gamma_\alpha$ .
- Для всякого  $\psi \in \text{Form}$

$$\psi \notin \Gamma' \implies \Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \varphi$$

Действительно,  $\psi = \psi_\alpha$  для некоторого  $n$ . Тогда из  $\psi \notin \Gamma'$  следует, что  $\Gamma_\alpha \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ , и следовательно  $\Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ .

Проверим, что  $\Gamma'$  — простая теория.

- Из  $\Gamma' \not\vdash \varphi$  следует, что  $\Gamma' \neq \text{Form}$ .
- Пусть  $\psi \notin \Gamma'$ . Тогда из того, что  $\Gamma' \not\vdash \varphi$  и  $\Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \varphi$  следует, что  $\Gamma' \not\vdash \psi$ .
- Пусть  $\theta \notin \Gamma'$  и  $\chi \notin \Gamma'$ . Тогда  $\Gamma' \cup \{\theta\} \vdash \varphi$  и  $\Gamma' \cup \{\chi\} \vdash \varphi$ . Следовательно  $\Gamma' \vdash \theta \rightarrow \varphi$  и  $\Gamma' \vdash \chi \rightarrow \varphi$ . Тогда по ДЗ имеем, что  $\Gamma' \vdash \theta \vee \chi \rightarrow \varphi$ , т.е.  $\Gamma' \cup \{\theta \vee \chi\} \vdash \varphi$ , следовательно  $\theta \vee \chi \notin \Gamma'$ .

Таким образом  $\Gamma'$  — простая теория, обладающая необходимыми свойствами.  $\square$

*Пример 4.* Пусть  $v$  — оценка. Рассмотрим

$$\Gamma_v := \{\varphi \in \text{Form} \mid v \models \varphi\}$$

Легко убедиться, что  $\Gamma_v$  — простая теория.

**Определение 16.** Для всякой простой теории  $\Gamma$  определим оценку

$$v_\Gamma(p) = \begin{cases} 1 & \text{если } p \in \Gamma \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Иначе говоря,  $v_\Gamma$  — характеристическая функция для  $\text{Prop} \cap \Gamma$ .

**Лемма 15.** Пусть  $\Gamma$  — простая теория. Тогда для всякой  $\varphi \in \text{Form}$

$$v_\Gamma \models \varphi \iff \varphi \in \Gamma$$

**Доказательство.** Докажем это по полной индукции по  $|\varphi|$ .

**Шаг.** Рассмотрим случаи.

- $\varphi \in \text{Prop}$ . В таком случае доказываемое утверждение очевидно следует из определения  $v_\Gamma$ .
- $\varphi = (\theta \rightarrow \chi)$ .

$$v_\Gamma \models \varphi \iff v_\Gamma \not\models \theta \vee v_\Gamma \models \chi \iff \theta \notin \Gamma \vee \chi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$$

- $\varphi = (\theta \wedge \chi)$ .

$$v_\Gamma \Vdash \varphi \iff v_\Gamma \Vdash \theta \wedge v_\Gamma \Vdash \chi \iff \theta \in \Gamma \wedge \chi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$$

- $\varphi = (\theta \vee \chi)$ .

$$v_\Gamma \Vdash \varphi \iff v_\Gamma \Vdash \theta \vee v_\Gamma \Vdash \chi \iff \theta \in \Gamma \vee \chi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$$

- $\varphi = \neg\theta$ .

$$v_\Gamma \Vdash \varphi \iff v_\Gamma \nVdash \theta \iff \theta \notin \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$$

□

**Теорема 16** (о сильной полноте  $\Vdash$ ). *Для любых  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$*

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi$$

**Доказательство.**

$\Rightarrow$ ) См. теорему о корректности.

$\Leftarrow$ ) Допустим, что  $\Gamma \nVdash \varphi$ . Как нам известно найдётся простая теория  $\Gamma' \supseteq \Gamma$ , что  $\Gamma' \nVdash \varphi$ . Очевидно,  $\varphi \notin \Gamma'$ . Следовательно  $v_{\Gamma'} \Vdash \psi$  для всех  $\psi \in \Gamma'$ , но  $v_{\Gamma'} \nVdash \varphi$ . В итоге,  $\Gamma' \nVdash \varphi$ , и тем более  $\Gamma \nVdash \varphi$ .

□

**Следствие 16.1** (теорема о слабой полноте  $\vdash$ ). *Для любой  $\varphi \in \Gamma$*

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi$$

**Следствие 16.2** (теорема о компактности  $\models$ ). *Для любых  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$*

$$\Gamma \models \varphi \iff \Delta \models \varphi \text{ для некоторого конечного } \Delta \subseteq \Gamma.$$

## 0.5 Структуры

**Определение 17.** *Сигнатура* — четвёрка вида

$$\sigma = \langle \text{Pred}_\sigma, \text{Func}_\sigma, \text{Const}_\sigma, \text{arity}_\sigma \rangle$$

где  $\text{Pred}_\sigma, \text{Func}_\sigma, \text{Const}_\sigma$  — попарно непересекающиеся множества, а  $\text{arity}_\sigma$  — функция из  $\text{Pred}_\sigma \cup \text{Func}_\sigma$  в  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Элементы  $\text{Pred}_\sigma, \text{Func}_\sigma, \text{Const}_\sigma$  называются соответственно *предикатными, функциональными и константными символами*  $\sigma$ .

Для данного символа  $\varepsilon \in \text{Pred}_\sigma \cup \text{Func}_\sigma$  число  $\text{arity}(\varepsilon)$  называют *его местностью, арностью или валентностью*.

Когда из контекста понятно, о какой сигнатуре идёт речь, то индекс  $\cdot_\sigma$  может опускаться.

В дальнейшем при записи сигнатур нами будет допускаться определённая свобода. Так, если

$$\text{Pred}_\sigma = \{P_1; \dots; P_i\}, \quad \text{Func}_\sigma = \{f_1; \dots; f_j\} \quad \text{и} \quad \text{Const}_\sigma = \{c_1; \dots; c_j\},$$

то  $\sigma$  удобно представить как

$$\langle P_1^{n_1}, \dots, P_i^{n_i}; f_1^{m_1}, \dots, f_j^{m_j}; c_1, \dots, c_k \rangle,$$

где  $n_1, \dots, n_i$  и  $m_1, \dots, m_j$  суть местности соответственно  $P_1, \dots, P_i$  и  $f_1, \dots, f_j$ .

*Пример 5.* Сигнатура (строгих) ЧУМ —  $\langle <^2 \rangle$ , абелевых групп —  $\langle =^2; +^2; -^1; 0 \rangle$ .

*Замечание.* Неформально говоря, элементы  $\text{Pred}_\sigma$  играют роль “отношений” (например: равенство “=”, упорядоченность “<” или “ $\leq$ ”, отношение делимости “|” или “:”; при этом отношения можно брать не только на парах элементов),  $\text{Func}_\sigma$  — роль функций и операторов (например: сложение (двухместное) “+”, умножение (двухместное) “.”, унарный минус aka отрицание (унарное) “-”), а  $\text{Const}_\sigma$  — роль глобальных констант (например: нейтральные по сложению “0” и умножению “1” элементы колец, пространство векторов  $V_A$  в аффинном пространстве).

Уточнить про роль константных символов.

**Определение 18.** Пусть дана сигнатура  $\sigma$ .  $\sigma$ -структура — пара вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_{\mathfrak{A}} \rangle$$

где  $A$  — непустое множество, а  $I_{\mathfrak{A}}$  — функция с областью определения  $\text{Pred}_\sigma \cup \text{Func}_\sigma \cup \text{Const}_\sigma$ , что:

- для любого  $n$ -местного  $P \in \text{Pred}_\sigma$  верно  $I_{\mathfrak{A}}(P) \subseteq A^n$ ;
- для любого  $m$ -местного  $f \in \text{Func}_\sigma$  верно  $I_{\mathfrak{A}}(f) : A^m \rightarrow A$ ;
- для любого  $c \in \text{Const}_\sigma$  верно  $I_{\mathfrak{A}}(c) \in A$ .

При этом  $A$  называется *носителем* или *универсумом*  $\mathfrak{A}$ , а  $I_{\mathfrak{A}}$  — *интерпретацией*  $\sigma$  в  $\mathfrak{A}$ . Вместо  $I_{\mathfrak{A}}(P)$ ,  $I_{\mathfrak{A}}(f)$  и  $I_{\mathfrak{A}}(c)$  часто пишут соответственно  $P^{\mathfrak{A}}$ ,  $f^{\mathfrak{A}}$  и  $c^{\mathfrak{A}}$ .

Кроме того, если  $\sigma$  представляется как

$$\langle P_1^{n_1}, \dots, P_i^{n_i}; f_1^{m_1}, \dots, f_j^{m_j}; c_1, \dots, c_k \rangle,$$

то  $\mathfrak{A}$  удобно представить как

$$\langle A; P_1^{\mathfrak{A}}, \dots, P_i^{\mathfrak{A}}; f_1^{\mathfrak{A}}, \dots, f_j^{\mathfrak{A}}; c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_k^{\mathfrak{A}} \rangle.$$

Более того, для некоторых стандартных структур  $\mathfrak{A}$  даже индекс  $^{\mathfrak{A}}$  может опускаться, хоть это и чревато некоторой путаницей.

*Замечание.* В предыдущем семестре для ЧУМ мы использовали запись  $\langle A, <_A \rangle$ , но аккуратнее было бы  $\mathfrak{A} = \langle A, <_{\mathfrak{A}} \rangle$ ; вместе с тем, очевидно, далеко не всякая структура в сигнатуре ЧУМ является ЧУМ.

*Пример 6.* Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma := \langle =^2; s^1, +^2, \cdot^2; 0 \rangle.$$

Обозначим через  $\mathfrak{N}$   $\sigma$ -структуру с носителем  $\mathbb{N}$ , что:

- $=^{\mathfrak{N}}$  — это отношение равенства на  $\mathbb{N}$ ;
- $s^{\mathfrak{N}}$  — это функция последователя на  $\mathbb{N}$ ;
- $+^{\mathfrak{N}}$  — это обычная функция сложения на  $\mathbb{N}$ ;
- $\cdot^{\mathfrak{N}}$  — это обычная функция умножения на  $\mathbb{N}$ ;
- $0^{\mathfrak{N}}$  — это настоящий ноль из  $\mathfrak{N}$ .

Эту структуру называют *стандартной моделью арифметики*.

*Пример 7.* Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma := \langle =^2; +^2, -^1, \cdot^2; 0, 1 \rangle.$$

Её называют *сигнатурой колец*, разумеется. Обозначим

$$\mathfrak{Z} := \begin{array}{l} \sigma\text{-структура с носителем } \mathbb{Z}, \text{ в которой все символы} \\ \sigma \text{ интерпретируются естественным образом.} \end{array}$$

В частности,  $-^3$  — это функция взятия обратного по сложению над  $\mathbb{Z}$ . По аналогии вместо  $\mathbb{Z}$  можно было бы использовать:

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  aka  $\mathbb{Z}_n$ , т.е. множество всех целых чисел по модулю  $n$ ;
- $M_n(\mathbb{R})$ , т.е. множество всех матриц порядка  $n$  над  $\mathbb{R}$ ;
- $\mathbb{Q}x$ , т.е. множество всех многочленов от  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{Q}$ .

*Пример 8.* Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma := \langle =^2, \cong^4, B^3 \rangle.$$

Обозначим через  $\mathfrak{G}$   $\sigma$ -структуру с носителем  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , что:

- $=^{\mathfrak{G}}$  — это отношение равенства на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ;
- $\cong^{\mathfrak{G}}$  определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \cong^{\mathfrak{G}} \iff \text{отрезки } r_1r_2 \text{ и } r_3r_4 \text{ равны};$$

- $B^{\mathfrak{G}}$  определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3) \in B^{\mathfrak{G}} \iff r_2 \text{ лежит между } r_1 \text{ и } r_3 \text{ на прямой.}$$

Её можно назвать *стандартной моделью геометрии*.

*Пример 9.* Пусть  $\sigma$  — сигнатура из предыдущего примера. Возьмём

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

Обозначим через  $\mathfrak{H}$   $\sigma$ -структуру с носителем  $\mathbb{H}$ , что:

- $=^{\mathfrak{H}}$  — это отношение равенства на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ;
- $\cong^{\mathfrak{H}}$  определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \cong^{\mathfrak{H}} \iff \begin{array}{l} \text{отрезки } r_1r_2 \text{ и } r_3r_4 \text{ равны} \\ \text{в смысле метрики Пуанкаре;} \end{array}$$

- $B^{\mathfrak{H}}$  определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3) \in B^{\mathfrak{H}} \iff \begin{array}{l} r_2 \text{ лежит между } r_1 \text{ и } r_3 \text{ на полуокружности} \\ \text{(или полупрямой), ортогональной вещественной оси.} \end{array}$$

Её называют *моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского*.

**Определение 19.** Пусть  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  — две  $\sigma$ -структуры. Гомоморфизм из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$  — такое отображение  $\xi : A \rightarrow B$ , что

1. для любого  $n$ -местного  $P \in \text{Pred}_\sigma$  и всех  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$

$$(a_1, \dots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \implies (\xi(a_1), \dots, \xi(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}};$$

2. для любого  $m$ -местного  $f \in \text{Pred}_\sigma$  и всех  $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$

$$\xi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m)) = f^{\mathfrak{B}}(\xi(a_1), \dots, \xi(a_m));$$

3. для любого  $c \in \text{Pred}_\sigma$

$$\xi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

**Лемма 17.** Композиция гомоморфизмов — гомоморфизм.

**Определение 20.** Вложение  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$  — инъективный гомоморфизм из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$  с усиленным до равносильности условием 1, т.е.

$$\xi^{-1}[P^{\mathfrak{B}}] = P^{\mathfrak{A}} \quad \text{для каждого } P \in \text{Pred}_\sigma.$$

**Лемма 18.** Композиция вложений — вложение.

**Определение 21.** Изоморфизм из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$  — сюръективное вложение  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$ .

Говорят, что  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  изоморфны, и пишут  $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ , если есть хоть какой-то изоморфизм из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$ .

**Лемма 19.** Композиция изоморфизмов — изоморфизм.

**Лемма 20.** Изоморфность — “отношение эквивалентности”, т.е.

1. для всякой структуры  $\mathfrak{A}$  верно

$$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A};$$

2. для всяких структур  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  верно

$$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A};$$

3. для всяких структур  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$  верно

$$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C} \implies \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}.$$

**Лемма 21.** Гомоморфизм  $\xi$  из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$  является изоморфизмом тогда и только тогда, когда есть обратный к нему, т.е. гомоморфизм  $\eta$  из  $\mathfrak{B}$  в  $\mathfrak{A}$ , что

$$\xi \circ \eta = \text{id}_B \quad \text{и} \quad \eta \circ \xi = \text{id}_A.$$

**Пример 10.** Рассмотрим нестрогие ЧУМ  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ , что:

- $A = B = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ;
- $\leq^{\mathfrak{A}}$  — это отношение делимости на  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ;
- $\leq^{\mathfrak{B}}$  — это обычный порядок на  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ .



Тогда

$$\lambda : A \rightarrow B, a \mapsto a$$

будет биективным гомоморфизмом из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$ , но даже не вложением.

*Пример 11.* Рассмотрим нестрогие ЧУМ  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ , что:

- $A = \mathbb{N}$  и  $B = \mathbb{P}$ ;
- $\leq^{\mathfrak{A}}$  — это обычный порядок на  $\mathbb{N}$ ;
- $\leq^{\mathfrak{B}}$  — это обычный порядок на  $\mathbb{P}$ .

Тогда

$$\lambda : A \rightarrow B, a \mapsto \text{“}a\text{-тое простое число”}$$

будет изоморфизмом из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$ .

*Пример 12.* Зафиксируем  $p \in \mathbb{P}$ . Рассмотрим группы  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ , что:

- $A = \mathbb{Z}$  и  $B = \mathbb{Z}_p$ ;
- $+\mathfrak{A}$  — это сложение на  $\mathbb{Z}$ ;
- $+\mathfrak{B}$  — это сложение на  $\mathbb{Z}_p$ .

Тогда

$$\lambda : A \rightarrow B, a \mapsto a \bmod p$$

будет сюръективным гомоморфизмом из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$ .

*Пример 13.* Рассмотрим группы  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ , что:

- $A = \mathbb{R}$  и  $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- $+\mathfrak{A}$  — это сложение на  $\mathbb{R}$ ;
- $+\mathfrak{B}$  — это умножение на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Тогда

$$\lambda : A \rightarrow B, a \mapsto 2^a$$

будет вложением  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$ .

**Определение 22.** *Автоморфизм*  $\mathfrak{A}$  — изоморфизм из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{A}$ .

Множество всех автоморфизмов  $\mathfrak{A}$  обозначается за  $\text{Aut}(\mathfrak{A})$ .

*Замечание.* Интуитивно автоморфизмы — абстрактный аналог симметрий.

Также над  $\text{Aut}(A)$  можно естественным образом задать структуру группы, где роль бинарной операции играет композиция.

*Пример 14.* Пусть  $\xi$  — произвольный автоморфизм стандартной модели  $\mathfrak{R}$  арифметики. Тогда

$$\xi(0) = 0, \quad \xi(1) = s^{\mathfrak{R}}(\xi(0)) = 1, \quad \xi(2) = s^{\mathfrak{R}}(s^{\mathfrak{R}}(\xi(0))) = 2, \dots$$

Значит  $\xi = \text{id}_{\mathbb{N}}$ . Стало быть,  $\text{Aut}(\mathfrak{R}) = \{\text{id}_{\mathbb{N}}\}$ .

*Пример 15.* Обозначим через  $\mathfrak{R}_<$  стандартный ЧУМ с носителем  $\mathbb{N}$ . Пусть  $\xi$  — произвольный автоморфизм  $\mathfrak{R}_<$ . Нетрудно понять, что:

$$\begin{aligned}\xi(\text{least}(\mathbb{N})) &= \text{least}(\mathbb{N}); \\ \xi(\text{least}(\mathbb{N} \setminus \{0\})) &= \text{least}(\mathbb{N} \setminus \{\xi(0)\}); \\ \xi(\text{least}(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})) &= \text{least}(\mathbb{N} \setminus \{\xi(0), \xi(1)\}); \\ &\vdots\end{aligned}$$

Отсюда мы получаем:

$$\begin{aligned}\xi(0) &= \text{least}(\mathbb{N}) = 0; \\ \xi(1) &= \text{least}(\mathbb{N} \setminus \{\xi(0)\}) = 1; \\ \xi(2) &= \text{least}(\mathbb{N} \setminus \{\xi(0), \xi(1)\}) = 2; \\ &\vdots\end{aligned}$$

Значит,  $\xi = \text{id}_{\mathbb{N}}$ . Стало быть,  $\text{Aut}(\mathfrak{R}_<) = \text{id}_{\mathbb{N}}$ .

*Пример 16* (со схемой решения). Обозначим через  $\mathfrak{D}$  нестрогий ЧУМ с носителем  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ , в котором  $\leq$  интерпретируется как отношение делимости. Заметим, что

- всякий автоморфизм  $\mathfrak{D}$  переводит элементы  $\mathbb{P}$  в элементы  $\mathbb{P}$ ;
- каждую биекцию из  $\mathbb{P}$  в  $\mathbb{P}$  можно единственным образом расширить до автоморфизма  $\mathfrak{D}$ .

Отсюда нетрудно получить, что  $\text{Aut}(\mathfrak{D})$  фактически состоит из перестановок  $\mathbb{P}$ , а точнее, из их расширений.

*Пример 17* (в качестве дополнительного упражнения). Для стандартной модели  $\mathfrak{G}$  геометрии всякий автоморфизм представим в виде композиции движения и гомотетии.

## 0.6 Язык кванторной классической логики (Quantifier Classic Logic, QCL)

**Определение 23.** Пусть (навсегда) зафиксировано некоторое счётное множество  $\text{Var}$ . Будем называть его элементы *предметными переменными* или просто *переменными*.

Пусть дана сигнатура  $\sigma$ . Алфавит  $\mathcal{L}_\sigma$  квантовой классической логики над  $\sigma$  состоит из элементов  $\text{Pred}_\sigma \cup \text{Func}_\sigma \cup \text{Const}_\sigma \cup \text{Var}$ , а также:

- символов связок: “ $\rightarrow$ ”, “ $\wedge$ ”, “ $\vee$ ” и “ $\neg$ ”,
- символов кванторов: “ $\forall$ ” и “ $\exists$ ”,
- и вспомогательных символов: “(”, “)” и “,”.

Для каждого  $x \in \text{Var}$  слова “ $\forall x$ ” и “ $\exists x$ ” называются *кванторами по  $x$* .

Обозначим за  $\text{Term}_\sigma$  наименьшее подмножество  $\mathcal{L}_\sigma^*$ , замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если  $x \in \text{Var}$ , то  $x \in \text{Term}_\sigma$ ;
- если  $c \in \text{Const}$ , то  $c \in \text{Term}_\sigma$ ;
- если  $f \in \text{Func}_\sigma$ ,  $\text{arity}_\sigma(f) = n$  и  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$ , то  $f(t_1, \dots, t_n) \in \text{Term}_\sigma$ .

Элементы  $\text{Term}_\sigma$  называются  $\sigma$ -термами.

*Пример 18.* Пусть  $\sigma$  — сигнатура стандартной модели арифметики. Тогда

$$+(s(+ (x, y)), \cdot (s(x), y))$$

является  $\sigma$ -термом, который удобнее записать как  $s(x + y) + s(x) \cdot y$ .

**Определение 24.** Обозначим за  $\text{Form}_\sigma$  наименьшее подмножество  $\mathcal{L}_\sigma^*$ , замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если  $P \in \text{Pred}_\sigma$ ,  $\text{arity}_\sigma(f) = n$  и  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$ , то  $f(t_1, \dots, t_n) \in \text{Form}_\sigma$ ;
- если  $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \text{Form}_\sigma$ , то  $\{(\Phi \rightarrow \Psi), (\Phi \wedge \Psi), (\Phi \vee \Psi), \neg \Phi\} \in \text{Form}_\sigma$ ;
- если  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$  и  $x \in \text{Var}$ , то  $\{\forall x \Phi, \exists x \Phi\} \in \text{Form}_\sigma$ .

Элементы  $\text{Form}_\sigma$  называются  $\sigma$ -формулами.

Под *атомарными  $\sigma$ -формулами*, или  *$\sigma$ -атомами*, понимают те, что не содержат ни символов связок ни символов кванторов. Множество всех  $\sigma$ -атомов обозначается за  $\text{Atom}_\sigma$ .

**Определение 25.** Для любого  $t \in \text{Term}_\sigma$  определим

$$\text{sub}(t) := \{s \in \text{Term}_\sigma \mid s \preceq t\}.$$

Элементы  $\text{sub}(t)$  называются *подтермами*  $t$ .

Для любого  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$  определим

$$\text{Sub}(\Phi) := \{\Psi \in \text{Form}_\sigma \mid \Psi \preceq \Phi\}.$$

Элементы  $\text{Sub}(\Phi)$  называются *подформулами*  $\Phi$ .

**Лемма 22.** Пусть  $\{s, t\} \subseteq \text{Term}_\sigma$  таковы, что  $t \sqsubseteq s$ . Тогда  $t = s$ .

**Теорема 23** (о единственности представления термов). Всякий  $t \in \text{Term}_\sigma \setminus (\text{Var} \cup \text{Const}_\sigma)$  можно единственным образом представить в виде

$$f(t_1, \dots, t_n),$$

где  $f \in \text{Func}_\sigma$ ,  $\text{arity}_\sigma(f) = n$  и  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$ .

**Лемма 24.** Пусть  $t \in \text{Term}_\sigma$  и  $f \in \text{Func}_\sigma$ . Тогда всякое вхождение  $f$  в  $t$  является началом вхождения некоторого подтерма.

**Теорема 25** (о подтермах). Пусть  $t \in \text{Term}_\sigma$ .

1. Если  $t \in \text{Var} \cup \text{Const}_\sigma$ , то  $\text{sub}(t) = \{t\}$ .
2. Если  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ , где  $f \in \text{Func}_\sigma$ ,  $\text{arity}_\sigma(f) = n$  и  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$ , то

$$\text{sub}(t) = \text{sub}(t_1) \cup \dots \cup \text{sub}(t_n) \cup \{t\}$$

**Теорема 26** (о единственности представления атомов). Всякий  $\Phi \in \text{Atom}_\sigma$  можно единственным способом представить в виде

$$P(t_1, \dots, t_n),$$

где  $P \in \text{Pred}_\sigma$ ,  $\text{arity}_\sigma(P) = n$  и  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$ .

**Лемма 27.** Пусть  $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \text{Form}_\sigma$  таковы, что  $\Phi \sqsubseteq \Psi$ . Тогда  $\Phi = \Psi$ .

**Теорема 28.** Всякую  $\Phi \in \text{Form}_\sigma \setminus \text{Atom}_\sigma$  можно единственным образом представить в виде

$$(\Theta \rightarrow \Omega), \quad (\Theta \wedge \Omega), \quad (\Theta \vee \Omega), \quad \neg\Theta, \quad \forall x \Theta \text{ или } \exists x \Theta,$$

где  $\{\Theta; \Omega\} \subseteq \text{Form}_\sigma$ .

**Лемма 29.** Пусть  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ . Тогда всякое вхождение “ $\neg$ ”, “ $($ ”, “ $\forall$ ” или “ $\exists$ ” в  $\Phi$  является началом вхождения некоторой подформулы.

**Теорема 30** (о подформулах). Пусть  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ .

1. Если  $\Phi \in \text{Atom}_\sigma$ , то  $\text{Sub}(\Phi) = \{\Phi\}$ .
2. Если  $\Phi = (\Theta \circ \Omega)$ , где  $\{\Theta, \Omega\} \subseteq \text{Form}_\sigma$  и  $\circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$ , то

$$\text{Sub}(\Phi) = \text{Sub}(\Theta) \cup \text{Sub}(\Omega) \cup \{\Phi\}.$$

3. Если  $\Phi = \neg\Theta$ , где  $\Theta \in \text{Form}_\sigma$ , то

$$\text{Sub}(\Phi) = \text{Sub}(\Theta) \cup \{\Phi\}.$$

4. Если  $\Phi = Qx \Theta$ , где  $x \in \text{Var}$ ,  $\Theta \in \text{Form}_\sigma$  и  $Q \in \{\forall, \exists\}$ , то

$$\text{Sub}(\Phi) = \text{Sub}(\Theta) \cup \{\Phi\}.$$

**Определение 26.** Пусть  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ ,  $x \in \text{Var}$  и  $Q \in \{\forall, \exists\}$ .

Каждое вхождение  $Qx$  в  $\Phi$  является началом вхождения некоторой подформулы, причём единственного. Его называют *областью действия* данного вхождения  $Qx$ .

Вхождение  $x$  в  $\Phi$  называется *связанным*, если оно входит в область действия какого-нибудь вхождения  $\forall x$  или  $\exists x$ , и *свободным* иначе.

Далее, говорят, что  $x$  является *свободной переменной* в  $\Phi$ , если у  $x$  есть хотя бы одно свободное вхождение в  $\Phi$ . Множество свободных переменных  $\Phi$  обозначается за  $\text{FV}(\Phi)$ .

Интуитивно элементы  $\text{FV}(\Phi)$  играют роль параметров  $\Phi$ . Запись  $\Phi(x_1, \dots, x_l)$  указывает на то, что  $\text{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_l\}$ .

Наконец, обозначим

$$\text{Sent}_\sigma := \{\Phi \in \text{Form}_\sigma \mid \text{FV}(\Phi) = \emptyset\}.$$

Элементы  $\text{Sent}_\sigma$  называют  $\sigma$ -предложениями, реже — замкнутыми  $\sigma$ -формулами. Они могут выступать в качестве нелогических аксиом.

**Пример 19.** Пусть  $\sigma$  — сигнатура арифметики. Рассмотрим  $\sigma$ -формулу

$$\Phi := \forall x \exists y x = y + 0 \cdot u \wedge \forall y \exists u x + u = y.$$

Тогда  $\text{FV}(\Phi) = \{u; x\}$ . Тут мы можем написать  $\Phi(u, x)$  или  $\Phi(x, u)$ ; также приемлемы “избыточные”  $\Phi(u, x, y)$  или  $\Phi(x, u, v)$  и т.п.

**Пример 20.** Пусть  $\sigma$  — сигнатура (строгих) ЧУМ. В таком случае под *аксиомами ЧУМ* понимают следующие предложения:

1.  $\forall x \neg(x < x)$ ;
2.  $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$ .

Интуитивно  $\sigma$ -структура является ЧУМ, если и только если она удовлетворяет этим аксиомам.

**Определение 27.** Пусть  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ ,  $x \in \text{Var}$  и  $t \in \text{Term}_\sigma$ . Обозначим

$$\Phi(x/t) := \begin{array}{c} \text{результат одновременной замены всех} \\ \text{свободных вхождений } x \text{ в } \Phi \text{ на } t. \end{array}$$

*Замечание.* Применение этой операции порой приводит к весьма нежелательным последствиям. Так,  $\sigma$ -формулы вида

$$\forall x \Phi \rightarrow \Phi(x/t)$$

кажутся истинными, но при

$$\sigma := \langle <^2 \rangle, \quad \Phi := \exists y x < y \quad \text{и} \quad t := y$$

мы получаем

$$\forall x \exists y x < y \rightarrow \exists y y < y.$$

Кроме того,  $\sigma$ -формулы вида

$$\Phi(x/t) \rightarrow \exists x \Phi$$

кажутся истинными, но при

$$\sigma := \langle =^2 \rangle, \quad \Phi := \forall y x = y \quad \text{и} \quad t := y$$

мы получаем

$$\forall y y = y \rightarrow \exists x \forall y x = y.$$

Поэтому с подстановками нужно быть аккуратнее.

**Определение 28.** Мы будем говорить, что  $t$  *свободен для (подстановки вместо)  $x$  в  $\Phi$* , если ни одно из свободных вхождений  $x$  в  $\Phi$  не находится в области действия квантора по переменной  $t$ .

*Замечание 3.* В частности, всякая переменная, не присутствующая в  $\Phi$ , является свободной для подстановки вместо всякой другой переменной в  $\Phi$ .

## 0.7 Семантика кванторной классической логики

**Определение 29.** *Означивание переменных в  $\mathfrak{A}$* , или просто *означивание в  $\mathfrak{A}$*  — функция из  $\text{Var}$  в  $A$ .

Каждое означивание  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$  можно расширить до  $\bar{\nu} : \text{Term}_\sigma \rightarrow A$  естественным образом:

1.  $\forall x \in \text{Var} \quad \bar{\nu}(x) = \nu(x);$
2.  $\forall c \in \text{Const}_\sigma \quad \bar{\nu}(c) = c^{\mathfrak{A}};$
3. Для всякого  $n$ -местного  $f \in \text{Func}_\sigma$  и всяких  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$

$$\bar{\nu}(“f(t_1, \dots, t_n)” ) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{\nu}(t_1), \dots, \bar{\nu}(t_n)).$$

В дальнейшем для любых  $x \in \text{Var}$  и  $a \in A$  через  $\nu_a^x$  будет обозначаться означивание

$$\nu_a^x(y) := \begin{cases} \nu(y) & \text{если } y \neq x \\ a & \text{если } y = x \end{cases}$$

**Определение 30.** Пусть дано означивание  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$ . Определим  $\mathfrak{A} \models \Phi[\nu]$  индукцией по построению  $\Phi$ :

1. для всякого  $n$ -местного предиката  $P \in \text{Pred}_\sigma$  и всяких  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$

$$\mathfrak{A} \models P(t_1, \dots, t_n)[\nu] \iff (\bar{\nu}(t_1), \dots, \bar{\nu}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}};$$

2. для всяких  $\{\Psi, \Theta\} \subseteq \text{Form}_\sigma$

$$\mathfrak{A} \models (\Psi \rightarrow \Theta)[\nu] \iff \mathfrak{A} \not\models \Psi[\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \models \Theta[\nu];$$

3. для всяких  $\{\Psi, \Theta\} \subseteq \text{Form}_\sigma$

$$\mathfrak{A} \models (\Psi \wedge \Theta)[\nu] \iff \mathfrak{A} \models \Psi[\nu] \text{ и } \mathfrak{A} \models \Theta[\nu];$$

4. для всяких  $\{\Psi, \Theta\} \subseteq \text{Form}_\sigma$

$$\mathfrak{A} \models (\Psi \vee \Theta)[\nu] \iff \mathfrak{A} \models \Psi[\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \models \Theta[\nu];$$

5. для всякого  $\Psi \in \text{Form}_\sigma$

$$\mathfrak{A} \models \neg \Psi[\nu] \iff \mathfrak{A} \not\models \Psi[\nu];$$

6. для всякого  $\Psi \in \text{Form}_\sigma$  и всякого  $x \in \text{Var}$

$$\mathfrak{A} \models \exists x \Psi[\nu] \iff \mathfrak{A} \models \Psi[\nu_a^x] \text{ для некоторого } a \in A;$$

7. для всякого  $\Psi \in \text{Form}_\sigma$  и всякого  $x \in \text{Var}$

$$\mathfrak{A} \models \forall x \Psi[\nu] \iff \mathfrak{A} \models \Psi[\nu_a^x] \text{ для всех } a \in A.$$

Когда  $\mathfrak{A} \models \Phi[\nu]$ , мы будем говорить, что  $\Phi$  истинно в  $\mathfrak{A}$  при  $\nu$ , или  $\mathfrak{A}$  удовлетворяет  $\Phi$  при  $\nu$ .

*Замечание 4.* (Не)верность  $\mathfrak{A} \models \Phi[\nu]$  не зависит от того, какие значения  $\nu$  сопоставляет элементам  $\text{Var} \setminus \text{FV}(\Phi)$ .

**Определение 31.** Если  $\Phi$  имеет вид  $\Phi(x_1, \dots, x_l)$ , т.е.  $\text{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_l\}$ , то вместо  $\mathfrak{A} \models \Phi[\nu]$  нередко пишут

$$\mathfrak{A} \models \Phi[x_1/\nu(x_1), \dots, x_l/\nu(x_l)],$$

или же

$$\mathfrak{A} \models \Phi[\nu(x_1), \dots, \nu(x_l)].$$

В частности, для  $\Phi \in \text{Sent}_\sigma$  обычно используется запись  $\mathfrak{A} \models \Phi$ .

Наконец, пусть  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$ . Говорят, что  $\mathfrak{A}$  является моделью  $\Gamma$ , и пишут  $\mathfrak{A} \models \Gamma$ , если  $\mathfrak{A} \models \Phi$  для всех  $\Phi \in \Gamma$ .

**Теорема 31.** Пусть  $\xi$  — изоморфизм  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ .

1. Для любого означивания  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$   $\nu \circ \xi$  является означиванием  $\mathfrak{B}$ .

2. Для каждого  $\sigma$ -терма  $t$  и любого означивания  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$

$$\overline{\nu \circ \xi}(t) = \xi(\bar{\nu}(t)),$$

$$\text{т.е. } \overline{\nu \circ \xi} = \bar{\nu} \circ \xi.$$

3. Для каждой  $\sigma$ -формулы  $\Phi$  и любого означивания  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \models \Phi[\nu] \iff \mathfrak{B} \models \Phi[\nu \circ \xi].$$

**Доказательство.**

TODO (А надо ли?)

1. Очевидно.
2. Очевидно получается из простой индукции по построению  $t$ .
3. Очевидно получается из простой индукции по построению  $\Phi$ .

□

**Определение 32.** Для произвольного класса  $\sigma$ -структур  $\mathcal{K}$  положим

$$\text{Th}(\mathcal{K}) := \{\Phi \in \text{Sent}_\sigma \mid \mathfrak{A} \models \Phi \text{ для всех } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}$$

Вместо  $\text{Th}(\{\mathfrak{A}\})$  обычно пишут  $\text{Th}(\mathfrak{A})$ . Говорят, что  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  *элементарно эквивалентны*, если  $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$ .

**Лемма 32.** Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

**Определение 33.** Пусть дана произвольная  $\sigma$ -структура  $\mathfrak{A}$ .

$S \subseteq A^l$  *определимо в  $\mathfrak{A}$* , если существует  $\sigma$ -формула  $\Phi(x_1, \dots, x_l)$ , что

$$S = \{\vec{a} \in A^l \mid \mathfrak{A} \models \Phi[\vec{a}]\};$$

в этом случае ещё говорят, что  $\Phi$  определяет  $S$  в  $\mathfrak{A}$ .

$\xi : A^l \rightarrow A$  *определима в  $\mathfrak{A}$* , если определим её график.  $a \in A$  *определим в  $\mathfrak{A}$* , если  $\{a\}$  определимо.

*Пример 21.* Отношение делимости на  $\mathbb{N}$  определимо в  $\mathfrak{N}$  посредством формулы

$$\Phi(x, y) := x \neq 0 \wedge \exists u \, x \cdot u = y,$$

а обычный строгий порядок на  $\mathbb{N}$  — посредством

$$\Psi(x, y) := \exists u \, (u \neq 0 \wedge x + u = y).$$

*Пример 22.* Функция последователя на  $\mathbb{N}$  определима в  $\mathfrak{N}_<$  посредством

$$x < y \wedge \neg \exists u \, (x < u \wedge u < y).$$

*Пример 23.* В стандартном кольце  $\mathfrak{Z}$  с носителем  $\mathbb{Z}$  будет определимо отношение “быть больше нуля”; тут можно использовать

$$\Phi(x) := x \neq 0 \wedge \exists u_1, u_2, u_3, u_4 \, (x = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2),$$

а потому обычный строгий порядок на  $\mathbb{Z}$  определим в  $\mathfrak{Z}$  посредством

$$\Psi(x, y) := \exists u \, (\Phi(u) \wedge x + u = y).$$

*Пример 24.* Обычный строгий порядок на  $\mathbb{R}$  определим в стандартном кольце  $\mathfrak{R}$  с носителем  $\mathbb{R}$  посредством

$$\Theta(x, y) := \exists u (u \neq 0 \wedge x + u^2 = y).$$

*Пример 25.* Рассмотрим стандартную модель  $\mathfrak{G}$  геометрии. В ней определимы отношения

- “ $x$  лежит на прямой  $yz$ ” посредством

$$\Phi(x, y, z) := B(x, y, z) \vee B(z, x, y) \vee B(y, z, x)$$

- и “прямые  $xx'$  и  $yy'$  параллельны” посредством

$$\Psi(x, x', y, y') := x \neq x' \wedge y \neq y' \wedge \neg \exists u (\Phi(u, x, x') \wedge \Phi(u, y, y')).$$

При этом аксиому о параллельности можно выразить так:

$$\text{Euclid}_5 := \forall x, y, z (x \neq y \wedge \neg \Phi(z, x, y) \rightarrow \forall u, v (\Psi(z, u, x, y) \wedge \Psi(z, v, x, y) \rightarrow \Phi(z, u, v)))$$

Она будет истина в  $\mathfrak{G}$ , но ложна в модели  $\mathfrak{H}$ .

*Пример 26* (без доказательства). Рассмотрим структуру  $\langle \mathbb{N}; |; s \rangle$ , где  $|$  интерпретируется как отношение делимости на  $\mathbb{N}$ . Ноль определим в этой структуре посредством

$$\Phi(x) := \neg x | x,$$

а отношение равенства на  $\mathbb{N}$  — посредством

$$\Psi(x, y) := (\Phi(x) \wedge \Phi(y)) \vee (x | y \wedge y | x).$$

Джулией Робинсон было доказано, что

функции сложения и умножения на  $\mathbb{N}$  определимы в  $\langle \mathbb{N}; |; s \rangle$ .

*Пример 27* (без доказательства). Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  обозначим

$$\text{supp}(n) := \text{множество всех простых делителей } n.$$

Гипотеза Эрдёша-Вудса заключается в следующем.

Найдётся такое  $N \in \mathbb{N}$ , что для любых  $i, j \in \mathbb{N}$  из

$$\text{supp}(i + n) = \text{supp}(j + n) \text{ для всех } n \in \{0, \dots, N\}$$

следует, что  $i = j$ .

Это известная открытая проблема.

Теперь рассмотрим  $\langle \mathbb{N}; \perp; s \rangle$ , где  $\perp$  интерпретируется как отношение взаимной простоты на  $\mathbb{N}$ . Джоном Вудсом было показано, что TFAE:

- отношение равенства на  $\mathbb{N}$  определимо в  $\langle \mathbb{N}; \perp; s \rangle$ ;
- функции сложения и умножения на  $\mathbb{N}$  определимы в  $\langle \mathbb{N}; =, \perp; s \rangle$ ;
- верна гипотеза Эрдёша-Вудса.

*Пример 28.* Известно, что



- всякое (вычислимо) перечислимое множество определимо в  $\mathfrak{R}$ ;
- всякая частичная вычислимая функция определима в  $\mathfrak{R}$ .

Например,  $f : n \mapsto 2^n$  оказывается определима в  $\mathfrak{R}$ .

Этот пример связан со знаменитыми теоремами Гёделя о неполноте “достаточно богатых систем”.

**Теорема 33.** Пусть  $S$  определимо в  $\mathfrak{A}$ . Тогда для любого  $\xi \in \text{Aut}(\mathfrak{A})$

$$\xi[S] \subseteq S,$$

т.е.  $S$  замкнуто относительно автоморфизмов  $\mathfrak{A}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Phi(x_1, \dots, x_l)$  — формула, задающая  $S$  в  $\mathfrak{A}$  и  $(a_1, \dots, a_l)$  — случайный элемент  $A^l$ . Из теоремы 31 следует, что

$$\mathfrak{A} \models \Phi[a_1, \dots, a_l] \iff \mathfrak{A} \models \Phi[\xi(a_1), \dots, \xi(a_l)]$$

Следовательно,  $(\xi(a_1), \dots, \xi(a_l)) \in S$ . Поэтому  $\xi[S] \subseteq S$ . □

**Следствие 33.1.** В терминах предыдущей теоремы

$$\xi[S] = S.$$

*Замечание 5.* Это даёт необходимое, но далеко не достаточное условие определимости. Так если  $\text{Form}_\sigma$  счётно,  $A$  бесконечно и  $\text{Aut}(\mathfrak{A}) = \{\text{id}_A\}$ , то:

- всякое  $S \subseteq A^l$  замкнуто относительно автоморфизмов  $\mathfrak{A}$ ;
- множество всех определимых в  $\mathfrak{A}$  множеств не больше  $|\text{Form}_\sigma|$ , т.е. не более чем счётно;
- значит, существует  $2^{|A|}$  замкнутых относительно автоморфизмов  $\mathfrak{A}$ , но не определимых в  $\mathfrak{A}$  множеств.

Конкретным примером  $\mathfrak{A}$  может служить  $\mathfrak{R}_<$ .

*Пример 29.* В  $\langle \mathbb{Z}; =; + \rangle$  неопределимо обычное отношение порядка на  $\mathbb{Z}$ , так как  $\xi : a \mapsto -a$  является автоморфизмом данной структуры, нарушающим это отношение.

*Пример 30.* С другой стороны, в  $\langle \mathbb{Z}; < \rangle$  уже не определима функция сложения на  $\mathbb{Z}$ , так как  $\xi : a \mapsto a+1$  является автоморфизмом данной структуры, несохраняющим данное эту функцию.

*Пример 31.* В  $\mathfrak{D}$  нельзя определить никакой элемент, кроме 1.

*Пример 32* (см. упражнение 17). В  $\mathfrak{G}$  нельзя определить:

- никакую конкретную фигуру за исключением  $\emptyset$  и  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ;
- отношение “длина отрезка  $xu$  равна единице”;
- отношение “вершины треугольника  $xuz$  обходятся против часовой стрелки”.

**Определение 34.** Пусть  $=$  содержится в  $\text{Pred}_\sigma$ , причём  $\text{arity}_\sigma(=) = 2$ .  $\sigma$ -структуру  $\mathfrak{A}$  называют *нормальной*, если  $=$  интерпретируется в  $\mathfrak{A}$  как настоящее равенство, т.е.  $=^{\mathfrak{A}}$  совпадает с  $\text{id}_A$ .

*Замечание 6.* С практической точки зрения, если мы работаем в рамках фиксированного языка, начинает стираться грань между:

- *настоящим равенством*, для разговора о котором необходимо выйти за пределы данного языка;
- *неразличимостью средствами языка*.

В математике роль отношения равенства нередко играет отношение эквивалентности специального типа.

**Определение 35.** Обозначим через  $\text{Eq}_\sigma$  множество, состоящее из  $\sigma$ -предложений

- $\forall x \ x,$
- $\forall x \ \forall y \ (x = y \rightarrow y = x),$
- $\forall x \ \forall y \ \forall z \ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z),$

а также всех  $\sigma$ -предложений видов

- $\forall x_1 \ \forall y_1 \ \dots \forall x_n \ \forall y_n \ (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \dots, y_n))),$  где  $P \in \text{Pred}_\sigma$ ,  $\text{arity}_\sigma(P) = n$ ,
- $\forall x_1 \ \forall y_1 \ \dots \forall x_m \ \forall y_m \ (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_m = y_m \rightarrow f(x_1, \dots, x_m) = f(y_1, \dots, y_m)),$  где  $f \in \text{Func}_\sigma$ ,  $\text{arity}_\sigma(f) = m$ .

Под *аксиомами равенства для  $\sigma$*  понимают элементы  $\text{Eq}_\sigma$ .

*Замечание 7.* Разумеется,  $\mathfrak{A} \models \text{Eq}_\sigma$  для всякой нормальной  $\sigma$ -структуры  $\mathfrak{A}$ .

**Определение 36.** Пусть  $\mathfrak{A}$  — произвольная модель  $\text{Eq}_\sigma$ .

Очевидно,  $=^\mathfrak{A}$  будет отношением эквивалентности на  $A$ . Обозначим через  $\mathfrak{A}'$  нормальную  $\sigma$ -структуру с носителем  $A/{=^\mathfrak{A}}$ , что:

- для любого  $c \in \text{Const}_\sigma$

$$c^{\mathfrak{A}'} := [c^\mathfrak{A}];$$

- для любого  $m$ -местного  $f \in \text{Func}_\sigma$

$$f^{\mathfrak{A}'}([a_1], \dots, [a_m]) := [f^\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_m)];$$

- для любого  $n$ -местного  $P \in \text{Func}_\sigma$

$$([a_1], \dots, [a_m]) \in P^{\mathfrak{A}'} \iff (a_1, \dots, a_m) \in f^\mathfrak{A}.$$

(Здесь  $[a]$  — класс эквивалентности  $a$  по  $=^\mathfrak{A}$ .) Корректность данного определения обеспечивают аксиомы равенства для  $\sigma$ .

**Теорема 34.** Для любых  $\sigma$ -формулы  $\Phi$  и означивания  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \models \Phi[\nu] \iff \mathfrak{A}' \models \Phi[\nu'],$$

где  $\nu' : x \mapsto [\nu(x)]$ .

**Теорема 35.**

1. Для любого означивания  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$   $\nu'$  является означиванием в  $\mathfrak{A}'$ .

2. Для каждого  $\sigma$ -терма  $t$  и любого означивания  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$

$$\overline{\nu'}(t) = [\overline{\nu}(t)].$$

3. Для каждой  $\sigma$ -формулы  $\Phi$  и любого означивания  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \models \Phi[\nu] \iff \mathfrak{A}' \models \Phi[\nu'].$$

**Доказательство.**

TODO (А надо ли?)

1. Очевидно.
2. Очевидно получается из простой индукции по построению  $t$ .
3. Очевидно получается из простой индукции по построению  $\Phi$ .

□

**Следствие 35.1.** Для каждого  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  TFAE:

- $y \Gamma$  есть нормальная модель;
- $y \Gamma \cup \text{Eq}$  есть модель.

Отныне будет предполагаться, что все рассматриваемые  $\sigma$ -структуры нормальны, если явным способом не оговорено обратное.

**Определение 37.**  $\sigma$ -формулу называют:

- *выполнимой*, если  $\mathfrak{A} \models \Phi[\nu]$  для некоторых  $\mathfrak{A}$  и  $\nu$ ;
- *общезначимой*, если  $\mathfrak{A} \models \Phi[\nu]$  для всех  $\mathfrak{A}$  и  $\nu$ .

Здесь подразумевается, что  $\mathfrak{A}$  бегают по  $\sigma$ -структурам, тогда как  $\nu$  — по означиваниям в  $\mathfrak{A}$ .

**Замечание 8.** Очевидно, что

$$\Phi \text{ общезначима} \iff \neg\Phi \text{ не выполнима.}$$

**Теорема 36** (Чёрча; должно быть на старших курсах). Проблема выполнимости для кванторной классической логики в сигнатуре  $\langle R^2 \rangle$  алгоритмически неразрешима.

**Определение 38.** Пусть  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ , и  $x_1, \dots, x_l$  суть в точности все элементы  $\text{FV}(\Phi)$  в порядке появления в  $\Phi$ . Обозначим

$$\tilde{\forall}\Phi := \forall x_1 \dots \forall x_l \Phi \quad \text{и} \quad \tilde{\exists}\Phi := \exists x_1 \dots \exists x_l \Phi$$

Тогда  $\tilde{\forall}\Phi$  называют *универсальным замыканием*  $\Phi$ , а  $\tilde{\exists}\Phi$  — *экзистенциальным замыканием*  $\Phi$ .

**Замечание 9.** Ясно, что для каждой  $\mathfrak{A}$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \tilde{\forall}\Phi &\iff \mathfrak{A} \models \Phi[\nu] \text{ для всех } \nu; \\ \mathfrak{A} \models \tilde{\exists}\Phi &\iff \mathfrak{A} \models \Phi[\nu] \text{ для некоторого } \nu. \end{aligned}$$

Стало быть, имеют место следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} \Phi \text{ выполнима} &\iff \mathfrak{A} \models \tilde{\exists}\Phi \text{ для некоторой } \mathfrak{A}; \\ \Phi \text{ общезначима} &\iff \mathfrak{A} \models \tilde{\forall}\Phi \text{ для всех } \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

**Определение 39.** Пусть  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ . Говорят, что  $\Phi$  *семантически следует из*  $\Gamma$ , и пишут  $\Gamma \models \Phi$ , если для любой  $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \models \Gamma \longrightarrow \mathfrak{A} \models \widetilde{\forall}\Phi.$$

Вместо  $\emptyset \models \Phi$  обычно пишут  $\models \Phi$ .

Формулы  $\Phi$  и  $\Psi$  называются *семантически эквивалентными*, если  $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$ ; при этом пишут  $\Phi \equiv \Psi$ .

*Замечание 10.* Очевидно

$$\models \Phi \iff \Phi \text{ общезначима.}$$

*Пример 33.* Для любых  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$  и  $x \in \text{Var}$

$$\neg \forall x \Phi \equiv \exists x \neg \Phi \quad \text{и} \quad \neg \exists x \Phi \equiv \forall x \neg \Phi.$$

**Определение 40.**  $\sigma$ -формула называется *бескванторной*, если  $\forall \not\vdash \Phi$  и  $\exists \not\vdash \Phi$ .

Под *пренексными нормальными формами (ПНФ)* понимаются  $\sigma$ -формулы вида

$$Q_1 x_1 \dots Q_l x_l \Psi,$$

где  $\{Q_1, \dots, Q_l\} \subseteq \{\forall, \exists\}$ ,  $\{x_1, \dots, x_l\} \subseteq \text{Var}$  и  $\Psi$  бескванторная.

**Упражнение 2.** Всякая  $\sigma$ -формула семантически эквивалентна некоторой ПНФ.

## 0.8 Гильбертовское исчисление для кванторной классической логики

**Определение 41.** Рассмотрим следующие аксиомы:

I1.  $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ ;

I2.  $(\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$ ;

C1.  $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Phi$ ;

C2.  $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Psi$ ;

C3.  $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi \wedge \Psi)$ ;

D1.  $\Phi \rightarrow \Phi \vee \Psi$ ;

D2.  $\Psi \rightarrow \Phi \vee \Psi$ ;

D3.  $(\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow ((\Psi \rightarrow \Theta) \rightarrow (\Phi \vee \Psi \rightarrow \Theta))$ ;

N1.  $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \neg \Psi) \rightarrow \neg \Phi)$ ;

N2.  $\neg \Phi \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)$ ;

N3.  $\Phi \vee \neg \Phi$ ;

Q1.  $\forall x \Phi \rightarrow \Phi(x/t)$ , где  $t$  свободен для  $x$  в  $\Phi$ ;

Q2.  $\Phi(x/t) \rightarrow \exists x \Phi$ , где  $t$  свободен для  $x$  в  $\Phi$ .

Кроме того, в случаях, когда  $=$  содержится в  $\text{Pred}_\sigma$ , элементы  $\text{Eq}_\sigma$  также будут считаться аксиомами нашего исчисления.

Помимо них у нас имеется правило “modus ponens”, т.е.

$$\frac{\Phi \quad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi} \text{ (MP)}$$

и добавляются два новых “кванторных” правила вывода:

$$\frac{\Phi \rightarrow \Psi}{\Phi \rightarrow \forall x \Psi} \text{ (BR1)}$$

и

$$\frac{\Phi \rightarrow \Psi}{\exists x \Phi \rightarrow \Psi} \text{ (BR2)}$$

где  $x \notin \text{FV}(\Psi)$ . Он традиционно называются *правилами Бернайса*.

Пусть  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$ . *Вывод из  $\Gamma$*  в данном гильбертовском исчислении — конечная последовательность

$$\Phi_0, \dots, \Phi_n$$

(где  $n \in \mathbb{N}$ ) элементов  $\text{Form}_\sigma$ , что для каждого  $i \in \{0; \dots; n\}$  верно одно из следующих условий:

- $\Phi_i$  есть аксиома;
- $\Phi_i$  является элементом  $\Gamma$ ;
- существуют  $\{j; k\} \subseteq \{0; \dots; i-1\}$  такие, что  $\Phi_k = \Phi_j \rightarrow \Phi_i$ ;
- существует  $j \in \{0; \dots; i-1\}$  такое, что  $\Phi_i$  получается из  $\Phi_j$  по BR1 или по BR2.

При этом  $\Phi_n$  называется *заключением* рассматриваемого вывода, а элементы  $\Gamma$  — его *гипотезами*.

Для  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$  запись  $\Gamma \vdash \Phi$  означает, что существует вывод из  $\Gamma$  с заключением  $\Phi$ . Вместо  $\emptyset \vdash \Phi$  обычно пишут  $\vdash \Phi$ .

**Определение 42.** Пусть даны  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ .

- $\Phi$  *опровержима* в  $\Gamma$ , если  $\Gamma \vdash \neg \Phi$ .
- $\Phi$  *независима от  $\Gamma$* , если  $\Gamma \not\vdash \Phi$  и  $\Gamma \not\vdash \neg \Phi$ .

*Пример 34.* Благодаря трудам Коэна и Гёделя мы знаем, что:

- $\mathcal{C}$  независима от ZF, а  $\mathcal{CH}$  — от ZFC;
- в частности,  $\neg \mathcal{C}$  не опровержимо в ZF, а  $\neg \mathcal{CH}$  — в ZFC.

Разумеется, тут предполагается непротиворечивость соответственно ZF и ZFC, поскольку иначе выводимо всё, что угодно.

**Лемма 37.**

1. **Монотонность.** Если  $\Gamma \subseteq \Delta$  и  $\Gamma \vdash \Phi$ , то  $\Delta \vdash \Phi$ .
2. **Транзитивность.** Если для всякого  $\Psi \in \Gamma$  верно  $\Delta \vdash \Psi$  и  $\Gamma \vdash \Phi$ , то  $\Delta \vdash \Phi$ .
3. **Компактность.** Если  $\Gamma \vdash \Phi$ , то для некоторого конечного  $\Delta \subseteq \Gamma$  верно  $\Delta \vdash \Phi$ .

*Замечание.* Однако стоит помнить, что  $\Gamma$  и  $\Delta$  представляют собой множества  $\sigma$ -предложений, т.е. у их элементов нет свободных переменных.

**Доказательство.**

1. Рассматривая вывод  $\Phi$  из  $\Gamma$ , сиюминутно получаем вывод  $\Phi$  из  $\Delta$ .
2. Возьмём вывод  $\Phi$  из  $\Gamma$ . Рассмотрим все использованные утверждения  $\Gamma$  в этом выводе; получим конечное множество  $\Gamma'$ . Далее для всякого  $\Psi \in \Gamma'$  рассмотрим вывод  $\Psi$  из  $\Delta$ , сотрём  $\Psi$  на конце этого вывода и припишем его в начало ранее рассмотренного вывода  $\Phi$ . Тогда несложно понять, что мы получаем вывод  $\Phi$  из  $\Delta$ .

3. Хватает просто взять в качестве  $\Delta$  множество всех формул из  $\Gamma$ , использованных в каком-то конкретном выводе  $\Phi$  из  $\Gamma$ . Тогда очевидно, что  $\Delta$  конечно, а рассмотренный вывод станет выводом  $\Phi$  из  $\Delta$ .

□

**Определение 43.** Пусть  $\xi : \text{Prop} \rightarrow \text{Form}_\sigma$ . Для всякой пропозициональной формулы  $\varphi$  обозначим

$$\xi\varphi := \begin{array}{l} \text{результат замены (всех вхождений)} \\ \text{каждой } p \in \text{Prop в } \varphi \text{ на } \xi(p). \end{array}$$

Также для удобства для всякого  $\Gamma \subseteq \text{Form}$  определим  $\xi\Gamma := \{\xi\psi \mid \psi \in \Gamma\}$

*Замечание.*  $\xi\varphi$  есть  $\sigma$ -формула.

**Лемма 38.** Пусть  $\xi : \text{Prop} \rightarrow \text{Form}_\sigma$  и  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$ . Тогда

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \xi\Gamma \vdash \xi\varphi.$$

*Замечание.*  $\Gamma \vdash \varphi$  рассматривается в пропозициональном исчислении, а  $\xi\Gamma \vdash \xi\varphi$  — в кванторном.

**Доказательство.** Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\varphi_0, \dots, \varphi_n$$

$\varphi$  из  $\Gamma$  (в пропозициональном исчислении), и рассмотрим последовательность

$$\xi\varphi_0, \dots, \xi\varphi_n.$$

Покажем индукцией по  $i \in \{0, \dots, n\}$ , что  $\xi\varphi_0, \dots, \xi\varphi_i$  является выводом из  $\xi\Gamma$  (в кванторном исчислении).

Возможны следующие случаи.

- $\varphi_i$  — аксиома. Тогда  $\xi\varphi_i$  — аксиома.
- $\varphi_i$  — элемент  $\Gamma$ . Тогда  $\xi\varphi_i$  — элемент  $\xi\Gamma$ .
- $\varphi_i$  получается из предшествующих  $\varphi_j$  и  $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$  по МР. Тогда  $\xi\varphi_i$  получается из предшествующих  $\xi\varphi_j$  и  $\xi\varphi_k = \xi\varphi_j \rightarrow \xi\varphi_i$  по МР.

Стало быть,  $\xi\Gamma \vdash \xi\varphi_i$  для всех  $i \in \{0, \dots, n\}$ . В частности для  $i = n$  мы имеем, что  $\xi\Gamma \vdash \xi\varphi$ . □

**Следствие 38.1.** В терминах доказанной теоремы, предполагая  $\Gamma = \emptyset$ , получаем, что

$$\vdash \varphi \implies \vdash \xi\varphi.$$

**Следствие 38.2.** Пусть  $\xi : \text{Prop} \rightarrow \text{Form}_\sigma$ ,  $\varphi \in \text{Form}$  и  $\models \varphi$  (в смысле проп. логики). Тогда  $\vdash \xi\varphi$ .

*Пример 35.* Так, в нашем первопорядковом исчислении окажутся выводимы

$$\Phi \rightarrow \Phi, \quad \Phi \rightarrow \neg\neg\Phi \quad \text{и} \quad \neg\neg\Phi \rightarrow \Phi$$

для произвольной  $\sigma$ -формулы  $\Phi$ .

*Пример 36.* Пусть переменная  $y$  не входит в  $\sigma$ -формулу  $\Phi$ . Тогда

1.  $\forall x \Phi \rightarrow \Phi(x/y)$  Q1
2.  $\forall x \Phi \rightarrow \forall y \Phi(x/y)$  из 1; BR1

будет выводом из  $\emptyset$ . Кроме того,

1.  $\forall y \Phi(x/y) \rightarrow \overbrace{\Phi(x/y)(y/x)}^{\Phi}$  Q1
2.  $\forall y \Phi(x/y) \rightarrow \forall x \Phi$  из 1; BR1

будет выводом из  $\emptyset$ . Стало быть,  $\vdash \forall x \Phi \leftrightarrow \forall y \Phi(x/y)$ .

*Пример 37.* Покажем, что  $\vdash \exists x \neg \Phi \rightarrow \neg \forall x \Phi$ :

1.  $\forall x \Phi \rightarrow \overbrace{\Phi(x/x)}^{\Phi}$  Q1
2.  $(\forall x \Phi \rightarrow \Phi) \rightarrow (\neg \Phi \rightarrow \neg \forall x \Phi)$  тавтология
3.  $\neg \Phi \rightarrow \neg \forall x \Phi$  из 1, 2; MP
4.  $\exists x \neg \Phi \rightarrow \neg \forall x \Phi$  из 3; BR2

Заметим, что с помощью тавтологий из этого можно легко получить  $\vdash \forall x \Phi \rightarrow \neg \exists x \neg \Phi$ .

*Пример 38.* Пусть  $\vdash \Phi \rightarrow \Psi$ . Покажем, что тогда  $\vdash \forall x \Phi \rightarrow \forall x \Psi$ :

1.  $\forall x \Phi \rightarrow \Phi$  Q1
2.  $\Phi \rightarrow \Psi$  предположение
3.  $\forall x \Phi \rightarrow \Psi$  из 1, 2 и тавтологий; MP
4.  $\forall x \Phi \rightarrow \forall x \Psi$  из 3; BR1

Используя C1, C2, C3, отсюда легко получить:

$$\vdash \Phi \leftrightarrow \Psi \implies \vdash \forall x \Phi \leftrightarrow \forall x \Psi.$$

**Определение 44.** Для удобства введём обозначения

$$\top := \Phi_{\star} \rightarrow \Phi_{\star} \quad \text{и} \quad \perp := \neg \top,$$

где  $\Phi_{\star}$  — фиксированное  $\sigma$ -предложение.

**Теорема 39.** Для любых  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_{\sigma}$ ,  $\Phi \in \text{Form}_{\sigma}$  и  $x \in \text{Var}$

$$\Gamma \vdash \Phi \iff \Gamma \vdash \forall x \Phi$$

**Доказательство.**

$\Rightarrow$ ) Пусть  $\Gamma \vdash \Phi$ .

1.  $\Phi$  выводится по предположению
2.  $\Phi \rightarrow (\top \rightarrow \Phi)$  I1
3.  $\top \rightarrow \Phi$  из 1, 2; MP
4.  $\top \rightarrow \forall x \Phi$  из 3; BR1
5.  $\forall x \Phi$  из 4 и тавтологий; MP

$\Leftarrow$ ) Пусть  $\Gamma \vdash \forall x \Phi$ .

1.  $\forall x \Phi$                       выводится по предложению
2.  $\forall x \Phi \rightarrow \overbrace{\Phi(x/x)}^{\Phi}$     Q1
3.  $\Phi$                               из 1, 2; MP

□

*Замечание 11.* Значит, мы можем дополнительно использовать *правило обобщения*:

$$\frac{\Phi}{\forall x \Phi} \text{ (GR)}$$

Оно нередко фигурирует в альтернативных версиях гильбретовского исчисления для классической логики первого порядка.

**Следствие 39.1.** *Для любых  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$*

$$\Gamma \vdash \Phi \iff \Gamma \vdash \widetilde{\forall} \Phi.$$

*Замечание.* Как нетрудно убедиться, для  $\models$  имеет место аналогичное утверждение.

**Теорема 40** (о дедукции). *Для любых  $\Gamma \cup \{\Phi\} \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Psi \in \text{Form}_\sigma$ ,*

$$\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi \iff \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi.$$

**Доказательство.**

$\Leftarrow$ ) Тривиально.

$\Rightarrow$ ) Пусть  $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ . Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\Psi_0, \dots, \Psi_n$$

$\Psi$  из  $\Gamma \cup \{\Phi\}$ . По индукции по  $i \in \{0, \dots, n\}$  покажем, что  $\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi_i$ . Ввиду аналогии с пропозициональным исчислением, достаточно разобрать лишь новые случаи, относящиеся к BR1 и BR2.

- Пусть  $\Psi_i = \Theta \rightarrow \forall x \Omega$  получается из предшествующего  $\Psi_j = \Theta \rightarrow \Omega$  по BR1. Тогда можно построить такой “квазивывод” из  $\Gamma$ :

- |    |  |                        |
|----|--|------------------------|
| 1. | $\Phi \rightarrow \overbrace{(\Theta \rightarrow \Omega)}^{\Psi_j}$  | предположение индукции |
| 2. | $(\Phi \rightarrow (\Theta \rightarrow \Omega)) \rightarrow (\Phi \wedge \Theta \rightarrow \Omega)$           | тавтология             |
| 3. | $\Phi \wedge \Theta \rightarrow \Omega$  | из 1, 2; MP            |
| 4. | $\Phi \wedge \Theta \rightarrow \forall x \Omega$  | из 3; BR1              |
| 5. | $(\Phi \wedge \Theta \rightarrow \forall x \Omega) \rightarrow (\Phi \rightarrow (\Theta \rightarrow \Omega))$ | тавтология             |
| 6. | $\Phi \rightarrow (\Theta \rightarrow \Omega)$   | из 4, 5; MP            |

Стало быть,  $\Gamma \vdash \Phi \rightarrow (\theta \rightarrow \forall x \Omega)$ .

- Пусть  $\Psi_i = \exists x \Theta \rightarrow \Omega$  получается из предшествующего  $\Psi_j = \Theta \rightarrow \Omega$  по BR2. Тогда можно построить такой “квазивывод” из  $\Gamma$ :



1.	$\Phi \rightarrow \overbrace{(\Theta \rightarrow \Omega)}^{\Psi_j}$	предположение индукции
2.	$(\Phi \rightarrow (\Theta \rightarrow \Omega)) \rightarrow (\Theta \rightarrow (\Phi \rightarrow \Omega))$	тавтология
3.	$\Theta \rightarrow (\Phi \rightarrow \Omega)$	из 1, 2; MP
4.	$\exists x \Theta \rightarrow (\Phi \rightarrow \Omega)$	из 3; BR2
5.	$(\exists x \Theta \rightarrow (\Phi \rightarrow \Omega)) \rightarrow (\Phi \rightarrow (\exists x \Theta \rightarrow \Omega))$	тавтология
6.	$\Phi \rightarrow (\exists x \Theta \rightarrow \Omega)$	из 4, 5; MP

Стало быть,  $\Gamma \vdash \Phi \rightarrow (\exists x \Theta \rightarrow \Omega)$ .

В частности, при  $i := n$  мы имеем  $\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi_n$ , т.е.  $\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi$ .

□

**Следствие 40.1.** Для любых  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Phi \in \sigma$

$$\Gamma \vdash \Phi \iff \vdash \bigwedge_{i=1}^n \Psi_i \rightarrow \Phi \text{ для некоторых } \{\Psi_1; \dots; \Psi_n\} \subseteq \Gamma.$$

(В случае  $n = 0$  соответствующая конъюнкция отождествляется с  $\top$ .)

**Лемма 41.** Пусть  $\xi : \text{Prop} \rightarrow \text{Form}_\sigma$ ,  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$ . Тогда

$$\Gamma \models \varphi \implies \xi\Gamma \models \xi\varphi$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольные  $\sigma$ -структуру  $\mathfrak{A}$  и означивание  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$ . Определим оценку

$$v(p) := \begin{cases} 1 & \text{если } \mathfrak{A} \models \xi(p)[\nu] \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко видеть, что для всякой  $\psi \in \text{Form}$

$$v \models \psi \iff \mathfrak{A} \models \xi\psi[\nu];$$

это следует из простой индукции по построению  $\psi$ . Следовательно

$$(\forall \psi \in \Gamma \quad v \models \psi) \rightarrow v \models \varphi \iff (\forall \psi \in \Gamma \quad \mathfrak{A} \models \xi\psi[\nu]) \rightarrow \mathfrak{A} \models \xi\varphi[\nu].$$

Но по определению  $\varphi$  и  $\Gamma$  мы имеем, что левое утверждение выполняется всегда, а значит и правая часть выполняется всегда. Стало быть,  $\xi\Gamma \models \xi\varphi$ . □

**Лемма 42.** Пусть  $\Phi$  — аксиома кванторного исчисления. Тогда  $\models \Phi$ .

**Доказательство.**

- Пусть  $\Phi$  — пропозициональная аксиома. Тогда она имеет вид  $\xi\varphi$ , где  $\varphi$  — аксиома пропозиционального исчисления, а  $\xi$  — функция из  $\text{Prop}$  в  $\text{Form}_\sigma$ . Тогда  $\models \varphi$ , а значит и  $\models \Phi$  по предыдущей лемме.
- Пусть  $\Phi$  — кванторная аксиома, т.е. она имеет вид

$$\forall x \Psi \rightarrow \Psi(x/t) \quad \text{или} \quad \Psi(x/t) \rightarrow \exists x \Psi(x),$$

где  $t$  свободен для  $x$  в  $\Psi$ . Рассмотрим произвольные  $\sigma$ -структуру  $\mathfrak{A}$  и означение  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$ . Можно показать индукцией по построению  $\Psi$ , что

$$\mathfrak{A} \models \Psi(x/t)[\nu] \iff \mathfrak{A} \models \Psi[\nu_{\bar{\nu}(t)}^x].$$

Может быть довести.

Отсюда мы сразу получаем  $\models \Phi$ .

□

**Теорема 43** (о корректности  $\vdash$ ). Для любых  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ ,

$$\Gamma \vdash \Phi \implies \Gamma \models \Phi$$

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma \vdash \Phi$ . Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\Phi_0, \dots, \Phi_n$$

$\Phi$  из  $\Gamma$ . Пусть  $\mathfrak{A}$  — произвольная модель  $\Gamma$ . Покажем индукцией по  $i \in \{0, \dots, n\}$ , что  $\mathfrak{A} \models \Phi_i[\nu]$  для всякого означивания  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$ .

Рассмотрим возможные случаи.

- Пусть  $\Phi_i$  — аксиома. Тогда  $\models \Phi_i$ , а потому  $\Gamma \models \Phi_i$ .
- Пусть  $\Phi_i$  — элемент  $\Gamma$ . Тогда, очевидно,  $\mathfrak{A} \models \Phi_i[\nu]$  для всех  $\nu$ .
- Пусть  $\Phi_i$  получается из предшествующих  $\Phi_j$  и  $\Phi_k = \Phi_j \rightarrow \Phi_i$  по МР. В силу индукционной гипотезы, для всякого  $\nu$

$$\mathfrak{A} \models \Phi_j[\nu] \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} \models \Phi_j \rightarrow \Phi_i[\nu],$$

откуда немедленно следует  $\mathfrak{A} \models \Phi_i[\nu]$ .

- Пусть  $\Phi_i = \Theta \rightarrow \forall x \Omega$  получается из предшествующего  $\Phi_j = \Theta \rightarrow \Omega$  по BR1. Рассмотрим произвольное означивание  $\nu$ . Заметим, что

$$\mathfrak{A} \models \Theta[\nu] \iff \mathfrak{A} \models \Theta[\nu_a^x] \text{ для всех } a \in A$$

(так как  $x \notin \text{FV}(\Theta)$ ). Кроме того, ввиду предположения индукции мы имеем  $\mathfrak{A} \models \Theta \rightarrow \Omega[\nu_a^x]$ . Итак

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \Theta[\nu] &\implies \mathfrak{A} \models \Theta[\nu_a^x] \text{ для всех } a \in A \\ &\implies \mathfrak{A} \models \Omega[\nu_a^x] \text{ для всех } a \in A \\ &\implies \mathfrak{A} \models \forall x \Omega[\nu]. \end{aligned}$$

Стало быть,  $\mathfrak{A} \models \Phi_i[\nu]$ .

- Случай  $\mathfrak{B}\mathfrak{R}2$  по существу аналогичен случаю  $\mathfrak{B}\mathfrak{R}1$ .

В частности,  $\mathfrak{A} \models \Phi[\nu]$  для всякого означивания  $\nu$  в  $\mathfrak{A}$ . Таким образом  $\Gamma \models \Phi$ . □

**Следствие 43.1.** Для любой  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ , если  $\vdash \Phi$ , то  $\models \Phi$ .

**Определение 45.**  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  называют *противоречивым*, если  $\Gamma \vdash \Phi$  и  $\Gamma \vdash \neg\Phi$  для некоторой  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ , и *непротиворечивым* иначе.

**Лемма 44.** Для  $\Gamma \subseteq \text{Form}_\sigma$  TFAE:

- $\vdash \Psi$  для всех  $\Psi \in \text{Form}_\sigma$ ;
- $\Gamma$  противоречиво;
- $\Gamma \vdash \perp$ .

**Следствие 44.1.** Пусть  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Phi \in \text{Sent}_\sigma$ .

- Если  $\gamma$   $\Gamma$  есть модель, то  $\Gamma \not\models \perp$ .
- Если  $\gamma$   $\Gamma \cup \{\Phi\}$  есть модель, то  $\Gamma \not\models \neg\Phi$ .
- Если  $\gamma$   $\Gamma \cup \{\neg\Phi\}$  есть модель, то  $\Gamma \not\models \Phi$ .

*Замечание.* Это, пожалуй, самый базовый метод доказательства непротиворечивости теорий независимости предложений от теории.

*Пример 39.* Пусть в качестве  $\sigma$  выступает  $\langle =^2; s^1; 0 \rangle$ , а  $\Gamma$  состоит из

- $\forall x \ s(x) \neq 0$ ,
- $\forall x \ \forall y \ (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$  и
- $\forall x \ (x \neq 0 \rightarrow \exists y \ x = s(y))$ .

Обозначим через  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  естественные  $\sigma$ -структуры с носителями  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  соответственно (считая  $s^\mathfrak{B}(\infty) = \infty$ ). Возьмём

$$\Phi := \forall x \ s(x) \neq x.$$

Тогда  $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\Phi\}$  и  $\mathfrak{B} \models \Gamma \cup \{\neg\Phi\}$ , а значит,  $\Phi$  независима от  $\Gamma$ .

*Пример 40* (без деталей). Пусть  $\sigma$  — это сигнатура структур  $\mathfrak{G}$  и  $\mathfrak{H}$ , т.е.  $\langle =^2; \simeq^4, B^3 \rangle$ .  $\sigma$ -предложения, формализующие постулаты геометрии Евклида без постулата о единственности параллельной прямой, обычно именуют *аксиомами абсолютной геометрии*; обозначим их через Abs. Тогда

$$\mathfrak{G} \models \text{Abs} \cup \{\text{Euclid}_5\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{H} \models \text{Abs} \cup \{\neg\text{Euclid}_5\}.$$

Значит,  $\text{Euclid}_5$  (аксиома о параллельных) независима от Abs.