## Основы наивной теории множеств.

## Станислав Олегович Сперанский

Материалы лекций: ссылка Литература:

- K. Hrbacek and T. Jech. Introduction to Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Marcel Dekker, Inc., 1999.
- T. Jech. Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.

Будем рассматривать как базовые выражения "x равен (совпадает с) y" ("x = y") "x лежит в y" (" $x \in y$ ").

**Определение 1** (Наиваная схема аксиом выделения). Пусть  $\Phi(x)$  — произвольное условие на объекты. Тогда существует X, что  $\forall u(\Phi(u) \leftrightarrow u \in X)$ . В этом случае X обозначается как  $\{u \mid \Phi(u)\}$ .

**Утверждение 1** (парадокс Рассела). Пусть  $R = \{u \mid u \notin u\}$ . Тогда R не может лежать в себе u не может не лежать в себе одновременно.

Из-за данного парадокса будем рассматривать только условия, образованные переменными  $u \in = \neg, \land, \lor, \leftarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$ .

**Определение 2** (аксиомы ZFC (= ZF (аксиомы Цермело-Френкеля) + C (аксиома выбора))).

Ext) "Аксиома экстенциональности":

$$\forall X \forall Y (\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y)$$

Empty) "Аксиома пустого множества":

$$\exists \varnothing \ \forall u \ (u \notin \varnothing)$$

Pair) "Аксиома пары":

$$\forall X \, \forall Y \, \exists Z (\forall u \, (u \in Z \leftrightarrow (u = X \lor u = Y)))$$

Обозначение:  $Z = \{X, Y\}$ .

Sep) "Схема аксиом выделения":

$$\forall \Phi(x) \quad \forall X \exists Y \ \forall u \ (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \land \Phi(u)))$$

Обозначение:  $Y = \{u \in X \mid \Phi(u)\}.$ 

Следствие. Операторы

$$X \cap Y := \{ u \mid u \in X \land u \in Y \}$$
$$X \setminus Y := \{ u \in X \mid u \notin Y \}$$
$$\bigcap X := \{ u \mid \forall v \in X \mid u \in v \}$$

определены корректно.

Union) "Аксиома объединения":

$$\forall X \,\exists Y \,\forall u \,(u \in Y \leftrightarrow \exists v \,(v \in X \land u \in v))$$

Обозначение:  $Y = \bigcup X$ .

Следствие. Оператор

$$X \cup Y := \bigcup \{X, Y\} = \{u \mid u \in X \land u \in Y\}$$

определён корректно.

Power) Пусть  $x \subseteq y := \forall v \{v \in x \to v \in y\}$ . "Аксиома степени":

$$\forall X \,\exists Y \,\forall u \,(u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$$

Обозначение:  $Y = \mathcal{P}(X) := \{u \mid u \subseteq X\}$ .  $\mathcal{P}(X)$  — "множество-степень X" или "булеан X".

**Определение 3.** Упорядоченная пара — это объект от некоторых  $X_1$  и  $Y_1$ , который равен другому такому объекту от  $X_2$  и  $Y_2$  тогда и только тогда, когда  $X_1 = X_2 \wedge Y_1 = Y_2$ .

Определение 4. Декартово произведение X и Y  $(X \times Y) - \{(x;y) \mid x \in X \land y \in Y\}$ .

Замечание 1. Можно нелсожно показать, что декартово произведение определено корректно.

Inf) Пусть Ind(X) :=  $\emptyset \in X \land \forall u (u \in X \land u \cup \{u\} \in X)$ . Если Ind(X), то X называется индуктивным. "Аксиома бесконечности": существует индуктивное множество.

Repl) "Схема аксиом подстановки":

$$\forall \Phi(x,y)$$

$$\forall x \, \forall y_1 \, \forall y_2 \, ((\Phi(x,y_1) \land \Phi(x,y_2)) \to y_1 = y_2) \to$$

$$\forall X \, \exists Y \, \forall y \, (y \in Y \leftrightarrow \exists x (x \in X \land \Phi(x,y)))$$

Reg) "Аксиома регулярности":

$$\forall X (X \neq \emptyset \rightarrow \exists u (u \in X \land X \cap u = \emptyset))$$

## 1 Отношения.

**Определение 5.** Бинарное (или двухместное) отношение R между X и Y — подмножество  $X \times Y$ . Если Y = X, R называется бинарным (или двухместным) отношением на X. Обозначение:  $(x,y) \in R \Leftrightarrow xRy$ .

Определение 6.

$$\mathrm{dom}(R) := \{u \in X \mid \exists v \quad uRv\}$$
 "область определения  $R$ "  $\mathrm{range}(R) := \{v \in Y \mid \exists u \quad uRv\}$  "область значений  $R$ "  $R[U] := range(R \cap (U \times Y))$   $R^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$ 

Замечание 2.

$$\operatorname{range}(R) = \operatorname{dom}(R^{-1}) = R[X]$$
$$\operatorname{range}(R^{-1}) = \operatorname{dom}(R) = R^{-1}[Y]$$

**Определение 7.** Бинарные отношнения можно естественным образом комбинировать: для любых отношений R и Q между X и Y, Y и Z соответственно отношение

$$S = R \circ Q := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y : xRy \land yQz\}$$

называется композицией R и Q.

**Определение 8.** Тождественное отображение на  $X-id_X:=\{(x,x)\mid x\in X\}.$ 

Замечание 3. Тождественное отображение при композиции (не важно, правой или левой) с другим отношением не меняет его.

**Определение 9.** Отношение R между X и Y называется функциональным, если

$$\forall x \ \forall y_1 \ \forall y_2 \ ((xRy_1 \land xRy_2) \rightarrow y_1 = y_2).$$

**Определение 10.** Функция из X в Y — функциональное отношение R между X и Y, в котором  $\mathrm{dom}(R) = X$ .