

Математический анализ — 1.

Лектор — Юрий Сергеевич Белов

Создатель конспекта — Глеб Минаев *

TODOs

Тут нужно рассказать про функции \exp , \sin , \cos и $(1+x)^\alpha$ и их ряды	19
Название раздела?	20
Картиночки!	20
Тем более картиночки!!!	21
Кривая Пеано, тра-ля-ля...	51

Содержание

1 Множества, аксиоматика и вещественные числа.	2
2 Топология прямой, пределы и непрерывность.	4
2.1 Последовательности, пределы и ряды	4
2.2 Топология	9
2.3 Пределы функций, непрерывность	12
2.4 Гладкость (дифференцируемость)	14
2.5 Стандартные функции, ряды Тейлора и их сходимость	19
3 Примеры и контрпримеры	20
4 Интегрирование	22
4.1 Первообразная	22
4.2 Суммы Дарбу и интеграл Римана	24
4.3 У чего есть выражаемая первообразная?	33
5 Логарифм? Полезности?? Что???	34
5.1 Формулы Валлиса и Стирлинга	39
5.2 Бернулли обернули	42
5.3 Некоторые методы интегрирования и их результаты	46
5.4 Кривые	51

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

Литература:

- В. А. Зорич “Математический анализ”
- О. Л. Виноградов “Математический анализ”
- (подходит попозже) Г. М. Фихтенгельц “Курс дифференциального и интегрального исчисления”
- У. Рудин “Основы анализа”
- М. Спивак “Математический анализ на многообразиях”
- В. М. Тихомиров “Рассказы о максимумах и минимумах”

1 Множества, аксиоматика и вещественные числа.

Мы начинаем с теории множеств.

Определение 1.

- Множества и элементы — понятно.
- $a \in B$ — понятно.
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — объединение.
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — пересечение.
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$ — разность.
- $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$ — симметрическая разница.
- $A^C := X \setminus A$ — дополнение, где X — некоторое фиксированное рассматриваемое множество.
- $A \subset B$ — “ A — подмножество B ”, т.е. $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Следствие.

- (первое правило Моргана) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A^C \\ x \in B^C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$$

- (второе правило Моргана) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. Аналогично.

Определение 2. (Аксиома индукции.) Пусть есть функция $A : \mathbb{N} \rightarrow \text{true}; \text{false}$, что:

1. $A(1) = \text{true}$;
2. $\forall n (A(n) \rightarrow A(n+1))$.

Тогда $\forall n A(n)$.

Определение натуральных чисел сложно, рассматривать его не будем. Важно также иметь в виду натуральные числа с операциями сложения и умножения.

Определение 3. Пусть есть кольцо без делителей нуля R . Рассмотрим отношение эквивалентности \sim на $R \times (R \setminus \{0\})$, что $(a; b) \sim (c; d) \Leftrightarrow ad = bc$. Тогда $\text{Quot}(R)$ — фактор-множество по \sim и поле.

Определение 4. Рациональные числа — $\mathbb{Q} := \text{Quot}(\mathbb{Z})$.

Теорема 1. $\nexists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существуют взаимно простые $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, что $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Тогда $m^2 = 2n^2$. Очевидно, что тогда $m^2 : 2$, значит $m : 2$, значит $m : 4$, значит $n^2 : 2$, значит $n : 2$, значит n и m не взаимно просты, так как делятся на 2 — противоречие. \square

Теперь мы хотим понять, что есть вещественные числа. Тут есть несколько подходов.

Определение 5 (аксиоматический подход). Вещественные числа — это полное упорядоченное поле \mathbb{R} , состоящее не из одного элемента.

Здесь “поле” значит, что на множестве (вместе с его операциями и выделенными элементами) верны аксиомы поля $A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4$ и D (т.е. сложение и умножение ассоциативны, коммутативны имеют нейтральные элементы и удовлетворяют условию существованию обратных (по умножению — для всех кроме нуля), а также дистрибутивности).

Упорядоченность значит, что есть рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение \preccurlyeq , что все элементы сравнимы, согласованное с операциями, т.е.:

$$A) a \preccurlyeq b \Rightarrow a + x \preccurlyeq b + x.$$

$$M) 0 \preccurlyeq a \wedge 0 \preccurlyeq b \Rightarrow 0 \preccurlyeq ab.$$

Полнота поля значит любое из следующих утверждений (они равносильны):

- любое ограниченное сверху (снизу) подмножество поля имеет точную верхнюю (нижнюю) грань;
- (аксиома Кантора-Дедекинда) для любых двух множеств A и B , что $A \preccurlyeq B$, есть разделяющий их элемент.

Итого мы имеем 9 аксиом поля, 2 аксиомы упорядоченности и 1 аксиома полноты упорядоченности.

Утверждение. Над \mathbb{Q} нет элемента разделяющего $A := \{a > 0 \mid a^2 < 2\}$ и $B := \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. есть $c > 0$, что $A < c < B$.

Если $c^2 < 2$, то найдём ε , что $\varepsilon \in (0; 1)$ и $(c + \varepsilon)^2 < 2$. Заметим, что $(c + \varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < c^2 + (2c + 1)\varepsilon$. Пусть $\varepsilon < \frac{2-c^2}{2c+1}$, тогда такое ε точно подойдёт, ну а поскольку $\frac{2-c^2}{2c+1} > 0$, то такое ε есть. Значит $c^2 \geq 2$.

Аналогично имеем, что $\varepsilon \leq 2$. А значит $c^2 = 2$, что не бывает над \mathbb{Q} . \square

Следствие. \mathbb{Q} не полно.

Определение 6. Значение t является *верхней (нижней) гранью* непустого множества $X \subseteq \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $t \geq X$, т.е. любой элемент x множества X не более t .

Точная верхняя (нижняя) грань или *супремум (инфимум)* непустого множества $X \subseteq \mathbb{R}$ — минимальная верхняя (нижняя) грань множества X . Он же является элементом разделяющим X и множество всех его верхних (нижних) граней. Обозначение: $\sup(X)$ и $\inf(X)$ соответственно.

Осцелляцией множества X называется значение $\text{osc } X := \sup X - \inf X$.

Определение 7.

- *Закрытый интервал* или *отрезок* $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
- *Открытый интервал* или просто *интервал* $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- *Полуоткрытый интервал* или *полуинтервал* $(a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, $[a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Теорема 2 (Лемма о вложенных отрезках). Пусть имеется $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ — множество вложенных (непустых) отрезков, т.е. $\forall n > 1 \ I_{n+1} \subset I_n$. Тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset$.

Доказательство. Заметим, что для любых натуральных $n < m$ верно, что $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$, где $I_n = [a_n; b_n]$. Тогда для $A := \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $B := \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ верно, что $A \leq B$. Значит есть разделяющий их элемент t , значит $A \leq t \leq B$, значит $t \in I_i$ для всех i , значит $t \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$. \square

Замечание 1. Теорема 2 не верна для не отрезков.

Замечание 2. Если в теореме 2 $b_i - a_i$ “сходится к 0”, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall i > n \ b_i - a_i < \varepsilon$, то пересечение всех отрезков состоит из ровно одного элемента.

Теорема 3 (индукция на вещественных числах). Пусть дано множество $X \subseteq [0; 1]$, что

1. $0 \in X$;
2. $\forall x \in X \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap [0; 1] \subseteq X$;
3. $\forall Y \subseteq X \ \sup(Y) \in X$.

Тогда $X = [0; 1]$.

Доказательство. Предположим противное: $X \neq [0; 1]$. Рассмотрим $Z := [0; 1] \setminus X$ ($Z \neq \emptyset$!) и $Y := \{y \in [0; 1] \mid y < Z\}$ ($Y \neq \emptyset$!). Заметим, что $Y \subseteq X$ и $\sup(Y) = \inf(Z) = t$. Тогда $t \in X$ по второму условию. Значит для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $U_\varepsilon(t) \cap [0; 1] \in X$, а т.е. $(U_\varepsilon(t) \cap [0; 1]) \cap Z = \emptyset$, а тогда $t \neq \inf(Z)$ — противоречие. Значит $X = [0; 1]$. \square

2 Топология прямой, пределы и непрерывность.

2.1 Последовательности, пределы и ряды

Определение 8. *Предел последовательности* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x , что для любой окрестности x эта последовательность с некоторого момента будет лежать в этой окрестности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}_{n=0}^{\infty} = x$.

Пределная точка последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x , что в любой его окрестности после любого момента появится элемент данной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Определение 9. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$$

Теорема 4. Последовательность сходится тогда и только тогда, когда фундаментальна.

Доказательство.

1. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к некоторому значению X , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| = |x_{n_1} - X + X - x_{n_2}| \leq |x_{n_1} - X| + |X - x_{n_2}| < \varepsilon$$

2. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна. Мы знаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ все члены, начиная с некоторого различаются менее чем на ε . Тогда возьмём какой-нибудь такой член y_0 для некоторого ε , затем какой-нибудь такой член y_1 для $\varepsilon/2$, который идёт после y_0 и так далее. Получим последовательность, что все члены, начиная с n -ого лежат в $\varepsilon/2^n$ -окрестности y_n . Тогда рассмотрим последовательность $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $I_n = [y_n - \varepsilon/2^{n-1}; y_n + \varepsilon/2^{n-1}]$. Несложно понять, что $I_n \supseteq I_{n+1}$, поэтому в пересечении $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ лежит некоторый X . Несложно понять, что все члены начальной последовательности, начиная с y_{n+2} , лежат в $\varepsilon/2^{n+2}$ -окрестности y_{n+2} . При этом $|y_{n+2} - X| \leq \varepsilon/2^{n+1}$, что значит, что все члены главной последовательности, начиная с y_{n+2} лежат в $3\varepsilon/2^{n+2}$ -окрестности X , а значит и в $\varepsilon/2^n$.

□

Утверждение 5. Для последовательностей $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ верно (если определено), что

1. $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} + \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$
2. $-\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$
3. $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n y_n\}_{n=0}^{\infty}$
4. $\frac{1}{\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}} = \lim\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$ (если $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \neq 0$)

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

Доказательство.

1. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, M \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon/2 \quad \wedge \quad \forall m > M \quad |y_m - Y| < \varepsilon/2,$$

тогда

$$\forall n > \max(N, M) \quad |(x_n + y_n) - (X + Y)| \leq |x_n - X| + |y_n - Y| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $X + Y$.

2. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon,$$

тогда

$$\forall n > N \quad |(-x_n) - (-X)| = |X - x_n| = |x_n - X| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $-X$.

3. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^\infty = Y$. Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} + \frac{|x|+|y|}{2}} = \sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} - \frac{|x|+|y|}{2}$$

Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда положительно. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $t^2 + t(|X| + |Y|) = \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, M \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad |x_n - X| < \delta(\varepsilon) \quad \wedge \quad \forall m > M \quad |y_m - Y| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\begin{aligned} \forall n > \max(N, M) \quad |x_n \cdot y_n - X \cdot Y| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot Y + x_n \cdot Y - X \cdot Y| \\ &\leq |x_n \cdot (y_n - Y)| + |(x_n - X) \cdot Y| \\ &< |x_n| \cdot \delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \cdot |Y| \\ &< (|X| + \delta(\varepsilon)) \cdot \delta(\varepsilon) + |Y| \cdot \delta(\varepsilon) \\ &= \delta(\varepsilon)^2 + (|X| + |Y|)\delta(\varepsilon) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

что означает, что $\{x_n \cdot y_n\}_{n=0}^\infty$ сходится и сходится к $X \cdot Y$.

4. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = X$. Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon|X|^2}{1 + \varepsilon|X|}$$

Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда меньше $|X|$. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $\frac{t}{|X|(|X|-t)} = \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad |x_n - X| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\forall n > N \quad \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{X} \right| = \left| \frac{X - x_n}{X \cdot x_n} \right| < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X| \cdot |x_n|} < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X|(|X| - \delta(\varepsilon))} = \varepsilon,$$

что означает, что $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^\infty$ сходится и сходится к $1/X$.

□

Определение 10. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ *асимптотически больше* последовательности $\{y_n\}_{n=0}^\infty$, если $x_n > y_n$ для всех натуральных n , начиная с некоторого. Обозначение: $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$.

Аналогично определяются *асимптотически меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^\infty \prec \{y_n\}_{n=0}^\infty$), *асимптотически не больше* ($\{x_n\}_{n=0}^\infty \preccurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$) и *асимптотически не меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^\infty \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$).

Утверждение 6. Если $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$, то $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty \geq \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $Y > X$, где $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^\infty$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ находятся в ε -окрестностях X и Y соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $y_n > Y - \varepsilon = X + \varepsilon > x_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^\infty \prec \{y_n\}_{n=0}^\infty$ — противоречие. Значит $X \geq Y$. □

Утверждение 7. Если $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty > \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$, то $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$.

Доказательство. Пусть $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^\infty$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ находятся в ε -окрестностях X и Y соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $x_n > X - \varepsilon = Y + \varepsilon > y_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$. \square

Утверждение 8 (лемма о двух полицейских). Если

$$\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty \succ \{z_n\}_{n=0}^\infty$$

и

$$\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = \lim\{z_n\}_{n=0}^\infty = A,$$

то предел $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ определён и равен A .

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ есть $N, M \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N \quad |x_n - A| < \varepsilon \quad \wedge \quad \forall m > M \quad |z_m - A| < \varepsilon,$$

значит

$$\forall n > \max(N, M) \quad A + \varepsilon > x_n \geq y_n \geq z_n > A - \varepsilon \quad \text{т.е.} \quad |y_n - A| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ сходится и сходится к A . \square

Утверждение 9. Если $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$, $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = A$, а $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ не убывает (с некоторого момента), то предел $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ существует и не превосходит A .

Доказательство. Если последовательность $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ возрастает не с самого начала, то отрезем её начало с до момента начала возрастания. Заметим, что она ограничена сверху (из-за последовательности $\{x_n\}_{n=0}^\infty$), тогда определим $B := \sup(\{y_n\}_{n=0}^\infty)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \quad |B - x_N| < \varepsilon$, тогда $\forall n > N \quad |B - x_n| < \varepsilon$, что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ сходится и сходится к B . По утверждению 6 $A \geq B$. \square

Определение 11. Сумма ряда $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ есть значение $\sum_{k=0}^\infty a_k := \lim \left\{ \sum_{i=0}^k \right\}_{k=0}^\infty$. Частичной же суммой s_k этого ряда называется просто $\sum_{i=0}^k a_i$.

Определение 12. Ряд $\sum_{i=0}^\infty a_i$ сильно сходится, если $\sum_{i=0}^\infty |a_i|$ сходится.

Теорема 10. Если ряд сильно сходится, то он сходится.

Доказательство.

Лемма 10.1. Пусть ряд $\sum_{i=0}^\infty a_i$ сходится, тогда сходится любой его “хвост” (суффикс), и для любого $\varepsilon > 0$ есть такой хвост, сумма которого меньше ε .

Доказательство. Пусть $A = \sum_{i=0}^\infty a_i$. Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$ верно, что $\sum_{i=0}^n |a_i| \in U_\varepsilon(A)$. Тогда заметим, что

$$\sum_{i=N+1}^\infty |a_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=N+1}^n |a_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n |a_i| - \sum_{i=0}^N |a_i| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n |a_i| - \sum_{i=0}^N |a_i| = A - \sum_{i=0}^N |a_i| \in U_\varepsilon(0)$$

Это и означает, что любой хвост сходится. И так мы для каждого ε нашли такой хвост, что его сумма меньше ε . \square

Пусть дан сильно сходящийся ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Пусть $\varepsilon_n := \sum_{i=n}^{\infty} |a_i|$. Несложно видеть, что $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно уменьшается, сходясь к 0 (последнее следует из леммы 10.1). Также несложно видеть по рассуждениям леммы 10.1, что $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = |a_n|$. Тогда определим

$$S_n := \overline{U}_{\varepsilon_{n+1}} \left(\sum_{i=0}^n a_i \right),$$

где $\overline{U}_{\varepsilon}(x)$ — закрытая ε -окрестность точки x . Тогда несложно видеть, что

$$\left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i - \sum_{i=0}^n a_i \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| \leq \varepsilon_{n+1}$$

Тем самым сумма любого префикса длины хотя бы $n+1$ лежит в $\overline{U}_{\varepsilon_{n+1}}(\sum_{i=0}^n a_i) = S_n$. Также несложно видеть, что $S_{n+1} \subseteq S_n$. А также понятно, что S_i замкнуто и ограничено (“компактно”).

Пусть $A := \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$ (поскольку диаметры шаров сходятся к нулю, то в пересечении лежит не более одной точки). Тогда мы видим, что $|\sum_{i=0}^n a_i - A| \leq \varepsilon_{n+1} \rightarrow 0$, поэтому $\sum_{i=0}^n a_i$ сходится и сходится к A . \square

Следствие 10.1. Если $\{b_i\}_{i=0}^{\infty} \succcurlyeq \{|a_i|\}_{i=0}^n$ и $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ существует, то и $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ существует.

Теорема 11 (признак Лейбница). Пусть дана последовательность $\{a_n\}$, монотонно сверху сходящаяся к 0. Тогда ряд $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$ сходится.

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} := \{S_{2n}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i \right\}_{n=0}^{\infty} \quad \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} := \{S_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i \right\}_{n=0}^{\infty}$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0 & Q_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} - a_{2n-3} \geq 0 \\ Q_n - P_n &= -a_{2n+1} \leq 0 & P_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

Тогда имеем, что $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно убывает, $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно возрастает, а также

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} \geq \{Q_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Тогда последовательности $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходятся и сходятся к P и Q соответственно. При этом последовательность

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} - \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{P_n - Q_n\}_{n=0}^{\infty} = a_{2n+1}$$

тоже сходится по условию и сходится к 0. Поэтому

$$P - Q = \lim \{P_n\}_{n=0}^{\infty} - \lim \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} = 0$$

значит $P = Q$. Значит и последовательность префиксных сумм тоже сходится к $P = Q$. \square

Лемма 12 (преобразование Абеля).

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

где $B_n := \sum_{i=0}^n b_i$.

Теорема 13 (признак Дирихле). Если даны $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$, что $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \searrow 0$, а $\{B_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{i=0}^n b_i\}_{i=0}^{\infty}$ ограничена, то ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$ сходится.

Доказательство.

$$S_n = \sum_{i=0}^n a_i b_i = \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n$$

Пусть $|B_n| < C$ для всех n . Несложно видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n B_n| \leq \lim a_n C = C \lim a_n = 0,$$

поэтому $\lim a_n B_n = 0$. Также

$$|(a_k - a_{k+1}) B_k| < C |a_k - a_{k+1}| = C(a_k - a_{k+1}),$$

поэтому

$$|S_n - a_n B_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k| < C \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = C(a_0 - a_n),$$

что тоже сходится. Поэтому $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится, т.е. и ряд сходится. \square

2.2 Топология

Определение 13. ε -окрестность точки x (для $\varepsilon > 0$) — $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$. Обозначение: $U_\varepsilon(x)$.

Проколотая ε -окрестность точки x — $(x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon)$. Обозначение: $V_\varepsilon(x)$.

Определение 14. Пусть дано некоторое множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Тогда точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества X , если она содержится в X вместе со своей окрестностью.

Само множество X называется открытым, если все его точки внутренние.

Пример 1. Следующие множества открыты:

- $(a; b)$;
- $(a; +\infty)$;
- \mathbb{R} ;
- \emptyset ;
- $\bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i; b_i)$ (интервалы не обязательно не должны пересекаться).

Определение 15. Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества, если в любой проколотой окрестности x будет какая-либо точка X .

Множество предельных точек X называется производным множеством множества X и обозначается как X' .

Множество X называется замкнутым, если $X \supseteq X'$.

Определение 16. Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Если у любой последовательности его точек есть предельная точка из самого множества X , то X называется компактным.

Теорема 14. Подмножество \mathbb{R} компактно тогда и только тогда, когда замкнуто и ограничено.

Доказательство.

1. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно. Если X неограниченно, то несложно построить последовательность элементов X , которая монотонно возрастает или убывает, а разность между членами не меньше любой фиксированной константы (например, не меньше 1); такая последовательность не имеет предельных точек, что противоречит определению X , а значит X ограничено. Если X не замкнуто, то можно рассмотреть предельную точку x , не лежащую в X , и построить последовательность, сходящуюся к ней, а значит никаких других точек у последовательности быть не может, а значит опять получаем противоречие с определением X ; значит X ещё и замкнуто.
2. Пусть X замкнуто и ограничено. Пусть также дана некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ элементов X . Поскольку X ограничено, то значит лежит внутри некоторого отрезка I_0 . Определим последовательность $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ рекуррентно следующим образом. Пусть I_n определено; разделим I_n на две половины и определим I_{n+1} как любую из половин, в которой находится бесконечное количество членов последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. После этого определим последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ как подпоследовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $y_n \in I_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (это можно сделать рекуррентно: если определён член y_n , то найдётся ещё бесконечное количество членов начальной последовательности в I_{n+1} , которые идут после y_n , так как отброшено конечное количество, а значит можно взять любой). Несложно видеть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n =: y$. Из-за замкнутости $y \in X$, а значит y — предельная точка $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — лежит в X и доказывает компактность X .

□

Лемма 15. Пусть Σ — семейство интервалов длины больше некоторого $d > 0$, покрывающее отрезок $[a; b]$. Тогда у Σ есть конечное подсемейство Σ' , покрывающее $[a; b]$.

Доказательство. Давайте вести индукцию по $\lceil (b - a)/d \rceil$.

База. $\lceil (b - a)/d \rceil = 0$. В таком случае $a = b$, а значит, можно взять любой интервал, покрывающий единственную точку и получить всё искомое семейство Σ' .

Шаг. Рассмотрим $\Omega := \{I \in \Sigma \mid a \in I\}$. Заметим, что если у правых концов интервалов из Ω нет верхних граней (т.е. их множество не ограничено сверху), то значит найдётся интервал, покрывающий и a , и b , а значит его как единственный элемент семейства Σ' будет достаточно. Иначе определим a' как супремум правых концов интервалов из Ω .

Тогда мы имеем, что есть интервалы из Ω , подбирающиеся сколь угодно близко к a' , а также что все интервалы из Σ , покрывающие a' не покрывают a . Если $a' > b$, то можно опять же взять интервал, который покроет весь $[a; b]$, и остановится. Иначе рассмотрим любой интервал I , покрывающий a' и любой интервал J из Ω , перекрывающийся с I . Пусть a'' — правый конец J .

Заметим, что I и J покрывают $[a; a'']$. При этом $a < J < a''$, значит $a'' - a \geq \text{osc}(J) > d$. Если $a'' > b$, то $\Sigma = \{I, J\}$ будет достаточно. Иначе заметим, что

$$\left\lceil \frac{b - a''}{d} \right\rceil = \left\lceil \frac{b - a}{d} - \frac{a'' - a}{d} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{b - a}{d} - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{b - a}{d} \right\rceil - 1 < \left\lceil \frac{b - a}{d} \right\rceil$$

Тогда по предположению индукции есть конечное подпокрытие Σ'' покрытия Σ отрезка $[a''; b]$. Значит $\Sigma' := \Sigma'' \cup \{I, J\}$ является конечным подпокрытием покрытия Σ множества $[a; b]$. □

Лемма 16. Пусть Σ — семейство интервалов длины больше некоторого $d > 0$. Тогда найдётся не более чем счётное подсемейство Σ' , имеющее такое же объединение, т.е. $|\Sigma'| \leq |\mathbb{N}|$, $a \cup \Sigma = \bigcup \Sigma'$.

Доказательство. Несложно видеть, что $A := \bigcup \Sigma$ представляется в виде дизъюнктного объединения интервалов. Каждый из них можно представить как объединение не более чем счётного отрезков. Итого мы получим не более чем счётное семейство Ω отрезков, что $\bigcup \Omega = A$. Для каждого отрезка из Ω построим по лемме 15 конечное подпокрытие покрытия Σ , а затем объединив их, получим не более чем счётное семейство Σ' , покрывающее любой из них, а значит и $\bigcup \Omega = A = \bigcup \Sigma$. С другой стороны $\Sigma' — подмножество \Sigma$, значит и $\bigcup \Sigma' — подмножество \bigcup \Sigma$.

В итоге $\bigcup \Sigma' = \bigcup \Sigma$, и при этом $\Sigma' — не более чем счётное подмножество \Sigma$. \square

Лемма 17. Пусть дано семейство Σ интервалов. Тогда из него можно выделить не более чем счётное подсемейство Σ' с тем же объединением, т.е. $|\Sigma'| \leq |\mathbb{N}|$, а $\bigcup \Sigma = \bigcup \Sigma'$.

Доказательство. Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{Z}$ семейство

$$\Sigma_n = \{I \in \Sigma \mid \text{osc}(I) \in [2^n; 2^{n+1})\}$$

Применим лемму к Σ_n и получим Σ'_n . Тогда $\Sigma' := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma'_n$ является подмножеством Σ , даёт в объединении то же, что и Σ , и при этом имеет мощность не более $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. \square

Теорема 18. Подмножество \mathbb{R} компактно тогда и только тогда, когда из любого его покрытия интервалами можно выделить конечное подпокрытие.

Доказательство.

1. Пусть X компактно, а $\Sigma — некоторое его покрытие интервалами. Определим для каждого $d > 0$$

$$\Sigma_d := \{I \in \Sigma \mid \text{osc}(I) > d\}$$

Если никакое из Σ_d не является подпокрытием множества X , то рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, где $x_n — любой элемент $X \setminus \Sigma_{1/2^n}$. У $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ есть предельная точка $x \in X$. Значит должен быть интервал, покрывающий x , но тогда он же покрывает весь некоторый хвост нашей последовательности, а сам лежит в некотором $\Sigma_{1/2^n} — противоречие. Значит некоторое Σ_d является подпокрытием, а значит далее можно рассматривать его в качестве Σ .$$

$\bigcup \Sigma — открытое множество, поэтому является дизъюнктным объединением семейства Ω интервалов. Поскольку в Σ длины всех интервалов больше d , то в Ω тоже. Но также X ограничено, поэтому Ω конечно, да и все интервалы в нём ограничены. Заметим, что $X \cap I$, где $I — любой интервал из Ω , является замкнутым множеством, поэтому его можно накрыть некоторым отрезком $S \subseteq I$ (для этого можно взять отрезок $[\inf(X \cap I); \sup(X \cap I)]$). Значит из накрытия Σ выделить $|\Omega|$ конечных подпокрытий для каждого отрезка (по лемме 16), а их объединение даст конечное покрытие X .$$

2. Пусть X таково, что из любого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Если X неограничено, то тогда несложно будет видеть, что покрытие $\{(n; n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ нельзя уменьшить до конечного. Значит X конечно.

Если X не замкнуто, то значит есть точка $x \notin X$, что в любой окрестности x будет точка. Тогда рассмотрим покрытие $\{(x+2^n; x^{n+2}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x-2^{n+2}; x^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Несложно видеть, что если взять любое конечное подсемейство интервалов, то оно не накроет некоторую окрестность x , а значит и X . Значит X замкнуто.

Итого получаем, что X компактно. \square

2.3 Пределы функций, непрерывность

Определение 17 (по Коши). *Предел функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x — такое значение y , что*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(V_\delta(x) \cap X) = U_\varepsilon(y)$$

Обозначение: $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = y$.

Определение 18 (по Гейне). *Предел функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x — такое значение y , что для любой последовательности $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ элементов $X \setminus \{x\}$ последовательность $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ сходится к y .* Обозначение: $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = y$.

Теорема 19. *Определения пределов по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Будем доказывать равносильность отрицаний утверждений, ставимых в определениях.

1. Пусть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ не сходится по Коши в x к значению y . Значит есть такое $\varepsilon > 0$, что в любой проколотой окрестности x (в множестве X) есть точка, значение f в которой не лежит в ε -окрестности. Рассмотрим любую такую проколотую окрестность $I_0 = V_{\delta_0}(x)$, берём в ней любую такую точку x_0 . Далее рассмотрим $I_1 = V_{\delta_1}(x)$, где $\delta_1 = \min(\delta_0/2, |x - x_0|)$, берём там любую точку x_1 , где значение f вылетает вне ε -окрестности y . Так далее строим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, сходящуюся к x , значения f в которой не лежат в ε -окрестности y , что означает, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ не сходится к y , что означает, что f не сходится по Гейне в x к значению y .
2. Пусть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ не сходится по Гейне в x к значению y . Значит есть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, сходящаяся к x , что последовательность её значений не сходится к y . Значит есть $\varepsilon > 0$, что после любого момента в последовательности будет член, значение в котором вылезает вне ε -окрестности y . Поскольку для любой проколотой окрестности x есть момент, начиная с которого вся последовательность лежит в этой окрестности, то в любой проколотой окрестности x есть член, значение которого вылезает вне ε -окрестности y , что означает, что f не сходится по Коши в x к y .

□

Утверждение 20. *Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ имеет в x предел тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in V_\delta(x) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Доказательство. Такое же как для последовательностей: см. теорему 4.

□

Утверждение 21. *Для функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ верно, что*

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (-f)(x) = -\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$
4. $\frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (\frac{1}{f})(x)$ (если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$)
5. $\lim_{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x)} f(y) = \lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x)$

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

Замечание 3. Утверждения 6, 7 и 8 верны, если заменить последовательности на функции, пределы последовательностей на пределы функций в некоторой точке x , а асимптотические неравенства на неравенства на окрестности x .

Определение 19. Верхним пределом функции f в точке x_0 называется

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{V_\delta(x_0)} f \right)$$

Нижним пределом функции f в точке x_0 называется

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\delta > 0} \left(\inf_{V_\delta(x_0)} f \right)$$

Утверждение 22. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ имеет в x предел тогда и только тогда, когда $\overline{\lim}_{t \rightarrow x} f(t) = \underline{\lim}_{t \rightarrow x} f(t)$.

Определение 20. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке x , если $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$. В изолированных точках f всегда непрерывна.

Определение 21. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $Y \subseteq X$, если она непрерывна во всех точках Y .

Утверждение 23. Для непрерывных на X функций f и g верно, что

- $f + g$ непрерывна на X ;
- fg непрерывна на X ;
- $\frac{1}{f}$ непрерывна на X (если $f \neq 0$).

Утверждение 24. Для f , непрерывной в x_0 , и g , непрерывной в $f(x_0)$, $g \circ f$ непрерывна в x_0 .

Теорема 25 (Вейерштрасса). Непрерывная функция на компакте ограничена на нём и принимает на нём свои минимум и максимум.

Доказательство. Докажем утверждение для ограниченности сверху и максимума; для ограниченности снизу и минимума рассуждения аналогичны.

Пусть множество неограниченно сверху. Тогда есть $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty \rightarrow +\infty$. Тогда рассмотрим подпоследовательность $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ последовательности $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, сходящуюся к y . Тогда

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = +\infty$$

— противоречие.

Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ сходится к супремуму S функции. Рассмотрим подпоследовательность $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ последовательности $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, сходящуюся к y . Тогда

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = S$$

□

Следствие 25.1. Так как отрезок компактен, то любая непрерывная на нём функция ограничена и принимает на нём свои максимум и минимум.

Теорема 26 (о промежуточном значении). Пусть f непрерывна на $[a; b]$, а $f(a) < f(b)$. Тогда $\forall y \in [f(a); f(b)]$ найдётся $c \in [a; b]$, что $f(c) = y$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{(a_n; b_n)\}_{n=0}^\infty$, что $(a; b) = (a_0; b_0)$, а следующие пары определяются так: если $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$, то $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (\frac{a_n+b_n}{2}; b_n)$, иначе $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (a_n; \frac{a_n+b_n}{2})$. Тогда $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Тогда

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n),$$

откуда получаем, что $f(c) \geq y$ и $f(c) \leq y$, т.е. $f(c) = y$. □

Определение 22. Функция f равномерно непрерывна на X , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

Теорема 27 (Кантор). Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна.

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x, y : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Тогда рассмотрим последовательность пар x и y построенных так для δ , сходящихся к 0. Из неё выделим подпоследовательность, что x сходится к некоторому a . Тогда y сойдутся к нему же. Тогда в любой окрестности a будет пара точек $(x'; y')$, что $|f(x') - f(y')| > \varepsilon$, значит будет в любой окрестности x будет точка, выбивающаяся из $\varepsilon/2$ -окрестности — противоречие с непрерывностью. □

Определение 23. Пусть есть функции f и g , что $|f| \leq C|g|$ в окрестности x для некоторого $C \in \mathbb{R}$, тогда пишут, что $f = O(g)$ (при $t \rightarrow x$).

Если же $\forall \varepsilon > 0$ будет такая окрестность x_0 , что $|f| \leq \varepsilon|g|$ в этой окрестности, тогда пишут, что $f = o(g)$ (при $t \rightarrow x$).

2.4 Гладкость (дифференцируемость)

Определение 24. Функция f называется гладкой (дифференцируемой) в x , если $f(x + \delta) = f(x) + A\delta + o(\delta)$ для некоторого $A \in \mathbb{R}$. В таком случае A называется дифференциалом (производной) f в точке x .

Обозначение: $f'(x) = A$.

Определение 25. Функция f называется гладкой (дифференцируемой) в x , если предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$$

определён. В таком случае его значение называется дифференциалом (производной) f в точке x .

Утверждение 28. Определения 24 и 25 равносильны.

Утверждение 29. Непрерывная в некоторой точке функция там же непрерывна.

Определение 26. Функция, значения которой равны производным функции f в тех же точках называется производной функцией (или просто производной) функции f . Обозначение: f' .

Лемма 30. Для дифференцируемых в x функций f и g

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;
2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (правило Лейбница);
3. $(\frac{1}{f})'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$;
4. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Лемма 31. Пусть дана $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция. Тогда существует $g : [f(a); f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция, что $g \circ f = Id$.

Доказательство. Заметим, что f — монотонно возрастающая (убывающая) биекция из $[a; b]$ в $[f(a); f(b)]$. Тогда существует монотонно возрастающая (убывающая) биекция $g : [f(a); f(b)] \rightarrow [a; b]$, что $g \circ f = id$. Осталось показать, что g непрерывна.

Предположим противное, тогда в любой окрестности некоторой точки $f(x)$ из $[f(a); f(b)]$ есть точки вылетающие вне ε -окрестности. Значит все точки из либо $(x - \varepsilon; x)$, либо $(x; x + \varepsilon)$ не принимаются, значит g не биекция — противоречие. Значит g непрерывна. \square

Лемма 32.

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Доказательство. Пусть $g := f^{-1}$. Тогда

$$1 = Id' = (f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$$

Откуда следует, что

$$(f^{-1})' = g' = \frac{1}{f' \circ g} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

\square

Определение 27. Функция f возрастает в точке y , если есть $\varepsilon > 0$, что $f(x) \leq f(y)$ для любого $x \in (y - \varepsilon; y)$ и $f(x) \geq f(y)$ для любого $x \in (y; y + \varepsilon)$.

Аналогично определяется убываемость функции в точке.

Лемма 33. Если f возрастает в любой точке на $[a; b]$, то $f(a) \leq f(b)$.

Доказательство.

1. Можно рассмотреть для каждой точки $[a; b]$ окрестность, для которой верна её возрастательность, и из покрытия, ими образуемого, выделить конечное. А тогда перебираясь между общими точками окрестностей, получим искомое.
2. Также можно предположить противное, рассмотреть последовательность вложенных отрезков, у которых левый конец выше правого, и тогда для точки пересечения отрезков будет противоречие.

\square

Следствие 33.1. f возрастает на всём отрезке.

Теорема 34. Если f гладка, а f' положительна на $[a; b]$, то f строго возрастает на $[a; b]$.

Доказательство. Несложно видеть, что в любой точке на $[a; b]$ у функции есть окрестность, где она строго возрастает, так как если $t \in [a; b]$, а $f'(t) = \lambda > 0$, то в некоторой окрестности

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \in (0; 2\lambda) \quad \implies \quad f(x) \in (f(t); f(t) + 2\lambda(x - t))$$

что значит, что эта окрестность — подтверждение для возрастания f в t . Тогда по предыдущему следствию f возрастает на $[a; b]$. Если вдруг функция возрастает не строго, то тогда найдётся подотрезок на $[a; b]$, на котором функция константа, а значит на интервале с теми же концами производная тождественно равна нулю. \square

Теорема 35. Если f возрастает, то f' в своей области определения неотрицательно.

Доказательство. Если функция в точке t равна $\lambda < 0$, то в некоторой окрестности t

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \in \left(\frac{3}{2}\lambda; \frac{1}{2}\lambda\right) \quad \implies \quad f(x) \in \left(f(t) + \frac{3}{2}\lambda(x - t); f(t) + \frac{1}{2}\lambda(x - t)\right)$$

что значит, что f в точке t “строго” убывает — противоречие. Значит $f'(t) \geq 0$. \square

Определение 28. f имеет локальный максимум в x , если для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $f(x) \geq f(y)$ для любого $y \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon)$.

Аналогично определяется точка локального минимума.

Теорема 36. В точках локальных максимумов и минимумов функции f функция f' принимает нули (если определена).

Доказательство. Слева от точки максимума функция возрастает в данной точке, значит производная в данной точке ≥ 0 , а справа — убывает, значит производная ≤ 0 , значит производная равна 0. Аналогично для точки минимума. \square

Теорема 37 (Ролль). Если f — гладкая функция на $[a; b]$, и $f(a) = f(b)$, то существует $c \in (a; b)$, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. В точке максимума или минимума f на $[a; b]$ достигается ноль производной. Если они обе совпадают с концами отрезка, то значит функция константа, а тогда в любой точке отрезка производная равна нулю. \square

Теорема 38. Если f и g непрерывные на $[a; b]$ и гладкие на $(a; b)$ функции, а $g' \neq 0$, то существует $c \in (a; b)$, что

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Пусть

$$\lambda := \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

а $\tau(x) := f(x) - \lambda g(x)$. В таком случае

$$\frac{\tau(a) - \tau(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{(f(a) - f(b) - \lambda(g(a) - g(b)))}{g(a) - g(b)} = \lambda - \lambda = 0$$

значит $\tau(a) = \tau(b)$, значит есть $c \in [a; b]$, что $\tau'(c) = 0$. Тогда

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{(\tau + \lambda g)'(c)}{g'(c)} = \frac{\tau'(c)}{g'(c)} + \lambda = \lambda = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

\square

Теорема 39 (Лагранж). Если f непрерывна на $[a; b]$ и гладка на $(a; b)$, то существует $c \in (a; b)$, что

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$$

Доказательство. Очевидно следует из предыдущей теоремы с помощью подстановки $g(x) = x$. \square

Теорема 40. Пусть f — гладкая на $(a; b)$ функция.

1. Если $f' \geq 0$, то f возрастающая функция.
2. Если $f' > 0$, то f строго возрастающая функция.
3. Если f возрастающая функция, то $f' \geq 0$.

Теорема 41. Пусть f — гладкая на $[a; b]$ функция. Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in [a; b]$, то $f \equiv \text{const}$ на том же отрезке.

Замечание 4. Функция $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ (доопределённая в нуле) имеет производную $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ в случае ненулевых x и производную $f'(0) = 0$. При этом легко видно, что f' не является непрерывной функцией (она имеет разрыв в том же нуле).

Теорема 42. Если f гладка на $(a; b)$, а f' не равна нулю, то f' либо положительна, либо отрицательна.

Доказательство. f не принимает никакого значения на $(a; b)$ дважды (т.к. иначе у производной был бы корень), значит она либо строго возрастает, либо строго убывает, а значит f' либо неотрицательна, либо неположительна соответственно. Но ноль принимать не может, поэтому последнее утверждение равносильно тому, что f либо строго положительна, либо строго отрицательна. \square

Теорема 43. Пусть f гладка на $(a; b)$ и для некоторых $u, v \in (a; b)$ верно, что $f'(u) < \alpha < f'(v)$. Тогда существует $c \in (u; v)$, что $f'(c) = \alpha$.

Доказательство. Пусть $g(x) := f(x) - \alpha x$. Тогда $g'(u) < 0 < g'(v)$, значит g не может строго возрастать или убывать на $(u; v)$, значит $\exists c \in (u; v)$, что $g'(c) = 0$, а значит $f'(c) = \alpha$. \square

Замечание 5. Данная теорема по сути является теоремой о промежуточном значении для производной.

Теорема 44. Пусть f непрерывна на $[a; b]$ и гладка на $(a; b)$. Пусть также $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ существует и равен d . Тогда $f'(a)$ тоже существует и равна d .

Доказательство. Есть несколько способов:

1. Несложно видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ есть некоторая правая окрестность a , в которой функция f' лежит в ε -окрестности d . Тогда $f(x) - (d - \varepsilon)x$ возрастает в данной окрестности, а $f(x) - (d + \varepsilon)x$ убывает, значит $f(x) - f(a) \in ((d - \varepsilon)(x - a); (d + \varepsilon)(x - a))$. В таком случае $f'(a)$ определена и равна d .
2. По теореме Лагранжа для любого $x \in [a; b]$ найдётся $\xi \in (a; x)$, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

Значит

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(\xi) = d$$

что буквально значит, что $f'(a) = d$.

□

Теорема 45 (правило Лопиталя). Пусть $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$. Пусть также f и g гладки и $g' \neq 0$ на $(a; b)$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

если второй предел определён.

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$, а

$$d := \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда есть $\delta > 0$, что для любого $t \in (a; a + \delta)$ значение $f'(t)/g'(t)$ лежит в $U_\varepsilon(d)$. Легко видеть, что для любых $x, y \in (a; a + \delta)$ существует $\xi \in (x; y) \subseteq (a; a + \delta)$, что

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = f'(\xi) \in U_\varepsilon(d)$$

Устремляя x к a , получаем, что $f(y)/g(y)$ тоже лежит в $U_\varepsilon(d)$. Тогда по определению предела

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = d = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Определение 29. f'' — вторая производная f , т.е. $(f')'$, а $f^{(n)}$ — n -ая производная f , т.е. $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, $f^{(0)} := f$.

Определение 30. $P(x)$ — полином Тейлора степени n функции f , если $\deg(P) \leq n$, а

$$f(x) - P(x) = o((x - a)^n), \quad x \rightarrow a$$

Теорема 46. Если P_1 и P_2 — полиномы Тейлора степени n функции f , то $P_1 = P_2$.

Теорема 47. Пусть $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$ определены на $(t - \delta; t + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$ и определена $f^{(n)}(t)$. Тогда для всякого $x \in U_\delta(t)$

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x - t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + o((x - t)^n)$$

Доказательство. Рассмотрим $g(x) := f(x) - f(t)/0! \cdot (x - t)^0 - \dots - f^{(n)}(t)/n! \cdot (x - t)^n$. Тогда задача сведена к следующей лемме.

Лемма 47.1. Если $g^{(1)}, \dots, g^{(n-1)}$ определены на $(t - \delta; t + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$ и

$$g(t) = g^{(1)}(t) = \dots = g^{(n)}(t) = 0.$$

Тогда $g(x) = o((x - t)^n)$.

Доказательство. Докажем по индукции по n .

База. Пусть $n = 1$. Тогда очевидно, что $f(x) = f(t) + f'(t)(x - t) + o(x - t) = o(x - t)$.

Шаг. По предположению индукции $f'(x) = o((x - t)^n)$. Тогда мы имеем, что

$$f(x) - f(t) = f'(\xi)(x - t)$$

для некоторого $\xi \in (x, t)$. Тогда

$$\frac{f(x) - f(t)}{(x - t)^n} = \frac{f'(\xi)}{(x - t)^{n-1}} = \frac{o((\xi - t)^{n-1})}{(x - t)^{n-1}} = o(1) \frac{(\xi - t)^{n-1}}{(x - t)^{n-1}} = o(1)$$

□

□

Теорема 48. Пусть $f(t) = f^{(1)}(t) = \dots = f^{(n)}(t) = 0$, а $f^{(n+1)} \neq 0$. Если n чётно, то t — не экстремальная точка функции f , иначе t — экстремальная точка функции f .

Теорема 49. Пусть $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{(1)}, \dots, f^{(n+1)}$ определены на $(t - \delta; t + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда для всякого $x \in U_\delta(t)$ существует $\xi \in (x; t)$, что

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

Доказательство. Точно так же сведём f к g , что $g(t) = \dots g^{(n)}(t) = 0$. Тогда требуется показать, что $g(x) = g^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! \cdot (x-t)^{n+1}$ для некоторого $\xi \in (x, t)$. Докажем это по индукции.

База. $n = 0$. Теорема Лагранжа.

Шаг.

$$\frac{f(x)}{(x-t)^{n+1}} = \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{n+1} - (t-t)^{n+1}} = \frac{f'(\xi)}{(n+1)(\xi-t)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$$

где $\xi \in (x, t)$ (существует по теореме Лагранжа), а $\eta \in (\xi, t) \subseteq (x, t)$ (существует по предположению индукции для f' и ξ). Отсюда следует искомое утверждение. □

2.5 Стандартные функции, ряды Тейлора и их сходимость

Тут нужно рассказать про функции \exp , \sin , \cos и $(1+x)^\alpha$ и их ряды

Определение 31. f является (поточечным) пределом $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ на E , если $\lim\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty = f(x)$ для любого $x \in E$.

Определение 32. f является равномерным пределом $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ на E , если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и $x \in E$.

Теорема 50 (Стокс, Зейдель). Пусть $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность непрерывных функций, и $f_n \rightarrow f$ равномерно на E . Тогда f непрерывна.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ есть такое $n \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ для всех $x \in E$. Тогда существует $\delta > 0$, что $f_n(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(t))$ для данного t . Тогда

$$f(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(U_\delta(t))) \subseteq U_{2\varepsilon/3}(f_n(t)) \subseteq U_\varepsilon(f(t)).$$

□

Теорема 51 (Коши). TFAE (the following are equivalent):

1. $f_n \rightarrow f$ равномерно сходится на E .
2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$ для любых $k, l > N$ и $x \in E$.

Теорема 52 (Вейерштрасс). Пусть $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность непрерывных функций, что есть последовательность чисел $\{d_n\}_{n=0}^\infty$, для которой верно, что $|u_n| < d_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $\sum_{n=0}^\infty d_n$ сходится. Тогда $\sum_{n=0}^\infty u_n$ равномерно сходится.

Теорема 53. Пусть $f_n \rightarrow f$ на E и $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ гладкие. Если $f'_n \rightarrow g$ равномерно, то f тогда тоже гладка и $f' = g$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что $|f'_k - f'_l| < \varepsilon/3$ для всех $k, l > N$. Тогда имеем, что

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y} \right| = \left| \frac{(f_k - f_l)(x) - (f_k - f_l)(y)}{x - y} \right| = |(f_k - f_l)'(\xi)| < \varepsilon/3$$

Устремляя l к бесконечности получаем, что

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \varepsilon/3$$

Также имеем, что есть такое $\delta > 0$, что для всех $y \in U_\delta(x)$

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - f'_k(x) \right| < \varepsilon/3$$

Также есть $M \in \mathbb{N}$, что $|f'_k - g| < \varepsilon/3$ для любого $k > M$. Складывая всё вместе, получаем, что для всех $k > \max(N, M)$ и $y \in U_\delta(x)$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - g(x) \right| < \varepsilon$$

Значит f гладка и $f' = g$. □

Следствие 53.1. Если $\{f^{(0)}\}, \dots, \{f^{(n-1)}\}$ сходятся, а $f^{(n)}$ равномерно сходится. Тогда то же верно и про первые n производных.

Следствие 53.2. Если ряд Тейлора сходится, то функция бесконечно гладкая.

3 Примеры и контрпримеры

Название раздела?

Теорема 54. Существует непрерывная функция f на отрезке $[a; b]$, которая не имеет производной ни в какой точке на отрезке $[a; b]$

Доказательство. Можно привести примеры данной функции f .

1. (функция Вейерштрасса) Определим

$$f_0(x) := \frac{1}{2} - \left| x - [x] - \frac{1}{2} \right| \quad f_n(x) := \frac{f_0(4^n x)}{4^n} \quad f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$$

Поскольку $|f_n| = 1/4^n$, а $\sum_{i=0}^{\infty} 1/4^i$ сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд равномерно сходится к f , а поскольку каждая f_n непрерывна, то по теореме Стокса-Зейделя функция f непрерывна. Теперь осталось показать, что у f нет производных.

Пусть a — произвольная точка из \mathbb{R} . Заметим, что для всяких m и n , что $m \geq n$, период f_m равен $1/4^m$, значит $1/4^m \mid 1/4^n$, а тогда $f_m(a \pm 1/4^n) = f_m(a)$. Значит для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f(a \pm 1/4^n) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(a \pm 1/4^n) - f_i(a)$$

Заметим, что a находится на отрезке монотонности функции f_{n-1} длины $1/(2 \cdot 4^{n-1}) = 2/4^n$, который также является отрезком монотонности каждой функции из f_0, \dots, f_{n-2} . Поскольку $1/4^n$ в два раза меньше, то либо $a + 1/4^n$, либо $a - 1/4^n$ лежит на том же отрезке монотонности; пусть это будет точка b_n . Тогда имеем, что

$$\left| \frac{f_0(b_n) - f_0(a)}{b_n - a} \right| = \left| \frac{f_1(b_n) - f_1(a)}{b_n - a} \right| = \dots = \left| \frac{f_{n-1}(b_n) - f_{n-1}(a)}{b_n - a} \right| = 1$$

Следовательно

$$\frac{f(b_n) - f(a)}{b_n - a} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(b_n) - f_i(a)}{b_n - a} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i(b_n) - f_i(a)}{b_n - a}$$

— целое число, совпадающее по чётности с n . Если $f'(a)$ определено, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ сходится, а значит должен сойтись и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a)}{b_n - a};$$

но это последовательность целых значений, значит с какого-то момента она должна быть тождественно равна 0, но это не так, так как нечётных членов бесконечно много в этой последовательности.

2. (пример Глеба Минаева) Рассмотрим $f_0(x) := x$. Представим её как бесконечную ломанную $\dots \leftrightarrow (-2, -2) \leftrightarrow (-1, -1) \leftrightarrow (0, 0) \leftrightarrow (1, 1) \leftrightarrow (2, 2) \leftrightarrow \dots$. Далее будем получать f_{n+1} из f_n следующим образом.

f_n будет некоторой бесконечной в обе стороны ломанной, при этом всегда $f_n(x) = f_n(x+1)$. Следующая функция будет получаться заменой ребра $(a_1, b_1) \leftrightarrow (a_2, b_2)$ на три ребра:

$$(a_1, b_1) \longleftrightarrow \left(\frac{a_1 + 2a_2}{3}, \frac{2b_1 + b_2}{3} \right) \longleftrightarrow \left(\frac{2a_1 + a_2}{3}, \frac{b_1 + 2b_2}{3} \right) \longleftrightarrow (a_2, b_2)$$

Так мы получим f_{n+1} . Рассматриваемой же функцией будет $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Несложно видеть, что звено высоты h каждый раз заменяется на три ребра: два высоты $2h/3$ и одно высоты $h/3$. При этом описанный прямоугольник любого ребра содержит описанные прямоугольники рёбер, на которые он был заменён, а значит, окажется точка на ребре, из его описанного прямоугольника больше не вылезет. Таким образом после функции f_n разброс положений $f_i(x)$ не более $1/3^n$, поэтому поточечный предел определён.

При этом значения в точках $k/3^m$ с некоторого момента неподвижны: после функции f_n значения во всех точках $k/3^n$ не меняются. Таким образом мы имеем, что во всякой окрестности будут точки вида $k/3^n$, $(3k+1)/3^{n+1}$, $(3k+2)/3^{n+1}$ и $(k+1)/3^n$, а они ломают монотонность функции на данном интервале. Таким образом f нигде не монотонна.

Также предположим в точке a есть производная. Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ пару (p_n, q_n) , что p_n и q_n — абсциссы концов звена на котором лежит $(a, f_n(a))$ в ломаной функции f_n ($q_n > p_n$). Тогда заметим, что $q_n - p_n = 1/3^n$, $f_n(p_n) = f(p_n)$, $f_n(q_n) = f(q_n)$, а тогда

$$\frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n} = \frac{f(q_n) - f(p_n)}{q_n - p_n} = \frac{f(q_n) - f(a)}{q_n - a} \cdot \frac{q_n - a}{q_n - p_n} + \frac{f(a) - f(p_n)}{a - p_n} \cdot \frac{a - p_n}{q_n - p_n}$$

Тем
бо-
лее
кар-
ти-
ноч-
ки!!!

Следовательно значение $\frac{f_n(q_n)-f_n(p_n)}{q_n-p_n}$ лежит на отрезке между $\frac{f(q_n)-f(a)}{q_n-a}$ и $\frac{f(p_n)-f(a)}{p_n-a}$; при этом оно является коэффициентом наклона звена $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$.

Заметим, что звено $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$ будет заменено на три, среди которых будет и $(p_{n+1}, f(p_{n+1})) \leftrightarrow (q_{n+1}, f(q_{n+1}))$. Значит коэффициент наклона $(p_{n+1}, f(p_{n+1})) \leftrightarrow (q_{n+1}, f(q_{n+1}))$ можно получить из коэффициента наклона $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$ домножением либо на 2, либо на -1 .

Таким образом мы имеем, что последовательность

$$\left(\frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n} \right)_{n=0}^{\infty}$$

либо расходится по модулю, либо с некоторого момента не меняет модуль, но знакоперебуется. При этом если $f'(a)$ определена, то в некоторой окрестности a значение

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

несильно отличается от $f'(a)$ (чем меньше окрестность, тем меньше отличается). Но если мы будем рассматривать точки p_n и q_n , то для одной из них (обозначим её за x_n) верно, что

$$\left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right| \geq \left| \frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n} \right| \quad \text{sign} \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right) = \text{sign} \left(\frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n} \right)$$

Тогда про последовательность

$$\left(\frac{f_n(x_n) - f_n(a)}{x_n - a} \right)_{n=0}^{\infty}$$

с одной стороны можно сказать, что она сходится к $f'(a)$ (т.к. $|p_n - a|$ и $|q_n - a|$ не более $1/3^n$, а следовательно и $|x_n - a|$); с другой же стороны эта последовательность либо неограниченно растёт по модулю, либо с некоторого момента знакоперебуется, а значит навряд ли сходится — противоречие. Значит ни в какой точке f' не определена.

□

4 Интегрирование

4.1 Первообразная

Определение 33. g — первообразная функции f , если на области определения f верно, что $g' = f$.

Теорема 55. Если g_1 и g_2 — первообразные f на отрезке $[a; b]$, то $g_1 - g_2 = \text{const}$ на том же отрезке.

Доказательство. Очевидно, что $(g_1 - g_2)' = f' - f' = 0$ на отрезке $[a; b]$. Если $g_1 - g_2$ не константна, то есть две точки на отрезке $[a; b]$, в которых принимаются разные значения, а тогда по теореме Лагранжа будет точка строго между ними (а значит и на отрезке), где производная не равна нулю — противоречие. Следовательно $g_1 - g_2$ является константой. □

Замечание 6. Для несвязного множества утверждение неверно. Например, если областью определения f будут два отрезка, то $g_1 - g_2$ будет константной на каждом отрезке, но константы могут быть различны.

Определение 34. Семейство первообразных функции f обозначается как

$$\int f$$

Определение 35. *Линейная форма* — линейная однородная функция ($f(x) = \alpha x$).

Теорема 56.

1.

$$\int \alpha f = \alpha \int f + C$$

3.

$$\int f dg = fg - \int g df$$

2.

$$\int f + g = \int f + \int g$$

4.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left(\int f\right) \circ \varphi$$

Доказательство.

1. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int \alpha f\right)' = \alpha f = \alpha \left(\int f\right)' = \left(\alpha \int f\right)'$$

Таким образом обе стороны отличаются на константу: её корректность гарантирует $+C$.

2. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f + g\right)' = f + g = \left(\int f\right)' + \left(\int g'\right) = \left(\int f + \int g\right)'$$

Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

3. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f dg\right)' = f \cdot g' = (fg)' - g \cdot f' = \left(fg - \int g df\right)'$$

Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

4. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\right)' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \left(\left(\int f\right) \circ \varphi\right)'$$

Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

□

4.2 Суммы Дарбу и интеграл Римана

Определение 36. *Разбиение* отрезка $[a; b]$ — такое семейство $\Sigma := \{I_k\}_{k=1}^n$ отрезков (ненулевой длины), что $[a; b] = \bigcup_{k=1}^n I_k$, и все отрезки из Σ попарно пересекаются не более, чем по одной точке.

Пусть дана функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, где $E \supseteq [a; b]$, и некоторое разбиение Σ отрезка $[a; b]$. Тогда *верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f при разбиении Σ* есть выражения

$$S^+(f, \Sigma) := \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) \quad S^-(f, \Sigma) := \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_{x \in I} f(x)$$

соответственно. (При этом \sup и \inf могут принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ соответственно; и в таких случаях соответствующие суммы Дарбу тоже будут принимать значения $\pm\infty$.)

Пример 2.

- Пусть $f(x) := x^\alpha$, $\alpha > 0$, $[a; b] := [0; 1]$, а $\Sigma := \{[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]\}_{k=1}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} S^+(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \\ S^-(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_{x \in I} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

- Пусть f — функция Дирихле, отрезок $[a; b]$ — любой, и его разбиение Σ — любое. Тогда

$$\begin{aligned} S^+(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot 1 = b - a \\ S^-(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_{x \in I} f(x) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Лемма 57. Пусть даны функция f , отрезка $[a; b]$ и его разбиение Σ . Назовём его подразбиением семейство отрезков Σ' , которое является объединением разбиений отрезков из Σ (иначе говоря, множество концов отрезков Σ является подмножеством концов отрезков Σ'). Тогда верны неравенства

$$S^+(f, \Sigma) \geq S^+(f, \Sigma') \quad S^-(f, \Sigma) \leq S^-(f, \Sigma')$$

Доказательство. Покажем это для верхних сумм Дарбу; для нижних доказательство аналогично.

Пусть $\{\Lambda_I\}_{I \in \Sigma}$ — набор разбиений каждого отрезка I из Σ , что $\Sigma' = \bigcup_{I \in \Sigma} \Lambda_I$. Тогда мы имеем, что для всяких $I \in \Sigma$ и $J \in \Lambda_I$ верно, что

$$\sup_{x \in I} f(x) \geq \sup_{x \in J} f(x)$$

Следовательно

$$\sum_{J \in \Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x \in J} f(x) \leq \sum_{J \in \Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = \left(\sum_{J \in \Lambda_I} |J| \right) \cdot \sup_{x \in I} f(x) = |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x)$$

Значит, суммируя обе части по Σ , получаем, что

$$S^+(f, \Sigma') = \sum_{J \in \Sigma'} |J| \cdot \sup_{x \in J} f(x) = \sum_{I \in \Sigma} \sum_{J \in \Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x \in J} f(x) \leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = S^+(f, \Sigma)$$

□

Лемма 58. Пусть даны функция f , отрезок $[a; b]$, его разбиения Σ_1 и Σ_2 . Тогда

$$S^+(f, \Sigma_1) \geq S^-(f, \Sigma_2)$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\Sigma := \{I \cap J \mid I \in \Sigma_1 \wedge J \in \Sigma_2 \wedge |I \cap J| > 1\}$$

— (минимальное) подразбиение Σ_1 и Σ_2 . Тогда верно, что

$$S^+(f, \Sigma_1) \geq S^+(f, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma_2)$$

□

Следствие 58.1. Пусть фиксированы функция f и отрезок $[a; b]$. Рассмотрим множества

$$D^+ := \{S^+(f, \Sigma) \mid \Sigma \text{ — разбиение } [a; b]\} \quad D^- := \{S^-(f, \Sigma) \mid \Sigma \text{ — разбиение } [a; b]\}$$

Тогда $D^+ \geq D^-$.

Определение 37. Пусть фиксированы функция f и отрезок $[a; b]$, разбиения которого рассматриваются. Если

$$\sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma) = \inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) = S,$$

то тогда f называется *интегрируемой по Риману*, а S называют *интегралом Римана функции f на отрезке $[a; b]$* . Обозначение:

$$\int_a^b f(x) dx := S$$

Лемма 59. Пусть даны функция f и отрезок $[a; b]$. Тогда если для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиение Σ отрезка $[a; b]$, что

$$\forall I \in \Sigma \quad \text{osc}_I f < \varepsilon$$

то f интегрируема по Риману на $[a; b]$.

Доказательство. Обозначим для каждого такого ε разбиение из условия за Σ_ε . Тогда мы имеем, что

$$S^+(f, \Sigma_\varepsilon) - S^-(f, \Sigma_\varepsilon) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot (\sup_I f - \inf_I f) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f < \varepsilon \cdot \sum_{I \in \Sigma} |I| = \varepsilon \cdot (b - a)$$

Т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ верно, что

$$\inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) - \sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma) \leq S^+(f, \Sigma_{\varepsilon/(b-a)}) - S^-(f, \Sigma_{\varepsilon/(b-a)}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Следовательно

$$\inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) = \sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma),$$

что значит, что f интегрируема по Риману. □

Лемма 60. Пусть даны функция f и отрезок $[a; b]$. Тогда f интегрируема по Риману на $[a; b]$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всякого разбиения Σ отрезка $[a; b]$, где $\forall I \in \Sigma \quad |I| < \delta$, верно, что

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f < \varepsilon$$

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть f интегрируема по Риману на $[a; b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения Σ_1 и Σ_2 отрезка $[a; b]$, что

$$\{S^+(f, \Sigma_1); S^-(f, \Sigma_2)\} \subseteq U_{\varepsilon/4} \left(\int_a^b f(x) dx \right)$$

Пусть Σ — общее подразбиение Σ_1 и Σ_2 (например, минимальное). Тогда

$$S^+(f, \Sigma_1) \geq S^+(f, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma_2)$$

Следовательно,

$$\{S^+(f, \Sigma); S^-(f, \Sigma)\} \subseteq U_{\varepsilon/4} \left(\int_a^b f(x) dx \right)$$

Заметим, что в таком случае $\sup_{[a;b]} f$ и $\inf_{[a;b]} f$ ограничены (равны вещественным значениям, а не $\pm\infty$). Поэтому $A := \text{osc}_{[a;b]} f$ является вещественной величиной. Определим также $L := \min_{\Sigma} |I|$.

Пусть Λ — некоторое разбиение $[a; b]$, что длина всякого отрезка не больше $L \cdot \alpha$, где

$$\alpha := \min \left(1, \frac{\varepsilon \cdot |\Sigma|}{2 \cdot A \cdot L} \right) \in (0; 1].$$

Тогда мы имеем, что всякий отрезок I из Λ либо является подотрезком некоторого отрезка J_I из Σ (обозначим множество таких I за Γ), либо является подотрезком объединения двух соседних отрезков K_1 и K_2 из Σ и содержит их общую границу (обозначим множество таких I за Θ). В случае I и J мы имеем, что $\text{osc}_I f \leq \text{osc}_J f$; в случае I , K_1 и K_2 мы имеем, что $\text{osc}_I f \leq \text{osc}_{K_1 \cup K_2} f \leq A$. Следовательно, используя только что оговоренные оценки,

$$\begin{aligned} & \sum_{I \in \Lambda} |I| \cdot \text{osc}_I f \\ &= \sum_{I \in \Gamma} |I| \cdot \text{osc}_I f + \sum_{I \in \Theta} |I| \cdot \text{osc}_I f \\ &\leq \sum_{I \in \Gamma} |I| \cdot \text{osc}_{J_I} f + \sum_{I \in \Theta} |I| \cdot \text{osc}_{[a;b]} f \\ &\leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f + A \cdot \sum_{I \in \Theta} |I| \\ &\leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f + A \cdot L \cdot \alpha \cdot |\Theta| \\ &\leq S^+(f, \Sigma) - S^-(f, \Sigma) + A \cdot L \cdot \alpha \cdot |\Sigma| \\ &\quad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом $\delta := L \cdot \alpha$.

(\Leftarrow) Пусть для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всякого разбиение Σ отрезка $[a; b]$, где $\forall I \in \Sigma |I| < \delta$, верно, что

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f < \varepsilon$$

Тогда

$$S^+(f, \Sigma) - S^-(f, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot (\sup_I f - \inf_I f) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \varepsilon$$

Т.е. для всякого $\varepsilon > 0$

$$\inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) - \sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma) < \varepsilon$$

Следовательно

$$\inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) = \sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma)$$

т.е. f интегрируема на $[a; b]$ по Риману.

□

Теорема 61. Пусть f — непрерывная на $[a; b]$ функция. Тогда она интегрируема по Риману на $[a; b]$.

Доказательство. Поскольку f непрерывна на компакте $[a; b]$, то она равномерно непрерывна, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in [a; b] \quad f(U_{\delta}(x)) \subseteq U_{\varepsilon}(f(x))$$

Для каждого такого ε получаемое δ обозначим за δ_{ε} . Тогда для всякого подотрезка I отрезка $[a; b]$ длины менее $\delta_{\varepsilon/2}$ верно, что $\operatorname{osc}_I f < \varepsilon$. Следовательно для любого разбиения Σ с шагом не более $\delta_{\varepsilon/2}$ (т.е. $\forall I \in \Sigma |I| < \delta_{\varepsilon/2}$) мы имеем, что

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < [a; b] \cdot \varepsilon$$

Поэтому f интегрируема по Риману на $[a; b]$.

□

Теорема 62.

1.

$$\int_a^b \lambda dx = \lambda(b - a)$$

2. Если f интегрируема по Риману на $[a; b]$, то

$$f \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

3. Если f и g интегрируемы по Риману на $[a; b]$, то

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

4. Если f интегрируема по Риману на $[a; b]$, то

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

5. f интегрируема по Риману на $[a; b]$ и $[b; c]$ тогда и только тогда, когда на $[c; a]$, и во всех случаях

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Доказательство.

1. Очевидно, что для всякого разбиения Σ верно, что $S^+(f, \Sigma) = S^-(f, \Sigma) = \lambda(b - a)$, следовательно и интеграл Римана равен $\lambda(b - a)$.

2. Очевидно, что для всякого разбиения Σ верно, что $S^-(f, \Sigma) \geq 0$, следовательно, если интеграл Римана определён, то он неотрицателен.

3. Очевидно, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения Σ_1 и Σ_2 , что

$$\sum_{I \in \Sigma_1} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \sum_{I \in \Sigma_2} |I| \cdot \operatorname{osc}_I g < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим любое подразбиение Σ разбиений Σ_1 и Σ_2 . Тогда

$$\begin{aligned} S^+(f+g, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I (f+g) \\ &\leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f + \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I g \\ &\leq \sum_{I \in \Sigma_1} |I| \cdot \sup_I f + \sum_{I \in \Sigma_2} |I| \cdot \sup_I g \\ &= S^+(f, \Sigma_1) + S^+(g, \Sigma_2) \end{aligned}$$

Аналогично мы имеем, что $S^-(f+g, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma_1) + S^-(g, \Sigma_2)$. Таким образом отметим две важные строки неравенств.

$$\begin{aligned} S^+(f, \Sigma_1) + S^+(g, \Sigma_2) &\geq S^+(f+g, \Sigma) \geq S^-(f+g, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma_1) + S^-(g, \Sigma_2) \\ S^+(f, \Sigma_1) + S^+(g, \Sigma_2) &\geq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \geq S^-(f, \Sigma_1) + S^-(g, \Sigma_2) \end{aligned}$$

Так мы получаем, что $S^+(f+g, \Sigma)$, $S^-(f+g, \Sigma)$ и $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ — три числа с отрезка

$$[S^-(f, \Sigma_1) + S^-(g, \Sigma_2); S^+(f, \Sigma_1) + S^+(g, \Sigma_2)],$$

длина которого меньше ε . Следовательно $f+g$ интегрируема по Риману на $[a; b]$, и интеграл равен

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

4. Докажем сначала для $\lambda \geq 0$. Для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиение Σ отрезка $[a; b]$, что

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \varepsilon$$

Также имеем, что

$$\begin{aligned} S^+(\lambda f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I \lambda f = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \lambda \cdot \sup_I f = \lambda \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f = \lambda S^+(f, \Sigma) \\ S^-(\lambda f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I \lambda f = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \lambda \cdot \inf_I f = \lambda \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I f = \lambda S^-(f, \Sigma) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} S^+(\lambda f, \Sigma) &= \lambda S^+(f, \Sigma) \geq \lambda \int_a^b f(x)dx \geq \lambda S^-(f, \Sigma) = S^-(\lambda f, \Sigma) \\ S^+(\lambda f, \Sigma) - S^-(\lambda f, \Sigma) &< \lambda \varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом интеграл λf по Риману на $[a; b]$ определён и равен $\lambda \int_a^b f(x)dx$.

Теперь покажем для $\lambda = -1$. Заметим, что

$$\begin{aligned} S^+(-f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I -f = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot -\inf_I f = -\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I f = -S^-(f, \Sigma) \\ S^-(-f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I -f = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot -\sup_I f = -\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f = -S^+(f, \Sigma) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} S^+(-f, \Sigma) &= -S^-(f, \Sigma) \geq -\int_a^b f(x)dx \geq -S^+(f, \Sigma) = S^-(-f, \Sigma) \\ S^+(-f, \Sigma) - S^-(-f, \Sigma) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом интеграл $-f$ по Риману на $[a; b]$ определён и равен $-\int_a^b f(x)dx$.

Используя доказанные утверждения получаем, что для всякого λ верно, что

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f(x)dx &= \int_a^b \text{sign}(\lambda) \cdot |\lambda| f(x)dx \\ &= \text{sign}(\lambda) \int_a^b |\lambda| f(x)dx \\ &= \text{sign}(\lambda) |\lambda| \int_a^b f(x)dx \\ &= \lambda \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

5. Если f интегрируема по Риману на некотором отрезке I , то $\sup_I f$ и $\inf_I f$ равны некоторым вещественным значениям (не $\pm\infty$).

Таким образом пусть f интегрируема по Риману на $[a; b]$ и $[b; c]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения Σ_L отрезка $[a; b]$ и Σ_R отрезка $[b; c]$, что

$$\sum_{I \in \Sigma_L} |I| \text{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \sum_{I \in \Sigma_R} |I| \text{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2}$$

Следовательно, если определить $\Sigma := \Sigma_L \cup \Sigma_R$,

$$S^+(f, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \sup_I f = \sum_{I \in \Sigma_L} |I| \sup_I f + \sum_{I \in \Sigma_R} |I| \sup_I f \geq \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

По аналогии получаем, что

$$S^+(f, \Sigma) \geq \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \geq S^-(f, \Sigma)$$

При этом

$$S^+(f, \Sigma) - S^-(f, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \text{osc}_I f = \sum_{I \in \Sigma_L} |I| \text{osc}_I f + \sum_{I \in \Sigma_R} |I| \text{osc}_I f < \varepsilon$$

Таким образом f интегрируема по Риману на $[a; c]$, а интеграл равен $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$. Пусть теперь f интегрируема на $[a; c]$. Тогда для всякого разбиения Σ отрезка $[a; c]$ мы можем рассмотреть

$$\Sigma_L := \{I \cap [a; b] \mid I \in \Sigma\}$$

и тогда

$$\sum_{I \in \Sigma_L} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f$$

Следовательно есть разбиения со сколь угодно маленькой осцелляцией f на них, а значит f интегрируема на $[a; b]$; аналогично и на $[b; c]$. А по предыдущим рассуждениям достигается равенство в тождестве интегралов.

□

Теорема 63. Пусть дана функция f , а $M = \sup_{[a; b]} |f|$. Тогда

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a)$$

Доказательство. Очевидно, что при разбиении $\Sigma := \{[a; b]\}$

$$\begin{aligned} S^+(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f = (b-a) \cdot \sup_{[a; b]} f \\ S^-(f, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I f = (b-a) \cdot \inf_{[a; b]} f \end{aligned}$$

Следовательно

$$M(b-a) \geq (b-a) \sup_{[a; b]} f = S^+(f, \Sigma) \geq \int_a^b f(x)dx \geq S^-(f, \Sigma) = (b-a) \inf_{[a; b]} f \geq -M(b-a)$$

откуда следует требуемое.

□

Теорема 64. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда

$$F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

является первообразной f .

Доказательство. Рассмотрим какие-то x и y , что $a \leq x < y \leq b$. Тогда

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt$$

Следовательно, рассматривая $\Sigma := \{[x; y]\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I f &\leq F(y) - F(x) \leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f \\ (y-x) \cdot \inf_{[x; y]} f &\leq F(y) - F(x) \leq (y-x) \cdot \sup_{[x; y]} f \\ \inf_{[x; y]} f &\leq \frac{F(y) - F(x)}{y-x} \leq \sup_{[x; y]} f \end{aligned}$$

Немного меняя обозначения, получаем, что для всякого $\varepsilon \in [a - x; b - x] \setminus \{0\}$

$$\inf_{U_{|\varepsilon|}(x)} f \leq \frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \leq \sup_{U_{|\varepsilon|}(x)} f$$

Заметим, что по непрерывности f

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf_{U_\varepsilon(x)} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{U_\varepsilon(x)} f = f(x)$$

Следовательно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} = f(x)$$

Иначе говоря $F'(x) = f(x)$. Таким образом $F' = f$. □

Следствие 64.1 (формула Ньютона-Лейбница). Пусть F — первообразная непрерывной на $[a; b]$ функции f . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Заметим, что $G(x) := \int_a^x f(t) dt$ — первообразная f . Следовательно $G(x) - F(x) = C$ на $[a; b]$. Значит

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) = G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

□

Теорема 65. Пусть $(f_n)_{n=0}^\infty$ — последовательность интегрируемых по Риману на $[a; b]$ функций — равномерно сходится к f . Тогда f интегрируема по Риману на $[a; b]$, и

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Доказательство. Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для всяких $n, m > N$ верно, что

$$|f_n - f_m| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)};$$

следовательно для всякого $n > N$ верно, что

$$|f - f_n| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

При этом существует такое разбиение Σ отрезка $[a; b]$, что

$$S^+(f_{N+1}, \Sigma) - S^-(f_{N+1}, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом для всякого $n > N$ верно, что

$$\begin{aligned} S^+(f_n, \Sigma) &= \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f_n \leq \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3(b-a)} + \sup_I f_{N+1} \right) = \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f_{N+1} \\ &= S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3}; \end{aligned}$$

аналогично $S^-(f_n, \Sigma) \geq S^-(f_{N+1}, \Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$. Аналогично данные утверждения верны и для f (вместо f_n).

Заметим, что

$$\begin{aligned} S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} &\geq S^+(f_n, \Sigma) \geq \int_a^b f_n(x) dx \geq S^-(f_n, \Sigma) \geq S^-(f_{N+1}, \Sigma) - \frac{\varepsilon}{3} \\ S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} &\geq S^+(f, \Sigma) \geq S^-(f, \Sigma) \geq S^-(f_{N+1}, \Sigma) - \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Таким образом

$$S^+(f, \Sigma) - S^-(f, \Sigma) < \varepsilon,$$

следовательно f интегрируема по Риману на $[a; b]$. Таким образом мы имеем, что

$$\begin{aligned} S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} &\geq \int_a^b f_n(x) dx \geq S^-(f_{N+1}, \Sigma) - \frac{\varepsilon}{3} \\ S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} &\geq \int_a^b f(x) dx \geq S^-(f_{N+1}, \Sigma) - \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

т.е. для всех $n > N$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Это значит, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

□

Лемма 66. Если f и g интегрируемы по Риману на $[a; b]$, то и $f \cdot g$.

Доказательство. Заметим, что, поскольку f и g интегрируемы по Риману, есть такие константы $C_f > 0$ и $C_g > 0$, что $|f| \leq C_f$ и $|g| \leq C_g$. Следовательно для всяких $x, y \in [a; b]$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq C_g |f(x) - f(y)| + C_f |g(x) - g(y)| \end{aligned}$$

Значит для всякого отрезка I верно, что

$$\text{osc}_I f \cdot g \leq C_g \text{osc}_I f + C_f \text{osc}_I g$$

Следовательно для всякого разбиения Σ отрезка $[a; b]$

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f \cdot g \leq C_g \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f + C_f \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I g$$

Вспомним, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения Σ_f и Σ_g отрезка $[a; b]$, что

$$\sum_{I \in \Sigma_f} |I| \cdot \text{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2C_g} \qquad \sum_{I \in \Sigma_g} |I| \cdot \text{osc}_I g < \frac{\varepsilon}{2C_f}$$

Рассмотрим общее подразбиение Σ разбиений Σ_f и Σ_g . Для него верны предыдущие предыдущие неравенства. Следовательно

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \text{osc}_I f \cdot g < C_g \frac{\varepsilon}{2C_g} + C_f \frac{\varepsilon}{2C_f} = \varepsilon$$

Поэтому $f \cdot g$ интегрируема по Риману на $[a; b]$.

□

4.3 У чего есть выражаемая первообразная?

Лемма 67.

1.

$$\int 0 = C$$

5.

$$\int e^x = e^x + C$$

2.

$$\int a_0 + \dots + a_n x^n = C + a_0 x + \dots + a_n x^{n+1}$$

6.

$$\int \sin(x) = -\cos(x) + C$$

3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x > 0$

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\int \cos(x) = \sin(x) + C$$

7.

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

4. $\forall x > 0$

$$\int \frac{1}{x} = \ln(x) + C$$

8.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

Теорема 68. Следующие виды функций имеют выражаемую первообразную:

1. рациональные функции;

3. рациональные функции от \sinh и \cosh ;

2. рациональные функции от \sin и \cos ;

4. рациональные функции от x и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, где $a \neq 0$.

Доказательство.

1. Каждая рациональная функция представляется в виде суммы полиномов, членов вида $\frac{k}{(x+a)^n}$ и членов вида $\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$. Покажем, что каждый из них имеет выражаемую первообразную.

- Первообразная многочлена очевидна.

-

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a) + C$$

- Для всякого $n > 1$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$$

-

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{tg}^{-1}(x)$$

-

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

- Для всякого $n > 1$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}}$$

- Заметим, что

$$\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)' = \frac{1}{(x^2+1)^n} - 2n \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{2n}{(x^2+1)^{n+1}} - \frac{2n-1}{(x^2+1)^n}$$

Следовательно

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

Таким образом несложно понять по индукции, что $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ для $n > 1$ есть некоторая сумма рациональных функций и tg^{-1} .

- Линейными заменами задача нахождения первообразных у $\frac{1}{(x+a)^n}$ и $\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$ сводится к нахождению первообразных $\frac{1}{x^n}$, $\frac{1}{(x^2+1)^n}$ и $\frac{x}{(x^2+1)^n}$.

2. Заметим, что

$$\sin(x) = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}(x/2)^2} \quad \cos(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}(x/2)^2}{1 + \operatorname{tg}(x/2)^2} \quad dx = \frac{2d(\operatorname{tg}(x/2))}{1 + \operatorname{tg}(x/2)^2}$$

Следовательно задача сводится к нахождению первообразной рациональной функции при помощи подстановки $t := \operatorname{tg}(x)$.

3. С одной стороны это можно свести к предыдущей задаче заменой $t := ix$. С другой стороны можно заметить, что

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad dx = \frac{d(e^x)}{e^x}$$

Следовательно задача сводится к нахождению первообразной рациональной функции при помощи подстановки $t := e^x$.

4. Линейными подстановками можно свести задачу к нахождению первообразной рациональной функции от y и $\sqrt{\pm y^2 \pm 1}$ или только от y .

- Случай рациональной функции только от y уже был разобран.
- Если нам дана рациональная функция от y и $\sqrt{1-y^2}$, то заменой $t := \sin^{-1}(y)$ она сводится к рациональной функции от \sin и \cos .
- Если нам дана рациональная функция от y и $\sqrt{y^2-1}$, то заменой $t := \cosh^{-1}(y)$ она сводится к рациональной функции от \sinh и \cosh .
- Если нам дана рациональная функция от y и $\sqrt{1+y^2}$, то заменой $t := \sinh^{-1}(y)$ она сводится к рациональной функции от \sinh и \cosh .

□

5 Логарифм? Полезности?? Что???

Теорема 69. Пусть дана функция $\varphi : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, что

- $\forall a, b \in (0; +\infty) \quad \varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$
- φ монотонна.

Тогда верны следующие утверждения:

1. $\varphi(1) = 0$;
2. $\forall a \in (0; +\infty), n \in \mathbb{N} \quad \varphi(a^n) = n\varphi(a)$;
3. $\forall a \in (0; +\infty) \quad \varphi(a^{-1}) = -\varphi(a)$;
4. $\forall a \in (0; +\infty), q \in \mathbb{Q} \quad \varphi(a^q) = q\varphi(a)$;
5. φ непрерывна;
6. φ бесконечно дифференцируема;
7. $\varphi'(x) = \frac{C}{x}$ для некоторого $C \in \mathbb{R}$;
8. все такие ϕ имеют вид $\int_1^x \frac{C dt}{t}$ для некоторого $C > 0$ и наоборот: любая такая функция удовлетворяет условиям на ϕ .

Доказательство.

1.

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) - \varphi(1) = \varphi(1) - \varphi(1) = 0.$$

2. Докажем по индукции по n . База при $n = 0$ и $n = 1$ очевидна. Весь шаг:

$$\varphi(a^{n+1}) = \varphi(a^n) + \varphi(a) = n\varphi(a) + \varphi(a) = (n+1)\varphi(a).$$

3.

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a \cdot a^{-1}) - \varphi(a) = \varphi(1) - \varphi(a) = -\varphi(a)$$

4. Пусть $q = \frac{kn}{m}$, где $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, а $k = \pm 1$. Тогда

$$m\varphi(a^q) = \varphi(a^{mq}) = \varphi(a^{kn}) = k\varphi(a^n) = kn\varphi(a) = qm\varphi(a)$$

Следовательно

$$\varphi(a^q) = q\varphi(a)$$

5. Заметим, что $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$ в связи с монотонностью и ограниченностью (например, значением $\varphi(1/2)$) функции φ определён, значит равен некоторому b . Тогда

$$2b = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x^2) = \lim_{y \rightarrow 1^+} \varphi(y) = b$$

значит $b = 0$. Следовательно

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x^{-1}) = - \lim_{y \rightarrow 1^+} \varphi(y) = 0$$

Таким образом φ непрерывна в 1. Следовательно

$$\lim_{x \rightarrow y} \varphi(x) = \varphi(y) + \lim_{x \rightarrow y} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \varphi(y) + \lim_{\alpha \rightarrow 1} \varphi(\alpha)$$

т.е. φ непрерывна во всех точках $(0; +\infty)$.

6. Рассмотрим

$$\Phi := (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \varphi(t) dt$$

Тогда мы имеем, что Φ — первообразная, поскольку φ непрерывна. А тогда если φ имеет $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ производных, то Φ имеет $n + 1$ производную. Заметим, что

$$\Phi(2x) - \Phi(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt = x \int_x^{2x} \varphi\left(\frac{t}{x}\right) d\frac{t}{x} + x \int_x^{2x} \varphi(x) d\frac{t}{x} = Cx + \varphi(x)x$$

где

$$C := \int_1^2 \varphi(t) dt$$

Следовательно

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$$

Таким образом, если Φ имеет $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ производных, то φ тоже. Значит Φ и ϕ бесконечно дифференцируемы.

7. Пусть фиксировано некоторое $y > 0$. Следовательно

$$y\varphi'(xy) = (\varphi(xy))' = (\varphi(x) + \varphi(y))' = \varphi'(x)$$

а значит, если подставить $y = x^{-1}$

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi'(1)}{x}$$

Таким образом определяя $C := \varphi'(1)$ имеем, что

$$\varphi'(x) = \frac{C}{x}$$

8. Действительно, если есть некоторое ϕ , то ϕ и $\int_1^x \frac{\phi'(1)dt}{t}$ являются первообразными $\frac{\phi'(1)}{x}$, значит отличаются на константу. При этом в 1 они обе равны 0, значит функции совпадают.

Теперь же покажем, что $\psi(x) := \int_1^x \frac{Cdt}{t}$ является корнем функционального уравнения.

- Поскольку $\frac{C}{x}$ — функция одного знака, то ψ монотонна.
-

$$\begin{aligned} \psi(xy) &= \int_1^{xy} \frac{Cdt}{t} &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_x^{xy} \frac{Cdt}{t} \\ &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_x^{xy} \frac{Cd(t/x)}{(t/x)} &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_1^y \frac{Cds}{s} &= \psi(x) + \psi(y) \end{aligned}$$

□

Определение 38. *Натуральный логарифм* — функция

$$\ln : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Экспонента — функция

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty), x \mapsto \ln^{-1}(x)$$

Теорема 70.

1. \exp корректно определена;
2. \exp непрерывна;
3. \exp бесконечно дифференцируема, и каждая производная \exp равна \exp ;
4. $\exp(0) = 1$;
5. $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$;
- 6.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

Доказательство.

1. Поскольку \ln монотонна, то всякое значение из области значений \ln — всё \mathbb{R} — принимается единожды. Следовательно \exp корректно определена.
2. Поскольку всякая монотонная биекция из интервала в интервал является непрерывной функцией, то и \exp непрерывна на всяком интервале.
3. По свойству дифференцирования

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x)$$

Таким образом \exp дифференцируема раз, и при дифференцировании не меняется. Следовательно \exp бесконечно дифференцируема.

4. Следует из того, что $\ln(1) = 0$.
5. Следует из того, что $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, подстановкой $x := \ln^{-1}(a)$ и $y := \ln^{-1}(b)$.
6. Вспомним, что по теореме 49 для всякого $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ есть $\xi_n \in (0; x)$, что

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \frac{\exp^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Вспомним также, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$$

Чтобы показать, что предел этой последовательности реально совпадает с $\exp(x)$, покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = 0$$

Действительно,

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \exp(|x|) \left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

Пусть $N = \lceil 2|x| \rceil$. Тогда для всякого $n \geq N$ имеем, что

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^N}{N!} \prod_{k=N+1}^{n+1} \frac{|x|}{k} < \frac{|x|^N}{N!} \prod_{k=N+1}^{n+1} \frac{1}{2} = \frac{|x|^N \cdot 2^{N-1}}{N!} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Следовательно, с момента N последовательность

$$\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right)_{n=0}^{\infty}$$

сходится к 0 не медленнее, чем геометрическая прогрессия, а тогда и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = 0$$

□

Теорема 71. 1. $(a^x)' = \ln(a)a^x$ 2. $(x^a)' = ax^{a-1}$

Доказательство.

1.

$$(a^x)' = \exp(x \ln(a))' = (x \ln(a))' a^x = \ln(a)a^x$$

2.

$$(x^a)' = \exp(a \ln(x))' = (a \ln(x))' x^a = \frac{a}{x} x^a = ax^{a-1}$$

□

Теорема 72. Пусть $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{(1)}, \dots, f^{(n+1)}$ определены на $(t - \delta; t + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда для всякого $x \in U_\delta(t)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k + \frac{1}{n!} \int_t^x f^{(n+1)}(s) (x-s)^n ds$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

Тогда мы имеем, что $g(t) = g'(t) = g^{(2)}(t) = \dots = g^{(n)}(t) = 0$, а $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$. Тогда нужно показать, что

$$g(x) = \frac{1}{n!} \int_t^x f^{(n+1)}(s) (x-s)^n ds$$

Докажем это по индукции по n .

База. $n = 0$. Тогда

$$g(x) = g(t) + \int_t^x g'(s) ds = \frac{1}{n!} \int_t^x g^{(n+1)}(s) (x-s)^n ds$$

Шаг. Пусть утверждение верно для n докажем для $n + 1$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{n!} \int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^n ds \\
&= \frac{-g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)}}{(n+1)!} \Big|_x^t + \frac{1}{(n+1)!} \int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)} ds \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)} ds
\end{aligned}$$

□

5.1 Формулы Валлиса и Стирлинга

Теорема 73 (формула Валлиса).

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots$$

Доказательство. Для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определим

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx$$

Заметим, что $\sin(x)^{n+1} < \sin(x)^n$ на $(0; \frac{\pi}{2})$, следовательно $I_n > I_{n+1}$. Также

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n+2} dx \\
&= -\sin(x)^{n+1} \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n \cos(x)^2 dx \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n (1 - \sin(x)^2) dx \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx - (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n+2} dx \\
&= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}
\end{aligned}$$

Следовательно $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. При этом понятно, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$, а $I_1 = 1$. Таким образом для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \\
I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}
\end{aligned}$$

Вспомним, что $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$. Следовательно

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} &< \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \\
\frac{(2n)!! \cdot (2n)!!}{(2n-1)!! \cdot (2n+1)!!} &< \frac{\pi}{2} < \frac{(2n)!! \cdot (2n-2)!!}{(2n-1)!! \cdot (2n-1)!!} \\
\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} &< \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

Заметим, что в последнем неравенстве отношение значений слева и справа сходится к 1, значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

□

Теорема 74 (формула Стирлинга).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

Доказательство. Вспомним, что для $x \in (-1; 1)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Следовательно

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots = 2x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots \right)$$

Пусть $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Подставим $x = \frac{1}{2n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{2x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots \in \left(1; 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \right) = \left(1; 1 + \frac{1}{12n(n+1)} \right) \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} := \left(\frac{n! \cdot e^n}{n^{n+1/2}} \right)_{n=1}^{\infty}$. Заметим, что

$$\ln \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = \ln \left(\frac{(n+1) \cdot e}{(n+1)^{n+3/2} / n^{n+1/2}} \right) = \ln \left(\frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1/2}} \right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Таким образом $\ln(x_{n+1}/x_n) \in (0; \frac{-1}{12n(n+1)})$. Следовательно $\ln(x_n) < \ln(x_1)$ и

$$\begin{aligned} \ln(x_n) - \ln(x_1) &> \frac{-1}{12n(n-1)} + \frac{-1}{12(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{-1}{12 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \end{aligned}$$

Значит $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x_n) \geq \frac{-1}{12}$ (предел убывающей ограниченной последовательности), а тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ определён и равен $\alpha > 0$. Значит

$$n! \sim \alpha \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

Теперь нужно показать, что $\alpha = \sqrt{2\pi}$. По формуле Валлиса

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} &\sim 2 \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 2 \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 2 \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &\sim 2^{2n+1} \frac{\alpha^2 n \left(\frac{n}{e} \right)^{2n}}{\alpha \sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e} \right)^{2n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{2^{2n+1} \alpha^2 n}{\alpha (2n) 2^{2n}} = \alpha \end{aligned}$$

Таким образом $\alpha = \sqrt{2\pi}$.

□

Замечание 7. Из оценки $\ln(x_n) - \ln(x_1) > \frac{1}{12}(\frac{1}{n} - 1)$ следует, что

$$\begin{aligned}\ln(x_n) - \ln(\alpha) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \ln(x_n) - \ln(x_m) = \sum_{k=n}^{\infty} \ln(x_k) - \ln(x_{k+1}) \\ &< \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{12k(k+1)} = \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{12n}\end{aligned}$$

Таким образом $x_n = \alpha(1 + O(\frac{1}{n}))$. А значит

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Лемма 75. Пусть дана функция $f \geq 0$, невозрастающая на $[0; +\infty)$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда $\int_0^{\infty} f(x)dx$ сходится.

Доказательство.

(\Rightarrow)

$$\int_0^N f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{N-1} f(k)$$

Следовательно, поскольку $\int_0^A f(x)dx$ возрастает по A , но ограничена сверху значением $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$, то $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

(\Leftarrow)

$$\sum_{k=0}^N f(x) \leq f(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)dx = f(0) + \int_0^N f(x)dx$$

Следовательно, поскольку $\sum_0^N f(x)dx$ возрастает по N , но ограничена сверху значением $f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)dx$, то $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ сходится.

□

Теорема 76.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

для некоторой константы γ .

Определение 39. Константа γ из прошлой теоремы называется *константой Эйлера* или *константой Эйлера-Маскерони*.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1)$$

Заметим, что

$$\ln(k-1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \dots$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \dots \right)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k^3} + \dots < \frac{1}{2k^2} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots \right) = \frac{1}{2k(k-1)} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k}$$

то

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \dots \right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Значит

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \dots \right)$$

— ряд положительных значений, ограниченный сверху значением $1/2$, следовательно сходится; пусть к некоторой константе λ . Значит мы получаем, что

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \dots \right) = \lambda - o(1)$$

и следовательно

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 - \lambda + o(1) = \gamma + o(1)$$

□

Замечание 8. Таким рассуждением мы получаем, что ряд

$$\sum_{k,l \geq 2} \frac{1}{l \cdot k^l}$$

сильно сходится и равен $1 - \gamma$. Следовательно

$$1 - \gamma = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\zeta(l) - 1}{l}$$

5.2 Бернулли обернули

Определение 40. Определим последовательность чисел Бернулли $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ как последовательность, чья экспоненциальная производящая функция есть $\frac{x}{\exp(x)-1}$, т.е. на уровне формальных степенных рядов верно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = \frac{x}{\exp(x) - 1}$$

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	\dots
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	\dots

Лемма 77.

$$B_0 = 1 \qquad \sum_{k=0}^n B_k \binom{n+1}{k} = 0$$

Доказательство. На уровне формальных рядов

$$\frac{\exp(x) - 1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

Следовательно

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right)$$

Значит, рассматривая коэффициенты при степенях x , получаем, что

$$B_0 = 1 \qquad \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} = 0$$

Домножая последнее равенство на $(n+1)!$ получаем, что

$$\sum_{k=0}^n B_k \binom{n+1}{k} = 0$$

□

Лемма 78. Ряд Тейлора $\frac{x}{\exp(x)-1}$ при $x = 0$ равен $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$ (если доопределить правильно функцию в нуле).

Доказательство. Определим

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x = 0 \\ \frac{\exp(x)-1}{x} & \text{иначе} \end{cases} \qquad g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Заметим, что f просто задаётся рядом $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$ и всюду положительна, поэтому g определена корректно.

Тогда очевидно равенство $f \cdot g = 1$. Продифференцируем его $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ раз:

$$0 = (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

Подставляя в последнее 0 получаем, что

$$g^{(0)}(0) = 1 \qquad \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(0) \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(0) \binom{n}{n-k} \frac{1}{n-k+1} = 0$$

Тем самым последовательность $(g^{(n)}(0))_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и $(B_n)_{n=0}^{\infty}$, значит они совпадают. А это значит, что ряд Тейлора g есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

□

Лемма 79. Для всякого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ верно, что $B_{2n+1} = 0$.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{x}{\exp(x) - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\exp(x) + 1}{\exp(x) - 1} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\exp(x/2) + \exp(-x/2)}{\exp(x/2) - \exp(-x/2)} = \frac{x}{2} \cdot \coth(x/2)$$

При этом $\frac{x}{2} \coth(x/2)$ является чётной функцией, значит производные всех нечётных степеней равны 0, откуда и получаем, что $B_{2n+1} = 0$.¹ \square

Определение 41. Многочлены Бернулли — такая последовательность многочленов $(B_n(t))_{n=0}^\infty$, что на уровне формальных рядов (теперь от x и y)

$$\frac{x \exp(yx)}{\exp(x) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)x^n}{n!}$$

Замечание. Определение корректно, поскольку данный формальный ряд по сути является произведением рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ и $\exp(yx)$, что значит, что в каждом мономе степень x не менее степени y , значит формальные ряды при каждой степени x в разложении $\frac{x \exp(yx)}{\exp(x) - 1}$ — ряды $B_n(y)$ — получаются конечными, т.е. являются просто многочленами.

Следствие 79.1. $B_n(0) = B_n$.

Лемма 80.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(y) = (n+1)y^n$$

Доказательство. По определению

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xy)^k}{k!} \right) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{(l+1)!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(y)x^m}{m!} \right)$$

Рассматривая коэффициенты при степенях x получаем, что

$$\frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k+1)!} \cdot \frac{B_k(y)}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(y)$$

Откуда мы и получаем требуемое равенство. \square

Следствие 80.1. $\deg(B_n) = n$.

Лемма 81. $B'_{n+1} = (n+1)B_n$.

Доказательство. Давайте продифференцируем по y равенство (на уровне формальных рядов)

$$\frac{x \exp(yx)}{\exp(x) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)}{n!} x^n$$

Получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1}(y)}{(n-1)!} x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)}{n!} x^n = \frac{x^2 \exp(yx)}{\exp(x) - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B'_n(y)}{n!} x^n$$

Следовательно $B'_n = nB_{n-1}$. \square

¹Но для B_1 мы получаем равенство $B_1 + \frac{1}{2} = 0$, поэтому только для $n = 0$ рассуждение неверно.

Следствие 81.1. $B_n(y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} y^k$.

Доказательство.

$$B_n(y) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{B_{n-k}(0) n!}{k! (n-k)!} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} x^k$$

□

Лемма 82. $B_n(y) = B_n(1-y)(-1)^n$.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-y)x^n}{n!} &= \frac{x \exp((1-y)x)}{\exp(x) - 1} = \frac{x \exp(-yx)}{1 - \exp(-x)} \\ &= \frac{-x \exp(y(-x))}{\exp(-x) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n(y) x^n}{n!} \end{aligned}$$

Следовательно, выделяя полиномы от y при степенях x , получаем искомое равенство. □

Следствие 82.1. $\int_0^1 B_n(y) dy = 0$

Доказательство.

$$\int_0^1 B_n(y) dy = \left. \frac{B_{n+1}(y)}{n+1} \right|_0^1 = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = 0$$

□

Теорема 83 (формула Эйлера-Маклорена). Пусть даны целые a и b и функция f , которая имеет m ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) производных на $[a; b]$. Тогда

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_a^b + R_m \quad R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x) dx$$

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать формулу для $a = 0$ и $b = 1$, а $\{x\}$ можно заменить на x . Также будем доказывать её по индукции по m .

База. $m = 1$. Тогда $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Следовательно по интегрированию по частям (по функциям f и B_1)

$$\frac{f(1) + f(0)}{2} = f(x) \left(x - \frac{1}{2} \right) \Big|_0^1 = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$$

Таким образом

$$f(0) = \int_0^1 f(x) dx + \frac{-1/2}{1!} f(x) \Big|_0^1 + R_1$$

Шаг. Пусть утверждение для m верно; покажем верность для $m + 1$. Заметим, что нужно показать, что

$$R_m = \frac{B_{m+1}}{(m+1)!} f^{(m)}(x) \Big|_0^1 + R_{m+1}$$

Интегрируя по частям по функциям $f^{(m)}(x)$ и $B_{m+1}(x)/(m+1)!$, получаем, что

$$\begin{aligned} (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{B'_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m)}(x) dx &= (-1)^{m+1} \frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m)}(x) \Big|_0^1 + (-1)^{m+2} \int_0^1 \frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x) dx \\ &= (-1)^{m+1} \frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m)}(x) \Big|_0^1 + R_{m+1} \end{aligned}$$

Поскольку $B'_{m+1}(x) = (m+1)B_m(x)$, то получаем

$$R_m = (-1)^{m+1} \frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m)}(x) \Big|_0^1 + R_{m+1}$$

Следовательно осталось показать, что $(-1)^{m+1}B_{m+1} = B_{m+1}(0) = B_{m+1}(1)$. Заметим, что уже есть $B_{m+1} = B_{m+1}(0) = (-1)^{m+1}B_{m+1}(1)$. Осталось заметить, что при нечётных m мы имеем $(-1)^{m+1} = 1$, а при чётных $-B_{m+1} = 0$, так как $m+1 \geq 2$. Отсюда следует искомое. \square

Пример 3. Давайте посчитаем $\sum_{k=1}^{n-1} k^d$. Для этого подставим в формулу Эйлера-Маклорена функцию $f(x) := x^d$, отрезок $[a; b] := [0; n]$ и $m = d+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k^d &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \\ &= \int_0^n f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_0^n + (-1)^{m+1} \int_0^n \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x) dx \\ &= \frac{x^{d+1}}{d+1} \Big|_0^n + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} \frac{d!}{(d-k+1)!} x^{d-k+1} \Big|_0^n + (-1)^{m+1} \int_0^n \frac{B_m(\{x\})}{m!} \cdot 0 \cdot dx \\ &= \frac{n^{d+1}}{d+1} + \sum_{k=1}^{d+1} B_k \frac{d!}{k!(d+1-k)!} n^{d+1-k} \\ &= \frac{1}{d+1} \sum_{k=0}^{d+1} B_k \binom{d+1}{k} n^{d+1-k} \end{aligned}$$

5.3 Некоторые методы интегрирования и их результаты

Рассмотрим неформальные примеры и докажем теоремы, их формализующие.

Пример 4. Несложно понять, что

$$K := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

сходится. Заметим также, что для всякого $t > 0$

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(ty)^2} d(ty) = \int_0^{+\infty} t e^{-y^2 t^2} dy$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
 K^2 &= K \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cdot K \cdot dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left(\int_0^{+\infty} t e^{-t^2 y^2} dy \right) dt &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t e^{-t^2(y^2+1)} dy \right) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t e^{-t^2(y^2+1)} dt \right) dy &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)} \frac{d(t^2)}{2} \right) dy \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-v(y^2+1)} dv \right) dy &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v(y^2+1)}}{-(y^2+1)} \Big|_0^{+\infty} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1} &= \frac{1}{2} \arctan(y) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

откуда $K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Пример 5. Рассмотрим функцию

$$I(a) := \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Тогда

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} (-x) e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} -e^{-ax} \sin(x) dx = \frac{e^{-ax}(a \sin(x) + \cos(x))}{a^2 + 1} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{a^2 + 1}$$

Значит $I(a) = C - \arctan(a)$. Но поскольку

$$\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) + \arctan(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x} dx + \arctan(a) = 0 + \frac{\pi}{2}$$

то $C = \frac{\pi}{2}$, а значит

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

Пример 6.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} dx &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx &= \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy \\
 &= \int_a^b \frac{dy}{y+1} &= \ln(b+1) - \ln(a+1) \\
 &= \ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right)
 \end{aligned}$$

Пример 7. Заметим, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

Таким образом

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = -\frac{\pi}{4} \quad \text{но} \quad \int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = \frac{\pi}{4}$$

Замечание. Этот пример говорит о том, что не всегда можно переставлять интегралы местами.

Теорема 84. Пусть даны непрерывные функции a и b на $[x_0; x_1]$. Пусть также дана непрерывная функция $f(x, t)$ на $\{(x, t) \mid t \in [a(x); b(x)] \wedge x \in [x_0; x_1]\}$. Тогда $\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt$ непрерывна.

Доказательство.

$$\lim_{y \rightarrow x} \int_{a(y)}^{b(y)} f(y, t) dt = \lim_{y \rightarrow x} \int_{a(y)}^{a(x)} f(y, t) dt + \lim_{y \rightarrow x} \int_{b(x)}^{b(y)} f(y, t) dt + \lim_{y \rightarrow x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y, t) dt$$

Лемма 84.1.

$$\lim_{y \rightarrow x} \int_{b(x)}^{b(y)} f(y, t) dt = 0$$

Доказательство. Заметим, что

$$\left| \int_{b(x)}^{b(y)} f(y, t) dt \right| \leq |b(y) - b(x)| \cdot \max_{t \in [b(x); b(y)]} |f(y, t)|$$

Заметим, что из непрерывности f следует, что

$$\max_{t \in [b(x); b(y)]} |f(y, t)| \leq \max_{\substack{y \in [x-\varepsilon; x+\varepsilon] \\ t \in [b(x); b(y)]}} |f(y, t)|$$

Но при этом $\lim_{y \rightarrow x} |b(y) - b(x)| = 0$, следовательно

$$\lim_{y \rightarrow x} \left| \int_{b(x)}^{b(y)} f(y, t) dt \right| = 0$$

откуда и получается требуемое. □

Лемма 84.2.

$$\lim_{y \rightarrow x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y, t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt$$

Доказательство. Поскольку f непрерывна, то непрерывна и $f(y, t) - f(x, t)$. Значит

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y, t) dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt &= \lim_{y \rightarrow x} \int_{a(x)}^{b(x)} (f(y, t) - f(x, t)) dt \\ &\leq \lim_{y \rightarrow x} |b(x) - a(x)| \max_{t \in [a(x); b(x)]} |f(y, t) - f(x, t)| \leq |b(x) - a(x)| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{\substack{y \in [x-\varepsilon; x+\varepsilon] \\ t \in [a(x); b(x)]}} |f(y, t) - f(x, t)| = 0 \end{aligned}$$

□

Объединяя всё вышесказанное, получаем требуемое. □

Теорема 85 (интегральное правило Лейбница, “дифференцирование под знаком интеграла”). Пусть даны функции a и b на $[x_0; x_1]$ с непрерывными производными. Пусть также дана функция $f(x, t)$, что f и $\frac{\partial}{\partial x} f$ непрерывны на множестве $\{(x, t) \mid t \in [a(x); b(x)] \wedge x \in [x_0; x_1]\}$. Тогда для всякого $x \in [x_0; x_1]$

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{a(x+\delta)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta, t) dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{a(x+\delta)}^{a(x)} f(x+\delta, t) dt}{\delta} + \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta, t) dt}{\delta} + \frac{\int_{a(x)}^{b(x)} (f(x+\delta, t) - f(x, t)) dt}{\delta} \right) \end{aligned}$$

Лемма 85.1.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta, t) dt}{\delta} = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta, t) dt}{\delta} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{b(x+\delta) - b(x)}{\delta} \cdot \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta, t) dt}{b(x+\delta) - b(x)} \\ &= \frac{d}{dx} b(x) \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta, t) dt}{b(x+\delta) - b(x)} \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\min_{t \in [b(x); b(x+\delta)]} f(x+\delta, t) \leq \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta, t) dt}{b(x+\delta) - b(x)} \leq \max_{t \in [b(x); b(x+\delta)]} f(x+\delta, t)$$

По непрерывности f предыдущие минимум и максимум определены и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \min_{t \in [b(x); b(x+\delta)]} f(x+\delta, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \max_{t \in [b(x); b(x+\delta)]} f(x+\delta, t) = f(x, b(x))$$

Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta, t) dt}{b(x+\delta) - b(x)} = f(x, b(x))$$

Отсюда следует требуемое. □

Лемма 85.2.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{a(x)}^{b(x)} (f(x+\delta, t) - f(x, t)) dt}{\delta} = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

Доказательство. Заметим, что для всяких δ и $t \in [a(x); b(x)]$ есть $\gamma_t(\delta) \in (0; \delta)$, что

$$\frac{f(x+\delta, t) - f(x, t)}{\delta} = \frac{\partial}{\partial x} f(x + \gamma_t(\delta), t)$$

Тогда

$$\frac{\int_{a(x)}^{b(x)} (f(x+\delta, t) - f(x, t)) dt}{\delta} = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x + \gamma_t(\delta), t) dt$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x + \gamma_t(\delta), t) dt - \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt \right| \\
& \leq \int_{a(x)}^{b(x)} \left| \frac{\partial}{\partial x} f(x + \gamma_t(\delta), t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| dt \\
& \leq \int_{a(x)}^{b(x)} \max_{y \in [x; x+\delta]} \left| \frac{\partial}{\partial x} f(y, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| dt \\
& \leq (b(x) - a(x)) \max_{\substack{y \in [x; x+\delta] \\ t \in [a(x); b(x)]}} \left| \frac{\partial}{\partial x} f(y, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right|
\end{aligned}$$

Следовательно так как $\frac{\partial}{\partial x} f$ непрерывна, то $\frac{\partial}{\partial x} f(y, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)$ непрерывна, а поэтому

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \max_{\substack{y \in [x; x+\delta] \\ t \in [a(x); b(x)]}} \left| \frac{\partial}{\partial x} f(y, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| = 0$$

и тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x + \gamma_t(\delta), t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

Таким образом получаем требуемое. \square

Объединяя всё вышесказанное, получаем требуемое. \square

Следствие 85.1. Если взять функции a и b константными, то будет лишь условие на непрерывность f и $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)$ на прямоугольнике $[x_0; x_1] \times [a; b]$, а мы получим, что

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

Теорема 86. Пусть дана непрерывная функция $f(x, y)$ на $[a; b] \times [c; d]$. Тогда интегралы

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad \text{и} \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

определены и равны.

Доказательство. Заметим, что $\int_a^t f(x, y) dx$ и $\int_c^s f(x, y) dy$ являются непрерывными функциями от y и x соответственно. Следовательно интегралы

$$F(t, s) := \int_a^t \left(\int_c^s f(x, y) dy \right) dx \quad \text{и} \quad G(t, s) := \int_c^s \left(\int_a^t f(x, y) dx \right) dy$$

определены. При этом

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, s) = \int_c^s f(t, y) dy$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} \int_c^s \left(\int_a^t f(x, y) dx \right) dy = \int_c^s \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_a^t f(x, y) dx \right) dy = \int_c^s f(t, y) dy$$

Т.е. $\frac{\partial}{\partial t} F = \frac{\partial}{\partial t} G$.

При этом несложно видеть, что $F(a, s) = G(a, s) = 0$, следовательно

$$F(t, s) = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} F(x, s) dx + F(a, s) = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} G(x, s) dx + G(a, s) = G(t, s)$$

\square

5.4 Кривые

Определение 42. *Кривая* — непрерывное отображение отрезка $[0; 1]$ в любое топологическое пространство (например, \mathbb{R}^n).

Кривая Пеано, тра-ля-ля...

Определение 43. *Длина кривой* τ — значение

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n d(\tau(x_{k-1}), \tau(x_k)) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge x_0 = 0 \wedge x_n = 1 \right\}$$

Утверждение 87. *Если дана кривая τ в \mathbb{R}^n и она дифференцируема по всем координатам, то её длина равна*

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \tau(t)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \tau(t)\right)^2} dt = \int_0^1 |\text{grad}(\tau(t))| dt$$

6 Мои придумки вне лекций

6.1 Сильная сходимость

Определение 44. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *сильно сходится*, если сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Замечание. Это понятие распространяемо не только на \mathbb{R} , а также на \mathbb{C} . Также можно пытаться рассматривать любые векторные пространства с метрикой и полнотой.

Лемма 88. Если ряд сильно сходится, то он сходится.

Доказательство. Пусть дан сильно сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Лемма 88.1. Для всякого $\varepsilon > 0$ есть такое натуральное N , что $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$.

Доказательство. Давайте рассматривать префиксные суммы S_n последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Заметим, что $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ является неубывающей сходящейся последовательностью. Пусть предел равен A . Следовательно какой-то член S_N будет в ε -окрестности A (а на деле в $(A - \varepsilon; A]$). Следовательно для всякого $M > N$

$$\sum_{n=N+1}^M |a_n| = S_M - S_N$$

При этом $\{S_n - S_N\}_{n=N+1}^{\infty}$ сходится, поскольку равна $\{S_n\}_{n=N+1}^{\infty} - S_N$, а последняя последовательность сходится, поскольку является подпоследовательностью сходящейся $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$. При этом $S_M \in [S_N; A]$. Следовательно $S_M - S_N \in [0; A - S_N]$. Значит и предел $\{S_n - S_N\}_{n=N+1}^{\infty}$ лежит в $[0; A - S_N] \subseteq [0; \varepsilon)$. \square

Заметим, что $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$. Пусть $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ — префиксные суммы последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, т.е. $S_n := \sum_{k=0}^n a_k$. Мы видим, что

$$|S_M - S_N| = \left| \sum_{n=N+1}^M a_k \right| \leq \sum_{n=N+1}^M |a_k| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_k|$$

Пусть $r_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_k|$. Тогда имеем, что все S_M для $M \geq N$ лежат в $\bar{U}_{r_N}(S_N)$. Несложно видеть, что

$$(\bar{U}_{r_N}(S_N))_{N=0}^{\infty}$$

— последовательность замкнутых убывающих по включению множеств. Также по доказанной лемме последовательность $(r_N)_{N=0}^{\infty}$ сходится монотонно сверху к нулю. Таким образом последовательность замкнутых окрестностей имеет предел и ровно один. Поскольку размеры окрестностей сходятся, а для каждой из них верно, что все члены последовательности $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ начиная с некоторого лежат в этой окрестности, то сама последовательность $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ сходится к пересечению окрестностей. \square

Теорема 89. Пусть дан ряд $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Если f сходится в некоторой точке t , то сильно сходится и во всех точках s , где $|s| < |t|$.
2. При этом если f сильно сходится в точке t , то сильно сходится и во всех точках s , где $|s| \leq |t|$.

Доказательство.

1. Мы имеем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сходится. Это значит, что есть такая константа C , что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $|a_n t^n| \leq C$, а тогда $|a_n| \cdot |t|^n \leq C$.

Пусть дана точка s , что $|s| < |t|$. Тогда

$$|a_n s^n| = |a_n| \cdot |s|^n = |a_n| \cdot |t|^n \cdot \left(\frac{|s|}{|t|}\right)^n \leq C \cdot \left(\frac{|s|}{|t|}\right)^n$$

Обозначим $|s|/|t|$ за α . Понятно, что $\alpha \in [0; 1)$. Следовательно

$$\sum_{n=0}^N |a_n s^n| \leq \sum_{n=0}^N C \alpha^n = C \frac{1 - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha}$$

Таким образом $C \frac{1 - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha}$ сходится, а значит сходится и последовательность префиксных сумм $(|a_n s^n|)_{n=0}^{\infty}$ (так как не убывает и ограничена). Следовательно f в точке s сильно сходится.

2. Мы имеем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сильно сходится. Пусть дана точка s , что $|s| \leq |t|$. Тогда

$$|a_n s^n| = |a_n| \cdot |s|^n \leq |a_n| \cdot |t|^n = |a_n t^n|$$

Следовательно

$$\sum_{n=0}^N |a_n s^n| \leq \sum_{n=0}^N |a_n t^n|$$

Поскольку последовательность правых сумм сходится, то сходится и последовательность левых сумм (так как не убывает и ограничена). Следовательно f в точке s сильно сходится.

□

Следствие 89.1. Область определения f как функция есть открытый шар с центром в нуле (возможно, нулевого радиуса) вместе с некоторыми (возможно, со всеми, возможно, с ни одной) точками на его границе.

Теорема 90. Пусть дана функция $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Пусть также известно, что для некоторой точки x и некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что f сильно сходится в ε -окрестности x .

1. Значит f бесконечно дифференцируема в этой окрестности.
2. Для всякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функция $g_k(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} x^n$ сильно сходится в этой окрестности.
3. Для всякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $f^{(k)} = g_k$ в этой окрестности.

Доказательство. Докажем все утверждения теоремы только для первой производной f . Тогда для всех последующих производных утверждение будет выводиться по индукции. Также докажем сильную сходимую не для всей окрестности, а только для точки x . Тогда, поскольку все другие точки окрестности так же имеют окрестность, где функция сильно сходится, то для них утверждение будет верно по аналогии.

Возьмём некоторую точку y из ε -окрестности x , что $|y| > |x|$. Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}(n+1)x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}y^n| \cdot (n+1) \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^n$$

Понятно, что $|x|/|y| < 1$; обозначим $\alpha := |x|/|y|$. Поэтому последовательность $\{(n+1)\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к нулю, а значит ограничена сверху константой C . Следовательно

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}(n+1)x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} C|a_{n+1}y^n| = C \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}y^n|,$$

причём последний ряд сходится по условию, значит и первый тоже, что означает сильную сходимость g_1 в x . Таким образом g_1 сильно сходится на всей ε -окрестности x .

Теперь покажем, что $f'(x) = g_1(x)$. Пусть t — любая точка из проколотой ε -окрестности x . Тогда

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} - g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \left(\frac{t^{n+1} - x^{n+1}}{t - x} - (n+1)x^n \right)$$

Заметим, что

$$\frac{t^{n+1} - x^{n+1}}{t - x} - (n+1)x^n = t^n + t^{n-1}x + \dots + tx^{n-1} - nx^n = (t-x)(t^{n-1} + 2t^{n-2}x + \dots + nx^{n-1})$$

Следовательно

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} - g_1(x) = (t-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)$$

Пусть y некоторая точка из ε -окрестности x , что $\delta := |y| - |x| > 0$. Тогда для всякой точки t из проколотой $\delta/2$ -окрестности x

$$\begin{aligned} |a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| &= |a_{n+2}|(|t|^n + 2|t|^{n-1}|x| + \dots + (n+1)|x|^n) \\ &< |a_{n+2}|(|y| - \delta/2)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= |a_{n+2}y^{n+2}| \cdot |y|^{-2} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left(\frac{|y| - \delta/2}{|y|} \right)^n \end{aligned}$$

Тогда мы имеем, что $\alpha := \frac{|y| - \delta/2}{|y|} \in [0; 1)$, а тогда последовательность $\left(|y|^{-2} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \alpha^n\right)_{n=0}^{\infty}$ сходится к 0, значит ограничена сверху константой C . Следовательно

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| < \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|C = C \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|$$

причём последняя сумма сходится, так как f сильно сходится в y . Тогда пусть

$$A := C \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|.$$

Значит

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - g_1(x) \right| &= |t - x| \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n) \right| \\ &\leq |t - x| \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| \\ &< |t - x|A \end{aligned}$$

Таким образом

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = g_1(x),$$

что значит, что $f'(x) = g_1(x)$. □

Лемма 91. Пусть дана функция $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Пусть также известно, что f сходится в a -окрестности нуля. Тогда для всякого x из этой окрестности верно, что ряд

$$f_x(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \binom{n+k}{n} x^k \right) t^n$$

сильно сходится в $(a - |x|)$ -окрестности нуля и равен $f(x + t)$.

Доказательство. Пусть дано t , что $|t| < a - |x|$. Тогда из сильной сходимости при модуле меньшем a получаем, что сумма $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x| + |t|)^n$ сходится. Заметим, что каждый член $|a_n|(|x| + |t|)^n$ можно разложить на $n + 1$ членов: $|a_n| \binom{n}{0} |x|^n + |a_n| \binom{n}{1} |x|^{n-1} |t| + \dots$. Тогда сумма новых членов будет равна тому же, а тогда можно получить для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ограничения

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n \right| &= |t|^n \frac{1}{n!} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!} x^k \right| \\ &\leq |t|^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \frac{(n+k)!}{k!} |x|^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n, \end{aligned}$$

так как последнее — подсумма нашей суммы. Причём по набору членов суммы

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x| + |t|)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n$$

совпадают, поэтому мы можем сказать, что вторая сумма сходится. Следовательно сильно сходится и ряд $f_x(t)$.

Далее покажем, что $f_x(t) = f(x + t)$. Рассматривая префиксные суммы ряда $f(x + t)$ и раскрывая скобки, можно получить почленную сходимость (как ряды от t) к $f_x(t)$. Действительно:

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n = \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \binom{n+k}{k} t^n x^k;$$

таким образом раскрыв скобки в $f(x + t)$ до члена M мы получаем префиксную сумму для k до $M - n$. Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть некоторый хвост

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{k} |t|^n |x|^k \right) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Тогда для всех остальных членов от 0 до $N - 1$ есть такие значения M_n , что для всякого n от 0 до $N - 1$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=M_n+1}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{k} |t|^n |x|^k < \frac{\varepsilon}{4N}$$

Пусть $M := \max(M_0 + 0, M_1 + 1, \dots, M_{N-1} + (N - 1))$. Таким образом

$$\begin{aligned}
|f_x(t) - f(x+t)| &\leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n \right| + \left| \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - f(x+t) \right| \\
&\leq \sum_{n=N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{k} |t|^n |x|^k \right) + \left| \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - f(x+t) \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \left| \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^M a_n (x+t)^n \right| + \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n (x+t)^n \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \left| \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{n+k=0}^M a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k \right| + \sum_{n+k>M} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |t|^n |x|^k \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \left| \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{k=0}^{M-n} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k \right) \right| \\
&\quad + \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=M-n+1}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{4N} + \left| \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{k=0}^{M-n} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k \right) \right| \\
&\leq \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{k=0}^{M-n} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k \right| \\
&\leq \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{k=M-n+1}^{\infty} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k \right| \\
&\leq \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=M-n+1}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |t|^n |x|^k \\
&\leq \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{4N} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Замечание. Последняя часть с оценкой недостатка заимствует (но сложно) рассуждение из леммы 92. В обоих случаях находится малый хвост главной последовательности, после чего при выкидывании мы теряем его дважды (у основного ряда и у рядов под пределом) и нам остаётся с остатком от ε в запасе оценить разность между членами конечного префикса.

Лемма 92. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ — сильно сходящийся ряд, а $(\sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n})_{k=0}^{\infty}$ — последовательность сильно сходящихся рядов, что есть некоторая константа C , что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что

- $(b_{k,n})_{k=0}^{\infty} \rightarrow a_n$,
- $|b_{k,n}| \leq C|a_n|$ для всякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- для всякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n}$ сходится и равен B_k .

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$.

Доказательство. Вспомним, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2(C+1)}$. Следовательно для всякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n} \right| &\leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| + |b_{k,n}| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + (C+1) \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \\ &< \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + (C+1) \frac{\varepsilon}{2(C+1)} = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Тогда для всякого $n \in [0; N-1]$ есть такое K_n , что для всех $k \geq K_n$ верно, что $|a_n - b_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{2N}$. Пусть $K := \max\{K_n\}_{n=0}^{N-1}$. Следовательно для всякого $k \geq K$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n} \right| < \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Таким образом для всякого $k \geq K$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - B_k \right| < \varepsilon,$$

что значит, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

□

Теорема 93. Пусть рассматривается ряд вещественных чисел.

1. Если ряд сильно сходится, то любая его перестановка сильно сходится к тому же значению.
2. Если ряд сходится, но не сильно, то для любого значения S можно так переставить его члены, что итоговый ряд сойдётся к S .

Доказательство.

1. Пусть даны сильно сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и любая его перестановка $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Значит есть $M := \sigma^{-1}(N)$. Следовательно для всякого $L \geq M$

$$\left| \sum_{n=0}^L a_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

Таким образом $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$; чтобы показать сильную сходимость достаточно проделать те же рассуждения для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$.

2. Заметим, что сходимость ряда значит, что $(|a_n|)_{n=0}^{\infty} \rightarrow 0$. При этом несильная сходимость значит, что сумма положительных членов ряда и сумма отрицательных расходятся (уходят в $+\infty$ и $-\infty$ соответственно).

Выделим из последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ подпоследовательности положительных членов $(a_n^+)_{n=0}^{\infty}$ и отрицательных $(a_n^-)_{n=0}^{\infty}$ (в основной последовательности могут быть нули, но

их можно раскидывать по последовательности как угодно — это не изменит результат). Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для всякого $n \geq N$ верно, что $|a_n^+| < \varepsilon$ и $|a_n^-| < \varepsilon$.

Теперь составим нашу последовательность-перестановку следующим образом. В начальный момент у нас есть число $t = 0$ и пустая последовательность T . Также у нас есть две бесконечных последовательности: одна с положительными — A^+ , другая с отрицательными членами — A^- . Суммы обеих бесконечны. Каждый ход мы можем только взять из одной из A^+ и A^- первое невзятое число, записать его в конец последовательности T и прибавить это число к t .

Какие же конкретно ходы мы хотим делать? Пусть C_0 — максимальный размер членов в A^+ и A^- , а $C := \max(C_0, S+1)$. Тогда на итерации № n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) будем удерживаться в интервале $(S - C/2^n; S + C/2^n)$. Чтобы достичь этой цели будем использовать следующую стратегию:

- если $t \in (S - C/2^n; S]$, то возьмём число из A^+ ;
- если $t \in [S; S + C/2^n)$, то возьмём число из A^- .

Заканчивать итерацию № n будем, когда из обеих последовательностей будут вытащены первые $N(C/2^{n+1})$ членов. Поскольку к началу каждой итерации № n оставшиеся члены в A^+ и A^- по модулю меньше $C/2^n$, то описанными выше шагами мы не выйдем из интервала $(S - C/2^n; S + C/2^n)$. При этом после каждого момента мы не можем вытаскивать только члены одной из A^+ и A^- , так как их суммы стремятся к $\pm\infty$, значит каждый член каждой последовательности будет взят, а следовательно мы попадём на каждую итерацию. Значит префиксные суммы будут сходиться к S (после конца каждой итерации префиксные суммы будут находиться во всё меньшей окрестности S). Таким образом сумма полученного ряда-перестановки будет равна S .

□

Практика

Рассмотрим функцию $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Утверждение 94. $\exp(x)$ сильно сходится при любых $x \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Действительно, есть натуральное $N > 2|x|$, значит

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &= \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{x^n}{n!} \right| + \frac{|x|^N}{N!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(N+n)!/N!} &< \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{x^n}{n!} \right| + \frac{|x|^N}{N!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{N^n} \\ &< \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{x^n}{n!} \right| + \frac{|x|^N}{N!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{x^n}{n!} \right| + 2 \frac{|x|^N}{N!} \end{aligned}$$

т.е. \exp сильно сходится во всякой точке $x \in \mathbb{C}$.

□

Следствие 94.1. \exp бесконечно дифференцируема. Причём $\exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = \exp(x)$.

Утверждение 95. Для абсолютных любых a и b верно, что $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.

Доказательство. Давайте рассмотрим следующую таблицу.

\times	$\frac{a^0}{0!}$	$\frac{a^1}{1!}$	$\frac{a^2}{2!}$	$\frac{a^3}{3!}$	$\frac{a^4}{4!}$	\dots
$\frac{b^0}{0!}$	$\frac{a^0 \cdot b^0}{0! \cdot 0!}$	$\frac{a^1 \cdot b^0}{1! \cdot 0!}$	$\frac{a^2 \cdot b^0}{2! \cdot 0!}$	$\frac{a^3 \cdot b^0}{3! \cdot 0!}$	$\frac{a^4 \cdot b^0}{4! \cdot 0!}$	\dots
$\frac{b^1}{1!}$	$\frac{a^0 \cdot b^1}{0! \cdot 1!}$	$\frac{a^1 \cdot b^1}{1! \cdot 1!}$	$\frac{a^2 \cdot b^1}{2! \cdot 1!}$	$\frac{a^3 \cdot b^1}{3! \cdot 1!}$	$\frac{a^4 \cdot b^1}{4! \cdot 1!}$	\dots
$\frac{b^2}{2!}$	$\frac{a^0 \cdot b^2}{0! \cdot 2!}$	$\frac{a^1 \cdot b^2}{1! \cdot 2!}$	$\frac{a^2 \cdot b^2}{2! \cdot 2!}$	$\frac{a^3 \cdot b^2}{3! \cdot 2!}$	$\frac{a^4 \cdot b^2}{4! \cdot 2!}$	\dots
$\frac{b^3}{3!}$	$\frac{a^0 \cdot b^3}{0! \cdot 3!}$	$\frac{a^1 \cdot b^3}{1! \cdot 3!}$	$\frac{a^2 \cdot b^3}{2! \cdot 3!}$	$\frac{a^3 \cdot b^3}{3! \cdot 3!}$	$\frac{a^4 \cdot b^3}{4! \cdot 3!}$	\dots
$\frac{b^4}{4!}$	$\frac{a^0 \cdot b^4}{0! \cdot 4!}$	$\frac{a^1 \cdot b^4}{1! \cdot 4!}$	$\frac{a^2 \cdot b^4}{2! \cdot 4!}$	$\frac{a^3 \cdot b^4}{3! \cdot 4!}$	$\frac{a^4 \cdot b^4}{4! \cdot 4!}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

В ней в верхней строчке написаны подряд члены ряда $\exp(a)$, в левом столбце — $\exp(b)$, а в пересечении строки и столбца — произведение соответствующих членов. Тогда легко видеть, что

$$\exp(a) \exp(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} \right).$$

В таком случае при раскрытии скобок мы получаем члены, находящиеся в угловом квадрате $n + 1 \times n + 1$ таблицы. Если же раскрыть скобки у члена $(a + b)^n/n!$ ряда $\exp(a + b)$, то получим члены на диагонали № n (без учёта особой строки и особого столбца); значит при раскрытии скобок у префиксных суммы в $\exp(a + b)$ мы получаем члены в равнобедренных прямоугольных треугольниках размера n , вписанных прямым углом в угол таблицы. Тогда получаем, что $\exp(a) \exp(b)$ и $\exp(a + b)$ — просто суммы рядов, членами которых являются значения из таблицы, но в разных порядках.

Заметим, что ряд членов из таблицы сильно сходится. Действительно, давайте в последовательность подряд выпишем члены диагоналей. Получается, что это всё та же последовательность $\exp(a + b)$, но только в ней каждый член разбили сразу на несколько подряд идущих. Заметим, что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\frac{(|a| + |b|)^n}{n!} = \frac{|a|^n \cdot |b|^0}{n! \cdot 0!} + \dots + \frac{|a|^0 \cdot |b|^n}{0! \cdot n!}.$$

Соответственно выписанный ряд сильно сходится, поскольку сильно сходится ряд $\exp(|a| + |b|)$. Значит при любых перестановках мы получим одно и то же, значит $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$. \square

Утверждение 96.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \exp(x)$$

Доказательство. Давайте раскроем скобки в подпредельном выражении:

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = 1 + \frac{\binom{n}{1}}{n} x + \frac{\binom{n}{2}}{n^2} x^2 + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n^n} x^n$$

Заметим, что при всяком $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ член степени k равен

$$\frac{\binom{n}{k}}{n^k} x^k = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n}$$

Тогда видно, что для всякого k

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} x^k = \frac{x^k}{k!}$$

и заодно

$$\left| \frac{\binom{n}{k}}{n^k} x^k \right| < \left| \frac{x^k}{k!} \right|$$

Следовательно мы получаем последовательность рядов, почленно сходящихся к $\exp(x)$ и почленно ограниченных по модулю константой $C = 1$. Значит по теореме предел определён и равен $\exp(x)$. \square

Упражнение 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) := x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$$

1. Покажите, что f сходится при любом x .
2. Покажите, что $f(x+1) = -f(x)$.
3. Превратите f в ряд и покажите, что f сильно сходится при всяком x (осторожно, аккуратная возня с суммами и не очень аккуратная — с оценками).
4. Какое значение получается, если подставить $x = \frac{1}{2}$? Чему конкретно, можно предположить, равна функция $f(x)$?

Замечание. До синуса недалеко, но я пока не знаю, что нужно сделать, чтобы окончательно доказать, что это он...

Упражнение 2. Рассмотрим функции

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\exp(xi) - \exp(-xi)}{2i} \quad \text{и} \quad c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\exp(xi) + \exp(-xi)}{2}$$

1. Покажите, что s и c определены корректно, т.е. они действительно возвращают вещественные значения.
2. Докажите, что $s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$ и $c(x+y) = c(x)c(y) - s(y)s(x)$ для всевозможных $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Докажите, что $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$ для всевозможных $x \in \mathbb{R}$.
4. Докажите, что s и c — бесконечно дифференцируемые функции.
5. Докажите, что $s'(x) = c(x)$ и $c'(x) = -s(x)$ для всевозможных $x \in \mathbb{R}$.
6. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x} = 1$.
7. Докажите, что $s(x) = \sin(x)$, а $c(x) = \cos(x)$.