Основы наивной теории множеств.

Лектор — Станислав Олегович Сперанский
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

Материалы лекций: ссылка

Добавить конспекты теории из упражнений. Слить аккуратно воедино. Добавить ссылку на упражнения.

Литература:

- K. Hrbacek and T. Jech. Introduction to Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Marcel Dekker, Inc., 1999.
- T. Jech. Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.

Будем рассматривать как базовые выражения “x равен (совпадает с) y” (“$x = y$”) “x лежит в y” (“$x \in y$”).

Определение 1 (Наиваная схема аксиом выделения)**.** Пусть $\Phi(x)$ — произвольное условие на объекты. Тогда существует X, что $\forall u(\Phi(u) \leftrightarrow u \in X)$. В этом случае X обозначается как $\{u \mid \Phi(u)\}$.

Утверждение 1 (парадокс Рассела)**.** *Пусть $R = \{u \mid u \notin u\}$. Тогда R не может лежать в себе и не может не лежать в себе одновременно.*

Утверждение 2 (парадокс Берри)**.** *Пусть n — наименьшее натуральное число, которое нельзя описать менее чем одиннадцатью словами. Тогда n описывается 10 словами.*

Из-за данного парадокса будем рассматривать только условия, образованные переменными и $\in$, $=$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.

Определение 2 (аксиомы ZFC (= ZF (аксиомы Цермело-Френкеля) + C (аксиома выбора)))**.**

Ext) “Аксиома экстенциональности”:

$$\forall X \forall Y (\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y)$$

Empty) “Аксиома пустого множества”:

$$\exists \varnothing \, \forall u \, (u \notin \varnothing)$$

Pair) “Аксиома пары”:

$$\forall X \, \forall Y \, \exists Z (\forall u \, (u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)))$$

Обозначение: $Z = \{X, Y\}$.

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

Sep) “Схема аксиом выделения”:

$$\forall \Phi(x) \quad \forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u)))$$

Обозначение: $Y = \{u \in X \mid \Phi(u)\}$.

Следствие. *Операторы*

$$\begin{aligned} X \cap Y &:= \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\} \\ X \setminus Y &:= \{u \in X \mid u \notin Y\} \\ \bigcap X &:= \{u \mid \forall v \in X \quad u \in v\} \end{aligned}$$

определены корректно.

Union) “Аксиома объединения”:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow \exists v\, (v \in X \wedge u \in v))$$

Обозначение: $Y = \bigcup X$.

Следствие. *Оператор*

$$X \cup Y := \bigcup \{X, Y\} = \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\}$$

определён корректно.

Power) Пусть $x \subseteq y := \forall v\, \{v \in x \to v \in y\}$. “Аксиома степени”:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$$

Обозначение: $Y = \mathcal{P}(X) := \{u \mid u \subseteq X\}$. $\mathcal{P}(X)$ — “множество-степень X” или “булеан X”.

Определение 3. Упорядоченная пара — это объект от некоторых X_1 и Y_1, который равен другому такому объекту от X_2 и Y_2 тогда и только тогда, когда $X_1 = X_2 \wedge Y_1 = Y_2$.

Определение 4. *Декартово произведение* X и Y $(X \times Y)$ — $\{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$.

Замечание 1. Можно несложно показать, что декартово произведение определено корректно.

Inf) Пусть $\mathrm{Ind}(X) := \varnothing \in X \wedge \forall u\, (u \in X \wedge u \cup \{u\} \in X)$. Если $\mathrm{Ind}(X)$, то X называется индуктивным. “Аксиома бесконечности”: существует индуктивное множество.

Repl) “Схема аксиом подстановки”:

$$\begin{aligned} &\forall \Phi(x, y) \\ &\qquad \forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \to y_1 = y_2) \to \\ &\qquad \forall X\, \exists Y\, \forall y\, (y \in Y \leftrightarrow \exists x (x \in X \wedge \Phi(x, y))) \end{aligned}$$

Reg) “Аксиома регулярности”:

$$\forall X\, (X \neq \varnothing \to \exists u\, (u \in X \wedge X \cap u = \varnothing))$$

1 Отношения.

Определение 5. *Бинарное (или двухместное) отношение* R между X и Y — подмножество $X \times Y$. Если $Y = X$, R называется *бинарным (или двухместным) отношением* на X. Обозначение: $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$.

Определение 6.

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(R) &:= \{u \in X \mid \exists v \quad uRv\} && \text{“область определения } R\text{”} \\ \mathrm{range}(R) &:= \{v \in Y \mid \exists u \quad uRv\} && \text{“область значений } R\text{”} \\ R[U] &:= \mathrm{range}(R \cap (U \times Y)) \\ R^{-1} &:= \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} \end{aligned}$$

Замечание 2.

$$\begin{aligned} \mathrm{range}(R) = \mathrm{dom}(R^{-1}) = R[X] \\ \mathrm{range}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R) = R^{-1}[Y] \end{aligned}$$

Определение 7. Бинарные отношения можно естественным образом комбинировать: для любых отношений R и Q между X и Y, Y и Z соответственно отношение

$$S = R \circ Q := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y : xRy \wedge yQz\}$$

называется композицией R и Q.

Определение 8. *Тождественное отображение* на X — $id_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Замечание 3. Тождественное отображение при композиции (не важно, правой или левой) с другим отношением не меняет его.

Определение 9. Отношение R между X и Y называется функциональным, если

$$\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, ((xRy_1 \wedge xRy_2) \to y_1 = y_2).$$

Определение 10. *Функция* из X в Y — функциональное отношение R между X и Y, в котором $\mathrm{dom}(R) = X$. Обозначение: $R : X \to Y$.

Определение 11. *Ограничение* или *сужение* функции $f : X \to Y$ на $U \subseteq X$ — функция $f \restriction_U := f \cap (U \times Y)$.

Если $f : X \to Y$ и $g : U \to Y$, где $U \subseteq X$, таковы, что $f \restriction_U = g$, то f называется *расширением* g, а g — *ограничением* f.

Определение 12. $Y^X := \{f : X \to Y\}$.

Определение 13. Функция $f : X \to Y$ называется

- *сюръекцией*, если $range(f) = Y$;
- *инъекцией*, если f^{-1} функционально;
- *биекцией*, если f сюръективно и инъективно.

C) “Аксиома выбора”:

$$\forall X(\varnothing \notin X \to \exists f(f : X \to \bigcup X \wedge \forall u \in X(f(u) \in u)))$$

2 Натуральные числа и индукция

Важным следствием Inf является

$$\exists X(\mathrm{Ind}(X) \wedge \forall Y(\mathrm{Ind}(Y) \to X \subseteq Y)) \qquad \text{(Nat)}$$

Nat описывает минимальное по включению индуктивное множество — $\mathbb{N}$, $\aleph_0$ или ω.

Доказательство. Пусть есть какое-то индуктивное X_0. Тогда рассмотрим

$$\mathbb{N} := \{x \in X_0 \mid \forall X(\mathrm{Ind}(X) \to x \in X)\}$$

По построению $\mathrm{Ind}(X) \to \mathbb{N} \subseteq X$. Также $\mathrm{Ind}(\mathbb{N})$. □

Определение 14. Определим *функцию последователя* $s : \mathbb{N} \to NN$ как

$$s := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \cup \{n\}\}$$

Вместо $s(n)$ часто пишут $n + 1$.

Определение 15. *(Естественный) порядок* на $\mathbb{N}$ — $<:= \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in m\}$.

Замечание 4. Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно:

1. $\neg(n < 0)$;
2. $n < m + 1 \leftrightarrow (n < m \vee n = m)$.

Теорема 3 (принцип индукции)**.** *Пусть X удовлетворяет условию*

$$0 \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}(n \in X \to n + 1 \in X).$$

Тогда $\mathbb{N} \subseteq X$.

Доказательство. Из условия на X следует, что $\mathbb{N} \cap X$ индуктивно. Тогда из определения $\mathbb{N}$ следует, что $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cap X \subseteq X$, значит $\mathbb{N} \subseteq X$. □

Замечание 5. В качестве X могут быть $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$.

Следствие 3.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ *верно* $n \subseteq \mathbb{N}$.

Теорема 4 (возвратная индукция)**.** *Пусть дан X, что $\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n\ m \in X \to n \in X)$. Тогда $\mathbb{N} \subseteq X$.*

Доказательство. Докажем, что $\forall n \in \mathbb{N} n \subseteq X$, по индукции. База для 0 очевидна. Шаг очевиден, так как $n \subseteq X$, значит $n \in X$, значит $n + 1 \subseteq X$. □

Определение 16. $\mathrm{Min}(X) := \{x \in X \mid \neg\exists u \in X u \in x\}$.

Теорема 5 (принцип минимального элемента)**.** *Если $X \subset \mathbb{N}$ и $X \neq \varnothing$, то $\mathrm{Min}(X) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Min}(X) = \varnothing$. Возьмём $Y := \mathbb{N} \setminus X$. Заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n\ m \in Y \to n \in Y)$$

Тогда по принципу возвратной индукции $Y = \mathbb{N}$, а тогда $X = \varnothing$ — противоречие. □

Теорема 6 (о рекурсии). *Пусть есть $y_0 \in Y$ и $h : \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственная $f : \mathbb{N} \to Y$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \textit{если } n = 0 \\ h(m, f(m)) & \textit{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда будем называть функцию $f : k + 1 \to Y$ *правильной*, если условие в определении рекурсии верно для всех $n \in k + 1$. Также рассмотрим

$$S := \{k \in \mathbb{N} \mid \text{существует единственная правильная } f : k + 1 \to Y\}$$

Будем обозначать для каждого $k \in S$ через f_k соответствующую правильную функцию из $k+1$ в Y.

Докажем по индукции, что $S = \mathbb{N}$.

База. Очевидно, $\{(0, y_0)\}$ — единственная правильная функция из $0+1$ в Y. Поэтому $0 \in S$.

Шаг. Легко заметить, что сужение любой правильной функции на $k + 2$ на множество $k+1$ правильно. Поэтому все правильные функции на $k+2$ определены на $k+1$ как f_k. Тогда значение в $k + 1$ определяется однозначно, значит правильная функция на $k + 2$ существует и единственна. □

Теорема 7 (о рекурсии, параметризованная). *Пусть $g_0 \in Y^X$ и $h : X \times \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственна $f : X \times \mathbb{N} \to Y$, что $\forall x \in X, n \in \mathbb{N}$*

$$f(x, n) = \begin{cases} g_0(x) & \textit{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \textit{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим для каждого $x \in X$ функцию $h_x : \mathbb{N} \times Y \to Y, (n, y) \mapsto h(x, n, y)$. Тогда по теореме о рекурсии есть $f_x : \mathbb{N} \to Y$, что

$$f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Тогда определим $f : X \times \mathbb{N} \to Y, (x, n) \mapsto f_x(n)$. В этом случае

$$f(x, n) = f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases} = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

□

Замечание 6. Заметим, что с помощью теоремы о параметризованной рекурсии можно определить сложение, умножение и возведение в степень на натуральных числах.

Определение 17. Несложно заметить, что функциональные отношения $R \subseteq X \times Y$ — функции из подмножества X в Y. Поэтому будем называть их *частичными функциями* и обозначать как $R :\subseteq X \to Y$.

Теорема 8 (о рекурсии, частичной). *Пусть $y_0 \in Y$ и $h :\subseteq \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственна $f :\subseteq \mathbb{N} \to Y$, что*

- *для любого $n \in \mathrm{dom}(f)$,*

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \textit{если } n = 0 \\ h(m, f(m)) & \textit{если } n = m + 1 \end{cases}$$

- *либо* $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}$*, либо* $\mathrm{dom}(f) = k+1$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$*, что* $(k, f(k)) \notin \mathrm{dom}(h)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое ы $\notin Y$ и положим $Y' := Y \cup \{\text{ы}\}$. Теперь расширим h до $h' : \mathbb{N} \times Y' \to Y'$ следующим образом:

$$h'(n, y') := \begin{cases} h(n, y') & \text{если } (n, y') \in \mathrm{dom}(h) \\ \text{ы} & \text{иначе} \end{cases}$$

В силу теоремы о рекурсии существует и единственна $f' : \mathbb{N} \to Y'$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$f'(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0 \\ h'(m, f'(m)) & \text{если } n = m+1 \end{cases}$$

Возьмём $f := f' \cup (\mathbb{N} \times Y)$. Несложно убедиться, что f будет искомой. □

Определение 18. *Конечными последовательностями элементов* X называются элементы множества $X^* := \{f \mid \exists n \in \mathbb{N}(f : n \to X)\}$.

Теорема 9 (о возвратной индукции)**.** *Пусть* $h : \mathbb{N} \times Y^* \to Y$*. Тогда существует единственная* $f : \mathbb{N} \to Y$ *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$*,* $f(n) = h(n, f\restriction_n)$*.*

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы о рекурсии, однако вместо обычной индукции тут используется возвратная. [...] □

Определение 19. Условие $\Phi(x, y)$ называется *функциональным*, если

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2\ ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \to y_1 = y_2)$$

Если для некоторого u нашёлся тот самый y, что $\Phi(u, y)$, тогда данный y обозначается как $[\![\Phi]\!](x)$.

Функциональное условие $\Phi(x, y)$ называется *тотальным*, если $\forall x \exists y\ \Phi(x, y)$.

Теорема 10 (о возвратной “классовой рекурсии”)**.** *Пусть* $\Phi(x, y)$ *— тотальное функциональное условие. Тогда существует единственная функция* f *с* $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}$*, что* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = [\![\Phi]\!](f\restriction_n)$$

Доказательство. Идея здесь та же, хотя деталей побольше. В нашем модуле эта теорема не будет играть особой роли, однако именно “классовая рекурсия” является базовым инструментом в ТМ. [...] □

3 Мощности

Определение 20. X и Y *равномощны*, если существует биекция $f : X \to Y$. Обозначение: $X \sim Y$.

Теорема 11. *Для всех* X*,* Y *и* Z *верно следующее:*

1. $X \sim X$*;*

2. $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$*;*

3. $X \sim Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$*.*

Пример 1. $\mathcal{P}(X) \sim 2^X$. Действительно, рассмотрим для каждого $Y \subseteq X$ функцию $\chi_Y : X \to 2$, что

$$\chi_Y(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x \in Y \\ 0 & \text{если } x \in X \setminus Y \end{cases}$$

Несложно заметить, что отображение, сопоставляющее Y функцию χ_Y есть биекция из $\mathcal{P}(x)$ в 2^X.

Определение 21. Множество X *по мощности менее или равно* Y ($X \preccurlyeq Y$), если существует инъекция из X в Y.

Множество X *по мощности (строго) менее* Y ($X \prec Y$), если $X \preccurlyeq Y \wedge X \nsim Y$.

Замечание 7. Тогда очевидно, что $X \preccurlyeq Y$ тогда и только тогда, когда X равномощно некоторому подмножеству Y.

Теорема 12.

1. $X \preccurlyeq X$.
2. $X \sim Y \Rightarrow X \preccurlyeq Y$.
3. $X \preccurlyeq Y \sim Z \Rightarrow X \preccurlyeq Z$.
4. $X \sim Y \preccurlyeq Z \Rightarrow X \preccurlyeq Z$.
5. $X \preccurlyeq Y \preccurlyeq Z \Rightarrow X \preccurlyeq Z$.

Теорема 13 (Кантора, обобщённая)**.** $X \prec \mathcal{P}(X)$.

Доказательство. Очевидно, что $f : X \to \mathcal{P}(X), x \mapsto \{x\}$ есть инъекция, поэтому $X \preccurlyeq \mathcal{P}(X)$. Покажем, что между ними нет биекции.

Предположим противное, т.е. есть биекция $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Рассмотрим $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Поскольку f — биекция, то $f(y) = Y$ для некоторого y. В итоге мы получаем

$$y \in Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \notin f(Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \notin Y$$

Получаем противоречие. □

Теорема 14 (Кантора-Шрёдера-Бернштейна)**.** *Если* $X \preccurlyeq Y$ *и* $Y \preccurlyeq X$*, то* $X \sim Y$.

Доказательство.

Лемма 14.1. *Если* $X \supseteq Y \supseteq X'$ *и* $X \sim X'$*, то* $X \sim Y \sim X'$.

Доказательство. Пусть $f : X \to X'$ — биекция. Определим по рекурсии $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{Y_i\}_{i=0}^{\infty}$:

$$X_n := \begin{cases} X & \text{если } n = 0 \\ f[X_m] & \text{если } n = m + 1 \end{cases} \qquad\qquad Y_n := \begin{cases} Y & \text{если } n = 0 \\ f[Y_m] & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

По условию $X_0 = X \supseteq Y = Y_0$ и $Y_0 = Y \supseteq X' = f(X) = X_1$. Тогда несложно убедиться по индукции по n, что $X_n \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1}$, так как $X_{n-1} \supseteq Y_{n-1} \supseteq X_n$, значит $f(X_{n-1}) \supseteq f(Y_{n-1}) \supseteq f(X_n)$, что буквально означает, что $X_n \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1}$.

Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим $U_n := X_n \setminus Y_n$. Пусть также $U := \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$, $Z := X \setminus U$.

Несложно видеть, что

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \cup Z \qquad\qquad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \cup Z$$

Также несложно видеть, что $f[U_n] = f[X_n \setminus Y_n] = f[X_n] \setminus f[Y_n] = X_{n+1} \setminus Y_{n+1} = U_{n+1}$, а потому $f[U] = U \setminus U_0$.

Тогда определим $g : X \to X$ по правилу

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in U \\ x & \text{если } x \in Z \end{cases}$$

Несложно видеть, что это инъекция. Действительно, g на U равна f, а значит есть биекция из U в $U \setminus U_0$, также является биекцией из Z в себя, а поскольку U и Z дизъюнктны, то g является биекцией из $U \cup Z$ в $U \setminus U_0 \cup Z$, т.е. из X в Y. Значит $Y \sim X$. $\square$

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — инъекции. Несложно видеть, что $g[Y] \subseteq X$, а $f[X] \subseteq Y$, значит $g[f[X]] \subseteq g[Y]$. Т.е. $X \supseteq g[Y] \supseteq g[f[X]]$. При этом $X \sim f[X] \sim g[f[X]]$, поэтому применяя лемму 14.1, имеем, что $X \sim g[Y] \sim Y$, значит $X \sim Y$. $\square$

Определение 22. Будем говорить, что X *имеет n элементов* (где $n \in \mathbb{N}$), если $X \sim n$.

X *конечно*, если для какого-то $n \in \mathbb{N}$, что $X \sim n$.

Утверждение 15. *X бесконечно, значит $\forall n \in \mathbb{N} \quad |X| \geqslant n$.*

Доказательство. Докажем по индукции по n.

База: $|X| \geqslant 0$ — очевидно.

Шаг: Пусть $|X| > n$, тогда существует инъекция $f : n \to X$. $f(n) \neq X$, поэтому есть $x \in X \setminus f(n)$, значит есть $f' = f \cup \{(n; x)\}$ — инъекция из $n+1$ в X. $\square$

3.1 Основные свойства конечных множеств

Утверждение 16. *X конечно, а $|Y| \leqslant |X|$, то $|Y|$ конечно.*

Доказательство. Существует $n \in \mathbb{N}$, что $|X| = n$. Тогда Y кончено, так как иначе $n = |X| \geqslant |Y| \geqslant n+1$. $\square$

Утверждение 17. *Пусть есть сюръекция из X в Y, и X конечно. Тогда $|Y| \leqslant |X|$.*

Доказательство. WLOG $X = n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Определим $g : Y \to n$ по правилу

$$g(y) := \text{“минимальный элемент в } f^{-1}[\{y\}]\text{”}$$

Легко понять, что $g : Y \to n$ — инъекция. Стало быть, $|Y| \geqslant |n| = n$. $\square$

Утверждение 18. *Пусть X и Y конечны, причём $X \cup Y = \varnothing$. Тогда $X \cap Y$ конечно и $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $|Y|$.

База. Очевидно, если $|Y| = 0$, то $|Y| = \varnothing$, а потому $|X \cup Y| = |X| = |X| + 0 = |X| + |Y|$.

Шаг. Пусть $|Y| = n+1$, т.е. существует биекция $f : n+1 \to Y$. Рассмотрим $y = f^{-1}(n)$ и $Z := Y \setminus \{y\}$. Очевидно, что $|Z| = n$. Тогда

$$\begin{aligned} |X \cup Y| = |(X \cup Z) \cup \{y\}| &= |X \cup Z| + 1 &&= (|X| + |Z|) + 1 \\ = |X| + (|Z| + 1) &= |X| + |Y| \end{aligned}$$

$\square$

Утверждение 19. *Пусть X и Y конечны. Тогда $X \times Y$ и X^Y кончены и $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$, $|X^Y| = |X|^{|Y|}$.*

3.2 Основные свойства (не более чем) счётных множеств

Утверждение 20 (в ZFC). *Пусть X бесконечно, тогда оно содержит счётное подмножество.*

Доказательство. Пусть η — какая-нибудь функция выбора для $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Используя рекурсию, определим $f : \mathbb{N} \to X$ по правилу

$$f(k) := \eta(X \setminus \mathrm{range}(f\restriction_k))$$

Как легко видеть, $f : \mathbb{N} \to X$ — инъекция. Поэтому $\mathrm{range}(f)$ будет счётным подмножеством X. □

Определение 23. $\mathbb{N}$ является кардиналом и обычно обозначается $\aleph_0$.

Следствие 20.1 (в ZFC). $|X| > \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда X бесконечно и несчётно.*

Утверждение 21. $|X| \leqslant \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда X конечно или счётно.*

Доказательство. Если X конечно или счётно, то, очевидно, $|X| \leqslant \aleph_0$.

Если $|X| \leqslant \aleph_0$, то WLOG $X \subseteq \mathbb{N}$. Если X бесконечно, то рекурсивно определим $f : \mathbb{N} \to X$ по правилу

$$f(k) := \text{“минимальный элемент в } X \setminus \mathrm{range}(f\restriction_k)\text{”}$$

Нетрудно проверить, что $f : \mathbb{N} \to X$ — биекция. □

Следствие 21.1 (в ZFC). $|X| \not> \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда* $|X| \leqslant \aleph_0$.

Утверждение 22. *Есть сюръекция из X в Y, причём $|X| \leqslant \aleph_0$. Тогда $|Y| \leqslant \aleph_0$.*

Доказательство. WLOG $X \subseteq \mathbb{N}$. Определим $g : Y \to X$ по правилу

$$g(y) := \text{“минимальный элемент в } f^{-1}[\{y\}]\text{”}$$

Легко понять, что $g : Y \to X$ — инъекция. Стало быть, $|Y| \leqslant |X| \leqslant \aleph_0$. □

Следствие 22.1. *Непустое X не более чем счётно тогда и только тогда, когда существует сюръекция из $\mathbb{N}$ в X.*

Следствие 22.2. *Пусть R — отношение эквивалентности на X, причём X не более, чем счётно. Тогда X/R не более чем счётно.*

Утверждение 23. *Пусть X и Y не более чем счётны, тогда $X \times Y$ не более чем счётно.*

Доказательство. WLOG $X, Y \subseteq \mathbb{N}$. Тогда $X \times Y \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, а значит нужно показать, что счётность $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Определим $\nu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ по правилу

$$\nu(n, m) := \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$$

Нетрудно проверить, что ν биективна. □

Следствие 23.1. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n}$$

счётно.

Следствие 23.2. *Пусть X и Y не более чем счётны, тогда $X \cup Y$ не более чем счётно.*

Доказательство. Поскольку X и $Y \setminus X$ равномощны некоторым подмножествам $\mathbb{N} \times \{0\}$ и $\mathbb{N} \times \{1\}$, то $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$ равномощно подмножеству $\mathbb{N} \times \{0, 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, а потому не более чем счётно. □

Утверждение 24. *X конечно, а элементы X не более чем счётны. Тогда $\bigcup X$ не более чем счётно.*

Доказательство. По индукции по $|X|$. □

Определение 24. Условие "быть (бесконечной) последовательностью" — $\mathrm{Seq}(F) := \exists Y : \quad F : \mathbb{N} \to Y$. Если $\mathrm{Seq}(F)$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ вместо $F(n)$ нередко пишут F_n.

Утверждение 25. *Если F — последовательность последовательностей, то тогда*

$$\bigcup\{\mathrm{range}(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

не более чем счётно.

Доказательство. Определим $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup\{\mathrm{range}(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ по правилу

$$g(n, m) := F_n(m) = F(n)(m)$$

Легко понять, что g сюръективна. □

Следствие 25.1 (в ZFC). *Пусть X не более чем счётно, и все его элементы не более чем счётны, тогда $\bigcup X$ не более чем счётно.*

Доказательство. WLOG $X \neq \varnothing$ и $\varnothing \notin X$. Пусть g — сюръекция из $\mathbb{N}$ на X. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$S_n := \{f \mid f : \mathbb{N} \to g(n) \text{ — сюръекция}\}$$

Очевидно, $S_n \neq \varnothing$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ через $\mathcal{J}$. Пусть η — какая-нибудь функция выбора для $\mathcal{J}$. Наконец, определим $F : \mathbb{N} \to \bigcup \mathcal{J}$ по правилу

$$F(n) := \eta(S_n)$$

Ясно, что $\bigcup\{\mathrm{range}(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{g(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup X$. □

Теорема 26. *Пусть непустое X не более чем счётно. Тогда X^* счётно.*

Доказательство. Зафиксируем сюръекцию $g : \mathbb{N} \to X$. Очевидно, $f \circ g \in X^*$ для всякого $f \in \mathbb{N}^*$. Определим $G : \mathbb{N}^* \to X^*$ по правилу

$$G(f) := f \circ g$$

Легко убедиться, что G сюръективна. Поэтому достаточно показать, что N^* не более чем счётно, а X^* бесконечно.

Пусть $\nu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция. Разумеется, можно построить функции $\mathrm{left} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\mathrm{right} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{left}(\nu(n, m)) = n \qquad \text{и} \qquad \mathrm{right}(\nu(n, m)) = m$$

Используя рекурсию, можно определить последовательность последовательностей f, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} f_0(i) &= \varnothing \\ f_{n+1}(i) &= f_n(\mathrm{left}(i)) \cup \{(n, \mathrm{right}(i))\} \end{aligned}$$

Далее несложно доказать по индукции, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{range}(f_n) = \{g \mid g : n \to \mathbb{N}\}$$

В таком случае $\bigcup\{\mathrm{range}(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^*$. Поэтому $\mathbb{N}^*$ не более чем счётно.

Осталось показать, что X^* бесконечно. Для этого выберем какой-нибудь $x_0 \in X$ и определим $h : \mathbb{N} \to X^*$ по правилу

$$h(n) := n \times \{x_0\},$$

т.е. $h(n)$ — последовательность длины n только из элемента x_0. Очевидно, что h инъективна, а потому X^* не может быть конечным. □

Определение 25. Для произвольного множества X обозначим

$$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X \text{ и } Y \text{ конечно}\}$$

Говоря просто, $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ — семейство конечных подмножеств X.

Следствие 26.1. *Пусть X счётно. Тогда $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ счётно.*

Доказательство. Рассмотрим $h : X^* \to \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$, действующую по правилу

$$h(f) := \mathrm{range}(f)$$

Легко видеть, что h сюръективна, значит $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ не более чем счётно.

С другой стороны пусть $\nu : \mathbb{N} \to X$ — инъекция. Тогда рассмотрим $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$, что

$$g(n) := \nu[n]$$

Несложно проверить, что $|\nu[n]| = n$, поэтому g инъективна, значит $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ бесконечно, а значит счётно. □

Следствие 26.2. *В следствие теоремы Кантора $\mathcal{P}$ нельзя заменить на $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}$.*

Теорема 27 (в ZFC)**.** *Пусть X бесконечно, а Y не более чем счётно. Тогда $|X \cup Y| = |X|$.*

Доказательство. Заменяя Y на $Y \setminus X$, имеем, что WLOG $X \cap Y = \varnothing$. При этом у X есть счётное подмножество Z. Тогда понятно, что $Z \cup Y$ счётно, а значит есть биекция $f : Z \cup Y \to Z$. Тогда определим $g : X \cup Y \to X$ так, что

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in Z \cup Y \\ x & \text{если } x \in X \setminus Z \end{cases}$$

Очевидно, что g биективна. □

Следствие 27.1. *Пусть X более чем счётно, а Y не более чем счётно. Тогда $|X \setminus Y| = |X|$.*

Доказательство. Пусть $U := X \cap Y$, а $V := X \setminus U$. Ясно, что U не более чем счётно, V бесконечно. Значит, $|X| = |V \cup U| = |V| = |X \setminus Y|$. □

4 Упорядоченность

Определение 26. *Частично упорядоченное множество (ЧУМ)* — пара из множества и частичного порядка на нём.

Линейно упорядоченное множество (ЛУМ) — пара из множества и линейного порядка на нём.

Обозначение: $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$.

Определение 27. Пусть даны ЧУМ $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ и непустое $S \subseteq A$. Тогда $a \in A$ является

- *максимальным элементом для S в $\mathfrak{A}$*, если $a \in S \wedge \neg(\exists x \in S : a < x)$;
- *минимальным элементом для S в $\mathfrak{A}$*, если $a \in S \wedge \neg(\exists x \in S : x < a)$;
- *наибольшим элементом для S в $\mathfrak{A}$*, если $a \in S \wedge (\forall x \in S \quad x \leqslant a)$;
- *наименьшим элементом для S в $\mathfrak{A}$*, если $a \in S \wedge (\forall x \in S \quad a \leqslant x)$.

Если $S = A$, то уточнение "для S" опускают.
Также a является

- *верхней гранью для S в $\mathfrak{A}$*, если $\forall x \in S \quad x \leqslant a$;
- *нижней гранью для S в $\mathfrak{A}$*, если $\forall x \in S \quad x \geqslant a$;
- *супремумом гранью для S в $\mathfrak{A}$*, если a — наименьшая верхняя грань для S в $\mathfrak{A}$;
- *инфимумом гранью для S в $\mathfrak{A}$*, если a — наибольшая нижняя грань для S в $\mathfrak{A}$.

Утверждение 28. *В ЧУМ $\mathfrak{A}$*

- *не более одного наибольшего в $\mathfrak{A}$ элемента;*
- *всякий наибольший в $\mathfrak{A}$ максимален в $\mathfrak{A}$;*
- *любые два максимальных в $\mathfrak{A}$ несравнимы.*

Аналогично для наименьших и минимальных элементов.

Утверждение 29. *В ЛУМ все максимальные наибольшие и наоборот. Аналогично для минимальных и наименьших.*

Определение 28. *Гомоморфизм из $\langle A, \leqslant_A \rangle$ в $\langle B, \leqslant_B \rangle$* — отображение $f : A \to B$, что

$$a_1 \leqslant_A a_2 \Rightarrow f(a_1) \leqslant_B f(a_2)$$

В таком случае ещё говорят, что f сохраняет порядок.

Если f инъективно, а последнее условие усиливается до равносильности (а не остаётся следствием), то f называется *вложением из $\langle A, \leqslant_A \rangle$ в $\langle B, \leqslant_B \rangle$*.

Утверждение 30. *Любой инъективный гомоморфизм из ЛУМ в ЧУМ является вложением.*

Определение 29. *Изоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$* — сюръективное вложение из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Обозначение: $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.

Утверждение 31. *"Изоморфность" — "отношение эквивалентности" на ЧУМах. Т.е. для любых $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ верно:*

1. $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}$*;*

2. $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$*;*

3. $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}$.

Определение 30. Изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на себя — *автоморфизм.*

С ЧУМами можно делать базовые преобразования:

1. Пусть даны ЧУМ $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ и $S \subseteq A$. Возьмём

$$\leqslant_S := \leqslant \cap\, S \times S$$

Тогда $\langle S, \leqslant_S \rangle$ — ЧУМ. Оно называется *индуцированным в* $\mathfrak{A}$ *по* S. При этом из ЛУМ получится ЛУМ.

2. Пусть даны ЧУМ $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$, причём A и B дизъюнктны. Возьмём

$$\leqslant := \leqslant_A \cup A \times B \cup \leqslant_B$$

Тогда $\langle A \cup B, \leqslant \rangle$ — ЧУМ, которое обозначается $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$. При этом из двух ЛУМ всегда получится ЛУМ.

3. Пусть даны ЧУМ $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$. Определим $\leqslant$ на $A \times B$ по правилу

$$(a_1, b_1) \leqslant (a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 \leqslant_A a_2 \wedge b_1 \leqslant$$

Тогда $\langle A \times B, \leqslant \rangle$ — ЧУМ, где $\leqslant$ традиционно называют *покоординатным порядком.* Понятно, что $\leqslant$ мало когда бывает линейным.

4. Модифицируем предыдущую конструкцию, сделав одну из координат главной. Например, первую:

$$(a_1, b_1) \leqslant (a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 < a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \leqslant b_2)$$

Тогда $\langle A \times B, \leqslant \rangle$ — ЧУМ, которое обозначается $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. В таком случае из двух ЛУМ получается ЛУМ.

4.1 Трансфинитная индукция и фундированность

Определение 31. Для ЧУМ $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ верен *принцип трансфинитной индукции*, если для всякого $X \subseteq A$,

$$\forall x \in A((\forall y < x) y \in X \to x \in X) \to X = A$$

Определение 32. Для ЧУМ $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ верен *принцип минимального элемента*, если для всякого $X \subseteq A$,

$$X \neq \varnothing \to \exists x \in X((\forall y \in X)\ y \not< x)$$

Такие ЧУМ называются *фундированными.*

Теорема 32. *Для ЧУМ верен принцип трансфинитной индукции тогда и только тогда, когда оно фундировано.*

Доказательство. Пусть $X \subseteq A$. Обозначим $A \setminus X$ через $\overline{X}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\forall x \in A((\forall y < x) y \in X \to x \in X) \to X = A \iff \\
X \neq A \to \neg\forall x \in A((\forall y < x) y \in X \to x \in X) \iff \\
X \neq A \to \exists x \in A\neg((\forall y < x) y \in X \to x \in X) \iff \\
X \neq A \to \exists x \in A((\forall y < x) y \in X \wedge x \notin X) \iff \\
X \neq A \to \exists x \in A((\forall y \notin X) y \not< x \wedge x \notin X) \iff \\
\overline{X} \neq \varnothing \to \exists x \in \overline{X}((\forall y \in \overline{X}) y \not< x)
\end{aligned}$$

□

Утверждение 33.

1. *Пусть даны фундированные ЧУМ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что $A \cap B = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ будет фундированным.*

2. *Пусть даны фундированные ЧУМ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ будет фундированным.*

Определение 33. *Вполне упорядоченное множество (ВУМ)* — фундированное ЛУМ. Порядки ВУМ называются *полными порядками*.

Определение 34. Пусть дано ВУМ $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$. *Начальный сегмент* — множество $S \subseteq A$, если для $\forall a_1, a_2 \in A$

$$(a_1 \leqslant a_2 \wedge a_2 \in S) \Rightarrow a_1 \in S$$

Определение 35. Пусть дано ВУМ $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$. Множество

$$[0, a)_{\mathfrak{A}} := \{x \in A \mid x < a\}$$

является начальным сегментом $\mathfrak{A}$. Когда ясно, о каком $\mathfrak{A}$ идёт речь, нижний индекс $\cdot_{\mathfrak{A}}$ обычно опускается.

Утверждение 34. *Пусть $\mathfrak{A}$ — ВУМ, а S — начальный сегмент $\mathfrak{A}$, отличный от A. Тогда существует единственный $a \in A$, что $S = [0, a)$.*

Определение 36. $\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}$ — множество всех начальных сегментов $\mathfrak{A}$, отличных от A, а

$$\subseteq_{\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}} := \{(U, V) \in \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}} \times \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}} \mid U \subseteq V\}$$

Утверждение 35. *Для любого ВУМ $\mathfrak{A}$ верно, что $\mathfrak{A} \simeq \langle \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}, \subseteq_{\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}} \rangle$.*

Доказательство. Несложно видеть, что

$$f : A \to \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}, a \mapsto [0, a)$$

есть изоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\langle \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}, \subseteq_{\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}} \rangle$. □

Утверждение 36. *Пусть $\mathfrak{A}$ — ВУМ, а f — вложение из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$. Тогда $f(a) \geqslant a$ для всех $a \in A$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$X := \{a \in A \mid f(a) < a\}$$

Предположим, что X непусто. Пусть a' — наименьший элемент для X в $\mathfrak{A}$. Тогда $f(a') < a'$, поэтому $f(f(a')) < f(a')$, что значит $f(a') \in X$. В таком случае $a' \leqslant f(a')$ — противоречие. □

Следствие 36.1. *Для каждого ВУМ $\mathfrak{A}$ единственным автоморфизмом $\mathfrak{A}$ является id_A.*

Доказательство. Пусть f — автоморфизм $\mathfrak{A}$. Очевидно, что f^{-1} также будет автоморфизмом $\mathfrak{A}$. Тогда для любого $a \in A$ имеем, что $f(a) \geqslant a$ и $f^{-1}(a) \geqslant a$, а значит $a \geqslant f(a) \geqslant a$, т.е. $f(a) = a$. Таким образом $f = id_A$. □

Следствие 36.2. *Для любых ВУМ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеется не более одного изоморфизма из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Пусть f и g — изоморфизмы из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Тогда несложно понять, что $f \circ g^{-1}$ есть автоморфизм, а значит $f \circ g^{-1} = id_A$. Следовательно $f = f \circ g^{-1} \circ g = id_A \circ g = g$. □

Лемма 37. *Никакой собственный начальный сегмент ВУМ $\mathfrak{A}$ не изоморфен самому $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть f — изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на некоторый собственный начальный сегмент $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathrm{range}(f) = [0, a)$ для некоторого $a \in A$. Поэтому $f(a) < a$ — противоречие. □

Теорема 38 (о сравнении ВУМ)**.** *Для любых ВУМ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеет место ровно один из трёх случаев:*

1. *$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны;*
2. *$\mathfrak{A}$ изоморфно собственному начальному сегменту $\mathfrak{B}$;*
3. *$\mathfrak{B}$ изоморфно собственному начальному сегменту $\mathfrak{A}$.*

При этом в пунктах (2) и (3) соответствующие собственные начальные сегменты определяются однозначно.

Доказательство. Единственность сегментов в (2) и (3) и взаимная исключаемость пунктов (1), (2) и (3) следуют из предыдущей леммы. Поэтому осталось показать, что один из трёх случаев точно будет иметь место.

Рассмотрим
$$\xi := \{(a, b) \in A \times B \mid [0, a)_{\mathfrak{A}} \simeq [0, b)_{\mathfrak{B}}\}$$
По предыдущей лемме ξ и ξ^{-1} являются функциональными.

Также несложно видеть, что если f — изоморфизм из $[0, a)_{\mathfrak{A}}$ на $[0, b)_{\mathfrak{B}}$, а $a' <_A a$ и $b' <_B b$, то

- $f \restriction_{[0,a')_{\mathfrak{A}}}$ является изоморфизмом из $[0, a')_{\mathfrak{A}}$ на $[0, f(a'))_{\mathfrak{B}}$;
- $f^{-1} \restriction_{[0,b')_{\mathfrak{B}}}$ является изоморфизмом из $[0, b')_{\mathfrak{B}}$ на $[0, f^{-1}(b'))_{\mathfrak{A}}$.

Следовательно, если $a \in \mathrm{dom}(\xi)$, то $[0, a)_{\mathfrak{A}} \subseteq \mathrm{dom}(\xi)$; если $b \in \mathrm{range}(\xi)$, то $[0, b)_{\mathfrak{B}} \subseteq \mathrm{range}(\xi)$. Поэтому ξ — биекция между начальными сегментами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Также следует и то, что $a_1 <_A a_2 \Leftrightarrow f(a_1) <_B f(a_2)$, что значит, что ξ — изоморфизм между начальными сегментами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Если $\mathrm{dom}(\xi) \neq A$, а $\mathrm{range}(\xi) \neq B$, то существуют $a \in A$ и $b \in B$, что $\mathrm{dom}(\xi) = [0, a)_{\mathfrak{A}}$, а $\mathrm{range}(\xi) = [0, b)_{\mathfrak{B}}$. Это значит, что $(a, b) \in \xi$ — противоречие. Значит $\mathrm{dom}(\xi) = A$ или $\mathrm{range}(\xi) = B$, откуда следует желаемое. □

5 Ординалы, кардиналы и важные теоремы ZFC

5.1 Ординалы

Определение 37. X называется *транзитивным*, если $\bigcup X \subseteq X$ (или, что равносильно, $X \subseteq \mathcal{P}(X)$).

Определение 38.

$$\in_X := \{(u, v) \in X \times X \mid u \in v\}$$

Определение 39. *Ординал* или *ординальное число* — трансфинитное множество X, что $\in_X$ — строгий полный порядок на X. Обозначение: α, β, γ, $\ldots$

Поскольку $\mathbb{N}$ (и все его элементы) являются ординалами, то когда речь идёт об ординалах, то пишут не $\mathbb{N}$, а ω.

Также вместо $\alpha \in \beta$ можно писать $\alpha < \beta$.

Замечание 8. Важно заметить, что для любого ординала α ЛУМ $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ является ВУМ. Так как иначе есть некоторое $X \subseteq \alpha$, что у него нет минимального элемента, значит для любого $x \in X$ найдётся $x' \in X$, что $x' < x$, значит есть бесконечная убывающая последовательность (элементов X), но это противоречит аксиоме регулярности.

Утверждение 39. *Пусть α — ординал, а $X \in \alpha$. Тогда X — ординал.*

Доказательство.

1. Проверим, что X транзитивно. Пусть $E \in X$, тогда нужно показать, что $E \subseteq X$. Пусть $u \in E$. Тогда $E \in \alpha$, значит $u \in \alpha$. При этом $u \in_\alpha E \in_\alpha X$, значит $u \in_\alpha X$. Это и значит, что $E \subseteq X$.

2. Заметим, что $X \subseteq \alpha$. Поэтому $\in_X = \in_\alpha \cap (X \times X)$, поэтому $\in_X$ — строгий полный порядок.

□

Утверждение 40. *Пусть α — ординал, а $\beta \in \alpha$. Тогда $\beta = [0, \beta)$.*

Доказательство. Очевидно следует из транзитивности $\in_\alpha$. □

Утверждение 41. *Для любых ординалов α и β*

$$\alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta$$

Доказательство.

- Пусть $\alpha \in \beta$. Тогда $\alpha \subseteq \beta$. Если $\alpha = \beta$, то $\beta \in \beta$, значит $\alpha \in_\beta \beta$, значит $\beta \in_\beta \beta$ — противоречие со строгостью $\in_\beta$. Значит $\alpha \neq \beta$, значит $\alpha \subsetneq \beta$.

- Пусть $\alpha \subsetneq \beta$. Тогда $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$, а значит мы можем определить

  $$y := \text{“наименьший элемент } \beta \setminus \alpha \text{ в } \langle \beta, \in_\beta \rangle\text{”}$$

  Нетрудно убедиться, что α совпадает с $\{x \in \beta \mid x < \gamma\}$:

  – если $x \in \alpha$, то $\gamma \nleqslant x$ (так как иначе $\gamma \leqslant x \in \alpha$, а значит $\gamma \in \alpha$), а потому $x < \gamma$;
  – если $x \in \beta$ и $x < \gamma$, то $x \notin \beta \setminus \alpha$, т.е. $x \in \gamma$.

  Таким образом $\alpha = [0, \gamma) = \gamma$.

$\square$

Теорема 42. *Для любых ординалов α, β и γ:*

1. $\alpha \not< \alpha$;
2. $\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$;
3. *либо* $\alpha < \beta$, *либо* $\alpha = \beta$, *либо* $\alpha > \beta$;

Более того для любого непустого множества ординалов X:

4. $\bigcap X \in X$, *причём* $\bigcap$ — *наименьший элемент* X *в* $\langle X, \in_X \rangle$.

Доказательство.

1. Иначе $\alpha \in \alpha$, значит $\alpha \in_\alpha \alpha$ — противоречие.
2. $\beta \subseteq \gamma$, следовательно $\alpha \in \gamma$.
4. Легко видеть, что $\bigcap X$ — ординал. При этом для любого $\alpha \in X$ верно, что $\bigcap X \subseteq \alpha$, а значит $\bigcap X \leqslant \alpha$. Заметим, что $\bigcap X \not< \bigcap X$, значит есть $\alpha \in X$, что $\bigcap X \not< \alpha$, т.е. $\bigcap X = \alpha$, следовательно $\bigcap X \in X$.
3. В силу предыдущего пункта, в $\{\alpha, \beta\}$ есть наименьший элемент. Стало быть α и β сравнимы по $\leqslant$.

$\square$

Следствие 42.1. *Пусть X — транзитивное множество ординалов. Тогда X — ординал.*

Доказательство. Действительно, $\in_X$ — полный порядок на X по только доказанной теореме, значит X — ординал. $\square$

Теорема 43. *Пусть X — множество ординалов. Тогда $\bigcup X$ — ординал, причём $\bigcup X$ является "супремумом X" в классе всех ординалов относительно $\in$.*

Доказательство. Очевидно, что $\bigcup X$ — множество ординалов и что оно транзитивно. Поэтому $\bigcup X$ — ординал.

Разумеется, $\bigcup X$ является "супремумом X" в классе всех ординалов относительно $\subsetneq$, что на ординалах совпадает с $\in$. $\square$

Определение 40. Пусть α — ординал. Тогда

$$\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$$

является ординалом.

Замечание 9. Не сложно понять, что $\alpha \subsetneq \alpha + 1$ и нет такого X, что $\alpha \subsetneq X \subsetneq \alpha + 1$.

Определение 41. Ненулевой ординал α называется *непредельным*, если есть ординал β, что $\alpha = \beta + 1$, и *предельным иначе*.

Утверждение 44.

1. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + 1 = \beta + 1$. *(Что значит, что у каждого непредельного ординала α есть единственный "предшественник" $\alpha - 1$.)*

2.

$$\bigcup \alpha = \begin{cases} \alpha & \text{если } \alpha \text{ пределен} \\ \alpha - 1 & \text{если } \alpha \text{ непределен} \end{cases}$$

Теорема 45 (о связи ординалов и ВУМ)**.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — строгий ВУМ. Тогда существует единственный ординал α, что $\mathfrak{A} \simeq \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$.*

Доказательство. Единственность очевидна: для любых ординалов α и β

$$\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \simeq \langle \beta, \in_\beta \rangle \iff \alpha = \beta$$

Осталось показать существование α.

Рассмотрим

$$S := \{a \in A \mid \text{существует ординал } \alpha_a, \text{ что } [0, a)_{\mathfrak{A}} \simeq \langle \alpha, \in_\alpha \rangle\}$$

Само собой, для каждого $a \in S$ ординал α_a строго единственен. Поэтому есть

$$X := \{\alpha_a \mid a \in S\}$$

Поскольку изоморфизмы переводят начальные сегменты в начальные, то поэтому X транзитивно, да и $\in_X$ является полным строгим порядком. Значит X — ординал. Рассматривая

$$f : S \to X, a \mapsto \alpha_a$$

имеем, что f — изоморфизм. Тогда если $A \setminus S \neq \varnothing$, то $S = [0, a)$, где a — наименьший элемент $A \setminus S$. Но тогда $[0, a)_{\mathfrak{A}} \simeq X$, а значит $a \in S$. Значит $S = A$. ☐

Определение 42. Если $\mathfrak{A}$ — ВУМ, то $\mathrm{ord}(\mathfrak{A})$ — это такой ординал α, что $\mathfrak{A} \simeq \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$.

Определение 43. Пусть α и β — ординалы. Тогда определим операции

$$\alpha + \beta := \mathrm{ord}(\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \oplus \langle \beta, \in_\beta \rangle)$$
$$\alpha \cdot \beta := \mathrm{ord}(\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \otimes \langle \beta, \in_\beta \rangle)$$

Замечание 10. Важно заметить, что класс Ord всех ординалов не является множеством. Действительно, если Ord — множество, то Ord — само ординал, а значит Ord $\in$ Ord, чего не может быть.

Определение 44. Пусть X — любое множество, а α — ординал. Тогда определим

$$X^{<\alpha} := \{f \mid (\exists \beta < \alpha) f : \beta \to X\} = \bigcup \{X^\beta \mid \beta < \alpha\}$$

Определение 45. Если $f : \beta \to X$, где β — ординал, то f называют *β-последовательностью*

Теорема 46 (о трансфинитной рекурсии)**.** *Фиксируем некоторый ординал α. Пусть $h : X^{<\alpha} \to X$. Тогда существует единственная $f : \alpha \to X$, что для всякого $\beta \in \alpha$*

$$f(\beta) = h(f\restriction_\beta)$$

Доказательство. Пусть $\gamma \in \alpha$. Будем называть $t : \gamma + 1 \to X$ *чудесной*, если для любого $\beta \in \gamma + 1$

$$t(\beta) = h(t\restriction_\beta)$$

Рассмотрим

$$S := \{\gamma \in \alpha \mid \text{существует единственная чудесная } t : \gamma + 1 \to X\}$$

Тогда для каждого $\gamma \in S$ обозначим соответствующую (единственную) чудесную функцию из $\gamma + 1$ в X как f_γ.

Заметим, что если $t : \gamma + 1 \to X$ чудесна, то для каждого $\beta < \gamma$ функция $t \cap ((\beta + 1) \times X)$ тоже чудесна. Таким образом, если $\gamma, \beta \in S$, то $f_\beta = f_\gamma \cap ((\beta + 1) \times X)$ (и т.е. $f_\beta \subseteq f_\gamma$).

Заметим также, что если для некоторого $\gamma \in \alpha$ все $\beta < \gamma$ лежат в S, то и γ лежит в S. Действительно, можно рассмотреть

$$t_0 := \bigcup\{f_\beta \mid \beta < \gamma\}$$

Несложно видеть, что $t_0 : \gamma \to X$. В таком случае рассмотрим

$$t := t_0 \cup \{(\gamma, h(t_0))\}$$

Несложно видеть, что ограничение t на $\beta+1$ для всех $\beta < \gamma$ есть f_β. Поэтому дял всех $\beta \in \gamma+1$ либо $\beta = \gamma$, и тогда

$$t(\beta) = t(\gamma) = h(t_0) = h(t\restriction_\beta),$$

либо $\beta < \gamma$, и тогда

$$t(\beta) = t_0(\beta) = f_\beta(\beta) = h(f_\beta\restriction_\beta) = h(t_0\restriction_\beta) = h(t\restriction_\beta)$$

Это значит, что t чудесна. При этом если бы была отличная от t чудесная функция $t' : \gamma+1 \to X$, то у неё должны быть такие же сужения на $\beta + 1$ для каждого $\beta < \gamma$, что и у t. Значит она может отличаться только в γ; но это тоже невозможно, так как

$$t(\gamma) = h(t\restriction_\gamma) = h(t'\restriction_\gamma) = t'(\gamma)$$

Поэтому t является единственной чудесной функцией для $\gamma + 1$, что и значит, что $\gamma \in S$.

Тогда по трансфинитной индукции имеем, что $S = \alpha$.

Рассмотрим

$$f := \bigcup\{f_\gamma \mid \gamma \in \alpha\}$$

Несложно видеть, что $f : \alpha \to X$ и f тоже окажется чудесной (что и требуется). Также если будет вдруг существовать ещё одна чудесная $f' : \alpha \to X$, то у неё будут такие же сужения на $\beta + 1$ для каждого $\beta \in \alpha$, что и у f, значит f' не будет ничем отличаться от f. □

Замечание. Теорему о трансфинитной рекурсии можно обобщить до параметризованной, используя уже готовую рекурсию.

Теорема 47 (о трансфинитной рекурсии, частичной)**.** *Фиксируем некоторый ординал α. Пусть $h :\subseteq X^{<\alpha} \to X$. Тогда существует единственная $f :\subseteq \alpha \to X$, что*

1. *для всякого $\beta \in \mathrm{dom}(f)$*
$$f(\beta) = h(f\restriction_\beta);$$
2. *либо $\mathrm{dom}(f) = \alpha$, либо $\mathrm{dom}(f) = \gamma$ для некоторого $\gamma < \alpha$, причём $f \notin \mathrm{dom}(h)$.*

Доказательство. Как обычно, рассмотрим ы $\notin X$ и положим $X' := X \cup \{ы\}$. Затем расширим h до $h : (X')^{<\alpha} \to X'$ следующим образом:

$$h'(g') := \begin{cases} h(g') & \text{если } g' \in \mathrm{dom}(h) \\ ы & \text{иначе} \end{cases}$$

В силу теоремы о трансфинитной рекурсии, найдётся единственная $f' : \alpha \to X$, что для любого $\beta \in \alpha$

$$f'(\beta) = h'(f' \restriction_\beta)$$

Возьмём

$$f := f' \cap (\alpha \times X)$$

Нетрудно убедиться, что f является искомой. □

Теорема 48 (о трансфинитной "классовой рекурсии")**.** *Фиксируем некоторый ординал* α. *Пусть* $\Phi(x, y)$ *— тотальное функциональное условие. Тогда существует единственная функция* f *с* $\mathrm{dom}(f) = \alpha$, *что для всякого* $\beta \in \alpha$

$$f(\beta) = [\![\Phi]\!](f \restriction_\beta)$$

Доказательство. Несложная модификация доказательства теоремы о трансфинитной рекурсии. □

Теорема 49 (Цермело о полном упорядочении; в ZFC)**.** *Для любого* A *существует* $\leqslant$, *что* $\langle A, \leqslant \rangle$ *— ВУМ.*

Доказательство. Пусть η — функция выбора на $\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$. Тогда для каждого ординала α существует единственная $f_\alpha :\subseteq \alpha \to A$, что

1. для любого $\beta \in \mathrm{dom}(f_\alpha)$
$$f_\alpha(\beta) = \eta(A \setminus \mathrm{range}(f_\alpha \restriction_\beta))$$
2. либо $\mathrm{dom}(f_\alpha) = \alpha$, либо $\mathrm{dom}(f_\alpha) = \gamma \in \alpha$, причём $\mathrm{range}(f_\alpha) = A$.

Несложно видеть, что f_α — биекция между $\mathrm{dom}(f_\alpha)$ и $\mathrm{range}(f_\alpha)$, а значит с помощью неё можно построить на $\mathrm{range}(f_\alpha)$ ВУМ, изоморфный $\mathrm{dom}(f_\alpha)$. Поэтому если для некоторого ординала α окажется, что $\mathrm{dom}(f_\alpha) \neq \alpha$, то тогда $\mathrm{range}(\alpha) = A$, а значит мы сможем построить на A ВУМ. Осталось показать, что такое α найдётся.

Предположим противное: для каждого ординала α верно, что $\mathrm{dom}(f_\alpha) = \alpha$. Рассмотрим

$$\Phi(x, y) := \text{“}y \text{ — ординал”} \wedge x = f_{y+1}(y)$$

Ясно, что если $\alpha < \beta$, то $f_\alpha \subseteq f_\beta$. Поэтому для любых α и β

$$f_{\alpha+1}(\alpha) = f_{\beta+1}(\beta) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta$$

Это значит, что Φ функционально. Поэтому по аксиоме подстановки можно выделить

$$X := \{y \mid (\exists x \in A)\Phi(x, y)\}$$

Однако X должно совпадать с Ord — противоречие. □

5.2 Кардиналы

Теорема 50 (о сравнимости по мощности; в ZFC)**.** *Для любых X и Y верно, что $X \preccurlyeq Y$ или $X \succ Y$.*

Доказательство. Прямое следствие из теоремы Цермело и теоремы о сравнении ВУМ. $\square$

Определение 46. *Кардинал* или *кардинальное число* — ординал, неравномощный никакому меньшему ординалу. Обозначение: κ, μ, λ.

Утверждение 51. *Для любых кардиналов κ и μ*

$$\kappa \sim \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \kappa = \mu$$

Утверждение 52. *Для любых кардиналов κ и μ*

$$\kappa \preccurlyeq \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \kappa \leqslant \mu$$

Доказательство.

1. Если $\kappa \leqslant \mu$, то очевидно, что $\kappa \preccurlyeq \mu$.

2. Пусть $\kappa \preccurlyeq \mu$. Предположим противное: $\kappa \nleqslant \mu$. Тогда $\kappa > \mu$, значит $\kappa \succcurlyeq \mu$. Ввиду теоремы Кантора-Шрёдера-Бернштейна, мы получаем, что $\kappa \sim \mu$, а значит $\kappa = \mu$ — противоречие.

$\square$

Теорема 53 (в ZFC)**.** *Для любого множества есть единственный кардинал ему равномощный.*

Доказательство. По теореме Цермело есть ординал α, равномощный X. Тогда можно определить

$$\kappa := \bigcap \{\beta \in \alpha + 1 \mid \beta \sim X\}$$

По уже доказанным утверждениям $\kappa \in \{\beta \in \alpha + 1 \mid \beta \sim X\}$, поэтому $\kappa \sim X$. При этом κ является кардиналом, так как иначе есть $\gamma < \kappa$, что $\gamma \sim \kappa$, но тогда $\gamma \in \alpha + 1$ и $\gamma \sim X$, а тогда $\kappa \in \gamma$ — противоречие. Поэтому у X есть равномощный ему кардинал. А его единственность очевидна. $\square$

Определение 47. Кардинал, равномощный множеству обозначается как $\mathrm{card}(X)$ или $|X|$.

Утверждение 54. *Для любых X и Y*

1. *$X \sim Y$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$;*

2. *$X \preccurlyeq Y$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{card}(X) \leqslant \mathrm{card}(Y)$.*

Определение 48. Для любых кардиналов κ и μ определим

$$\kappa + \mu := \mathrm{card}(\kappa \times \{0\} \cup \mu \times \{1\}) \tag{1}$$
$$\kappa \cdot \mu := \mathrm{card}(\kappa \times \mu) \tag{2}$$

Замечание. Важно заметить, что $+$ и $\cdot$ отличаются между ординалами и кардиналами. Например, ординалы

$$\omega, \qquad \omega + 1, \qquad \omega + \omega, \qquad \omega \cdot \omega$$

являются попарно различными, а при этом кардиналы

$$\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0$$

совпадают.

Утверждение 55. *Для любого ординала существует больший кардинал.*

Доказательство. Пусть $\kappa := \mathrm{card}(\mathcal{P}(\alpha))$. Если $\alpha \not< \kappa$, то $\kappa \leqslant \alpha$, а значит $\kappa \subseteq \alpha$, $\kappa \preccurlyeq \alpha$, т.е. $\mathcal{P}(\alpha) \preccurlyeq \alpha$ — противоречие с теоремой Кантора. А поэтому $\alpha < \kappa$. □

Замечание 11. Как и Ord, класс всех кардиналов Card также не является множеством. Действительно, если Card — множество, то $\bigcup \mathrm{Card} = \mathrm{Ord}$ тоже является множеством, чего быть не может.

Определение 49. Когда речь идёт о кардиналах, будем говорить, что для всякого кардинала κ

$$2^\kappa := \mathrm{card}(\mathcal{P}(\kappa))$$

Определение 50. Для каждого кардинала κ обозначим

$$\kappa^+ := \text{“наименьший кардинал, больший } \kappa\text{”}$$

$\aleph_0^+$ обозначают $\aleph_1$, $\aleph_1^+$ — $\aleph_2$, и т.д. На само деле, можно было бы определить $\aleph_\alpha$ для произвольного ординала α.

Утверждение 56 (Континуум-гипотеза, CH)**.**

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Теорема 57 (Гёдель, 1940)**.** *Можно доказать, что* ¬CH *нельзя доказать в* ZFC.

Теорема 58 (Коэн, 1963)**.** *Можно доказать, что* CH *нельзя доказать в* ZFC.

5.3 Важные теоремы в ZFC

Определение 51. Пусть $\mathfrak{A}$ — ЧУМ. *Цепь в* $\mathfrak{A}$ — непустое $S \subseteq A$, индуцирующее ЛУМ.

Теорема 59 (лемма Цорна; в ZFC)**.** *Пусть* $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ — *ЧУМ с непустым носителем, в которой у любой цепи имеется верхняя грань. Тогда в* $\mathfrak{A}$ *есть максимальный элемент.*

Доказательство. Пусть κ — какой-нибудь кардинал, больший $|A|$, например, $2^{|A|}$. Пусть также η — функция выбора для $\mathcal{P}(A) \setminus \varnothing$. Используя трансфинитную рекурсию, определим $f :\subseteq \kappa \to A$ по правилу

$$f(\beta) = \eta(\{a' \in A \mid a' >_A a \quad \forall a \in \mathrm{range}(f\restriction_\beta)\})$$

Легко видеть, что для любых $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{dom}(f)$

$$\beta_1 < \beta_2 \quad \Longrightarrow \quad f(\beta_1) <_A f(\beta_2)$$

Из этого мы получаем, что

1. f инъективна. Поэтому $\mathrm{dom}(f) \neq \kappa$, а значит $\mathrm{dom}(f) = \alpha < \kappa$. Причём в A нет элементов, строго больших всех элементов из $\mathrm{range}(f)$.

2. $\mathrm{range}(f)$ является цепью в $\mathfrak{A}$, значит у него есть верхняя грань s.

Отсюда выходит, что $s \in \mathrm{range}(f)$, а значит нет элементов как внутри цепи $\mathrm{range}(f)$, так и вне неё больших s. Значит s — максимальный элемент в $\mathfrak{A}$. □

Следствие 59.1 (в ZFC)**.** *Пусть* $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ — *ЧУМ, в котором у любой цепи имеется верхняя грань. Тогда для каждого* $a \in A$ *в* $\mathfrak{A}$ *есть максимальный элемент* $a' \geqslant_A a$.

Доказательство. Случай $A = \varnothing$ тривиален, поэтому будем считать, что $A \neq \varnothing$. Зафиксируем произвольное $a \in A$. Возьмём

$$B := \{b \in A \mid a \leqslant_A b\} \qquad \text{и} \qquad \leqslant_B := \leqslant_A \cap B \times B$$

Очевидно, что $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_b \rangle$ будет ЧУМ, которое удовлетворяет условию леммы Цорна. Поэтому в $\mathfrak{B}$ есть максимальный элемент a'. Тогда несложно понять, что a' будет максимальным и в $\mathfrak{A}$, а также $a' \geqslant_A a$. $\square$

Теорема 60 (в ZFC)**.** *Пусть X бесконечно. Тогда $|X \times X| = |X|$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$M := \{f \mid f : U \to U \times U \text{ -- биекция, где } U \subseteq X \text{ и } U \text{ бесконечно}\}$$

Поскольку X бесконечно, у него есть счётное подмножество, равномощное собственному декартовому квадрату, то M непусто. Определим

$$\leqslant := \{(f_1, f_2) \in M \times M \mid f_1 \subseteq f_2\}$$

Далее будем рассматривать ЧУМ $\mathfrak{M} = \langle M, \leqslant \rangle$.

Покажем, что условие леммы Цорна для $\mathfrak{M}$ выполнено. Пусть S — произвольная цепь в $\mathfrak{M}$. Возьмём

$$f_S := \bigcup_{f \in S} f$$

Понятно, что f_S — биекция из $\mathrm{dom}(f_S)$ в $\mathrm{range}(f_S)$, и при этом

$$\mathrm{dom}(f_S) = \bigcup_{f \in S} \mathrm{dom}(f) \qquad\qquad \mathrm{range}(f_S) = \bigcup_{f \in S} \mathrm{range}(f)$$

Очевидно, что $\mathrm{range}(f_S) \subseteq \mathrm{dom}(f_S) \times \mathrm{dom}(f_S)$. Также заметим, что для любых $a_1, a_2 \in \mathrm{dom}(f_S)$ существуют $f_1, f_2 \in S$, что $a_1 \in \mathrm{dom}(f_1)$ и $a_2 \in \mathrm{dom}(f_2)$, а значит $f = f_1 \cup f_2 \in S$ содержит в области определения a_1 и a_2, что значит, что $(a_1, a_2) \in \mathrm{range}(f) \subseteq \mathrm{range}(f_S)$. Это значит, что $\mathrm{range}(f_S) = \mathrm{dom}(f_S) \times \mathrm{dom}(f_S)$, а значит $f_S \in M$. Так мы имеем, что f_S — верхняя грань (и даже супремум) для S в $\mathfrak{M}$.

Тогда, применяя лемму Цорна, получаем максимальный элемент $f_\star$. Обозначим $\mathrm{dom}(f_\star)$ за Y.

Предположим, что $|Y| < |X \setminus Y|$. Тогда Y равномощно некоторому $Z \subseteq X \setminus Y$. Заметим, что

$$\begin{aligned} |Z| &\leqslant |Z \times Z| \\ &= |Y \times Z| + |Z \times Y| + |Z \times Z| \\ &\leqslant |(2 \times Z) \times (2 \times Z)| \\ &= |Z| \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\leqslant 3 \cdot |Z \times Z| \\ &= |(Y \cup Z) \times (Y \cup Z) \setminus Y \times Y| \\ &= |4 \times Z \times Z| \leqslant |Z \times Z \times Z| \end{aligned}$$

Следовательно по теореме Кантора-Шрёдера-Бернштейна есть биекция g из $Y \times Z \cup Z \times Y \cup Z \times Z$ в Z. Рассмотрим $h : (Y \cup Z) \to (Y \cup Z) \times (Y \cup Z)$, определённую по правилу

$$h(x) := \begin{cases} f_\star(x) & x \in Y \\ g(x) & x \in Z \end{cases}$$

Следовательно $h \in M$ и $h > f_\star$ — противоречие. Поэтому $|Y| \geqslant |X \setminus Y|$.

В таком случае

$$|Y| \leqslant |X| = |Y| + |X \setminus Y| \leqslant |Y| + |Y| = 2 \cdot |Y| \leqslant |Y| \cdot |Y| = |Y|$$

а значит по теореме Кантора-Шрёдера-Бернштейна $|Y| = |X|$, а потому $|X| = |X \times X|$. $\square$

Следствие 60.1 (в ZFC). *Если $0 < |X| \leqslant |Y|$ и Y бесконечно, то $|X \times Y| = |Y|$.*

Доказательство. Ясно, что

$$|Y| = |1 \times Y| \leqslant |X \times Y| \leqslant |Y \times Y| = |Y|,$$

откуда по теореме Кантора-Шрёдера-Бернштейна $|X \times Y| = |Y|$. $\square$

Следствие 60.2. *Пусть $|X| \leqslant |Y|$ и Y бесконечно. Тогда $|X \cup Y| = |Y|$.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$|Y| \leqslant |X \cup Y| \leqslant |X| + |Y| \leqslant 2 \cdot |Y| \leqslant |Y|^2 = |Y|,$$

откуда по теореме Кантора-Шрёдера-Бернштейна $|X \cup Y| = |Y|$. $\square$

Следствие 60.3. *Пусть $|X| < |Y|$ и Y бесконечно. Тогда $|Y \setminus X| = |Y|$.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$|Y| = \max\{|X|, |Y|\} = |X \cup Y| = |X \cup (Y \setminus X)| = \max\{|X|, |Y \setminus X|\}$$

Поскольку $|X| \neq |Y|$, то $|Y| = |Y \setminus X|$. $\square$

Следствие 60.4. *Пусть X бесконечно. Тогда $|X^*| = |X|$.*

Доказательство. По определению $|X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n|$. При этом очевидно по индукции, что $|X^n| = |X|$ для $n > 0$; $|X^0| = |\{\varnothing\}| = 1$. Поэтому

$$|X^*| = |X^0| + \sum_{n \in \mathbb{N}} |X^{n+1}| = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} |X| = 1 + |\mathbb{N}| \cdot |X| = 1 + |X| = |X|$$

$\square$