Геометрия и топология.

Лектор — Евгений Анатольевич Фоминых
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

TODOs

Содержание

Разделы!

Литература:

- Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М., “Элементарная топология”, М.:МЦНМО, 2012.
- Коснёвски Чес, “Начальный курс алгебраической топологии”, М.:Мир, 1983.
- Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко, “Введение в топологию”, М.:Наука. Физматлит, 1995.
- James Munkres, Topology.

Определение 1. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *метрикой* (или *расстоянием*) в множестве X, если:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (“неравенство треугольника”).

Пара (X, d), где d — метрика в X, называется *метрическим пространством.*

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

Пример 1. Пусть X — произвольное множество. Тогда метрика

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{если } x \neq y \\ 0 & \text{если } x = y \end{cases}$$

называется *дискретной* метрикой на множестве X.

Пример 2.

- $X := \mathbb{R}$, тогда $d(x,y) := |x-y|$ — метрика.
- $X := \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Тогда

  $$d(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2}$$

  называется *евклидовой* метрикой.
- $X := \mathbb{R}^n$, $d(x,y) := \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- $X := \mathbb{R}^n$, $d(x,y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- $X := C[0;1]$, $d(x(t), y(t)) = \max_{t \in [0;1]} |x(t) - y(t)|$. (X,d) называют *пространством непрерывных функций.*

Определение 2. Пусть (X,d) — метрическое пространство. Сужение функции d на $Y \times Y$ является метрикой в Y. Метрическое пространство $(Y, d|_{Y\times Y})$ называется *подпространством* пространства (X,d).

Теорема 1. *Пусть дана* $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*, что*

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad g(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y = 0$*;*
- $\forall x, y, d \in \mathbb{R}_+ \quad g(x+d, y) \geqslant g(x,y) \wedge g(x, y+d) \geqslant g(x,y)$*;*
- $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+ \quad g(x_1+x_2, y_1+y_2) \leqslant g(x_1,y_1) + g(x_2,y_2)$*.*

Тогда для любых метрических пространств (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *функция*

$$d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := g(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2))$$

будет метрикой на $X \times Y$*.*

Доказательство. Проверим, что $d_{X\times Y}$ — метрика.

- $\forall x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$

  $$\begin{aligned} d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0 \quad &\longleftrightarrow \quad g(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)) = 0 \\ &\longleftrightarrow \quad d_X(x_1,x_2) = 0 \wedge d_Y(y_1,y_2) = 0 \\ &\longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \end{aligned}$$

- $\forall x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$

  $$\begin{aligned} &d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \\ &\qquad = g(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)) = g(d_X(x_2,x_1), d_Y(y_2,y_1)) \\ &\qquad\qquad = d_{X\times Y}((x_2,y_2),(x_1,y_1)) \end{aligned}$$

- $\forall x_1, x_2, x_3 \in X, y_1, y_2, y_3 \in Y$

$$\begin{aligned} &d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \\ &\qquad = g(d_X(x_1,x_3), d_Y(y_1,y_3)) \\ &\qquad \leqslant g(d_X(x_1,x_2)+d_X(x_2,x_3), d_Y(y_1,y_2)+d_Y(y_2,y_3)) \\ &\qquad \leqslant g(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)) + g(d_X(x_2,x_3), d_Y(y_2,y_3)) \\ &\qquad = d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + d_{X\times Y}((x_2,y_2),(x_3,y_3)) \end{aligned}$$

$\square$

Следствие 1.1. *Для любых метрических пространств* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *пара* $(X \times Y, d_{X\times Y})$, *где*

$$d_{X\times Y} := \sqrt{d_X(x_1,x_2)^2 + d_Y(y_1,y_2)^2}$$

есть метрическое пространство.

Доказательство. Необходимо лишь проверить, что $g(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ удовлетворяет условиям теоремы.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x^2+y^2} \leftrightarrow x^2+y^2 = 0 \leftrightarrow x = 0 = y$.
- $\forall x, y, d \in \mathbb{R}_+ \quad x + d \geqslant x \Rightarrow (x+d)^2 \geqslant x^2 \Rightarrow (x+d)^2 + y^2 \geqslant x^2 + y^2 \Rightarrow \sqrt{(x+d)^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$; для y аналогично.
- $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$ по неравенству Коши-Буняковского-Шварца

$$\begin{gathered} (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0 \\ x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \geqslant 2x_1x_2y_1y_2 \\ (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \geqslant (x_1x_2+y_1y_2)^2 \\ (x_1^2+y_1^2) + 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} + (x_2^2+y_2^2) \geqslant (x_1^2+y_1^2) + 2(x_1x_2+y_1y_2) + (x_2^2+y_2^2) \\ \left(\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)^2 \geqslant (x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 \\ \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2} \geqslant \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \end{gathered}$$

$\square$

Замечание 1. Если g ассоциативна (например, $g(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$; она заодно коммутативна), то аналогично можно определить метрику на $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times (X_2 \times (\cdots \times X_n)\dots))$.

Таким образом евклидова метрика есть метрика, так как её можно получить, применяя $g(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ к пространствам $(X_i, d_i) = (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ (где $d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y|$).

Определение 3. Пусть Для $g(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ из последней теоремы пространство $(X \times Y, d_{X\times Y})$ называется *(декартовым) произведением* метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y). Аналогично определяется произведение конечного числа пространств.

Замечание 2. На роль $g(x,y)$ подходят следующие функции:

- $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}$ для всех $\alpha \geqslant 1$;
- $\max(x,y)$.

А следующие функции уже не подходят:

- $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}$ для всех $\alpha < 1$ (даже для отрицательных);
- $\min(x, y)$;
- $x \cdot y$ и x/y.

Определение 4. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $a \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Тогда:

- $B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ — *(открытый) шар пространства* (X, d) *с центром в точке* a *и радиусом* r;
- $\overline{B}_r(a) = D_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) \leqslant r\}$ — *замкнутой шар пространства* (X, d) *с центром в точке* a *и радиусом* r;
- $S_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$ — *сфера пространства* (X, d) *с центром в точке* a *и радиусом* r.

Определение 5. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $A \subseteq X$. Множество A называется *открытым* в метрическом пространстве, если

$$\forall a \in A\ \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq A$$

Теорема 2. *В любом метрическом пространстве* (X, d)

1. $\varnothing$ *и* X *открыты;*
2. *для всяких* $a \in X$ *и* $r > 0$ *открытый шар* $B_r(a)$ *открыт;*
3. *объединение любого семейства открытых множеств открыто;*
4. *пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.*

Доказательство.

1. Очевидно.
2. Для всякого $x \in B_r(a)$ верно, что $B_{r-d(x,a)}(x) \subseteq B_r(a)$, откуда утверждение очевидно следует.
3. Пусть дано семейство открытых множеств Σ. Пусть также $I = \bigcup \Sigma$. Для любого $x \in I$ верно, что существует $J \in \Sigma$, что $x \in J$, а значит есть $r > 0$, что $B_r(x) \subseteq J \subseteq I$, т.е. x — внутренняя точка I. Таким образом I открыто.
4. Пусть $I = \bigcap_{i=1}^n I_i$. Тогда для любого $x \in I$ верно, что существуют $r_1, \dots, r_n > 0$, что $B_{r_i}(x) \subseteq I_n$, значит $B_{\min r_i} \subseteq I$, значит x — внутренняя точка I. Таким образом I открыто.

$\square$

Определение 6. Пусть X — некоторое множество. Рассмотрим набор Ω его подмножеств, для которого:

1. $\varnothing, X \in \Omega$;
2. объединение любого семейства множеств из Ω лежит в Ω;

3. пересечение любого конечного семейства множеств, принадлежащих Ω, также принадлежит Ω.

В таком случае:

- Ω — *топологическая структура* или просто *топология* в множестве X;
- множество X с выделенной топологической структурой Ω (т.е.пара (X, Ω)) называется *топологическим пространством*;
- элементы множества Ω называются *открытыми множествами* пространства (X, Ω).

Пример 3.

- Если Ω — множество открытых множеств в метрическом пространстве (X, d), то (X, Ω) — топологическое пространство. Таким образом любое метрическое пространство можно отождествлять с соответствующим топологическим пространством.
- Топология, индуцированная евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^n$, называется *стандартной.*
- $\Omega := 2^X$ — *дискретная* топология на произвольном множестве X. Именно она порождается дискретной метрикой на X.
- $\Omega := \{\varnothing, X\}$ — *антидискретная* топология на произвольном множестве X.
- $X := \mathbb{R}$, $\Omega := \{(a; +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\}$. Такая топология называется *стрелкой.*
- $\Omega = \{\varnothing\} \cup \{A \in X : |X \setminus A| \in \mathbb{N}\}$ — топология *конечных дополнений* на произвольном множестве X.

Определение 7. Множество $F \subseteq X$ *замкнуто* в топологическом пространстве (X, Σ), если его дополнение $X \setminus F$ открыто (т.е. если $X \setminus F \in \Sigma$).

Теорема 3. *В любом топологическом пространстве* X

- $\varnothing$ *и* X — *замкнуты;*
- *объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто;*
- *пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.*

Теорема 4. *Пусть* U — *открыто, а* V — *замкнуто в* (X, Ω). *Тогда:*

- $U \setminus V$ *открыто;*
- $V \setminus U$ *замкнуто.*

Определение 8. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда *внутренностью* множества A называется объединение всех открытых подмножеств A:

$$\operatorname{Int}(A) := \bigcup_{\substack{U \in \Omega \\ U \subseteq A}} U$$

Теорема 5.

- $\operatorname{Int}(A)$ — *открытое множество.*

- $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$.
- B — *открыто* $\wedge B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq \mathrm{Int}(A)$.
- $A = \mathrm{Int}(A) \Leftrightarrow A$ — *открыто.*
- $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$.
- $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$.
- $\mathrm{Int}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Int}(A_k)$.
- $\mathrm{Int}(\bigcup_{A\in\Sigma} A) \supseteq \bigcup_{A\in\Sigma} \mathrm{Int}(A)$.

Определение 9. *Окрестность* точки a в топологическом пространстве X — открытое множество в X, содержащее a.

Точка a топологического пространства X называется *внутренней точкой* множества $A \subseteq X$, если A содержит как подмножество некоторую окрестность a.

Теорема 6.

- *Множество открыто тогда и только тогда, когда все его точки внутренние.*
- *Внутренность множества есть множество всех его внутренних точек.*

Доказательство.

- ($\Rightarrow$) Пусть A открыто, а $a \in A$. Тогда A — та самая окрестность a, которая является подмножеством A, поэтому a — внутренняя точка A.

  ($\Leftarrow$) Пусть каждая точка A внутренняя. Тогда для каждого $a \in A$ определим окрестность I_a, лежащую в A как подмножество (такая есть по определению). Тем самым $A = \bigcup_{a\in A} I_a$, т.е. A есть объединение открытых множеств, следовательно открытое множество.

- ($\subseteq$) Пусть $a \in \mathrm{Int}(A)$. Вспомним, что $\mathrm{Int}(A)$ — открытое подмножество A. Следовательно, a — внутренняя точка A.

  ($\supseteq$) Пусть a — внутренняя точка A. Следовательно есть открытое I, что $a \in I \subseteq A$, следовательно $I \subseteq \mathrm{Int}(A)$, а значит $a \in \mathrm{Int}(A)$.

□

Определение 10. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, а $A \subseteq X$. *Замыканием* множества A называется пересечение всех замкнутых пространств, содержащих A как подмножество:

$$\mathrm{Cl}(A) := \bigcap_{\substack{X\setminus V\in\Omega \\ V\supseteq A}} V$$

Теорема 7.

- $\mathrm{Cl}(A)$ — *замкнутое множество.*
- $\mathrm{Cl}(A) \supseteq A$.
- B — *замкнуто* $\wedge B \supseteq A \Rightarrow B \supseteq \mathrm{Cl}(A)$.

- $A = \mathrm{Cl}(A) \Leftrightarrow A$ — *замкнуто.*

- $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(A)$.

- $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(B)$.

- $\mathrm{Cl}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{Cl}(A_k)$.

- $\mathrm{Cl}(\bigcap_{A\in\Sigma} A) \supseteq \bigcap_{A\in\Sigma} \mathrm{Cl}(A)$.

- $\mathrm{Cl}(A) \sqcup \mathrm{Int}(X \setminus A) = X$.

Определение 11. Пусть X — топологическое пространство, $A \subseteq X$ и $b \in X$. Точка b называется *точкой прикосновения* множества A, если всякая её окрестность пересекается с A.

Теорема 8.

- *Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно является множеством своих точек прикосновения.*

- *Замыкание множества есть множество всех его точек прикосновения.*

Определение 12. Пусть X — топологическое пространство, $A \subseteq X$ и $a \in X$.

Граница множества A — разность замыкания и внутренности A: $\mathrm{Fr}(A) := \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$.

Точка a — *граничная точка* множества A, если всякая её окрестность пересекается с A и с $X \setminus A$.

Теорема 9. *Граница множества совпадает с множеством его граничных точек.*

Теорема 10.

- $\mathrm{Fr}(A)$ *замкнуто.*

- $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$.

- A *замкнуто* $\Leftrightarrow A \supseteq \mathrm{Fr}(A)$.

- A *открыто* $\Leftrightarrow A \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Определение 13. Пусть X — топологическое пространство, $A \subseteq X$ и $a \in X$.

a — *предельная точка* A, если в любой окрестности a есть точка $A \setminus \{a\}$.

a — *изолированная точка* A, если $a \in A$ и есть окрестность a без точка $A \setminus \{a\}$.

Теорема 11.

- b — *предельная* $\Rightarrow b$ — *точка прикосновения.*

- $\mathrm{Cl}(A) = \{$*внутренние точки* $A\} \sqcup \{$*граничные точки* $A\}$.

- $\mathrm{Cl}(A) = \{$*предельные точки* $A\} \sqcup \{$*изолированные точки* $A\}$.

Определение 14. Пусть Ω_1 и Ω_2 — топологии на X. Тогда если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, то говорят, что Ω_1 *слабее (грубее)* Ω_2, а Ω_2 *сильнее (тоньше)* Ω_1.

Пример 4. Из всех топологий на X антидискретная — самая грубая, а дискретная — самая тонкая.

Теорема 12. *Топология метрики d_1 грубее топологии метрики d_2 тогда и только тогда, когда в любом шаре метрики d_1 содержится шар метрики d_2 с тем же центром.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть топология метрики d_1 грубее топологии метрики d_2. Тогда любой шар $B_r^{d_1}(a)$ открыт в d_2, следовательно по определению открытости есть шар $B_q^{d_2}(a) \subseteq B_r^{d_1}(a)$.

($\Leftarrow$) Пусть в любом шаре метрики d_1 содержится шар метрики d_2 с тем же центром. Возьмём любое открытое в d_1 множество U. Тогда для всякой точки $a \in U$ есть шар $B_r^{d_1}(a) \subseteq U$. При этом есть шар $B_q^{d_2}(a) \subseteq B_r^{d_1}(a)$, таким образом a — внутренняя точка U в d_2. Следовательно U открыто в d_2.

$\square$

Следствие 12.1. *Если d_1 и d_2 — метрики на X и $d_1 \leqslant d_2$, то топология d_1 грубее топологии d_2.*

Определение 15. Две метрики на одном множестве называются *эквивалентными*, если они порождают одну топологию.

Лемма 13. *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Тогда для всякого $C > 0$ функция $C \cdot d$ — метрика на X, эквивалентная d.*

Следствие 13.1. *Если для метрик d_1 и d_2 на X есть такое $C > 0$, что $d_1 \leqslant Cd_2$, то d_1 грубее d_2.*

Определение 16. Метрики d_1 и d_2 на одном множестве называются *липшицево эквивалентными*, если существуют $c, C > 0$, что $c \cdot d_1 \leqslant d_2 \leqslant C \cdot d_1$.

Теорема 14. *Липшицево эквивалентные метрики просто эквивалентны.*

Определение 17. Топологическое пространство *метризуемо*, если есть метрика, её порождающая.

Определение 18. *База* топологии Ω — такое семейство Σ открытых множеств, что всякое открытое U представимо в виде объединения множеств из Σ.

$$\Sigma \subseteq \Omega \text{ — база} \iff \forall U \in \Omega \ \exists \Lambda \subseteq \Sigma : \quad U = \bigcup_{W \in \Lambda} W$$

Определение 19. Множество Γ подмножеств множества X называются его *покрытием*, если $X := \bigcup_{A \in \Gamma} A$. Часто покрытие записывают в виде $\Gamma = \{A_i\}_{i \in I}$.

Теорема 15 (второе определение базы)**.** *Пусть (X, Ω) — топологическое пространство и $\Sigma \subseteq \Omega$. Тогда Σ — база топологии Ω тогда и только тогда, когда для любой точки a любого открытого множества U есть окрестность из Σ, лежащая в U как подмножество.*

Определение 20. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, $a \in X$ и $\Lambda \subseteq \Omega$. Λ называется *базой топологии (базой окрестности) в точке a*, если:

1. $\forall U \in \Lambda \ a \in U$;
2. $\forall$ окрестности U точки a $\exists V_a \in \Lambda : \ V_a \subseteq U$.

Теорема 16.

- *Если Σ — база топологии, то для всякой точки $a \in X$ множество $\Sigma_a := \{U \in \Sigma \mid a \in U\}$ — база топологии в точке a.*

- *Пусть для каждой точки $a \in X$ определена база топологии Σ_a в ней. Тогда $\bigcup_{a \in X} \Sigma_a$ — база топологии.*

Теорема 17. *Пусть Σ — семейство подмножеств X. Тогда есть не более одной топологии, для которой Σ является базой.*

Доказательство. Предположим противное: пусть Ω_1 и Ω_2 — различные топологии на X, для которых Σ является базой. По определению базы для всякого $U \in \Omega_1$ есть семейство $\Gamma \subseteq \Sigma$, что $U = \bigcup_{A \in \Gamma} A$; но поскольку $\Gamma \subseteq \Sigma \subseteq \Omega_2$, то всякое $A \in \Gamma$ лежит в Ω_2, а значит U тоже лежит в Ω_2. Таким образом $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$; аналогично наоборот, следовательно $\Omega_1 = \Omega_2$ — противоречие.

Таким образом для всякого Σ будет не более одной топологии, где для которой оно будет базой. $\square$

Следствие 17.1. *Пусть Σ_1 и Σ_2 — базы топологий Ω_1 и Ω_2 на одном и том же множестве. Тогда если $\Sigma_1 = \Sigma_2$, то и $\Omega_1 = \Omega_2$.*

Теорема 18 (критерий базы)**.** *Пусть X — произвольное множество, а Σ — его покрытие. Σ — база некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда для всяких $A, B \in \Sigma$ есть семейство $\Lambda \subseteq \Sigma$, что $A \cap B = \bigcup_{S \in \Lambda} S$.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Если Σ — база, то для всяких $A, B \in \Sigma$ множество $A \cap B$ открыто, а поэтому представляется как объединение некоторого подсемейства Σ.

($\Leftarrow$) Рассмотрим топологию Ω, образованную всевозможными объединениями множеств из Σ, т.е.

$$\Omega := \left\{ \bigcup_{S \in \Lambda} S \mid \Lambda \subseteq \Sigma \right\}$$

Проверим, что это действительно топология.

1. Σ — покрытие, поэтому $X = \bigcup_{S \in \Sigma} S \in \Omega$. Также рассматривая $\Lambda = \varnothing$, получаем, что $\bigcup_{S \in \Lambda} S = \varnothing \in \Omega$.
2. Пусть $\Phi \subseteq \Omega$. Тогда для каждого $S \in \Phi$ есть семейство $\Lambda_S \subseteq \Sigma$, его образующее, т.е. $S = \bigcup_{T \in \Lambda_S} T$. В таком случае $\Lambda := \bigcup_{S \in \Phi} \Lambda_S$ является подмножеством Σ, а тогда
$$\bigcup_{S \in \Phi} S = \bigcup_{S \in \Phi} \bigcup_{T \in \Lambda_S} T = \bigcup_{T \in \Lambda} T \in \Omega$$
3. Пусть $U, V \in \Omega$. Тогда существуют $M, N \subseteq \Sigma$, что $U = \bigcup_{S \in M} S$ и $V = \bigcup_{S \in N} S$. Также для каждой $P = (A, B) \in M \times N$ существует $\Lambda_P \subseteq \Sigma$, что $A \cap B = \bigcup_{S \in \Lambda_P}$. Пусть $\Lambda := \bigcup_{P \in M \times N} \Lambda_S$. Понятно, что $\Lambda \subseteq \Sigma$. Следовательно
$$U \cap V = \left(\bigcup_{A \in M} A \right) \cap \left(\bigcup_{B \in N} B \right) = \bigcup_{(A,B) \in M \times N} A \cap B = \bigcup_{P \in M \times N} \bigcup_{S \in \Lambda_P} S = \bigcup_{S \in \Lambda} S \in \Omega$$

$\square$

Определение 21. *Предбаза* — семейство Δ открытых множеств в пространстве (X, Ω), что Ω — наименьшая топология по включению топология, содержащая Δ.

Теорема 19. *Любое семейство Δ подмножеств множества X является предбазой некоторой топологии.*

Доказательство. Определим

$$\Sigma := \{X\} \cup \left\{ \bigcap_{A \in W} A \mid W \subseteq \Delta \wedge |W| \in \mathbb{N} \right\}$$

Заметим, что $\Delta \subseteq \Sigma$. Действительно, для всякого $A \in \Delta$ семейство $W := \{A\}$ является подмножеством Δ, следовательно $A = \bigcap_{T \in W} T \in \Sigma$.

Покажем, что любая топология, которая содержит как подмножество Δ, содержит и Σ как подмножество. Действительно, пусть $A \in \Sigma$ (будем считать, что A — не X и не $\varnothing$; иначе утверждение очевидно). Тогда есть конечное семейство $W \subseteq \Delta$, что $A = \bigcap_{T \in W} T$. Пусть Ω — любая топология, содержащая Δ как подмножество. Тогда $W \subseteq \Omega$, а следовательно $A = \bigcap_{T \in W} T \in \Omega$. Таким образом $\Sigma \subseteq \Omega$. Поэтому для топология, для которой Σ будет предбазой, Δ тоже будет предбазой.

Покажем, что Σ удовлетворяет критерию базы.

- $X \in \Sigma$, значит Σ — покрытие X.
- Пусть $A, B \in \Sigma$. Если $A = X$, то $A \cap B = B = \bigcup_{T \in W} T$, где $W := \{B\} \subseteq \Sigma$. Если $A = \varnothing$, то $A \cap B = \varnothing = \bigcup_{T \in W} T$, где $W := \varnothing \subseteq \Sigma$. Аналогично, если B есть X или $\varnothing$. Иначе есть непустые $V, U \subseteq \Delta$, что $A = \bigcap_{T \in V} T$, а $B = \bigcap_{T \in U} T$. Следовательно $A \cap B = \bigcap_{T \in V \cup U} T$. Но поскольку $V \cup U \subseteq \Delta$, то $A \cap B \in \Sigma$. Таким образом $A \cap B = \bigcup_{T \in W} T$, где $W := \{A \cap B\} \subseteq \Sigma$.

Рассмотрим

$$\Omega := \left\{ \bigcup_{S \in \Lambda} S \mid \Lambda \subseteq \Sigma \right\}$$

По теореме о критерии базы Ω — топология, где Σ — база. С другой стороны Ω — множество, которое содержится как подмножество в любой топологии, которая содержит как подмножество Σ. Следовательно Ω — минимальное топология, содержащая как подмножество Σ, а значит и Δ. Поэтому Δ — предбаза в Ω. $\square$

Теорема 20. *Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, а $A \subseteq X$. Тогда множество*

$$\Omega_A := \{U \cap A \mid U \in \Omega\}$$

есть топология на A.

Определение 22. Пусть (X, Ω) топологическое пространство, а $A \subseteq X$. Тогда

$$\Omega_A := \{U \cap A \mid U \in \Omega\}$$

— топология, *индуцированная* множеством A, а (A, Ω_A) — подпространство (X, Ω).

Теорема 21.

- *Множества, открытые в подпространстве, не обязательно открыты в объемлющем пространстве.*

- *Открытые множества открытого подпространства открыты и во всём пространстве.*
- *Если Σ — база топологии Ω, то*

$$\Sigma_A := \{U \cap A \mid U \in \Sigma\}$$

  — база индуцированной топологии.
- *Пусть (X, Ω) — топологическое пространство и $B \subseteq A \subseteq X$. Тогда $(\Omega_A)_B = \Omega_B$, т.е. топология, которая индуцируется в B топологией, индуцированной в A, совпадает с топологией,индуцированной непосредственно из X.*

Определение 23. Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если прообраз всякого открытого множества из Y открыт в X.

Теорема 22.

- *Отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз замкнутого замкнут.*
- *Композиция непрерывных отображений непрерывно.*
- *Пусть Z — подпространство X, а $f : X \to Y$ непрерывно. Тогда $f|_Z : Z \to Y$ непрерывно.*
- *Пусть Z — подпространство Y, $f : X \to Y$ и $f(X) \subseteq Z$. Пусть $\widetilde{f} : X \to Z, x \mapsto f(x)$. Тогда f непрерывна тогда и только тогда, когда $\widetilde{f}$ непрерывна.*

Определение 24. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $a \in X$, если для любой окрестности U точки $f(a)$ существует такая окрестность V точки a, что $f(V) \subseteq U$.

Теорема 23. *Отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке пространства X.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Очевидно, $V = f^{-1}(U)$.

($\Leftarrow$) Пусть $U \in \Omega_Y$. Тогда для всякого $a \in f^{-1}(U)$ есть окрестность V_a точки a, что $V_a \subseteq f^{-1}(U)$. Следовательно любая точка $f^{-1}(U)$ внутренняя, а значит $f^{-1}(U)$ открыто.

□

Теорема 24. *Пусть X и Y — топологические пространства, $a \in X$, $f : X \to Y$, Σ_a — база окрестностей в точке a и $\Lambda_{f(a)}$ — база окрестностей в точке $f(a)$. Тогда f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда для всякого $U \in \Lambda_{f(a)}$ есть $V \in \Sigma_a$, что $f(V) \subseteq U$.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть f непрерывна в a. Рассмотрим любое $U \in \Lambda_{f(a)}$. U — окрестность $f(a)$, соответственно есть W — окрестность a, что $f(W) \subseteq U$. Но тогда есть $V \in \Sigma_a$, что $V \subseteq W$. Тогда $V \in \Sigma_a$ и $f(V) \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Пусть для всякого $U \in \Lambda_{f(a)}$ найдётся $V \in \Sigma_a$, что $f(V) \subseteq U$. Рассмотрим любую окрестность U точки $f(a)$. Тогда есть семейство $W \in \Lambda_{f(a)}$, что $W \subseteq U$. Следовательно найдётся $V \in \Sigma_a$, что $f(V) \subseteq W$, а следовательно V — окрестность a, и $f(V) \subseteq U$.

□

Следствие 24.1. *Пусть X, Y — метрические пространства, $a \in X$, $f : X \to Y$. Тогда*

1. *f непрерывно в точке a тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$$

2. *f непрерывно в точке a тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad d_X(x, a) < \delta \to d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Определение 25. Пусть X, Y — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *липшицевым*, если:

$$\exists C > 0 : \, \forall a, b \in X \quad d_Y(f(a), f(b)) \leqslant C \cdot d_X(a, b)$$

Значение C называют *константой Липшица* отображения f.

Теорема 25. *Всякое липшицево отображение непрерывно.*

Доказательство. Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \delta := \frac{\varepsilon}{C} \quad \Longrightarrow \quad \Big(d_X(x, a) < \delta \quad \longrightarrow \quad d_Y(f(x), f(a)) \leqslant C \cdot d_X(x, a) < C \cdot \delta = \varepsilon \Big)$$

□

Пример 5.

- Пусть фиксирована точка x_0 в метрическом пространстве (X, d). Тогда отображение

  $$f : X \to \mathbb{R}, \; a \mapsto d(a, x0),$$

  непрерывно.

- Пусть A — непустое подмножество метрического пространства (X, d). *Расстоянием от точки $x \in X$ до множества A* называется число

  $$d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

  Отображение

  $$f : X \to \mathbb{R}, \; x \mapsto d(x, A),$$

  непрерывно.

- Метрика d на множестве X является непрерывным отображением $X \times X \to \mathbb{R}$.

Определение 26. Покрытие Γ топологического пространства X называется *фундаментальным*, если

$$\forall U \subseteq X : \quad \Big(\forall A \in \Gamma \quad U \cap A \text{ открыто в } A \Big) \quad \longrightarrow \quad \Big(U \text{ открыто в } X \Big)$$

Лемма 26. *Покрытие Γ топологического пространства X фундаментально тогда и только тогда, когда*

$$\forall V \subseteq X \quad \Big(\forall A \in \Gamma \quad V \cap A \textit{ замкнуто в } A \Big) \quad \longrightarrow \quad \Big(U \textit{ замкнуто в } X \Big)$$

Доказательство.

(⇒) Пусть Γ фундаментально. Рассмотрим $V \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $V \cap A$ замкнуто в A. Следовательно $(X \setminus V) \cap A$ открыто в A, а тогда по фундаментальности Γ множество $X \setminus V$ открыто, а значит всё V замкнуто.

(⇐) Аналогично, поменяв местами слова "открыто"и "замкнуто".

□

Теорема 27. *Пусть X, Y — топологические пространства, Γ — фундаментальное покрытие X и $f : X \to Y$. Если сужение f на всякое $A \in \Gamma$ непрерывно, то и само f непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим любое открытое в Y множество U. Если $A \in \Gamma$, то $f^{-1}(U) \cap A = (f|_A)^{-1}(U)$ открыто. А в таком случае из фундаментальности Γ следует, что $f^{-1}(U)$ открыто. Таким образом f непрерывно. □

Определение 27. Покрытие топологического пространства называется

- *открытым*, если оно состоит из открытых множеств;
- *замкнутым* — если из замкнутых;
- *локально конечным* — если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия.

Теорема 28.

1. *Всякое открытое покрытие фундаментально.*
2. *Всякое конечное замкнутое покрытие фундаментально.*
3. *Всякое локально конечное замкнутое покрытие фундаментально.*

Доказательство. Пусть Γ — данное покрытие.

1. Пусть дано $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ открыто в A, а значит открыто в X. Тогда
$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$
есть объединение открытых множеств, а значит само открыто. Таким образом Γ фундаментально.

2. Пусть дано $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ замкнуто в A, а значит замкнуто в X. Тогда
$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$
есть конечное объединение замкнутых множеств, а значит само замкнуто. Таким образом Γ фундаментально.

3. Пусть дано $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ открыто в A. Рассмотрим некоторую точку $u \in U$ и её окрестность V_u, которая пересекается с конечным набором Γ_u элементов из Γ. Тогда для всякого $A \in \Gamma_u$ множество
$$U \cap A \cap V = (U \cap A) \cap (A \cap V)$$

открыто в $V \cap A$. При этом
$$\{V \cap A \mid A \in \Gamma_u\}$$
— конечное замкнутое покрытие, а значит $U \cap V$ открыто в V, а значит и в X. Таким образом $U \cap V$ — окрестность u, а значит u — внутренняя точка U. Значит U открыто.

□

Теорема 29. *Пусть (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) — топологические пространства. Тогда*
$$\Sigma := \{U \times V \mid U \in \Omega_X \wedge V \in \Omega_Y\}$$
является базой топологии на $X \times Y$.

Доказательство. Проверим критерий базы:

1. $X \in \Omega_X$, $Y \in \Omega_Y$, следовательно $X \times Y \in \Sigma$. Таким образом Σ — покрытие $X \times Y$.

2. Пусть $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \Sigma$. Тогда $U_1 \cap U_2 \in X$, $V_1 \cap V_2 \in Y$, а значит $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \Sigma$.

Таким образом Σ — база. □

Определение 28. Пусть (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) — топологические пространства, а $\Omega_{X \times Y}$ — топология, порождённая базой Σ из предыдущей теоремы. Тогда $(X \times Y, \Omega_{X \times Y})$ называется *произведением* топологических пространств, а сама $\Omega_{X \times Y}$ называется *стандартной* топологией.

Замечание 3. По аналогии если Σ_X и Σ_Y — базы топологий Ω_X и Ω_Y соответственно, то
$$\Lambda := \{U \times V \mid U \in \Sigma_X \wedge V \in \Sigma_Y\}$$
также являются базой стандартной топологии на $X \times Y$.

Определение 29. Обозначения:

- $X = \prod_{i \in I} X_i$– произведение топологических пространств.
- Элементами X являются такие функции $x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$, что $x(i) \in X_i$.
- $p_i : X \to X_i$ — координатная проекция, где $p_i(x) := x(i)$.

Определение 30. Пусть $\{(X_i, \Omega_i)\}_{i \in I}$ — семейство топологических пространств. *Тихоновская топология* на $X = \prod_{i \in I} X_i$ задаётся предбазой, состоящей из всевозможных множеств вида $p_i^{-1}(U)$, где $i \in I$, а $U \subseteq \Omega_i$.

Замечание 4. В случае конечного произведения тихоновская топология совпадает со стандартной.

Теорема 30. *Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства, Ω_X и Ω_Y — топологии в данных метрических пространствах. Рассмотрим две топологии:*

- *$\Omega_{X \times Y}$ — топология-произведение топологий Ω_X и Ω_Y;*
- *$\Omega_{\max}$ — топология, порождённая произведением метрик по функции $g := \max$ (см. теорему 1).*

Тогда эти топологии совпадают.

Доказательство. Определим

$$d_{\max} : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

Таким образом $d_{\max}$ — метрика, порождающая $\Omega_{\max}$.

Лемма 30.1.

$$B_r^{d_{\max}}((x, y)) = B_r^{d_X}(x) \times B_r^{d_Y}(y)$$

Доказательство. Очевидно. □

Вспомним, что

$$\Sigma_X := \{B_r^{d_X}(x) \mid r > 0 \land x \in X\} \qquad \text{и} \qquad \Sigma_Y := \{B_r^{d_Y}(y) \mid r > 0 \land y \in Y\}$$

являются базами Ω_X и Ω_Y. Следовательно

$$\Sigma_{X \times Y} := \{U_X \times U_Y \mid U_X \in \Sigma_X \land U_Y \in \Sigma_Y\}$$

является базой $\Omega_{X \times Y}$. Также заметим, что

$$\Sigma_{\max} := \{B_r^{d_{\max}}((x, y)) \mid r > 0 \land x \in X \land y \in Y\} = \{B_r^{d_X}(x) \times B_r^{d_Y}(y) \mid r > 0 \land x \in X \land y \in Y\}$$

является базой $\Omega_{\max}$. При этом несложно видеть, что $\Sigma_{\max} \subseteq \Sigma_{X \times Y}$, следовательно $\Omega_{\max}$ грубее $\Omega_{X \times Y}$. Осталось показать, что $\Sigma_{\max}$ порождает $\Sigma_{X \times Y}$, т.е. всякое $U \in \Sigma_{X \times Y}$ представимо в виде объединения некоторых множеств из $\Sigma_{\max}$.

Пусть U — некоторый элемент $\Sigma_{X \times Y}$. Тогда есть некоторые $r_X, r_Y > 0$ и $(x, y) \in X \times Y$, что $U = B_{r_X}^{d_X}(x) \times B_{r_Y}^{d_Y}(y)$. Пусть $(x', y') \in U$, тогда $x' \in B_{r_X}^{d_X}(x)$. Следовательно $q_X := r_X - d_X(x, x') > 0$, а $B_{q_X}^{d_X}(x') \subseteq B_{r_X}^{d_X}(x)$; аналогично для Y. Пусть $q := \min(q_X, q_Y) > 0$. Тогда

$$V := B_q^{d_X}(x') \times B_q^{d_Y}(y')$$

— окрестность (x', y'). При этом $V \subseteq U$. Значит U представляется в виде объединения всех таких окрестностей для каждой точки (x', y') из него. Но $V \in \Sigma_{\max}$, поэтому $\Sigma_{\max}$ порождает $\Sigma_{X \times Y}$. Значит топология, которая порождает $\Sigma_{\max}$, — $\Omega_{\max}$ — содержит как подмножество топологию, которую порождает $\Sigma_{X \times Y}$, — $\Omega_{X \times Y}$.

Таким образом $\Omega_{\max} = \Omega_{X \times Y}$. □

Теорема 31. *Пусть дана $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, что*

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad g(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y = 0;$
- $\forall x, y, d \in \mathbb{R}_+ \quad g(x + d, y) \geqslant g(x, y) \land g(x, y + d) \geqslant g(x, y);$
- $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+ \quad g(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leqslant g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2);$
- $\forall \alpha > 0 \, \exists x, y > 0 : \quad 0 < g(x, 0) < \alpha \land 0 < g(0, y) < \alpha.$

Тогда для любых метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) функция

$$d_g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

является метрикой, эквивалентной метрике

$$d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

Доказательство. Заметим, что по теореме 1 функция $d_{\max}$ является метрикой. С помощью теоремы 12 имеем, что нужно показать, что в каждом шаре по одной метрик $d_{\max}$ и d_g есть шар с тем же центром по другой метрики.

Рассмотрим шар $B_r^{d_g}((x,y))$. Тогда по свойству g есть $q_X > 0$, что $0 < g(q_X, 0) < r/2$; аналогично для Y. Следовательно для всех точек $x' \in B_{q_X}^{d_X}(x)$ и $y' \in B_{q_Y}^{d_Y}(y)$ верно, что

$$\begin{aligned} d_g((x',y'),(x,y)) \\ &= g(d_X(x',x), d_Y(y',y)) \\ &\leqslant g(d_X(x',x),0) + g(0, d_Y(y',y)) \\ &\leqslant g(q_X,0) + g(0,q_Y) \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \end{aligned}$$

Пусть $q := \min(q_X, q_Y)$. Тогда

$$B_q^{d_{\max}}((x,y)) = B_q^{d_X}(x) \times B_q^{d_Y}(y) \subseteq B_{q_X}^{d_X}(x) \times B_{q_Y}^{d_Y}(y) \subseteq B_r^{d_g}((x,y))$$

Т.е. для каждого шара по d_g нашёлся подшар по $d_{\max}$.

Лемма 31.1. *Для всякого $r > 0$ есть такое $q_X > 0$, что*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad g(x,0) < q_X \longrightarrow x < r$$

Аналогично для Y.

Доказательство. Рассмотрим $q_X := g(r,0) > 0$. Тогда если $x \geqslant r$, то $g(x,0) \geqslant g(r,0) = q_X$. Следовательно

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad g(x,0) < q_X \longrightarrow x < r$$

Аналогично для Y. $\square$

Рассмотрим шар $B_r^{d_{\max}}((x,y))$. Тогда определим q_X и q_Y по прошлой лемме для r и координат X и Y соответственно. Пусть также $q := \min(q_X, q_Y)$ Тогда

$$\begin{aligned} \forall (x',y') \in B_q^{d_g}((x,y)) \\ &\begin{cases} g(d_X(x',x),0) \leqslant g(d_X(x',x), d_Y(y',y)) = d_g((x',y'),(x,y)) < q \leqslant q_X \\ g(0, d_Y(y',y)) \leqslant g(d_X(x',x), d_Y(y',y)) = d_g((x',y'),(x,y)) < q \leqslant q_Y \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} d_X(x',x) < r \\ d_Y(y',y) < r \end{cases} \\ &\Longrightarrow d_{\max}((x',y'),(x,y)) = \max(d_X(x',x), d_Y(y',y)) < r \\ &\Longrightarrow (x',y') \in B_r^{d_{\max}}((x,y)) \end{aligned}$$

$\square$

Следствие 31.1. *Произведения метрических пространств по функции $g(x,y) := (x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}$ для всякого $\alpha \geqslant 1$ даёт такую же топологию, что и произведение стандартных топологий на метрических пространствах. В случае $\alpha = 2$ мы имеем стандартное произведение пространств.*

Теорема 32. *Пусть $X = \prod_{i \in I} X_i$ — произведение топологических пространств. Тогда координатные проекции $p_i : X \to X_i$ непрерывны.*

Доказательство. Для всякого открытого в X_i множества U множество $p_i^{-1}(U)$ — элемент предбазы тихоновской топологии (по определению), поэтому $p_i^{-1}(U)$ открыто, а значит p_i непрерывно. □

Определение 31 (отображение в $X \times Y$)**.** Пусть X, Y, Z– топологические пространства. Любое отображение $f : Z \to X \times Y$ имеет вид

$$f(z) = (f_1(z), f_1(z)), \qquad \text{для всех } z \in Z,$$

где $f_1 : Z \to X$, $f_2 : Z \to Y$ — некоторые отображения, называемые *компонентами* отображениями f.

Определение 32 (отображение в $\prod_{i \in I} X_i$)**.** Пусть Z и $\{X_i\}_{i \in I}$ — топологические пространства. *Компонентами* отображения $f : Z \to \prod_{i \in I} X_i$ называются отображения $f_i : Z \to X_i$, задаваемые формулами

$$f_i := p_i \circ f_i$$

Теорема 33 (о покоординатной непрерывности)**.** *Пусть Z и $\{X_i\}_{i \in I}$ — топологические пространства, $X = \prod_{i \in I} X_i$ — тихоновское произведение.Тогда отображение $f : Z \to \prod_{i \in I} X_i$ непрерывно тогда и только тогда, когда каждая его компонента f_i непрерывна.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) $f_i = p_i \circ f$, при этом p_i и f непрерывны, следовательно и f_i непрерывно.

($\Leftarrow$) Пусть U — элемент предбазы тихоновской топологии. Тогда существуют $i \in I$ и $V \in \Omega_i$, что $U = p_i^{-1}(V)$, следовательно

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(V)) = (p_i \circ f)^{-1}(V) = f_i^{-1}(V)$$

— открытое множество.

Теперь заметим, что для всякого открытого в X множества W существует семейство Σ конечных наборов открытых множеств предбазы, что

$$W = \bigcup_{\Lambda \in \Sigma} \bigcap_{T \in \Lambda} T$$

Следовательно

$$f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\bigcup_{\Lambda \in \Sigma} \bigcap_{T \in \Lambda} T\right) = \bigcup_{\Lambda \in \Sigma} f^{-1}\left(\bigcap_{T \in \Lambda} T\right) = \bigcup_{\Lambda \in \Sigma} \bigcap_{T \in \Lambda} f^{-1}(T)$$

является открытым, поскольку каждое $f^{-1}(T)$ открыто (т.к. T — элемент предбазы, для него уже показали), а каждое Λ конечно.

□

Замечание 5. Также для проверки на непрерывность $f : X \to Y$ достаточно проверить открытость $f^{-1}(U)$ для всякого U из какой-либо базы или предбазы Y.

Замечание 6. Развёрнутое утверждение неверно: неверно, что если $f : \prod_{i \in I} X_i \to Y$ непрерывно по каждой координате, от непрерывно и в итоге. Для этого несложно проверить, что подходит

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{если } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{иначе} \end{cases}$$

Определение 33. Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если

1. f — биекция,
2. f — непрерывно,
3. f^{-1} — непрерывно.

Определение 34. Если существует гомеморфизм между X и Y, то X и Y *гомеморфны*. Обозначение: $X \simeq Y$.

Теорема 34. *Гомеоморфность — "отношение эквивалентности" на топологических пространствах.*

Доказательство.

- Тождественное отображение (любого топологического пространства) есть гомеоморфизм. Следовательно $A \simeq A$.
- Отображение, обратное гомеоморфизму, есть гомеоморфизм. Следовательно $A \simeq B \leftrightarrow B \simeq A$.
- Композиция гомеоморфизмов есть гомеоморфизм. Следовательно $A \simeq B \simeq C \to A \simeq C$.

$\square$

Замечание 7.

- Гомеоморфизм задаёт биекцию между открытыми множествами в X и Y.
- Гомеоморфные пространства неотличимы с точки зрения топологии.

Определение 35. *Топологическое свойство* — свойство топологического пространства, которое сохраняется при гомеоморфизмах.

Топологический инвариант — характеристика топологического пространства (например, число, группа и т.д.), сохраняющаяся при гомеоморфизмах.

Замечание. Для доказательства *негомеоморфности* двух топологических пространств, как правило, находят топологическое свойство или инвариант, который их различает.

Замечание. С этого момента *счётным множеством* называется всякое множество X, что есть инъекция $X \to \mathbb{N}$.

Определение 36. Топологическое пространство удовлетворяет

- *первой аксиоме счётности (1AC или* FAC*, first axiom of countability)*, если оно обладает счётными базами во всех своих точках (такое пространство называется "first-countable space");
- *второй аксиоме счётности (2AC или* SAC*, second axiom of countability)*, если оно имеет счётную базу (такое пространство называется "second-countable space").

Теорема 35. SAC $\Rightarrow$ FAC.

Доказательство. Если Σ — база топологии, то для всякого $a \in X$ множество

$$\Sigma_a := \{U \in \Sigma \mid a \in U\}$$

— база в точке a. При этом $|\Sigma_a| \leqslant |\Sigma|$, следовательно выполнена FAC. □

Теорема 36. *Всякое метрическое пространство удовлетворяет* FAC.

Доказательство. Множество

$$\{B_{\frac{1}{n}}(a)\}_{n=1}^{\infty}$$

является счётной базой топологии в точке a. □

Определение 37. Топологическое свойство называется *наследственным*, если из того, что пространство X обладает этим свойством, следует, что любое подпространство пространства X тоже им обладает.

Топологическое свойство называется *наследственным при произведении*, если из того, что пространства X и Y обладают этим свойством, следует, что пространство $X \times Y$ тоже им обладает.

Теорема 37. SAC *наследственна и наследственна при произведении.*

Доказательство.

- Пусть Y — подпространство пространства X, удовлетворяющего SAC, а Σ — счётная база X (существует по SAC). Тогда

  $$\Sigma_Y := \{U \cap Y \mid U \in \Sigma\}$$

  — база Y. При этом $|\Sigma_Y| \leqslant |\Sigma|$, следовательно Y удовлетворяет SAC.

- Пусть Σ_X и Σ_Y — базы топологических пространств X и Y, удовлетворяющих SAC. Тогда

  $$\Sigma := \{U \times V \mid U \in \Sigma_X \land V \in \Sigma_Y\}$$

  — база $X \times Y$, при этом

  $$|\Sigma| \leqslant |\Sigma_X| \times |\Sigma_Y| \leqslant |\mathbb{N}| \times |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

  т.е. Σ счётно. Следовательно $X \times Y$ удовлетворяет SAC.

□

Теорема 38. *Если пространство удовлетворяет* SAC, *то из всякого его открытого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть Γ — открытое покрытие X. По SAC есть счётная база Σ. Рассмотрим

$$\Lambda := \{V \in \Sigma \mid \exists U \in \Gamma : \ V \subseteq U\}$$

Поскольку всякое U из Γ является открытым, то представляется в виде объединения элементов из Σ, следовательно Λ непусто. По этой же причине Λ является покрытием X, так как всякая точка X покрывается некоторым $U \in \Gamma$, которое является объединением элементов из Σ; но все эти элементы лежат в Γ, значит Γ покрывает U, а значит и выбранную точку.

Теперь для каждого $U \in \Lambda$ рассмотрим $V_U \in \Gamma$, в котором оно содержится. Определим

$$\Gamma' := \{V_U \mid U \in \Lambda\}$$

Тогда Γ' — покрытие, поскольку Γ является покрытием; $\Gamma' \subseteq \Gamma$; $|\Gamma'| = |\Lambda| \leqslant |\Sigma| \leqslant |\mathbb{N}|$. Таким образом Γ' — счётное подпокрытие покрытия Γ. □

Определение 38. $A \subseteq X$ называется *всюду плотным*, если $\mathrm{Cl}(A) = X$.

Лемма 39. *TFAE:*

- *A — всюду плотно.*
- $\mathrm{Int}(X \setminus A) = \varnothing$.
- *Всякое непустое открытое множество в X пересекается с A.*
- *Всякая точка X является точкой прикосновения A.*

Доказательство. A всюду плотно тогда и только тогда, когда $\mathrm{Cl}(A) = X$, т.е. $\mathrm{Int}(X \setminus A) = \varnothing$.

$\mathrm{Int}(X \setminus A) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда нет открытых подмножеств у $X \setminus A$ кроме $\varnothing$, что равносильно тому, что всякое непустое открытое множество содержит точки вне $X \setminus A$, т.е. пересекается с A.

Если всякое непустое открытое множество пересекается с A, то в любой окрестности любой точки будут точки A, поэтому всякая точка X является точкой прикосновения. Если же есть непустое открытое множество, непересекающееся с A, то оно является окрестностью любой своей точки, а значит все его точки не являются точками прикосновения. $\square$

Определение 39. Топологическое пространство *сепарабельно*, если оно содержит счётное всюду плотное множество.

Теорема 40.

1. *Если топологическое пространство удовлетворяет* SAC, *то оно сепарабельно.*
2. *Метрическое сепарабельное пространство удовлетворяет* SAC.

Доказательство.

1. По SAC есть счётная база Σ. Рассмотрим A — множество представителей семейства Σ, т.е. множество выделенных элементов в каждом из множеств в Σ. Тогда A всюду плотно, но $|A| \leqslant |\Sigma| \leqslant |\mathbb{N}|$.

2. Пусть A — счётное, всюду плотное множество. Рассмотрим

$$\Sigma := \{B_{\frac{1}{n}}(a) \mid a \in A \land n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Пусть U — некоторое открытое множество, а x — некоторая его точка. Тогда в U лежит как подмножество некоторый шар $B_\varepsilon(x)$. Рассмотрим некоторое $\delta \in (0; \varepsilon)$, что

$$\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\varepsilon - \delta} \geqslant 1$$

(при $\delta \to 0^+$ левая сторона стремится к $+\infty$, следовательно найдётся достаточно маленькое δ, что неравенство будет выполнено). Заметим, что в $B_\delta(x)$ есть некоторая точка $a \in A$ (по свойству A). При этом есть $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, что

$$\frac{1}{\delta} \geqslant n \geqslant \frac{1}{\varepsilon - \delta}$$

т.е.

$$\delta \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon - \delta$$

Тогда $d(x, a) < \delta \leqslant \frac{1}{n}$, следовательно $x \in B_{\frac{1}{n}}(a)$; но с другой стороны $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon - \delta < \varepsilon - d(a, x)$, поэтому $B_{\frac{1}{n}}(a) \subseteq B_\varepsilon(x)$. Так можно для всякой точки $x \in U$ предоставить шар из Σ, лежащий в U как подмножество и покрывающий x, значит U порождается объединением шаров из Σ. А значит Σ — база.

При этом $|\Sigma| \leqslant |A| \times |\mathbb{N} \setminus \{0\}| \leqslant |\mathbb{N}| \times |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

□

Определение 40. Топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме отделимости* T_1, если каждая из любых двух различных точек пространства обладает окрестностью, не содержащей другую из этих точек.

Теорема 41. *X удовлетворяет T_1 тогда и только тогда, когда все одноточечные множества замкнуты.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть x — случайная точка X. По T_1 для всякой точки $a \in X \setminus \{x\}$ есть окрестность U_a точки a, не содержащая x. Следовательно

$$U := \bigcup_{a \in X \setminus \{x\}} U_a$$

— открытое множество, содержащее каждую точку $X \setminus \{x\}$ и не содержащее x. Следовательно $X \setminus \{x\} = U$ — открыто, значит $\{x\}$ замкнуто.

($\Leftarrow$) Если $\{x\}$ замкнуто, то $X \setminus \{x\}$ открыто. Значит для всяких x и y множество $X \setminus \{x\}$ будет окрестностью y, не содержащей x. Таким образом выполнена T_1.

□

Определение 41. Топологическое пространство удовлетворяет *второй аксиоме отделимости* T_2, если любые две различные точки пространства обладают непересекающимися окрестностями.

Пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2, называются *хаусдорфовыми*.

Замечание. Всякое метрическое пространство хаусдорфово.

Теорема 42. *X хаусдорфово тогда и только тогда, когда множество $\{(a, a) \mid a \in X\}$ замкнуто в $X \times X$.*

Доказательство. Обозначим

$$\Delta := \{(a, a) \mid a \in X\}$$

($\Rightarrow$) Покажем, что $(X \times X) \setminus \Delta$ открыто. Пусть $(b, c) \notin \Delta$. Тогда по T_2 есть окрестности U_b и U_c точек b и c в X, что $U_b \cap U_c = \varnothing$. Следовательно $(U_b \times U_c) \cap \Delta = \varnothing$, тогда $U_b \times U_c$ — окрестность (b, c), лежащая в $(X \times X) \setminus \Delta$ как подмножество.

($\Leftarrow$) Пусть b и c — различные точки X. Тогда $(b, c) \notin \Delta$. Поскольку Δ замкнуто, то $(X \times X) \setminus \Delta$ открыто. Поскольку $\{U \times V \mid U, V \in \Omega_X\}$ — база $X \times X$, то есть некоторые открытые в X множества U и V, что

$$(b, c) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta.$$

Следовательно $(U \times V) \cap \Delta = \varnothing$, а значит $U \cap V = \varnothing$. При этом $b \in U$, а $c \in V$. Значит U и V — непересекающиеся окрестности b и c. Поскольку b и c случайны, то выполнена T_2.

□

Определение 42. Топологическое пространство удовлетворяет *третьей аксиоме отделимости* T_3, если в нём любое замкнутое множество и любая не содержащаяся в этом множестве точка обладают непересекающимися окрестностями.

Пространства, одновременно удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3, называются *регулярными*.

Теорема 43. *X удовлетворяет* T_3 *тогда и только тогда, когда для любой окрестности U_a любой точки a есть такая окрестность V_a точки a, что* $\mathrm{Cl}(V_a) \subseteq U_a$.

Доказательство.

(⇒) Пусть U_a — некоторая окрестность некоторой точки a в X. Тогда $X \setminus U_a$ замкнуто. По T_3 у $X \setminus U_a$ и a есть непересекающиеся окрестности W_a и V_a соответственно. Тогда $X \setminus W_a$ замкнуто; при этом $W_a \supseteq X \setminus U_a$, следовательно $X \setminus W_a \subseteq U_a$; аналогично имеем, что $V_a \subseteq X \setminus W_a$. Следовательно
$$\mathrm{Cl}(V_a) \subseteq X \setminus W_a \subseteq U_a.$$
Таким образом мы нашли искомую окрестность V_a.

(⇐) Пусть даны замкнутое F и точка a вне него. Тогда $U_a := X \setminus F$ — окрестность a. Тогда есть окрестность V_a точки a, что $\mathrm{Cl}(V_a) \subseteq U_a$. Следовательно $\mathrm{Int}(X \setminus V_a) \supseteq X \setminus U_a = F$. Значит $\mathrm{Int}(X \setminus V_a)$ и V_a — непересекающиеся окрестности F и a.

□

Определение 43. Топологическое пространство удовлетворяет *четвёртой аксиоме отделимости* T_4, если в нём любые два непересекающихся замкнутых множества обладают непересекающимися окрестностями.

Пространства, одновременно удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_4, называются *нормальными.*

Теорема 44. *X удовлетворяет* T_4 *тогда и только тогда, когда для любой окрестности U_A любого замкнутого множества A есть такая окрестность V_A множества A, что* $\mathrm{Cl}(V_A) \subseteq U_A$.

Доказательство.

(⇒) Пусть U_A — некоторая окрестность некоторого замкнутого множества A. Тогда $X \setminus U_a$ замкнуто. По T_4 у $X \setminus U_A$ и A есть непересекающиеся окрестности W_A и V_A соответственно. Тогда $X \setminus W_A$ замкнуто; при этом $W_A \supseteq X \setminus U_a$, следовательно $X \setminus W_A \subseteq U_A$; аналогично имеем, что $V_A \subseteq X \setminus W_A$. Следовательно
$$\mathrm{Cl}(V_A) \subseteq X \setminus W_A \subseteq U_A.$$
Таким образом мы нашли искомую окрестность V_A.

(⇐) Пусть даны замкнутые непересекающиеся F и G вне него. Тогда $U_G := X \setminus F$ — окрестность G. Тогда есть окрестность V_G множества G, что $\mathrm{Cl}(V_G) \subseteq U_G$. Следовательно $\mathrm{Int}(X \setminus V_G) \supseteq X \setminus U_G = F$. Значит $\mathrm{Int}(X \setminus V_G)$ и V_G — непересекающиеся окрестности F и G.

□

Теорема 45. *"X нормально" ⇒ "X регулярно" ⇒ "X хаусдорфово" ⇒ "X удовлетворяет* T_1*".*

Доказательство. По T_1 любое одноточечное множество замкнуто. Следовательно рассматривая как замкнутое множество конкретную точку можно получить следствия $\mathrm{T}_4 \Rightarrow \mathrm{T}_3 \Rightarrow \mathrm{T}_2$. Последнее же следствие теоремы очевидно: нужно всего лишь выкинуть аксиому T_2. □

Теорема 46. *Всякое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Очевидно, что всякое метрическое пространство удовлетворяет T_1. Значит осталось проверить T_4.

Пусть даны замкнутые непересекающиеся множества A и B. Тогда $X \setminus B$ — окрестность A. Значит для сякого $x \in A$ есть $r_x > 0$, что $B_{r_x}(x) \subseteq X \setminus B$, т.е. $B_{r_x}(x) \cap B = \varnothing$. Рассмотрим

$$U_A := \bigcup_{x \in A} B_{r_x/2}(x);$$

аналогично определим U_B. Очевидно, что U_A и U_B — окрестности A и B. Покажем, что $U_A \cap U_B = \varnothing$.

Предположим противное, т.е. есть $a \in A$ и $b \in B$, что $B_{r_a/2}(a) \cap B_{r_b/2}(b)$ содержит некоторую точку x. Тогда

$$d(a, b) \leqslant d(a, x) + d(x, b) < \frac{r_a}{2} + \frac{r_b}{2}$$

WLOG $r_a \geqslant r_b$. Тогда

$$d(a, b) < \frac{r_a}{2} + \frac{r_b}{2} \leqslant r_a,$$

т.е. $b \in B_{r_a}(a)$. Но мы знаем, что $B_{r_a}(a) \cap B = \varnothing$ — противоречие. Значит $U \cap V = \varnothing$.

Таким образом для случайных непересекающихся замкнутых A и B мы построили их непересекающиеся окрестности. Значит выполнена T_4. □

Лемма 47.

1. *Аксиома T_1, хаусдорфовость и регулярность наследуются подпространствами и произведениями.*

2. *Существует нормальное пространство X и подпространство Y в нём, не являющееся нормальным.*

3. *Существуют нормальные пространства X и Y такие, что $X \times Y$ не является нормальным.*

Доказательство.

Доказать. Пока лень...

□

Определение 44. Топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества.

Теорема 48. *TFAE*

- *X связно.*

- *X нельзя разбить на два непустых замкнутых множества.*

- *Любое подмножество X, открытое и замкнутое одновременно, либо пусто, либо совпадает со всем пространством X.*

- *Не существует сюръективного непрерывного отображения из X в $\{0; 1\}$ с дискретной топологией.*

Доказательство.

- X связно тогда и только тогда, когда его нельзя разбить на два непустых открытых множества. Заменяя множества разбиения на их дополнения, получаем, что X нельзя разбить на два непустых открытых множества тогда и только тогда, когда X нельзя разбить на два несовпадающих с X замкнутых множества, что равносильно разбиению на два непустых замкнутых множества.

- X нельзя разбить на два непустых открытых множества тогда и только тогда, когда всякое непустое открытое множество не имеет непустого открытого дополнения в X. Т.е. всякое открытое множество либо совпадает с $\varnothing$ или X, либо не является замкнутым, что равносильно тому, что всякое открытое замкнутое множество является либо $\varnothing$, либо X.

- Сюръективное непрерывное отображение из X в $\{0; 1\}$ с дискретной топологией равносильно разложению X на два открытых непустых множества. Так как прообразы 0 и 1 являются множествами, дополняющими друг друга до X; при этом сюръективность равносильна непустоте обоих, а непрерывность — открытости обоих.

$\square$

Замечание. Когда говорят, что какое-то множество связно, всегда имеют в виду, что множество лежит в некотором топологическом пространстве (в каком именно — должно быть ясно из контекста) и что с индуцированной этим включением топологией оно является связным пространством.

Теорема 49. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$. TFAE*

- *X связно.*
- *X выпукло, т.е. для всяких $a, b \in X$, что $a < b$ отрезок $[a; b] \subseteq X$.*
- *X есть интервал (в широком смысле), точка или $\varnothing$.*

Доказательство.

- Пусть X связно. Пусть есть такие $a, b \in X$, что $[a; b] \nsubseteq X$, значит есть $c \in (a; b)$, что $c \notin X$. Заметим, что $(-\infty; c)$ и $(c; +\infty)$ открыты. При этом

$$X = \big(X \cap (-\infty; c)\big) \sqcup \big(X \cap (c; +\infty)\big)$$

  Заметим, что $X \cap (-\infty; c)$ и $X \cap (c; +\infty)$ открыты в X, значит X несвязно — противоречие.

- Пусть X выпукло. Тогда $X \supseteq (\inf X; \sup X)$, где $\inf$ и $\sup$ могут принимать значения $\pm\infty$. Если $\inf X < \sup X$, то X — интервал с концами $\inf X$ и $\sup X$ (каким интервалом X является — вопрос про то, лежат ли $\inf X$ и $\sup X$ в самом X); иначе X — точка или $\varnothing$.

- Пусть X — интервал (в широком смысле), точка или $\varnothing$. Если X — точка или $\varnothing$, то очевидно, что X — связно. Поэтому покажем, что если X — интервал в широком смысле, то оно связно.

  Пусть X раскладывается в объединение двух непустых открытых A и B. Заметим, что ни одно из A и B не могут состоять только из концов X (так как должны содержать и некоторую окрестность). Значит X' — X без своих концов — раскладывается в объединение двух непустых открытых $A' := A \cap X'$ и $B' := B \cap X'$. Значит A' и B' являются объединением непересекающихся интервалов. Пусть I — некоторый интервал из разложения A', а t — его конец. Понятно, что A' открыто в $\mathbb{R}$, значит $t \notin A'$. Если $t \in X'$, то $t \in B'$, значит некоторая окрестность t лежит в B', а тогда B' и I пересекаются, следовательно A' и B'

тоже — противоречие. Таким образом никакой конец I не лежит в X', значит концы I совпадают с концами X', т.е. $I = X'$; следовательно $A' = X'$, $B' = \varnothing$ — противоречие. Значит X' и X связны.

□

Теорема 50 (Непрерывный образ связного пространства связен)**.** *Если $f : X \to Y$ — непрерывное отображение и пространство X связно, то и множество $f(X)$ связно.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $f(X)$ несвязно. Тогда $f(X) = U \cup V$, $U \cap V = \varnothing$, где U, V непусты и открыты. Следовательно, мы имеем разбиение пространства X на два непустых открытых множества — $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$, что противоречит связности X. □

Следствие 50.1. Связность — *топологическое свойство.*

Теорема 51 (о промежуточном значении)**.** *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, а X связно. Тогда для любых $a, b \in f(X)$ множество $f(X)$ содержит все числа между a и b.*

Доказательство. $f(X)$ связно, значит выпукло, значит содержит $[a; b]$. □

Определение 45. *Компонентой связности* пространства X называется всякое его связное подмножество, не содержащееся ни в каком другом (строго большем) связном подмножестве пространства X. (Компонента связности пространства X — максимальное по включению связное множество в X.)

Лемма 52. *Объединение любого семейства попарно пересекающихся связных множеств связно.*

Доказательство. Пусть Σ — семейство попарно пересекающихся связных множеств в X. Определим

$$Y := \bigcup_{A \in \Sigma} A$$

Предположим противное: Y раскладывается в объединение непересекающихся открытых в Y множеств U и V. Несложно видеть, что для всякого $A \in \Sigma$ множества $U \cap A$ и $V \cap A$ открыты в A, не пересекаются, а в объединении дают A; следовательно одно из них совпадает с A, а другое с $\varnothing$. Т.е. A является подмножеством одного из U и V, а с другим не пересекается.

Пусть $A, B \in \Sigma$. Пусть $A \subseteq U$. Тогда B пересекается с U, так как пересекается с A. Значит $B \subseteq U$, а $B \cap V = \varnothing$. Таким образом если одно из U и V содержит как подмножество какой-то элемент Σ, то содержит как подмножества все элементы Σ, а значит и Y; следовательно другое пусто — противоречие.

Таким образом Y связно. □

Теорема 53.

1. *Каждая точка пространства X содержится в некоторой компоненте связности.*

2. *Различные компоненты связности пространства X не пересекаются.*

Доказательство.

1. Пусть x — некоторая точка X. Пусть A_x — объединение всех связных множеств, содержащих x (при этом A определено корректно, так как $\{x\}$ связно). Таким образом A_x является максимальным по включению связным множеством, так как если есть некоторое связное B, что $B \supsetneq A_x$, то B — связное множество, содержащее x, а тогда $B \subseteq A_x$ — противоречие. Значит A_x — компонента связности, содержащая x.

2. Если U и V — различные компоненты связности X — пересекаются, то $U \subsetneq U \cup V$, а $U \cup V$ — компонента связности по доказанной теореме. Таким образом U не максимальное по включению, но связное множество — противоречие с определением компоненты связности.

$\square$

Следствие 53.1. *Компоненты связности составляют разбиение топологического пространства. (Напомним, что разбиение множества — это его покрытие попарно непересекающимися подмножествами.)*

Следствие 53.2.

1. *Любое связное множество содержится в некоторой связной компоненте пространства как подмножество.*

2. *Две точки содержатся в одной компоненте связности тогда и только тогда, когда они содержатся в одном связном множестве.*

3. *Пространство несвязно тогда и только тогда, когда оно имеет как минимум две компоненты связности.*

Следствие 53.3. *Число компонент связности является топологическим инвариантом.*

Теорема 54. *Замыкание связного множества связно.*

Доказательство. Пусть дано связное множество A в пространстве X. Предположим противное: $\mathrm{Cl}(A)$ разбивается на два замкнутых в $\mathrm{Cl}(A)$ непустых множествах U и V. Поскольку $\mathrm{Cl}(A)$ замкнуто, то U и V замкнуты в X, следовательно $U \cap A$ и $V \cap A$ замкнуты в A. Из связности A следует, что WLOG $U \cap A = A$, $V \cap A = \varnothing$, т.е. $A \subseteq U$, $A \cap V = \varnothing$. Соответственно из замкнутости U следует, что $\mathrm{Cl}(A) \subseteq U$. Следовательно $U = \mathrm{Cl}(A)$, а $V = \varnothing$ — противоречие. $\square$

Следствие 54.1. *Компоненты связности замкнуты.*

Определение 46. *Путём* в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение $\alpha : [0, 1] \to X$. Началом пути α называется точка $\alpha(0)$, концом — точка $\alpha(1)$. При этом говорят, что путь α соединяет точку $\alpha(0)$ сточкой $\alpha(1)$.

Определение 47. Топологическое пространство называется *линейно связным*, если в нём любые две точки можно соединить путём.

Замечание. Линейно связным множеством называют подмножество топологического пространства (какого именно, должно быть ясно из контекста), линейно связное как пространство с топологией, индуцированной из объемлющего пространства.

Теорема 55. *Пусть даны линейно связное пространство X и непрерывное отображение $f : X \to Y$. Тогда и пространство $f(X)$ линейно связно.*

Доказательство. Если α — путь, соединяющий точки a и b из X, то $f \circ \alpha$ — путь, соединяющий точки $f(a)$ и $f(b)$ из $f(X)$. $\square$

Следствие 55.1. *Линейная связность — топологическое свойство.*

Следствие 55.2. *Число компонент линейной связности является топологическим инвариантом.*

Предупреждение: "немного опережая события".

Лемма 56. *Соединимость путём — отношение эквивалентности на множестве точек пространства.*

Доказательство.

- (*Рефлексивность.*) Для всякой точки $a \in X$ путь

$$\alpha : [0;1] \to X, t \mapsto a$$

соединяет a с собой.

- (*Симметричность.*) Для всякого пути α из точки a в точку b отображение

$$\beta : [0;1] \to X, t \mapsto \alpha(1-t)$$

является путём из b в a.

- (*Транзитивность.*) Для всякого пути α из a в b и всякого пути β из b в c отображение

$$\gamma : [0;1] \to X, t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{если } t \in [0; \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{если } t \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

— путь из a в c.

$\square$

Определение 48. *Компонентой линейной связности* пространства X называется класс эквивалентности отношения соединимости путём.

Упражнение 1.

1. Объединение любого семейства попарно пересекающихся линейно связных множеств линейно связно.
2. Приведите пример линейно связного множества, замыкание которого не является линейно связным.
3. Приведите пример незамкнутой компоненты линейной связности.

Теорема 57. *В топологическом пространстве, каждая точка которого имеет линейно связную окрестность,*

1. *компоненты линейной связности открыты;*
2. *компонентны линейной связности совпадают с компонентами связности.*

Доказательство.

1. Пусть W — компонента линейной связности, $a \in W$ и U — линейно связная окрестность точки a.Тогда $U \subseteq W$, что влечёт открытость W.
2. Пусть Σ — компоненты линейной связности пространства. По предыдущему пункту, каждое W из Σ открыто. Пусть A — компонента связности. В силу связности, A не может пересекать несколько разных элементов Σ, так ка иначе будет иметь разбиение на открытые множества. Значит A содержится в некотором W из Σ. Отсюда, $W = A$.

$\square$

Лемма 58. *Пусть X, Y — топологические пространства, а $f : X \to Y$ — гомеоморфизм. Тогда для любой точки $a \in X$ пространства $X \setminus \{a\}$ и $Y \setminus \{f(a)\}$ гомеоморфны.*

Теорема 59. *Следующие пространства попарно негомеоморфны:* $[0;1]$, $[0;1)$, $\mathbb{R}$, S^1.

Доказательство. У $[0;1]$ можно удалить максимум 2 точки, чтобы оно осталось связным, у $[0;1)$ и S^1 — по одной, а у $\mathbb{R}$ — ноль. Следовательно если какие-то из этих пространств гомеоморфны, то только $[0;1)$ и S^1. Но у S^1 какую точку ни удали, оно останется связным, а у $[0;1)$ — только 0; следовательно $[0;1)$ негомеоморфно S^1. $\square$

Теорема 60. $\mathbb{R}^2$ *негомеоморфно никакому интервалу (в широком смысле) и* S^1.

Доказательство. Если из $\mathbb{R}^2$ выколоть любое конечное множество точек, то множество останется связным. С другой стороны этим свойством не обладают ни интервалы в широком смысле, ни S^1. $\square$

Определение 49. Топологическое пространство *компактно*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Замечание. Когда говорят, что какое-то множество *компактно*, всегда имеют в виду, что это множество лежит в топологическом пространстве и что, будучи наделено индуцированной топологией, оно является компактным пространством.

Замечание. При определении компактности множества можно использовать два эквивалентных подхода. Первый подход — рассматривать открытые множества в подпространстве. Второй — рассматривать открытые множества в исходном пространстве.

Теорема 61. *Отрезок* $[0;1]$ *компактен.*

Доказательство. Пусть дано некоторое открытое покрытие Σ отрезка $[0;1]$. Обозначим $I_0 := [0;1]$.

Построим индуктивно последовательность $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ отрезков, которые не покрываются конечным подпокрытием Σ. I_0 уже определён. Если I_n построен, то разделим его пополам; если оба отрезка-половины покрываются конечными подпокрытиями Σ, значит и I_n покрывается. Таким образом одна из “половин” I_n не покрывается: её и обозначим за I_{n+1}.

Так мы получили последовательность вложенных отрезков, значит по аксиоме полноты есть точка c, лежащая во всех них. Заметим, что c покрывается Σ, значит есть некоторый элемент U покрытия Σ, который покрывает c. Но поскольку Σ — открытое покрытие, то U открыто и, следовательно, покрывает некоторую окрестность c, а с ней и все отрезки последовательности $(I_n)_{n=0}^{\infty}$, начиная с некоторого — противоречие с непокрываемостью конечным подпокрытием Σ. $\square$

Теорема 62. *Пусть X — компактное пространство и A — замкнутое подмножество. Тогда A компактно.*

Доказательство. Пусть Σ — открытое в X покрытие A. Поскольку $X \setminus A$ — открытое, то $\Sigma \cup \{X \setminus A\}$ — открытое покрытие X, следовательно из него можно выделить конченое подпокрытие. Удалив из него, если нужно, $X \setminus A$, получим конечное подпокрытие Σ множества A. $\square$

Теорема 63. *Пусть X, Y — компактные пространства. Тогда и пространство $X \times Y$ компактно.*

Доказательство. Пусть Σ — некоторые покрытие $X \times Y$. Заметим, что, заменив всякое открытое в Σ на элементы базы $X \times Y$ в качестве объединения которых оно раскладывается, можно свести задачу поиска конечного подпокрытия к новому покрытию. Восстановление подпокрытия для старого покрытия просто: нужно просто для каждого элемента конечного подпокрытия нового покрытия найти тот элемент старого покрытия, который содержит его как подмножество. Тогда получится конечное подпокрытие старого покрытия.

Для каждой точки x заметим, что Σ является покрытием слоя $\{x\} \times Y$. Несложно понять, что этот слой компактен, и выделить из него конечное подпокрытие Λ_x. Рассмотрим

$$W_x := \bigcap_{\substack{U \times V \in \Lambda_x \\ U \subseteq X \\ V \subseteq Y}} U_x$$

Поскольку W_x открыто, то $\{W_x\}_{x \in X}$ — покрытие. Тогда мы можем из него выделить конечное подпокрытие $\{W_{x_i}\}_{i=1}^n$. Тогда $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_{x_i}$ — конечное подпокрытие Σ пространства $X \times Y$. $\square$

Теорема 64 (Тихонова)**.** *Пусть $\{X_i\}_{i \in i}$ — семейство компактных топологических пространств. Тогда тихоновское произведение $X = \prod_{i \in I} X_i$ компактно.*

Доказательство. Пусть Σ — покрытие X. WLOG можно считать, что Σ — подмножество базы тихоновской топологии, причём в качестве базы мы возьмём всевозможные конечные пересечения стандартной предбазы этой же топологии. Несложно видеть, что данная база выглядит как

$$\bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ |J| < |\mathbb{N}|}} \left\{ \left(\bigtimes_{i \in I \setminus J} X_i \right) \times \left(\bigtimes_{j \in J} U_j \right) \mid \forall j \in J \quad U_j \in \Omega_j \right\},$$

т.е. произведение открытых множеств топологических пространств из конечного подсемейства $\{X_i\}_{i \in I}$ и остальных топологических пространств. (Для конечного множества пространств X_i верно, что в них есть точка x_i, не имеющая соответствующего координатного прообраза $(p_i^{-1}(x_i) \cap U = \varnothing)$ в данном открытом множестве U.)

Заметим, что ...

Просто попытка. Не получилось. Нужна трансфинитная индукция или рекурсия... Сама теорема — анонс.

$\square$

Теорема 65. *Пусть X — хаусдорфово пространство, а $A \subseteq X$ — компакт. Тогда A замкнуто в X.*

Доказательство. Пусть b — некоторая точка $X \setminus A$. Покажем, что b является внутренней для $X \setminus A$.

Для всякой точки $a \in A$ найдутся непересекающиеся окрестности U_a и V_a точек a и b. Тогда $\{U_a\}_{a \in A}$ — открытое покрытие A, значит найдётся конченое подпокрытие $\{U_{a_1}; \ldots; U_{a_n}\}$. Получим, что

$$V := \bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$$

— окрестность b, непересекающаяся с $\bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$ — окрестностью A. Таким образом $V \subseteq X \setminus A$. Следовательно b внутренняя точка $X \setminus A$. Значит A замкнуто в X. $\square$

Теорема 66. *Если пространство X хаусдорфово и компактно, то оно нормально.*

Доказательство. Покажем, что X удовлетворяет T_3; T_1 следует из T_2.

Пусть A замкнуто в X и b — некоторая точка $X \setminus A$. Поскольку A — замкнутое подмножество компакта, то само является компактом.

Для каждой точки a множества A выделим непересекающиеся окрестности U_a и V_a точек a и b (они существуют по хаусдорфовости). Тогда $\{U_a\}_{a\in A}$ — покрытие A, значит по компактности из него можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{a_i}\}_{i=1}^n$. Таким образом

$$U := \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} \qquad \text{и} \qquad V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$$

являются непересекающимися окрестностями A и b. Поскольку A и b случайны, то T_3 выполнена.

Теперь так же покажем выполняемость T_4. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества и, как следствие, компактны. Для каждой точки a множества A рассмотрим непересекающиеся окрестности U_a и V_a точки a и множества B (они существуют по T_3). Тогда $\{U_a\}_{a\in A}$ — покрытие A, значит по компактности из него можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{a_i}\}_{i=1}^n$. Таким образом

$$U := \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} \qquad \text{и} \qquad V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$$

являются непересекающимися окрестностями A и B. Поскольку A и B случайны, то T_4 выполнена.

Таким образом выполнены T_3 и T_1, и следовательно X нормально. □

Определение 50. Пусть дано метрическое пространство (X, d). Множество $A \subseteq X$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре пространства X.

Определение 51. Пусть дано метрическое пространство (X, d). *Диаметр* множества $A \subseteq X$ — величина

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Лемма 67. *Пусть дано метрическое пространство (X, d). Тогда для всякого множества $A \subseteq X$ верно, что оно ограничено тогда и только, когда $\operatorname{diam}(A) < +\infty$.*

Теорема 68. *Компактное метрическое пространство ограничено.*

Доказательство. Возьмём любую точку x нашего пространства X и рассмотрим покрытие его всевозможными шарами $B_r(x)$, $r > 0$. По компактности будет конечное подпокрытие $\{B_{r_i}(x)\}_{i=1}^n$. Значит всё пространство покрывается шаром $B_r(x)$, где $r = max(r_1, \ldots, r_n)$, т.е. X ограничено. □

Следствие 68.1. *Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Метрическое пространство хаусдорфово, а компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. □

Теорема 69. *Множество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Очевидно по предыдущему следствию.

- (⇐) Множество A ограничено в $\mathbb{R}^n$, следовательно содержится в кубе $[-a;a]^n$. Поскольку каждый из отрезков $[-a;a]$ компактен, то их произведение — куб $[-a;a]^n$ — компактно. Следовательно A — замкнутое подмножество компакта, а значит само компактно.

$\square$

Определение 52. Набор подмножеств множества X *центрирован*, если пересечение любого его конечный поднабора множеств непусто.

Теорема 70. *X компактно тогда и только тогда, когда любой центрированный набор замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Заметим, что $\{X \backslash A_i\}_{i \in I}$ — покрытие X тогда и только тогда, когда $\bigcap_{i \in I} A_i = \varnothing$.

- (⇒) Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор замкнутых множеств. Тогда $\{B_i\}_{i \in I} := \{X \setminus A_i\}_{i \in I}$ — набор открытых множеств, что никакое их конечное подмножество не является покрытием X. Следовательно по компактности X и весь набор $\{B_i\}_{i \in I}$ не является покрытием. Значит пересечение A_i, $i \in I$ непусто.
- (⇐) Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — покрытие X. Следовательно $\{B_i\}_{i \in I} := \{X \setminus A_i\}_{i \in I}$ — набор замкнутых множеств с пустым общим пересечением. Значит оно не центрировано, что значит, что есть конечный набор $\{B_{i_k}\}_{k=1}^n$ у которого пустое пересечение. Следовательно $\{A_{i_k}\}_{k=1}^n$ является конечным подпокрытием изначального покрытия.

$\square$

Следствие 70.1. *Пусть X — топологическое пространство, а $\{A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X, хотя бы одно из которых компактно. Тогда $\bigcap_{i \in I} A_i$ непусто.*

Следствие 70.2. *Пусть X — топологическое пространство, $\{A_i\}_{i \in I}$ — линейно упорядоченный по включению набор непустых замкнутых множеств в X, хотя бы одно из которых компактно. Тогда $\bigcap_{i \in I} A_i$ непусто.*

Теорема 71. *Пусть даны непрерывное отображение $f : X \to Y$ и компактное пространство X. Тогда и пространство $f(X)$ компактно.*

Доказательство. Пусть Σ — открытое покрытие $f(X)$. Тогда

$$\Lambda := \{f^{-1}(U) \mid U \in \Sigma\}$$

— покрытие X. По компактности X у него есть конечное подпокрытие Λ'. Значит

$$\Sigma' := \{f(V) \mid V \in \Lambda'\}$$

будет конечным подпокрытием Σ. Следовательно $f(X)$ компактно. $\square$

Следствие 71.1. *Компактность — топологическое свойство.*

Теорема 72 (Вейерштрассса)**.** *Если $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и пространство X компактно, то $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значений.*

Доказательство. $f(X)$ компактно. Следовательно замкнуто и ограничено. Значит содержит свои инфимум и супремум. $\square$

Теорема 73. *Если $f : X \to Y$ — непрерывная биекция компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y, то f — гомеоморфизм.*

Доказательство. Для гомеоморфизма f не хватает только обратной непрерывности. Покажем, что образ всякого замкнутого замкнут, и тогда обратная непрерывность будет обеспечена.

Пусть V — замкнутое подмножество компакта X. Значит V — компакт. Следовательно $f(V)$ — компакт как непрерывный образ компакта. И тогда $f(V)$ замкнуто, так как является компактом в хаусдорфовом пространстве. □

Определение 53. Отображение $f : XtoY$ называется *вложением*, если f — гомеоморфизм между X и $f(X)$. Иначе говоря, f — вложение, если

- f непрерывно;
- f — инъекция;
- f^{-1} непрерывно на области определения.

Следствие 73.1. *Если $f : X \to Y$ — непрерывная инъекция компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y, то f — вложение.*

Лемма 74 (Лебега)**.** *Пусть даны компактное метрическое пространство X и его открытое покрытие Σ. Тогда существует такое $r > 0$, что любой шар радиуса r содержится в одном элементе покрытия.*

Определение 54. Число r называется *числом Лебега* покрытия Σ.

Доказательство. Для всякого $x \in X$ есть некоторое $r_x > 0$, что шар $B_{r_x}(x)$ содержится как подмножество некоторого элемента Σ.

Понятно, что $\{B_{r_x/2}(x)\}_{x\in X}$ — открытое покрытие X. Следовательно у него есть конечное подпокрытие $\{B_{r_{x_i}/2}(x_i)\}_{i=1}^n$. Тогда определим $r := \min\{r_{x_i}/2\}_{i=1}^n$.

Если y — некоторая точка X, то y лежит в некотором шаре $B_{r_{x_k}/2}(x_k)$. Следовательно

$$B_r(y) \subseteq B_{r_{x_k}}(x_k),$$

т.е. шар $B_r(y)$ является подмножеством некоторого элемента Σ. Поскольку утверждение не зависит от y, то r является числом Лебега покрытия Σ. □

Следствие 74.1. *Пусть даны компактное метрическое пространство X, топологическое пространство Y, непрерывное $f : X \to Y$ и открытое покрытие Σ множества Y. Тогда существует $r > 0$, что для всякой точки a из X множество $f(B_r(a))$ содержится как подмножество в одном из элементов Σ.*

Доказательство. Применим лемму Лебега к покрытию $\{f^{-1}(U) \mid U \in \Sigma\}$. □

Определение 55. Пусть даны метрические пространства (X, d_X) и (Y, d_Y). Отображение $f : X \to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall a, b \in X \qquad d_X(a, b) < \delta \longrightarrow d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$$

Теорема 75. *Пусть даны метрические пространства X и Y. Тогда если X компактно, то любое непрерывное $f : X \to Y$ будет равномерно непрерывным.*

Доказательство. Применим лемму Лебега для отображения f и покрытия пространства Y шарами радиуса $\varepsilon/2$. □

Определение 56. Пусть $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ — последовательность точек топологического пространства X. Точка $b \in X$ называется её *пределом*, если для всякой окрестности U точки b есть $N \in \mathbb{N}$ такое, что $a_n \in U$ для всех $n > N$.

Если b — предел последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, то говорят, что $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *сходится* к b ($(a_n)_{n=0}^{\infty} \to b$, $b = \lim{(a_n)_{n=0}^{\infty}}$).

Теорема 76. *В хаусдорфовом пространстве ни одна последовательность не может иметь более одного предела.*

Определение 57. Пусть A — подмножество топологического пространства X. Совокупность пределов всевозможных последовательностей точек множества A называются *секвенциальным замыканием* этого множества. Обозначение: $\mathrm{SCl}(A)$.

Теорема 77. $\mathrm{SCl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Доказательство. Предел последовательности точек из A — точка прикосновения множества A. $\square$

Теорема 78. *Если пространство X удовлетворяет первой аксиоме счётности, то для любого $A \subseteq X$ верно* $\mathrm{SCl}(A) = \mathrm{Cl}(A)$.

Доказательство. Пусть $b \in \mathrm{Cl}(A)$. Если $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ — счетная база в точке b, то $U_n = \bigcap_{i=0}^{n} V_i$ — убывающая база в точке b ($U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$). Для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выбираем $a_n \in U_n \cap A$. Тогда $(a_n)_{n=0}^{\infty} \to b$. $\square$