Основы наивной теории множеств.

Станислав Олегович Сперанский

Материалы лекций: ссылка
Литература:

- K. Hrbacek and T. Jech. Introduction to Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Marcel Dekker, Inc., 1999.

- T. Jech. Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.

Будем рассматривать как базовые выражения "x равен (совпадает с) y" ("$x = y$") "x лежит в y" ("$x \in y$").

Определение 1 (Наиваная схема аксиом выделения)**.** Пусть $\Phi(x)$ — произвольное условие на объекты. Тогда существует X, что $\forall u(\Phi(u) \leftrightarrow u \in X)$. В этом случае X обозначается как $\{u \mid \Phi(u)\}$.

Утверждение 1 (парадокс Рассела)**.** *Пусть $R = \{u \mid u \notin u\}$. Тогда R не может лежать в себе и не может не лежать в себе одновременно.*

Из-за данного парадокса будем рассматривать только условия, образованные переменными и $\in, =, \neg, \wedge, \vee, \leftarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

Определение 2 (аксиомы ZFC (= ZF (аксиомы Цермело-Френкеля) + C (аксиома выбора)))**.**

Ext) "Аксиома экстенциональности":

$$\forall X \forall Y (\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y)$$

Empty) "Аксиома пустого множества":

$$\exists \varnothing \, \forall u \, (u \notin \varnothing)$$

Pair) "Аксиома пары":

$$\forall X \, \forall Y \, \exists Z (\forall u \, (u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)))$$

Обозначение: $Z = \{X, Y\}$.

Sep) "Схема аксиом выделения":

$$\forall \Phi(x) \quad \forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u)))$$

Обозначение: $Y = \{u \in X \mid \Phi(u)\}$.

Следствие. *Операторы*

$$X \cap Y := \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\}$$
$$X \setminus Y := \{u \in X \mid u \notin Y\}$$
$$\bigcap X := \{u \mid \forall v \in X \quad u \in v\}$$

определены корректно.

Union) “Аксиома объединения”:

$$\forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow \exists v \, (v \in X \wedge u \in v))$$

Обозначение: $Y = \bigcap X$.

Следствие. *Оператор*

$$X \cup Y := \bigcup \{X, Y\} = \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\}$$

определён корректно.

Power) Пусть $x \subseteq y := \forall v \, \{v \in x \to v \in y\}$. “Аксиома степени”:

$$\forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$$

Обозначение: $Y = \mathcal{P}(X) := \{u \mid u \subseteq X\}$. $\mathcal{P}(X)$ — “множество-степень X” или “булеан X”.

Определение 3. Упорядоченная пара — это объект от некоторых X_1 и Y_1, который равен другому такому объекту от X_2 и Y_2 тогда и только тогда, когда $X_1 = X_2 \wedge Y_1 = Y_2$.

Определение 4. *Декартово произведение* X и Y $(X \times Y)$ — $\{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$.

Замечание 1. Можно нелсожно показать, что декартово произведение определено корректно.

Inf) Пусть $\mathrm{Ind}(X) := \varnothing \in X \wedge \forall u \, (u \in X \wedge u \cup \{u\} \in X)$. Если $\mathrm{Ind}(X)$, то X называется индуктивным. “Аксиома бесконечности”: существует индуктивное множество.

Repl) “Схема аксиом подстановки”:

$$\begin{aligned} &\forall \Phi(x, y) \\ &\qquad \forall x \, \forall y_1 \, \forall y_2 \, ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \to y_1 = y_2) \to \\ &\qquad \forall X \, \exists Y \, \forall y \, (y \in Y \leftrightarrow \exists x (x \in X \wedge \Phi(x, y))) \end{aligned}$$

Reg) “Аксиома регулярности”:

$$\forall X \, (X \neq \varnothing \to \exists u \, (u \in X \wedge X \cap u = \varnothing))$$

1 Отношения.

Определение 5. *Бинарное (или двухместное) отношение* R между X и Y — подмножество $X \times Y$. Если $Y = X$, R называется *бинарным (или двухместным) отношением* на X.
Обозначение: $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$.

Определение 6.

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(R) &:= \{u \in X \mid \exists v \quad uRv\} && \text{“область определения } R\text{”} \\ \mathrm{range}(R) &:= \{v \in Y \mid \exists u \quad uRv\} && \text{“область значений } R\text{”} \\ R[U] &:= range(R \cap (U \times Y)) \\ R^{-1} &:= \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} \end{aligned}$$

Замечание 2.

$$\begin{aligned} \mathrm{range}(R) = & \quad \mathrm{dom}(R^{-1}) = & R[X] \\ \mathrm{range}(R^{-1}) = & \quad \mathrm{dom}(R) = & R^{-1}[Y] \end{aligned}$$

Определение 7. Бинарные отношнения можно естественным образом комбинировать: для любых отношений R и Q между X и Y, Y и Z соответственно отношение

$$S = R \circ Q := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y : xRy \wedge yQz\}$$

называется композицией R и Q.

Определение 8. *Тождественное отображение* на X — $id_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Замечание 3. Тождественное отображение при композиции (не важно, правой или левой) с другим отношением не меняет его.

Определение 9. Отношение R между X и Y называется функциональным, если

$$\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, ((xRy_1 \wedge xRy_2) \to y_1 = y_2).$$

Определение 10. *Функция* из X в Y — функциональное отношение R между X и Y, в котором $\mathrm{dom}(R) = X$.