# Математический анализ — 1.

Лектор — Юрий Сергеевич Белов
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

## TODOs



## Содержание



*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

Литература:

- В. А. Зорич “Математический анализ”
- О. Л. Виноградов “Математический анализ”
- (подходит попозже) Г. М. Фихтенгельц “Курс дифференциального и интегрального исчисления”
- У. Рудин “Основы анализа”
- М. Спивак “Математический анализ на многообразиях”
- В. М. Тихомиров “Рассказы о максимумах и минимумах”

# 1 Множества, аксиоматика и вещественные числа.

Мы начинаем с теории множеств.

**Определение 1.**

- Множества и элементы — понятно.
- $a \in B$ — понятно.
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — объединение.
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — пересечение.
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$ — разность.
- $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$ — симметрическая разница.
- $A^C := X \backslash A$ — *дополнение*, где $X$ — некоторое фиксированное рассматриваемое множество.
- $A \subset B$ — “$A$ — подмножество $B$”, т.е. $\forall x (X \in A \Rightarrow x \in B)$.

**Следствие.**

- *(первое правило Моргана)* $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A^c \\ x \in B^C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$$

- *(второе правило Моргана)* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. *Аналогично.*

**Определение 2.** (Аксиома индукции.) Пусть есть функция $A : \mathbb{N} \to \{\text{True}; \text{False}\}$, что:

1. $A(1) = \text{True}$;
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad A(n) \to A(n+1)$.

Тогда $\forall n\ A(n) = \text{True}$.

Определение натуральных чисел сложно, рассматривать его не будем (оно описывается в курсе теории множеств). Важно также иметь в виду натуральные числа с операциями сложения и умножения.

**Определение 3.** Пусть есть кольцо без делителей нуля $R$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на $R \times (R \setminus \{0\})$, что $(a; b) \sim (c; d) \Leftrightarrow ad = bc$. Тогда $\operatorname{Quot}(R)$ — фактор-множество по $\sim$ и поле.

**Определение 4.** Рациональные числа — $\mathbb{Q} := \operatorname{Quot}(\mathbb{Z})$.

**Теорема 1.** $\nexists x \in \mathbb{Q} : \ x^2 = 2$.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существуют взаимно простые $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, что $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Тогда $m^2 = 2n^2$. Очевидно, что тогда $m^2 \,\vdots\, 2$, значит $m \,\vdots\, 2$, значит $m \,\vdots\, 4$, значит $n^2 \,\vdots\, 2$, значит $n \,\vdots\, 2$, значит $n$ и $m$ не взаимно просты, так как делятся на 2 — противоречие. $\square$

Теперь мы хотим понять, что есть вещественные числа. Тут есть несколько подходов; рассмотрим только один из них.

**Определение 5** (аксиоматический подход)**.** Вещественные числа — это полное упорядоченное поле $\mathbb{R}$ (состоящее не из одного элемента).

Здесь "поле" значит, что на множестве (вместе с его операциями и выделенными элементами) верны аксиомы поля $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ и $D$ (т.е. сложение и умножение ассоциативны, коммутативны имеют нейтральные элементы и удовлетворяют условию существованию обратных (по умножению — для всех кроме нуля), а также дистрибутивности).

Упорядоченность поля значит, что есть рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение $\preccurlyeq$, что все элементы сравнимы, согласованное с операциями, т.е.:

$A)$ $a \preccurlyeq b \Rightarrow a + x \preccurlyeq b + x$.

$M)$ $0 \preccurlyeq a \wedge 0 \preccurlyeq b \Rightarrow 0 \preccurlyeq ab$.

Полнота поля значит любое из следующих утверждений (они равносильны):

- любое ограниченное сверху (снизу) подмножество поля имеет точную верхнюю (нижнюю) грань;
- (аксиома Кантора-Дедекинда) для любых двух множеств $A$ и $B$, что $A \preccurlyeq B$, есть разделяющий их элемент.

Итого мы имеем 9 аксиом поля, 2 аксиомы упорядоченности и 1 аксиома полноты упорядоченности.

**Утверждение.** *Над $\mathbb{Q}$ нет элемента разделяющего $A := \{a > 0 \mid a^2 < 2\}$ и $B := \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$.*

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. есть $c > 0$, что $A < c < B$.

Если $c^2 < 2$, то найдём $\varepsilon$, что $\varepsilon \in (0; 1)$ и $(c+\varepsilon)^2 < 2$. Заметим, что $(c+\varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < c^2 + (2c+1)\varepsilon$. Пусть $\varepsilon < \frac{2-c^2}{2c+1}$, тогда такое $\varepsilon$ точно подойдёт, ну а поскольку $\frac{2-c^2}{2c+1} > 0$, то такое $\varepsilon$ есть. Значит $c^2 \geqslant 2$.

Аналогично имеем, что $c^2 \leqslant 2$. А значит $c^2 = 2$, что не бывает над $\mathbb{Q}$. $\square$

**Следствие.** *$\mathbb{Q}$ не полно.*

**Определение 6.** Значение $t$ является *верхней (нижней) гранью* непустого множества $X \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $t \geqslant X$, т.е. любой элемент $x$ множества $X$ не более $t$.

*Точная верхняя (нижняя) грань* или *супремум (инфимум)* непустого множества $X \subseteq \mathbb{R}$ — минимальная верхняя (нижняя) грань множества $X$. Он же является элементом разделяющим $X$ и множество всех его верхних (нижних) граней. Обозначение: $\sup(X)$ и $\inf(X)$ соответственно.

*Осцилляцией* множества $X$ называется значение $\operatorname{osc} X := \sup X - \inf X$.

**Определение 7.**

- *Закрытый интервал* или *отрезок* $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.
- *Открытый интервал* или просто *интервал* $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- *Полуоткрытый интервал* или *полуинтервал* $(a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $[a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$.

**Теорема 2** (Лемма о вложенных отрезках)**.** *Пусть имеется $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ — множество вложенных (непустых) отрезков, т.е. $\forall n > 1\ I_{n+1} \subset I_n$. Тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \varnothing$.*

**Доказательство.** Заметим, что для любых натуральных $n < m$ верно, что $a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$, где $I_n = [a_n; b_n]$. Тогда для $A := \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $B := \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ верно, что $A \leqslant B$. Значит есть разделяющий их элемент $t$, значит $A \leqslant t \leqslant B$, значит $t \in I_i$ для всех $i$, значит $t \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$. $\square$

*Замечание* 1. Теорема 2 не верна для не отрезков.

*Замечание* 2. Если в теореме 2 $b_i - a_i$ "сходится к 0", т.е. $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : \forall i > n\, b_i - a_i < \varepsilon$, то пересечение всех отрезков состоит из ровно одного элемента.

**Теорема 3** (индукция на вещественных числах)**.** *Пусть дано множество $X \subseteq [0; 1]$, что*

1. $0 \in X$;
2. $\forall x \in X\ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap [0; 1] \subseteq X$;
3. $\forall Y \subseteq X\ \sup(Y) \in X$.

*Тогда $X = [0; 1]$.*

**Доказательство.** Предположим противное: $X \neq [0; 1]$. Рассмотрим $Z := [0; 1] \setminus X$ ($Z \neq \varnothing$!) и $Y := \{y \in [0; 1] \mid y < Z\}$ ($Y \neq \varnothing$!). Заметим, что $Y \subseteq X$ и $\sup(Y) = \inf(Z) = t$. Тогда $t \in X$ по второму условию. Значит для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $U_\varepsilon(t) \cap [0; 1] \in X$, а т.е. $(U_\varepsilon(t) \cap [0; 1]) \cap Z = \varnothing$, а тогда $t \neq \inf(Z)$ — противоречие. Значит $X = [0; 1]$. $\square$

# 2 Топология прямой, пределы и непрерывность.

## 2.1 Последовательности, пределы и ряды

**Определение 8.** *Предел последовательности* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число $x$, что для любой окрестности $x$ эта последовательность с некоторого момента будет лежать в этой окрестности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Обозначение: $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = x$.

*Предельная точка последовательности* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число $x$, что в любой его окрестности после любого момента появится элемент данной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n > N : \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

**Определение 9.** Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$$

**Теорема 4.** *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда фундаментальна.*

**Доказательство.**

1. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к некоторому значению $X$, тогда

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon/2 \Rightarrow \\ \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| = |x_{n_1} - X + X - x_{n_2}| \leqslant |x_{n_1} - X| + |X - x_{n_2}| < \varepsilon\end{aligned}$$

2. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна. Мы знаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ все члены, начиная с некоторого различаются менее чем на $\varepsilon$. Тогда возьмём какой-нибудь такой член $y_0$ для некоторого $\varepsilon$, затем какой-нибудь такой член $y_1$ для $\varepsilon/2$, который идёт после $y_0$ и так далее. Получим последовательность, что все члены, начиная с $n$-ого лежат в $\varepsilon/2^n$-окрестности $y_n$. Тогда рассмотрим последовательность $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $I_n = [y_n - \varepsilon/2^{n-1}; y_n + \varepsilon/2^{n-1}]$. Несложно понять, что $I_n \supseteq I_{n+1}$, поэтому в пересечении $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ лежит некоторый $X$. Несложно понять, что все члены начальной последовательности, начиная с $y_{n+2}$, лежат в $\varepsilon/2^{n+2}$-окрестности $y_{n+2}$. При этом $|y_{n+2} - X| \leqslant \varepsilon/2^{n+1}$, что значит, что все члены главной последовательности, начиная с $y_{n+2}$ лежат в $3\varepsilon/2^{n+2}$-окрестности $X$, а значит и в $\varepsilon/2^n$.

$\square$

**Утверждение 5.** *Для последовательностей* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *верно (если определено), что*

1. $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} + \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$
2. $-\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$
3. $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n y_n\}_{n=0}^{\infty}$
4. $\frac{1}{\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}} = \lim\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$ *(если* $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \neq 0$*)*

*и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.*

**Доказательство.**

1. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \varepsilon/2 \quad \wedge \quad \forall m > M\ |y_m - Y| < \varepsilon/2,$$

тогда

$$\forall n > \max(N, M) \quad |(x_n + y_n) - (X + Y)| \leqslant |x_n - X| + |y_n - Y| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $X + Y$.

2. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \varepsilon,$$

тогда

$$\forall n > N \quad |(-x_n) - (-X)| = |X - x_n| = |x_n - X| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $-X$.

3. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$. Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \to \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} + \frac{|x|+|y|}{2}} = \sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} - \frac{|x|+|y|}{2}$$

Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда положительно. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $t^2 + t(|X| + |Y|) = \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \delta(\varepsilon) \quad \wedge \quad \forall m > M\ |y_m - Y| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\begin{aligned}
\forall n > \max(N, M) \quad |x_n \cdot y_n - X \cdot Y| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot Y + x_n \cdot Y - X \cdot Y| \\
&\leqslant |x_n \cdot (y_n - Y)| + |(x_n - X) \cdot Y| \\
&< |x_n| \cdot \delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \cdot |Y| \\
&< (|X| + \delta(\varepsilon)) \cdot \delta(\varepsilon) + |Y| \cdot \delta(\varepsilon) \\
&= \delta(\varepsilon)^2 + (|X| + |Y|)\delta(\varepsilon) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

что означает, что $\{x_n \cdot y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $X \cdot Y$.

4. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$. Определим также

$$\delta : (0; +\infty) \to \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon |X|^2}{1 + \varepsilon |X|}$$

Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда меньше $|X|$. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $\frac{t}{|X|(|X|-t)} = \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\forall n > N \quad \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{X}\right| = \left|\frac{X - x_n}{X \cdot x_n}\right| < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X| \cdot |x_n|} < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X|(|X| - \delta(\varepsilon))} = \varepsilon,$$

что означает, что $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $1/X$.

$\square$

**Определение 10.** Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *асимптотически больше* последовательности $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, если $x_n > y_n$ для всех натуральных $n$, начиная с некоторого. Обозначение: $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Аналогично определяются *асимптотически меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \prec \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$), *асимптотически не больше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \preccurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$) и *асимптотически не меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$).

**Утверждение 6.** *Если $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \geqslant \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. $Y > X$, где $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ находятся в $\varepsilon$-окрестностях $X$ и $Y$ соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $y_n > Y - \varepsilon = X + \varepsilon > x_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \prec \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — противоречие. Значит $X \geqslant Y$. $\square$

**Утверждение 7.** *Если* $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} > \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, *то* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

**Доказательство.** Пусть $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ находятся в $\varepsilon$-окрестностях $X$ и $Y$ соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $x_n > X - \varepsilon = Y + \varepsilon > y_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. $\square$

**Утверждение 8** (лемма о двух полицейских)**.** *Если*

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$$

*и*

$$\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{z_n\}_{n=0}^{\infty} = A,$$

*то предел* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *определён и равен* $A$.

**Доказательство.** Для каждого $\varepsilon > 0$ есть $N, M \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N \; |x_n - A| < \varepsilon \quad \wedge \quad \forall m > M \; |z_n - A| < \varepsilon,$$

значит

$$\forall n > \max(N, M) \quad A + \varepsilon > x_n \geqslant y_n \geqslant z_n > A - \varepsilon \quad \text{т.е. } |y_n - A| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $A$. $\square$

**Утверждение 9.** *Если* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = A$, *а* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, *не убывает (с некоторого момента), то предел* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *существует и не превосходит* $A$.

**Доказательство.** Если последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ возрастает не с самого начала, то отрежем её начало с до момента начала возрастания. Заметим, что она ограничена сверху (из-за последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$), тогда определим $B := \sup(\{y_n\}_{n=0}^{\infty})$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \quad |B - x_N| < \varepsilon$, тогда $\forall n > N \quad |B - x_n| < \varepsilon$, что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $B$. По утверждению 6 $A \geqslant B$. $\square$

**Определение 11.** Сумма ряда $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ есть значение $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim \left\{ \sum_{i=0}^{k} \right\}_{k=0}^{\infty}$. Частичной же суммой $s_k$ этого ряда называется просто $\sum_{i=0}^{k} a_i$.

**Определение 12.** Ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *сильно сходится*, если $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ сходится.

**Теорема 10.** *Если ряд сильно сходится сходится, то он сходится.*

**Доказательство.**

**Лемма 10.1.** *Пусть ряд* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *сходится, тогда сходится любой его "хвост" (суффикс), и для любого* $\varepsilon > 0$ *есть такой хвост, сумма которого меньше* $\varepsilon$.

**Доказательство.** Пусть $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$ верно, что $\sum_{i=0}^{n} |a_i| \in U_\varepsilon(A)$. Тогда заметим, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=N+1}^{n} |a_i| = \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{i=0}^{n} |a_i| - \sum_{i=0}^{N} |a_i| \right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} |a_i| - \sum_{i=0}^{N} |a_i| = A - \sum_{i=0}^{N} |a_i| \in U_\varepsilon(0)$$

Это и означает, что любой хвост сходится. И так мы для каждого $\varepsilon$ нашли такой хвост, что его сумма меньше $\varepsilon$. $\square$

Пусть дан сильно сходящийся ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Пусть $\varepsilon_n := \sum_{i=n}^{\infty} |a_i|$. Несложно видеть, что $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно уменьшается, сходясь к 0 (последнее следует из леммы 10.1). Также несложно видеть по рассуждениям леммы 10.1, что $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = |a_n|$. Тогда определим

$$S_n := \overline{U}_{\varepsilon_{n+1}}(\sum_{i=0}^{n} a_i),$$

где $\overline{U}_\varepsilon(x)$ — закрытая $\varepsilon$-окрестность точки $x$. Тогда несложно видеть, что

$$\left|\sum_{i=0}^{n+m} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+m} a_i\right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| \leqslant \varepsilon_{n+1}$$

Тем самым сумма любого префикса длины хотя бы $n+1$ лежит в $\overline{U}_{\varepsilon_{n+1}}(\sum_{i=0}^{n} a_i) = S_n$. Также несложно видеть, что $S_{n+1} \subseteq S_n$. А также понятно, что $S_i$ замкнуто и ограничено ("компактно").

Пусть $A := \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$ (поскольку диаметры шаров сходятся к нулю, то в пересечении лежит не более одной точки). Тогда мы видим, что $|\sum_{i=0}^{n} a_i - A| \leqslant \varepsilon_{n+1} \to 0$, поэтому $\sum_{i=0}^{n} a_i$ сходится и сходится к $A$. $\square$

**Следствие 10.1.** *Если $\{b_i\}_{i=0}^{\infty} \succcurlyeq \{|a_i|\}_{i=0}^{n}$ и $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ существует, то и $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ существует.*

**Теорема 11** (признак Лейбница)**.** *Пусть дана последовательность $\{a_n\}$, монотонно сверху сходящаяся к 0. Тогда ряд $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_i$ сходится.*

**Доказательство.** Рассмотрим последовательности

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} := \{S_{2n}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i a_i\right\}_{n=0}^{\infty} \qquad \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} := \{S_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^i a_i\right\}_{n=0}^{\infty}$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant 0 & \qquad Q_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} - a_{2n-3} \geqslant 0 \\ Q_n - P_n &= -a_{2n+1} \leqslant 0 & P_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Тогда имеем, что $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно убывает, $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно возрастает, а также

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} \geqslant \{Q_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Тогда последовательности $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходятся и сходятся к $P$ и $Q$ соответственно. При этом последовательность

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} - \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{P_n - Q_n\}_{n=0}^{\infty} = a_{2n+1}$$

тоже сходится по условию и сходится к 0. Поэтому

$$P - Q = \lim\{P_n\}_{n=0}^{\infty} - \lim\{Q_n\}_{n=0}^{\infty} = 0$$

значит $P = Q$. Значит и последовательность префиксных сумм тоже сходится к $P = Q$. $\square$

**Лемма 12** (преобразование Абеля)**.**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$$

*где $B_n := \sum_{i=0}^{n} b_i$.*

**Теорема 13** (признак Дирихле)**.** *Если даны* $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ *и* $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$*, что* $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \searrow 0$*, а* $\{B_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{i=0}^{n} b_i\}_{i=0}^{\infty}$ *ограничена, то ряд* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$ *сходится.*

**Доказательство.**

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_k b_k = \sum_{i=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Пусть $|B_n| < C$ для всех $n$. Несложно видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} |a_n B_n| \leqslant \lim a_n C = C \lim a_n = 0,$$

поэтому $\lim a_n B_n = 0$. Также

$$|(a_k - a_{k+1}) B_k| < C|a_k - a_{k+1}| = C(a_k - a_{k+1}),$$

поэтому

$$|S_n - a_n B_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k| < C \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = C(a_1 - a_{n+1}),$$

что тоже сходится. Поэтому $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится, т.е. и ряд сходится. □

## 2.2 Топология

**Определение 13.** *ε-окрестность* точки $x$ (для $\varepsilon > 0$) — $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$. Обозначение: $U_\varepsilon(x)$.

*Проколотая ε-окрестность* точки $x$ — $(x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon)$. Обозначение: $V_\varepsilon(x)$.

**Определение 14.** Пусть дано некоторое множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Тогда точка $x \in X$ называется *внутренней точкой множества* $X$, если она содержится в $X$ вместе со своей окрестностью.

Само множество $X$ называется *открытым*, если все его точки внутренние.

*Пример* 1. Следующие множества открыты:

- $(a; b)$;
- $(a; +\infty)$;
- $\mathbb{R}$;
- $\varnothing$;
- $\bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i; b_i)$ (интервалы не обязательно не должны пересекаться).

**Определение 15.** Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества, если в любой проколотой окрестности $x$ будет какая-либо точка $X$.

Множество предельных точек $X$ называется *производным множеством* множества $X$.

Множество $X$ называется замкнутым, если содержит как подмножество своё производное множество.

**Определение 16.** Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Если у любой последовательности его точек есть предельная точка из самого множества $X$, то $X$ называется *компактным*.

**Теорема 14.** *Подмножество* $\mathbb{R}$ *компактно тогда и только тогда, когда замкнуто и ограничено.*

**Доказательство.**

1. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно. Если $X$ неограниченно, то несложно построить последовательность элементов $X$, которая монотонно возрастает или убывает, а разность между членами не меньше любой фиксированной константы (например, не меньше 1); такая последовательность не имеет предельных точек, что противоречит определению $X$, а значит $X$ ограничено. Если $X$ не замкнуто, то можно рассмотреть предельную точку $x$, не лежащую в $X$, и построить последовательность, сходящуюся к ней, а значит никаких других точек у последовательности быть не может, а значит опять получаем противоречие с определением $X$; значит $X$ ещё и замкнуто.

2. Пусть $X$ замкнуто и ограничено. Пусть также дана некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ элементов $X$. Поскольку $X$ ограничено, то значит лежит внутри некоторого отрезка $I_0$. Определим последовательность $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ рекуррентно следующим образом. Пусть $I_n$ определено; разделим $I_n$ на две половины и определим $I_{n+1}$ как любую из половин, в которой находится бесконечное количество членов последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. после этого определим последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ как подпоследовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $y_n \in I_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (это можно сделать рекуррентно: если определён член $y_n$, то найдётся ещё бесконечное количество членов начальной последовательности в $I_{n+1}$, которые идут после $y_n$, так как отброшено конечное количество, а значит можно взять любой). Несложно видеть, что $\lim_{n\to\infty} y_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n =: y$. Из-за замкнутости $y \in X$, а значит $y$ — предельная точка $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — лежит в $X$ и доказывает компактность $X$.

$\square$

**Лемма 15.** *Пусть $\Sigma$ — семейство интервалов длины больше некоторого $d > 0$, покрывающее отрезок $[a;b]$. Тогда у $\Sigma$ есть конечное подсемейство $\Sigma'$, покрывающее $[a;b]$.*

**Доказательство.** Давайте вести индукцию по $\lceil (b-a)/d \rceil$.

**База.** $\lceil (b-a)/d \rceil = 0$. В таком случае $a = b$, а значит, можно взять любой интервал, покрывающий единственную точку и получить всё искомое семейство $\Sigma'$.

**Шаг.** Рассмотрим $\Omega := \{I \in \Sigma \mid a \in I\}$. Заметим, что если у правых концов интервалов из $\Omega$ нет верхних граней (т.е. их множество не ограничено сверху), то значит найдётся интервал, покрывающий и $a$, и $b$, а значит его как единственный элемент семейства $\Sigma'$ будет достаточно. Иначе определим $a'$ как супремум правых концов интервалов из $\Omega$.

Тогда мы имеем, что есть интервалы из $\Omega$, подбирающиеся сколь угодно близко к $a'$, а также что все интервалы из $\Sigma$, покрывающие $a'$ не покрывают $a$. Если $a' > b$, то можно опять же взять интервал, который покроет весь $[a;b]$, и остановится. Иначе рассмотрим любой интервал $I$, покрывающий $a'$ и любой интервал $J$ из $\Omega$, перекрывающийся с $I$. Пусть $a''$ — правый конец $J$.

Заметим, что $I$ и $J$ покрывают $[a;a'')$. При этом $a < J < a''$, значит $a'' - a \geqslant \operatorname{osc}(J) > d$. Если $a'' > b$, то $\Sigma = \{I, J\}$ будет достаточно. Иначе заметим, что

$$\left\lceil \frac{b-a''}{d} \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a}{d} - \frac{a''-a}{d} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{b-a}{d} - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a}{d} \right\rceil - 1 < \left\lceil \frac{b-a}{d} \right\rceil$$

Тогда по предположению индукции есть конечное подпокрытие $\Sigma''$ покрытия $\Sigma$ отрезка $[a'';b]$. Значит $\Sigma' := \Sigma'' \cup \{I, J\}$ является конечным подпокрытием покрытия $\Sigma$ множества $[a;b]$. $\square$

**Лемма 16.** *Пусть $\Sigma$ — семейство интервалов длины больше некоторого $d > 0$. Тогда найдётся не более чем счётное подсемейство $\Sigma'$, имеющее такое же объединение, т.е. $|\Sigma'| \leqslant |\mathbb{N}|$, а $\bigcup \Sigma = \bigcup \Sigma'$.*

**Доказательство.** Несложно видеть, что $A := \bigcup \Sigma$ представляется в виде дизъюнктного объединения интервалов. Каждый из них можно представить как объединение не более чем счётного отрезков. Итого мы получим не более чем счётное семейство $\Omega$ отрезков, что $\bigcup \Omega = A$. Для каждого отрезка из $\Omega$ построим по лемме 15 конечное подпокрытие покрытия $\Sigma$, а затем объединив их, получим не более чем счётное семейство $\Sigma'$, покрывающее любой из них, а значит и $\bigcup \Omega = A = \bigcup \Sigma$. С другой стороны $\Sigma'$ — подмножество $\Sigma$, значит и $\bigcup \Sigma'$ — подмножество $\bigcup \Sigma$.

В итоге $\bigcup \Sigma' = \bigcup \Sigma$, и при этом $\Sigma'$ — не более чем счётное подмножество $\Sigma$. □

**Лемма 17.** *Пусть дано семейство $\Sigma$ интервалов. Тогда из него можно выделить не более чем счётное подсемейство $\Sigma'$ с тем же объединением, т.е. $|\Sigma'| \leqslant |\mathbb{N}|$, а $\bigcup \Sigma = \bigcup \Sigma'$.*

**Доказательство.** Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{Z}$ семейство

$$\Sigma_n = \{I \in \Sigma \mid \operatorname{osc}(I) \in [2^n; 2^{n+1})\}$$

Применим лемму к $\Sigma_n$ и получим $\Sigma'_n$. Тогда $\Sigma' := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma'_n$ является подмножеством $\Sigma$, даёт в объединении то же, что и $\Sigma$, и при этом имеет мощность не более $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. □

**Теорема 18.** *Подмножество $\mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда из любого его покрытия интервалами можно выделить конечное подпокрытие.*

**Доказательство.**

1. Пусть $X$ компактно, а $\Sigma$ — некоторое его покрытие интервалами. Определим для каждого $d > 0$
$$\Sigma_d := \{I \in \Sigma \mid \operatorname{osc}(I) > d\}$$
   Если никакое из $\Sigma_d$ не является подпокрытием множества $X$, то рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $x_n$ — любой элемент $X \setminus \Sigma_{1/2^n}$. У $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ есть предельная точка $x \in X$. Значит должен быть интервал, покрывающий $x$, но тогда он же покрывает весь некоторый хвост нашей последовательности, а сам лежит в некотором $\Sigma_{1/2^n}$ — противоречие. Значит некоторое $\Sigma_d$ является подпокрытие, а значит далее можно рассматривать его в качестве $\Sigma$.

   $\bigcup \Sigma$ — открытое множество, поэтому является дизъюнктным объединением семейства $\Omega$ интервалов. Поскольку в $\Sigma$ длины всех интервалов больше $d$, то в $\Omega$ тоже. Но также $X$ ограничено, поэтому $\Omega$ конечно, да и все интервалы в нём ограничены. Заметим, что $X \cap I$, где $I$ — любой интервал из $\Omega$, является замкнутым множеством, поэтому его можно накрыть некоторым отрезком $S \subseteq I$ (для этого можно взять отрезок $[\inf(X \cap I); \sup(X \cap I)]$). Значит из накрытия $\Sigma$ выделить $|\Omega|$ конечных подпокрытий для каждого отрезка (по лемме 16), а их объединение даст конечное покрытие $X$.

2. Пусть $X$ таково, что из любого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

   Если $X$ неограниченно, то тогда несложно будет видеть, что покрытие $\{(n; n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ нельзя уменьшить до конечного. Значит $X$ ограничено.

   Если $X$ не замкнуто, то значит есть точка $x \notin X$, что в любой окрестности $x$ будет точка. Тогда рассмотрим покрытие $\{(x + 2^n; x^{n+2}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x - 2^{n+2}; x^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Несложно видеть, что если взять любое конечное подсемейство интервалов, то оно не накроет некоторую окрестность $x$, а значит и $X$. Значит $X$ замкнуто.

   Итого получаем, что $X$ компактно.

□

## 2.3 Пределы функций, непрерывность

**Определение 17** (по Коши)**.** *Предел* функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке $x$ — такое значение $y$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : f(V_\delta(x) \cap X) = U_\varepsilon(y)$$

Обозначение: $\lim\limits_{t \to x} f(t) = y$.

**Определение 18** (по Гейне)**.** *Предел* функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке $x$ — такое значение $y$, что для любой последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ элементов $X \setminus \{x\}$ последовательность $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ сходится к $y$. Обозначение: $\lim\limits_{t \to x} f(t) = y$.

**Теорема 19.** *Определения пределов по Коши и по Гейне равносильны.*

**Доказательство.** Будем доказывать равносильность отрицаний утверждений, ставимых в определениях.

1. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ не сходится по Коши в $x$ к значению $y$. Значит есть такое $\varepsilon > 0$, что в любой проколотой окрестности $x$ (в множестве $X$) есть точка, значение $f$ в которой не лежит в $\varepsilon$-окрестности. Рассмотрев любую такую проколотую окрестность $I_0 = V_{\delta_0}(x)$, берём в ней любую такую точку $x_0$. Далее рассмотрев $I_1 = V_{\delta_1}(x)$, где $\delta_1 = \min(\delta_0/2, |x - x_0|)$, берём там любую точку $x_1$, где значение $f$ вылетает вне $\varepsilon$-окрестности $y$. Так далее строим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, сходящуюся к $x$, значения $f$ в которой не лежат в $\varepsilon$-окрестности $y$, что означает, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ не сходится к $y$, что означает, что $f$ не сходится по Гейне в $x$ к значению $y$.

2. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ не сходится по Гейне в $x$ к значению $y$. Значит есть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, сходящаяся к $x$, что последовательность её значений не сходится к $y$. Значит есть $\varepsilon > 0$, что после любого момента в последовательности будет член, значение в котором вылезает вне $\varepsilon$-окрестности $y$. Поскольку для любой проколотой окрестности $x$ есть момент, начиная с которого вся последовательность лежит в этой окрестности, то в любой проколотой окрестности $x$ есть член, значение которого вылезает вне $\varepsilon$-окрестности $y$, что означает, что $f$ не сходится по Коши в $x$ к $y$.

□

**Утверждение 20.** *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в $x$ предел тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; \forall x_1, x_2 \in V_\delta(x) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

**Доказательство.** Такое же как для последовательностей: см. теорему 4. □

**Утверждение 21.** *Для функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ верно, что*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} (f + g)(x)$

2. $\lim\limits_{x \to a} (-f)(x) = -\lim\limits_{x \to a} f(x)$

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim (f \cdot g)(x)$

4. $\frac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \lim\limits_{x \to a} (\frac{1}{f})(x)$ *(если $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$)*

5. $\lim\limits_{y \to \lim\limits_{x \to a} g(x)} f(y) = \lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x)$

*и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.*

*Замечание* 3. Утверждения 6, 7 и 8 верны, если заменить последовательности на функции, пределы последовательностей на пределы функций в некоторой точке $x$, а асимптотические неравенства на неравенства на окрестности $x$.

**Определение 19.** *Верхним пределом* функции $f$ в точке $x_0$ называется

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\delta>0}(\sup_{V_\delta(x_0)} f)$$

*Нижним пределом* функции $f$ в точке $x_0$ называется

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\delta>0}(\inf_{V_\delta(x_0)} f)$$

**Утверждение 22.** *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в $x$ предел тогда и только тогда, когда $\varlimsup\limits_{t\to x} f(t) = \varliminf\limits_{t\to x} f(t)$.*

**Определение 20.** Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* $x$, если $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$. В изолированных точках $f$ всегда непрерывна.

**Определение 21.** Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной на множестве* $Y \subseteq X$, если она непрерывна во всех точках $Y$.

**Утверждение 23.** *Для непрерывных на $X$ функций $f$ и $g$ верно, что*

- *$f + g$ непрерывна на $X$;*
- *$fg$ непрерывна на $X$;*
- *$\frac{1}{f}$ непрерывна на $X$ (если $f \neq 0$).*

**Утверждение 24.** *Для $f$, непрерывной в $x_0$, и $g$, непрерывной в $f(x_0)$, $g \circ f$ непрерывна в $x_0$.*

**Теорема 25** (Вейерштрасса)**.** *Непрерывная функция на компакте ограничена на нём и принимает на нём свои минимум и максимум.*

**Доказательство.** Докажем утверждение для ограниченности сверху и максимума; для ограниченности снизу и минимума рассуждения аналогичны.

Пусть множество неограниченно сверху. Тогда есть $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty} \to +\infty$. Тогда рассмотрим подпоследовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся к $y$. Тогда

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = +\infty$$

— противоречие.

Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к супремуму $S$ функции. Рассмотрим подпоследовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся к $y$. Тогда

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = S$$

□

**Следствие 25.1.** *Так как отрезок компактен, то любая непрерывная на нём функция ограничена и принимает на нём свои максимум и минимум.*

**Теорема 26** (о промежуточном значении). *Пусть $f$ непрерывна на $[a;b]$, а $f(a) < f(b)$. Тогда $\forall y \in [f(a); f(b)]$ найдётся $c \in [a;b]$, что $f(c) = y$.*

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность $\{(a_n; b_n)\}_{n=0}^{\infty}$, что $(a;b) = (a_0; b_0)$, а следующие пары определяются так: если $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$, то $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (\frac{a_n+b_n}{2}; b_n)$, иначе $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (a_n; \frac{a_n+b_n}{2})$. Тогда $c = \lim\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда

$$f(c) = \lim\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{f(b_n)\}_{n=0}^{\infty},$$

откуда получаем, что $f(c) \geqslant y$ и $f(c) \leqslant y$, т.е. $f(c) = y$. $\square$

**Определение 22.** Функция $f$ *равномерно непрерывна* на $X$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in X \quad f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

**Теорема 27** (Кантор). *Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна.*

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x, y : \quad |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Тогда рассмотрим последовательность пар $x$ и $y$ построенных так для $\delta$, сходящихся к 0. Из неё выделим подпоследовательность, что $x$ сходится к некоторому $a$. Тогда $y$ сойдутся к нему же. Тогда в любой окрестности $a$ будет пара точек $(x'; y')$, что $|f(x') - f(y')| > \varepsilon$, значит будет в любой окрестности $x$ будет точка, выбивающаяся из $\varepsilon/2$-окрестности — противоречие с непрерывностью. $\square$

**Определение 23.** Пусть есть функции $f$ и $g$, что $|f| \leqslant C|g|$ в окрестности $x$ для некоторого $C \in \mathbb{R}$, тогда пишут, что $f = O(g)$ (при $t \to x$).

Если же $\forall \varepsilon > 0$ будет такая окрестность $x_0$, что $|f| \leqslant \varepsilon|g|$ в этой окрестности, тогда пишут, что $f = o(g)$ (при $t \to x$).

## 2.4 Гладкость (дифференцируемость)

**Определение 24.** Функция $f$ называется *гладкой (дифференцируемой)* в $x$, если $f(x + \delta) = f(x) + A\delta + o(\delta)$ для некоторого $A \in \mathbb{R}$. В таком случае $A$ называется *дифференциалом (производной)* $f$ в точке $x$.

Обозначение: $f'(x) = A$.

**Определение 25.** Функция $f$ называется *гладкой (дифференцируемой)* в $x$, если предел

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$$

определён. В таком случае его значение называется *дифференциалом (производной)* $f$ в точке $x$.

**Утверждение 28.** *Определения 24 и 25 равносильны.*

**Утверждение 29.** *Непрерывная в некоторой точке функция там же непрерывна.*

**Определение 26.** Функция, значения которой равны производным функции $f$ в тех же точках называется *производной функцией* (или просто *производной*) функции $f$. Обозначение: $f'$.

**Лемма 30.** *Для дифференцируемых в $x$ функций $f$ и $g$*

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;

2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *(правило Лейбница)*;

3. $(\frac{1}{f})'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$;

4. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

**Лемма 31.** *Пусть дана $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция. Тогда существует $g : [f(a); f(b)] \to \mathbb{R}$ — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция, что $g \circ f = Id$.*

**Доказательство.** Заметим, что $f$ — монотонно возрастающая (убывающая) биекция из $[a; b]$ в $[f(a); f(b)]$. Тогда существует монотонно возрастающая (убывающая) биекция $g : [f(a); f(b)] \to [a; b]$, что $g \circ f = id$. Осталось показать, что $g$ непрерывна.

Предположим противное, тогда в любой окрестности некоторой точки $f(x)$ из $[f(a); f(b)]$ есть точки вылетающие вне $\varepsilon$-окрестности. Значит все точки из либо $(x - \varepsilon; x)$, либо $(x; x + \varepsilon)$ не принимаются, значит $g$ не биекция — противоречие. Значит $g$ непрерывна. □

**Лемма 32.**

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

**Доказательство.** Пусть $g := f^{-1}$. Тогда

$$1 = Id' = (f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$$

Откуда следует, что

$$(f^{-1})' = g' = \frac{1}{f' \circ g} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

□

**Определение 27.** Функция $f$ *возрастает в точке* $y$, если есть $\varepsilon > 0$, что $f(x) \leqslant f(y)$ для любого $x \in (y - \varepsilon; y)$ и $f(x) \geqslant f(y)$ для любого $x \in (y; y + \varepsilon)$.

Аналогично определяется убываемость функции в точке.

**Лемма 33.** *Если $f$ возрастает в любой точке на $[a; b]$, то $f(a) \leqslant f(b)$.*

**Доказательство.**

1. Можно рассмотреть для каждой точки $[a; b]$ окрестность, для которой верна её возрастаемость, и из покрытия, ими образуемого, выделить конечное. А тогда перебираясь между общими точками окрестностей, получим искомое.

2. Также можно предположить противное, рассмотреть последовательность вложенных отрезков, у которых левый конец выше правого, и тогда для точки пересечения отрезков будет противоречие.

□

**Следствие 33.1.** *$f$ возрастает на всём отрезке.*

**Теорема 34.** *Если $f$ гладка, а $f'$ положительна на $[a; b]$, то $f$ строго возрастает на $[a; b]$.*

**Доказательство.** Несложно видеть, что в любой точке на $[a;b]$ у функции есть окрестность, где она строго возрастает, так как если $t \in [a;b]$, а $f'(t) = \lambda > 0$, то в некоторой окрестности

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \in (0;2\lambda) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \in (f(t); f(t)+2\lambda(x-t))$$

что значит, что эта окрестность — подтверждение для возрастания $f$ в $t$. Тогда по предыдущему следствию $f$ возрастает на $[a;b]$. Если вдруг функция возрастает нестрого, то тогда найдётся подотрезок на $[a;b]$, на котором функция константа, а значит на интервале с теми же концами производная тождественна равна нулю. □

**Теорема 35.** *Если $f$ возрастает, то $f'$ в своей области определения неотрицательно.*

**Доказательство.** Если функция в точке $t$ равна $\lambda < 0$, то в некоторой окрестности $t$

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \in \left(\frac{3}{2}\lambda; \frac{1}{2}\lambda\right) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \in \left(f(t)+\frac{3}{2}\lambda(x-t); f(t)+\frac{1}{2}\lambda(x-t)\right)$$

что значит, что $f$ в точке $t$ "строго" убывает — противоречие. Значит $f'(t) \geqslant 0$. □

**Определение 28.** *$f$ имеет локальный максимум в $x$*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $f(x) \geqslant f(y)$ для любого $y \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)$.

Аналогично определяется точка локального минимума.

**Теорема 36.** *В точках локальных максимумов и минимумов функции $f$ функция $f'$ принимает нули (если определена).*

**Доказательство.** Слева от точки максимума функция возрастает в данной точке, значит производная в данной точке $\geqslant 0$, а справа — убывает, значит производная $\leqslant 0$, значит производная равна 0. Аналогично для точки минимума. □

**Теорема 37** (Ролль)**.** *Если $f$ — гладкая функция на $[a;b]$, и $f(a) = f(b)$, то существует $c \in (a;b)$, что $f'(c) = 0$.*

**Доказательство.** В точке максимума или минимума $f$ на $[a;b]$ достигается ноль производной. Если они обе совпадают с концами отрезка, то значит функция константа, а тогда в любой точке отрезка производная равна нулю. □

**Теорема 38.** *Если $f$ и $g$ непрерывные на $[a;b]$ и гладкие на $(a;b)$ функции, а $g' \neq 0$, то существует $c \in (a;b)$, что*

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Доказательство.** Пусть

$$\lambda := \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$$

а $\tau(x) := f(x) - \lambda g(x)$. В таком случае

$$\frac{\tau(a)-\tau(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{(f(a)-f(b)-\lambda(g(a)-g(b)))}{g(a)-g(b)} = \lambda - \lambda = 0$$

значит $\tau(a) = \tau(b)$, значит есть $c \in [a;b]$, что $\tau'(c) = 0$. Тогда

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{(\tau+\lambda g)'(c)}{g'(c)} = \frac{\tau'(c)}{g'(c)} + \lambda = \lambda = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$$

□

**Теорема 39** (Лагранж). *Если $f$ непрерывна на $[a;b]$ и гладка на $(a;b)$, то существует $c \in (a;b)$, что*

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$$

**Доказательство.** Очевидно следует из предыдущей теоремы с помощью подстановки $g(x) = x$. ☐

**Теорема 40.** *Пусть $f$ — гладкая на $(a;b)$ функция.*

1. *Если $f' \geqslant 0$, то $f$ возрастающая функция.*

2. *Если $f' > 0$, то $f$ строго возрастающая функция.*

3. *Если $f$ возрастающая функция, то $f' \geqslant 0$.*

**Теорема 41.** *Пусть $f$ — гладкая на $[a;b]$ функция. Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in [a;b]$, то $f \equiv const$ на том же отрезке.*

*Замечание* 4. Функция $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ (доопределённая в нуле) имеет производную $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ в случае ненулевых $x$ и производную $f'(0) = 0$. При этом легко видно, что $f'$ не является непрерывной функцией (она имеет разрыв в том же нуле).

**Теорема 42.** *Если $f$ гладка на $(a;b)$, а $f'$ не равна нулю, то $f'$ либо положительна, либо отрицательна.*

**Доказательство.** $f$ не принимает никакое значение на $(a;b)$ дважды (т.к. иначе у производной был бы корень), значит она либо строго возрастает, либо строго убывает, а значит $f'$ либо неотрицательна, либо неположительна соответственно. Но ноль принимать не может, поэтому последнее утверждение равносильно тому, что $f$ либо строго положительна, либо строго отрицательна. ☐

**Теорема 43.** *Пусть $f$ гладка на $(a;b)$ и для некоторых $u, v \in (a;b)$ верно, что $f'(u) < \alpha < f'(v)$. Тогда существует $c \in (u;v)$, что $f'(c) = \alpha$.*

**Доказательство.** Пусть $g(x) := f(x) - \alpha x$. Тогда $g'(u) < 0 < g'(v)$, значит $g$ не может строго возрастать или убывать на $(u;v)$, значит $\exists c \in (u;v)$, что $g'(c) = 0$, а значит $f'(c) = \alpha$. ☐

*Замечание* 5. Данная теорема по сути является теоремой о промежуточном значении для производной.

**Теорема 44.** *Пусть $f$ непрерывна на $[a;b)$ и гладка на $(a;b)$. Пусть также $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ существует и равен $d$. Тогда $f'(a)$ тоже существует и равна $d$.*

**Доказательство.** Есть несколько способов:

1. Несложно видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ есть некоторая правая окрестность $a$, в которой функция $f'$ лежит в $\varepsilon$-окрестности $d$. Тогда $f(x)-(d-\varepsilon)x$ возрастает в данной окрестности, а $f(x) - (d+\varepsilon)x$ убывает, значит $f(x) - f(a) \in ((d-\varepsilon)(x-a); (d+\varepsilon)(x-a))$. В таком случае $f'(a)$ определена и равна $d$.

2. По теореме Лагранжа для любого $x \in [a;b)$ найдётся $\xi \in (a;x)$, что

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$$

   Значит

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} f'(\xi) = d$$

   что буквально значит, что $f'(a) = d$.

$\square$

**Теорема 45** (правило Лопиталя)**.** *Пусть* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. *Пусть также* $f$ *и* $g$ *гладки и* $g' \neq 0$ *на* $(a; b)$. *Тогда*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*если второй предел определён.*

**Доказательство.** Пусть дано $\varepsilon > 0$, а

$$d := \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда есть $\delta > 0$, что для любого $t \in (a; a+\delta)$ значение $f'(t)/g'(t)$ лежит в $U_\varepsilon(d)$. Легко видеть, что для любых $x, y \in (a; a+\delta)$ существует $\xi \in (x; y) \subseteq (a; a+\delta)$, что

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = f'(\xi) \in U_\varepsilon(d)$$

Устремляя $x$ к $a$, получаем, что $f(y)/g(y)$ тоже лежит в $U_\varepsilon(d)$. Тогда по определению предела

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = d = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$

**Определение 29.** $f''$ — вторая производная $f$, т.е. $(f')'$, а $f^{(n)}$ — $n$-ая производная $f$, т.е. $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, $f^{(0)} := f$.

**Определение 30.** $P(x)$ — полином Тейлора степени $n$ функции $f$, если $\deg(P) \leqslant n$, а

$$f(x) - P(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a$$

**Теорема 46.** *Если* $P_1$ *и* $P_2$ *— полиномы Тейлора степени* $n$ *функции* $f$, *то* $P_1 = P_2$.

**Теорема 47.** *Пусть* $f : (a; b) \to \mathbb{R}$, $f^{(1)}$, *...*, $f^{(n-1)}$ *определены на* $(t-\delta; t+\delta)$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и определена* $f^{(n)}(t)$. *Тогда для всякого* $x \in U_\delta(t)$

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + o((x-t)^n)$$

**Доказательство.** Рассмотрим $g(x) := f(x) - f(t)/0! \cdot (x-t)^0 - \dots - f^{(n)}(t)/n! \cdot (x-t)^n$. Тогда задача сведена к следующей лемме.

**Лемма 47.1.** *Если* $g^{(1)}$, *...*, $g^{(n-1)}$ *определены на* $(t-\delta; t+\delta)$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и*

$$g(t) = g^{(1)}(t) = \dots = g^{(n)}(t) = 0.$$

*Тогда* $g(x) = o((x-t)^n)$.

**Доказательство.** Докажем по индукции по $n$.

**База.** Пусть $n = 1$. Тогда очевидно, что $f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + o(x-t) = o(x-t)$.

**Шаг.** По предположению индукции $f'(x) = o((x-t)^n)$. Тогда мы имеем, что

$$f(x) = f(x) - f(t) = f'(\xi)(x-t)$$

для некоторого $\xi \in (x, t)$. Тогда

$$\frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^n} = \frac{f'(\xi)}{(x-t)^{n-1}} = \frac{o((\xi-t)^{n-1})}{(x-t)^{n-1}} = o(1)\frac{(\xi-t)^{n-1}}{(x-t)^{n-1}} = o(1)$$

$\square$

$\square$

**Теорема 48.** *Пусть $f(t) = f^{(1)}(t) = \dots = f^{(n)}(t) = 0$, а $f^{(n+1)} \neq 0$. Если $n$ чётно, то $t$ — не экстремальные точка функции $f$, иначе $t$ — экстремальная точка функции $f$.*

**Теорема 49.** *Пусть $f : (a; b) \to \mathbb{R}$, $f^{(1)}$, ..., $f^{(n+1)}$ определены на $(t - \delta; t + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда для всякого $x \in U_\delta(t)$ существует $\xi \in (x; t)$, что*

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

**Доказательство.** Точно так же сведём $f$ к $g$, что $g(t) = \dots g^{(n)}(t) = 0$. Тогда требуется показать, что $g(x) = g^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! \cdot (x-t)^{n+1}$ для некоторого $\xi \in (x, t)$. Докажем это по индукции.

**База.** $n = 0$. Теорема Лагранжа.

**Шаг.**

$$\frac{f(x)}{(x-t)^{n+1}} = \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{n+1} - (t-t)^{n+1}} = \frac{f'(\xi)}{(n+1)(\xi - t)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$$

где $\xi \in (x, t)$ (существует по теореме Лагранжа), а $\eta \in (\xi, t) \subseteq (x, t)$ (существует по предположению индукции для $f'$ и $\xi$). Отсюда следует искомое утверждение. $\square$

## 2.5 Стандартные функции, ряды Тейлора и их сходимость

Тут нужно рассказать про функции exp, sin, cos и $(1+x)^\alpha$ и их ряды

**Определение 31.** $f$ является *(поточечным) пределом* $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ на $E$, если $\lim\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty = f(x)$ для любого $x \in E$.

**Определение 32.** $f$ является *равномерным пределом* $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ на $E$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и $x \in E$.

**Теорема 50** (Стокс, Зейдель). *Пусть $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность непрерывных функций, и $f_n \to f$ равномерно на $E$. Тогда $f$ непрерывна.*

**Доказательство.** Для любого $\varepsilon > 0$ есть такое $n \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ для всех $x \in E$. Тогда существует $\delta > 0$, что $f_n(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(t))$ для данного $t$. Тогда

$$f(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(U_\delta(t))) \subseteq U_{2\varepsilon/3}(f_n(t)) \subseteq U_\varepsilon(f(t)).$$

$\square$

**Теорема 51** (Коши). *TFAE (the following are equivalent):*

1. *$f_n \to f$ равномерно сходится на $E$.*
2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$ для любых $k, l > N$ и $x \in E$.*

**Теорема 52** (Вейерштрасс). *Пусть $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность непрерывных функций, что есть последовательность чисел $\{d_n\}_{n=0}^\infty$, для которой верно, что $|u_n| < d_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $\sum_{n=0}^\infty d_n$ сходится. Тогда $\sum_{n=0}^\infty u_n$ равномерно сходится.*

**Теорема 53.** *Пусть $f_n \to f$ на $E$ и $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ гладкие. Если $f_n' \to g$ равномерно, то $f$ тогда тоже гладка и $f' = g$.*

**Доказательство.** Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что $|f_k' - f_l'| < \varepsilon/3$ для всех $k, l > N$. Тогда имеем, что

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y}\right| = \left|\frac{(f_k - f_l)(x) - (f_k - f_l)(y)}{x - y}\right| = |(f_k - f_l)'(\xi)| < \varepsilon/3$$

Устремляя $l$ к бесконечности получаем, что

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant \varepsilon/3$$

Также имеем, что есть такое $\delta > 0$, что для всех $y \in U_\delta(x)$

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - f_k'(x)\right| < \varepsilon/3$$

Также есть $M \in \mathbb{N}$, что $|f_k' - g| < \varepsilon/3$ для любого $k > M$. Складывая всё вместе, получаем, что для всех $k > \max(N, M)$ и $y \in U_\delta(x)$

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - g(x)\right| < \varepsilon$$

Значит $f$ гладка и $f' = g$. □

**Следствие 53.1.** *Если $\{f^{(0)}\}$, ..., $\{f^{(n-1)}\}$ сходятся, а $f^{(n)}$ равномерно сходится. Тогда то же верно и про первые $n$ производных.*

**Следствие 53.2.** *Если ряд Тейлора сходится, то функция бесконечно гладкая.*

# 3 Примеры и контрпримеры

Название раздела?

**Теорема 54.** *Существует непрерывная функция $f$ на отрезке $[a; b]$, которая не имеет производной ни в какой точке на отрезке $[a; b]$*

**Доказательство.** Можно привести примеры данной функции $f$.

1. (функция Вейерштрасса) Определим

$$f_0(x) := \frac{1}{2} - \left|x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right| \qquad f_n(x) := \frac{f_0(4^n x)}{4^n} \qquad f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$$

Поскольку $|f_n| = 1/4^n$, а $\sum_{i=0}^{\infty} 1/4^i$ сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд равномерно сходится к $f$, а поскольку каждая $f_n$ непрерывна, то по теореме Стокса-Зейделя функция $f$ непрерывна. Теперь осталось показать, что у $f$ нет производных. Карт

Пусть $a$ — произвольная точка из $\mathbb{R}$. Заметим, что для всяких $m$ и $n$, что $m \geqslant n$, период $f_m$ равен $1/4^m$, значит $1/4^m \mid 1/4^n$, а тогда $f_m(a \pm 1/4^n) = f_m(a)$. Значит для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f(a \pm 1/4^n) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(a \pm 1/4^n) - f_i(a)$$

Заметим, что $a$ находится на отрезке монотонности функции $f_{n-1}$ длины $1/(2\cdot 4^{n-1}) = 2/4^n$, который также является отрезком монотонности каждой функции из $f_0, \ldots, f_{n-2}$. Поскольку $1/4^n$ в два раза меньше, то либо $a + 1/4^n$, либо $a - 1/4^n$ лежит на том же отрезке монотонности; пусть это будет точка $b_n$. Тогда имеем, что

$$\left|\frac{f_0(b_n) - f_0(a)}{b_n - a}\right| = \left|\frac{f_1(b_n) - f_1(a)}{b_n - a}\right| = \cdots = \left|\frac{f_{n-1}(b_n) - f_{n-1}(a)}{b_n - a}\right| = 1$$

Следовательно

$$\frac{f(b_n) - f(a)}{b_n - a} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(b_n) - f_i(a)}{b_n - a} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i(b_n) - f_i(a)}{b_n - a}$$

— целое число, совпадающее по чётности с $n$. Если $f'(a)$ определено, то $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ сходится, а значит должен сойтись и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a)}{b_n - a};$$

но это последовательность целых значений, значит с какого-то момента она должна быть тождественно равна 0, но это не так, так как нечётных членов бесконечно много в этой последовательности.

2. (пример Глеба Минаева) Рассмотрим $f_0(x) := x$. Представим её как бесконечную ломаную $\cdots \leftrightarrow (-2,-2) \leftrightarrow (-1,-1) \leftrightarrow (0,0) \leftrightarrow (1,1) \leftrightarrow (2,2) \leftrightarrow \ldots$. Далее будем получать $f_{n+1}$ из $f_n$ следующим образом.

   Тем более картиночки!!!

   $f_n$ будет некоторой бесконечной в обе стороны ломанной, при этом всегда $f_n(x) = f_n(x+1)$. Следующая функция будет получаться заменой ребра $(a_1, b_1) \leftrightarrow (a_2, b_2)$ на три ребра:

$$(a_1, b_1) \quad \longleftrightarrow \quad \left(\frac{a_1 + 2a_2}{3}, \frac{2b_1 + b_2}{3}\right) \quad \longleftrightarrow \quad \left(\frac{2a_1 + a_2}{3}, \frac{b_1 + 2b_2}{3}\right) \quad \longleftrightarrow \quad (a_2, b_2)$$

   Так мы получим $f_{n+1}$. Рассматриваемой же функцией будет $f := \lim_{n\to\infty} f_n$.

   Несложно видеть, что звено высоты $h$ каждый раз заменяется на три ребра: два высоты $2h/3$ и одно высоты $h/3$. При этом описанный прямоугольник любого ребра содержит описанные прямоугольники рёбер, на которые он был заменён, а значит, окажись точка на ребре, из его описанного прямоугольника больше не вылезет. Таким образом после функции $f_n$ разброс положений $f_i(x)$ не более $1/3^n$, поэтому поточечный предел определён.

   При этом значения в точках $k/3^m$ с некоторого момента неподвижны: после функции $f_n$ значения во всех точках $k/3^n$ не меняются. Таким образом мы имеем, что во всякой окрестности будут точки вида $k/3^n$, $(3k+1)/3^{n+1}$, $(3k+2)/3^{n+1}$ и $(k+1)/3^n$, а они ломают монотонность функции на данном интервале. Таким образом $f$ нигде не монотонна.

   Также предположим в точке $a$ есть производная. Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ пару $(p_n, q_n)$, что $p_n$ и $q_n$ — абсциссы концов звена на котором лежит $(a, f_n(a))$ в ломаной функции $f_n$ $(q_n > p_n)$. Тогда заметим, что $q_n - p_n = 1/3^n$, $f_n(p_n) = f(p_n)$, $f_n(q_n) = f(q_n)$, а тогда

$$\frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n} = \frac{f(q_n) - f(p_n)}{q_n - p_n} = \frac{f(q_n) - f(a)}{q_n - a} \cdot \frac{q_n - a}{q_n - p_n} + \frac{f(a) - f(p_n)}{a - p_n} \cdot \frac{a - p_n}{q_n - p_n}$$

Следовательно значение $\frac{f_n(q_n)-f_n(p_n)}{q_n-p_n}$ лежит на отрезке между $\frac{f(q_n)-f(a)}{q_n-a}$ и $\frac{f(p_n)-f(a)}{p_n-a}$; при этом оно является коэффициентом наклона звена $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$.

Заметим, что звено $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$ будет заменено на три, среди которых будет и $(p_{n+1}, f(p_{n+1})) \leftrightarrow (q_{n+1}, f(q_{n+1}))$. Значит коэффициент наклона $(p_{n+1}, f(p_{n+1})) \leftrightarrow (q_{n+1}, f(q_{n+1}))$ можно получить из коэффициента наклона $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$ домножением либо на 2, либо на $-1$.

Таким образом мы имеем, что последовательность

$$\left(\frac{f_n(q_n)-f_n(p_n)}{q_n-p_n}\right)_{n=0}^{\infty}$$

либо расходится по модулю, либо с некоторого момента не меняет модуль, но знакочередуется. При этом если $f'(a)$ определена, то в некоторой окрестности $a$ значение

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

несильно отличается от $f'(a)$ (чем меньше окрестность, тем меньше отличается). Но если мы будем рассматривать точки $p_n$ и $q_n$, то для одной из них (обозначим её за $x_n$) верно, что

$$\left|\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\right| \geqslant \left|\frac{f_n(q_n)-f_n(p_n)}{q_n-p_n}\right| \qquad \operatorname{sign}\left(\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{f_n(q_n)-f_n(p_n)}{q_n-p_n}\right)$$

Тогда про последовательность

$$\left(\frac{f_n(x_n)-f_n(a)}{x_n-a}\right)_{n=0}^{\infty}$$

с одной стороны можно сказать, что она сходится к $f'(a)$ (т.к. $|p_n - a|$ и $|q_n - a|$ не более $1/3^n$, а следовательно и $|x_n - a|$); с другой же стороны эта последовательность либо неограниченно растёт по модулю, либо с некоторого момента знакочередуется без уменьшения модуля, а значит навряд ли сходится — противоречие. Значит ни в какой точке $f'$ не определена.

□

# 4 Интегрирование

## 4.1 Первообразная

**Определение 33.** $g$ — *первообразная* функции $f$, если на области определения $f$ верно, что $g' = f$.

**Теорема 55.** *Если $g_1$ и $g_2$ — первообразные $f$ на отрезке $[a; b]$, то $g_1 - g_2 = \text{const}$ на том же отрезке.*

**Доказательство.** Очевидно, что $(g_1 - g_2)' = f' - f' = 0$ на отрезке $[a; b]$. Если $g_1 - g_2$ не константна, то есть две точки на отрезке $[a; b]$, в которых принимаются разные значения, а тогда по теореме Лагранжа будет точка строго между ними (а значит и на отрезке), где производная не равна нулю — противоречие. Следовательно $g_1 - g_2$ является константой. □

*Замечание* 6. Для несвязного множества утверждение неверно. Например, если областью определения $f$ будут два отрезка, то $g_1 - g_2$ будет константной на каждом отрезке, но константы могут быть различны.

**Определение 34.** Семейство первообразных функции $f$ обозначается как

$$\int f$$

**Определение 35.** *Линейная форма* — линейная однородная функция ($f(x) = \alpha x$).

**Теорема 56.**

*1.*
$$\int \alpha f = \alpha \int f + C$$

*2.*
$$\int f + g = \int f + \int g$$

*3.*
$$\int f\,dg = fg - \int g\,df$$

*4.*
$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left(\int f\right) \circ \varphi$$

**Доказательство.**

1. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int \alpha f\right)' = \alpha f = \alpha \left(\int f\right)' = \left(\alpha \int f\right)'$$

   Таким образом обе стороны отличаются на константу: её корректность гарантирует $+C$.

2. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f + g\right)' = f + g = \left(\int f\right)' + \left(\int g'\right) = \left(\int f + \int g\right)$$

   Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

3. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f\,dg\right)' = f \cdot g' = (fg)' - g \cdot f' = \left(fg - \int g\,df\right)'$$

   Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

4. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\right)' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \left(\left(\int f\right) \circ \varphi\right)'$$

   Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

□

## 4.2 Суммы Дарбу и интеграл Римана

**Определение 36.** *Разбиение* отрезка $[a;b]$ — такое семейство $\Sigma := \{I_k\}_{k=1}^n$ отрезков (ненулевой длины), что $[a;b] = \bigcup_{k=1}^n I_k$, и все отрезки из $\Sigma$ попарно пересекаются не более, чем по одной точке.

Пусть дана функция $f : E \to \mathbb{R}$, где $E \supseteq [a;b]$, и некоторое разбиение $\Sigma$ отрезка $[a;b]$. Тогда *верхняя и нижняя суммы Дарбу функции $f$ при разбиении* $\Sigma$ есть выражения

$$S^+(f,\Sigma) := \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_{x\in I} f(x) \qquad S^-(f,\Sigma) := \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_{x\in I} f(x)$$

соответственно. (При этом sup и inf могут принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ соответственно; и в таких случаях соответствующие суммы Дарбу тоже будут принимать значения $\pm\infty$.)

*Пример* 2.

- Пусть $f(x) := x^\alpha$, $\alpha > 0$, $[a;b] := [0;1]$, а $\Sigma := \{[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]\}_{k=1}^n$. Тогда

$$S^+(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_{x\in I} f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

$$S^-(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_{x\in I} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

- Пусть $f$ — функция Дирихле, отрезок $[a;b]$ — любой, и его разбиение $\Sigma$ — любое. Тогда

$$S^+(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_{x\in I} f(x) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot 1 = b - a$$

$$S^-(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_{x\in I} f(x) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot 0 = 0$$

**Лемма 57.** *Пусть даны функция $f$, отрезка $[a;b]$ и его разбиение $\Sigma$. Назовём его* подразбиением *семейство отрезков $\Sigma'$, которое является объединением разбиений отрезков из $\Sigma$ (иначе говоря, множество концов отрезков $\Sigma$ является подмножеством концов отрезков $\Sigma'$). Тогда верны неравенства*

$$S^+(f,\Sigma) \geqslant S^+(f,\Sigma') \qquad S^-(f,\Sigma) \leqslant S^-(f,\Sigma')$$

**Доказательство.** Покажем это для верхних сумм Дарбу; для нижних доказательство аналогично.

Пусть $\{\Lambda_I\}_{I\in\Sigma}$ — набор разбиений каждого отрезка $I$ из $\Sigma$, что $\Sigma' = \bigcup_{I\in\Sigma} \Lambda_I$. Тогда мы имеем, что для всяких $I \in \Sigma$ и $J \in \Lambda_I$ верно, что

$$\sup_{x\in I} f(x) \geqslant \sup_{x\in J} f(x)$$

Следовательно

$$\sum_{J\in\Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x\in J} f(x) \leqslant \sum_{J\in\Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x\in I} f(x) = \left(\sum_{J\in\Lambda_I} |J|\right) \cdot \sup_{x\in I} f(x) = |I| \cdot \sup_{x\in I} f(x)$$

Значит, суммируя обе части по $\Sigma$, получаем, что

$$S^+(f,\Sigma') = \sum_{J\in\Sigma'} |J| \cdot \sup_{x\in J} f(x) = \sum_{I\in\Sigma} \sum_{J\in\Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x\in J} f(x) \leqslant \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_{x\in I} f(x) = S^+(f,\Sigma)$$

□

**Лемма 58.** *Пусть даны функция $f$, отрезок $[a;b]$, его разбиения $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$. Тогда*

$$S^+(f, \Sigma_1) \geqslant S^-(f, \Sigma_2)$$

**Доказательство.** Рассмотрим

$$\Sigma := \{I \cap J \mid I \in \Sigma_1 \wedge J \in \Sigma_2 \wedge |I \cap J| > 1\}$$

— (минимальное) подразбиение $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$. Тогда верно, что

$$S^+(f, \Sigma_1) \geqslant S^+(f, \Sigma) \geqslant S^-(f, \Sigma) \geqslant S^-(f, \Sigma_2)$$

□

**Следствие 58.1.** *Пусть фиксированы функция $f$ и отрезок $[a;b]$. Рассмотрим множества*

$$D^+ := \{S^+(f, \Sigma) \mid \Sigma \text{ — разбиение } [a;b]\} \qquad D^- := \{S^-(f, \Sigma) \mid \Sigma \text{ — разбиение } [a;b]\}$$

*Тогда $D^+ \geqslant D^-$.*

**Определение 37.** Пусть фиксированы функция $f$ и отрезок $[a;b]$, разбиения которого рассматриваются. Если

$$\sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma) = \inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) = S,$$

то тогда $f$ называется *интегрируемой по Риману*, а $S$ называют *интегралом Римана функции $f$ на отрезке* $[a;b]$. Обозначение:

$$\int_a^b f(x)dx := S$$

**Лемма 59.** *Пусть даны функция $f$ и отрезок $[a;b]$. Тогда если для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиение $\Sigma$ отрезка $[a;b]$, что*

$$\forall I \in \Sigma \quad \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon$$

*то $f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$.*

**Доказательство.** Обозначим для каждого такого $\varepsilon$ разбиение из условия за $\Sigma_\varepsilon$. Тогда мы имеем, что

$$S^+(f, \Sigma_\varepsilon) - S^-(f, \Sigma_\varepsilon) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot (\sup_I f - \inf_I f) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon \cdot \sum_{I \in \Sigma} |I| = \varepsilon \cdot (b - a)$$

Т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ верно, что

$$\inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) - \sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma) \leqslant S^+(f, \Sigma_{\varepsilon/(b-a)}) - S^-(f, \Sigma_{\varepsilon/(b-a)}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b - a) = \varepsilon$$

Следовательно

$$\inf_{\Sigma} S^+(f, \Sigma) = \sup_{\Sigma} S^-(f, \Sigma),$$

что значит, что $f$ интегрируема по Риману. □

**Лемма 60.** *Пусть даны функция $f$ и отрезок $[a;b]$. Тогда $f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всякого разбиение $\Sigma$ отрезка $[a;b]$, где $\forall I \in \Sigma\ |I| < \delta$, верно, что*

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon$$

**Доказательство.**

($\Rightarrow$) Пусть $f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ отрезка $[a;b]$, что

$$\{S^+(f,\Sigma_1); S^-(f,\Sigma_2)\} \subseteq U_{\varepsilon/4}\left(\int_a^b f(x)dx\right)$$

Пусть $\Sigma$ — общее подразбиение $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ (например, минимальное). Тогда

$$S^+(f,\Sigma_1) \geqslant S^+(f,\Sigma) \geqslant S^-(f,\Sigma) \geqslant S^-(f,\Sigma_2)$$

Следовательно,

$$\{S^+(f,\Sigma); S^-(f,\Sigma)\} \subseteq U_{\varepsilon/4}\left(\int_a^b f(x)dx\right)$$

Заметим, что в таком случае $\sup_{[a;b]} f$ и $\inf_{[a;b]} f$ ограничены (равны вещественным значениям, а не $\pm\infty$). Поэтому $A := \operatorname{osc}_{[a;b]} f$ является вещественной величиной. Определим также $L := \min_\Sigma |I|$.

Пусть $\Lambda$ — некоторое разбиение $[a;b]$, что длина всякого отрезка не больше $L \cdot \alpha$, где

$$\alpha := \min\left(1, \frac{\varepsilon \cdot |\Sigma|}{2 \cdot A \cdot L}\right) \in (0;1].$$

Тогда мы имеем, что всякий отрезок $I$ из $\Lambda$ либо является подотрезком некоторого отрезка $J_I$ из $\Sigma$ (обозначим множество таких $I$ за $\Gamma$), либо является подотрезком объединения двух соседних отрезков $K_1$ и $K_2$ из $\Sigma$ и содержит их общую границу (обозначим множество таких $I$ за $\Theta$). В случае $I$ и $J$ мы имеем, что $\operatorname{osc}_I f \leqslant \operatorname{osc}_J f$; в случае $I$, $K_1$ и $K_2$ мы имеем, что $\operatorname{osc}_I f \leqslant \operatorname{osc}_{K_1 \cup K_2} f \leqslant A$. Следовательно, используя только что оговоренные оценки,

$$\begin{aligned}
&\sum_{I \in \Lambda} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f \\
&= \sum_{I \in \Gamma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f + \sum_{I \in \Theta} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f \\
&\leqslant \sum_{I \in \Gamma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_{J_I} f + \sum_{I \in \Theta} |I| \cdot \operatorname*{osc}_{[a;b]} f \\
&\leqslant \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f + A \cdot \sum_{I \in \Theta} |I| \\
&\leqslant \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f + A \cdot L \cdot \alpha \cdot |\Theta| \\
&\leqslant S^+(f,\Sigma) - S^-(f,\Sigma) + A \cdot L \cdot \alpha \cdot |\Sigma| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Таким образом $\delta := L \cdot \alpha$.

($\Leftarrow$) Пусть для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всякого разбиение $\Sigma$ отрезка $[a;b]$, где $\forall I \in \Sigma\ |I| < \delta$, верно, что

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon$$

Тогда

$$S^+(f,\Sigma) - S^-(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot (\sup_I f - \inf_I f) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \varepsilon$$

Т.е. для всякого $\varepsilon > 0$

$$\inf_\Sigma S^+(f,\Sigma) - \sup_\Sigma S^-(f,\Sigma) < \varepsilon$$

Следовательно

$$\inf_\Sigma S^+(f,\Sigma) = \sup_\Sigma S^-(f,\Sigma)$$

т.е. $f$ интегрируема на $[a;b]$ по Риману.

□

**Теорема 61.** *Пусть $f$ — непрерывная на $[a;b]$ функция. Тогда она интегрируема по Риману на $[a;b]$.*

**Доказательство.** Поскольку $f$ непрерывна на компакте $[a;b]$, то она равномерно непрерывна, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 :\ \forall x \in [a;b] \qquad f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

Для каждого такого $\varepsilon$ получаемое $\delta$ обозначим за $\delta_\varepsilon$. Тогда для всякого подотрезка $I$ отрезка $[a;b]$ длины менее $\delta_{\varepsilon/2}$ верно, что $\operatorname{osc}_I f < \varepsilon$. Следовательно для любого разбиения $\Sigma$ с шагом не более $\delta_{\varepsilon/2}$ (т.е. $\forall I \in \Sigma\ |I| < \delta_{\varepsilon/2}$) мы имеем, что

$$\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < [a;b] \cdot \varepsilon$$

Поэтому $f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$. □

**Теорема 62.**

1. $$\int_a^b \lambda dx = \lambda(b-a)$$

2. *Если $f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, то*
$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

3. *Если $f$ и $g$ интегрируемы по Риману на $[a;b]$, то*
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

4. *Если $f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, то*
$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

5. *$f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$ и $[b;c]$ тогда и только тогда, когда на $[c;a]$, и во всех случаях*
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

**Доказательство.**

1. Очевидно, что для всякого разбиения $\Sigma$ верно, что $S^+(f,\Sigma) = S^-(f,\Sigma) = \lambda(b-a)$, следовательно и интеграл Римана равен $\lambda(b-a)$.

2. Очевидно, что для всякого разбиения $\Sigma$ верно, что $S^-(f,\Sigma) \geqslant 0$, следовательно, если интеграл Римана определён, то он неотрицателен.

3. Очевидно, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$, что

$$\sum_{I\in\Sigma_1} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad \sum_{I\in\Sigma_2} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I g < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим любое подразбиение $\Sigma$ разбиений $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$. Тогда

$$\begin{aligned} &S^+(f+g,\Sigma) \\ &= \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I (f+g) \\ &\leqslant \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f + \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I g \\ &\leqslant \sum_{I\in\Sigma_1} |I| \cdot \sup_I f + \sum_{I\in\Sigma_2} |I| \cdot \sup_I g \\ &= S^+(f,\Sigma_1) + S^+(g,\Sigma_2) \end{aligned}$$

Аналогично мы имеем, что $S^-(f+g,\Sigma) \geqslant S^-(f,\Sigma_1) + S^-(g,\Sigma_2)$. Таким образом отметим две важные строки неравенств.

$$S^+(f,\Sigma_1) + S^+(g,\Sigma_2) \geqslant S^+(f+g,\Sigma) \geqslant S^-(f+g,\Sigma) \geqslant S^-(f,\Sigma_1) + S^-(g,\Sigma_2)$$
$$S^+(f,\Sigma_1) + S^+(g,\Sigma_2) \geqslant \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \geqslant S^-(f,\Sigma_1) + S^-(g,\Sigma_2)$$

Так мы получаем, что $S^+(f+g,\Sigma)$, $S^-(f+g,\Sigma)$ и $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ — три числа с отрезка

$$\left[S^-(f,\Sigma_1) + S^-(g,\Sigma_2); S^+(f,\Sigma_1) + S^+(g,\Sigma_2)\right],$$

длина которого меньше $\varepsilon$. Следовательно $f+g$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, и интеграл равен

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

4. Докажем сначала для $\lambda \geqslant 0$. Для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиение $\Sigma$ отрезка $[a;b]$, что

$$\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon$$

Также имеем, что

$$S^+(\lambda f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I \lambda f = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \lambda \cdot \sup_I f = \lambda \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f = \lambda S^+(f,\Sigma)$$
$$S^-(\lambda f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_I \lambda f = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \lambda \cdot \inf_I f = \lambda \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_I f = \lambda S^-(f,\Sigma)$$

Следовательно

$$S^+(\lambda f,\Sigma) = \lambda S^+(f,\Sigma) \geqslant \lambda \int_a^b f(x)dx \geqslant \lambda S^-(f,\Sigma) = S^-(\lambda f,\Sigma)$$
$$S^+(\lambda f,\Sigma) - S^-(\lambda f,\Sigma) < \lambda\varepsilon$$

Таким образом интеграл $\lambda f$ по Риману на $[a;b]$ определён и равен $\lambda \int_a^b f(x)dx$.

Теперь покажем для $\lambda = -1$. Заметим, что

$$S^+(-f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I -f = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot -\inf_I f = -\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_I f = -S^-(f,\Sigma)$$
$$S^-(-f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_I -f = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot -\sup_I f = -\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f = -S^+(f,\Sigma)$$

Следовательно

$$S^+(-f,\Sigma) = -S^-(f,\Sigma) \geqslant -\int_a^b f(x)dx \geqslant -S^+(f,\Sigma) = S^-(-f,\Sigma)$$
$$S^+(-f,\Sigma) - S^-(-f,\Sigma) < \varepsilon$$

Таким образом интеграл $-f$ по Риману на $[a;b]$ определён и равен $-\int_a^b f(x)dx$.

Используя доказанные утверждения получаем, что для всякого $\lambda$ верно, что

$$\int_a^b \lambda f(x)dx$$
$$= \int_a^b \operatorname{sign}(\lambda) \cdot |\lambda| f(x)dx$$
$$= \operatorname{sign}(\lambda) \int_a^b |\lambda| f(x)dx$$
$$= \operatorname{sign}(\lambda)|\lambda| \int_a^b f(x)dx$$
$$= \lambda \int_a^b f(x)dx$$

5. Если $f$ интегрируема по Риману на некотором отрезке $I$, то $\sup_I f$ и $\inf_I f$ равны некоторым вещественным значениям (не $\pm\infty$).

   Таким образом пусть $f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$ и $[b;c]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения $\Sigma_L$ отрезка $[a;b]$ и $\Sigma_R$ отрезка $[b;c]$, что

$$\sum_{I\in\Sigma_L} |I| \operatorname*{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \sum_{I\in\Sigma_R} |I| \operatorname*{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Следовательно, если определить $\Sigma := \Sigma_L \cup \Sigma_R$,

$$S^+(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \sup_I f = \sum_{I\in\Sigma_L} |I| \sup_I f + \sum_{I\in\Sigma_R} |I| \sup_I f \geqslant \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

   По аналогии получаем, что

$$S^+(f,\Sigma) \geqslant \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \geqslant S^-(f,\Sigma)$$

   При этом

$$S^+(f,\Sigma) - S^-(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \operatorname*{osc}_I f = \sum_{I\in\Sigma_L} |I| \operatorname*{osc}_I f + \sum_{I\in\Sigma_R} |I| \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon$$

Таким образом $f$ интегрируема по Риману на $[a;c]$, а интеграл равен $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$. Пусть теперь $f$ интегрируема на $[a;c]$. Тогда для всякого разбиения $\Sigma$ отрезка $[a;c]$ мы можем рассмотреть

$$\Sigma_L := \{I \cap [a;b] \mid I \in \Sigma\}$$

и тогда

$$\sum_{I \in \Sigma_L} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f$$

Следовательно есть разбиения со сколь угодно маленькой осцилляцией $f$ на них, а значит $f$ интегрируема на $[a;b]$; аналогично и на $[b;c]$. А по предыдущим рассуждениям достигается равенство в тождестве интегралов.

$\square$

**Теорема 63.** *Пусть дана функция $f$, а $M = \sup_{[a;b]} |f|$. Тогда*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant M(b-a)$$

**Доказательство.** Очевидно, что при разбиении $\Sigma := \{[a;b]\}$

$$S^+(f,\Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f = (b-a) \cdot \sup_{[a;b]} f$$
$$S^-(f,\Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I f = (b-a) \cdot \inf_{[a;b]} f$$

Следовательно

$$M(b-a) \geqslant (b-a)\sup_{[a;b]} f = S^+(f,\Sigma) \geqslant \int_a^b f(x)dx \geqslant S^-(f,\Sigma) = (b-a)\sup_{[a;b]} f \geqslant -M(b-a)$$

откуда следует требуемое. $\square$

**Теорема 64.** *Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

*является первообразной $f$.*

**Доказательство.** Рассмотрим какие-то $x$ и $y$, что $a \leqslant x < y \leqslant b$. Тогда

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt$$

Следовательно, рассматривая $\Sigma := \{[x;y]\}$,

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_I f \leqslant F(y) - F(x) \leqslant \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_I f$$
$$(y-x) \cdot \inf_{[x;y]} f \leqslant F(y) - F(x) \leqslant (y-x) \cdot \sup_{[x;y]} f$$
$$\inf_{[x;y]} f \leqslant \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \leqslant \sup_{[x;y]} f$$

Немного меняя обозначения, получаем, что для всякого $\varepsilon \in [a-x; b-x] \setminus \{0\}$

$$\inf_{U_{|\varepsilon|}(x)} f \leqslant \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \leqslant \sup_{U_{|\varepsilon|}(x)} f$$

Заметим, что по непрерывности $f$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf_{U_\varepsilon(x)} f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{U_\varepsilon(x)} f = f(x)$$

Следовательно

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} = f(x)$$

Иначе говоря $F'(x) = f(x)$. Таким образом $F' = f$. □

**Следствие 64.1** (формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть $F$ — первообразная непрерывной на $[a;b]$ функции $f$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Доказательство.** Заметим, что $G(x) := \int_a^x f(t)dt$ — первообразная $f$. Следовательно $G(x) - F(x) = C$ на $[a;b]$. Значит

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) = G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

□

**Теорема 65.** *Пусть $(f_n)_{n=0}^\infty$ — последовательность интегрируемых по Риману на $[a;b]$ функций — равномерно сходится к $f$. Тогда $f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, и*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

**Доказательство.** Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для всяких $n, m > N$ верно, что

$$|f_n - f_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)};$$

следовательно для всякого $n > N$ верно, что

$$|f - f_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

При этом существует такое разбиение $\Sigma$ отрезка $[a;b]$, что

$$S^+(f_{N+1}, \Sigma) - S^-(f_{N+1}, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом для всякого $n > N$ верно, что

$$\begin{aligned} &S^+(f_n, \Sigma) \\ &\quad = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f_n \leqslant \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \left( \frac{\varepsilon}{3(b-a)} + \sup_I f_{N+1} \right) = \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f_{N+1} \\ &\quad = S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3}; \end{aligned}$$

аналогично $S^-(f_n,\Sigma) \geqslant S^-(f_{N+1},\Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$. Аналогично данные утверждения верны и для $f$ (вместо $f_n$).

Заметим, что

$$S^+(f_{N+1},\Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} \geqslant S^+(f_n,\Sigma) \geqslant \int_a^b f_n(x)dx \geqslant S^-(f_n,\Sigma) \geqslant S^-(f_{N+1},\Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$$
$$S^+(f_{N+1},\Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} \geqslant S^+(f,\Sigma) \geqslant S^-(f,\Sigma) \geqslant S^-(f_{N+1},\Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$$

Таким образом

$$S^+(f,\Sigma) - S^-(f,\Sigma) < \varepsilon,$$

следовательно $f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$. Таким образом мы имеем, что

$$S^+(f_{N+1},\Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} \geqslant \int_a^b f_n(x)dx \geqslant S^-(f_{N+1},\Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$$
$$S^+(f_{N+1},\Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} \geqslant \int_a^b f(x)dx \geqslant S^-(f_{N+1},\Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$$

т.е. для всех $n > N$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Это значит, что

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

□

**Лемма 66.** *Если $f$ и $g$ интегрируемы по Риману на $[a;b]$, то и $f \cdot g$.*

**Доказательство.** Заметим, что, поскольку $f$ и $g$ интегрируемы по Риману, есть такие константы $C_f > 0$ и $C_g > 0$, что $|f| \leqslant C_f$ и $|g| \geqslant C_g$. Следовательно для всяких $x, y \in [a;b]$

$$\begin{aligned}&|f(x)g(x) - f(y)g(y)|\\ &\qquad \leqslant |f(x)g(x) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(y)g(y)|\\ &\qquad\qquad \leqslant C_g|f(x) - f(y)| + C_f|g(x) - g(y)|\end{aligned}$$

Значит для всякого отрезка $I$ верно, что

$$\operatorname*{osc}_I f \cdot g \leqslant C_g \operatorname*{osc}_I f + C_f \operatorname*{osc}_I g$$

Следовательно для всякого разбиения $\Sigma$ отрезка $[a;b]$

$$\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f \cdot g \leqslant C_g \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f + C_f \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I g$$

Вспомним, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения $\Sigma_f$ и $\Sigma_g$ отрезка $[a;b]$, что

$$\sum_{I\in\Sigma_f} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2C_g} \qquad\qquad \sum_{I\in\Sigma_f} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I g < \frac{\varepsilon}{2C_f}$$

Рассмотрим общее подразбиение $\Sigma$ разбиений $\Sigma_f$ и $\Sigma_g$. Для него верны предыдущие предыдущие неравенства. Следовательно

$$\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f \cdot g < C_g \frac{\varepsilon}{2C_g} + C_f \frac{\varepsilon}{2C_f} = \varepsilon$$

Поэтому $f \cdot g$ интегрируема по Риману на $[a;b]$. □

## 4.3 У чего есть выражаемая первообразная?

**Лемма 67.**

1. $$\int 0 = C$$

2. $$\int a_0 + \dots + a_n x^n = C + a_0 x + \dots + a_n x^{n+1}$$

3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x > 0$
$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

4. $\forall x > 0$
$$\int \frac{1}{x} = \ln(x) + C$$

5. $$\int e^x = e^x + C$$

6. $$\int \sin(x) = -\cos(x) + C$$
$$\int \cos(x) = \sin(x) + C$$

7. $$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

8. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

**Теорема 68.** *Следующие виды функций имеют выражаемую первообразную:*

1. *рациональные функции;*
2. *рациональные функции от* $\sin$ *и* $\cos$*;*
3. *рациональные функции от* $\sinh$ *и* $\cosh$*;*
4. *рациональные функции от* $x$ *и* $\sqrt{ax^2+bx+c}$*, где* $a \neq 0$.

**Доказательство.**

1. Каждая рациональная функция представляется в виде суммы полиномов, членов вида $\frac{k}{(x+a)^n}$ и членов вида $\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$. Покажем, что каждый из них имеет выражаемую первообразную.

   - Первообразная многочлена очевидна.
   - $$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a) + C$$
   - Для всякого $n > 1$
   $$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$$
   - $$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{tg}^{-1}(x)$$
   - $$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$
   - Для всякого $n > 1$
   $$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}}$$

- Заметим, что

$$\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)' = \frac{1}{(x^2+1)^n} - 2n\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{2n}{(x^2+1)^{n+1}} - \frac{2n-1}{(x^2+1)^n}$$

Следовательно

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

Таким образом несложно понять по индукции, что $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ для $n > 1$ есть некоторая сумма рациональных функций и $\operatorname{tg}^{-1}$.

- Линейными заменами задача нахождения первообразных у $\frac{1}{(x+a)^n}$ и $\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$ сводится к нахождению первообразных $\frac{1}{x^n}$, $\frac{1}{(x^2+1)^n}$ и $\frac{x}{(x^2+1)^n}$.

2. Заметим, что

$$\sin(x) = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}(x/2)^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-\operatorname{tg}(x/2)^2}{1+\operatorname{tg}(x/2)^2} \qquad dx = \frac{2d(\operatorname{tg}(x/2))}{1+\operatorname{tg}(x/2)^2}$$

Следовательно задача сводится к нахождению первообразной рациональной функции при помощи подстановки $t := \operatorname{tg}(x)$.

3. С одной стороны это можно свести к предыдущей задаче заменой $t := ix$. С другой стороны можно заметить, что

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad dx = \frac{d(e^x)}{e^x}$$

Следовательно задача сводится к нахождению первообразной рациональной функции при помощи подстановки $t := e^x$.

4. Линейными подстановками можно свести задачу к нахождению первообразной рациональной функции от $y$ и $\sqrt{\pm y^2 \pm 1}$ или только от $y$.

   - Случай рациональной функции только от $y$ уже был разобран.
   - Если нам дана рациональная функция от $y$ и $\sqrt{1-y^2}$, то заменой $t := \sin^{-1}(y)$ она сводится к рациональной функции от sin и cos.
   - Если нам дана рациональная функция от $y$ и $\sqrt{y^2-1}$, то заменой $t := \cosh^{-1}(y)$ она сводится к рациональной функции от sinh и cosh.
   - Если нам дана рациональная функция от $y$ и $\sqrt{1+y^2}$, то заменой $t := \sinh^{-1}(y)$ она сводится к рациональной функции от sinh и cosh.

□

# 5 Логарифм? Полезности?? Что???

**Теорема 69.** *Пусть дана функция $\varphi : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, что*

- $\forall a, b \in (0; +\infty) \quad \varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$
- *$\varphi$ монотонна.*

*Тогда верны следующие утверждения:*

1. $\varphi(1) = 0$;
2. $\forall a \in (0; +\infty), n \in \mathbb{N} \quad \varphi(a^n) = n\varphi(a)$;
3. $\forall a \in (0; +\infty) \quad \varphi(a^{-1}) = -\varphi(a)$;
4. $\forall a \in (0; +\infty), q \in \mathbb{Q} \quad \varphi(a^q) = q\varphi(a)$;
5. $\varphi$ *непрерывна;*
6. $\varphi$ *бесконечно дифференцируема;*
7. $\varphi'(x) = \frac{C}{x}$ *для некоторого* $C \in \mathbb{R}$;
8. *все такие* $\phi$ *имеют вид* $\int_1^x \frac{Cdt}{t}$ *для некоторого* $C > 0$ *и наоборот: любая такая функция удовлетворяет условиям на* $\phi$.

**Доказательство.**

1. $$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) - \varphi(1) = \varphi(1) - \varphi(1) = 0.$$

2. Докажем по индукции по $n$. База при $n = 0$ и $n = 1$ очевидна. Весь шаг:
$$\varphi(a^{n+1}) = \varphi(a^n) + \varphi(a) = n\varphi(a) + \varphi(a) = (n+1)\varphi(a).$$

3. $$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a \cdot a^{-1}) - \varphi(a) = \varphi(1) - \varphi(a) = -\varphi(a)$$

4. Пусть $q = \frac{kn}{m}$, где $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, а $k = \pm 1$. Тогда
$$m\varphi(a^q) = \varphi(a^{mq}) = \varphi(a^{kn}) = k\varphi(a^n) = kn\varphi(a) = qm\varphi(a)$$
Следовательно
$$\varphi(a^q) = q\varphi(a)$$

5. Заметим, что $\lim_{x \to 1^+} \varphi(x)$ в связи с монотонностью и ограниченностью (например, значением $\varphi(1/2)$) функции $\varphi$ определён, значит равен некоторому $b$. Тогда
$$2b = \lim_{x \to 1^+} 2\varphi(x) = \lim_{x \to 1^+} \varphi(x^2) = \lim_{y \to 1^+} \varphi(y) = b$$
значит $b = 0$. Следовательно
$$\lim_{x \to 1^-} \varphi(x) = -\lim_{x \to 1^-} \varphi(x^{-1}) = -\lim_{y \to 1^+} \varphi(y) = 0$$
Таким образом $\varphi$ непрерывна в 1. Следовательно
$$\lim_{x \to y} \varphi(x) = \varphi(y) + \lim_{x \to y} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \varphi(y) + \lim_{\alpha \to 1} \varphi(\alpha)$$
т.е. $\varphi$ непрерывна во всех точках $(0; +\infty)$.

6. Рассмотрим
$$\Phi := (0; +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \varphi(t)dt$$
Тогда мы имеем, что $\Phi$ — первообразная, поскольку $\varphi$ непрерывна. А тогда если $\varphi$ имеет $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ производных, то $\Phi$ имеет $n+1$ производную. Заметим, что
$$\Phi(2x) - \Phi(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)dt = x\int_x^{2x} \varphi\left(\frac{t}{x}\right) d\frac{t}{x} + x\int_x^{2x} \varphi(x) d\frac{t}{x} = Cx + \varphi(x)x$$
где
$$C := \int_1^2 \varphi(t)dt$$
Следовательно
$$\varphi(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$$
Таким образом, если $\Phi$ имеет $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ производных, то $\varphi$ тоже. Значит $\Phi$ и $\phi$ бесконечно дифференцируемы.

7. Пусть фиксировано некоторое $y > 0$. Следовательно
$$y\varphi'(xy) = (\varphi(xy))' = (\varphi(x) + \varphi(y))' = \varphi'(x)$$
а значит, если подставить $y = x^{-1}$
$$\varphi'(x) = \frac{\varphi'(1)}{x}$$
Таким образом определяя $C := \varphi'(1)$ имеем, что
$$\varphi'(x) = \frac{C}{x}$$

8. Действительно, если есть некоторое $\phi$, то $\phi$ и $\int_1^x \frac{\phi'(1)dt}{t}$ являются первообразными $\frac{\phi'(1)}{x}$, значит отличаются на константу. При этом в 1 они обе равны 0, значит функции совпадают.

   Теперь же покажем, что $\psi(x) := \int_1^x \frac{Cdt}{t}$ является корнем функционального уравнения.

   - Поскольку $\frac{C}{x}$ — функция одного знака, то $\psi$ монотонна.
   - $$\begin{aligned} \psi(xy) &= \int_1^{xy} \frac{Cdt}{t} & &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_x^{xy} \frac{Cdt}{t} \\ &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_x^{xy} \frac{Cd(t/x)}{(t/x)} & &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_1^y \frac{Cds}{s} & &= \psi(x) + \psi(y) \end{aligned}$$

□

**Определение 38.** *Натуральный логарифм* — функция
$$\ln : (0; +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$$
*Экспонента* — функция
$$\exp : \mathbb{R} \to (0; +\infty), x \mapsto \ln^{-1}(x)$$

**Теорема 70.**

1. exp *корректно определена;*

2. exp *непрерывна;*

3. exp *бесконечно дифференцируема, и каждая производная* exp *равна* exp*;*

4. $\exp(0) = 1$*;*

5. $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$*;*

6. $$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

**Доказательство.**

1. Поскольку ln монотонна, то всякое значение из области значений ln — всё $\mathbb{R}$ — принимается единожды. Следовательно exp корректно определена.

2. Поскольку всякая монотонная биекция из интервала в интервал является непрерывной функцией, то и exp непрерывна на всяком интервале.

3. По свойству дифференцирования
$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x)$$
Таким образом exp дифференцируема раз, и при дифференцировании не меняется. Следовательно exp бесконечно дифференцируема.

4. Следует из того, что $\ln(1) = 0$.

5. Следует из того, что $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, подстановкой $x := \ln^{-1}(a)$ и $y := \ln^{-1}(b)$.

6. Вспомним, что по теореме 49 для всякого $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ есть $\xi_n \in (0; x)$, что
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \frac{\exp^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!}$$
Вспомним также, что
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \overset{\text{def}}{=} \lim \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)_{n=0}^{\infty}$$
Чтобы показать, что предел этой последовательности реально совпадает с $\exp(x)$, покажем, что
$$\lim \left( \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)_{n=0}^{\infty} = 0$$
Действительно,
$$\left( \left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \right)_{n=0}^{\infty} = \left( \left| \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \right)_{n=0}^{\infty} \leqslant \exp(|x|) \left( \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right)_{n=0}^{\infty}$$

Пусть $N = \lceil 2|x| \rceil$. Тогда для всякого $n \geqslant N$ имеем, что

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^N}{N!} \prod_{k=N+1}^{n+1} \frac{|x|}{k} < \frac{|x|^N}{N!} \prod_{k=N+1}^{n+1} \frac{1}{2} = \frac{|x|^N \cdot 2^{N-1}}{N!} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Следовательно, с момента $N$ последовательность

$$\left( \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right)_{n=0}^{\infty}$$

сходится к 0 немедленнее, чем геометрическая прогрессия, а тогда и

$$\lim \left( \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)_{n=0}^{\infty} = 0$$

□

**Теорема 71.** *1.* $(a^x)' = \ln(a)a^x$ *2.* $(x^a)' = ax^{a-1}$

**Доказательство.**

1. $$(a^x)' = \exp(x\ln(a))' = (x\ln(a))'a^x = \ln(a)a^x$$

2. $$(x^a)' = \exp(a\ln(x))' = (a\ln(x))'x^a = \frac{a}{x}x^a = ax^{a-1}$$

□

**Теорема 72.** *Пусть $f : (a; b) \to \mathbb{R}$, $f^{(1)}$, ..., $f^{(n+1)}$ определены на $(t - \delta; t + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда для всякого $x \in U_\delta(t)$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{1}{n!}\int_t^x f^{(n+1)}(s)(x-s)^n ds$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$g(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

Тогда мы имеем, что $g(t) = g'(t) = g^{(2)}(t) = \cdots = g^{(n)}(t) = 0$, а $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$. Тогда нужно показать, что

$$g(x) = \frac{1}{n!}\int_t^x f^{(n+1)}(s)(x-s)^n ds$$

Докажем это по индукции по $n$.

**База.** $n = 0$. Тогда

$$g(x) = g(t) + \int_t^x g'(s)ds = \frac{1}{n!}\int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^n ds$$

**Шаг.** Пусть утверждение верно для $n$ докажем для $n+1$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{n!}\int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^n ds \\ &= \left.\frac{-g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)}}{(n+1)!}\right|_x^t + \frac{1}{(n+1)!}\int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)} ds \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)} ds \end{aligned}$$

$\square$

## 5.1 Формулы Валлиса и Стирлинга

**Теорема 73** (формула Валлиса)**.**

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\dots.$$

**Доказательство.** Для всякого $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ определим

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx$$

Заметим, что $\sin(x)^{n+1} < \sin(x)^n$ на $(0; \frac{\pi}{2})$, следовательно $I_n > I_{n+1}$. Также

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n+2} dx \\ &= -\sin(x)^{n+1}\cos(x)\big|_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin(x)^n\cos(x)^2 dx \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin(x)^n(1-\sin(x)^2)dx \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin(x)^n dx - (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin(x)^{n+2}dx \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \end{aligned}$$

Следовательно $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. При этом понятно, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$, а $I_1 = 1$. Таким образом для всякого $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 &&= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\dots\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1 &&= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{aligned}$$

Вспомним, что $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$. Следовательно

$$\begin{gathered} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \\ \frac{(2n)!!\cdot(2n)!!}{(2n-1)!!\cdot(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2} < \frac{(2n)!!\cdot(2n-2)!!}{(2n-1)!!\cdot(2n-1)!!} \\ \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n} \end{gathered}$$

Заметим, что в последнем неравенстве отношение значений слева и справа сходится к 1, значит

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

$\square$

**Теорема 74** (формула Стирлинга)**.**

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**Доказательство.** Вспомним, что для $x\in(-1;1)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots$$

Следовательно

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\cdots=2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\right)$$

Пусть $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Подставим $x=\frac{1}{2n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)&=\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\\&=1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\in\left(1;1+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}\right)=\left(1;1+\frac{1}{12n(n+1)}\right)\end{aligned}$$

Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}:=\left(\frac{n!\cdot e^n}{n^{n+1/2}}\right)_{n=1}^{\infty}$. Заметим, что

$$\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=\ln\left(\frac{(n+1)\cdot e}{(n+1)^{n+3/2}/n^{n+1/2}}\right)=\ln\left(\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}}\right)=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Таким образом $\ln(x_{n+1}/x_n)\in(0;\frac{-1}{12n(n+1)})$. Следовательно $\ln(x_n)<\ln(x_1)$ и

$$\begin{aligned}\ln(x_n)-\ln(x_1)&>\frac{-1}{12n(n-1)}+\frac{-1}{12(n-1)(n-2)}+\cdots+\frac{-1}{12\cdot2\cdot1}\\&=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)\\&=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-1\right)\end{aligned}$$

Значит $\lim_{n\to\infty}\ln(x_n)\geqslant\frac{-1}{12}$ (предел убывающей ограниченной последовательности), а тогда $\lim_{n\to\infty}x_n$ определён и равен $\alpha>0$. Значит

$$n!\sim\alpha\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Теперь нужно показать, что $\alpha=\sqrt{2\pi}$. По формуле Валлиса

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}&\sim2\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} &&=2\frac{((2n)!!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} &&=2\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\\&\sim2^{2n+1}\frac{\alpha^2n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\alpha\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}} &&=\frac{2^{2n+1}\alpha^2n}{\alpha(2n)2^{2n}}=\alpha\end{aligned}$$

Таким образом $\alpha=\sqrt{2\pi}$. $\square$

*Замечание 7.* Из оценки $\ln(x_n) - \ln(x_1) > \frac{1}{12}(\frac{1}{n} - 1)$ следует, что

$$\ln(x_n) - \ln(\alpha) = \lim_{m\to\infty} \ln(x_n) - \ln(x_m) = \sum_{k=n}^{\infty} \ln(x_k) - \ln(x_{k+1})$$
$$< \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{12k(k+1)} = \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{12n}$$

Таким образом $x_n = \alpha(1 + O(\frac{1}{n}))$. А значит

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

**Лемма 75.** *Пусть дана функция $f \geqslant 0$, невозрастающая на $[0; +\infty)$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда $\int_0^{\infty} f(x)dx$ сходится.*

**Доказательство.**

(⇒)

$$\int_0^N f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} f(k)$$

Следовательно, поскольку $\int_0^A f(x)dx$ возрастает по $A$, но ограничена сверху значением $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$, то $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

(⇐)

$$\sum_{k=0}^{N} f(x) \leqslant f(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)dx = f(0) + \int_0^N f(x)dx$$

Следовательно, поскольку $\sum_0^N f(x)dx$ возрастает по $N$, но ограничена сверху значением $f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)dx$, то $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ сходится.

□

**Теорема 76.**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

*для некоторой константы $\gamma$.*

**Определение 39.** Константа $\gamma$ из прошлой теоремы называется *константой Эйлера* или *константой Эйлера-Маскерони.*

**Доказательство.**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1)$$

Заметим, что

$$\ln(k-1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \cdots$$

Следовательно
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+\frac{1}{4k^4}+\cdots\right)$$
Поскольку
$$\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{k^3}+\cdots<\frac{1}{2k^2}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\cdots\right)=\frac{1}{2k(k-1)}=\frac{1}{2(k-1)}-\frac{1}{2k}$$
то
$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+\frac{1}{4k^4}+\cdots\right)\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2(k-1)}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$
Значит
$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+\frac{1}{4k^4}+\cdots\right)$$
— ряд положительных значений, ограниченный сверху значением $1/2$, следовательно сходится; пусть к некоторой константе $\lambda$. Значит мы получаем, что
$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+\frac{1}{4k^4}+\cdots\right)=\lambda-o(1)$$
и следовательно
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1-\lambda+o(1)=\gamma+o(1)$$
□

*Замечание* 8. Таким рассуждением мы получаем, что ряд
$$\sum_{k,l\geqslant 2}\frac{1}{l\cdot k^l}$$
сильно сходится и равен $1-\gamma$. Следовательно
$$1-\gamma=\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\zeta(l)-1}{l}$$

## 5.2 Бернулли обернули

**Определение 40.** Определим последовательность чисел Бернулли $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ как последовательность, чья экспоненциальная производящая функция есть $\frac{x}{\exp(x)-1}$, т.е. на уровне формальных степенных рядов верно, что
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_nx^n}{n!}=\frac{x}{\exp(x)-1}$$

| $B_0$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ | $B_9$ | $B_{10}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{1}{42}$ | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{5}{66}$ | $\cdots$ |

**Лемма 77.**

$$B_0 = 1 \qquad\qquad \sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n+1}{k} = 0$$

**Доказательство.** На уровне формальных рядов

$$\frac{\exp(x) - 1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

Следовательно

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k\right)$$

Значит, рассматривая коэффициенты при степенях $x$, получаем, что

$$B_0 = 1 \qquad\qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} = 0$$

Домножая последнее равенство на $(n+1)!$, получаем, что

$$\sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n+1}{k} = 0$$

$\square$

**Лемма 78.** *Ряд Тейлора* $\frac{x}{\exp(x)-1}$ *при* $x = 0$ *равен* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$ *(если доопределить правильно функцию в нуле).*

**Доказательство.** Определим

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x = 0 \\ \frac{\exp(x)-1}{x} & \text{иначе} \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Заметим, что $f$ просто задаётся рядом $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$ и всюду положительна, поэтому $g$ определена корректно.

Тогда очевидно равенство $f \cdot g = 1$. Продифференцируем его $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ раз:

$$0 = (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

Подставляя в последнее 0 получаем, что

$$g^{(0)}(0) = 1 \qquad\qquad \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(0) \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(0) \binom{n}{n-k} \frac{1}{n-k+1} = 0$$

Тем самым последовательность $(g^{(n)}(0))_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и $(B_n)_{n=0}^{\infty}$, значит они совпадают. А это значит, что ряд Тейлора $g$ есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

$\square$

**Лемма 79.** *Для всякого* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *верно, что* $B_{2n+1} = 0$.

**Доказательство.** Заметим, что

$$\frac{x}{\exp(x)-1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\exp(x)+1}{\exp(x)-1} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\exp(x/2)+\exp(-x/2)}{\exp(x/2)-\exp(-x/2)} = \frac{x}{2} \cdot \coth(x/2)$$

При этом $\frac{x}{2}\operatorname{cth}(x/2)$ является чётной функцией, значит производные всех нечётных степеней равны 0, откуда и получаем, что $B_{2n+1} = 0$.[1] □

**Определение 41.** Многочлены Бернулли — такая последовательность многочленов $(B_n(t))_{n=0}^{\infty}$, что на уровне формальных рядов (теперь от $x$ и $y$)

$$\frac{x\exp(yx)}{\exp(x)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)x^n}{n!}$$

*Замечание.* Определение корректно, поскольку данный формальный ряд по сути является произведением рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}x^n$ и $\exp(yx)$, что значит, что в каждом мономе степень $x$ не менее степени $y$, значит формальные ряды при каждой степени $x$ в разложении $\frac{x\exp(yx)}{\exp(x)-1}$ — ряды $B_n(y)$ — получаются конечными, т.е. являются просто многочленами.

**Следствие 79.1.** $B_n(0) = B_n$.

**Лемма 80.**

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(y) = (n+1)y^n$$

**Доказательство.** По определению

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xy)^k}{k!}\right) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{(l+1)!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(y)x^m}{m!}\right)$$

Рассматривая коэффициенты при степенях $x$ получаем, что

$$\frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k+1)!} \cdot \frac{B_k(y)}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(y)$$

Откуда мы и получаем требуемое равенство. □

**Следствие 80.1.** $\deg(B_n) = n$.

**Лемма 81.** $B_{n+1}' = (n+1)B_n$.

**Доказательство.** Давайте продифференцируем по $y$ равенство (на уровне формальных рядов)

$$\frac{x\exp(yx)}{\exp(x)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)}{n!}x^n$$

Получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1}(y)}{(n-1)!}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)}{n!}x^n = \frac{x^2\exp(yx)}{\exp(x)-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n'(y)}{n!}x^n$$

Следовательно $B_n' = nB_{n-1}$. □

[1] Но для $B_1$ мы получаем равенство $B_1 + \frac{1}{2} = 0$, поэтому только для $n = 0$ рассуждение неверно.

**Следствие 81.1.** $B_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} y^k$.

**Доказательство.**

$$B_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{n-k}(0) n!}{k!(n-k)!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k$$

□

**Лемма 82.** $B_n(y) = B_n(1-y)(-1)^n$.

**Доказательство.** Действительно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-y)x^n}{n!} = \frac{x\exp((1-y)x)}{\exp(x)-1} = \frac{x\exp(-yx)}{1-\exp(-x)}$$
$$= \frac{-x\exp(y(-x))}{\exp(-x)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n(y) x^n}{n!}$$

Следовательно, выделяя полиномы от $y$ при степенях $x$, получаем искомое равенство. □

**Следствие 82.1.** $\int_0^1 B_n(y)dy = 0$

**Доказательство.**

$$\int_0^1 B_n(y)dy = \left.\frac{B_{n+1}(y)}{n+1}\right|_0^1 = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = 0$$

□

**Теорема 83** (формула Эйлера-Маклорена). *Пусть даны целые $a$ и $b$ и функция $f$, которая имеет $m$ ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) производных на $[a;b]$. Тогда*

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m \qquad R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)dx$$

**Доказательство.** Заметим, что достаточно доказать формулу для $a = 0$ и $b = 1$, а $\{x\}$ можно заменить на $x$. Также будем доказывать её по индукции по $m$.

**База.** $m = 1$. Тогда $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Следовательно по интегрированию по частям (по функциям $f$ и $B_1$)

$$\frac{f(1)+f(0)}{2} = f(x)\left(x - \frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx$$

Таким образом

$$f(0) = \int_0^1 f(x)dx + \frac{-1/2}{1!}\, f(x)|_0^1 + R_1$$

**Шаг.** Пусть утверждение для $m$ верно; покажем верность для $m+1$. Заметим, что нужно показать, что

$$R_m = \frac{B_{m+1}}{(m+1)!} f^{(m)}(x)\Big|_0^1 + R_{m+1}$$

Интегрируя по частям по функциям $f^{(m)}(x)$ и $B_{m+1}(x)/(m+1)!$, получаем, что

$$(-1)^{m+1}\int_0^1 \frac{B'_{m+1}(x)}{(m+1)!}f^{(m)}(x)dx = (-1)^{m+1}\left.\frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!}f^{(m)}(x)\right|_0^1 + (-1)^{m+2}\int_0^1 \frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!}f^{(m+1)}(x)dx$$
$$= (-1)^{m+1}\left.\frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!}f^{(m)}(x)\right|_0^1 + R_{m+1}$$

Поскольку $B'_{m+1}(x) = (m+1)B_m(x)$, то получаем

$$R_m = (-1)^{m+1}\left.\frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!}f^{(m)}(x)\right|_0^1 + R_{m+1}$$

Следовательно осталось показать, что $(-1)^{m+1}B_{m+1} = B_{m+1}(0) = B_{m+1}(1)$. Заметим, что уже есть $B_{m+1} = B_{m+1}(0) = (-1)^{m+1}B_{m+1}(1)$. Осталось заметить, что при нечётных $m$ мы имеем $(-1)^{m+1} = 1$, а при чётных — $B_{m+1} = 0$, так как $m+1 \geqslant 2$. Отсюда следует искомое. $\square$

*Пример* 3. Давайте посчитаем $\sum_{k=1}^{n-1} k^d$. Для этого подставим в формулу Эйлера-Маклорена функцию $f(x) := x^d$, отрезок $[a;b] := [0;n]$ и $m = d+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k^d &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \\
&= \int_0^n f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!}\left.f^{(k-1)}(x)\right|_0^n + (-1)^{m+1}\int_0^n \frac{B_m(\{x\})}{m!}f^{(m)}(x)dx \\
&= \left.\frac{x^{d+1}}{d+1}\right|_0^n + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!}\left.\frac{d!}{(d-k+1)!}x^{d-k+1}\right|_0^n + (-1)^{m+1}\int_0^n \frac{B_m(\{x\})}{m!}\cdot 0 \cdot dx \\
&= \frac{n^{d+1}}{d+1} + \sum_{k=1}^{d+1} B_k \frac{d!}{k!(d+1-k)!}n^{d+1-k} \\
&= \frac{1}{d+1}\sum_{k=0}^{d+1} B_k \binom{d+1}{k} n^{d+1-k}
\end{aligned}$$

## 5.3 Некоторые методы интегрирования и их результаты

Рассмотрим неформальные примеры и докажем теоремы, их формализующие.

*Пример* 4. Несложно понять, что

$$K := \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

сходится. Заметим также, что для всякого $t > 0$

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-(ty)^2}d(ty) = \int_0^{+\infty} te^{-y^2t^2}dy$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
K^2 &= K\cdot\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt & &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cdot K\cdot dt\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\left(\int_0^{+\infty} te^{-t^2y^2}dy\right)dt & &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} te^{-t^2(y^2+1)}dy\right)dt\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} te^{-t^2(y^2+1)}dt\right)dy & &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)}\frac{d(t^2)}{2}\right)dy\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-v(y^2+1)}dv\right)dy & &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left.\frac{e^{-v(y^2+1)}}{-(y^2+1)}\right|_0^{+\infty}dy\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1} & &= \frac{1}{2}\arctan(y)|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

откуда $K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

*Пример* 5. Рассмотрим функцию

$$I(a) := \int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin(x)}{x}dx$$

Тогда

$$I'(a) = \int_0^{+\infty}(-x)e^{-ax}\frac{\sin(x)}{x}dx = \int_0^{+\infty} -e^{-ax}\sin(x)dx = \left.\frac{e^{-ax}(a\sin(x)+\cos(x))}{a^2+1}\right|_0^{+\infty} = -\frac{1}{a^2+1}$$

Значит $I(a) = C - \arctan(a)$. Но поскольку

$$\lim_{a\to\infty} I(a) + \arctan(a) = \lim_{a\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin(x)}{x}dx + \arctan(a) = 0 + \frac{\pi}{2}$$

то $C = \frac{\pi}{2}$, а значит

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx = I(0) = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

*Пример* 6.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}dx &= \int_0^1\left(\int_a^b x^y dy\right)dx & &= \int_a^b\left(\int_0^1 x^y dx\right)dy\\
&= \int_a^b \frac{dy}{y+1} & &= \ln(b+1) - \ln(a+1)\\
&= \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)
\end{aligned}$$

*Пример* 7. Заметим, что

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy = \left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_0^{+\infty} = -\frac{1}{x^2+1}$$

Таким образом

$$\int_1^{+\infty}\left(\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{но} \qquad \int_1^{+\infty}\left(\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy = \frac{\pi}{4}$$

*Замечание.* Этот пример говорит о том, что не всегда можно переставлять интегралы местами.

**Теорема 84.** *Пусть даны непрерывные функции $a$ и $b$ на $[x_0; x_1]$. Пусть также дана непрерывная функция $f(x,t)$ на $\{(x,t) \mid t \in [a(x); b(x)] \wedge x \in [x_0; x_1]\}$. Тогда $\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$ непрерывна.*

**Доказательство.**

$$\lim_{y \to x} \int_{a(y)}^{b(y)} f(y,t)dt = \lim_{y \to x} \int_{a(y)}^{a(x)} f(y,t)dt + \lim_{y \to x} \int_{b(x)}^{b(y)} f(y,t)dt + \lim_{y \to x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y,t)dt$$

**Лемма 84.1.**

$$\lim_{y \to x} \int_{b(x)}^{b(y)} f(y,t)dt = 0$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$\left| \int_{b(x)}^{b(y)} f(y,t)dt \right| \leqslant |b(y) - b(x)| \cdot \max_{t \in [b(x); b(y)]} |f(y,t)|$$

Заметим, что из непрерывности $f$ следует, что

$$\max_{t \in [b(x); b(y)]} |f(y,t)| \leqslant \max_{\substack{y \in [x-\varepsilon; x+\varepsilon] \\ t \in [b(x); b(y)]}} |f(y,t)|$$

Но при этом $\lim_{y \to x} |b(y) - b(x)| = 0$, следовательно

$$\lim_{y \to x} \left| \int_{b(x)}^{b(y)} f(y,t)dt \right| = 0$$

откуда и получается требуемое. □

**Лемма 84.2.**

$$\lim_{y \to x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y,t)dt = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$$

**Доказательство.** Поскольку $f$ непрерывна, то непрерывна и $f(y,t) - f(x,t)$. Значит

$$\lim_{y \to x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y,t)dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = \lim_{y \to x} \int_{a(x)}^{b(x)} (f(y,t) - f(x,t))dt$$
$$\leqslant \lim_{y \to x} |b(x) - a(x)| \max_{t \in [a(x); b(x)]} |f(y,t) - f(x,t)| \leqslant |b(x) - a(x)| \lim_{\varepsilon \to 0} \max_{\substack{y \in [x-\varepsilon; x+\varepsilon] \\ t \in [a(x); b(x)]}} |f(y,t) - f(x,t)| = 0$$

□

Объединяя всё вышесказанное, получаем требуемое. □

**Теорема 85** (интегральное правило Лейбница, "дифференцирование под знаком интеграла")**.** *Пусть даны функции $a$ и $b$ на $[x_0; x_1]$ с непрерывными производными. Пусть также дана функция $f(x,t)$, что $f$ и $\frac{\partial}{\partial x} f$ непрерывны на множестве $\{(x,t) \mid t \in [a(x); b(x)] \wedge x \in [x_0; x_1]\}$. Тогда для всякого $x \in [x_0; x_1]$*

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

**Доказательство.**

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt \overset{\text{def}}{=} \lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{a(x+\delta)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\int_{a(x+\delta)}^{a(x)} f(x+\delta,t)dt}{\delta} + \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{\delta} + \frac{\int_{a(x)}^{b(x)}(f(x+\delta,t)-f(x,t))dt}{\delta}\right)$$

**Лемма 85.1.**

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{\delta} = f(x,b(x))\cdot\frac{d}{dx}b(x)$$

**Доказательство.**

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{b(x+\delta)-b(x)}{\delta}\cdot\frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{b(x+\delta)-b(x)}$$

$$= \frac{d}{dx}b(x)\cdot\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{b(x+\delta)-b(x)}$$

Заметим, что

$$\min_{t\in[b(x);b(x+\delta)]} f(x+\delta,t) \leqslant \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{b(x+\delta)-b(x)} \leqslant \max_{t\in[b(x);b(x+\delta)]} f(x+\delta,t)$$

По непрерывности $f$ предыдущие минимум и максимум определены и

$$\lim_{\delta\to 0}\min_{t\in[b(x);b(x+\delta)]} f(x+\delta,t) = \lim_{\delta\to 0}\max_{t\in[b(x);b(x+\delta)]} f(x+\delta,t) = f(x,b(x))$$

Тогда

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{b(x+\delta)-b(x)} = f(x,b(x))$$

Отсюда следует требуемое. □

**Лемма 85.2.**

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{a(x)}^{b(x)}(f(x+\delta,t)-f(x,t))dt}{\delta} = \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt$$

**Доказательство.** Заметим, что для всяких $\delta$ и $t\in[a(x);b(x)]$ есть $\gamma_t(\delta)\in(0;\delta)$, что

$$\frac{f(x+\delta,t)-f(x,t)}{\delta} = \frac{\partial}{\partial x}f(x+\gamma_t(\delta),t)$$

Тогда

$$\frac{\int_{a(x)}^{b(x)}(f(x+\delta,t)-f(x,t))dt}{\delta} = \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x+\gamma_t(\delta),t)dt$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x+\gamma_t(\delta), t) dt - \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) dt\right| \\
\leqslant &\int_{a(x)}^{b(x)} \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x+\gamma_t(\delta), t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| dt \\
\leqslant &\int_{a(x)}^{b(x)} \max_{y\in[x;x+\delta]} \left|\frac{\partial}{\partial x} f(y,t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| dt \\
\leqslant &(b(x)-a(x)) \max_{\substack{y\in[x;x+\delta] \\ t\in[a(x);b(x)]}} \left|\frac{\partial}{\partial x} f(y,t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right|
\end{aligned}$$

Следовательно так как $\frac{\partial}{\partial x} f$ непрерывна, то $\frac{\partial}{\partial x} f(y,t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ непрерывна, а поэтому

$$\lim_{\delta\to 0} \max_{\substack{y\in[x;x+\delta] \\ t\in[a(x);b(x)]}} \left|\frac{\partial}{\partial x} f(y,t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| = 0$$

и тогда

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x+\gamma_t(\delta), t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) dt$$

Таким образом получаем требуемое. □

Объединяя всё вышесказанное, получаем требуемое. □

**Следствие 85.1.** *Если взять функции $a$ и $b$ константными, то будет лишь условие на непрерывность $f$ и $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ на прямоугольнике $[x_0;x_1]\times[a;b]$, а мы получим, что*

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) dt$$

**Теорема 86.** *Пусть дана непрерывная функция $f(x,y)$ на $[a;b]\times[c;d]$. Тогда интегралы*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx \qquad \text{и} \qquad \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

*определены и равны.*

**Доказательство.** Заметим, что $\int_a^t f(x,y)dx$ и $\int_c^s f(x,y)dy$ являются непрерывными функциями от $y$ и $x$ соответственно. Следовательно интегралы

$$F(t,s) := \int_a^t \left(\int_c^s f(x,y)dy\right) dx \qquad \text{и} \qquad G(t,s) := \int_c^s \left(\int_a^t f(x,y)dx\right) dy$$

определены. При этом

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t,s) = \int_c^s f(t,y)dy$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,s) = \frac{\partial}{\partial t}\int_c^s \left(\int_a^t f(x,y)dx\right) dy = \int_c^s \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_a^t f(x,y)dx\right) dy = \int_c^s f(t,y)dy$$

Т.е. $\frac{\partial}{\partial t} F = \frac{\partial}{\partial t} G$.

При этом несложно видеть, что $F(a,s) = G(a,s) = 0$, следовательно

$$F(t,s) = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} F(x,s)dx + F(a,s) = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} G(x,s)dx + G(a,s) = G(t,s)$$

□

### 5.4 Кривые

**Определение 42.** *Кривая* — непрерывное отображение отрезка $[0;1]$ в любое топологическое пространство (например, $\mathbb{R}^n$).

Кривая Пеано, тра-ля-ля...

**Определение 43.** *Длина кривой* $\tau$ — значение

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n} d(\tau(x_{k-1}),\tau(x_k)) \mid n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\wedge x_0=0\wedge x_n=1\right\}$$

**Утверждение 87.** *Если дана кривая $\tau$ в $\mathbb{R}^n$ и она дифференцируема по всем координатам, то её длина равна*

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\tau(t)\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\tau(t)\right)^2}dt=\int_0^1|\operatorname{grad}(\tau(t))|dt$$

## 6 Кривые

**Определение 44.** *$n$-мерная кривая* — непрерывное отображение $f:[a;b]\to\mathbb{R}^n$.

**Определение 45.** *Вариация* функции $f:S\to\mathbb{R}^n$ $(S\subseteq\mathbb{R})$ на отрезке $[a;b]\subseteq S$ — величина

$$V_f([a;b]):=\sup_{\Sigma}\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|,$$

где нахождение супремума производится во всем разбиениям $\Sigma=\{[x_k;x_{k-1}]\}_{k=1}^m$ отрезка $[a;b]$, а $|X-Y|$ — евклидово расстояние между точками $\mathbb{R}^n$ ($X-Y$ — поточечная разница, а $|X|$ — евклидов модуль вектора).

*Замечание.* Неформально говоря, $V_f([a;b])$ — длина кривой $f|_{[a;b]}$.

**Лемма 88.**

1. *Если $f:R\to R$ монотонна, то $V_f([a;b])=|f(a)-f(b)|$.*
2. *$V_f([a;b])=0$ тогда и только тогда, когда $f|_{[a;b]}\equiv\mathrm{const}$.*
3. *$V_{f+g}\leqslant V_f+V_g$.*
4. *Для всяких $a\leqslant b\leqslant c$ верно $V_f([a;c])=V_f([a;b])+V_f([b;c])$.*

**Лемма 89.** *Будем рассматривать функции $[a;b]\to R$.*

1. *Функция, представимая в виде разницы двух монотонных функций, имеет конечную вариацию.*
2. *Функция, имеющая конечную вариацию, представима в виде разницы двух монотонных функций.*

*Таким образом мы получаем, что функция имеет конечную вариацию тогда и только тогда, когда представима в виде разницы двух ограниценных функций.*

**Доказательство.**

1. Так как $f_1$ и $-f_2$ имеют ограниченные вариации, то вариация их суммы, ограниченная сверху суммой их вариаций, тоже ограничена.

2. Рассмотрим функции

$$\varphi(x) := V_f([a;x]) \qquad \text{и} \qquad h := \varphi - f.$$

Понятно, что тогда $f = \varphi - h$, а $\varphi$ не убывает. При этом для всяких $x \leqslant y \in [a;b]$

$$f(y) - f(x) \leqslant V_f([x;y]) = \varphi(y) - \varphi(x) \qquad \Longrightarrow \qquad h(x) = \varphi(x) - f(x) \leqslant \varphi(y) - f(y) = h(y),$$

т.е. $h$ тоже не убывает.

□

**Лемма 90.** *Пусть $g : [a;b] \to [c;d]$ — непрерывная биекция (следовательно строго монотонная). Тогда для всякой функции $f$*

$$V_f([c;d]) = V_{f\circ g}([a;b]).$$

**Лемма 91.** *Пусть $f$ — гладкая функция $[a;b] \to \mathbb{R}^n$ (т.е. $f = (f_i)_{i=1}^n$, где каждая $f_i$ гладка). Тогда*

$$V_f([a;b]) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i'(x)^2 dx}.$$

**Доказательство.** Понятно, что

$$V_f([a;b]) = \sup_\Sigma \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i(x_k) - f_i(x_{k-1}))^2}$$

где $\Sigma = \{[x_k; x_{k-1}]\}_{k=1}^m$ — разбиение $[a;b]$. Следовательно есть последовательность разбиений $\{\Sigma_l\}_{l=0}^\infty$, что супремум совпадает с пределом по этой последовательности (того же выражения). При этом понятно, что при замене разбиения на подразбиение выражение не уменьшается. Следовательно можно считать, что $\Sigma_{l+1}$ — подразбиение $\Sigma_l$, а длины отрезков в разбиении $\Sigma_l$ не больше $1/2^l$. При этом

$$\lim_{\{\Sigma\}_{l=0}^\infty} \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i(x_k) - f_i(x_{k-1}))^2} = \lim_{\{\Sigma\}_{l=0}^\infty} \sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1}) \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i'(\xi_{i,k})^2}$$

где для разбиения $\Sigma_l$ для всяких $x_k$, $x_{k-1}$ и $f_i$ строится $\xi_{i,k} \in [x_{k-1}; x_k]$ по теореме 39. Таким образом, если описанный интеграл сходится, то последний предел с ним совпадает по определению интеграла Римана.

Ну а интеграл сходится, так как подинтегральная функция непрерывна. □

**Определение 46.** Пусть дана непрерывная функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}^n$. *Естественной параметризацией* $f$ называется функция $f \circ \psi$, где $\psi : [0;\alpha] \to [a;b]$ — возрастающая биекция, а

$$V_{f\circ\psi}([0;x]) = x.$$

**Определение 47.** Непрерывная функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ называется *путём без остановок*, если $f$ не константна ни на каком интервале.

**Лемма 92.** *Путь с ограниченной вариацией $f : [a; b] \to \mathbb{R}^n$ не имеет остановок тогда и только тогда, когда функция*

$$\varphi : [a; b] \to \mathbb{R}, x \mapsto V_f([a; x]).$$

**Теорема 93.** *У пути $f : [a; b] \to \mathbb{R}^n$ имеется естественная параметризация тогда и только тогда, когда $f$ имеет конечную вариацию и не имеет остановок.*

**Доказательство.** Из существования естественной параметризации очевидным образом выходит конечность вариации и отсутствие остановок. Если $f$ имеет конечную вариацию, то функция

$$\varphi : [a; b] \to \mathbb{R}, x \mapsto V_f([a; x])$$

корректно определена (и монотонна). А из отсутствия остановок следует, что $\varphi$ — биекция $[a; b] \to [0; \alpha]$ для некоторого $\alpha$. Пусть $\psi := \varphi^{-1}$. Тогда

$$V_{f \circ \psi}([0; x]) = V_f([a; \psi(x)]) = \varphi(\psi(x)) = x,$$

т.е. $f \circ \psi$ — естественная параметризация $f$. □

*Замечание.* Если $g$ — естественная параметризация $f$, то для всяких $0 \leqslant c \leqslant d$

$$V_g([c; d]) = d - c.$$

В таком случае $|g'| = 1$.

# 7 Тригонометрия

# 8 Мои придумки вне лекций

## 8.1 Сильная сходимость

**Определение 48.** Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *сильно сходится*, если сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

*Замечание.* Это понятие распространяемо не только на $\mathbb{R}$, а также на $\mathbb{C}$. Также можно пытаться рассматривать любые векторные пространства с метрикой и полнотой.

**Лемма 94.** *Если ряд сильно сходится, то он сходится.*

**Доказательство.** Пусть дан сильно сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

**Лемма 94.1.** *Для всякого $\varepsilon > 0$ есть такое натуральное $N$, что $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$.*

**Доказательство.** Давайте рассматривать префиксные суммы $S_n$ последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Заметим, что $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ является неубывающей сходящейся последовательностью. Пусть предел равен $A$. Следовательно какой-то член $S_N$ будет в $\varepsilon$-окрестности $A$ (а на деле в $(A - \varepsilon; A]$). Следовательно для всякого $M > N$

$$\sum_{n=N+1}^{M} |a_n| = S_M - S_N$$

При этом $\{S_n - S_N\}_{n=N+1}^{\infty}$ сходится, поскольку равна $\{S_n\}_{n=N+1}^{\infty} - S_N$, а последняя последовательность сходится, поскольку является подпоследовательностью сходящейся $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$. При этом $S_M \in [S_N; A]$. Следовательно $S_M - S_N \in [0; A - S_N]$. Значит и предел $\{S_n - S_N\}_{n=N+1}^{\infty}$ лежит в $[0; A - S_N] \subseteq [0; \varepsilon)$. □

Заметим, что $|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|$. Пусть $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ — префиксные суммы последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, т.е. $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Мы видим, что

$$|S_M - S_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{M} a_k \right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} |a_k| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_k|$$

Пусть $r_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_k|$. Тогда имеем, что все $S_M$ для $M \geqslant N$ лежат в $\overline{U}_{r_N}(S_N)$. Несложно видеть, что

$$\left(\overline{U}_{r_N}(S_N)\right)_{N=0}^{\infty}$$

— последовательность замкнутых убывающих по включение множеств. Также по доказанной лемме последовательность $(r_N)_{N=0}^{\infty}$ сходится монотонно сверху к нулю. Таким образом последовательность замкнутых окрестностей имеет предел и ровно один. Поскольку размеры окрестностей сходятся, а для каждой из них верно, что все члены последовательности $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ начиная с некоторого лежат в этой окрестности, то сама последовательность $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ сходится к пересечению окрестностей. □

**Теорема 95.** *Пусть дан ряд $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

1. *Если $f$ сходится в некоторой точке $t$, то сильно сходится и во всех точках $s$, где $|s| < |t|$.*

2. *При этом если $f$ сильно сходится в точке $t$, то сильно сходится и во всех точках $s$, где $|s| \leqslant |t|$.*

**Доказательство.**

1. Мы имеем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сходится. Это значит, что есть такая константа $C$, что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $|a_n t^n| \leqslant C$, а тогда $|a_n| \cdot |t|^n \leqslant C$.

   Пусть дана точка $s$, что $|s| < |t|$. Тогда

   $$|a_n s^n| = |a_n| \cdot |s|^n = |a_n| \cdot |t|^n \cdot \left(\frac{|s|}{|t|}\right)^n \leqslant C \cdot \left(\frac{|s|}{|t|}\right)^n$$

   Обозначим $|s|/|t|$ за $\alpha$. Понятно, что $\alpha \in [0; 1)$. Следовательно

   $$\sum_{n=0}^{N} |a_n s^n| \leqslant \sum_{n=0}^{N} C\alpha^n = C\frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}$$

   Таким образом $C\frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}$ сходится, а значит сходится и последовательность префиксных сумм $(|a_n s^n|)_{n=0}^{\infty}$ (так как не убывает и ограничена). Следовательно $f$ в точке $s$ сильно сходится.

2. Мы имеем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сильно сходится. Пусть дана точка $s$, что $|s| \leqslant |t|$. Тогда

   $$|a_n s^n| = |a_n| \cdot |s|^n \leqslant |a_n| \cdot |t|^n = |a_n t^n|$$

   Следовательно

   $$\sum_{n=0}^{N} |a_n s^n| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n t^n|$$

   Поскольку последовательность правых сумм сходится, то сходится и последовательность левых сумм (так как не убывает и ограничена). Следовательно $f$ в точке $s$ сильно сходится.

□

**Следствие 95.1.** *Область определения $f$ как функция есть открытый шар с центром в нуле (возможно, нулевого радиуса) вместе с некоторыми (возможно, со всеми, возможно, с ни одной) точками на его границе.*

**Теорема 96.** *Пусть дана функция $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Пусть также известно, что для некоторой точки $x$ и некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $f$ сильно сходится в $\varepsilon$-окрестности $x$.*

1. *Значит $f$ бесконечно дифференцируема в этой окрестности.*

2. *Для всякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функция $g_k(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} x^n$ сильно сходится в этой окрестности.*

3. *Для всякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $f^{(k)} = g_k$ в этой окрестности.*

**Доказательство.** Докажем все утверждения теоремы только для первой производной $f$. Тогда для всех последующих производных утверждение будет выводится по индукции. Также докажем сильную сходимость не для всей окрестности, а только для точки $x$. Тогда, поскольку все другие точки окрестности так же имеют окрестность, где функция сильно сходится, то для них утверждение будет верно по аналогии.

Возьмём некоторую точку $y$ из $\varepsilon$-окрестности $x$, что $|y| > |x|$. Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}(n+1)x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}y^n| \cdot (n+1) \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^n$$

Понятно, что $|x|/|y| < 1$; обозначим $\alpha := |x|/|y|$. Поэтому последовательность $\{(n+1)\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к нулю, а значит ограничена сверху константой $C$. Следовательно

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}(n+1)x^n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} C|a_{n+1}y^n| = C\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}y^n|,$$

причём последний ряд сходится по условию, значит и первый тоже, что означает сильную сходимость $g_1$ в $x$. Таким образом $g_1$ сильно сходится на всей $\varepsilon$-окрестности $x$.

Теперь покажем, что $f'(x) = g_1(x)$. Пусть $t$ — любая точка из проколотой $\varepsilon$-окрестности $x$. Тогда

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\left(\frac{t^{n+1}-x^{n+1}}{t-x} - (n+1)x^n\right)$$

Заметим, что

$$\frac{t^{n+1}-x^{n+1}}{t-x} - (n+1)x^n = t^n + t^{n-1}x + \dots + tx^{n-1} - nx^n = (t-x)(t^{n-1} + 2t^{n-2}x + \dots + nx^{n-1})$$

Следовательно

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - g_1(x) = (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)$$

Пусть $y$ некоторая точка из $\varepsilon$-окрестности $x$, что $\delta := |y| - |x| > 0$. Тогда для всякой точки $t$ из проколотой $\delta/2$-окрестности $x$

$$\begin{aligned}
|a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| &= |a_{n+2}|(|t|^n + 2|t|^{n-1}|x| + \dots + (n+1)|x|^n) \\
&< |a_{n+2}|(|y| - \delta/2)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= |a_{n+2}y^{n+2}| \cdot |y|^{-2}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\left(\frac{|y|-\delta/2}{|y|}\right)^n
\end{aligned}$$

Тогда мы имеем, что $\alpha := \frac{|y|-\delta/2}{|y|} \in [0;1)$, а тогда последовательность $\left(|y|^{-2}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha^n\right)_{n=0}^{\infty}$ сходится к 0, значит ограничена сверху константой $C$. Следовательно

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| < \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|C = C\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|$$

причём последняя сумма сходится, так как $f$ сильно сходится в $y$. Тогда пусть

$$A := C\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|.$$

Значит

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - g_1(x)\right| &= |t-x|\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)\right| \\
&\leqslant |t-x|\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| \\
&< |t-x|A
\end{aligned}$$

Таким образом

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = g_1(x),$$

что значит, что $f'(x) = g_1(x)$. □

**Лемма 97.** *Пусть дана функция $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Пусть также известно, что $f$ сходится в $a$-окрестности нуля. Тогда для всякого $x$ из этой окрестности верно, что ряд*

$$f_x(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \binom{n+k}{n} x^k \right) t^n$$

*сильно сходится в $(a - |x|)$-окрестности нуля и равен $f(x+t)$.*

**Доказательство.** Пусть дано $t$, что $|t| < a - |x|$. Тогда из сильной сходимости при модуле меньшем $a$ получаем, что сумма $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x| + |t|)^n$ сходится. Заметим, что каждый член $|a_n|(|x| + |t|)^n$ можно разложить на $n+1$ членов: $|a_n|\binom{n}{0}|x|^n + |a_n|\binom{n}{1}|x|^{n-1}|t| + \ldots$. Тогда сумма новых членов будет равна тому же, а тогда можно получить для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ограничения

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n \right| &= |t|^n \frac{1}{n!} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!} x^k \right| \\
&\leqslant |t|^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \frac{(n+k)!}{k!} |x|^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n,
\end{aligned}$$

так как последнее — подсумма нашей суммы. Причём по набору членов суммы

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x| + |t|)^n \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n$$

совпадают, поэтому мы можем сказать, что вторая сумма сходится. Следовательно сильно сходится и ряд $f_x(t)$.

Далее покажем, что $f_x(t) = f(x+t)$. Рассматривая префиксные суммы ряда $f(x+t)$ и раскрывая скобки, можно получить почленную сходимость (как ряды от $t$) к $f_x(t)$. Действительно:

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n = \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \binom{n+k}{k} t^n x^k;$$

таким образом раскрыв скобки в $f(x+t)$ до члена $M$ мы получаем префиксную сумму для $k$ до $M - n$. Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть некоторый хвост

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{k} |t|^n |x|^k \right) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Тогда для всех остальных членов от $0$ до $N-1$ есть такие значения $M_n$, что для всякого $n$ от $0$ до $N-1$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=M_n+1}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{k} |t|^n |x|^k < \frac{\varepsilon}{4N}$$

Пусть $M := \max(M_0 + 0, M_1 + 1, \ldots, M_{N-1} + (N-1))$. Таким образом

$$
\begin{aligned}
|f_x(t) - f(x+t)| &\leqslant \left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - f(x+t)\right| \\
&\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{k} |t|^n |x|^k\right) + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - f(x+t)\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{M} a_n (x+t)^n\right| + \left|\sum_{n=M+1} a_n (x+t)^n\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{n+k=0}^{M} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k\right| + \sum_{n+k>M} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |t|^n |x|^k \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{k=0}^{M-n} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k\right)\right| \\
&+ \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=M-n+1}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{4N} + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{k=0}^{M-n} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k\right)\right| \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{k=0}^{M-n} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k\right| \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \left|\sum_{k=M-n+1}^{\infty} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k\right| \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=M-n+1}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |t|^n |x|^k \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{4N} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

□

*Замечание.* Последняя часть с оценкой недостатка заимствует (но сложно) рассуждение из леммы 98. В обоих случаях находится малый хвост главной последовательности, после чего при выкидывании мы теряем его дважды (у основного ряда и у рядов под пределом) и нам остаётся с остатком от $\varepsilon$ в запасе оценить разность между членами конечного префикса.

**Лемма 98.** *Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ — сильно сходящийся ряд, а $(\sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n})_{k=0}^{\infty}$ — последовательность сильно сходящихся рядов, что есть некоторая константа $C$, что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что*

- $(b_{k,n})_{k=0}^{\infty} \to a_n$,
- $|b_{k,n}| \leqslant C|a_n|$ *для всякого* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- *для всякого* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n}$ *сходится и равен* $B_k$.

*Тогда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} B_k$.

**Доказательство.** Вспомним, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2(C+1)}$. Следовательно для всякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n}\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| + |b_{k,n}| &&\leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + (C+1)\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \\ &< \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + (C+1)\frac{\varepsilon}{2(C+1)} &&= \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Тогда для всякого $n \in [0; N-1]$ есть такое $K_n$, что для всех $k \geqslant K_n$ верно, что $|a_n - b_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{2N}$. Пусть $K := \max\{K_n\}_{n=0}^{N-1}$. Следовательно для всякого $k \geqslant K$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n}\right| < \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Таким образом для всякого $k \geqslant K$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - B_k\right| < \varepsilon,$$

что значит, что

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

□

**Теорема 99.** *Пусть рассматривается ряд вещественных чисел.*

1. *Если ряд сильно сходится, то любая его перестановка сильно сходится к тому же значению.*

2. *Если ряд сходится, но не сильно, то для любого значения $S$ можно так переставить его члены, что итоговый ряд сойдётся к $S$.*

**Доказательство.**

1. Пусть даны сильно сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и любая его перестановка $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Значит есть $M := \sigma^{-1}(N)$. Следовательно для всякого $L \geqslant M$

$$\left|\sum_{n=0}^{L} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

   Таким образом $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$; чтобы показать сильную сходимость достаточно проделать те же рассуждения для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$.

2. Заметим, что сходимость ряда значит, что $(|a_n|)_{n=0}^{\infty} \to 0$. При этом несильная сходимость значит, что сумма положительных членов ряда и сумма отрицательных расходятся (уходят в $+\infty$ и $-\infty$ соответственно).

   Выделим из последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ подпоследовательности положительных членов $(a_n^+)_{n=0}^{\infty}$ и отрицательных $(a_n^-)_{n=0}^{\infty}$ (в основной последовательности могут быть нули, но их можно раскидывать по последовательности как угодно — это не изменит результат). Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для всякого $n \geqslant N$ верно, что $|a_n^+| < \varepsilon$ и $|a_n^-| < \varepsilon$.

Теперь составим нашу последовательность-перестановку следующим образом. В начальный момент у нас есть число $t = 0$ и пустая последовательность $T$. Также у нас есть две бесконечных последовательности: одна с положительными — $A^+$, другая с отрицательными членами — $A^-$. Суммы обеих бесконечны. Каждый ход мы можем только взять из одной из $A^+$ и $A^-$ первое невзятое число, записать его в конец последовательности $T$ и прибавить это число к $t$.

Какие же конкретно ходы мы хотим делать? Пусть $C_0$ — максимальный размер членов в $A^+$ и $A^-$, а $C := \max(C_0, S+1)$. Тогда на итерации № $n$ ($n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$) будем удерживаться в интервале $(S-C/2^n; S+C/2^n)$. Чтобы достичь этой цели будем использовать следующую стратегию:

- если $t \in (S - C/2^n; S]$, то возьмём число из $A^+$;
- если $t \in [S; S - C/2^n)$, то возьмём число из $A^-$.

Заканчивать итерацию № $n$ будем, когда из обеих последовательностей будут вытащены первые $N(C/2^{n+1})$ членов. Поскольку к началу каждой итерации № $n$ оставшиеся члены в $A^+$ и $A^-$ по модулю меньше $C/2^n$, то описанными выше шагами мы не выйдем из интервала $(S - C/2^n; S + C/2^n)$. При этом после каждого момента мы не можем вытаскивать только члены одной из $A^+$ и $A^-$, так как их суммы стремятся к $\pm\infty$, значит каждый член каждой последовательности будет взят, а следовательно мы попадём на каждую итерацию. Значит префиксные суммы будут сходится к $S$ (после конца каждой итерации префиксные суммы будут находиться во всё меньшей окрестности $S$). Таким образом сумма полученного ряда-перестановки будет равна $S$.

□

## Практика

Рассмотрим функцию $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

**Утверждение 100.** $\exp(x)$ *сильно сходится при любых* $x \in \mathbb{C}$.

**Доказательство.** Действительно, есть натуральное $N > 2|x|$, значит

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{x^n}{n!}\right| + \frac{|x|^N}{N!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{(N+n)!/N!} &< \sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{x^n}{n!}\right| + \frac{|x|^N}{N!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{N^n}\\ < \sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{x^n}{n!}\right| + \frac{|x|^N}{N!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} &= \sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{x^n}{n!}\right| + 2\frac{|x|^N}{N!}\end{aligned}$$

т.е. exp сильно сходится во всякой точке $x \in \mathbb{C}$. □

**Следствие 100.1.** exp *бесконечно дифференцируема. Причём* $\exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = \exp(x)$.

**Утверждение 101.** *Для абсолютных любых $a$ и $b$ верно, что* $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.

**Доказательство.** Давайте рассмотрим следующую таблицу.

| $\times$ | $\frac{a^0}{0!}$ | $\frac{a^1}{1!}$ | $\frac{a^2}{2!}$ | $\frac{a^3}{3!}$ | $\frac{a^4}{4!}$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{b^0}{0!}$ | $\frac{a^0 \cdot b^0}{0! \cdot 0!}$ | $\frac{a^1 \cdot b^0}{1! \cdot 0!}$ | $\frac{a^2 \cdot b^0}{2! \cdot 0!}$ | $\frac{a^3 \cdot b^0}{3! \cdot 0!}$ | $\frac{a^4 \cdot b^0}{4! \cdot 0!}$ | $\dots$ |
| $\frac{b^1}{1!}$ | $\frac{a^0 \cdot b^1}{0! \cdot 1!}$ | $\frac{a^1 \cdot b^1}{1! \cdot 1!}$ | $\frac{a^2 \cdot b^1}{2! \cdot 1!}$ | $\frac{a^3 \cdot b^1}{3! \cdot 1!}$ | $\frac{a^4 \cdot b^1}{4! \cdot 1!}$ | $\dots$ |
| $\frac{b^2}{2!}$ | $\frac{a^0 \cdot b^2}{0! \cdot 2!}$ | $\frac{a^1 \cdot b^2}{1! \cdot 2!}$ | $\frac{a^2 \cdot b^2}{2! \cdot 2!}$ | $\frac{a^3 \cdot b^2}{3! \cdot 2!}$ | $\frac{a^4 \cdot b^2}{4! \cdot 2!}$ | $\dots$ |
| $\frac{b^3}{3!}$ | $\frac{a^0 \cdot b^3}{0! \cdot 3!}$ | $\frac{a^1 \cdot b^3}{1! \cdot 3!}$ | $\frac{a^2 \cdot b^3}{2! \cdot 3!}$ | $\frac{a^3 \cdot b^3}{3! \cdot 3!}$ | $\frac{a^4 \cdot b^3}{4! \cdot 3!}$ | $\dots$ |
| $\frac{b^4}{4!}$ | $\frac{a^0 \cdot b^4}{0! \cdot 4!}$ | $\frac{a^1 \cdot b^4}{1! \cdot 4!}$ | $\frac{a^2 \cdot b^4}{2! \cdot 4!}$ | $\frac{a^3 \cdot b^4}{3! \cdot 4!}$ | $\frac{a^4 \cdot b^4}{4! \cdot 4!}$ | $\dots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

В ней в верхней строчке написаны подряд члены ряда $\exp(a)$, в левом столбце — $\exp(b)$, а в пересечении строки и столбца — произведение соответствующих членов. Тогда легко видеть, что

$$\exp(a)\exp(b) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^k}{k!}\right).$$

В таком случае при раскрытии скобок мы получаем члены, находящиеся в угловом квадрате $n+1 \times n+1$ таблицы. Если же раскрыть скобки у члена $(a+b)^n/n!$ ряда $\exp(a+b)$, то получим члены на диагонали № $n$ (без учёта особой строки и особого столбца); значит при раскрытии скобок у префиксных суммы в $\exp(a+b)$ мы получаем члены в равнобедренных прямоугольных треугольниках размера $n$, вписанных прямым углом в угол таблицы. Тогда получаем, что $\exp(a)\exp(b)$ и $\exp(a+b)$ — просто суммы рядов, членами которых являются значения из таблицы, но в разных порядках.

Заметим, что ряд членов из таблицы сильно сходится. Действительно, давайте в последовательность подряд выпишем члены диагоналей. Получается, что эо всё та же последовательность $\exp(a+b)$, но только в ней каждый член разбили сразу на несколько подряд идущих. Заметим, что для всякого $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\frac{(|a|+|b|)^n}{n!} = \frac{|a|^n\cdot|b|^0}{n!\cdot 0!} + \dots + \frac{|a|^0\cdot|b|^n}{0!\cdot n!}.$$

Соответственно выписанный ряд сильно сходится, поскольку сильно сходится ряд $\exp(|a|+|b|)$. Значит при любых перестановках мы получим одно и то же, значит $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$. $\square$

**Утверждение 102.**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$$

**Доказательство.** Давайте раскроем скобки в подпредельном выражении:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{\binom{n}{1}}{n}x + \frac{\binom{n}{2}}{n^2}x^2 + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n^n}x^n$$

Заметим, что при всяком $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ член степени $k$ равен

$$\frac{\binom{n}{k}}{n^k} x^k = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}$$

Тогда видно, что для всякого $k$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} x^k = \frac{x^k}{k!}$$

и заодно

$$\left| \frac{\binom{n}{k}}{n^k} x^k \right| < \left| \frac{x^k}{k!} \right|$$

Следовательно мы получаем последовательность рядов, почленно сходящихся к $\exp(x)$ и почленно ограниченных по модулю константой $C = 1$. Значит по теореме предел определён и равен $\exp(x)$. □

**Упражнение 1.** Рассмотрим функцию

$$f(x) := x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

1. Покажите, что $f$ сходится при любом $x$.
2. Покажите, что $f(x+1) = -f(x)$.
3. Превратите $f$ в ряд и покажите, что $f$ сильно сходится при всяком $x$ (осторожно, аккуратная возня с суммами и не очень аккуратная — с оценками).
4. Какое значение получается, если подставить $x = \frac{1}{2}$? Чему конкретно, можно предположить, равна функция $f(x)$?

*Замечание.* До синуса недалеко, но я пока не знаю, что нужно сделать, чтобы окончательно доказать, что это он...

**Упражнение 2.** Рассмотрим функции

$$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\exp(xi) - \exp(-xi)}{2i} \qquad \text{и} \qquad c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\exp(xi) + \exp(-xi)}{2}$$

1. Покажите, что $s$ и $c$ определены корректно, т.е. они действительно возвращают вещественные значения.
2. Докажите, что $s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$ и $c(x+y) = c(x)c(y) - s(y)s(x)$ для всевозможных $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Докажите, что $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$ для всевозможных $x \in \mathbb{R}$.
4. Докажите, что $s$ и $c$ — бесконечно дифференцируемые функции.
5. Докажите, что $s'(x) = c(x)$ и $c'(x) = -s(x)$ для всевозможных $x \in \mathbb{R}$.
6. Докажите, что $\lim_{x \to 0} \frac{s(x)}{x} = 1$.
7. Докажите, что $s(x) = \sin(x)$, а $c(x) = \cos(x)$.