# Геометрия и топология.

Лектор — Евгений Анатольевич Фоминых
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

Литература:

- Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М., “Элементарная топология”, М.:МЦНМО, 2012.
- Коснёвски Чес, “Начальный курс алгебраической топологии”, М.:Мир, 1983.
- Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко, “Введение в топологию”, М.:Наука. Физматлит, 1995.
- James Munkres, Topology.

## 1 Метрическое пространство

**Определение 1.** Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *метрикой* (или *расстоянием*) в множестве $X$, если:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (“неравенство треугольника”).

Пара $(X, d)$, где $d$ — метрика в $X$, называется *метрическим пространством.*

**Определение 2.** Пусть $(X, d)$ — метрическое пространство. Сужение функции $d$ на $Y \times Y$ является метрикой в $Y$. Метрическое пространство $(Y, d|_{Y\times Y})$ называется *подпространством* пространства $(X, d)$.

**Теорема 1.** Декартово произведение *метрических пространств* $(X, d_X)$ *и* $(Y, d_Y)$ *— метрическое пространство* $(X \times Y, d_{X\times Y})$*, где*

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d(y_1, y_2)^2}$$

**Определение 3.** Пусть $(X, d)$ — метрическое пространство, $a \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Тогда:

- $B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ — *(открытый) шар пространства* $(X, d)$ *с центром в точке* $a$ *и радиусом* $r$;
- $\overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) \leqslant r\}$ — *замкнутой шар пространства* $(X, d)$ *с центром в точке* $a$ *и радиусом* $r$;

*Оригинал конспекта опубликован расположен GitHub

- $S_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) = r\}$ — *сфера пространства* $(X,d)$ *с центром в точке* $a$ *и радиусом* $r$.

**Определение 4.** Пусть $(X,d)$ — метрическое пространство, $A \subseteq X$. Множество $A$ называется *открытым* в метрическом пространстве, если

$$\forall a \in A\ \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq A$$

**Теорема 2.**

1. *Объединение любого семейства открытых множеств открыто.*
2. *Пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.*

**Доказательство.**

1. Пусть дано семейство открытых множеств $\Sigma$. Пусть также $I = \bigcup \Sigma$. Для любого $x \in I$ верно, что существует $J \in \Sigma$, что $x \in J$, а значит есть $r > 0$, что $B_r(x) \subseteq J \subseteq I$, т.е. $x$ — внутренняя точка $I$. Таким образом $I$ открыто.
2. Пусть $I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. Тогда для любого $x \in I$ верно, что существуют $r_1, \ldots, r_n > 0$, что $B_{r_i}(x) \subseteq I_n$, значит $B_{\min r_i} \subseteq I$, значит $x$ — внутренняя точка $I$. Таким образом $I$ открыто.

$\square$

**Определение 5.** Пусть $X$ — некоторое множество. Рассмотрим набор $\Omega$ его подмножеств, для которого:

1. $\varnothing, X \in \Omega$;
2. объединение любого семейства множеств из $\Omega$ лежит в $\Omega$;
3. пересечение любого конечного семейства множеств, принадлежащих $\Omega$, также принадлежит $\Omega$.

В таком случае:

- $\Omega$ — *топологическая структура* или просто *топология* в множестве $X$;
- множество $X$ с выделенной топологической структурой $\Omega$ (т.е.пара $(X, \Omega)$) называется *топологическим пространством*;
- элементы множества $\Omega$ называются *открытыми множествами* пространства $(X, \Omega)$.

**Определение 6.** Множество $F \subseteq X$ *замкнуто* в пространстве $(X, \Sigma)$, если его дополнение $X \setminus F$ открыто (т.е. если $X \setminus F \in \Sigma$).

*Замечание.* Свойства:

- $\varnothing$ и $X$ — замкнуты.
- Объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто.
- Пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.