Листочек 1.
Дискретная теория вероятностей. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

3 апреля 2021 г.

Содержание

Задача 1. Предположим можно. Пусть p_i и q_i ($i \in \{1; \dots; n\}$) суть вероятности выпадения числа i на первом и втором кубиках соответственно.

Мы хотим, чтобы сумма выпавших чисел была равномерно распределена на множестве $\{2; \dots; 12\}$, а следовательно, чтобы вероятность выпадения каждой из описанных сумм равнялась $1/11$. В частности

$$p_1 \cdot q_1 = \frac{1}{11} \qquad p_6 \cdot q_6 = \frac{1}{11} \qquad p_1 \cdot q_6 + p_2 \cdot q_5 + \dots + p_6 \cdot q_1 = \frac{1}{11}$$

Тогда по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим мы имеем, что

$$\frac{1}{11} \geqslant p_1 \cdot q_6 + p_6 \cdot q_1 \geqslant 2\sqrt{(p_1 \cdot q_6)(p_6 \cdot q_1)} = 2\sqrt{(p_1 \cdot q_1)(p_6 \cdot q_6)} = \frac{2}{11}$$

— противоречие. Значит достичь данной цели невозможно.

Задача 2. Обозначим всякую конфигурацию из X спичек, взятых из первого коробка, и Y спичек, взятых из второго коробка, за $(X; Y)$. Мы начинаем в $(0; 0)$ и путешествуем по прямоугольнику $(n + 1) \times (M + 1)$. Каждым шагом мы можем увеличить ровно одну координату на единицу, если это возможно, причём, какую конкретно операцию выполнять, мы выбираем случайно (с равномерно распределённой вероятностью). И мы ищем мат. ожидание числа Y такого, что $(n; Y)$ — первая посещённая конфигурация с первой координатой равной n.

Пусть первой такой точкой мы посетили $(n; T)$, что $T < M$. Тогда в неё мы пришли из $(n - 1; T)$, а значит у нас было $\binom{T+n-1}{n-1}$ способов добраться в неё, и в каждый момент у нас был выбор из двух направлений (так как никакая координата не упиралась в свой максимум; только в самом конце). Следовательно вероятность такого события равна

$$\frac{\binom{T+n-1}{n-1}}{2^{T+n}}$$

Теперь посчитаем эту же вероятность, но для $T = M$. Заметим, что в этом случае мы сначала попали в какую-то точку $(k; M - 1)$ ($k < n$), следующим шагом попали в $(k; M)$, а затем и в $(n; M)$. Таким образом все пути разбиваются на классы по значениям k. Фиксируем какое-нибудь k. Тогда способов пройти таким образом ровно $\binom{k+M-1}{k}$; при этом выбор, куда пойти, у нас был вплоть до вершины $(k; M)$. Следовательно вероятность каждого такого пути равна $1/2^{M+k}$. Следовательно суммарная вероятность (т.е. вероятность того, что $Y = M$) равна

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{k+M-1}{k}}{2^{M+k}}$$

Таким образом

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{T=0}^{M-1} T \cdot \frac{\binom{T+n-1}{n-1}}{2^{T+n}} + M \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{k+M-1}{k}}{2^{M+k}}$$
$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{T=0}^{M-1} T^2 \cdot \frac{\binom{T+n-1}{n-1}}{2^{T+n}} + M^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{k+M-1}{k}}{2^{M+k}}$$

Заметим, что для $T > 0$

$$T \cdot \frac{\binom{T+n-1}{n-1}}{2^{T+n}} = n \cdot \frac{\binom{T+n-1}{n}}{2^{T+n}}$$

и следовательно

$$\sum_{T=0}^{M-1} T \cdot \frac{\binom{T+n-1}{n-1}}{2^{T+n}} = \sum_{T=1}^{M-1} n \cdot \frac{\binom{T+n-1}{n}}{2^{T+n}} = n \sum_{T=0}^{(M-1)-1} \frac{\binom{T+(n+1)-1}{(n+1)-1}}{2^{T+(n+1)}} = n \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{k+(M-1)-1}{k}}{2^{(M-1)+k}}\right)$$

Поясним последний переход. Заметим, что вероятность добраться до какой-либо точки $(n; T)$ рано или поздно равна 1, а следовательно

$$1 = \sum_{T=0}^{M-1} \frac{\binom{T+n-1}{n-1}}{2^{T+n}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{k+M-1}{k}}{2^{M+k}}$$

(говоря по-другому, мы написали, что $\mathbb{E}(Y^0) = 1$). В последнем же переходе мы применили это равенство для $n + 1$ и $M - 1$ вместо n и M соответственно.

Аналогично сделаем тот же трюк для $T(T - 1)$.

$$T(T-1) \cdot \frac{\binom{T+n-1}{n-1}}{2^{T+n}} = n(T-1) \cdot \frac{\binom{T+n-1}{n}}{2^{T+n}} = n(n+1) \cdot \frac{\binom{T+n-1}{n+1}}{2^{T+n}}$$

и следовательно

$$\sum_{T=0}^{M-1} T(T-1) \cdot \frac{\binom{T+n-1}{n-1}}{2^{T+n}} = \sum_{T=2}^{M-1} n(n+1) \cdot \frac{\binom{T+n-1}{n+1}}{2^{T+n}}$$
$$= n(n+1) \sum_{T=0}^{(M-2)-1} \frac{\binom{T+(n+2)-1}{(n+2)-1}}{2^{T+(n+2)}} = n(n+1) \left(1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\binom{k+(M-2)-1}{k}}{2^{(M-2)+k}}\right)$$

Таким образом мы получаем, что

$$\mathbb{E}(Y) = n \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{k+(M-1)-1}{k}}{2^{(M-1)+k}}\right) + M \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{k+M-1}{k}}{2^{M+k}}$$
$$\mathbb{E}(Y^2) = n \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{k+(M-1)-1}{k}}{2^{(M-1)+k}}\right) + n(n+1) \left(1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\binom{k+(M-2)-1}{k}}{2^{(M-2)+k}}\right) + M^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{k+M-1}{k}}{2^{M+k}}$$

Дисперсия легко получается по соотношению $\mathbb{D}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$, но получится что-то ещё более страшное и менее сокращаемое.

Теперь определим асимптотику по M.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) - n &= -n \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{k+(M-1)-1}{k}}{2^{(M-1)+k}} + M \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{k+M-1}{k}}{2^{M+k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{-n\binom{k+(M-1)-1}{k} + M\binom{k+M-2}{k-1}}{2^{(M-1)+k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{-n\frac{(M+k-2)\cdots(M-1)}{k!} + M\frac{(M+k-2)\cdots M}{(k-1)!}}{2^{(M-1)+k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(M+k-2)\cdots M}{k!} \cdot \frac{-n(M-1) + Mk}{2^{(M-1)+k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(M+k-2)\cdots M}{k!} \cdot \frac{n-(n-k)M}{2^{(M-1)+k}} \\
&\approx \frac{(M+(n-1)-2)\cdots M}{(n-1)!} \cdot \frac{n-(n-(n-1))M}{2^{(M-1)+(n-1)}} + \frac{(M+n-2)\cdots M}{n!} \cdot \frac{n-(n-n)M}{2^{(M-1)+n}} \\
&= \frac{(M+n-3)\cdots M}{(n-1)!} \cdot \frac{n-M}{2^{M+n-2}} + \frac{(M+n-2)\cdots M}{n!} \cdot \frac{n}{2^{M+n-1}} \\
&= \frac{(M+n-3)\cdots M}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{n-M}{2^{M+n-2}} + \frac{M+n-2}{2^{M+n-1}}\right) \\
&= \frac{(M+n-3)\cdots M}{(n-1)! \cdot 2^{M+n-1}} \cdot (2(n-M) + (M+n-2)) \\
&= \frac{(M+n-3)\cdots M}{(n-1)! \cdot 2^{M+n-1}} \cdot (3n-2-M) \\
&\approx -\frac{M^{n-1}}{(n-1)! \cdot 2^{M+n-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) - n(n+2) &= -n\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{k+(M-1)-1}{k}}{2^{(M-1)+k}} - n(n+1)\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\binom{k+(M-2)-1}{k}}{2^{(M-2)+k}} + M^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{k+M-1}{k}}{2^{M+k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{-n\binom{k+(M-1)-2}{k-1} - n(n+1)\binom{k+(M-2)-1}{k} + M^2\binom{k+M-3}{k-2}}{2^{(M-2)+k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(M+k-3)\cdots M}{k!} \\
&\quad \cdot \frac{-nk(M-1) - n(n+1)(M-1)(M-2) + M^2(k-1)k}{2^{(M-2)+k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(M+k-3)\cdots M}{k!} \\
&\quad \cdot \frac{M^2((k-1)k - n(n+1)) + Mn(3(n+1)-k) + n(k-2(n+1))}{2^{(M-2)+k}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\approx \frac{(M+n-3)\cdots M}{n!} \\
&\quad \cdot \frac{M^2((n-1)n - n(n+1)) + Mn(3(n+1)-n) + n(n-2(n+1))}{2^{(M-2)+n}} \\
&\quad + \frac{(M+(n+1)-3)\cdots M}{(n+1)!} \\
&\quad \cdot \frac{M^2(((n+1)-1)(n+1) - n(n+1)) + Mn(3(n+1)-(n+1)) + n((n+1)-2(n+1))}{2^{(M-2)+(n+1)}} \\
&= \frac{(M+n-3)\cdots M}{n!} \cdot \frac{M^2(-2n) + Mn(2n+3) - n(n+2)}{2^{M+n-2}} \\
&\quad + \frac{(M+n-2)\cdots M}{(n+1)!} \cdot \frac{Mn(2(n+1)) - n(n+1)}{2^{M+n-1}} \\
&= \frac{(M+n-3)\cdots M}{(n-1)!} \cdot \frac{M^2(-2) + M(2n+3) - (n+2)}{2^{M+n-2}} \\
&\quad + \frac{(M+n-3)\cdots M}{(n-1)!} \cdot \frac{(M+n-2)(2M-1)}{2^{M+n-1}} \\
&= \frac{(M+n-3)\cdots M}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{-2M^2 + (2n+3)M - (n+2)}{2^{M+n-2}} + \frac{2M^2 + (2n-5)M - (n-2)}{2^{M+n-1}} \right) \\
&= \frac{(M+n-3)\cdots M}{(n-1)! \cdot 2^{M+n-1}} \cdot \big(-4M^2 + (4n+6)M - (2n+4) + 2M^2 + (2n-5)M - (n-2)\big) \\
&= \frac{(M+n-3)\cdots M}{(n-1)! \cdot 2^{M+n-1}} \cdot \big(-2M^2 + (6n+1)M - (3n+2)\big) \\
&\approx -\frac{M^n}{(n-1)! \cdot 2^{M+n-2}}
\end{aligned}
$$

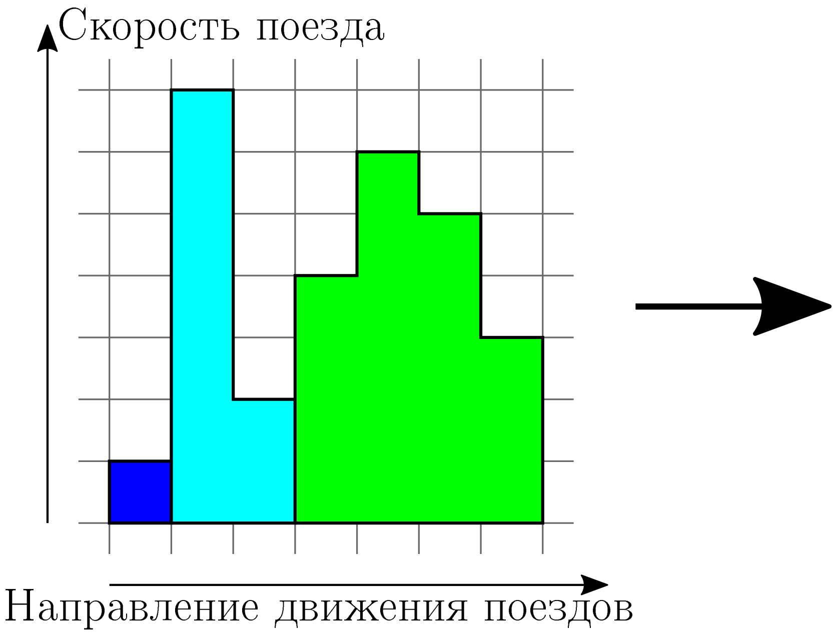
Следовательно

$$
\begin{gathered}
\mathbb{E}(Y) = n - \frac{M^{n-1}}{(n-1)! \cdot 2^{M+n-1}}(1+o(1)) \\
\mathbb{E}(Y)^2 = n^2 - 2n\frac{M^{n-1}}{(n-1)! \cdot 2^{M+n-1}}(1+o(1)) \\
\mathbb{E}(Y^2) = n(n+2) - \frac{M^n}{(n-1)! \cdot 2^{M+n-2}}(1+o(1)) \\
\mathbb{D}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 2n - \frac{M^n}{(n-1)! \cdot 2^{M+n-2}}(1+o(1))
\end{gathered}
$$

Задача 3. WLOG будем считать, что у поездов скорости равны 1, …, n соответственно, но выезжают они в случайном порядке. Рассмотрим всякий элементарный исход. По сути он соответствует расстановке поездов по временам выезда. Давайте сопоставим каждому такому исходу перестановку чисел от 1 до n, определённую следующим образом.

> Рассмотрим любой караван. Пусть в строимой перестановке скорость первого поезда каравана перейдёт в скорость второго поезда каравана, скорость второго — в скорость третьего, и т.д., скорость последнего — в скорость первого поезда каравана.

Таким образом караваны переводятся в циклы этой перестановки. Заметим, что данное сопоставление биективно, так как объектов обоих типов по $n!$, а отображение сюръективное (так



как циклы всякой перестановки можно записать по порядку элементов в этих циклах, начиная с самых малых элементов циклов, и расставить эти циклы в порядке возрастания минимальных элементов). Поэтому задача теперь сведена к поиску мат. ожидания и дисперсии количества циклов в случайной (вероятность равномерно распределена) перестановки.

Теперь будем сопоставлять каждой перестановке последовательность чисел по следующему правилу.

> Будем по очереди удалять элементы перестановки в порядке от n до 1 и писать последовательность с конца. Пусть на некотором шаге мы удаляем вершину k. Если в её цикле нет других элементов, то напишем 0 и удалим цикл; иначе напишем номер вершины, в которую k переходит и удалим вершину k, сопоставляя вершине, которая переходила в k, вершину, в которую переходит k.

Например, перестановке с рисунка будет сопоставлена последовательность $(0;0;0;3;4;4;2)$. Причём, обращая операции (если написан ноль — создать новый цикл, иначе — вставить вершину в уже имеющийся в правильное место), можно по всякой последовательности получить перестановку. Единственное условие на последовательность — она должна иметь вид $(a_1;\ldots;a_n)$, где $a_k \in \{0;\ldots;k-1\}$. При этом количество циклов в перестановке в таком случае перейдёт в количество нулей в последовательности. Поэтому теперь задача сведена к поиску мат. ожидания и дисперсии количества нулей в случайной (вероятность равномерно распределена) последовательности описанного вида.

Заметим, что полученную случайную величину уже понятным образом можно превратить в сумму случайных независимых величин $X_k = \mathbb{1}_{a_k=0}$ ($k \in \{1;\ldots;n\}$). Значит

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

и следовательно

$$\mathbb{D}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

Задача 4. Нет. :(

Задача 5. Определим

$$p := \mathbb{P}(X \geqslant t) \qquad a := \mathbb{E}(X \mid X \geqslant t) \qquad b := \mathbb{E}(X \mid X < t)$$

Тогда понятно, что

$$\mathbb{E}(X) = p \cdot \mathbb{E}(X \mid X \geqslant t) + (1-p) \cdot \mathbb{E}(X \mid X < t) = pa + (1-p)b$$
$$\mathbb{D}(X) = p \cdot \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2 \mid X \geqslant t) + (1-p) \cdot \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2 \mid X < t)$$

Также повторим, что для всякой константы λ и всякой случайной величины T

$$\mathbb{E}((T-\lambda)^2) = \mathbb{E}(T^2) - 2\lambda\mathbb{E}(T) + \lambda^2 = (\lambda - \mathbb{E}(T))^2 + \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = (\lambda - \mathbb{E}(T))^2 + \mathbb{D}(T) \geqslant (\lambda - \mathbb{E}(T))^2$$

В частности применим это утверждение к величинам $X \mid X \geqslant t$ и $X \mid X < t$ и константе $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2 \mid X \geqslant t) \geqslant (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \mid X \geqslant t))^2 = (0-a)^2 = a^2$$
$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2 \mid X < t) \geqslant (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \mid X < t))^2 = (0-b)^2 = b^2$$

Поэтому

$$\mathbb{D}(X) \geqslant pa^2 + (1-p)b^2 = pa^2 + \frac{((1-p)b)^2}{(1-p)} = pa^2 + \frac{(-pa)^2}{(1-p)} = \frac{pa^2}{(1-p)} \geqslant \frac{pt^2}{(1-p)}$$

так как $a = \mathbb{E}(X \mid X \geqslant t) \geqslant t$. Следовательно

$$\mathbb{D}(X)(1-p) \geqslant pt^2 \qquad \mathbb{D}(X) \geqslant p(t^2 + \mathbb{D}(X)) \qquad \frac{\mathbb{D}(X)}{\mathbb{D}(X) + t^2} \geqslant p = \mathbb{P}\{X \geqslant t\}$$

Задача 6. Заметим, что при всяком элементарном исходе если $S_n \leqslant c$, то $X_1 \leqslant c$, ..., $X_n \leqslant c$. Следовательно

$$\mathbb{P}\{S_n \leqslant c\} \leqslant \mathbb{P}\left\{\bigwedge_{k=1}^{n} X_k \leqslant c\right\}$$

При этом из независимости и одинаковой распределённости случайных величин X_1, ..., X_n следует, что

$$\mathbb{P}\left\{\bigwedge_{k=1}^{n} X_k \leqslant c\right\} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{X_k \leqslant c\} = (\mathbb{P}\{X_1 \leqslant c\})^n = F(c)^n$$

Таким образом

$$\mathbb{P}\{S_n \leqslant c\} \leqslant F(c)^n$$

Поскольку $F(c) < 1$, то можно взять в качестве α значение $-\ln(F(c))$. Единственная проблема, когда так сделать нельзя — когда $F(c) = 0$; но в таком случае подойдёт любая константа $\alpha > 0$.

Замечание. На самом деле среди всех оценок вида $e^{\alpha n + \beta}$ оценка $\alpha = -\ln(F(c))$, $\beta = 0$ является наилучшей. Действительно, если фиксировать $N \in \mathbb{N}$ и рассмотреть величины

$$X_k := \begin{cases} c/N & \text{с вероятностью } p \\ c+1 & \text{с вероятностью } 1-p \end{cases}$$

где, понятное дело, $p = F(c)$, то для всех $n \leqslant N$

$$\mathbb{P}\{S_n \leqslant c\} = \mathbb{P}\left\{\bigwedge_{k=1}^{n} X_k \leqslant c\right\}$$

(очевидно, что либо некоторая величина примет значение $c + 1 > c$, либо все они примут c/N, а значит сумма будет равна $cn/N \leqslant c$). Таким образом для $n \leqslant N$

$$F(c)^n = p^n \leqslant e^{\alpha n + \beta}$$

Рассматривая случаи разных N (и соответствующих им величин) мы получаем, что это же утверждение для всех n. Логарифмируя его получаем, что для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\ln(p)n \leqslant \alpha n + \beta$$

Следовательно $\alpha \geqslant \ln(p)$ (следует из асимптотики), а $\beta \geqslant 0$ (следует из значения при $n = 0$).

Задача 7. Пусть $\rho(n, k)$ есть вероятность попасть ровно $k + 1$ из $n + 2$ бросков (т.е. k новых раз из n новых бросков); $0 \leqslant k \leqslant n$. Покажем по индукции по n, что $\rho(n, k) = 1/(n + 1)$.

База. $n = 0$. Очевидно, вероятность равна $1 = 1/(n + 1)$, так как новых бросков не было совершено.

Шаг. Пусть утверждение доказано для n; докажем его для $n + 1$. Как нам дано в условии, если мы забросили $k + 1$ мяч из $n + 2$, то с вероятностью $(k + 1)/(n + 2)$ мы забросим ещё один, а с вероятностью $(n - k + 1)/(n + 2)$ — не забросим. Следовательно

$$\begin{aligned}\rho(n+1, k) = \frac{k}{n+2}\rho(n, k-1) + \frac{n-k+1}{n+2}\rho(n, k)& \\ = \frac{k}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{n-k+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}&\end{aligned}$$

При этом в крайних случаях (т.е. при $k = 0$ или $k = n + 1$) ничего не ломается: если $k = 0$, то мы просто получаем, что

$$\rho(n+1, k) = \rho(n+1, 0) = \frac{n+1}{n+2}\rho(n, 0) = \frac{1}{n+1}$$

Аналогично и для $k = n + 1$.

Следовательно требуемая в задаче величина $\rho(100, 50)$ просто равна $1/101$.

Задача 8. Рассмотрим возможные конфигурации ящика: 0 белых и 100 чёрных (обозначим как $(0; 100)$), 1 белый и 99 чёрных ($(1; 99)$), $\ldots$, 100 белых и 0 чёрных ($(100; 0)$). Каждый раз, находясь в конфигурации $(w; b)$ мы берём случайную (вероятность равномерно распределена) упорядоченную пару шаров и перекрашиваем первый в цвет второго. Говоря иначе,

$$\begin{tikzcd}
 & (w;b) \arrow[dl, "wb"'] \arrow[d] \arrow[dr, "wb"] & \\
(w-1;b+1) & (w;b) & (w+1;b-1)
\end{tikzcd}$$

с вероятностью $wb/((w + b)(w + b - 1))$ мы берём пару из белого и чёрного шаров и переходим в $(w - 1; b + 1)$, с той же вероятностью берём пару из чёрного и белого шаров и переходим в

$(w+1; b-1)$, а с оставшейся вероятностью остаёмся на месте. А нас спрашивают мат. ожидание числа шагов, после которых мы попадём в $(0;100)$ или $(100;0)$ (и там останемся, так как из них выйти нельзя), начиная в $(1;99)$.

Обозначим за $E(w)$ искомое мат. ожидания, если стартовать в $(w; N-w)$, где N — количество шаров. Несложно видеть, что для всякого $k \in \{1; \ldots; N-1\}$ выполнено следующее равенство:

$$E(k) = 1 + \frac{k(N-k)}{N(N-1)}E(k-1) + \frac{k(N-k)}{N(N-1)}E(k+1) + \left(1 - \frac{2k(N-k)}{N(N-1)}\right) E(k)$$

Перепишем его немного в другом виде:

$$2E(k) - E(k-1) - E(k+1) = \frac{N(N-1)}{k(N-k)}$$

При этом понятно, что $E(0) = E(N) = 0$. Следовательно мы имеем уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(0) \\ E(1) \\ \vdots \\ E(N-1) \\ E(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{N(N-1)}{1(N-1)} \\ \vdots \\ \frac{N(N-1)}{(N-1)1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Временно отойдём от данного уравнения и рассмотрим свойства некоторых матриц. Для начала обозначим за A_n матрицу размера $n \times n$ вида

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Докажем по индукции по n, что $\det(A_n) = n + 1$.

База. $\det(A_0) = 1$, $\det(A_1) = 2$, $\det(A_2) = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 3$.

Шаг. Рассмотрим ненулевые слагаемые из определения det (как сумма по всем перестановкам). Если слагаемое использует $a_{1,1}$, то сумма всех таких слагаемых равна $2 \cdot \det(A_{n-1})$; иначе оно использует $a_{1,2}$ и $a_{2,1}$ (иначе занулится), а значит сумма таких слагаемых равна $-(-1)^2 \cdot \det(A_{n-2})$. Таким образом

$$\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}) = 2n - (n-1) = n + 1$$

Теперь давайте найдём A_n^{-1}; обозначим её за B_n. Вспомним, что

$$b_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} M_{j,i}}{\det(A_n)}$$

где $M_{i,j}$ — дополнительные миноры. Пусть $i \leqslant j$; иначе будет верно аналогичное рассуждение.

Тогда сам минор $M_{i,j}$ имеет вид

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccccc|cccc}
2 & -1 & & & & & & & & & & & \\
-1 & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & -1 & & & & & & & & & \\
 & & -1 & 2 & -1 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & -1 & 2 & -1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & -1 & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & 2 & & & & \\
 & & & & & & & & -1 & -1 & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & 2 & -1 & & \\
 & & & & & & & & & -1 & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & -1 \\
 & & & & & & & & & & & -1 & 2
\end{array}\right)
$$

где по вертикали отчёркнуты $i-1$, $j-i$ и $n-j$ столбцов соответственно. Заметим, что все ненулевые слагаемые определителя $M_{i,j}$ в первых $i-1$ столбцах используют элементы из верхнего левого сектора, а значит и первые $i-1$ строк; следовательно -1 в среднем верхнем секторе минора не используется. Аналогично не используется определитель в среднем правом секторе. Следовательно

$$
M_{i,j} = \det(A_{i-1}) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix}
-1 & 2 & -1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & -1 \\
 & & & \ddots & 2 \\
 & & & & -1
\end{vmatrix}}_{j-i} \cdot \det(A_{n-j}) = i \cdot (-1)^{j-i} \cdot (n+1-j)
$$

В общем случае мы имеем

$$
M_{i,j} = (-1)^{i+j} \min(i,j) \cdot (n+1-\max(i,j))
$$

а следовательно

$$
b_{i,j} = \frac{\min(i,j) \cdot (n+1-\max(i,j))}{n+1}
$$

Теперь вернёмся назад. Заметим, что

$$\Bigg(\underbrace{\begin{matrix} 1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 1 \end{matrix}}_{N+1}\Bigg)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & -1 & & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & A_{N-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & A_{N-1}^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & B_{N-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$\begin{pmatrix} E(0) \\ E(1) \\ \vdots \\ E(N-1) \\ E(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & B_{N-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{N(N-1)}{1(N-1)} \\ \vdots \\ \frac{N(N-1)}{(N-1)1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Весь вектор посчитать сложно из-за природы B_{N-1}, но нам ведь нужно посчитать только $E(1)$!

Так что получим, что

$$
\begin{aligned}
E(1) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & B_{N-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right)_{2,*} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{N(N-1)}{1(N-1)} \\ \vdots \\ \frac{N(N-1)}{(N-1)1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & B_{N-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{2,*} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{N(N-1)}{1(N-1)} \\ \vdots \\ \frac{N(N-1)}{(N-1)1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (B_{N-1})_{1,*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{N(N-1)}{1(N-1)} \\ \vdots \\ \frac{N(N-1)}{(N-1)1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\min(1,k)\cdot(N-\max(1,k))}{N} \cdot \frac{N(N-1)}{k(N-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1\cdot(N-k)}{N} \cdot \frac{N(N-1)}{k(N-k)} \\
&= (N-1)\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

В случае $N = 100$ мы имеем

$$
99\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k} = \frac{360\ 968\ 703\ 235\ 711\ 654\ 233\ 892\ 612\ 988\ 250\ 163\ 157\ 207}{704\ 246\ 214\ 441\ 540\ 173\ 379\ 129\ 383\ 184\ 972\ 763\ 200} \approx 512.56
$$
