Основы математической логики.
Практика. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

1 марта 2021 г.

1 Формальные слова

Задача 1. Очевидное следствие следующего упражнения.

Задача 2.

Лемма 1. *Пусть даны* $\{\varphi; \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *и* $\chi \in \mathscr{L}^*$*, что* φ *и* ψ *входят в* χ*, и некоторые их вхождения в* χ *пересекаются и в объединении дают всё* χ*. Тогда* $\varphi \preccurlyeq \psi$ *или* $\psi \preccurlyeq \varphi$*.*

Доказательство. WLOG вхождение φ в χ, рассмотренное в условии, имеет начало 0.

Если рассмотренное в условии вхождение ψ в χ тоже имеет начало 0, то тогда понятно, что они совпадают (теорема из лекции). Тогда предположим противное.

Если же вхождение ψ заканчивается не позже чем вхождение φ, то лемма сиюминутно доказана. Поэтому покажем, что оставшегося произойти не могло.

Докажем лемму по индукции по $|\varphi|$.

База. $|\varphi| = 1$. Очевидно, что тогда из-за пересекаемости ψ придётся включить в себя φ.

Шаг. Рассмотрим тип φ.

1. Если $\varphi \in \mathrm{Prop}$, то см. базу.

2. Если $\varphi = \neg\varphi'$, то понятно, что условие леммы применимо к φ' и ψ.

   - Если $\psi \preccurlyeq \varphi'$, то $\psi \preccurlyeq \varphi$.
   - Если $\varphi' \preccurlyeq \psi$, то $\varphi' = \psi$, следовательно $\psi \preccurlyeq \varphi$.

3. Если $\varphi = (\tau \circ \sigma)$, где $\{\tau; \sigma\} \subseteq \mathrm{Form}$, а $\circ \in \{\wedge; \vee; \to\}$. Понятно, что ψ будет содержать последний символ φ — ")". Тогда несложно видеть из баланса скобок, что ψ придётся включить в себя всё φ.

□

---

2 PCL: естественная дедукция I

Задача 1.

I1.

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1}{\psi \to \varphi}\,(2)}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\,(1)$$

I2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^3 \qquad [\varphi \to \psi]^2}{\psi} \qquad \dfrac{[\varphi]^3 \qquad [\varphi \to (\psi \to \chi)]^1}{\psi \to \chi}}{\chi}}{\varphi \to \chi}\,(3)}{(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}\,(2)}{(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))}\,(1)$$

C1.

$$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$$

C2.

$$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

C3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \qquad [\psi]^2}{\varphi \wedge \psi}}{\psi \to \varphi \wedge \psi}\,(2)}{\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)}\,(1)$$

D1.

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$$

D2.

$$\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

D3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \vee \psi]^3 \qquad \dfrac{[\varphi]^4 \qquad [\varphi \to \chi]^1}{\chi} \qquad \dfrac{[\psi]^4 \qquad [\psi \to \chi]^2}{\chi}}{\chi}\,(4)}{\varphi \vee \psi \to \chi}\,(3)}{(\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi)}\,(2)}{(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))}\,(1)$$

N1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^3 \qquad [\varphi \to \psi]^1}{\psi} \qquad \dfrac{[\varphi]^3 \qquad [\varphi \to \neg\psi]^2}{\neg\psi}}{\neg\varphi}\,(3)}{(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi}\,(2)}{(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)}\,(1)$$

N2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^2 \qquad [\neg\varphi]^1}{\psi}\,(3)}{\varphi \to \psi}\,(2)}{\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)}\,(1)$$

N3.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \qquad \dfrac{[\neg\varphi]^3}{\varphi \vee \neg\varphi}}{\varphi}\,(3) \qquad \dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \qquad \dfrac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi}}{\neg\varphi}\,(2)}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(1)$$

Задача 2.

IT.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^3 \qquad [\varphi \to \psi]^1}{\psi} \qquad [\psi \to \chi]^2}{\chi}}{\varphi \to \chi}\,(3)}{(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)}\,(2)}{(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))}\,(1)$$

PE.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi]^2 \qquad \dfrac{[\varphi]^3 \qquad [\varphi \to (\psi \to \chi)]^1}{\psi \to \chi}}{\chi}}{\varphi \to \chi}\,(3)}{\psi \to (\varphi \to \chi)}\,(2)}{(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))}\,(1)$$

Задача 3.

2N.

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \qquad [\neg\varphi]^2}{\neg\neg\varphi}\,(2)}{\varphi \to \neg\neg\varphi}\,(1)$$

Co.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^3 \qquad [\varphi \to \psi]^1}{\psi} \qquad [\neg\psi]^2}{\neg\varphi}\,(3)}{\neg\psi \to \neg\varphi}\,(2)}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)}\,(1)$$

Задача 4.

2N.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\neg\neg\varphi]^1}{\varphi}\,(2)}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,(1)$$

Co.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\psi]^3 \qquad [\neg\psi \to \neg\varphi]^1}{\neg\varphi} \qquad [\varphi]^2}{\psi}\,(3)}{\varphi \to \psi}\,(2)}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)}\,(1)$$

NE.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^3 \qquad [\neg\varphi \to \psi]^1}{\psi} \qquad \dfrac{[\neg\varphi]^3 \qquad [\neg\varphi \to \neg\psi]^2}{\neg\psi}}{\varphi}\,(3)}{(\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi}\,(2)}{(\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)}\,(1)$$

---

3 PCL: естественная дедукция II

Задача 1.

а) Итог: 4/4. Без $\neg$Elim.

$$\dfrac{\dfrac{[p \vee q]^1 \qquad \dfrac{[p]^2}{q \vee p} \qquad \dfrac{[q]^2}{q \vee p}}{q \vee p}\,(2)}{(p \vee q) \to (q \vee p)}\,(1)$$

б) Итог: 8/8. Без $\neg$Elim.

$$\dfrac{\dfrac{[(p\vee q)\vee r]^1 \qquad \dfrac{[p\vee q]^2 \quad \dfrac{[p]^3}{p\vee(q\vee r)} \quad \dfrac{\dfrac{[q]^3}{q\vee r}}{p\vee(q\vee r)}}{p\vee(q\vee r)}\,(3) \qquad \dfrac{\dfrac{[r]^2}{q\vee r}}{p\vee(q\vee r)}}{p\vee(q\vee r)}\,(2)}{((p\vee q)\vee r)\to(p\vee(q\vee r))}\,(1)$$

Задача 2.

а) Итог: 9/9. Без $\neg$Elim.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p\wedge(q\vee r)]^1}{q\vee r} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p\wedge(q\vee r)]^1}{p} \quad [q]^2}{p\wedge q}}{(p\wedge q)\vee(p\wedge r)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p\wedge(q\vee r)]^1}{p} \quad [r]^2}{p\wedge r}}{(p\wedge q)\vee(p\wedge r)}}{(p\wedge q)\vee(p\wedge r)}\,(2)}{(p\wedge(q\vee r))\to((p\wedge q)\vee(p\wedge r))}\,(1)$$

б) Итог: 10/10. Без $\neg$Elim.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)]^1 \quad \dfrac{[p\wedge q]^2}{p} \quad \dfrac{[p\wedge r]^2}{p}}{p}\,(2) \qquad \dfrac{[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)]^1 \quad \dfrac{\dfrac{[p\wedge q]^3}{q}}{q\vee r} \quad \dfrac{\dfrac{[p\wedge r]^3}{r}}{q\vee r}}{p}\,(3)}{p\wedge(q\vee r)}}{((p\wedge q)\vee(p\wedge r))\to(p\wedge(q\vee r))}\,(1)$$

в) Итог: 10/10. Без $\neg$Elim.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p\vee(q\wedge r)]^1 \quad \dfrac{[p]^2}{p\vee q} \quad \dfrac{\dfrac{[q\wedge r]^2}{q}}{p\vee q}}{p\vee q}\,(2) \qquad \dfrac{[p\vee(q\wedge r)]^1 \quad \dfrac{[p]^3}{p\vee r} \quad \dfrac{\dfrac{[q\wedge r]^3}{r}}{p\vee r}}{p\vee r}\,(3)}{(p\vee q)\wedge(p\vee r)}}{(p\vee(q\wedge r))\to((p\vee q)\wedge(p\vee r))}\,(1)$$

г) Итог: 9/9. Без $\neg$Elim.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(p\vee q)\wedge(p\vee r)]^1}{p\vee q} \qquad \dfrac{[p]^2}{p\vee(q\wedge r)} \qquad \dfrac{\dfrac{[(p\vee q)\wedge(p\vee r)]^1}{p\vee r} \quad \dfrac{[p]^3}{p\vee(q\wedge r)} \quad \dfrac{\dfrac{[q]^2 \quad [r]^3}{q\wedge r}}{p\vee(q\wedge r)}}{p\vee(q\wedge r)}\,(3)}{p\vee(q\wedge r)}\,(2)}{((p\vee q)\wedge(p\vee r))\to(p\vee(q\wedge r))}\,(1)$$

Задача 3.

а) Итог: 6/6. Без ¬Elim.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^2}{p \lor q} \quad [\neg(p \lor q)]^1}{\neg p}\,(2) \qquad \dfrac{\dfrac{[q]^3}{p \lor q} \quad [\neg(p \lor q)]^1}{\neg q}\,(3)}{\neg p \land \neg q}}{\neg(p \lor q) \to (\neg p \land \neg q)}\,(1)$$

б) Итог: 7/7. Без ¬Elim.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg p \land \neg q]^1 \qquad \dfrac{[p \lor q]^2 \qquad \dfrac{[p]^3 \quad \dfrac{[\neg p \land \neg q]^4}{\neg p}}{\neg(\neg p \land \neg q)}\,(4) \qquad \dfrac{[q]^3 \quad \dfrac{[\neg p \land \neg q]^5}{\neg q}}{\neg(\neg p \land \neg q)}\,(5)}{\neg(\neg p \land \neg q)}\,(3)}{\neg(p \lor q)}\,(2)}{(\neg p \land \neg q) \to \neg(p \lor q)}\,(1)$$

в) Итог: 7/7. С ¬Elim.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(p \land q)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p]^3}{\neg p \lor \neg q} \quad [\neg(\neg p \lor \neg q)]^2}{p}\,(3) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg q]^4}{\neg p \lor \neg q} \quad [\neg(\neg p \lor \neg q)]^2}{q}\,(4)}{p \land q}}{\neg p \lor \neg q}\,(2)}{\neg(p \land q) \to (\neg p \lor \neg q)}\,(1)$$

г) Итог: 6/6. Без ¬Elim.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg p \lor \neg q]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[p \land q]^3}{p} \quad [\neg p]^2}{\neg(p \land q)}\,(3) \qquad \dfrac{\dfrac{[p \land q]^4}{q} \quad [\neg q]^2}{\neg(p \land q)}\,(4)}{\neg(p \land q)}\,(2)}{(\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land q)}\,(1)$$

Задача 4.

а) Итог: 4/4. С ¬Elim.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p \lor q]^1 \qquad \dfrac{[p]^2 \quad [\neg p]^3}{q}\,(4) \qquad [q]^3}{q}\,(3)}{p \to q}\,(2)}{(\neg p \lor q) \to (p \to q)}\,(1)$$

б) Итог: 6/6. С ¬Elim.

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg p \vee q)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg p \vee q)]^2 \qquad \dfrac{[\neg p]^3}{\neg p \vee q}}{p}\,(3) \qquad [p \to q]^1}{q}}{\neg p \vee q}}{\neg p \vee q}\,(2)}{(p \to q) \to (\neg p \vee q)}\,(1)
$$

в) Итог: 5/5. С $\neg$Elim.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p]^2 \qquad [p]^3}{q}\,(4)}{p \to q}\,(3) \qquad [(p \to q) \to p]^1}{p} \qquad [\neg p]}{p}\,(2)}{((p \to q) \to p) \to p}\,(1)
$$

---

4 PCL: гильбертовское исчисление

Задача 1.

IT. Покажем, что $\{(\varphi \to \psi); (\psi \to \chi)\} \vdash (\varphi \to \chi)$.

1.	$(\psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$	I1
2.	$(\psi \to \chi)$	гипотеза
3.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	из 1 и 2
4.	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	I2
5.	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	из 3 и 4
6.	$(\varphi \to \psi)$	гипотеза
7.	$(\varphi \to \chi)$	из 5 и 6

Убирая по одной гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$.

PE. Покажем, что $\{\varphi \to (\psi \to \chi); \phi; \psi\} \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$.

1.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	гипотеза
2.	φ	гипотеза
3.	$\psi \to \chi$	из 1 и 2
4.	ψ	гипотеза
5.	χ	из 3 и 4

Убирая по одной в правильном порядке гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$.

Задача 2.

2N. Покажем, что $\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$.

1.	$\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$	I1
2.	φ	гипотеза
3.	$\neg\varphi \to \varphi$	из 1 и 2
4.	$(\neg\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi)$	N1
5.	$(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$	из 3 и 4
6.	$\neg\varphi \to \neg\varphi$	лемма (I1 и I2)
7.	$\neg\neg\varphi$	из 5 и 6

Убирая по одной гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $\varphi \to \neg\neg\varphi$.

Co. Покажем, что $\{\varphi \to \psi; \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$.

1.	$\neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$	I1
2.	$\neg\psi$	гипотеза
3.	$\varphi \to \neg\psi$	из 1 и 2
4.	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$	N1
5.	$\varphi \to \psi$	гипотеза
6.	$(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$	из 4 и 5
7.	$\neg\varphi$	из 3 и 6

Убирая по одной в правильном порядке гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

Задача 3.

2N**.** Покажем, что $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$.

1.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$	N2
2.	$\neg\neg\varphi$	гипотеза
3.	$\neg\varphi \to \varphi$	из 1 и 2
4.	$\varphi \to \varphi$	лемма (I1 и I2)
5.	$(\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to (\varphi \vee \neg\varphi \to \varphi))$	D3
6.	$(\neg\varphi \to \varphi) \to (\varphi \vee \neg\varphi \to \varphi)$	из 4 и 5
7.	$\varphi \vee \neg\varphi \to \varphi$	из 3 и 6
8.	$\varphi \vee \neg$	N3
9.	φ	из 7 и 8

Убирая по одной гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

Co**.** Покажем, что $\{\neg\psi \to \neg\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$.

1.	$\psi \to (\varphi \to \psi)$	I1
2.	$\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$	N2
3.	$\neg\psi \to \neg\varphi$	гипотеза
4.	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\neg\psi \to (\varphi \to \psi)))$	IT (I1 и I2)
5.	$(\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\neg\psi \to (\varphi \to \psi))$	из 3 и 4
6.	$\neg\psi \to (\varphi \to \psi)$	из 2 и 5
7.	$(\psi \to (\varphi \to \psi)) \to ((\neg\psi \to (\varphi \to \psi)) \to (\psi \vee \neg\psi \to (\varphi \to \psi)))$	D3
8.	$(\neg\psi \to (\varphi \to \psi)) \to (\psi \vee \neg\psi \to (\varphi \to \psi))$	из 1 и 7
9.	$\psi \vee \neg\psi \to (\varphi \to \psi)$	из 6 и 8
10.	$\psi \vee \neg\psi$	N3
11.	$\varphi \to \psi$	из 9 и 10

Убирая по одной в правильном порядке гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $(\neg\psi \to \neg\varphi) \vdash (\varphi \to \psi)$.

Задача 4.

1. Покажем, что $\{\neg\varphi \to \psi; \neg\varphi \to \neg\psi\} \vdash \varphi$.

1.	$(\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi)$	N1
2.	$\neg\varphi \to \psi$	гипотеза
3.	$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$	из 1 и 2
4.	$\neg\varphi \to \neg\psi$	гипотеза
5.	$\neg\neg\varphi$	из 3 и 4
6.	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	$\overline{\text{2N}}$
7.	φ	из 5 и 6

Убирая по одной гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $(\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$.

2.

2N. Покажем, что $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$.

1.	$(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi)$	NE
2.	$\neg\varphi \to \neg\varphi$	лемма (I1 и I2)
3.	$(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi$	из 1 и 2
4.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$	I1
5.	$\neg\neg\varphi$	гипотеза
6.	$\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$	из 4 и 5
7.	φ	из 3 и 6

Убирая по одной в правильном порядке гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

N1. Покажем, что $\{\varphi \to \psi; \varphi \to \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$.

1.	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	2N (I1, I2 и NE)
2.	$(\neg\neg\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \psi))$	IT (I1 и I2)
3.	$(\neg\neg\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\psi))$	IT (I1 и I2)
4.	$(\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$	из 1 и 2
5.	$(\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\psi)$	из 1 и 3
6.	$\varphi \to \psi$	гипотеза
7.	$\varphi \to \neg\psi$	гипотеза
8.	$\neg\neg\varphi \to \psi$	из 4 и 6
9.	$\neg\neg\varphi \to \neg\psi$	из 5 и 7
10.	$(\neg\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\neg\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$	NE
11.	$(\neg\neg\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$	из 8 и 10
12.	$\neg\varphi$	из 9 и 11

Убирая по одной в правильном порядке гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$.

Задача 5.

N2. Покажем, что $\{\varphi; \neg\varphi\} \vdash \psi$.

1.	$\varphi \to (\neg\psi \to \varphi)$	I1
2.	φ	гипотеза
3.	$\neg\psi \to \varphi$	из 1 и 2
4.	$\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	I1
5.	$\neg\varphi$	гипотеза
6.	$\neg\psi \to \neg\varphi$	из 4 и 5
7.	$(\neg\psi \to \varphi) \to ((\neg\psi \to \neg\varphi) \to \psi)$	NE
8.	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to \psi$	из 3 и 7
9.	ψ	из 6 и 8

Убирая по одной в правильном порядке гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$.

N3.

1.	$\varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi)$	D1
2.	$(\varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi)) \to ((\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi)) \to \neg\varphi)$	N1 (I1, I2 и NE)
3.	$(\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi)) \to \neg\varphi$	из 1 и 2
4.	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi))$	I1
5.	$(\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi))) \to$ $(((\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi)) \to \neg\varphi) \to (\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \neg\varphi))$	IT (I1 и I2)
6.	$((\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi)) \to \neg\varphi) \to (\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \neg\varphi)$	из 4 и 5
7.	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \neg\varphi$	из 3 и 6
8.	$\neg\varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi)$	D2
9.	$(\neg\varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi)) \to ((\neg\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi)) \to \varphi)$	NE
10.	$(\neg\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi)) \to \varphi$	из 8 и 9
11.	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi))$	I1
12.	$(\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi))) \to$ $(((\neg\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi)) \to \varphi) \to (\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \varphi))$	IT (I1 и I2)
13.	$((\neg\varphi \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi)) \to \varphi) \to (\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \varphi)$	из 11 и 12
14.	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \varphi$	из 10 и 13
15.	$(\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \varphi) \to ((\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \neg\varphi) \to (\varphi \vee \neg\varphi))$	NE
16.	$(\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \neg\varphi) \to (\varphi \vee \neg\varphi)$	из 14 и 15
17.	$\varphi \vee \neg\varphi$	из 7 и 16

Задача 6. TODO

Задача 7.

1. Покажем, что $\{(\varphi \to \psi); (\psi \to \chi)\} \vdash (\varphi \to \chi)$.

1.	$(\psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$	I1
2.	$(\psi \to \chi)$	гипотеза
3.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	из 1 и 2
4.	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	I2
5.	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	из 3 и 4
6.	$(\varphi \to \psi)$	гипотеза
7.	$(\varphi \to \chi)$	из 5 и 6

Убирая по одной гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$.

2. Покажем, что $\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$.

1.	$\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$	I1
2.	φ	гипотеза
3.	$\neg\varphi \to \varphi$	из 1 и 2
4.	$(\neg\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi)$	N1
5.	$(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$	из 3 и 4
6.	$\neg\varphi \to \neg\varphi$	лемма (I1 и I2)
7.	$\neg\neg\varphi$	из 5 и 6

Убирая по одной гипотезы, получаем из теоремы дедукции (а она выводится благодаря аксиомам I1 и I2) утверждение $\varphi \to \neg\neg\varphi$.
