

ОСНОВЫ НАИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.

Станислав Олегович Сперанский

Материалы лекций: ссылка

Литература:

- K. Hrbacek and T. Jech. Introduction to Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Marcel Dekker, Inc., 1999.
- T. Jech. Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.

Будем рассматривать как базовые выражения “ x равен (совпадает с) y ” (“ $x = y$ ”) “ x лежит в y ” (“ $x \in y$ ”).

Определение 1 (Наивная схема аксиом выделения). Пусть $\Phi(x)$ — произвольное условие на объекты. Тогда существует X , что $\forall u(\Phi(u) \leftrightarrow u \in X)$. В этом случае X обозначается как $\{u \mid \Phi(u)\}$.

Утверждение 1 (парадокс Рассела). Пусть $R = \{u \mid u \notin u\}$. Тогда R не может лежать в себе и не может не лежать в себе одновременно.

Из-за данного парадокса будем рассматривать только условия, образованные переменными и $\in, =, \neg, \wedge, \vee, \leftarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

Определение 2 (аксиомы ZFC (= ZF (аксиомы Цермело-Френкеля) + C (аксиома выбора))).

Ext) “Аксиома экстенциональности”:

$$\forall X \forall Y (\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y)$$

Empty) “Аксиома пустого множества”:

$$\exists \emptyset \forall u (u \notin \emptyset)$$

Pair) “Аксиома пары”:

$$\forall X \forall Y \exists Z (\forall u (u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)))$$

Обозначение: $Z = \{X, Y\}$.

Sep) “Схема аксиом выделения”:

$$\forall \Phi(x) \quad \forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u)))$$

Обозначение: $Y = \{u \in X \mid \Phi(u)\}$.

Следствие. *Операторы*

$$\begin{aligned} X \cap Y &:= \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\} \\ X \setminus Y &:= \{u \in X \mid u \notin Y\} \\ \bigcap X &:= \{u \mid \forall v \in X \quad u \in v\} \end{aligned}$$

определены корректно.

Union) “Аксиома объединения”:

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists v (v \in X \wedge u \in v))$$

Обозначение: $Y = \bigcup X$.

Следствие. *Оператор*

$$X \cup Y := \bigcup \{X, Y\} = \{u \mid u \in X \vee u \in Y\}$$

определён корректно.

Power) Пусть $x \subseteq y := \forall v \{v \in x \rightarrow v \in y\}$. “Аксиома степени”:

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$$

Обозначение: $Y = \mathcal{P}(X) := \{u \mid u \subseteq X\}$. $\mathcal{P}(X)$ — “множество-степень X ” или “булеан X ”.

Определение 3. Упорядоченная пара — это объект от некоторых X_1 и Y_1 , который равен другому такому объекту от X_2 и Y_2 тогда и только тогда, когда $X_1 = X_2 \wedge Y_1 = Y_2$.

Определение 4. Декартово произведение X и Y ($X \times Y$) — $\{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$.

Замечание 1. Можно не сложно показать, что декартово произведение определено корректно.

Inf) Пусть $\text{Ind}(X) := \emptyset \in X \wedge \forall u (u \in X \wedge u \cup \{u\} \in X)$. Если $\text{Ind}(X)$, то X называется индуктивным. “Аксиома бесконечности”: существует индуктивное множество.

Repl) “Схема аксиом подстановки”:

$$\begin{aligned} &\forall \Phi(x, y) \\ &\forall x \forall y_1 \forall y_2 ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \rightarrow y_1 = y_2) \rightarrow \\ &\forall X \exists Y \forall y (y \in Y \leftrightarrow \exists x (x \in X \wedge \Phi(x, y))) \end{aligned}$$

Reg) “Аксиома регулярности”:

$$\forall X (X \neq \emptyset \rightarrow \exists u (u \in X \wedge X \cap u = \emptyset))$$

1 Отношения.

Определение 5. Бинарное (или двухместное) отношение R между X и Y — подмножество $X \times Y$. Если $Y = X$, R называется бинарным (или двухместным) отношением на X .

Обозначение: $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$.

Определение 6.

$$\begin{aligned}\text{dom}(R) &:= \{u \in X \mid \exists v \quad uRv\} && \text{“область определения } R\text{”} \\ \text{range}(R) &:= \{v \in Y \mid \exists u \quad uRv\} && \text{“область значений } R\text{”} \\ R[U] &:= \text{range}(R \cap (U \times Y)) \\ R^{-1} &:= \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}\end{aligned}$$

Замечание 2.

$$\begin{aligned}\text{range}(R) &= \text{dom}(R^{-1}) = R[X] \\ \text{range}(R^{-1}) &= \text{dom}(R) = R^{-1}[Y]\end{aligned}$$

Определение 7. Бинарные отношения можно естественным образом комбинировать: для любых отношений R и Q между X и Y , Y и Z соответственно отношение

$$S = R \circ Q := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y : xRy \wedge yQz\}$$

называется композицией R и Q .

Определение 8. Тожественное отображение на X — $\text{id}_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Замечание 3. Тожественное отображение при композиции (не важно, правой или левой) с другим отношением не меняет его.

Определение 9. Отношение R между X и Y называется функциональным, если

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 ((xRy_1 \wedge xRy_2) \rightarrow y_1 = y_2).$$

Определение 10. Функция из X в Y — функциональное отношение R между X и Y , в котором $\text{dom}(R) = X$. Обозначение: $R : X \rightarrow Y$.

Определение 11. Ограничение или сужение функции $f : X \rightarrow Y$ на $U \subseteq X$ — функция $f \upharpoonright_U := f \cap (U \times Y)$.

Если $f : X \rightarrow Y$ и $g : U \rightarrow Y$, где $U \subseteq X$, таковы, что $f \upharpoonright_U = g$, то f называется *расширением* g , а g — *ограничением* f .

Определение 12. $Y^X := \{f : X \rightarrow Y\}$.

Определение 13. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется

- *сюръекцией*, если $\text{range}(f) = Y$;
- *инъекцией*, если f^{-1} функционально;
- *биекцией*, если f сюръективно и инъективно.

С) “Аксиома выбора”:

$$\forall X (\emptyset \notin X \rightarrow \exists f (f : X \rightarrow \bigcup X \wedge \forall u \in X (f(u) \in u)))$$

2 Натуральные числа и индукция

Важным следствием Inf является

$$\exists X(\text{Ind}(X) \wedge \forall Y(\text{Ind}(Y) \rightarrow X \subseteq Y)) \quad (\text{Nat})$$

Nat описывает минимальное по включению индуктивное множество — \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 или ω .

Доказательство. Пусть есть какое-то индуктивное X_0 . Тогда рассмотрим

$$\mathbb{N} := \{x \in X_0 \mid \forall X(\text{Ind}(X) \rightarrow x \in X)\}$$

По построению $\text{Ind}(X) \rightarrow \mathbb{N} \subseteq X$. Также $\text{Ind}(\mathbb{N})$. □

Определение 14. Определим *функцию последователя* $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ как

$$s := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \cup \{n\}\}$$

Вместо $s(n)$ часто пишут $n + 1$.

Определение 15. (*Естественный*) *порядок* на \mathbb{N} — $< := \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in m\}$.

Замечание 4. Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно:

1. $\neg(n < 0)$;
2. $n < m + 1 \leftrightarrow (n < m \vee n = m)$.

Теорема 2 (принцип индукции). Пусть X удовлетворяет условию

$$0 \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}(n \in X \rightarrow n + 1 \in X).$$

Тогда $\mathbb{N} \subseteq X$.

Доказательство. Из условия на X следует, что $\mathbb{N} \cap X$ индуктивно. Тогда из определения \mathbb{N} следует, что $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cap X \subseteq X$, значит $\mathbb{N} \subseteq X$. □

Замечание 5. В качестве X могут быть $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$.

Следствие 2.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ верно $n \subseteq \mathbb{N}$.

Теорема 3 (возвратная индукция). Пусть дан X , что $\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n \ m \in X \rightarrow n \in X)$. Тогда $\mathbb{N} \subseteq X$.

Доказательство. Докажем, что $\forall n \in \mathbb{N} \ n \subseteq X$, по индукции. База для 0 очевидна. Шаг очевиден, так как $n \subseteq X$, значит $n \in X$, значит $n + 1 \subseteq X$. □

Определение 16. $\text{Min}(X) := \{x \in X \mid \neg \exists u \in X \ u \in x\}$.

Теорема 4 (принцип минимального элемента). Если $X \subset \mathbb{N}$ и $X \neq \emptyset$, то $\text{Min}(X) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\text{Min}(X) = \emptyset$. Возьмём $Y := \mathbb{N} \setminus X$. Заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n \ m \in Y \rightarrow n \in Y)$$

Тогда по принципу возвратной индукции $Y = \mathbb{N}$, а тогда $X = \emptyset$ — противоречие. □

Теорема 5 (о рекурсии). Пусть есть $y_0 \in Y$ и $h : \mathbb{N} \times Y \rightarrow Y$. Тогда существует и единственная $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0 \\ h(m, f(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда будем называть функцию $f : k + 1 \rightarrow Y$ *правильной*, если условие в определении рекурсии верно для всех $n \in k + 1$. Также рассмотрим

$$S := \{k \in \mathbb{N} \mid \text{существует единственная правильная } f : k + 1 \rightarrow Y\}$$

Будем обозначать для каждого $k \in S$ через f_k соответствующую правильную функцию из $k + 1$ в Y .

Докажем по индукции, что $S = \mathbb{N}$.

База. Очевидно, $\{(0, y_0)\}$ — единственная правильная функция из $0 + 1$ в Y . Поэтому $0 \in S$.

Шаг. Легко заметить, что сужение любой правильной функции на $k + 2$ на множество $k + 1$ правильно. Поэтому все правильные функции на $k + 2$ определены на $k + 1$ как f_k . Тогда значение в $k + 1$ определяется однозначно, значит правильная функция на $k + 2$ существует и единственна. \square

Теорема 6 (о рекурсии, параметризованная). Пусть $g_0 \in Y^X$ и $h : X \times \mathbb{N} \times Y \rightarrow Y$. Тогда существует и единственна $f : X \times \mathbb{N} \rightarrow Y$, что $\forall x \in X, n \in \mathbb{N}$

$$f(x, n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим для каждого $x \in X$ функцию $h_x : \mathbb{N} \times Y \rightarrow Y, (n, y) \mapsto h(x, n, y)$. Тогда по теореме о рекурсии есть $f_x : \mathbb{N} \rightarrow Y$, что

$$f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Тогда определим $f : X \times \mathbb{N} \rightarrow Y, (x, n) \mapsto f_x(n)$. В этом случае

$$f(x, n) = f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases} = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

\square

Замечание 6. Заметим, что с помощью теоремы о параметризованной рекурсии можно определить сложение, умножение и возведение в степень на натуральных числах.

Определение 17. Несложно заметить, что функциональные отношения $R \subseteq X \times Y$ — функции из подмножества X в Y . Поэтому будем называть их *частичными функциями* и обозначать как $R : \subseteq X \rightarrow Y$.

Теорема 7 (о рекурсии, частичной). Пусть $y_0 \in Y$ и $h : \subseteq \mathbb{N} \times Y \rightarrow Y$. Тогда существует и единственна $f : \subseteq \mathbb{N} \rightarrow Y$, что

- для любого $n \in \text{dom}(f)$,

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0 \\ h(m, f(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

- либо $\text{dom}(f) = \mathbb{N}$, либо $\text{dom}(f) = k + 1$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, что $(k, f(k)) \notin \text{dom}(h)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $y \notin Y$ и положим $Y' := Y \cup \{y\}$. Теперь расширим h до $h' : \mathbb{N} \times Y' \rightarrow Y'$ следующим образом:

$$h'(n, y') := \begin{cases} h(n, y') & \text{если } (n, y') \in \text{dom}(h) \\ y & \text{иначе} \end{cases}$$

В силу теоремы о рекурсии существует и единственна $f' : \mathbb{N} \rightarrow Y'$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$f'(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0 \\ h'(m, f'(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Возьмём $f := f' \cup (\mathbb{N} \times Y)$. Несложно убедиться, что f будет искомой. \square

Определение 18. Конечными последовательностями элементов X называются элементы множества $X^* := \{f \mid \exists n \in \mathbb{N} (f : n \rightarrow X)\}$.

Теорема 8 (о возвратной индукции). Пусть $h : \mathbb{N} \times Y^* \rightarrow Y$. Тогда существует единственная $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = h(n, f \upharpoonright_n)$.

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы о рекурсии, однако вместообычной индукции тут используется возвратная. [...] \square

3 Мощности

Определение 19. X и Y равномощны, если существует биекция $f : X \rightarrow Y$. Обозначение: $X \sim Y$.

Теорема 9. Для всех X, Y и Z верно следующее:

1. $X \sim X$;
2. $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$;
3. $X \sim Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

Пример 1. $\mathcal{P}(X) \sim 2^X$. Действительно, рассмотрим для каждого $Y \subseteq X$ функцию $\chi_Y : X \rightarrow 2$, что

$$\chi_Y(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x \in Y \\ 0 & \text{если } x \in X \setminus Y \end{cases}$$

Несложно заметить, что отображение, сопоставляющее Y функцию χ_Y есть биекция из $\mathcal{P}(X)$ в 2^X .

Определение 20. Множество X по мощности менее или равно Y ($X \preceq Y$), если существует инъекция из X в Y .

Множество X по мощности (строго) менее Y ($X \prec Y$), если $X \preceq Y \wedge X \not\sim Y$.

Замечание 7. Тогда очевидно, что $X \preceq Y$ тогда и только тогда, когда X равномощно некоторому подмножеству Y .

Теорема 10.

1. $X \preceq X$.
2. $X \sim Y \Rightarrow X \preceq Y$.
3. $X \preceq Y \sim Z \Rightarrow X \preceq Z$.
4. $X \sim Y \preceq Z \Rightarrow X \preceq Z$.
5. $X \preceq Y \preceq Z \Rightarrow X \preceq Z$.

Теорема 11 (Кантора, обобщённая). $X \prec \mathcal{P}(X)$.

Доказательство. Очевидно, что $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X, x \mapsto \{x\})$ есть инъекция, поэтому $X \preceq \mathcal{P}(X)$. Покажем, что между ними нет биекции.

Предположим противное, т.е. есть биекция $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Рассмотрим $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Поскольку f — биекция, то $f(y) = Y$ для некоторого Y . В итоге мы получаем

$$y \in Y \iff y \notin f(Y) \iff y \notin Y$$

Получаем противоречие. □

Теорема 12 (Кантора-Шрёдера-Бернштейна). Если $X \preceq Y$ и $Y \preceq X$, то $X \sim Y$.

Доказательство.

Лемма 12.1. Если $X \supseteq Y \supseteq X'$ и $X \sim X'$, то $X \sim Y \sim X'$.

Доказательство. Пусть $f : X \rightarrow X'$ — биекция. Определим по рекурсии $\{X_i\}_{i=0}^\infty$ и $\{Y_i\}_{i=0}^\infty$:

$$X_n := \begin{cases} X & \text{если } n = 0 \\ f[X_m] & \text{если } n = m + 1 \end{cases} \quad Y_n := \begin{cases} Y & \text{если } n = 0 \\ f[Y_m] & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

По условию $X_0 = X \supseteq Y = Y_0$ и $Y_0 = Y \supseteq X' = f(X) = X_1$. Тогда несложно убедиться по индукции по n , что $X_n \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1}$, так как $X_{n-1} \supseteq Y_{n-1} \supseteq X_n$, значит $f(X_{n-1}) \supseteq f(Y_{n-1}) \supseteq f(X_n)$, что буквально означает, что $X_n \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1}$.

Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим $U_n := X_n \setminus Y_n$. Пусть также $U := \bigcup_{n=0}^\infty U_n$, $Z := X \setminus U$.

Несложно видеть, что

$$X = \bigcup_{n=0}^\infty U_n \cup Z \quad Y = \bigcup_{n=1}^\infty U_n \cup Z$$

Также несложно видеть, что $f[U_n] = f[X_n \setminus Y_n] = f[X_n] \setminus f[Y_n] = X_{n+1} \setminus Y_{n+1} = U_{n+1}$, а потому $f[U] = U \setminus U_0$.

Тогда определим $g : X \rightarrow X$ по правилу

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in U \\ x & \text{если } x \in Z \end{cases}$$

Несложно видеть, что это инъекция. Действительно, g на U равна f , а значит есть биекция из U в $U \setminus U_0$, также является биекцией из Z в себя, а поскольку U и Z дизъюнкты, то g является биекцией из $U \cup Z$ в $U \setminus U_0 \cup Z$, т.е. из X в Y . Значит $Y \sim X$. □

Пусть $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ — инъекции. Несложно видеть, что $g[Y] \subseteq X$, а $f[X] \subseteq Y$, значит $g[f[X]] \subseteq g[Y]$. Т.е. $X \supseteq g[Y] \supseteq g[f[X]]$. При этом $X \sim f[X] \sim g[f[X]]$, поэтому применяя лемму 12.1, имеем, что $X \sim g[Y] \sim Y$, значит $X \sim Y$. □