Основы наивной теории множеств.

Станислав Олегович Сперанский

Материалы лекций: ссылка
Литература:

- K. Hrbacek and T. Jech. Introduction to Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Marcel Dekker, Inc., 1999.

- T. Jech. Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.

Будем рассматривать как базовые выражения “x равен (совпадает с) y” (“$x = y$”) “x лежит в y” (“$x \in y$”).

Определение 1 (Наиваная схема аксиом выделения)**.** Пусть $\Phi(x)$ — произвольное условие на объекты. Тогда существует X, что $\forall u(\Phi(u) \leftrightarrow u \in X)$. В этом случае X обозначается как $\{u \mid \Phi(u)\}$.

Утверждение 1 (парадокс Рассела)**.** *Пусть $R = \{u \mid u \notin u\}$. Тогда R не может лежать в себе и не может не лежать в себе одновременно.*

Утверждение 2 (парадокс Берри)**.** *Пусть n — наименьшее натуральное число, которое нельзя описать менее чем одиннадцатью словами. Тогда n описывается 10 словами.*

Из-за данного парадокса будем рассматривать только условия, образованные переменными и $\in$, $=$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.

Определение 2 (аксиомы ZFC (= ZF (аксиомы Цермело-Френкеля) + C (аксиома выбора)))**.**

Ext) “Аксиома экстенциональности”:

$$\forall X \forall Y (\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y)$$

Empty) “Аксиома пустого множества”:

$$\exists \varnothing \; \forall u \, (u \notin \varnothing)$$

Pair) “Аксиома пары”:

$$\forall X \, \forall Y \; \exists Z (\forall u \, (u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)))$$

Обозначение: $Z = \{X, Y\}$.

Sep) “Схема аксиом выделения”:

$$\forall \Phi(x) \quad \forall X \, \exists Y \; \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u)))$$

Обозначение: $Y = \{u \in X \mid \Phi(u)\}$.

Следствие. *Операторы*

$$X \cap Y := \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\}$$
$$X \setminus Y := \{u \in X \mid u \notin Y\}$$
$$\bigcap X := \{u \mid \forall v \in X \quad u \in v\}$$

определены корректно.

Union) "Аксиома объединения":

$$\forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow \exists v \, (v \in X \wedge u \in v))$$

Обозначение: $Y = \bigcup X$.

Следствие. *Оператор*

$$X \cup Y := \bigcup \{X, Y\} = \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\}$$

определён корректно.

Power) Пусть $x \subseteq y := \forall v \, \{v \in x \to v \in y\}$. "Аксиома степени":

$$\forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$$

Обозначение: $Y = \mathcal{P}(X) := \{u \mid u \subseteq X\}$. $\mathcal{P}(X)$ — "множество-степень X" или "булеан X".

Определение 3. Упорядоченная пара — это объект от некоторых X_1 и Y_1, который равен другому такому объекту от X_2 и Y_2 тогда и только тогда, когда $X_1 = X_2 \wedge Y_1 = Y_2$.

Определение 4. *Декартово произведение* X и Y $(X \times Y)$ — $\{(x; y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$.

Замечание 1. Можно несложно показать, что декартово произведение определено корректно.

Inf) Пусть $\mathrm{Ind}(X) := \varnothing \in X \wedge \forall u \, (u \in X \wedge u \cup \{u\} \in X)$. Если $\mathrm{Ind}(X)$, то X называется индуктивным. "Аксиома бесконечности": существует индуктивное множество.

Repl) "Схема аксиом подстановки":

$$\begin{aligned} &\forall \Phi(x, y) \\ &\qquad \forall x \, \forall y_1 \, \forall y_2 \, ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \to y_1 = y_2) \to \\ &\qquad \forall X \, \exists Y \, \forall y \, (y \in Y \leftrightarrow \exists x (x \in X \wedge \Phi(x, y))) \end{aligned}$$

Reg) "Аксиома регулярности":

$$\forall X \, (X \neq \varnothing \to \exists u \, (u \in X \wedge X \cap u = \varnothing))$$

1 Отношения.

Определение 5. *Бинарное (или двухместное) отношение* R между X и Y — подмножество $X \times Y$. Если $Y = X$, R называется *бинарным (или двухместным) отношением* на X. Обозначение: $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$.

Определение 6.

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(R) &:= \{u \in X \mid \exists v \quad uRv\} && \text{“область определения } R\text{”} \\ \mathrm{range}(R) &:= \{v \in Y \mid \exists u \quad uRv\} && \text{“область значений } R\text{”} \\ R[U] &:= \mathrm{range}(R \cap (U \times Y)) \\ R^{-1} &:= \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} \end{aligned}$$

Замечание 2.

$$\begin{aligned} \mathrm{range}(R) = \mathrm{dom}(R^{-1}) = R[X] \\ \mathrm{range}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R) = R^{-1}[Y] \end{aligned}$$

Определение 7. Бинарные отношения можно естественным образом комбинировать: для любых отношений R и Q между X и Y, Y и Z соответственно отношение

$$S = R \circ Q := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y : xRy \wedge yQz\}$$

называется композицией R и Q.

Определение 8. *Тождественное отображение* на X — $id_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Замечание 3. Тождественное отображение при композиции (не важно, правой или левой) с другим отношением не меняет его.

Определение 9. Отношение R между X и Y называется функциональным, если

$$\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, ((xRy_1 \wedge xRy_2) \rightarrow y_1 = y_2).$$

Определение 10. *Функция* из X в Y — функциональное отношение R между X и Y, в котором $\mathrm{dom}(R) = X$. Обозначение: $R : X \rightarrow Y$.

Определение 11. *Ограничение* или *сужение* функции $f : X \rightarrow Y$ на $U \subseteq X$ — функция $f \restriction_U := f \cap (U \times Y)$.

Если $f : X \rightarrow Y$ и $g : U \rightarrow Y$, где $U \subseteq X$, таковы, что $f \restriction_U = g$, то f называется *расширением* g, а g — *ограничением* f.

Определение 12. $Y^X := \{f : X \rightarrow Y\}$.

Определение 13. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется

- *сюрьекцией*, если $range(f) = Y$;
- *инъекцией*, если f^{-1} функционально;
- *биекцией*, если f сюръективно и инъективно.

C) “Аксиома выбора”:

$$\forall X(\varnothing \notin X \rightarrow \exists f(f : X \rightarrow \bigcup X \wedge \forall u \in X(f(u) \in u)))$$

2 Натуральные числа и индукция

Важным следствием Inf является

$$\exists X(\mathrm{Ind}(X) \land \forall Y(\mathrm{Ind}(Y) \to X \subseteq Y)) \qquad \text{(Nat)}$$

Nat описывает минимальное по включению индуктивное множество — $\mathbb{N}$, $\aleph_0$ или ω.

Доказательство. Пусть есть какое-то индуктивное X_0. Тогда рассмотрим

$$\mathbb{N} := \{x \in X_0 \mid \forall X(\mathrm{Ind}(X) \to x \in X)\}$$

По построению $\mathrm{Ind}(X) \to \mathbb{N} \subseteq X$. Также $\mathrm{Ind}(\mathbb{N})$. □

Определение 14. Определим *функцию последователя* $s : \mathbb{N} \to NN$ как

$$s := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \cup \{n\}\}$$

Вместо $s(n)$ часто пишут $n + 1$.

Определение 15. *(Естественный) порядок* на $\mathbb{N}$ — $<:= \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in m\}$.

Замечание 4. Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно:

1. $\neg(n < 0)$;
2. $n < m + 1 \leftrightarrow (n < m \lor n = m)$.

Теорема 3 (принцип индукции)**.** *Пусть X удовлетворяет условию*

$$0 \in X \land \forall n \in \mathbb{N}(n \in X \to n + 1 \in X).$$

Тогда $\mathbb{N} \subseteq X$.

Доказательство. Из условия на X следует, что $\mathbb{N} \cap X$ индуктивно. Тогда из определения $\mathbb{N}$ следует, что $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cap X \subseteq X$, значит $\mathbb{N} \subseteq X$. □

Замечание 5. В качестве X могут быть $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$.

Следствие 3.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ *верно* $n \subseteq \mathbb{N}$.

Теорема 4 (возвратная индукция)**.** *Пусть дан X, что $\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n\ m \in X \to n \in X)$. Тогда $\mathbb{N} \subseteq X$.*

Доказательство. Докажем, что $\forall n \in \mathbb{N} n \subseteq X$, по индукции. База для 0 очевидна. Шаг очевиден, так как $n \subseteq X$, значит $n \in X$, значит $n + 1 \subseteq X$. □

Определение 16. $\mathrm{Min}(X) := \{x \in X \mid \neg\exists u \in X u \in x\}$.

Теорема 5 (принцип минимального элемента)**.** *Если $X \subset \mathbb{N}$ и $X \neq \varnothing$, то $\mathrm{Min}(X) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Min}(X) = \varnothing$. Возьмём $Y := \mathbb{N} \setminus X$. Заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n\ m \in Y \to n \in Y)$$

Тогда по принципу возвратной индукции $Y = \mathbb{N}$, а тогда $X = \varnothing$ — противоречие. □

Теорема 6 (о рекурсии). *Пусть есть $y_0 \in Y$ и $h : \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственная $f : \mathbb{N} \to Y$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \textit{если } n = 0 \\ h(m, f(m)) & \textit{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда будем называть функцию $f : k + 1 \to Y$ *правильной*, если условие в определении рекурсии верно для всех $n \in k + 1$. Также рассмотрим

$$S := \{k \in \mathbb{N} \mid \text{существует единственная правильная } f : k + 1 \to Y\}$$

Будем обозначать для каждого $k \in S$ через f_k соответствующую правильную функцию из $k+1$ в Y.

Докажем по индукции, что $S = \mathbb{N}$.

База. Очевидно, $\{(0, y_0)\}$ — единственная правильная функция из $0+1$ в Y. Поэтому $0 \in S$.

Шаг. Легко заметить, что сужение любой правильной функции на $k + 2$ на множество $k + 1$ правильно. Поэтому все правильные функции на $k + 2$ определены на $k + 1$ как f_k. Тогда значение в $k + 1$ определяется однозначно, значит правильная функция на $k + 2$ существует и единственна. □

Теорема 7 (о рекурсии, параметризованная). *Пусть $g_0 \in Y^X$ и $h : X \times \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственна $f : X \times \mathbb{N} \to Y$, что $\forall x \in X, n \in \mathbb{N}$*

$$f(x, n) = \begin{cases} g_0(x) & \textit{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \textit{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим для каждого $x \in X$ функцию $h_x : \mathbb{N} \times Y \to Y, (n, y) \mapsto h(x, n, y)$. Тогда по теореме о рекурсии есть $f_x : \mathbb{N} \to Y$, что

$$f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Тогда определим $f : X \times \mathbb{N} \to Y, (x, n) \mapsto f_x(n)$. В этом случае

$$f(x, n) = f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases} = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

□

Замечание 6. Заметим, что с помощью теоремы о параметризованной рекурсии можно определить сложение, умножение и возведение в степень на натуральных числах.

Определение 17. Несложно заметить, что функциональные отношения $R \subseteq X \times Y$ — функции из подмножества X в Y. Поэтому будем называть их *частичными функциями* и обозначать как $R :\subseteq X \to Y$.

Теорема 8 (о рекурсии, частичной). *Пусть $y_0 \in Y$ и $h :\subseteq \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственна $f :\subseteq \mathbb{N} \to Y$, что*

- *для любого $n \in \mathrm{dom}(f)$,*

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \textit{если } n = 0 \\ h(m, f(m)) & \textit{если } n = m + 1 \end{cases}$$

- *либо* $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}$, *либо* $\mathrm{dom}(f) = k+1$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$, *что* $(k, f(k)) \notin \mathrm{dom}(h)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое ы $\notin Y$ и положим $Y' := Y \cup \{\text{ы}\}$. Теперь расширим h до $h' : \mathbb{N} \times Y' \to Y'$ следующим образом:

$$h'(n, y') := \begin{cases} h(n, y') & \text{если } (n, y') \in \mathrm{dom}(h) \\ \text{ы} & \text{иначе} \end{cases}$$

В силу теоремы о рекурсии существует и единственна $f' : \mathbb{N} \to Y'$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$f'(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0 \\ h'(m, f'(m)) & \text{если } n = m+1 \end{cases}$$

Возьмём $f := f' \cup (\mathbb{N} \times Y)$. Несложно убедиться, что f будет искомой. □

Определение 18. *Конечными последовательностями элементов* X называются элементы множества $X^* := \{f \mid \exists n \in \mathbb{N}(f : n \to X)\}$.

Теорема 9 (о возвратной индукции)**.** *Пусть* $h : \mathbb{N} \times Y^* \to Y$. *Тогда существует единственная* $f : \mathbb{N} \to Y$ *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = h(n, f\restriction_n)$.

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы о рекурсии, однако вместо обычной индукции тут используется возвратная. [...] □

Определение 19. Условие $\Phi(x, y)$ называется *функциональным*, если

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2\ ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \to y_1 = y_2)$$

Если для некоторого u нашёлся тот самый y, что $\Phi(u, y)$, тогда данный y обозначается как $[\![\Phi]\!](x)$.

Функциональное условие $\Phi(x, y)$ называется *тотальным*, если $\forall x \exists y\ \Phi(x, y)$.

Теорема 10 (о возвратной "классовой рекурсии")**.** *Пусть* $\Phi(x, y)$ *— тотальное функциональное условие. Тогда существует единственная функция* f *с* $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}$, *что* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = [\![\Phi]\!](f\restriction_n)$$

Доказательство. Идея здесь та же, хотя деталей побольше. В нашем модуле эта теорема не будет играть особой роли, однако именно "классовая рекурсия" является базовым инструментом в ТМ. [...] □

3 Мощности

Определение 20. X и Y *равномощны*, если существует биекция $f : X \to Y$. Обозначение: $X \sim Y$.

Теорема 11. *Для всех* X, Y *и* Z *верно следующее:*

1. $X \sim X$;

2. $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$;

3. $X \sim Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

Пример 1. $\mathcal{P}(X) \sim 2^X$. Действительно, рассмотрим для каждого $Y \subseteq X$ функцию $\chi_Y : X \to 2$, что

$$\chi_Y(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x \in Y \\ 0 & \text{если } x \in X \setminus Y \end{cases}$$

Несложно заметить, что отображение, сопоставляющее Y функцию χ_Y есть биекция из $\mathcal{P}(x)$ в 2^X.

Определение 21. Множество X *по мощности менее или равно* Y ($X \preccurlyeq Y$), если существует инъекция из X в Y.

Множество X *по мощности (строго) менее* Y ($X \prec Y$), если $X \preccurlyeq Y \wedge X \nsim Y$.

Замечание 7. Тогда очевидно, что $X \preccurlyeq Y$ тогда и только тогда, когда X равномощно некоторому подмножеству Y.

Теорема 12.

1. $X \preccurlyeq X$.
2. $X \sim Y \Rightarrow X \preccurlyeq Y$.
3. $X \preccurlyeq Y \sim Z \Rightarrow X \preccurlyeq Z$.
4. $X \sim Y \preccurlyeq Z \Rightarrow X \preccurlyeq Z$.
5. $X \preccurlyeq Y \preccurlyeq Z \Rightarrow X \preccurlyeq Z$.

Теорема 13 (Кантора, обобщённая)**.** *$X \prec \mathcal{P}(X)$.*

Доказательство. Очевидно, что $f : X \to \mathcal{P}(X), x \mapsto \{x\}$ есть инъекция, поэтому $X \preccurlyeq \mathcal{P}(X)$. Покажем, что между ними нет биекции.

Предположим противное, т.е. есть биекция $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Рассмотрим $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Поскольку f — биекция, то $f(y) = Y$ для некоторого y. В итоге мы получаем

$$y \in Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \notin f(Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \notin Y$$

Получаем противоречие. □

Теорема 14 (Кантора-Шрёдера-Бернштейна)**.** *Если $X \preccurlyeq Y$ и $Y \preccurlyeq X$, то $X \sim Y$.*

Доказательство.

Лемма 14.1. *Если $X \supseteq Y \supseteq X'$ и $X \sim X'$, то $X \sim Y \sim X'$.*

Доказательство. Пусть $f : X \to X'$ — биекция. Определим по рекурсии $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{Y_i\}_{i=0}^{\infty}$:

$$X_n := \begin{cases} X & \text{если } n = 0 \\ f[X_m] & \text{если } n = m + 1 \end{cases} \qquad\qquad Y_n := \begin{cases} Y & \text{если } n = 0 \\ f[Y_m] & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

По условию $X_0 = X \supseteq Y = Y_0$ и $Y_0 = Y \supseteq X' = f(X) = X_1$. Тогда несложно убедиться по индукции по n, что $X_n \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1}$, так как $X_{n-1} \supseteq Y_{n-1} \supseteq X_n$, значит $f(X_{n-1}) \supseteq f(Y_{n-1}) \supseteq f(X_n)$, что буквально означает, что $X_n \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1}$.

Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим $U_n := X_n \setminus Y_n$. Пусть также $U := \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$, $Z := X \setminus U$.

Несложно видеть, что

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \cup Z \qquad\qquad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \cup Z$$

Также несложно видеть, что $f[U_n] = f[X_n \setminus Y_n] = f[X_n] \setminus f[Y_n] = X_{n+1} \setminus Y_{n+1} = U_{n+1}$, а потому $f[U] = U \setminus U_0$.

Тогда определим $g : X \to X$ по правилу

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in U \\ x & \text{если } x \in Z \end{cases}$$

Несложно видеть, что это инъекция. Действительно, g на U равна f, а значит есть биекция из U в $U \setminus U_0$, также является биекцией из Z в себя, а поскольку U и Z дизъюнктны, то g является биекцией из $U \cup Z$ в $U \setminus U_0 \cup Z$, т.е. из X в Y. Значит $Y \sim X$. □

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — инъекции. Несложно видеть, что $g[Y] \subseteq X$, а $f[X] \subseteq Y$, значит $g[f[X]] \subseteq g[Y]$. Т.е. $X \supseteq g[Y] \supseteq g[f[X]]$. При этом $X \sim f[X] \sim g[f[X]]$, поэтому применяя лемму 14.1, имеем, что $X \sim g[Y] \sim Y$, значит $X \sim Y$. □

Определение 22. Будем говорить, что X *имеет n элементов* (где $n \in \mathbb{N}$), если $X \sim n$.

X *конечно*, если для какого-то $n \in \mathbb{N}$, что $X \sim n$.

Утверждение 15. *X бесконечно, значит $\forall n \in \mathbb{N} \quad |X| \geqslant n$.*

Доказательство. Докажем по индукции по n.

База: $|X| \geqslant 0$ — очевидно.

Шаг: Пусть $|X| > n$, тогда существует инъекция $f : n \to X$. $f(n) \neq X$, поэтому есть $x \in X \setminus f(n)$, значит есть $f' = f \cup \{(n; x)\}$ — инъекция из $n+1$ в X. □

3.1 Основные свойства конечных множеств

Утверждение 16. *X конечно, а $|Y| \leqslant |X|$, то $|Y|$ конечно.*

Доказательство. Существует $n \in \mathbb{N}$, что $|X| = n$. Тогда Y кончено, так как иначе $n = |X| \geqslant |Y| \geqslant n+1$. □

Утверждение 17. *Пусть есть сюръекция из X в Y, и X конечно. Тогда $|Y| \leqslant |X|$.*

Доказательство. WLOG $X = n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Определим $g : Y \to n$ по правилу

$$g(y) := \text{“минимальный элемент в } f^{-1}[\{y\}]\text{”}$$

Легко понять, что $g : Y \to n$ — инъекция. Стало быть, $|Y| \geqslant |n| = n$. □

Утверждение 18. *Пусть X и Y конечны, причём $X \cup Y = \varnothing$. Тогда $X \cap Y$ конечно и $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $|Y|$.

База. Очевидно, если $|Y| = 0$, то $|Y| = \varnothing$, а потому $|X \cup Y| = |X| = |X| + 0 = |X| + |Y|$.

Шаг. Пусть $|Y| = n+1$, т.е. существует биекция $f : n+1 \to Y$. Рассмотрим $y = f^{-1}(n)$ и $Z := Y \setminus \{y\}$. Очевидно, что $|Z| = n$. Тогда

$$\begin{aligned} |X \cup Y| = |(X \cup Z) \cup \{y\}| \qquad &= |X \cup Z| + 1 \qquad &= (|X| + |Z|) + 1 \\ = |X| + (|Z| + 1) \qquad &= |X| + |Y| \end{aligned}$$

□

Утверждение 19. *Пусть X и Y конечны. Тогда $X \times Y$ и X^Y кончены и $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$, $|X^Y| = |X|^{|Y|}$.*

3.2 Основные свойства (не более чем) счётных множеств

Утверждение 20 (в ZFC)**.** *Пусть X бесконечно, тогда оно содержит счётное подмножество.*

Доказательство. Пусть η — какая-нибудь функция выбора для $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Используя рекурсию, определим $f : \mathbb{N} \to X$ по правилу

$$f(k) := \eta(X \setminus \operatorname{range}(f \restriction_k))$$

Как легко видеть, $f : \mathbb{N} \to X$ — инъекция. Поэтому $\operatorname{range}(f)$ будет счётным подмножеством X. □

Определение 23. $\mathbb{N}$ является кардиналом и обычно обозначается $\aleph_0$.

Следствие 20.1 (в ZFC)**.** $|X| > \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда X бесконечно и несчётно.*

Утверждение 21. $|X| \leqslant \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда X конечно или счётно.*

Доказательство. Если X конечно или счётно, то, очевидно, $|X| \leqslant \aleph_0$.

Если $|X| \leqslant \aleph_0$, то WLOG $X \subseteq \mathbb{N}$. Если X бесконечно, то рекурсивно определим $f : \mathbb{N} \to X$ по правилу

$$f(k) := \text{“минимальный элемент в } X \setminus \operatorname{range}(f \restriction_k)\text{”}$$

Нетрудно проверить, что $f : \mathbb{N} \to X$ — биекция. □

Следствие 21.1 (в ZFC)**.** $|X| \not> \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда* $|X| \leqslant \aleph_0$.

Утверждение 22. *Есть сюръекция из X в Y, причём $|X| \leqslant \aleph_0$. Тогда $|Y| \leqslant \aleph_0$.*

Доказательство. WLOG $X \subseteq \mathbb{N}$. Определим $g : Y \to X$ по правилу

$$g(y) := \text{“минимальный элемент в } f^{-1}[\{y\}]\text{”}$$

Легко понять, что $g : Y \to X$ — инъекция. Стало быть, $|Y| \leqslant |X| \leqslant \aleph_0$. □

Следствие 22.1. *Непустое X не более чем счётно тогда и только тогда, когда существует сюръекция из $\mathbb{N}$ в X.*

Следствие 22.2. *Пусть R — отношение эквивалентности на X, причём X не более, чем счётно. Тогда X/R не более чем счётно.*

Утверждение 23. *Пусть X и Y не более чем счётны, тогда $X \times Y$ не более чем счётно.*

Доказательство. WLOG $X, Y \subseteq \mathbb{N}$. Тогда $X \times Y \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, а значит нужно показать, что счётность $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Определим $\nu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ по правилу

$$\nu(n, m) := \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$$

Нетрудно проверить, что ν биективна. □

Следствие 23.1. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n}$$

счётно.

Следствие 23.2. *Пусть X и Y не более чем счётны, тогда $X \cup Y$ не более чем счётно.*

Доказательство. Поскольку X и $Y \setminus X$ равномощны некоторым подмножествам $\mathbb{N} \times \{0\}$ и $\mathbb{N} \times \{1\}$, то $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$ равномощно подмножеству $\mathbb{N} \times \{0, 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, а потому не более чем счётно. $\square$

Утверждение 24. *X конечно, а элементы X не более чем счётны. Тогда $\bigcup X$ не более чем счётно.*

Доказательство. По индукции по $|X|$. $\square$

Определение 24. Условие "быть (бесконечной) последовательностью" — $\mathrm{Seq}(F) := \exists Y : \quad F : \mathbb{N} \to Y$. Если $\mathrm{Seq}(F)$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ вместо $F(n)$ нередко пишут F_n.

Утверждение 25. *Если F — последовательность последовательностей, то тогда*

$$\bigcup\{\mathrm{range}(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

не более чем счётно.

Доказательство. Определим $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup\{\mathrm{range}(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ по правилу

$$g(n, m) := F_n(m) = F(n)(m)$$

Легко понять, что g сюръективна. $\square$

Следствие 25.1 (в ZFC)**.** *Пусть X не более чем счётно, и все его элементы не более чем счётны, тогда $\bigcup X$ не более чем счётно.*

Доказательство. WLOG $X \neq \varnothing$ и $\varnothing \notin X$. Пусть g — сюръекция из $\mathbb{N}$ на X. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$S_n := \{f \mid f : \mathbb{N} \to g(n) \text{ — сюръекция}\}$$

Очевидно, $S_n \neq \varnothing$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ через $\mathcal{J}$. Пусть η — какая-нибудь функция выбора для $\mathcal{J}$. Наконец, определим $F : \mathbb{N} \to \bigcup \mathcal{J}$ по правилу

$$F(n) := \eta(S_n)$$

Ясно, что $\bigcup\{\mathrm{range}(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{g(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup X$. $\square$

Теорема 26. *Пусть непустое X не более чем счётно. Тогда X^* счётно.*

Доказательство. Зафиксируем сюръекцию $g : \mathbb{N} \to X$. Очевидно, $f \circ g \in X^*$ для всякого $f \in \mathbb{N}^*$. Определим $G : \mathbb{N}^* \to X^*$ по правилу

$$G(f) := f \circ g$$

Легко убедиться, что G сюръективна. Поэтому достаточно показать, что N^* не более чем счётно, а X^* бесконечно.

Пусть $\nu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция. Разумеется, можно построить функции $\mathrm{left} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\mathrm{right} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{left}(\nu(n, m)) = n \qquad \text{и} \qquad \mathrm{right}(\nu(n, m)) = m$$

Используя рекурсию, можно определить последовательность последовательностей f, удовлетворяющую следующим условиям:

$$f_0(i) = \varnothing$$
$$f_{n+1}(i) = f_n(\mathrm{left}(i)) \cup \{(n, \mathrm{right}(i))\}$$

Далее несложно доказать по индукции, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{range}(f_n) = \{g \mid g : n \to \mathbb{N}\}$$

В таком случае $\bigcup\{\mathrm{range}(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^*$. Поэтому $\mathbb{N}^*$ не более чем счётно.

Осталось показать, что X^* бесконечно. Для этого выберем какой-нибудь $x_0 \in X$ и определим $h : \mathbb{N} \to X^*$ по правилу

$$h(n) := n \times \{x_0\},$$

т.е. $h(n)$ — последовательность длины n только из элемента x_0. Очевидно, что h инъективна, а потому X^* не может быть конечным. □

Определение 25. Для произвольного множества X обозначим

$$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X \text{ и } Y \text{ конечно}\}$$

Говоря просто, $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ — семейство конечных подмножеств X.

Следствие 26.1. *Пусть X счётно. Тогда $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ счётно.*

Доказательство. Рассмотрим $h : X^* \to \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$, действующую по правилу

$$h(f) := \mathrm{range}(f)$$

Легко видеть, что h сюръективна, значит $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ не более чем счётно.

С другой стороны пусть $\nu : \mathbb{N} \to X$ — инъекция. Тогда рассмотрим $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$, что

$$g(n) := \nu[n]$$

Несложно проверить, что $|\nu[n]| = n$, поэтому g инъективна, значит $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ бесконечно, а значит счётно. □

Следствие 26.2. *В следствие теоремы Кантора $\mathcal{P}$ нельзя заменить на $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}$.*

Теорема 27 (в ZFC)**.** *Пусть X бесконечно, а Y не более чем счётно. Тогда $|X \cup Y| = |X|$.*

Доказательство. Заменяя Y на $Y \setminus X$, имеем, что WLOG $X \cap Y = \varnothing$. При этом у X есть счётное подмножество Z. Тогда понятно, что $Z \cup Y$ счётно, а значит есть биекция $f : Z \cup Y \to Z$. Тогда определим $g : X \cup Y \to X$ так, что

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in Z \cup Y \\ x & \text{если } x \in X \setminus Z \end{cases}$$

Очевидно, что g биективна. □

Следствие 27.1. *Пусть X более чем счётно, а Y не более чем счётно. Тогда $|X \setminus Y| = |X|$.*

Доказательство. Пусть $U := X \cap Y$, а $V := X \setminus U$. Ясно, что U не более чем счётно, V бесконечно. Значит, $|X| = |V \cup U| = |V| = |X \setminus Y|$. □

4 Упорядоченность

Определение 26. *Частично упорядоченное множество (ЧУМ)* — пара из множества и частичного порядка на нём.

Линейно упорядоченное множество (ЛУМ) — пара из множества и линейного порядка на нём.

Обозначение: $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$.

Определение 27. Пусть даны ЧУМ $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ и непустое $S \subseteq A$. Тогда $a \in A$ является

- *максимальным элементом для S в $\mathfrak{A}$*, если $a \in S \land \neg(\exists x \in S : a < x)$;
- *минимальным элементом для S в $\mathfrak{A}$*, если $a \in S \land \neg(\exists x \in S : x < a)$;
- *наибольшим элементом для S в $\mathfrak{A}$*, если $a \in S \land (\forall x \in S \quad x \leqslant a)$;
- *наименьшим элементом для S в $\mathfrak{A}$*, если $a \in S \land (\forall x \in S \quad a \leqslant x)$.

Если $S = A$, то уточнение "для S" опускают.
Также a является

- *верхней гранью для S в $\mathfrak{A}$*, если $\forall x \in S \quad x \leqslant a$;
- *нижней гранью для S в $\mathfrak{A}$*, если $\forall x \in S \quad x \geqslant a$;
- *супремумом гранью для S в $\mathfrak{A}$*, если a — наименьшая верхняя грань для S в $\mathfrak{A}$;
- *инфимумом гранью для S в $\mathfrak{A}$*, если a — наибольшая нижняя грань для S в $\mathfrak{A}$.

Утверждение 28. *В ЧУМ $\mathfrak{A}$*

- *не более одного наибольшего в $\mathfrak{A}$ элемента;*
- *всякий наибольший в $\mathfrak{A}$ максимален в $\mathfrak{A}$;*
- *любые два максимальных в $\mathfrak{A}$ несравнимы.*

Утверждение 29. *В ЛУМ все максимальные наибольшие и наоборот.*

Определение 28. Гомоморфизмом из $\langle A, \leqslant_A \rangle$ в $\langle B, \leqslant_B \rangle$ называется отображение $f : A \to B$, если

$$a_1 \leqslant_A a_2 \Rightarrow f(a_1) \leqslant_B f(a_2)$$

Если f инъективно, а последнее условие является равносильностью, а не следствием, то f называется вложением из $\langle A, \leqslant_A \rangle$ в $\langle B, \leqslant_B \rangle$.

Утверждение 30. *Любой инъективный гомоморфизм из ЛУМ в ЧУМ является вложением.*

Определение 29. Изоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ — сюръективное вложение из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Утверждение 31. *"Изоморфность" — "отношение эквивалентности" на ЧУМах.*

Определение 30. Изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на себя — автоморфизм.