

Занятие от 18.02.
Геометрия и топология. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

24 февраля 2021 г.

Задача 79. Обозначим нашу поверхность за S , а количества вершин, рёбер и граней графа за V , E и F соответственно.

Вспомним, что по задаче 73

$$V - E + F \geq \chi(S).$$

Если мы просуммируем количества рёбер у каждой грани, то с одной стороны получим $2E$, а с другой — значение, неменьшее kF ; т.е.

$$2E \geq kF$$

Тогда мы получаем, что

$$V - \chi(S) \geq E - F \geq E - \frac{2}{k}E = \frac{k-2}{k}E.$$

Следовательно

$$(k-2)E \leq k(V - \chi(S)).$$

Задача 83. Пусть $K_{4,4}$ вложен в некоторую поверхность S . Несложно видеть, что тогда любая грань будет иметь хотя бы 4 ребра границы. Действительно, поскольку $K_{4,4}$ двудолен, то всякий цикл имеет чётную длину; при этом поскольку нет кратных рёбер, то всякий рёберно простой цикл имеет длину хотя бы 4. Таким образом по предыдущей задаче

$$\frac{k-2}{k}E \leq V - \chi(S)$$

где $k = 4$. Следовательно

$$\chi(S) \leq V - \frac{k-2}{k}E = 8 - \frac{2}{4}(4 \cdot 4) = 0$$

т.е. S не может быть проективной плоскостью ($\chi(\mathbb{R}P^2) = 1 > 0$).

Приведём пример вложения для тора. Его можно видеть на рис. 1

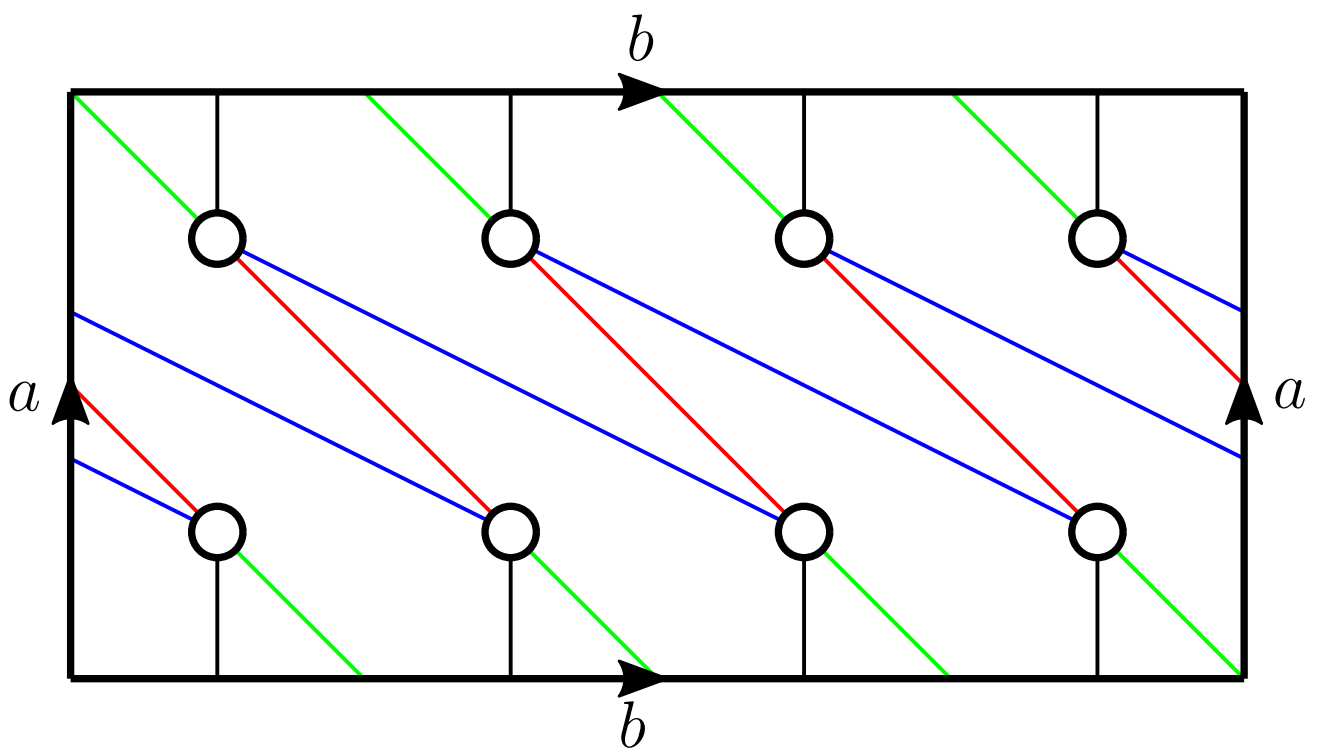


Рис. 1: Вложение $K_{4,4}$ в тор.