Занятие от 5.11.
Геометрия и топология. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

12 ноября 2020 г.

Задача 9.

Лемма 1. *f монотонно не убывает на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда есть s и t, что $s > t$, а $f(s) < f(t)$. В таком случае для всех $x > s$ верно, что

$$\alpha := \frac{s-t}{x-t} \in [0;1] \qquad \text{и} \qquad \alpha x + (1-\alpha)t = \frac{(s-t)x}{x-t} + \frac{(x-s)t}{(x-t)} = \frac{s(x-t)}{(x-t)} = s$$

а тогда по выпуклости f

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\alpha f(x) + (1-\alpha)f(t) - (1-\alpha)f(t)}{\alpha} &\leqslant \frac{f(\alpha x + (1-\alpha)t) - (1-\alpha)f(t)}{\alpha} \\ = \frac{f(s) - f(t)}{\alpha} + f(t) &= \frac{f(s)-f(t)}{s-t}(x-t) + f(t) \end{aligned}$$

При этом последнее — линейный многочлен с отрицательным старшим членом, поэтому при достаточно больших x значение f станет отрицательным, что не может быть, так как область значений f — $\mathbb{R}_+$. Поэтому f не убывает. □

Лемма 2. *Для любых $a, b \in \mathbb{R}_+$ верно, что $f(a) + f(b) \geqslant f(a+b)$.*

Доказательство.

$$\left.\begin{aligned} f(a) \geqslant \frac{a}{a+b}f(a+b) + \frac{b}{a+b}f(0) \\ f(b) \geqslant \frac{b}{a+b}f(a+b) + \frac{a}{a+b}f(0) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f(a) + f(b) \geqslant f(a+b) + f(0) = f(a+b)$$

□

Докажем, что $f \circ d$ — метрика.

1. $\forall x, y \in X \quad d(x,y) \geqslant 0 \Rightarrow f(d(x,y)) \geqslant 0$.
2. $\forall x, y \in X \quad f(d(x,y)) = 0 \leftrightarrow d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$.
3. $\forall x, y \in X \quad d(x,y) = d(y,x) \Rightarrow f(d(x,y)) = f(d(y,x))$.
4. $\forall x, y, z \in X$
$$d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z) \quad \Longrightarrow \quad f(d(x,y)) + f(d(y,z)) \geqslant f(d(x,y) + d(y,z)) \geqslant f(d(x,z)).$$

Поэтому $f \circ d$ — метрика.