# Основы математической логики.

Лектор — Станислав Олегович Сперанский
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

## TODOs



## Содержание



Материалы лекций: ссылка

### 0.1 Формальности про алфавиты и слова

**Определение 1.** *Алфавит* $A$ — множество элементов произвольной природы.

*$A$-слова* или *слова над алфавитом* $A$ — элементы $A^*$ (т.е. всевозможные конечные последовательности элементов из $A$).

Для всякого $w \in A^*$ *длиной слова* $w$ называется $|w|$ (что также равно $\mathrm{dom}(w)$).

**Определение 2.** Пусть даны слова $w_1$ и $w_2$ над $A$. Рассмотрим отображение

$$v : |w_1| + |w_2| \to A, i \mapsto \begin{cases} w_1(i) & \text{если } i < |w_1| \\ w_2(i - |w_1|) & \text{если } i \geqslant |w_1| \end{cases}$$

Понятно, что $v \in A^*$. Полученное $v$ называется конкатенацией $w_1$ и $w_2$ и обозначается $w_1 w_2$.

**Определение 3.** Пусть $w, w' \in A^*$. Тогда $w'$ называется *подсловом* $w$, если $w = v_0 w' v_1$ для некоторых $\{v_0; v_1\} \subseteq A^*$. Обозначение: $w' \preccurlyeq w$.

В этом случае $\langle w'; |v_0| \rangle$ называется *вхождением* $w'$ в $w$.

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

**Определение 4.** Пусть $\langle w', k\rangle$ — вхождение $w'$ в $w$, т.е. $w = v_0 w' v_1$, где $|v_0| = k$. Тогда для всякого $u \in A^*$ можно определить

$$w[w'/u, k] := v_0 u v_1,$$

т.е. результат замены данного вхождения $w'$ в $w$ на $u$.

Если никакие два различных вхождения $w'$ в $w$ не пересекаются, то можно определить $w[w'/u]$ как результат одновременной замены всех вхождений $w'$ в $w$ на $u$.

## 0.2 Язык пропозициональной классической логики (Proposal Classic Logic, PCL)

**Определение 5.** Пусть (навсегда) зафиксировано некоторое счётное множество Prop. Будем называть его элементы *пропозициональными переменными* или просто *переменными.*

Алфавит $\mathscr{L}$ классической пропозициональной классической логики состоит из элементов Prop, а также:

- символов связок:
  - $\to$ — символ импликации,
  - $\wedge$ — символ конъюнкции,
  - $\vee$ — символ дизъюнкции,
  - $\neg$ — символ отрицания,
- и вспомогательных символов: ( и ).

Обозначим за Form наименьшее подмножество $\mathscr{L}^*$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $p \in \mathrm{Prop}$, то $p \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\varphi, \psi\} \in \mathrm{Prop}$, то $(\varphi \to \psi) \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\varphi, \psi\} \in \mathrm{Prop}$, то $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\varphi, \psi\} \in \mathrm{Prop}$, то $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{Form}$;
- если $\varphi \in \mathrm{Form}$, то $\neg\varphi \in \mathrm{Form}$.

Элементы Form называются формулами.

**Теорема 1.** Form *существует.*

**Доказательство.** Рассмотрим семейство $T$ всех подмножеств $\mathscr{L}^*$, удовлетворяющих порождающим правилам выше. Заметим, что $T$ не пусто, так как содержит $\mathscr{L}^*$. Тогда можно рассмотреть $F := \bigcap T$. Несложно убедиться, что оно удовлетворяет всем порождающим правилам, значит лежит в $T$. И при этом меньше по включению всех других множеств в $T$. Значит его и можно взять в качестве Form. □

**Определение 6.** Будем говорить, что $\varphi$ является *началом* $\psi$, и писать $\varphi \sqsubseteq \psi$, если $\psi = \varphi\tau$ для некоторого $v \in \mathscr{L}^*$.

**Лемма 2.** *Всякое* $\varphi \in \mathrm{Form}$ *имеет один из следующих видов:*

1. *$p$ для некоторого $p \in \mathrm{Prop}$;*

2. *$(\theta \circ \chi)$ для некоторых $\{\theta; \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$ и $\circ \in \{\to; \wedge; \vee\}$;*

3. *$\neg\theta$ для некоторого $\theta \in \mathrm{Form}$.*

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда рассмотрим $F := \mathrm{Form} \setminus \{\varphi\}$. Заметим, что $F$ удовлетворяет тем же порождающим правилам, что и Form. Действительно:

- Если $p \in \mathrm{Prop}$, то $p \in \mathrm{Form}$. При этом $p \neq \varphi$ по условию леммы. Следовательно $p \in F$.

- Если $\{\varphi, \psi\} \in \mathrm{Prop}$, то $(\varphi \to \psi) \in \mathrm{Form}$. При этом $(\varphi \to \psi) \neq \varphi$ по условию леммы. Следовательно $(\varphi \to \psi) \in F$. Аналогично для $\wedge$ и $\vee$.

- Если $\varphi \in \mathrm{Form}$, то $\neg\varphi \in \mathrm{Form}$. При этом $\neg\varphi \neq \varphi$ по условию леммы. Следовательно $\neg\varphi \in F$.

Значит $F$ — меньшее по включение чем Form множество, удовлетворяющее условиям наложенным на Form — противоречие. □

**Следствие 2.1.** *Рассмотрим последовательность множеств $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, что $F_0 = \mathrm{Prop}$, а*

$$F_{n+1} = F_n \cup \{(\varphi \circ \chi) \mid \{\theta; \chi\} \subseteq \mathrm{Form} \wedge \circ \in \{\to; \wedge; \vee\}\} \cup \{\neg\theta \mid \theta \in \mathrm{Form}\}$$

*Тогда*

1. *всякое $F_n \subseteq \mathrm{Form}$;*

2. *всякое $\varphi \in \mathrm{Form}$ лежит в некотором $F_n$.*

**Следствие 2.2.** $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = \mathrm{Form}$.

**Лемма 3.** *Пусть $\{\varphi; \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ таковы, что $\psi \sqsubseteq \varphi$. Тогда $\psi = \varphi$.*

**Доказательство.** Докажем утверждение возвратной индукцией по $|\varphi|$.

Рассмотрим случаи.

1. Если $\varphi \in \mathrm{Prop}$, то, очевидно, $\psi = \varphi$.

2. Если $\varphi = (\theta \circ \chi)$, где $\{\theta; \chi\} \in \mathrm{Form}$ и $\circ \in \{\to; \wedge; \vee\}$, то $\psi$ начинается на "(", значит имеет вид $(\theta' \circ' \chi')$, где $\{\theta'; \chi'\} \in \mathrm{Form}$ и $\circ' \in \{\to; \wedge; \vee\}$. Следовательно либо $\theta \sqsubseteq \theta'$, либо $\theta' \sqsubseteq \theta$. Но $|\theta| < |\varphi| - 3$, и $|\theta'| < |\psi| - 3 \leqslant |\varphi| - 3$. Тогда можно применить предположение индукции и получить, что $\theta = \theta'$. Значит $\circ = \circ'$, а далее по аналогии получаем, что $\chi = \chi'$. Следовательно $\varphi = \psi$.

3. Если $\varphi = \neg\theta$, то $\psi$ начинается на "$\neg$", следовательно $\psi = \neg\theta'$. Тогда $\theta' \sqsubseteq \theta$, а тогда по предположению индукции $\theta' = \theta$, значит $\varphi = \psi$.

□

**Теорема 4** (о единственности представления формул). *Всякая формула в $\mathrm{Form} \setminus \mathrm{Prop}$ представляется единственным образом в одном из видов*

- $(\theta \to \chi)$,

- $(\theta \wedge \chi)$,

- $(\theta \vee \chi)$,
- $\neg\theta$,

*где* $\{\theta; \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$.

**Доказательство.** По доказанной лемме всякое $\phi$ имеет такое представление. Пусть тогда их несколько; рассмотрим случаи.

1. Если $\phi$ начинается на "(", то тогда $\phi = (\theta \circ \chi) = (\theta' \circ' \chi')$. Тогда по доказанной лемме $\theta = \theta'$, $\circ = \circ'$, $\chi = \chi'$. Значит представления совпадают.
2. Если $\phi$ начинается на "$\neg$", то $\phi = \neg\theta = \neg\theta'$. Тогда $\theta = \theta'$, а следовательно представления совпадают.

$\square$

**Определение 7.** Для всякого $\varphi \in \mathrm{Form}$ определим

$$\mathrm{Sub}(\varphi) := \{\psi \mathrm{Form} \mid \psi \preccurlyeq \varphi\}.$$

Элементы $\mathrm{Sub}(\varphi)$ называют *подформулами* $\varphi$.

**Лемма 5.** *Пусть* $\varphi \in \mathrm{Form}$. *Тогда каждое вхождение "$\neg$" или "(" в* $\varphi$ *является началом вхождения некоторой подформулы.*

**Доказательство.**

TODO (А надо ли?)

$\square$

**Теорема 6.** *Пусть* $\varphi \in \mathrm{Form}$.

1. *Если* $\varphi \in \mathrm{Prop}$, *то* $\mathrm{Sub}(\varphi) = \{\varphi\}$.
2. *Если* $\varphi = (\theta \circ \chi)$, *где* $\{\theta; \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *и* $\circ \in \{\to; \wedge; \vee\}$, *то*
$$\mathrm{Sub}(\varphi) = \mathrm{Sub}(\theta) \cup \mathrm{Sub}(\chi) \cup \{\varphi\}.$$
3. *Если* $\varphi = \neg\theta$, *где* $\theta \in \mathrm{Form}$, *то*
$$\mathrm{Sub}(\varphi) = \mathrm{Sub}(\theta) \cup \{\varphi\}.$$

**Доказательство.**

1. Очевидно.
2. Непонятно. TODO
3. Непонятно. TODO

$\square$

## 0.3 Семантика пропозициональной классической логики

**Определение 8.** Под *оценкой* мы будем понимать произвольную функцию из Prop в 2 (т.е. в $\{0;1\}$). Интуитивно 0 — «ложь», а 1 — «правда».

**Теорема 7.** *Пусть дана случайная* $v : \mathrm{Prop} \to 2$. *Тогда существует единственная* $v^* : \mathrm{Form} \to 2$, *которая удовлетворяет следующим свойствам:*

1. $\forall p \in \mathrm{Prop} \qquad v^*(p) = 1 \Leftrightarrow v(p) = 1.$
2. $\forall \{\varphi;\psi\} \subseteq \mathrm{Form} \qquad v^*(\text{“}(\varphi \to \psi)\text{”}) = 1 \Leftrightarrow v^*(\varphi) = 0 \vee v^*(\psi) = 1.$
3. $\forall \{\varphi;\psi\} \subseteq \mathrm{Form} \qquad v^*(\text{“}(\varphi \wedge \psi)\text{”}) = 1 \Leftrightarrow v^*(\varphi) = 1 \wedge v^*(\psi) = 1.$
4. $\forall \{\varphi;\psi\} \subseteq \mathrm{Form} \qquad v^*(\text{“}(\varphi \vee \psi)\text{”}) = 1 \Leftrightarrow v^*(\varphi) = 1 \vee v^*(\psi) = 1.$
5. $\forall \varphi \in \mathrm{Form} \qquad v^*(\neg\varphi) = 1 \Leftrightarrow v^*(\varphi) = 0.$

**Доказательство.**

TODO

□

**Определение 9.** Если для некоторой оценки $v$ и формулы $\varphi$ верно, что $v^*(\varphi) = 1$, то пишут $v \Vdash \varphi$.

**Определение 10.** Формулу $\varphi$ называют:

- *выполнимой*, если $v \Vdash \varphi$ для некоторой оценки $v$;
- *общезначимой* (или *тождественно истинной*, или *тавтологией*), если $v \Vdash \varphi$ для всякой оценки $v$.

*Замечание.* Очевидно, например, что

$$\varphi \text{ общезначима} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\varphi \text{ не выполнима.}$$

**Теорема** (Кук-Левин)**.** *Проблема выполнимости для пропозициональной классической логики* NP*-полна.*

**Определение 11.** Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ и $\varphi \in \mathrm{Form}$. Говорят, что $\varphi$ *семантически следует из* $\Gamma$, если для любой оценки $v$

$$(\forall \psi \in \Gamma \quad v \Vdash \psi) \qquad \longrightarrow \qquad v \Vdash \varphi.$$

Обозначение: $\Gamma \vDash \varphi$.

Вместо $\varnothing \vDash \varphi$ обычно пишут $\vDash \varphi$.

*Замечание.* Очевидно, например, что

$$\vDash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \text{ общезначима.}$$

**Определение 12.** Формулы $\varphi$ и $\psi$ называются *семантически эквивалентными*, если $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$. Обозначение: $\varphi \equiv \psi$.

*Пример* 1. Для любых $\{\varphi;\psi;\chi\} \subseteq \mathrm{Form}$:

- $(\varphi \to \psi) \equiv \neg\varphi \vee \psi$;

- $(\varphi \vee \psi) \wedge \chi \equiv (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$;
- $(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \equiv (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$;
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$;
- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$;
- $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$.

**Упражнение 1.** Всякая формула семантически эквивалентна некоторой ДНФ.