

# Занятие от 7.09.

## Теоретическая информатика. 2 курс.

### Решения.

Глеб Минаев @ 204 (20.Б04-мкн)

15 сентября 2021 г.

## Содержание

		Задача 4 . . . . .	3
		Задача 6 . . . . .	3
Задача 1 . . . . .	1	Задача 9 . . . . .	4
Задача 2 . . . . .	1	Задача 10 . . . . .	6
Задача 3 . . . . .	2		

## Задача 1.

$Q \backslash \Gamma$	$a$	$b$	$\sqcup$
$q_0$	$q_{0, a, \sqcup, +1}$	$q_{0, b, \sqcup, +1}$	Acc
$q_{0, a}$	$q_{0, a, a, +1}$	$q_{0, a, b, +1}$	$q_{1, a, \sqcup, -1}$
$q_{0, b}$	$q_{0, b, a, +1}$	$q_{0, b, b, +1}$	$q_{1, b, \sqcup, -1}$
$q_{1, a}$	$q_{1, \sqcup, -1}$	Rej	Acc
$q_{1, b}$	Rej	$q_{1, \sqcup, -1}$	Acc
$q_1$	$q_{1, a, -1}$	$q_{1, b, -1}$	$q_{0, \sqcup, +1}$

---

**Задача 2.** В данном случае машина получает  $a$  и  $b$  разделённые пробелом, а выдаёт  $a$ ,  $b$  и  $ab$ , разделённые пробелом.

$Q \backslash \Gamma$	1	1'	$\sqcup$
$q_0$	$q_{0,1}, 1', +1$	Error	Halt
$q_{0,1}$	$q_{0,1}, 1, +1$	Error	$q_{0,2m}, \sqcup, +1$
$q_{0,2m}$	$q_{0,2}, 1', +1$	Error	$q_{0,rev}, \sqcup, -2$
$q_{0,rev}$	$q_{0,rev}, 1, -1$	$q_{0,rev}, 1, -1$	Halt
$q_{0,2}$	$q_{0,2}, 1, +1$	Error	$q_{0,3}, \sqcup, +1$
$q_{0,3}$	Error	Error	$q_{1,3 \rightarrow 2e}, 1, 0$
$q_{1,3 \rightarrow 2e}$	$q_{1,3 \rightarrow 2e}, 1, -1$	$q_{1,3 \rightarrow 2e}, 1', -1$	$q_{1,2e}, \sqcup, -1$
$q_{1,2e}$	$q_{1,2 \rightarrow 1e}, 1, -1$	$q_{1,2 \rightarrow 1e, 2 \text{ full}}, 1', -1$	Error
$q_{1,2 \rightarrow 1e}$	$q_{1,2 \rightarrow 1e}, 1, -1$	$q_{1,2 \rightarrow 1e}, 1', -1$	$q_{1,1e}, \sqcup, -1$
$q_{1,2 \rightarrow 1e, 2 \text{ full}}$	$q_{1,2 \rightarrow 1e, 2 \text{ full}}, 1, -1$	$q_{1,2 \rightarrow 1e, 2 \text{ full}}, 1', -1$	$q_{1,1e, 2 \text{ full}}, \sqcup, -1$
$q_{1,1e}$	$q_{1,1 \rightarrow 1'}, 1, -1$	$q_{1,1 \rightarrow 1b, \text{ drop } 1}, 1, -1$	Error
$q_{1,1e, 2 \text{ full}}$	$q_{1,1 \rightarrow 1'}, 1, -1$	$q_{2,1 \rightarrow 2'}, 1, +1$	Error
$q_{1,1 \rightarrow 1'}$	$q_{1,1 \rightarrow 1'}, 1, -1$	$q_{1, \text{ new } 1'}, 1, +1$	Error
$q_{1, \text{ new } 1'}$	$q_{1,1 \rightarrow 3e}, 1', +1$	Error	Error
$q_{1,1 \rightarrow 3e}$	$q_{1,1 \rightarrow 3e}, 1, +1$	$q_{1,1 \rightarrow 3e}, 1', +1$	$q_{1,2 \rightarrow 3e}, \sqcup, +1$
$q_{1,2 \rightarrow 3e}$	$q_{1,2 \rightarrow 3e}, 1, +1$	$q_{1,2 \rightarrow 3e}, 1', +1$	$q_{1,3 \rightarrow 3e}, \sqcup, +1$
$q_{1,3 \rightarrow 3e}$	$q_{1,3 \rightarrow 3e}, 1, +1$	$q_{1,3 \rightarrow 3e}, 1', +1$	$q_{1,3 \rightarrow 2e}, 1, 0$
$q_{1,1 \rightarrow 1b, \text{ drop } 1}$	$q_{1,1 \rightarrow 1b, \text{ drop } 1}, 1, -1$	$q_{1,1 \rightarrow 1b, \text{ drop } 1}, 1', -1$	$q_{1,1b, \text{ drop } 1}, \sqcup, +1$
$q_{1,1b, \text{ drop } 1}$	$q_{1,1 \rightarrow 2'}, 2++, 1', +1$	Error	Error
$q_{1,1 \rightarrow 2'}, 2++$	$q_{1,1 \rightarrow 2'}, 2++, 1, +1$	$q_{1,1 \rightarrow 2'}, 2++, 1', +1$	$q_{1,2 \rightarrow 2'}, 2++, \sqcup, +1$
$q_{1,2 \rightarrow 2'}, 2++$	$q_{1,2 \rightarrow 2'}, 2++, 1, +1$	$q_{1, \text{ new } 2'}, 1, +1$	Error
$q_{1, \text{ new } 2'}$	$q_{1,2 \rightarrow 3e}, 1', +1$	Error	Error
$q_{2,1 \rightarrow 2'}$	$q_{1,1 \rightarrow 2'}, 1, +1$	$q_{1,1 \rightarrow 2'}, 1', +1$	$q_{1,2 \rightarrow 2'}, \sqcup, +1$
$q_{2,2 \rightarrow 2'}$	$q_{2,2 \rightarrow 2'}, 1, +1$	Halt, 1, ...	Error

---

**Задача 3.** Напишем машину, которой подаются битовые строки  $\bar{w}_1$  и  $\bar{w}_2$ , разделённые двумя пробелами, а она оставляет на ленте  $\bar{w}_1^R \bar{w}_2$  и возвращает головку в исходное положение.

$Q \backslash \Gamma$	0	1	$\sqcup$
$q_0$	$q_{\text{copy } 0, 1 \rightarrow 2b, \sqcup, +1}$	$q_{\text{copy } 1, 1 \rightarrow 2b, \sqcup, +1}$	$q_{\text{shift}2, \rightarrow 2e, \sqcup, +2}$
$q_{\text{copy } 0, 1 \rightarrow 2b}$	$q_{\text{copy } 0, 1 \rightarrow 2b, 0, +1}$	$q_{\text{copy } 0, 1 \rightarrow 2b, 1, +1}$	$q_{\text{copy } 0, \sqcup, +1}$
$q_{\text{copy } 1, 1 \rightarrow 2b}$	$q_{\text{copy } 1, 1 \rightarrow 2b, 0, +1}$	$q_{\text{copy } 1, 1 \rightarrow 2b, 1, +1}$	$q_{\text{copy } 1, \sqcup, +1}$
$q_{\text{copy } 0}$	Error	Error	$q_{\text{shift}, 0, -2}$
$q_{\text{copy } 1}$	Error	Error	$q_{\text{shift}, 1, -2}$
$q_{\text{shift}}$	$q_{\text{shift}, 0, \sqcup, -1}$	$q_{\text{shift}, 1, \sqcup, -1}$	$q_0, \sqcup, 0$
$q_{\text{shift}, 0}$	$q_{\text{shift}, 0, 0, -1}$	$q_{\text{shift}, 1, 0, -1}$	$q_0, \sqcup, 0$
$q_{\text{shift}, 1}$	$q_{\text{shift}, 0, 1, -1}$	$q_{\text{shift}, 1, 1, -1}$	$q_0, \sqcup, 0$
$q_{\text{shift}2, \rightarrow 2e}$	$q_{\text{shift}2, \rightarrow 2e, 0, +1}$	$q_{\text{shift}2, \rightarrow 2e, 1, +1}$	$q_{\text{shift}2, \sqcup, \sqcup, 0, -1}$
$q_{\text{shift}2, \sqcup, \sqcup}$	$q_{\text{shift}2, 0, \sqcup, \sqcup, -1}$	$q_{\text{shift}2, 1, \sqcup, \sqcup, -1}$	$q_{\text{shift}2, \sqcup, \sqcup, -1}$
$q_{\text{shift}2, 0, \sqcup}$	$q_{\text{shift}2, 0, 0, \sqcup, -1}$	$q_{\text{shift}2, 1, 0, \sqcup, -1}$	$q_{\text{shift}2, 0, \sqcup, -1}$
$q_{\text{shift}2, 1, \sqcup}$	$q_{\text{shift}2, 0, 1, \sqcup, -1}$	$q_{\text{shift}2, 1, 1, \sqcup, -1}$	$q_{\text{shift}2, 1, \sqcup, -1}$
$q_{\text{shift}2, 0, 0}$	$q_{\text{shift}2, 0, 0, 0, -1}$	$q_{\text{shift}2, 1, 0, 0, -1}$	$q_{\text{shift}2, 0, 0, -1}$
$q_{\text{shift}2, 0, 1}$	$q_{\text{shift}2, 0, 0, 1, -1}$	$q_{\text{shift}2, 1, 0, 1, -1}$	$q_{\text{shift}2, 0, 1, -1}$
$q_{\text{shift}2, 1, 0}$	$q_{\text{shift}2, 0, 1, 0, -1}$	$q_{\text{shift}2, 1, 1, 0, -1}$	$q_{\text{shift}2, 1, 0, -1}$
$q_{\text{shift}2, 1, 1}$	$q_{\text{shift}2, 0, 1, 1, -1}$	$q_{\text{shift}2, 1, 1, 1, -1}$	$q_{\text{shift}2, 1, 1, -1}$
$q_{\text{shift}2, \sqcup}$	Error	Error	Halt, $\sqcup, 0$
$q_{\text{shift}2, 0}$	Error	Error	Halt, $0, 0$
$q_{\text{shift}2, 1}$	Error	Error	Halt, $1, 0$

Состояния  $q_0, q_{\text{copy}} \dots, q_{\text{shift}}$  и  $q_{\text{shift}}, \dots$  выполняют сведение задачи для  $a\bar{w}_1$  и  $\bar{w}_2$  к задаче для  $\bar{w}_1$  и  $a\bar{w}_2$ . Таким образом мы сводим задачу к задаче  $\varepsilon$  и  $\bar{w}_1^R \bar{w}_2$ . Значит остаётся сдвинуть получившуюся строку на два влево; за это отвечают состояния  $q_{\text{shift}2}, \dots$ .

Теперь напишем машину, которая прибавляет единицу к числу в развёрнутой двоичной записи.

$Q \backslash \Gamma$	0	1	$\sqcup$
$q_0$	$q_{\text{return}, 1, -1}$	$q_0, 0, +1$	$q_{\text{return}, 1, -1}$
$q_{\text{return}}$	$q_{\text{return}, 0, -1}$	$q_{\text{return}, 1, -1}$	Halt, $\sqcup, +1$

**Задача 4.** Сделаем машину, которая находит (первое) вхождение  $a$  и удаляет его, а затем поставим её на повтор по условию присутствия  $a$  в строке.

$Q \backslash \Gamma$	$a$	$b$	$c$	$\sqcup$
$q_0$	$q_{\text{shift}, \rightarrow e, \sqcup, +1}$	$q_0, b, +1$	$q_0, c, +1$	Halt
$q_{\text{shift}, \rightarrow e}$	$q_{\text{shift}, \rightarrow e, a, +1}$	$q_{\text{shift}, \rightarrow e, b, +1}$	$q_{\text{shift}, \rightarrow e, c, +1}$	$q_{\text{shift}, \sqcup, \sqcup, -1}$
$q_{\text{shift}, \sqcup}$	$q_{\text{shift}, a, \sqcup, -1}$	$q_{\text{shift}, b, \sqcup, -1}$	$q_{\text{shift}, c, \sqcup, -1}$	$q_0, \sqcup, 0$
$q_{\text{shift}, a}$	$q_{\text{shift}, a, a, -1}$	$q_{\text{shift}, b, a, -1}$	$q_{\text{shift}, c, a, -1}$	$q_0, a, 0$
$q_{\text{shift}, b}$	$q_{\text{shift}, a, b, -1}$	$q_{\text{shift}, b, b, -1}$	$q_{\text{shift}, c, b, -1}$	$q_0, b, 0$
$q_{\text{shift}, c}$	$q_{\text{shift}, a, c, -1}$	$q_{\text{shift}, b, c, -1}$	$q_{\text{shift}, c, c, -1}$	$q_0, c, 0$

**Задача 6.** Заметим, что можно переформулировать задачу следующим образом. Постройте машину, которая

1. проверяет присутствие ровно одной буквы  $c$  в строке,

2. заменяет её на пробел (в итоге получаются строки  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  из  $\Sigma^*$ , разделённые пробелом),
3. проверяет равенство  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$ .

Проверку равенства  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  реализуем так: слева от  $\bar{u}$  и справа от  $\bar{v}$  напомним по букве  $c$ , сделав отступ (т.е. на ленте через пробел будут написаны  $c$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  и  $c$ ), а затем с концов  $u$  и  $v$  будем стирать по букве, в итоге устанавливая равенство  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$ .

$Q \backslash \Gamma$	$a$	$b$	$c$	$\sqcup$
$q_0$	$q_{c1}, a, -2$	$q_{c1}, a, -2$	$q_{c1}, a, -2$	$q_{c1}, \sqcup, -2$
$q_{c1}$	$q_{\text{find } c}, c, +2$	$q_{\text{find } c}, c, +2$	$q_{\text{find } c}, c, +2$	$q_{\text{find } c}, c, +2$
$q_{\text{find } c}$	$q_{\text{find } c}, a, +1$	$q_{\text{find } c}, b, +1$	$q_{\text{found } c}, \sqcup, +1$	Rej
$q_{\text{found } c}$	$q_{\text{found } c}, a, +1$	$q_{\text{found } c}, b, +1$	Rej	$q_{c2}, \sqcup, +1$
$q_{c2}$	$q_1, c, -2$	$q_1, c, -2$	$q_1, c, -2$	$q_1, c, -2$
$q_1$	$q_{1, a}, \sqcup, -1$	$q_{1, b}, \sqcup, -1$	Error	$q_{2, \varepsilon}, \sqcup, -1$
$q_{1, a}$	$q_{1, a}, a, -1$	$q_{1, a}, b, -1$	Error	$q_{2, a}, \sqcup, -1$
$q_{1, b}$	$q_{1, b}, a, -1$	$q_{1, b}, b, -1$	Error	$q_{2, b}, \sqcup, -1$
$q_{2, \varepsilon}$	Rej	Rej	Acc	$q_{2, \varepsilon}, \sqcup, -1$
$q_{2, a}$	$q_3, \sqcup, +1$	Rej	Rej	$q_{2, a}, \sqcup, -1$
$q_{2, b}$	Rej	$q_3, \sqcup, +1$	Rej	$q_{2, b}, \sqcup, -1$
$q_3$	$q_4, a, +1$	$q_4, b, +1$	$q_{2, \varepsilon}, c, -1$	$q_3, \sqcup, +1$
$q_4$	$q_4, a, +1$	$q_4, b, +1$	Error	$q_1, \sqcup, -1$

---

**Задача 9.** Решим такую задачу.

Пусть головка стоит на клетке 0, слева от неё написана троичная запись  $\bar{n}$  некоторого числа, а справа — унарная запись числа  $u$ . Мы хотим, чтобы головка вернулась на место, слева было написано  $k\bar{n}$ , а справа — унарная запись числа  $v$ , где  $v$  и  $k$  — неполное частное и остаток при делении  $u$  на 3. Пусть также в клетке 0 по умолчанию стоит знак  $\times$ ; его нельзя будет писать и стирать, он будет ровно в одном экземпляре.

Рассмотрим следующую машину  $M_1$ .

$Q \backslash \Gamma$	$\times$	$a$	0	1	2	$\_$
$q_0 = q_{0,0}$	$q_{0,0}, \times, +1$	$q_{0,1}, \_, +1$	Error	Error	Error	$q_{1,0}, \_, -1$
$q_{0,1}$	Error	$q_{0,2}, \_, +1$	Error	Error	Error	$q_{1,1}, \_, -1$
$q_{0,2}$	Error	$q_{0,0}, a, +1$	Error	Error	Error	$q_{1,2}, \_, -1$
$q_{1,0}$	$q_{2,0}, \times, -1$	$q_{1,0}, a, -1$	Error	Error	Error	$q_{1,0}, \_, -1$
$q_{1,1}$	$q_{2,1}, \times, -1$	$q_{1,1}, a, -1$	Error	Error	Error	$q_{1,1}, \_, -1$
$q_{1,2}$	$q_{2,2}, \times, -1$	$q_{1,2}, a, -1$	Error	Error	Error	$q_{1,2}, \_, -1$
$q_{2,0}$	Error	Error	$q_{2,0}, 0, -1$	$q_{2,0}, 1, -1$	$q_{2,0}, 2, -1$	$q_{3,0}, +1$
$q_{2,1}$	Error	Error	$q_{2,1}, 0, -1$	$q_{2,1}, 1, -1$	$q_{2,1}, 2, -1$	$q_{3,1}, +1$
$q_{2,2}$	Error	Error	$q_{2,2}, 0, -1$	$q_{2,2}, 1, -1$	$q_{2,2}, 2, -1$	$q_{3,2}, +1$
$q_3$	$q_{3'}, \times, +1$	Error	$q_{3,0}, +1$	$q_{3,1}, +1$	$q_{3,2}, +1$	Error
$q_{3'}$	Error	Error	Error	Error	Error	$q_{4,0}, 0, \_$
$q_{4,0}$	Error	Error	$q_{4, \text{check}}, 0, +3$	Error	Error	Error
$q_{4, \text{check}}$	Error	$q_{4, \rightarrow \text{end}}, a, +3$	Error	Error	Error	$q_{4'}, \_, -3$
$q_{4, \rightarrow \text{end}}$	Error	$q_{4, \rightarrow \text{end}}, a, +3$	Error	Error	Error	$q_{4, \text{shift}}, \_, -3$
$q_{4, \text{shift}}$	Error	$q_{4, \text{shifted}}, \_, -2$	Error	Error	Error	Error
$q_{4, \text{shifted}}$	Error	Error	$q_{4, \text{shifted}'}, a, +1$	Error	Error	$q_{4, \text{shift}}, a, -1$
$q_{4, \text{shifted}'}$	Error	Error	Error	Error	Error	$q_{4,0}, 0, 0$
$q_{4'}$	Error	Error	$q_{5, \_, -1}$	Error	Error	Error
$q_5$	Halt	$q_{5, \_, -1}$	Error	Error	Error	Error

Заметим, что вся машина состоит из “подзадач”.

1. Состояния  $q_0...$  (т.е.  $q_{0,0}$ ,  $q_{0,1}$  и  $q_{0,2}$ ) составляют подзадачу 0, которая “компрессирует” унарную запись. Т.е. она идёт по ней слева направо стирает  $a$ -шки и записывает остаток (второе число в номере состояния) число стёртых  $a$ -шек; при этом если остаток сбрасывается в 0, то  $a$ -шка не стирается. Таким образом она разбивает  $a$ -шки на тройки последовательных, стирает в каждой тройке первые две, а неразбитые на тройки  $a$ -шки съедает, и запоминает их число. Следовательно останется неполное частное при делении  $u$  на 3  $a$ -шек и остаток при том же делении будет запомнен. Так например строка  $aaaaaaa$  (7  $a$ -шек) будет превращена в строку  $\_a\_a$  с конечным состоянием  $q_{0,1}$ .
2. Состояния  $q_1...$  составляют подзадачу 1, которая сдвигает головку к символу  $\times$ . По сути это три одинаковые подзадачи, но их три, так как нужно хранить остаток при делении, полученный из подзадачи 0.
3. Состояния  $q_2...$  составляют подзадачу 2, которая сдвигается в конец уже записанного троичного числа и пишет цифру, соответствующую запомненному остатку.
4. Состояние  $q_3$  как подзадача 3 сдвигает головку к символу  $\times$ . Состояние  $q_{3'}$  делает последнее действие данной подзадачи, готовя условия для подзадачи 3.
5. Состояния  $q_4...$  составляют подзадачу 4, которая собирает разъехавшиеся  $a$ -шки в одно унарное число. Делает она это повторяя такую подзадачу:

Пусть написаны несколько  $a$ -шек (может быть, ни одной) подряд, затем 0, а после него несколько раз (может быть, ни одного) повторена запись  $\_a\_$ . Т.е. имеется запись наподобие  $a...a0\_a\_a\_a...\_a$ . При этом головка стоит на нуле. Мы хотим, чтобы, если справа от нуля есть  $a$ -шка, слева от нуля было на одну  $a$ -шку больше, а справа — на одну меньше.

Таким образом подзадача поставила 0 и привела нас к формулировке задачи, где слева  $a$ -шек нет. Теперь несложно видеть, что  $q_{4,0}$  — начальное состояние, из которого мы двигаемся на  $+3$ , чтобы посмотреть, есть ли смысл выполнять подзадачу. Если нет, то производится откат к изначальной задаче:  $q_4$  убирает ноль,  $q_5$  сдвигает нас к символу  $\times$ . Если же да, то мы переходим в состояние  $q_4, \rightarrow \text{end}$ , прыгающее на  $+3$  каждый раз и ищущее последнюю  $a$ -шку. Как только она  $a$ -шки не обнаруживает, она прыгает назад на последнюю  $a$ -шку, после чего запускает алгоритм сдвига каждой  $a$ -шки правее нуля на  $-2$ : на  $a$ -шке мы попадаем в состояние  $q_{4, \text{shift}}$ , которое удаляет  $a$ -шку и прыгает на  $-2$ , там мы ставим в состоянии  $q_{4, \text{shifted}}$  новую  $a$ -шку, и если там был ноль, то заканчиваем сдвиги и в состоянии  $q_{4, \text{shifted}}$  ставим новый ноль — на 1 правее. После этого подзадача завершена, а значит её можно начать снова — мы переходим в  $q_{4,0}$ .

Теперь осталось написать слева символ  $\times$ , зациклить эту машину на условии присутствии  $a$ -шки справа и сдвинуть полученное число в правильное место ленты. Получаем следующую машину  $M$ .

$Q \backslash \Gamma$	$\times$	$a$	0	1	2	$\sqcup$
$q_0$	Error	$q_0', a, -1$	Error	Error	Error	Halt, 0, 0
$q_0'$	Error	Error	Error	Error	Error	$q_{1,0}, \times, 0$
$q_{1,0}$	$q_{1, \text{check}}, \times, +1$	Error	Error	Error	Error	Error
$q_{1, \text{check}}$	Error	$q_{1, M_1}, a, -1$	Error	Error	Error	$q_{2, \sqcup}, -1$
$q_{1, M_1}$	$M_1 : \{\text{Halt} \rightarrow q_{1,0}, \times, 0$	Error	Error	Error	Error	Error
$q_2$	$q_{2,\times}, \times, -1$	Error	$q_{2,0}, \times, -1$	$q_{2,1}, \times, -1$	$q_{2,2}, \times, -1$	Error
$q_{2,\times}$	$q_{2,\times}, \times, -1$	Error	$q_{2,0}, 0, -1$	$q_{2,1}, 1, -1$	$q_{2,2}, \times, -1$	$q_{4, \sqcup}, +1$
$q_{2,0}$	$q_{2,\times}, \times, -1$	Error	$q_{2,0}, 0, -1$	$q_{2,1}, 1, -1$	$q_{2,2}, 2, -1$	$q_{3,0}, \sqcup, +1$
$q_{2,1}$	$q_{2,\times}, \times, -1$	Error	$q_{2,0}, 0, -1$	$q_{2,1}, 1, -1$	$q_{2,2}, 2, -1$	$q_{3,1}, \sqcup, +1$
$q_{2,2}$	$q_{2,\times}, \times, -1$	Error	$q_{2,0}, 0, -1$	$q_{2,1}, 1, -1$	$q_{2,2}, 2, -1$	$q_{3,2}, \sqcup, +1$
$q_{3,0}$	$q_{3,0}, \times, +1$	Error	$q_{3,0}, 0, +1$	$q_{3,0}, 1, +1$	$q_{3,0}, 2, +1$	$q_{2,0}, 0, -1$
$q_{3,1}$	$q_{3,1}, \times, +1$	Error	$q_{3,1}, 0, +1$	$q_{3,1}, 1, +1$	$q_{3,1}, 2, +1$	$q_{2,1}, 1, -1$
$q_{3,2}$	$q_{3,2}, \times, +1$	Error	$q_{3,2}, 0, +1$	$q_{3,2}, 1, +1$	$q_{3,2}, 2, +1$	$q_{2,2}, 2, -1$
$q_4$	Halt, $\sqcup, 0$	Error	Error	Error	Error	Error

Здесь  $q_0$  и  $q_0'$  ставят знак  $\times$ .  $q_{1, \text{check}}$  проверяет присутствие  $a$ -шки справа.  $q_{1, M_1}$  запускает машину  $M_1$ .  $q_{2, \dots}$  идут налево, запоминая последний увиденный (непробельный) символ.  $q_{3, \dots}$  (после того как  $q_{2, \dots}$  напоролась на пробел) идут до конца направо, пишут соответствующий символ и опять запускают спуск по  $q_{2, \dots}$ .  $q_4$  стирает оставшийся символ  $\times$  и завершает работу.

**Задача 10.** Давайте рассмотрим биекцию  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ , которая изображается последовательностью  $(0, 1, -1, 2, -2, \dots)$ . Таким образом мы получаем следующую простую таблицу.

$n$	$\dots$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$\dots$
$f^{-1}(n)$	$\dots$	4	2	0	1	3	5	$\dots$
$f^{-1}(n+1) - f^{-1}(n)$	$\dots$	$-2$	$-2$	1	2	2	2	$\dots$
$f^{-1}(n-1) - f^{-1}(n)$	$\dots$	2	2	2	$-1$	$-2$	$-2$	$\dots$

Эта таблица нужна нам для того, что мы хотим эмулировать двухсторонне бесконечную полосу с помощью перерасположения её клеток в односторонней. При чём мы хотим, чтобы  $f$

задавала это соответствие. Но в таком случае нужно правильно эмулировать шаг вправо (т.е.  $f^{-1}(n+1) - f^{-1}(n)$ ) и шаг влево ( $f^{-1}(n-1) - f^{-1}(n)$ ).

Давайте сделаем вместо одного барьера  $\vdash$  — два подряд, а справа от них уже будем уже нумеровать клетки по правилу функции  $f$ . Разделим числа на две группы  $S_+ := \mathbb{N}_{\geq 1}$  и  $S_- := \mathbb{N}_{\leq 0}$ . Таким образом если мы, например, в  $S_+$ , то если надо пойти направо, то просто прибавим 2, а если налево — то  $-2$ . При этом если мы были в единице и пошли налево, прибавлением  $-2$  к координате мы попали в первый (правый) барьер; в таком случае несложно понять, что надо прибавить ещё 1. С  $S_-$  аналогично. Т.е. формально правило следующее.

1. Пусть мы в  $S_+$  и идём вправо. Тогда нужно прибавить  $+2$ .
2. Пусть мы в  $S_-$  и идём влево. Тогда нужно прибавить  $+2$ .
3. Пусть мы в  $S_+$  и идём влево. Тогда нужно прибавить  $-2$ . При попадании в барьер прибавить  $+1$ .
4. Пусть мы в  $S_-$  и идём вправо. Тогда нужно прибавить  $-2$ . При попадании в барьер прибавить  $+3$ .

При этом понятно, что мы меняем наше множество тогда и только тогда, когда влетаем в барьер. Следовательно вместо множества состояний  $Q$  возьмём множество состояний  $Q' := \{q_+; q_-\}_{q \in Q}$  состоящее из состояний  $q_+$  и  $q_-$  для всякого  $q \in Q$  ( $\pm$  в индексе значит принадлежность местоположения головки множеству  $S_{\pm}$  соответственно). Таким образом если из  $q$  при символе  $l$  мы переходили в  $p$ , то из  $q_{\pm}$  при символе  $l$  мы будем переходить в  $p_{\pm}$ . При этом после всякого  $q_{\pm}$  нужно поставить несколько состояний (для каждого  $q_{\pm}$  и  $l$  набор дополнительных состояний индивидуальный), что по понятным правилам выполнение может раздвоиться, и в одном случае переход надо поставить на  $p_+$ , а в другом — на  $p_-$ . Например, как в таблице далее изображено поднятия  $(q, l) \rightarrow (p, k, +1)$  и  $(q', l) \rightarrow (p', k, -1)$ .

$Q \setminus \Gamma$	$l$	$\dots$	$\vdash$
$q_+$	$p_+, k, +2$	$\dots$	Error
$q_-$	$s_{q-, l, +1}, k, -2$	$\dots$	Error
$s_{q-, l, +1}$	$p_+, l, 0$	$p_+, \dots, 0$	$p_-, \vdash, +3$
$q'_-$	$p'_-, k, -2$	$\dots$	Error
$q'_+$	$s_{q'_+, l, -1}, k, -2$	$\dots$	Error
$s_{q'_+, l, -1}$	$p'_-, l, 0$	$p_-, \dots, 0$	$p'_+, \vdash, +1$

В принципе везде можно было дать общее правило: прибавить 2 со знаком, равным произведению знака группы и знака сдвига, если попали в барьер, прибавить  $+1$ , если опять попали, прибавить  $+2$ . В таком случае можно было бы не рассматривать 4 случая, а сразу записать два дополнительных состояния. Но это довольно некрасиво.