Алгебра. Практика.

А. В. Щеголёв

Определение 1. Кольцо R называется *Евклидовым*, если существует $\phi : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ — *норма Евклида*, что $\forall a, b \in R\ \exists q, r \in R : a = bq + r, \phi(r) < \phi(b)$.

Упражнение 1.

1. Пусть дана какая-то норма Евклида ϕ на кольце R. Тогда эту норму можно докрутить так, что для новой нормы ϕ' верно, что $\phi'(ab) \geqslant \phi'(a)$.

2. Для ϕ' верно, что для всех обратимых элементов ϕ'-значения равны.

Определение 2. *Общим делителем* a и b называется c, что $c \mid a$ и $c \mid b$. *Наибольшим общим делителем (НОД)* a и b называется общий делитель a и b, делящийся на все другие общие делители a и b.

Теорема 1 (алгоритм Евклида)**.** *В Евклидовом кольце у любых двух чисел есть НОД.*

Доказательство. Заметим, что $(a, b) = (a + bk, b)$.

Пусть даны a и b. Предположим, что $\phi(a) \geqslant \phi(b)$, иначе поменяем их местами. Тем самым по аксиоме Евклида найдутся q и r, что $a = bq + r$, а $\phi(r) < \phi(b) \leqslant \phi(a)$, значит $\phi(a) + \phi(b) > \phi(r) + \phi(b)$. При этом $(a, b) = (r, b)$. Значит бесконечно $\phi(a) + \phi(b)$ не может бесконечнго уменьшаться, так как натурально, значит за конечное кол-во переходов мы получим, что одно из чисел делит другое, а значит НОД стал определён. $\square$

Упражнение 2. $\sigma \left(\begin{smallmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} d \\ 0 \end{smallmatrix}\ \sigma\right)$. Чему может быть равно σ_{2*}?

Упражнение 3. Докажите, что Гауссова норма — норма Евклида.

Упражнение 4. Найти $(17 + 23i, 13 - 21i)$.

Упражнение 5. Ждите позже...

Упражнение 6. Найти все решения $17x + 24y = 3$ над $\mathbb{Z}$.