Дискретная теория вероятностей.

Лектор — Юрий Александрович Давыдов
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

TODOs

Или же всё-таки $\mathcal{G}$ будет борелевской сигма-алгеброй? . . . 8
Написать. Пока лень... . . . 12
То же самое для взятия по условию события. . . . 12
Написать. Пока лень... . . . 12
Перерисовать. . . . 15

Содержание

1 Вероятностные пространства и стандартные следствия 1
1.1 Вероятностное пространство . . . 1
1.2 Условная вероятность . . . 5
1.3 Независимые события . . . 6
1.4 Случайные величины . . . 8
1.5 Построение сложных вероятностных пространств . . . 11
1.6 Пуассоновская аппроксимация . . . 13

Литература:

- А.Н. Ширяев, “Вероятность”.
- М.А. Лифшиц, “Лекции”
- Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко, “Введение в топологию”, М.:Наука. Физматлит, 1995.
- James Munkres, Topology.

1 Вероятностные пространства и стандартные следствия

1.1 Вероятностное пространство

Определение 1. *Вероятностное пространство* — это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

- $\Omega \neq \varnothing$ — множество объектов случайной природы, называемых *элементарными событиями (исходами)*,
- $\mathcal{F}$ — сигма-алгебра над множеством Ω (т.е. такое подмножество $\mathcal{P}(\Omega)$, что
  1. $\mathcal{F}$ содержит Ω,
  2. для всякого $A \in \mathcal{F}$ множество $\Omega \setminus A$ содержится в $\mathcal{F}$,
  3. для всякого не более чем счётного семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ множеств из $\mathcal{F}$ множества
  $$\bigcup_{i \in I} A_i \qquad \text{и} \qquad \bigcap_{i \in I} A_i$$
  содержатся в $\mathcal{F}$),

  которая называется множеством *(случайных) событий*,
- $\mathbb{P}$ — счётно-аддитивная мера, что $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (т.е. функция из $\mathcal{F}$ в $[0; 1]$, что
  1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
  2. для всякого не более чем счётного семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ дизъюнктных множеств из $\mathcal{F}$
  $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i);$$

  значение $\mathbb{P}(A)$ называется *вероятностью события* A).

Пример 1. Пусть мы бросаем монетку (один раз).

1. Тогда множество исходов будет состоять из элементарных событий "выпал орёл" и "выпала решка":
$$\Omega := \{\text{Орёл}; \text{Решка}\}$$
2. Множество событий будет состоять из событий:
   (a) $\varnothing$ — ничего не выпало, т.е. ничего не произошло,
   (b) $\{\text{Орёл}\}$ — выпал орёл,
   (c) $\{\text{Решка}\}$ — выпала решка,
   (d) $\{\text{Орёл}; \text{Решка}\}$ — выпал орёл или решка, т.е. что-то произошло.

   Т.е. в данном случае $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
3. Понятно, что
$$\mathbb{P}(\varnothing) = 0, \qquad \text{а} \qquad \mathbb{P}(\{\text{Орёл}; \text{Решка}\}) = 1.$$
   При этом для всякой величины $p \in [0; 1]$ может быть, что
$$\mathbb{P}(\{\text{Орёл}\}) = p, \qquad \text{а} \qquad \mathbb{P}(\{\text{Решка}\}) = 1 - p.$$
   В случае $p = \frac{1}{2}$ монетку называют *симметричной* (иначе *несимметричной*).

Замечание ("стабилизация частот"). Пусть мы проводим один и тот же эксперимент n раз и смотрим, сколько раз реализовалось событие A. Обозначим это количество реализаций за $\nu_n(A)$. При этом если эксперимент брать "реальным", например, взятым из физики (подбрасывание монеты, бросание игрального кубика, etc.), то можно заметить следующие явления.

1. (эмпирический факт) Для всякого события A имеет место сходимость
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(A)}{n} = P(A).$$
Это и хочется назвать вероятностью.

2. Если $A = \Omega$, то $\nu_n(A)$ должно ровняться n, а значит
$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(A)}{n} = 1.$$
А если $A = \varnothing$, то $P(A) = 0$.

3. Для всякого события A верно, что $\nu_n(A) \in [0; n]$. Следовательно $P(A) \in [0; 1]$.

4. Если события A и B дизъюнктны, то $\nu_n(A) + \nu_n(B) = \nu_n(A \cup B)$. Отсюда следует аддитивность вероятности; и по аналогии получается счётная аддитивность.

Лемма 1.

1. *Для всяких событий A и B*
$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$

2. *Для всякого события A*
$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C) = 1,$$
где $A^C := \Omega \setminus A$.

3. *Для всяких событий A и B*
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

4. *Для всякого не более чем счётного семейства событий $\{A_i\}_{i\in I}$*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Определение 2. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется *дискретным*, если Ω не более чем счётно, а $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть даны не более чем счётное Ω и $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.*

1. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — дискретное вероятностное пространство. Для всякого $\omega \in \Omega$ можно обозначить*
$$p_\omega := \mathbb{P}(\omega).$$
Тогда

   (a) *каждое $p_\omega \geqslant 0$,*

   (b)
$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1.$$

И при этом $\mathbb{P}$ можно задать условием

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

2. *Пусть для всякого $\omega \in \Omega$ определено вещественное p_ω, что*
   (a) *каждое $p_\omega \geqslant 0$,*
   (b)
   $$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

   Тогда можно задать функцию $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0; 1]$ условием

   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega,$$

   и тогда $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ будет дискретным вероятностным пространством.

Доказательство.

1. Действительно:
   (a) Каждое
   $$p_\omega = \mathbb{P}(\omega) \geqslant 0.$$
   (b) Поскольку $\Omega = \bigsqcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$, то
   $$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

   И аналогично $A = \bigsqcup_{\omega \in A} \{\omega\}$, а значит

   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

2. Действительно, если $A = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ (I не более чем счётно), то (так как каждое A_i не более чем счётно)
   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega = \sum_{i \in I} \sum_{\omega \in A_i} p_\omega = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$
   (так как мы рассуждаем в рамках абсолютно сходящегося ряда). Ну и, конечно,
   $$\mathbb{P}(\varnothing) = \sum_{\omega \in \varnothing} p_\omega = 0 \qquad \text{и} \qquad \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

□

Определение 3. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется *пространством классического типа*, если Ω кончено, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ и для всякого $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Замечание 1. В классическом пространстве соответственно имеем, что

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

1.2 Условная вероятность

Определение 4. *Вероятность события A при условии события B* (где $\mathbb{P}(B) \neq 0$) есть

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Теорема 3. *Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $B \in \mathcal{F}$, что $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Тогда тройки $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $(B, \mathcal{F}_B, P_B)$, где*

$$\mathcal{F}_B := \{S \in \mathcal{F} \mid S \subseteq B\},$$

а

$$P : \mathcal{F} \to [0; 1], A \mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

и

$$P : \mathcal{F}_B \to [0; 1], A \mapsto \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)},$$

являются вероятностными пространствами.

Доказательство. Понятно, что

$$P(\varnothing) = 0 \qquad \text{и} \qquad P(\Omega) = 1.$$

Также если $A = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ (где I не более чем счётно), то

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} A_i \cap B \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B).$$

Значит первая тройка является вероятностным пространством.

Заметим, что отношение $\sim$ на $\mathcal{F}$, заданное условием

$$S \sim T \quad \Longleftrightarrow \quad S \cap B = T \cap B$$

определяет классы эквивалентности, минимальные по включению предстаители которых (представителем $[A]$ будет $A \cap B$), образуют $\mathcal{F}_B$. При этом для всяких S и T из $S \sim T$ следует, что

$$\mathbb{P}(S \cap B) = \mathbb{P}(T \cap B).$$

Также несложно понять, что $\mathcal{F}_B$ будет сигма-алгеброй. Значит P_B сужением P на $\mathcal{F}$ с тем же множеством значений. Таким образом вторая тройка тоже будет вероятностным пространством. □

Лемма 4 (формула полной вероятности)**.** *Пусть дано не более чем счётное разбиение $\{B_i\}_{i \in I}$ множества Ω на множества из $\mathcal{F}$. Тогда для всякого события A*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A \mid B_i).$$

Доказательство. Поскольку $\{B_i \cap A\}_{i \in I}$ есть разбиение A, значит

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A \mid B_i)$$

□

Лемма 5 (формула Байеса)**.** *Для всяких событий A и B*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Доказательство.

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

□

Следствие 5.1. *Пусть дано не более чем счётное разбиение $\{B_i\}_{i \in I}$ множества Ω на множества из $\mathcal{F}$. Тогда для всякого события A и индекса $j \in I$*

$$\mathbb{P}(B_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_j) \mid (A \mid B_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A \mid B_i)}.$$

Лемма 6 (формула умножения)**.** *Для всяких событий $\{A_k\}_{i=1}^n$. Тогда*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_i\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k \mid \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

1.3 Независимые события

Определение 5. События A и B называются *независимыми*, если

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Лемма 7. *Для любых двух событий A и B TFAE*

1. *A и B независимы и их вероятности > 0,*
2. *$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ (а $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)$).*

Определение 6. Семейство событий $\{A_i\}_{i \in I}$ называется *независимым* (или также *"независимым в совокупности"* или *"совместно независимым"*), если для всякого конечного $S \subseteq I$ верно равенство

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Замечание 2. Независимость (в совокупности) есть частный случай попарной независимости (что понятно, из определения), но не является равносильным ему свойством.

Пример 2 (пирамида Бернштейна). Рассмотрим пространство классического типа с $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$. Пусть

$$A_1 := \{1; 4\}, \qquad A_2 := \{2; 4\} \qquad \text{и} \qquad A_3 := \{3; 4\}.$$

Тогда

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j) \qquad \text{и} \qquad \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3).$$

Отсюда, например, следует, что

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \neq \mathbb{P}(A_3)$$

Теорема 8. *Пусть даны некоторые натуральные $\{m_i\}_{i=1}^n$ и семейство независимых событий*

$$\{A_{i,j}\}_{\substack{i\in\{1;\ldots;n\}\\ j\in\{1;\ldots;m_i\}}}.$$

Тогда семейство событий

$$\left\{\bigcup_{j=1}^{m_i} A_i\right\}_{i=1}^{n}$$

независимо.

Доказательство.

Лемма 9. *Пусть дано семейство независимых событий $\{A_i\}_{i\in I}\cup\{B;C\}$. Тогда семейства*

$$\{A_i\}_{i\in I}\cup\{B\cap C\} \qquad \text{и} \qquad \{A_i\}_{i\in I}\cup\{B\cup C\}$$

являются независимыми (сами для себя, а не друг для друга).

Доказательство.

1. Покажем для пересечения. Пусть $S\subseteq I$ — конечное подмножество. Тогда

$$\mathbb{P}\left((B\cap C)\cap\bigcap_{i\in S} A_i\right)=\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)\cdot\prod_{i\in S}\mathbb{P}(A_i)=\mathbb{P}(B\cap C)\cdot\prod_{i\in S}\mathbb{P}(A_i).$$

   Значит

$$\{A_i\}_{i\in I}\cup\{B\cap C\},$$

   действительно, независим.

2. Покажем для объединения. Пусть $S\subseteq I$ — конечное подмножество. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((B\cup C)\cap\bigcap_{i\in S} A_i\right)&=\mathbb{P}\left(B\cap\bigcap_{i\in S} A_i\right)+\mathbb{P}\left(C\cap\bigcap_{i\in S} A_i\right)-\mathbb{P}\left((B\cap C)\cap\bigcap_{i\in S} A_i\right)\\&=\mathbb{P}(B)\cdot\prod_{i\in S}\mathbb{P}(A_i)+\mathbb{P}(C)\cdot\prod_{i\in S}\mathbb{P}(A_i)-\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)\cdot\prod_{i\in S}\mathbb{P}(A_i)\\&=(\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C))\cdot\prod_{i\in S}\mathbb{P}(A_i)\\&=\mathbb{P}(B\cup C)\cdot\prod_{i\in S}\mathbb{P}(A_i).\end{aligned}$$

   Значит

$$\{A_i\}_{i\in I}\cup\{B\cup C\},$$

   действительно, независим.

□

Несложно понять, что операциями из леммы выше из семейства

$$\{A_{i,j}\}_{\substack{i\in\{1;\ldots;n\}\\ j\in\{1;\ldots;m_i\}}}$$

можно получить семейство

$$\left\{\bigcup_{j=1}^{m_i} A_i\right\}_{i=1}^{n},$$

и при этом семейство будет оставаться независимым после каждой операции. Следовательно конечное семейство будет независимым. □

1.4 Случайные величины

Определение 7. *Случайная величина* X в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ на измеримое пространство $(R, \mathcal{G})$ — $\mathcal{F}/\mathcal{G}$-измеримая функция из Ω в R.

Замечание. Мы будем рассматривать в качестве R множество $\mathbb{R}$, а в качестве $\mathcal{G}$ — $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. При этом поскольку мы рассматриваем дискретные вероятностные пространства, то всякое отображение из Ω в $\mathbb{R}$ будет измеримым.

Или же всё-таки $\mathcal{G}$ будет борелевской сигма-алгеброй?

Определение 8. *Распределение случайной величины* X в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ на измеримое пространство $(R, \mathcal{G})$ — функция

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{G} \to [0; 1], S \mapsto \mathbb{P}(X^{-1}(S)).$$

Замечание 3. $(R, \mathcal{G}, \mathbb{P}_X)$ — вероятностное пространство.

Замечание 4. Для дискретного пространства можно считать, что $X(\Omega) = \{a_i\}_{i \in I}$, где I не более чем счётно. Значит можно определить

$$A_i := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a_i\} \qquad \text{и} \qquad p_i := \mathbb{P}(A_i).$$

Тогда

1. $p_i \geqslant 0$,
2. $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

Поэтому в качестве распределения случайной величины можно также рассматривать сужение $\mathbb{P}_X$ на $\{\{a_i\}\}_{i \in I}$.

Определение 9. Пусть X и Y — случайные в (возможно, разных) вероятностных пространствах на измеримое пространство $(R, \mathcal{G})$. Тогда говорят, что X *имеет распределение* Y или Y *имеет распределение* X, и пишут $X \sim Y$, если их функции распределения совпадают.

Пример 3.

1. **Вырожденное распределение.** Пусть $X(\Omega) = a$. Тогда распределение X будет состоять только из сопоставления
$$a \mapsto 1.$$

2. **Распределение Бернулли:** $B(1, p)$**.** Для всякой величины $p \in [0; 1]$ можно рассмотреть случайную величину $X \sim B(1, p)$ с распределением
$$X = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } 1 - p, \\ 1 & \text{с вероятностью } p. \end{cases}$$

3. **Биномиальное распределение:** $B(n, p)$**.** Для всякой величины $p \in [0; 1]$ можно рассмотреть случайную величину $X \sim B(n, p)$ с множеством значений $\{0; \ldots; n\}$ и распределением
$$\mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

4. **Геометрическое распределение.** Для всякой величины $p \in [0; 1]$ можно рассмотреть случайную величину X с множеством значений $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и распределением
$$\mathbb{P}\{X = k\} = p^k(1-p).$$

5. **Распределение Пуассона: $\mathcal{P}(\alpha)$.** Для всякой величины $\alpha > 0$ можно рассмотреть случайную величину $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$ с множеством значений $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и распределением
$$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}.$$

Определение 10. Семейство случайных величин $\{X_i\}_{i\in I}$ в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ на измеримые пространства $\{(R_i, \mathcal{G}_i)\}_{i\in I}$ называются *независимым*, если для всякого семейства $\{S_i\}_{i\in I}$, что $S_i \in \mathcal{G}_i$, семейство событий
$$\{X_i^{-1}(S_i)\}_{i\in I}$$
независимо.

Говоря проще, распределение вероятностей всякого X_i не зависит от конечного количества условий на другие случайные величины.

Теорема 10. *Пусть дано семейство случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^n$. Величина X_i имеет распределение $\{a_{i,j} \mapsto p_{i,j}\}_{j\in I_i}$. Тогда семейство $\{X_i\}_{i=1}^n$ независимо тогда и только тогда, когда для всяких $\{j_i\}_{i=1}^n$, что $j_i \in I_i$, верно, что*
$$\mathbb{P}\left\{\bigwedge_{i=1}^n X_i = a_{i,j_i}\right\} = \prod_{i=1}^n p_{i,j_i}.$$

Доказательство. Понятно, что равенство в условии равносильно части условия независимости
$$\{X_i^{-1}(\{a_{i,j_i}\})\}_{i=1}^n,$$
где выбираемое множество индексов $S = \{1; \ldots; n\}$. Таким образом из независимости $\{X_i\}_{i=1}^n$, очевидно, следует предыдущее утверждение; покажем теперь следование в обратную сторону.

Покажем, что из утверждения выше следует полная независимость семейства событий
$$\{X_i^{-1}(\{a_{i,j_i}\})\}_{i=1}^n.$$
Понятно, что для всякого i семейство множеств
$$\{X_i^{-1}(a_{i,k_i})\}_{k_i\in I_i}$$
есть разбиение Ω. Значит для всякого $S \subseteq \{1; \ldots n\}$ мы имеем, что
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} X_i^{-1}(a_{i,j_i})\right) &= \sum_{\substack{\{k_i\}_{i\notin S} \\ k_i\in I_i}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} X_i^{-1}(a_{i,j_i}) \cap \bigcap_{i\notin S} X_i^{-1}(a_{i,k_i})\right) \\
&= \sum_{\substack{\{k_i\}_{i\notin S} \\ k_i\in I_i}} \prod_{i\in S} \mathbb{P}(X_i^{-1}(a_{i,j_i})) \cdot \prod_{i\notin S} \mathbb{P}(X_i^{-1}(a_{i,k_i})) \\
&= \prod_{i\in S} \mathbb{P}(X_i^{-1}(a_{i,j_i})) \cdot \sum_{\substack{\{k_i\}_{i\notin S} \\ k_i\in I_i}} \prod_{i\notin S} \mathbb{P}(X_i^{-1}(a_{i,k_i})) \\
&= \prod_{i\in S} \mathbb{P}(X_i^{-1}(a_{i,j_i})) \cdot \prod_{i\notin S} \sum_{k_i\in I_i} \mathbb{P}(X_i^{-1}(a_{i,k_i})) \\
&= \prod_{i\in S} \mathbb{P}(X_i^{-1}(a_{i,j_i}))
\end{aligned}$$

Теперь покажем, что из независимости прообразов одноэлементных множеств следует независимость прообразов любых множеств. Действительно, пусть дано семейство множеств $\{B_i\}_{i=1}^n$, что $B_i \subseteq \Omega(X_i)$ (следовательно B_i не более чем счётно). Тогда для всякого конечного $S \subseteq \{1;\ldots;n\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} X_i^{-1}(B_i)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\substack{\{a_i\}_{i\in S}\\ a_i\in B_i}} \bigcap_{i\in S} X_i^{-1}(a_i)\right) &&= \sum_{\substack{\{a_i\}_{i\in S}\\ a_i\in B_i}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} X_i^{-1}(a_i)\right)\\
&= \sum_{\substack{\{a_i\}_{i\in S}\\ a_i\in B_i}} \prod_{i\in S} \mathbb{P}(X_i^{-1}(a_i)) &&= \prod_{i\in S} \sum_{a_i\in B_i} \mathbb{P}(X_i^{-1}(a_i))\\
&= \prod_{i\in S} \mathbb{P}(X_i^{-1}(B_i))
\end{aligned}$$

□

Пример 4. Пусть $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $Y \sim \mathcal{P}(\beta)$ и X и Y независимы. Значит $X+Y$ имеет множество значений $\mathbb{N}\cup\{0\}$, а её распределение

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X+Y=n\} &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} \{X=k \wedge Y=n-k\}\right) &&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{X=k \wedge Y=n-k\}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{X=k\}\cdot\mathbb{P}\{Y=n-k\} &&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}\cdot\frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\beta}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k\beta^{n-k}\binom{n}{k}}{n!}e^{-(\alpha+\beta)} &&= \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}e^{-(\alpha+\beta)},
\end{aligned}$$

т.е. $X+Y \sim \mathcal{P}(\alpha+\beta)$.

Пример 5 (испытания Бернулли). Пусть $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ — независимые случайные величины с распределением Бернулли $B(1,p)$. Тогда $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ имеет множество значений $\{0;\ldots;n\}$, а её распределение

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i = k\right\} = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\substack{S\subseteq\{1;\ldots;n\}\\|S|=k}}\left\{\bigwedge_{i\in S}X_i = 1\wedge\bigwedge_{j\notin S}X_j = 0\right\}\right)$$

$$= \sum_{\substack{S\subseteq\{1;\ldots;n\}\\|S|=k}}\mathbb{P}\left\{\bigwedge_{i\in S}X_i = 1\wedge\bigwedge_{j\notin S}X_j = 0\right\}$$

$$= \sum_{\substack{S\subseteq\{1;\ldots;n\}\\|S|=k}}\prod_{i\in S}\mathbb{P}\{X_i = 1\}\cdot\prod_{j\notin S}\mathbb{P}\{X_j = 0\}$$

$$= \sum_{\substack{S\subseteq\{1;\ldots;n\}\\|S|=k}}\prod_{i\in S}\mathbb{P}\{X_i = 1\}\cdot\prod_{j\notin S}\mathbb{P}\{X_j = 0\}$$

$$= \sum_{\substack{S\subseteq\{1;\ldots;n\}\\|S|=k}}p^{|S|}\cdot(1-p)^{n-|S|}$$

$$= p^k(1-p)^{n-k}\sum_{\substack{S\subseteq\{1;\ldots;n\}\\|S|=k}}1$$

$$= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \sim B(n,p).$$

1.5 Построение сложных вероятностных пространств

Теорема 11.

1. *Пусть даны вероятностные пространства* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$. *Обозначим*
   - $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$,
   - $\mathcal{F}$ *— минимальная сигма-алгебра, содержащая как подмножество*
     $$\{S_1 \times S_2 \mid S_1 \in \mathcal{F}_1 \wedge S_2 \in \mathcal{F}_2\},$$
   - $\mathbb{P}$ *— счётно-аддитивная функция на* $(\Omega, \mathcal{F})$, *что для всяких* $S_1 \in \mathcal{F}_1$ *и* $S_2 \in \mathcal{F}_2$
     $$\mathbb{P}(S_1 \times S_2) = \mathbb{P}(S_1) \cdot \mathbb{P}(S_2)$$
     (такая функция существует и единственна).

   Тогда $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *— вероятностное пространство.*

2. *Пусть даны события* A_1 *и* A_2 *в вероятностных пространствах* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$. *Тогда множества*
   $$B_1 := A_1 \times \Omega_2 \qquad \text{и} \qquad B_2 := \Omega_1 \times A_2$$
   являются событиями в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *причём*
   $$\mathbb{P}_1(A_1) = \mathbb{P}(B_1) \qquad \text{и} \qquad \mathbb{P}_2(A_2) = \mathbb{P}(B_2).$$

3. *Пусть даны независимые семейства события* $\{A_{1,i}\}_{i\in I_1}$ *и* $\{A_{2,i}\}_{i\in I_2}$ *в вероятностных пространствах* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$. *Тогда объединение семейств* $\{B_{1,i}\}_{i\in I_1}$ *и* $\{B_{2,i}\}_{i\in I_2}$, *где*
$$B_{1,i} := A_{1,i} \times \Omega_2 \qquad \text{и} \qquad B_{2,i} := \Omega_1 \times A_{2,i},$$
является независимым в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

4. *Пусть даны случайные величины* X_1 *и* X_2 *в вероятностных пространствах* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ *на измеримые пространства* $(R_1, \mathcal{G}_1)$ *и* $(R_2, \mathcal{G}_2)$ *соответственно. Тогда функции*
$$Y_1 : \Omega \to R_1, (\omega_1, \omega_2) \mapsto X_1(\omega_1) \qquad \text{и} \qquad Y_2 : \Omega \to R_2, (\omega_1, \omega_2) \mapsto X_2(\omega_2)$$
являются случайными величинами в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *на те же измеримые пространства, причём*
$$A_1 \sim B_1 \qquad \text{и} \qquad A_2 \sim B_2.$$

5. *Пусть даны независимые семейства случайных величин* $\{X_{1,i}\}_{i\in I_1}$ *и* $\{X_{2,i}\}_{i\in I_2}$ *в вероятностных пространствах* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$. *Тогда объединение семейств* $\{Y_{1,i}\}_{i\in I_1}$ *и* $\{Y_{2,i}\}_{i\in I_2}$, *где*
$$Y_{1,i} : \Omega \to R_{1,i}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto X_{1,i}(\omega_1) \qquad \text{и} \qquad Y_{2,i} : \Omega \to R_{2,i}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto X_{2,i}(\omega_2),$$
является независимым в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Доказательство.

Написать. Пока лень…

□

Теорема 12.

То же самое для взятия по условию события.

Замечание. Таким образом мы теперь умеем склеивать два вероятностных пространства в новое большое вероятностное пространство и сжимать вероятностное пространство по модулю всякого его события.

Теорема 13.

1. *Распределение Бернулли реализуемо.*

2. *Биномиальное распределение реализуемо.*

3. *Распределение Пуассона реализуемо.*

4. *Всякое не более чем счётное распределение реализуемо.*

5. *Всякое распределение реализуемо.*

Доказательство.

Написать. Пока лень…

□

1.6 Пуассоновская аппроксимация

Теорема 14. *Пусть дана последовательность чисел* $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ *из отрезка* $[0;1]$, *что*

$$\lim_{n\to\infty} np_n \to \alpha$$

для некоторой константы α, *и последовательность случайных величин* $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, *что* $X_n \sim B(n, p_n)$. *Тогда для всякого* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = k\} = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$$

Для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{P}\{X_n = k\} - \frac{(np_n)^k}{k!}e^{-np_n}| \leqslant 2np^2$$

Доказательство.

$$\mathbb{P}\{X_n = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p_n^k(1-p_n)^{n-k} = \frac{n \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!n^k}(np_n)^k(1-p_n)^{n-k}.$$

При этом

$$\frac{n \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!n^k} \to \frac{1}{k!}, \qquad (np_n)^k \to \alpha^k, \qquad (1-p_n)^{n-k} = \left(1 - \frac{\alpha + o(1)}{n}\right)^{n(1+o(1))} \to e^{-\alpha}.$$

Отсюда и получается требуемое утверждение. □

Теорема 15. *Пусть даны некоторое подмножество* $A \subseteq \mathbb{R}$ *и случайные виличины* $S_n \sim B(n,p)$ *и* $S \sim \mathcal{P}(np)$. *Тогда*

$$|\mathbb{P}\{S_n \in A\} - \mathbb{P}\{S \in A\}| \leqslant np^2.$$

Доказательство. Рассмотрим следующее вероятностное пространство. Пусть

$$\Omega_1 := \mathbb{N} \cup \{0; -1\}, \qquad \mathcal{F}_1 := \mathcal{P}(\Omega) \qquad \text{и} \qquad \mathbb{P}_1(n) := \begin{cases} 1-p & \text{если } n = -1, \\ \frac{p^0}{0!}e^{-p} - (1-p) & \text{если } n = 0, \\ \frac{p^n}{n!}e^{-p} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определим на нём случайные величины

$$\varepsilon_1 := \begin{cases} 0 & \text{если } n = -1, \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \eta_1 := \begin{cases} 0 & \text{если } n = -1, \\ n & \text{иначе.} \end{cases}$$

Несложно видеть, что

$$\varepsilon_1 \sim B(1,p), \qquad \text{а} \qquad \eta_1 \sim \mathcal{P}(p).$$

При этом

$$\mathbb{P}_1\{\varepsilon_1 \neq \eta_1\} = 1 - \mathbb{P}_1\{\varepsilon_1 = \eta_1\} = 1 - \mathbb{P}_1(\{-1;1\}) = 1 - ((1-p) + pe^{-p}) = p(1-e^{-p}) \leqslant p^2.$$

Теперь сделаем ещё $n-1$ дубликатов нашего пространства и построенных случайных величин и перемножим их как в теореме 11. Получим пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ в котором выбраны случайные величины $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ и $\{\eta_i\}_{i=1}^n$, где

$$\varepsilon_i \sim B(1,n), \qquad \text{а} \qquad \eta_i \sim \mathcal{P}(p).$$

При этом семейства $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ и $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ независимы. Значит

$$S_n \sim B(n,p) \sim X := \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \qquad \text{и} \qquad S \sim \mathcal{P}(np) \sim Y := \sum_{i=1}^n \eta_i.$$

Следовательно

$$\{X \neq Y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{\varepsilon_i \neq \eta_i\} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}\{X \neq Y\} \leqslant \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{\varepsilon_i \neq \eta_i\} \leqslant np^2.$$

Отсюда имеем, что

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}\{S_n \in A\} - \mathbb{P}\{S \in A\}| &= |\mathbb{P}\{X \in A\} - \mathbb{P}\{Y \in A\}| \\
&= |\mathbb{P}\{X \in A \wedge Y \notin A\} - \mathbb{P}\{Y \in A \wedge X \notin A\}| \\
&\leqslant \mathbb{P}\{X \in A \wedge Y \notin A\} + \mathbb{P}\{Y \in A \wedge X \notin A\} \\
&\leqslant \mathbb{P}\{X \neq Y\} \\
&\leqslant np^2.
\end{aligned}$$

□

Следствие 15.1. *Пусть дано $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и случайные события $S_n \sim B(n,p)$ и $S \sim \mathcal{P}(np)$. Тогда*

$$\sum_{k=0}^\infty |\mathbb{P}\{S_n = k\} - \mathbb{P}\{S = k\}| \leqslant 2np^2.$$

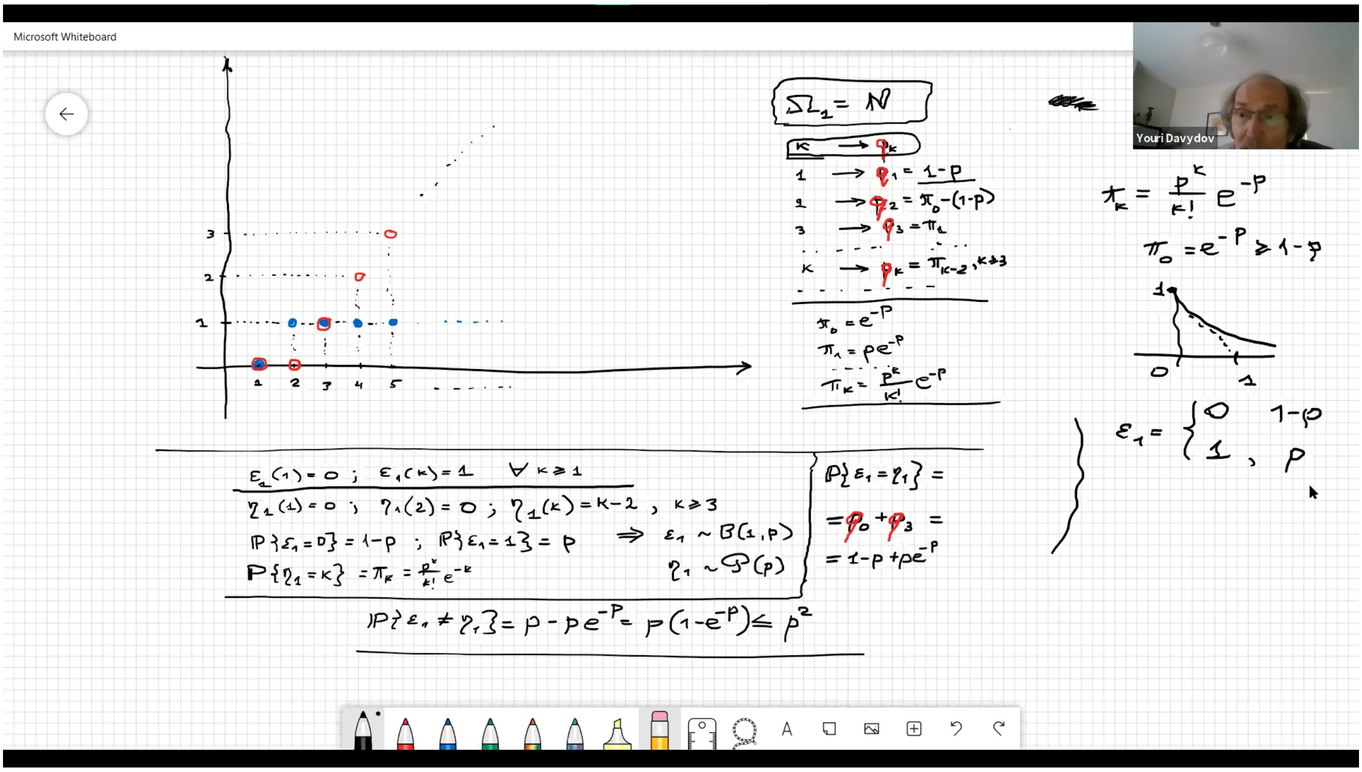
Доказательство. Обозначим

$$B_+ := \{k \mid \mathbb{P}\{S_n = k\} \geqslant \mathbb{P}\{S = k\}\} \qquad \text{и} \qquad B_- := (\mathbb{N} \cup \{0\}) \setminus B_+.$$

Тогда понятно, что

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^\infty |\mathbb{P}\{S_n = k\} - \mathbb{P}\{S = k\}| &= \sum_{k \in B_+} (\mathbb{P}\{S_n = k\} - \mathbb{P}\{S = k\}) - \sum_{k \in B_-} (\mathbb{P}\{S_n = k\} - \mathbb{P}\{S = k\}) \\
&= (\mathbb{P}\{S_n \in B_+\} - \mathbb{P}\{S \in B_+\}) - (\mathbb{P}\{S_n \in B_-\} - \mathbb{P}\{S \in B_-\}) \\
&\leqslant |\mathbb{P}\{S_n \in B_+\} - \mathbb{P}\{S \in B_+\}| + |\mathbb{P}\{S_n \in B_-\} - \mathbb{P}\{S \in B_-\}| \\
&\leqslant np^2 + np^2 = 2np^2
\end{aligned}$$

□



Перерисовать.