Рейтинговое домашнее задание от 07.09
Дифференциальные уравнения и динамические системы

Глеб Минаев @ 204 (20.Б04-мкн)

Задача (№ 1)**.** Вспомним, что если функция U (на области определения) удовлетворяет условию

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} f = 0,$$

то тогда она является интегралом (при условии $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$), так как для всякого решения y верно, что

$$\frac{d}{dx} U(x, y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} f = 0,$$

т.е. $U(x, y(x)) = \mathrm{const}$.

Тогда рассмотрим функцию

$$U(x, y) := x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Быстро поймём, что правильная форма нашего уравнения —

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = f(x, y).$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} f &= \sqrt{1-y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} + \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\
&= \sqrt{1-y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-y^2} + \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ну и на конец

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Таким образом если $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, то

$$\begin{gathered}
\sqrt{1-x^2} = \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} \\
\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = xy \\
(1-x^2)(1-y^2) = x^2y^2 \\
1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 = x^2y^2 \\
1 = x^2 + y^2
\end{gathered}$$

Таким образом в качестве области определения можно взять (всю) область строго внутри окружности $x^2 + y^2 = 1$. В таком случае все рассуждения будут верны (единственное, что нам нужно — чтобы $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\sqrt{1-x^2}$ и $\sqrt{1-y^2}$ не занулялись).