Геометрия и топология.

Лектор — Евгений Анатольевич Фоминых
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

Литература:

- Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М., “Элементарная топология”, М.:МЦНМО, 2012.
- Коснёвски Чес, “Начальный курс алгебраической топологии”, М.:Мир, 1983.
- Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко, “Введение в топологию”, М.:Наука. Физматлит, 1995.
- James Munkres, Topology.

Определение 1. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *метрикой* (или *расстоянием*) в множестве X, если:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (“неравенство треугольника”).

Пара (X, d), где d — метрика в X, называется *метрическим пространством.*

Пример 1. Пусть X — произвольное множество. Тогда метрика

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{если } x \neq y \\ 0 & \text{если } x = y \end{cases}$$

называется *дискретной* метрикой на множестве X.

Пример 2.

- $X := \mathbb{R}$, тогда $d(x, y) := |x - y|$ — метрика.
- $X := \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Тогда

  $$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2}$$

  называется *евклидовой* метрикой.
- $X := \mathbb{R}^n$, $d(x, y) := \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- $X := \mathbb{R}^n$, $d(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

- $X := C[0;1]$, $d(x(t), y(t)) = \max_{t\in[0;1]} |x(t) - y(t)|$. (X, d) называют *пространством непрерывных функций.*

Определение 2. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Сужение функции d на $Y \times Y$ является метрикой в Y. Метрическое пространство $(Y, d|_{Y\times Y})$ называется *подпространством* пространства (X, d).

Теорема 1. *Пусть дана* $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *что*

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad g(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y = 0$;
- $\forall x, y, d \in \mathbb{R}_+ \quad g(x + d, y) \geqslant g(x, y) \wedge g(x, y + d) \geqslant g(x, y)$;
- $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+ \quad g(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leqslant g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2)$.

Тогда для любых метрических пространств (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *функция*

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

будет метрикой на $X \times Y$.

Доказательство. Проверим, что $d_{X\times Y}$ — метрика.

- $\forall x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$

$$\begin{aligned} d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 \quad &\longleftrightarrow \quad g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) = 0 \\ &\longleftrightarrow \quad d_X(x_1, x_2) = 0 \wedge d_Y(y_1, y_2) = 0 \\ &\longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \end{aligned}$$

- $\forall x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$

$$\begin{aligned} &d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\ &\quad = g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) = g(d_X(x_2, x_1), d_Y(y_2, y_1)) \\ &\quad = d_{X\times Y}((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \end{aligned}$$

- $\forall x_1, x_2, x_3 \in X, y_1, y_2, y_3 \in Y$

$$\begin{aligned} &d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_3, y_3)) \\ &\quad = g(d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3)) \\ &\quad \leqslant g(d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3), d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3)) \\ &\quad \leqslant g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) + g(d_X(x_2, x_3), d_Y(y_2, y_3)) \\ &\quad = d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_{X\times Y}((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

□

Следствие 1.1. *Для любых метрических пространств* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *пара* $(X \times Y, d_{X\times Y})$, *где*

$$d_{X\times Y} := \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

есть метрическое пространство.

Доказательство. Необходимо лишь проверить, что $g(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ удовлетворяет условиям теоремы.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x^2+y^2} \leftrightarrow x^2+y^2=0 \leftrightarrow x=0=y$.

- $\forall x, y, d \in \mathbb{R}_+ \quad x+d \geqslant x \Rightarrow (x+d)^2 \geqslant x^2 \Rightarrow (x+d)^2+y^2 \geqslant x^2+y^2 \Rightarrow \sqrt{(x+d)^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$; для y аналогично.

- $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$ по неравенству Коши-Буняковского-Шварца

$$
\begin{gathered}
(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0 \\
x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \geqslant 2x_1x_2y_1y_2 \\
(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \geqslant (x_1x_2+y_1y_2)^2 \\
(x_1^2+y_1^2) + 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} + (x_2^2+y_2^2) \geqslant (x_1^2+y_1^2) + 2(x_1x_2+y_1y_2) + (x_2^2+y_2^2) \\
\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)^2 \geqslant (x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 \\
\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2} \geqslant \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}
\end{gathered}
$$

□

Замечание 1. Если g ассоциативна (например, $g(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$; она заодно коммутативна), то аналогично можно определить метрику на $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = (X_1 \times (X_2 \times (\dots \times X_n) \dots))$.

Таким образом евклидова метрика есть метрика, так как её можно получить, применяя $g(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ к пространствам $(X_i, d_i) = (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ (где $d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y|$).

Определение 3. Пусть Для $g(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ из последней теоремы пространство $(X \times Y, d_{X\times Y})$ называется *(декартовым) произведением* метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y). Аналогично определяется произведение конечного числа пространств.

Замечание 2. На роль $g(x,y)$ подходят следующие функции:

- $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}$ для всех $\alpha \geqslant 1$;

- $\max(x,y)$.

А следующие функции уже не подходят:

- $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}$ для всех $\alpha < 1$ (даже для отрицательных);

- $\min(x,y)$;

- $x \cdot y$ и x/y.

Определение 4. Пусть (X,d) — метрическое пространство, $a \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Тогда:

- $B_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$ — *(открытый) шар пространства (X,d) с центром в точке a и радиусом r*;

- $\overline{B}_r(a) = D_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) \leqslant r\}$ — *замкнутой шар пространства (X,d) с центром в точке a и радиусом r*;

- $S_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) = r\}$ — *сфера пространства (X,d) с центром в точке a и радиусом r*.

Определение 5. Пусть (X,d) — метрическое пространство, $A \subseteq X$. Множество A называется *открытым* в метрическом пространстве, если

$$\forall a \in A\ \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq A$$

Теорема 2. *В любом метрическом пространстве* (X,d)

1. $\varnothing$ *и* X *открыты;*
2. *для всяких* $a \in X$ *и* $r > 0$ *открытый шар* $B_r(a)$ *открыт;*
3. *объединение любого семейства открытых множеств открыто;*
4. *пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.*

Доказательство.

1. Очевидно.
2. Для всякого $x \in B_r(a)$ верно, что $B_{r-d(x,a)}(x) \subseteq B_r(a)$, откуда утверждение очевидно следует.
3. Пусть дано семейство открытых множеств Σ. Пусть также $I = \bigcup \Sigma$. Для любого $x \in I$ верно, что существует $J \in \Sigma$, что $x \in J$, а значит есть $r > 0$, что $B_r(x) \subseteq J \subseteq I$, т.е. x — внутренняя точка I. Таким образом I открыто.
4. Пусть $I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. Тогда для любого $x \in I$ верно, что существуют $r_1, \ldots, r_n > 0$, что $B_{r_i}(x) \subseteq I_n$, значит $B_{\min r_i} \subseteq I$, значит x — внутренняя точка I. Таким образом I открыто.

$\square$

Определение 6. Пусть X — некоторое множество. Рассмотрим набор Ω его подмножеств, для которого:

1. $\varnothing, X \in \Omega$;
2. объединение любого семейства множеств из Ω лежит в Ω;
3. пересечение любого конечного семейства множеств, принадлежащих Ω, также принадлежит Ω.

В таком случае:

- Ω — *топологическая структура* или просто *топология* в множестве X;
- множество X с выделенной топологической структурой Ω (т.е.пара (X,Ω)) называется *топологическим пространством*;
- элементы множества Ω называются *открытыми множествами* пространства (X,Ω).

Пример 3.

- Если Ω — множество открытых множеств в метрическом пространстве (X,d), то (X,Ω) — топологическое пространство. Таким образом любое метрическое пространство можно отождествлять с соответствующим топологическим пространством.
- Топология, индуцированная евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^n$, называется *стандартной.*

- $\Omega := 2^X$ — *дискретная* топология на произвольном множестве X. Именно она порождается дискретной метрикой на X.
- $\Omega := \{\varnothing, X\}$ — *антидискретная* топология на произвольном множестве X.
- $X := \mathbb{R}$, $\Omega := \{(a; +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\}$. Такая топология называется *стрелкой*.
- $\Omega = \{\varnothing\} \cup \{A \in X : |X \setminus A| \in \mathbb{N}\}$ — топология *конечных дополнений* на произвольном множестве X.

Определение 7. Множество $F \subseteq X$ *замкнуто* в топологическом пространстве (X, Σ), если его дополнение $X \setminus F$ открыто (т.е. если $X \setminus F \in \Sigma$).

Теорема 3. *В любом топологическом пространстве X*

- *$\varnothing$ и X — замкнуты;*
- *объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто;*
- *пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.*

Теорема 4. *Пусть U — открыто, а V — замкнуто в (X, Ω). Тогда:*

- *$U \setminus V$ открыто;*
- *$V \setminus U$ замкнуто.*

Определение 8. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда *внутренностью* множества A называется объединение всех открытых подмножеств A:

$$\operatorname{Int}(A) := \bigcup_{\substack{U \in \Omega \\ U \subseteq A}} U$$

Теорема 5.

- $\operatorname{Int}(A)$ — *открытое множество.*
- $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$.
- B — *открыто* $\wedge B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq \operatorname{Int}(A)$.
- $A = \operatorname{Int}(A) \Leftrightarrow A$ — *открыто.*
- $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = \operatorname{Int}(A)$.
- $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{Int}(A) \subseteq \operatorname{Int}(B)$.
- $\operatorname{Int}(\bigcap_{k=1}^n A_k) = \bigcap_{k=1}^n \operatorname{Int}(A_k)$.
- $\operatorname{Int}(\bigcup_{A \in \Sigma} A) \supseteq \bigcup_{A \in \Sigma} \operatorname{Int}(A)$.

Определение 9. *Окрестность* точки a в топологическом пространстве X — открытое множество в X, содержащее a.

Точка a топологического пространства X называется *внутренней точкой* множества $A \subseteq X$, если A содержит как подмножество некоторую окрестность a.

Теорема 6.

- *Множество открыто тогда и только тогда, когда все его точки внутренние.*

- *Внутренность множества есть множество всех его внутренних точек.*

Доказательство.

- ($\Rightarrow$) Пусть A открыто, а $a \in A$. Тогда A — та самая окрестность a, которая является подмножеством A, поэтому a — внутренняя точка A.

  ($\Leftarrow$) Пусть каждая точка A внутренняя. Тогда для каждого $a \in A$ определим окрестность I_a, лежащую в A как подмножество (такая есть по определению). Тем самым $A = \bigcup_{a \in A} I_a$, т.е. A есть объединение открытых множеств, следовательно открытое множество.

- ($\subseteq$) Пусть $a \in \operatorname{Int}(A)$. Вспомним, что $\operatorname{Int}(A)$ — открытое подмножество A. Следовательно, a — внутренняя точка A.

  ($\supseteq$) Пусть a — внутренняя точка A. Следовательно есть открытое I, что $a \in I \subseteq A$, следовательно $I \subseteq \operatorname{Int}(A)$, а значит $a \in \operatorname{Int}(A)$.

□

Определение 10. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, а $A \subseteq X$. *Замыканием* множества A называется пересечение всех замкнутых пространств, содержащих A как подмножество:

$$\operatorname{Cl}(A) := \bigcap_{\substack{X \setminus V \in \Omega \\ V \supseteq A}} V$$

Теорема 7.

- $\operatorname{Cl}(A)$ *— замкнутое множество.*
- $\operatorname{Cl}(A) \supseteq A$*.*
- B *— замкнуто* $\wedge\ B \supseteq A \Rightarrow B \supseteq \operatorname{Cl}(A)$*.*
- $A = \operatorname{Cl}(A) \Leftrightarrow A$ *— замкнуто.*
- $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl}(A)) = \operatorname{Cl}(A)$*.*
- $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{Cl}(A) \subseteq \operatorname{Cl}(B)$*.*
- $\operatorname{Cl}(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \bigcup_{k=1}^n \operatorname{Cl}(A_k)$*.*
- $\operatorname{Cl}(\bigcap_{A \in \Sigma} A) \supseteq \bigcap_{A \in \Sigma} \operatorname{Cl}(A)$*.*
- $\operatorname{Cl}(A) \sqcup \operatorname{Int}(X \setminus A) = X$*.*

Определение 11. Пусть X — топологическое пространство, $A \subseteq X$ и $b \in X$. Точка b называется *точкой прикосновения* множества A, если всякая её окрестность пересекается с A.

Теорема 8.

- *Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно является множеством своих точек прикосновения.*

- *Замыкание множества есть множество всех его точек прикосновения.*

Определение 12. Пусть X — топологическое пространство, $A \subseteq X$ и $a \in X$.

Граница множества A — разность замыкания и внутренности A: $\mathrm{Fr}(A) := \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$.

Точка a — *граничная точка* множества A, если всякая её окрестность пересекается с A и с $X \setminus A$.

Теорема 9. *Граница множества совпадает с множеством его граничных точек.*

Теорема 10.

- $\mathrm{Fr}(A)$ *замкнуто.*
- $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$.
- A *замкнуто* $\Leftrightarrow A \supseteq \mathrm{Fr}(A)$.
- A *открыто* $\Leftrightarrow A \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Определение 13. Пусть X — топологическое пространство, $A \subseteq X$ и $a \in X$.

a — *предельная точка* A, если в любой окрестности a есть точка $A \setminus \{a\}$.

a — *изолированная точка* A, если $a \in A$ и есть окрестность a без точка $A \setminus \{a\}$.

Теорема 11.

- b — *предельная* $\Rightarrow b$ — *точка прикосновения.*
- $\mathrm{Cl}(A) = \{$*внутренние точки* $A\} \sqcup \{$*граничные точки* $A\}$.
- $\mathrm{Cl}(A) = \{$*предельные точки* $A\} \sqcup \{$*изолированные точки* $A\}$.

Определение 14. Пусть Ω_1 и Ω_2 — топологии на X. Тогда если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, то говорят, что Ω_1 *слабее (грубее)* Ω_2, а Ω_2 *сильнее (тоньше)* Ω_1.

Пример 4. Из всех топологий на X антидискретная — самая грубая, а дискретная — самая тонкая.

Теорема 12. *Топология метрики d_1 грубее топологии метрики d_2 тогда и только тогда, когда в любом шаре метрики d_1 содержится шар метрики d_2 с тем же центром.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть топология метрики d_1 грубее топологии метрики d_2. Тогда любой шар $B_r^{d_1}(a)$ открыт в d_2, следовательно по определению открытости есть шар $B_q^{d_2}(a) \subseteq B_r^{d_1}(a)$.

($\Leftarrow$) Пусть в любом шаре метрики d_1 содержится шар метрики d_2 с тем же центром. Возьмём любое открытое в d_1 множество U. Тогда для всякой точки $a \in U$ есть шар $B_r^{d_1}(a) \subseteq U$. При этом есть шар $B_q^{d_2}(a) \subseteq B_r^{d_1}(a)$, таким образом a — внутренняя точка U в d_2. Следовательно U открыто в d_2.

$\square$

Следствие 12.1. *Если d_1 и d_2 — метрики на X и $d_1 \leqslant d_2$, то топология d_1 грубее топологии d_2.*

Определение 15. Две метрики на одном множестве называются *эквивалентными*, если они порождают одну топологию.

Лемма 13. *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Тогда для всякого $C > 0$ функция $C \cdot d$ — метрика на X, эквивалентная d.*

Следствие 13.1. *Если для метрик d_1 и d_2 на X есть такое $C > 0$, что $d_1 \leqslant Cd_2$, то d_1 грубее d_2.*

Определение 16. Метрики d_1 и d_2 на одном множестве называются *липшицево эквивалентными*, если существуют $c, C > 0$, что $c \cdot d_1 \leqslant d_2 \leqslant C \cdot d_1$.

Теорема 14. *Липшицево эквивалентные метрики просто эквивалентны.*

Определение 17. Топологическое пространство *метризуемо*, если есть метрика, её порождающая.

Определение 18. *База* топологии Ω — такое семейство Σ открытых множеств, что всякое открытое U представимо в виде объединения множеств из Σ.

$$\Sigma \subseteq \Omega \text{ — база} \Longleftrightarrow \forall U \in \Omega\ \exists \Lambda \subseteq \Sigma: \quad U = \bigcup_{W \in \Lambda} W$$

Определение 19. Множество Γ подмножеств множества X называются его *покрытием*, если $X := \bigcup_{A \in \Gamma} A$. Часто покрытие записывают в виде $\Gamma = \{A_i\}_{i \in I}$.

Теорема 15 (второе определение базы)**.** *Пусть (X, Ω) — топологическое пространство и $\Sigma \subseteq \Omega$. Тогда Σ — база топологии Ω тогда и только тогда, когда для любой точки a любого открытого множества U есть окрестность из Σ, лежащая в U как подмножество.*

Определение 20. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, $a \in X$ и $\Lambda \subseteq \Omega$. Λ называется *базой топологии (базой окрестности) в точке a*, если:

1. $\forall U \in \Lambda\ a \in U$;
2. $\forall$ окрестности U точки a $\exists V_a \in \Lambda: V_a \subseteq U$.

Теорема 16.

- *Если Σ — база топологии, то для всякой точки $a \in X$ множество $\Sigma_a := \{U \in \Sigma \mid a \in U\}$ — база топологии в точке a.*
- *Пусть для каждой точки $a \in X$ определена база топологии Σ_a в ней. Тогда $\bigcup_{a \in X} \Sigma_a$ — база топологии.*

Теорема 17. *Пусть Σ — семейство подмножеств X. Тогда есть не более одной топологии, для которой Σ является базой.*

Доказательство. Предположим противное: пусть Ω_1 и Ω_2 — различные топологии на X, для которых Σ является базой. По определению базы для всякого $U \in \Omega_1$ есть семейство $\Gamma \subseteq \Sigma$, что $U = \bigcup_{A \in \Gamma} A$; но поскольку $\Gamma \subseteq \Sigma \subseteq \Omega_2$, то всякое $A \in \Gamma$ лежит в Ω_2, а значит U тоже лежит в Ω_2. Таким образом $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$; аналогично наоборот, следовательно $\Omega_1 = \Omega_2$ — противоречие.

Таким образом для всякого Σ будет не более одной топологии, где для которой оно будет базой. □

Следствие 17.1. *Пусть Σ_1 и Σ_2 — базы топологий Ω_1 и Ω_2 на одном и том же множестве. Тогда если $\Sigma_1 = \Sigma_2$, то и $\Omega_1 = \Omega_2$.*

Теорема 18 (критерий базы)**.** *Пусть X — произвольное множество, а Σ — его покрытие. Σ — база некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда для всяких $A, B \in \Sigma$ есть семейство $\Lambda \subseteq \Sigma$, что $A \cap B = \bigcup_{S\in\Lambda} S$.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Если Σ — база, то для всяких $A, B \in \Sigma$ множество $A \cap B$ открыто, а поэтому представляется как объединение некоторого подсемейства Σ.

($\Leftarrow$) Рассмотрим топологию Ω, образованную всевозможными объединениями множеств из Σ, т.е.

$$\Omega := \left\{ \bigcup_{S\in\Lambda} S \mid \Lambda \subseteq \Sigma \right\}$$

Проверим, что это действительно топология.

1. Σ — покрытие, поэтому $X = \bigcup_{S\in\Sigma} S \in \Omega$. Также рассматривая $\Lambda = \varnothing$, получаем, что $\bigcup_{S\in\Lambda} S = \varnothing \in \Omega$.
2. Пусть $\Phi \subseteq \Omega$. Тогда для каждого $S \in \Phi$ есть семейство $\Lambda_S \subseteq \Sigma$, его образующее, т.е. $S = \bigcup_{T\in\Lambda_S} T$. В таком случае $\Lambda := \bigcup_{S\in\Phi} \Lambda_S$ является подмножеством Σ, а тогда

$$\bigcup_{S\in\Phi} S = \bigcup_{S\in\Phi} \bigcup_{T\in\Lambda_S} T = \bigcup_{T\in\Lambda} T \in \Omega$$

3. Пусть $U, V \in \Omega$. Тогда существуют $M, N \subseteq \Sigma$, что $U = \bigcup_{S\in M} S$ и $V = \bigcup_{S\in N} S$. Также для каждой $P = (A, B) \in M \times N$ существует $\Lambda_P \subseteq \Sigma$, что $A \cap B = \bigcup_{S\in\Lambda_P}$. Пусть $\Lambda := \bigcup_{P\in M\times N} \Lambda_S$. Понятно, что $\Lambda \subseteq \Sigma$. Следовательно

$$U \cap V = \left(\bigcup_{A\in M} A\right) \cap \left(\bigcup_{B\in N} B\right) = \bigcup_{(A,B)\in M\times N} A \cap B = \bigcup_{P\in M\times N} \bigcup_{S\in\Lambda_P} S = \bigcup_{S\in\Lambda} S \in \Omega$$

□

Определение 21. *Предбаза* — семейство Δ открытых множеств в пространстве (X, Ω), что Ω — наименьшая топология по включению топология, содержащая Δ.

Теорема 19. *Любое семейство Δ подмножеств множества X является предбазой некоторой топологии.*

Доказательство. Определим

$$\Sigma := \{X\} \cup \left\{ \bigcap_{A\in W} A \mid W \subseteq \Delta \wedge |W| \in \mathbb{N} \right\}$$

Заметим, что $\Delta \subseteq \Sigma$. Действительно, для всякого $A \in \Delta$ семейство $W := \{A\}$ является подмножеством Δ, следовательно $A = \bigcap_{T\in W} T \in \Sigma$.

Покажем, что любая топология, которая содержит как подмножество Δ, содержит и Σ как подмножество. Действительно, пусть $A \in \Sigma$ (будем считать, что A — не X и не $\varnothing$; иначе утверждение очевидно). Тогда есть конечное семейство $W \subseteq \Delta$, что $A = \bigcap_{T\in W} T$. Пусть Ω — любая топология, содержащая Δ как подмножество. Тогда $W \subseteq \Omega$, а следовательно $A = \bigcap_{T\in W} T \in \Omega$. Таким образом $\Sigma \subseteq \Omega$. Поэтому для топология, для которой Σ будет предбазой, Δ тоже будет предбазой.

Покажем, что Σ удовлетворяет критерию базы.

- $X \in \Sigma$, значит Σ — покрытие X.

- Пусть $A, B \in \Sigma$. Если $A = X$, то $A \cap B = B = \bigcup_{T \in W} T$, где $W := \{B\} \subseteq \Sigma$. Если $A = \varnothing$, то $A \cap B = \varnothing = \bigcup_{T \in W} T$, где $W := \varnothing \subseteq \Sigma$. Аналогично, если B есть X или $\varnothing$. Иначе есть непустые $V, U \subseteq \Delta$, что $A = \bigcap_{T \in V} T$, а $B = \bigcap_{T \in U} T$. Следовательно $A \cap B = \bigcap_{T \in V \cup U} T$. Но поскольку $V \cup U \subseteq \Delta$, то $A \cap B \in \Sigma$. Таким образом $A \cap B = \bigcup_{T \in W} T$, где $W := \{A \cap B\} \subseteq \Sigma$.

Рассмотрим

$$\Omega := \left\{ \bigcup_{S \in \Lambda} S \mid \Lambda \subseteq \Sigma \right\}$$

По теореме о критерии базы Ω — топология, где Σ — база. С другой стороны Ω — множество, которое содержится как подмножество в любой топологии, которая содержит как подмножество Σ. Следовательно Ω — минимальное топология, содержащая как подмножество Σ, а значит и Δ. Поэтому Δ — предбаза в Ω. □

Теорема 20. *Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, а $A \subseteq X$. Тогда множество*

$$\Omega_A := \{U \cap A \mid U \in \Omega\}$$

есть топология на A.

Определение 22. Пусть (X, Ω) топологическое пространство, а $A \subseteq X$. Тогда

$$\Omega_A := \{U \cap A \mid U \in \Omega\}$$

— топология, *индуцированная* множеством A, а (A, Ω_A) — подпространство (X, Ω).

Теорема 21.

- *Множества, открытые в подпространстве, не обязательно открыты в объемлющем пространстве.*

- *Открытые множества открытого подпространства открыты и во всём пространстве.*

- *Если Σ — база топологии Ω, то*

  $$\Sigma_A := \{U \cap A \mid U \in \Sigma\}$$

  — база индуцированной топологии.

- *Пусть (X, Ω) — топологическое пространство и $B \subseteq A \subseteq X$. Тогда $(\Omega_A)_B = \Omega_B$, т.е. топология, которая индуцируется в B топологией, индуцированной в A, совпадает с топологией,индуцированной непосредственно из X.*

Определение 23. Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если прообраз всякого открытого множества из Y открыт в X.

Теорема 22.

- *Отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз замкнутого замкнут.*

- *Композиция непрерывных отображений непрерывно.*

- *Пусть Z — подпространство X, а $f : X \to Y$ непрерывно. Тогда $f|_Z : Z \to Y$ непрерывно.*

- *Пусть Z — подпространство Y, $f : X \to Y$ и $f(X) \subseteq Z$. Пусть $\widetilde{f} : X \to Z, x \mapsto f(x)$. Тогда f непрерывна тогда и только тогда, когда $\widetilde{f}$ непрерывна.*

Определение 24. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $a \in X$, если для любой окрестности U точки $f(a)$ существует такая окрестность V точки a, что $f(V) \subseteq U$.

Теорема 23. *Отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке пространства X.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Очевидно, $V = f^{-1}(U)$.

($\Leftarrow$) Пусть $U \in \Omega_Y$. Тогда для всякого $a \in f^{-1}(U)$ есть окрестность V_a точки a, что $V_a \subseteq f^{-1}(U)$. Следовательно любая точка $f^{-1}(U)$ внутренняя, а значит $f^{-1}(U)$ открыто.

□

Теорема 24. *Пусть X и Y — топологические пространства, $a \in X$, $f : X \to Y$, Σ_a — база окрестностей в точке a и $\Lambda_{f(a)}$ — база окрестностей в точке $f(a)$. Тогда f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда для всякого $U \in \Lambda_{f(a)}$ есть $V \in \Sigma_a$, что $f(V) \subseteq U$.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть f непрерывна в a. Рассмотрим любое $U \in \Lambda_{f(a)}$. U — окрестность $f(a)$, соответственно есть W — окрестность a, что $f(W) \subseteq U$. Но тогда есть $V \in \Sigma_a$, что $V \subseteq W$. Тогда $V \in \Sigma_a$ и $f(V) \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Пусть для всякого $U \in \Lambda_{f(a)}$ найдётся $V \in \Sigma_a$, что $f(V) \subseteq U$. Рассмотрим любую окрестность U точки $f(a)$. Тогда есть семейство $W \in \Lambda_{f(a)}$, что $W \subseteq U$. Следовательно найдётся $V \in \Sigma_a$, что $f(V) \subseteq W$, а следовательно V — окрестность a, и $f(V) \subseteq U$.

□

Следствие 24.1. *Пусть X, Y — метрические пространства, $a \in X$, $f : X \to Y$. Тогда*

1. *f непрерывно в точке a тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$$

2. *f непрерывно в точке a тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad d_X(x, a) < \delta \to d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Определение 25. Пусть X, Y — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *липшицевым*, если:

$$\exists C > 0 :\ \forall a, b \in X \quad d_Y(f(a), f(b)) \leqslant C \cdot d_X(a, b)$$

Значение C называют *константой Липшица* отображения f.

Теорема 25. *Всякое липшицево отображение непрерывно.*

Доказательство. Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \delta := \frac{\varepsilon}{C} \quad \Longrightarrow \quad \Big(d_X(x, a) < \delta \quad \longrightarrow \quad d_Y(f(x), f(a)) \leqslant C \cdot d_X(x, a) < C \cdot \delta = \varepsilon\Big)$$

□

Пример 5.

- Пусть фиксирована точка x_0 в метрическом пространстве (X, d). Тогда отображение

  $$f : X \to \mathbb{R},\ a \mapsto d(a, x0),$$

  непрерывно.

- Пусть A — непустое подмножество метрического пространства (X, d). *Расстоянием от точки $x \in X$ до множества A* называется число

  $$d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

  Отображение

  $$f : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x, A),$$

  непрерывно.

- Метрика d на множестве X является непрерывным отображением $X \times X \to \mathbb{R}$.

Определение 26. Покрытие Γ топологического пространства X называется *фундаментальным*, если

$$\forall U \subseteq X : \quad \Big(\forall A \in \Gamma \quad U \cap A \text{ открыто в } A\Big) \quad \longrightarrow \quad \Big(U \text{ открыто в } X\Big)$$

Лемма 26. *Покрытие Γ топологического пространства X фундаментально тогда и только тогда, когда*

$$\forall V \subseteq X \quad \Big(\forall A \in \Gamma \quad V \cap A \text{ замкнуто в } A\Big) \quad \longrightarrow \quad \Big(U \text{ замкнуто в } X\Big)$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть Γ фундаментально. Рассмотрим $V \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $V \cap A$ замкнуто в A. Следовательно $(X \setminus V) \cap A$ открыто в A, а тогда по фундаментальности Γ множество $X \setminus V$ открыто, а значит всё V замкнуто.

($\Leftarrow$) Аналогично, поменяв местами слова "открыто"и "замкнуто".

$\square$

Теорема 27. *Пусть X, Y — топологические пространства, Γ — фундаментальное покрытие X и $f : X \to Y$. Если сужение f на всякое $A \in \Gamma$ непрерывно, то и само f непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим любое открытое в Y множество U. Если $A \in \Gamma$, то $f^{-1}(U) \cap A = (f|_A)^{-1}(U)$ открыто. А в таком случае из фундаментальности Γ следует, что $f^{-1}(U)$ открыто. Таким образом f непрерывно. $\square$

Определение 27. Покрытие топологического пространства называется

- *открытым*, если оно состоит из открытых множеств;
- *замкнутым* — если из замкнутых;
- *локально конечным* — если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия.

Теорема 28.

1. *Всякое открытое покрытие фундаментально.*
2. *Всякое конечное замкнутое покрытие фундаментально.*
3. *Всякое локально конечное замкнутое покрытие фундаментально.*

Доказательство. Пусть Γ — данное покрытие.

1. Пусть дано $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ открыто в A, а значит открыто в X. Тогда
$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$
есть объединение открытых множеств, а значит само открыто. Таким образом Γ фундаментально.

2. Пусть дано $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ замкнуто в A, а значит замкнуто в X. Тогда
$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$
есть конечное объединение замкнутых множеств, а значит само замкнуто. Таким образом Γ фундаментально.

3. Пусть дано $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ открыто в A. Рассмотрим некоторую точку $u \in U$ и её окрестность V_u, которая пересекается с конечным набором Γ_u элементов из Γ. Тогда для всякого $A \in \Gamma_u$ множество
$$U \cap A \cap V = (U \cap A) \cap (A \cap V)$$
открыто в $V \cap A$. При этом
$$\{V \cap A \mid A \in \Gamma_u\}$$
— конечное замкнутое покрытие, а значит $U \cap V$ открыто в V, а значит и в X. Таким образом $U \cap V$ — окрестность u, а значит u — внутренняя точка U. Значит U открыто.

□

Теорема 29. *Пусть* (X, Ω_X) *и* (Y, Ω_Y) *— топологические пространства. Тогда*
$$\Sigma := \{U \times V \mid U \in \Omega_X \wedge V \in \Omega_Y\}$$
является базой топологии на $X \times Y$.

Доказательство. Проверим критерий базы:

1. $X \in \Omega_X$, $Y \in \Omega_Y$, следовательно $X \times Y \in \Sigma$. Таким образом Σ — покрытие $X \times Y$.
2. Пусть $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \Sigma$. Тогда $U_1 \cap U_2 \in X$, $V_1 \cap V_2 \in Y$, а значит $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \Sigma$.

Таким образом Σ — база. □

Определение 28. Пусть (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) — топологические пространства, а $\Omega_{X \times Y}$ — топология, порождённая базой Σ из предыдущей теоремы. Тогда $(X \times Y, \Omega_{X \times Y})$ называется *произведением* топологических пространств, а сама $\Omega_{X \times Y}$ называется *стандартной* топологией.

Замечание 3. По аналогии если Σ_X и Σ_Y — базы топологий Ω_X и Ω_Y соответственно, то

$$\Lambda := \{U \times V \mid U \in \Sigma_X \wedge V \in \Sigma_Y\}$$

также являются базой стандартной топологии на $X \times Y$.

Определение 29. Обозначения:

- $X = \prod_{i \in I} X_i$– произведение топологических пространств.
- Элементами X являются такие функции $x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$, что $x(i) \in X_i$.
- $p_i : X \to X_i$ — координатная проекция, где $p_i(x) := x(i)$.

Определение 30. Пусть $\{(X_i, \Omega_i)\}_{i \in I}$ — семейство топологических пространств. *Тихоновская топология* на $X = \prod_{i \in I} X_i$ задаётся предбазой, состоящей из всевозможных множеств вида $p_i^{-1}(U)$, где $i \in I$, а $U \subseteq \Omega_i$.

Замечание 4. В случае конечного произведения тихоновская топология совпадает со стандартной.

Теорема 30. *Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства, Ω_X и Ω_Y — топологии в данных метрических пространствах. Рассмотрим две топологии:*

- $\Omega_{X \times Y}$ *— топология-произведение топологий Ω_X и Ω_Y;*
- $\Omega_{\max}$ *— топология, порождённая произведением метрик по функции $g := \max$ (см. теорему 1).*

Тогда эти топологии совпадают.

Доказательство. Определим

$$d_{\max} : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

Таким образом $d_{\max}$ — метрика, порождающая $\Omega_{\max}$.

Лемма 30.1.

$$B_r^{d_{\max}}((x, y)) = B_r^{d_X}(x) \times B_r^{d_Y}(y)$$

Доказательство. Очевидно. □

Вспомним, что

$$\Sigma_X := \{B_r^{d_X}(x) \mid r > 0 \wedge x \in X\} \qquad \text{и} \qquad \Sigma_Y := \{B_r^{d_Y}(y) \mid r > 0 \wedge y \in Y\}$$

являются базами Ω_X и Ω_Y. Следовательно

$$\Sigma_{X \times Y} := \{U_X \times U_Y \mid U_X \in \Sigma_X \wedge U_Y \in \Sigma_Y\}$$

является базой $\Omega_{X \times Y}$. Также заметим, что

$$\Sigma_{\max} := \{B_r^{d_{\max}}((x, y)) \mid r > 0 \wedge x \in X \wedge y \in Y\} = \{B_r^{d_X}(x) \times B_r^{d_Y}(y) \mid r > 0 \wedge x \in X \wedge y \in Y\}$$

является базой $\Omega_{\max}$. При этом несложно видеть, что $\Sigma_{\max} \subseteq \Sigma_{X \times Y}$, следовательно $\Omega_{\max}$ грубее $\Omega_{X \times Y}$. Осталось показать, что $\Sigma_{\max}$ порождает $\Sigma_{X \times Y}$, т.е. всякое $U \in \Sigma_{X \times Y}$ представимо в виде объединения некоторых множеств из $\Sigma_{\max}$.

Пусть U — некоторый элемент $\Sigma_{X\times Y}$. Тогда есть некоторые $r_X, r_Y > 0$ и $(x,y)\in X\times Y$, что $U = B^{d_X}_{r_X}(x)\times B^{d_Y}_{r_Y}(y)$. Пусть $(x',y')\in U$, тогда $x'\in B^{d_X}_{r_X}(x)$. Следовательно $q_X := r_X - d_X(x,x') > 0$, а $B^{d_X}_{q_X}(x')\subseteq B^{d_X}_{r_X}(x)$; аналогично для Y. Пусть $q := \min(q_X, q_Y) > 0$. Тогда

$$V := B^{d_X}_q(x')\times B^{d_Y}_q(y')$$

— окрестность (x',y'). При этом $V\subseteq U$. Значит U представляется в виде объединения всех таких окрестностей для каждой точки (x',y') из него. Но $V\in\Sigma_{\max}$, поэтому $\Sigma_{\max}$ порождает $\Sigma_{X\times Y}$. Значит топология, которая порождает $\Sigma_{\max}$, — $\Omega_{\max}$ — содержит как подмножество топологию, которую порождает $\Sigma_{X\times Y}$, — $\Omega_{X\times Y}$.

Таким образом $\Omega_{\max} = \Omega_{X\times Y}$. □

Теорема 31. *Пусть дана $g : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, что*

- $\forall x,y\in\mathbb{R}_+\quad g(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y = 0$;
- $\forall x,y,d\in\mathbb{R}_+\quad g(x+d,y)\geqslant g(x,y)\wedge g(x,y+d)\geqslant g(x,y)$;
- $\forall x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}_+\quad g(x_1+x_2,y_1+y_2)\leqslant g(x_1,y_1)+g(x_2,y_2)$;
- $\forall\alpha>0\,\exists x,y>0:\quad 0<g(x,0)<\alpha\wedge 0<g(0,y)<\alpha$.

Тогда для любых метрических пространств (X,d_X) и (Y,d_Y) функция

$$d_g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = g(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2))$$

является метрикой, эквивалентной метрике

$$d_{\max}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2))$$

Доказательство. Заметим, что по теореме 1 функция $d_{\max}$ является метрикой. С помощью теоремы 12 имеем, что нужно показать, что в каждом шаре по одной метрик $d_{\max}$ и d_g есть шар с тем же центром по другой метрики.

Рассмотрим шар $B^{d_g}_r((x,y))$. Тогда по свойству g есть $q_X > 0$, что $0 < g(q_X,0) < r/2$; аналогично для Y. Следовательно для всех точек $x'\in B^{d_X}_{q_X}(x)$ и $y'\in B^{d_Y}_{q_Y}(y)$ верно, что

$$\begin{aligned}
d_g((x',y'),(x,y))&\\
&= g(d_X(x',x), d_Y(y',y))\\
&\leqslant g(d_X(x',x),0) + g(0, d_Y(y',y))\\
&\leqslant g(q_X,0)+g(0,q_Y)\\
&< \frac{r}{2}+\frac{r}{2} = r
\end{aligned}$$

Пусть $q := \min(q_X,q_Y)$. Тогда

$$B^{d_{\max}}_q((x,y)) = B^{d_X}_q(x)\times B^{d_Y}_q(y)\subseteq B^{d_X}_{q_X}(x)\times B^{d_Y}_{q_Y}(y)\subseteq B^{d_g}_r((x,y))$$

Т.е. для каждого шара по d_g нашёлся подшар по $d_{\max}$.

Лемма 31.1. *Для всякого $r>0$ есть такое $q_X>0$, что*

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\qquad g(x,0)<q_X\longrightarrow x<r$$

Аналогично для Y.

Доказательство. Рассмотрим $q_X := g(r,0) > 0$. Тогда если $x \geqslant r$, то $g(x,0) \geqslant g(r,0) = q_X$. Следовательно
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad g(x,0) < q_X \longrightarrow x < r$$
Аналогично для Y. □

Рассмотрим шар $B_r^{d_{\max}}((x,y))$. Тогда определим q_X и q_Y по прошлой лемме для r и координат X и Y соответственно. Пусть также $q := \min(q_X, q_Y)$ Тогда

$$\forall (x',y') \in B_q^{d_g}((x,y))$$
$$\begin{cases} g(d_X(x',x),0) \leqslant g(d_X(x',x),d_Y(y',y)) = d_g((x',y'),(x,y)) < q \leqslant q_X \\ g(0,d_Y(y',y)) \leqslant g(d_X(x',x),d_Y(y',y)) = d_g((x',y'),(x,y)) < q \leqslant q_Y \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} d_X(x',x) < r \\ d_Y(y',y) < r \end{cases}$$
$$\Longrightarrow d_{\max}((x',y'),(x,y)) = \max(d_X(x',x),d_Y(y',y)) < r$$
$$\Longrightarrow (x',y') \in B_r^{d_{\max}}((x,y))$$
□

Следствие 31.1. *Произведения метрических пространств по функции $g(x,y) := (x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}$ для всякого $\alpha \geqslant 1$ даёт такую же топологию, что и произведение стандартных топологий на метрических пространствах. В случае $\alpha = 2$ мы имеем стандартное произведение пространств.*

Теорема 32. *Пусть $X = \prod_{i\in I} X_i$ — произведение топологических пространств. Тогда координатные проекции $p_i : X \to X_i$ непрерывны.*

Доказательство. Для всякого открытого в X_i множества U множество $p_i^{-1}(U)$ — элемент предбазы тихоновской топологии (по определению), поэтому $p_i^{-1}(U)$ открыто, а значит p_i непрерывно. □

Определение 31 (отображение в $X\times Y$)**.** Пусть X, Y, Z– топологические пространства. Любое отображение $f : Z \to X \times Y$ имеет вид
$$f(z) = (f_1(z), f_1(z)), \qquad \text{для всех } z \in Z,$$
где $f_1 : Z \to X$, $f_2 : Z \to Y$ — некоторые отображения, называемые *компонентами* отображениями f.

Определение 32 (отображение в $\prod_{i\in I} X_i$)**.** Пусть Z и $\{X_i\}_{i\in I}$ — топологические пространства. *Компонентами* отображения $f : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ называются отображения $f_i : Z \to X_i$, задаваемые формулами
$$f_i := p_i \circ f_i$$

Теорема 33 (о покоординатной непрерывности)**.** *Пусть Z и $\{X_i\}_{i\in I}$ — топологические пространства, $X = \prod_{i\in I} X_i$ — тихоновское произведение.Тогда отображение $f : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ непрерывно тогда и только тогда, когда каждая его компонента f_i непрерывна.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) $f_i = p_i \circ f$, при этом p_i и f непрерывны, следовательно и f_i непрерывно.

($\Leftarrow$) Пусть U — элемент предбазы тихоновской топологии. Тогда существуют $i \in I$ и $V \in \Omega_i$, что $U = p_i^{-1}(V)$, следовательно

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(V)) = (p_i \circ f)^{-1}(V) = f_i^{-1}(V)$$

— открытое множество.

Теперь заметим, что для всякого открытого в X множества W существует семейство Σ конечных наборов открытых множеств предбазы, что

$$W = \bigcup_{\Lambda \in \Sigma} \bigcap_{T \in \Lambda} T$$

Следовательно

$$f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\bigcup_{\Lambda \in \Sigma} \bigcap_{T \in \Lambda} T\right) = \bigcup_{\Lambda \in \Sigma} f^{-1}\left(\bigcap_{T \in \Lambda} T\right) = \bigcup_{\Lambda \in \Sigma} \bigcap_{T \in \Lambda} f^{-1}(T)$$

является открытым, поскольку каждое $f^{-1}(T)$ открыто (т.к. T — элемент предбазы, для него уже показали), а каждое Λ конечно.

□

Замечание 5. Также для проверки на непрерывность $f : X \to Y$ достаточно проверить открытость $f^{-1}(U)$ для всякого U из какой-либо базы или предбазы Y.

Замечание 6. Развёрнутое утверждение неверно: неверно, что если $f : \prod_{i \in I} X_i \to Y$ непрерывно по каждой координате, от непрерывно и в итоге. Для этого несложно проверить, что подходит

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{если } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{иначе} \end{cases}$$

Определение 33. Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если

1. f — биекция,
2. f — непрерывно,
3. f^{-1} — непрерывно.

Определение 34. Если существует гомеморфизм между X и Y, то X и Y *гомеморфны*. Обозначение: $X \simeq Y$.

Теорема 34. *Гомеоморфность — "отношение эквивалентности" на топологических пространствах.*

Доказательство.

- Тождественное отображение (любого топологического пространства) есть гомеоморфизм.
- Отображение, обратное гомеоморфизму, есть гомеоморфизм.
- Композиция гомеоморфизмов есть гомеоморфизм.

□

Замечание 7.

- Гомеоморфизм задаёт биекцию между открытыми множествами в X и Y.
- Гомеоморфные пространства неотличимы с точки зрения топологии.