Математический анализ — 1.

Юрий Сергеевич Белов

Литература:

- В. А. Зорич “Математический анализ”
- О. Л. Виноградов “Математический анализ”
- (подходит попозже) Г. М. Фихтенгельц “Курс дифференциального и интегрального исчисления”
- У. Рудин “Основы анализа”
- М. Спивак “Математический анализ на многообразиях”

1 Множества, аксиоматика и вещественные числа.

Мы начинаем с теории множеств.

Определение 1.

- Множества и элемменты — понятно.
- $a \in B$ — понятно.
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — объединение.
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — пересечение.
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$ — разность.
- $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$ — симметрическая разница.
- $A^C := X \setminus A$ — *дополнение*, где X — некоторое фиксированное рассматриваемое множество.
- $A \subset B$ — “A — подмножество B”, т.е. $\forall x (X \in A \Rightarrow x \in B)$.

Следствие.

- *(первое правило Моргана)* $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A^c \\ x \in B^C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$$

- *(второе правило Моргана)* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. *Аналогично.*

Определение 2. (Аксиома индукции.) Пусть есть функция $A : \mathbb{N} \to true; false$, что:

1. $A(1) = true$;

2. $\forall n(A(n) \to A(n+1))$.

Тогда $\forall n A(n)$.

Определение натуральных чисел сложно, рассматривать его не будем. Важно также иметь в виду натуральные числа с операциями сложения и умножения.

Определение 3. Пусть есть кольцо без делителей нуля R. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на $R \times (R \setminus \{0\})$, что $(a; b) \sim (c; d) \Leftrightarrow ad = bc$. Тогда $\operatorname{Quot}(R)$ — фактор-множество по $\sim$ и поле.

Определение 4. Рациональные числа — $\mathbb{Q} := \operatorname{Quot}(\mathbb{Z})$.

Теорема 1. $\nexists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$.

Теперь мы хотим понять, что есть вещественные числа. Тут есть несколько подходов.

Определение 5 (аксиоматический подход)**.** Вещественные числа — это полное упорядоченное поле $\mathbb{R}$, состоящее не из одного элемента.

Здесь “поле” значит, что на множестве (вместе с его операциями и выделенными элементами) верны акиомы A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4 и D.

Упорядоченность значит, что есть рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение $\preccurlyeq$, что все элементы сравнимы, согласованное с операциями, т.е.:

A) $a \preccurlyeq b \Leftarrow a + x \preccurlyeq b + x$.

M) $0 \preccurlyeq a \wedge 0 \preccurlyeq b \Rightarrow 0 \preccurlyeq ab$

Полнота поля значит любое из следующих утверждений (они равносильны):

- любое ограниченное сверху (снизу) подмножество поля имеет точную верхнюю (нижнюю) грань;

- (аксиома Кантора-Дедекинда) для любых двух множеств A и B, что $A \preccurlyeq B$, есть разделяющий их элемент.

Итого мы имеем 9 аксиом поля, 2 аксиомы упорядоченности и 1 акиома полноты упорядоченности.

Утверждение. *Над* $\mathbb{Q}$ *нет элемента разделяющего* $A := \{a > 0 \mid a^2 < 2\}$ *и* $B := \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. есть $c > 0$, что $A < c < B$.

Если $c^2 < 2$, то найдём ε, что $\varepsilon \in (0; 1)$ и $(c+\varepsilon)^2 < 2$. Заметим, что $(c+\varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < c^2 + (2c+1)\varepsilon$. Пусть $\varepsilon < \frac{2-c^2}{2c+1}$, тогда такое ε точно подойдёт, ну а посокольку $\frac{2-c^2}{2c+1} > 0$, то такое ε есть. Значит $c^2 \geqslant 2$.

Аналогично имеем, что $\varepsilon \leqslant 2$. А значит $c^2 = 2$, что не бывает над $\mathbb{Q}$. $\square$

Следствие. $\mathbb{Q}$ *не полно.*

Определение 6.

- *Закрытый интервал* или *отрезок* $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

- *Открытый интервал* или просто *интервал* $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

- *Полуоткрытый интервал* или *полуинтервал* $(a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $[a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$.

Теорема 2 (Лемма о вложенных отрезках)**.** *Пусть имеется* $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ *— множество вложенных (непустых) отрезков, т.е.* $\forall n > 1 I_{n+1} \subset I_n$*. Тогда* $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \varnothing$*.*

Доказательство. Заметим, что для любых натуральных $n < m$ верно, что $a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$, где $I_n = [a_n; b_n]$. Тогда для $A := \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $B := \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ верно, что $A \leqslant B$. Значит есть разделяющий их элемент t, значит $A \leqslant t \leqslant B$, значит $t \in I_i$ для всех i, значит $t \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$. □

Замечание 1. Теорема 2 не верна для не отрезков.

Замечание 2. Если в теореме 2 $b_i - a_i$ "сходится к 0", т.е. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N} : \forall i > n \, b_i - a_i < \varepsilon$, то пересечение всех отрезков состоит из ровно одного элемента.

Теорема 3 (индукция на вещественных числах)**.** *Пусть дано множество* $X \subseteq [0;1]$*, что*

1. $0 \in X$*;*

2. $\forall x \in X \; \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap [0;1] \subseteq X$*;*

3. $\forall Y \subseteq X \;\; \sup(Y) \in X$*.*

Тогда $X = [0;1]$*.*

Доказательство. Предположим противное: $X \neq [0;1]$. Рассмотрим $Z := [0;1] \setminus X$ ($Z \neq \varnothing$!) и $Y := \{y \in [0;1] \mid y < Z\}$ ($Y \neq \varnothing$!). Заметим, что $Y \subseteq X$ и $\sup(Y) = \inf(Z) = t$. Тогда $t \in X$ по второму условию. Значит для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $U_\varepsilon(t) \cap [0;1] \in X$, а т.е. $(U_\varepsilon(t) \cap [0;1]) \cap Z = \varnothing$, а тогда $t \neq \inf(Z)$ — противоречие. Значит $X = [0;1]$. □

2 Топология прямой, пределы и непрерывность.

Определение 7. *ε-окрестность* точки x (для $\varepsilon > 0$) — $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$. Обозначение: $U_\varepsilon(x)$.

Проколотая ε-окрестность точки x — $(x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon)$. Обозначение: $V_\varepsilon(x)$.

Определение 8. Пусть дано некоторое множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Тогда точка $x \in X$ называется *внутренней точкой множества* X, если она содержится в X вместе со своей окрестностью.

Само множество X называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Пример 1. Следующие множества открыты:

- $(a;b)$;
- $(a;+\infty)$;
- $\mathbb{R}$;
- $\varnothing$;
- $\bigcup_{i=0}^{\infty}(a_i;b_i)$ (интервалы не обящательно не должны пересекаться).

Определение 9. Пусть дано множесство $X \subseteq \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества, если в любой проколотой окрестности x будет какая-либо точка X.

Множество предельных точек X называется *производным множеством* множества X и обозначается как X'.

Множество X называется замкнутым, если $X \supseteq X'$.

Определение 10. Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Если у любой последовательности его точек есть предельная точка из самого множества X.

Определение 11. *Предел последовательности* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x, что для любой окрестности x эта последовательность с некоторого момента будет лежать в этой окрестности:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Обозначение: $\lim \{x_n\}_{n=0}^{\infty} = x$.

Предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x, что в любой его окрестности после любого момента появится элемент данной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n > N : \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Определение 12. *Предел* функции $f : X \to \mathbb{R}$ при в точке x — такое значение y, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : f(V_\delta(x) \cap X) = U_\varepsilon(y)$$

Обозначение: $\lim\limits_{t \to x} f(t) = y$.

Определение 13. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* x, если $\lim\limits_{t \to x} f(t) = f(x)$.

Утверждение 1. *Для последовательностей* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *верно, что*

1. $\lim \{x_n\}_{n=0}^{\infty} + \lim \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim \{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$
2. $\lim \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \lim \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim \{x_n y_n\}_{n=0}^{\infty}$
3. $\frac{1}{\lim \{x_n\}_{n=0}^{\infty}} = \lim \{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$ *(если* $\lim \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \neq 0$*)*

и одна из сторон равенства существует тогда и только тогда, когда существует другая (кроме случая во втором пункте, когда один из пределов равен 0*).*

Утверждение 2. *Для функций* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *верно, что*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim (fg)(x)$
3. $\frac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \lim\limits_{x \to a} (\frac{1}{f})(x)$ *(если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$*)*
4. $\lim\limits_{y \to \lim\limits_{x \to a} g(x)} f(y) = \lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x)$

и одна из сторон равенства существует тогда и только тогда, когда существует другая (кроме случая во втором пункте, когда один из пределов равен 0*).*

Определение 14. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ассимптотически больше* последовательности $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, если $x_n > y_n$ для всех натуральных n, начиная с некоторого. Обозначение: $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Аналогично определяются *ассимптотически меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \prec \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$), *ассимптотически не больше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \preccurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$) и *ассимптотически не меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$).

Утверждение 3. *Если* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$*, то* $\lim \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \geqslant \lim \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Утверждение 4. *Если* $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} > \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$*, то* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Утверждение 5 (леммма о двух полицейских)**.** *Если*

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$$

и

$$\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{z_n\}_{n=0}^{\infty} = A,$$

то предел $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *определён и равен* A*.*

Утверждение 6. *Если* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$*,* $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = A$*, а* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$*, неубывает (с некоторого момента), то предел* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *существует и не превосходит* A*.*

Замечание 3. Утверждения 3, 4 и 5 верны, если заменить последовательности на функции, пределы последовательностей на пределы функций в некоторой точке x, а асимптотические неравенства на неравенства на окрестности x.