Математический анализ — 1.

Лектор — Юрий Сергеевич Белов
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

TODOs

Содержание

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

Литература:

- В. А. Зорич “Математический анализ”
- О. Л. Виноградов “Математический анализ”
- (подходит попозже) Г. М. Фихтенгельц “Курс дифференциального и интегрального исчисления”
- У. Рудин “Основы анализа”
- М. Спивак “Математический анализ на многообразиях”
- В. М. Тихомиров “Рассказы о максимумах и минимумах”

1 Множества, аксиоматика и вещественные числа.

Мы начинаем с теории множеств.

Определение 1.

- Множества и элементы — понятно.
- $a \in B$ — понятно.
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — объединение.
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — пересечение.
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$ — разность.
- $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$ — симметрическая разница.
- $A^C := X \backslash A$ — *дополнение*, где X — некоторое фиксированное рассматриваемое множество.
- $A \subset B$ — “A — подмножество B”, т.е. $\forall x (X \in A \Rightarrow x \in B)$.

Следствие.

- *(первое правило Моргана)* $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A^c \\ x \in B^C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$$

- *(второе правило Моргана)* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. *Аналогично.*

Определение 2. (Аксиома индукции.) Пусть есть функция $A : \mathbb{N} \to true; false$, что:

1. $A(1) = true$;
2. $\forall n (A(n) \to A(n+1))$.

Тогда $\forall n A(n)$.

Определение натуральных чисел сложно, рассматривать его не будем. Важно также иметь в виду натуральные числа с операциями сложения и умножения.

Определение 3. Пусть есть кольцо без делителей нуля R. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на $R \times (R \setminus \{0\})$, что $(a;b) \sim (c;d) \Leftrightarrow ad = bc$. Тогда $\operatorname{Quot}(R)$ — фактор-множество по $\sim$ и поле.

Определение 4. Рациональные числа — $\mathbb{Q} := \operatorname{Quot}(\mathbb{Z})$.

Теорема 1. *$\nexists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существуют взаимно простые $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, что $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Тогда $m^2 = 2n^2$. Очевидно, что тогда $m^2 \vdots 2$, значит $m \vdots 2$, значит $m \vdots 4$, значит $n^2 \vdots 2$, значит $n \vdots 2$, значит n и m не взаимно просты, так как делятся на 2 — противоречие. $\square$

Теперь мы хотим понять, что есть вещественные числа. Тут есть несколько подходов.

Определение 5 (аксиоматический подход)**.** Вещественные числа — это полное упорядоченное поле $\mathbb{R}$, состоящее не из одного элемента.

Здесь “поле” значит, что на множестве (вместе с его операциями и выделенными элементами) верны аксиомы поля A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4 и D (т.е. сложение и умножение ассоциативны, коммутативны имеют нейтральные элементы и удовлетворяют условию существованию обратных (по умножению — для всех кроме нуля), а также дистрибутивности).

Упорядоченность значит, что есть рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение $\preccurlyeq$, что все элементы сравнимы, согласованное с операциями, т.е.:

$A)$ $a \preccurlyeq b \Rightarrow a + x \preccurlyeq b + x$.

$M)$ $0 \preccurlyeq a \wedge 0 \preccurlyeq b \Rightarrow 0 \preccurlyeq ab$.

Полнота поля значит любое из следующих утверждений (они равносильны):

- любое ограниченное сверху (снизу) подмножество поля имеет точную верхнюю (нижнюю) грань;
- (аксиома Кантора-Дедекинда) для любых двух множеств A и B, что $A \preccurlyeq B$, есть разделяющий их элемент.

Итого мы имеем 9 аксиом поля, 2 аксиомы упорядоченности и 1 аксиома полноты упорядоченности.

Утверждение. *Над $\mathbb{Q}$ нет элемента разделяющего $A := \{a > 0 \mid a^2 < 2\}$ и $B := \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. есть $c > 0$, что $A < c < B$.

Если $c^2 < 2$, то найдём ε, что $\varepsilon \in (0;1)$ и $(c+\varepsilon)^2 < 2$. Заметим, что $(c+\varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < c^2 + (2c+1)\varepsilon$. Пусть $\varepsilon < \frac{2-c^2}{2c+1}$, тогда такое ε точно подойдёт, ну а поскольку $\frac{2-c^2}{2c+1} > 0$, то такое ε есть. Значит $c^2 \geqslant 2$.

Аналогично имеем, что $\varepsilon \leqslant 2$. А значит $c^2 = 2$, что не бывает над $\mathbb{Q}$. $\square$

Следствие. *$\mathbb{Q}$ не полно.*

Определение 6. Значение t является *верхней (нижней) гранью* непустого множества $X \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $t \geqslant X$, т.е. любой элемент x множества X не более t.

Точная верхняя (нижняя) грань или *супремум (инфимум)* непустого множества $X \subseteq \mathbb{R}$ — минимальная верхняя (нижняя) грань множества X. Он же является элементом разделяющим X и множество всех его верхних (нижних) граней. Обозначение: $\sup(X)$ и $\inf(X)$ соответственно.

Осцилляцией множества X называется значение $\operatorname{osc} X := \sup X - \inf X$.

Определение 7.

- *Закрытый интервал* или *отрезок* $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.
- *Открытый интервал* или просто *интервал* $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- *Полуоткрытый интервал* или *полуинтервал* $(a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $[a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$.

Теорема 2 (Лемма о вложенных отрезках)**.** *Пусть имеется $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ — множество вложенных (непустых) отрезков, т.е. $\forall n > 1\ I_{n+1} \subset I_n$. Тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \varnothing$.*

Доказательство. Заметим, что для любых натуральных $n < m$ верно, что $a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$, где $I_n = [a_n; b_n]$. Тогда для $A := \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $B := \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ верно, что $A \leqslant B$. Значит есть разделяющий их элемент t, значит $A \leqslant t \leqslant B$, значит $t \in I_i$ для всех i, значит $t \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$. □

Замечание 1. Теорема 2 не верна для не отрезков.

Замечание 2. Если в теореме 2 $b_i - a_i$ "сходится к 0", т.е. $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : \forall i > n\, b_i - a_i < \varepsilon$, то пересечение всех отрезков состоит из ровно одного элемента.

Теорема 3 (индукция на вещественных числах)**.** *Пусть дано множество $X \subseteq [0; 1]$, что*

1. $0 \in X$;
2. $\forall x \in X\ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap [0; 1] \subseteq X$;
3. $\forall Y \subseteq X\ \sup(Y) \in X$.

Тогда $X = [0; 1]$.

Доказательство. Предположим противное: $X \neq [0; 1]$. Рассмотрим $Z := [0; 1] \setminus X$ ($Z \neq \varnothing$!) и $Y := \{y \in [0; 1] \mid y < Z\}$ ($Y \neq \varnothing$!). Заметим, что $Y \subseteq X$ и $\sup(Y) = \inf(Z) = t$. Тогда $t \in X$ по второму условию. Значит для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $U_\varepsilon(t) \cap [0; 1] \in X$, а т.е. $(U_\varepsilon(t) \cap [0; 1]) \cap Z = \varnothing$, а тогда $t \neq \inf(Z)$ — противоречие. Значит $X = [0; 1]$. □

2 Топология прямой, пределы и непрерывность.

2.1 Последовательности, пределы и ряды

Определение 8. *Предел последовательности* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x, что для любой окрестности x эта последовательность с некоторого момента будет лежать в этой окрестности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Обозначение: $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = x$.

Предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — такое число x, что в любой его окрестности после любого момента появится элемент данной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n > N : \quad x_n \in U_\varepsilon(x)$$

Определение 9. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$$

Теорема 4. *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда фундаментальна.*

Доказательство.

1. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к некоторому значению X, тогда

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N \quad |x_n - X| < \varepsilon/2 \Rightarrow \\ \forall n_1, n_2 > N \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| = |x_{n_1} - X + X - x_{n_2}| \leqslant |x_{n_1} - X| + |X - x_{n_2}| < \varepsilon\end{aligned}$$

2. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна. Мы знаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ все члены, начиная с некоторого различаются менее чем на ε. Тогда возьмём какой-нибудь такой член y_0 для некоторого ε, затем какой-нибудь такой член y_1 для $\varepsilon/2$, который идёт после y_0 и так далее. Получим последовательность, что все члены, начиная с n-ого лежат в $\varepsilon/2^n$-окрестности y_n. Тогда рассмотрим последовательность $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $I_n = [y_n - \varepsilon/2^{n-1}; y_n + \varepsilon/2^{n-1}]$. Несложно понять, что $I_n \supseteq I_{n+1}$, поэтому в пересечении $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ лежит некоторый X. Несложно понять, что все члены начальной последовательности, начиная с y_{n+2}, лежат в $\varepsilon/2^{n+2}$-окрестности y_{n+2}. При этом $|y_{n+2} - X| \leqslant \varepsilon/2^{n+1}$, что значит, что все члены главной последовательности, начиная с y_{n+2} лежат в $3\varepsilon/2^{n+2}$-окрестности X, а значит и в $\varepsilon/2^n$.

$\square$

Утверждение 5. *Для последовательностей $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ верно (если определено), что*

1. $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} + \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$
2. $-\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$
3. $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{x_n y_n\}_{n=0}^{\infty}$
4. $\frac{1}{\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}} = \lim\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^{\infty}$ *(если* $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \neq 0$*)*

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

Доказательство.

1. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = Y$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \varepsilon/2 \quad \wedge \quad \forall m > M\ |y_m - Y| < \varepsilon/2,$$

тогда

$$\forall n > \max(N, M) \quad |(x_n + y_n) - (X + Y)| \leqslant |x_n - X| + |y_n - Y| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $X + Y$.

2. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = X$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \varepsilon,$$

тогда

$$\forall n > N \quad |(-x_n) - (-X)| = |X - x_n| = |x_n - X| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к $-X$.

3. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = X$, $\lim\{y_n\}_{n=0}^\infty = Y$. Определим также

$$\delta : (0;+\infty) \to \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} + \frac{|x|+|y|}{2}} = \sqrt{\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2 + \varepsilon} - \frac{|x|+|y|}{2}$$

Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда положительно. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $t^2 + t(|X|+|Y|) = \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \delta(\varepsilon) \quad \wedge \quad \forall m > M\ |y_m - Y| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\begin{aligned} \forall n > \max(N,M) \quad |x_n \cdot y_n - X \cdot Y| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot Y + x_n \cdot Y - X \cdot Y| \\ &\leqslant |x_n \cdot (y_n - Y)| + |(x_n - X) \cdot Y| \\ &< |x_n| \cdot \delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \cdot |Y| \\ &< (|X| + \delta(\varepsilon)) \cdot \delta(\varepsilon) + |Y| \cdot \delta(\varepsilon) \\ &= \delta(\varepsilon)^2 + (|X|+|Y|)\delta(\varepsilon) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

что означает, что $\{x_n \cdot y_n\}_{n=0}^\infty$ сходится и сходится к $X \cdot Y$.

4. Пусть $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty = X$. Определим также

$$\delta : (0;+\infty) \to \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon |X|^2}{1 + \varepsilon |X|}$$

Несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ всегда определено и всегда меньше $|X|$. Также несложно видеть, что $\delta(\varepsilon)$ есть корень уравнения $\frac{t}{|X|(|X|-t)} = \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N\ |x_n - X| < \delta(\varepsilon),$$

тогда

$$\forall n > N \quad \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{X}\right| = \left|\frac{X - x_n}{X \cdot x_n}\right| < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X| \cdot |x_n|} < \frac{\delta(\varepsilon)}{|X|(|X| - \delta(\varepsilon))} = \varepsilon,$$

что означает, что $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=0}^\infty$ сходится и сходится к $1/X$.

□

Определение 10. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ *асимптотически больше* последовательности $\{y_n\}_{n=0}^\infty$, если $x_n > y_n$ для всех натуральных n, начиная с некоторого. Обозначение: $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succ \{y_n\}_{n=0}^\infty$.

Аналогично определяются *асимптотически меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^\infty \prec \{y_n\}_{n=0}^\infty$), *асимптотически не больше* ($\{x_n\}_{n=0}^\infty \preccurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$) и *асимптотически не меньше* ($\{x_n\}_{n=0}^\infty \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$).

Утверждение 6. *Если* $\{x_n\}_{n=0}^\infty \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^\infty$, *то* $\lim\{x_n\}_{n=0}^\infty \geqslant \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $Y > X$, где $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^\infty$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^\infty$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ находятся в ε-окрестностях X и Y соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $y_n > Y - \varepsilon = X + \varepsilon > x_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^\infty \prec \{y_n\}_{n=0}^\infty$ — противоречие. Значит $X \geqslant Y$. □

Утверждение 7. *Если* $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} > \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, *то* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Доказательство. Пусть $X := \lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $Y := \lim\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда пусть $\varepsilon = \frac{|X-Y|}{2}$. С каких-то моментов $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ находятся в ε-окрестностях X и Y соответственно. Тогда начиная с позднего из этих моментов, $x_n > X - \varepsilon = Y + \varepsilon > y_n$, т.е. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succ \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. $\square$

Утверждение 8 (лемма о двух полицейских). *Если*

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$$

и

$$\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{z_n\}_{n=0}^{\infty} = A,$$

то предел $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *определён и равен* A.

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ есть $N, M \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N \ |x_n - A| < \varepsilon \quad \wedge \quad \forall m > M \ |z_n - A| < \varepsilon,$$

значит

$$\forall n > \max(N, M) \quad A + \varepsilon > x_n \geqslant y_n \geqslant z_n > A - \varepsilon \quad \text{т.е. } |y_n - A| < \varepsilon,$$

что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к A. $\square$

Утверждение 9. *Если* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \succcurlyeq \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lim\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = A$, *а* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, *не убывает (с некоторого момента), то предел* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *существует и не превосходит* A.

Доказательство. Если последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ возрастает не с самого начала, то отрежем её начало с до момента начала возрастания. Заметим, что она ограничена сверху (из-за последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$), тогда определим $B := \sup(\{y_n\}_{n=0}^{\infty})$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \quad |B - x_N| < \varepsilon$, тогда $\forall n > N \quad |B - x_n| < \varepsilon$, что означает, что $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится и сходится к B. По утверждению 6 $A \geqslant B$. $\square$

Определение 11. Сумма ряда $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ есть значение $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim \left\{\sum_{i=0}^{k}\right\}_{k=0}^{\infty}$. Частичной же суммой s_k этого ряда называется просто $\sum_{i=0}^{k} a_i$.

Определение 12. Ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *сильно сходится*, если $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ сходится.

Теорема 10. *Если ряд сильно сходится сходится, то он сходится.*

Доказательство.

Лемма 10.1. *Пусть ряд* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *сходится, тогда сходится любой его "хвост" (суффикс), и для любого* $\varepsilon > 0$ *есть такой хвост, сумма которого меньше* ε.

Доказательство. Пусть $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$ верно, что $\sum_{i=0}^{n} |a_i| \in U_\varepsilon(A)$. Тогда заметим, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=N+1}^{n} |a_i| = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| - \sum_{i=0}^{N} |a_i| \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |a_i| - \sum_{i=0}^{N} |a_i| = A - \sum_{i=0}^{N} |a_i| \in U_\varepsilon(0)$$

Это и означает, что любой хвост сходится. И так мы для каждого ε нашли такой хвост, что его сумма меньше ε. $\square$

Пусть дан сильно сходящийся ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Пусть $\varepsilon_n := \sum_{i=n}^{\infty} |a_i|$. Несложно видеть, что $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно уменьшается, сходясь к 0 (последнее следует из леммы 10.1). Также несложно видеть по рассуждениям леммы 10.1, что $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = |a_n|$. Тогда определим

$$S_n := \overline{U}_{\varepsilon_{n+1}}(\sum_{i=0}^{n} a_i),$$

где $\overline{U}_\varepsilon(x)$ — закрытая ε-окрестность точки x. Тогда несложно видеть, что

$$\left|\sum_{i=0}^{n+m} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+m} a_i\right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| \leqslant \varepsilon_{n+1}$$

Тем самым сумма любого префикса длины хотя бы $n+1$ лежит в $\overline{U}_{\varepsilon_{n+1}}(\sum_{i=0}^{n} a_i) = S_n$. Также несложно видеть, что $S_{n+1} \subseteq S_n$. А также понятно, что S_i замкнуто и ограничено ("компактно").

Пусть $A := \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$ (поскольку диаметры шаров сходятся к нулю, то в пересечении лежит не более одной точки). Тогда мы видим, что $|\sum_{i=0}^{n} a_i - A| \leqslant \varepsilon_{n+1} \to 0$, поэтому $\sum_{i=0}^{n} a_i$ сходится и сходится к A. □

Следствие 10.1. *Если $\{b_i\}_{i=0}^{\infty} \succcurlyeq \{|a_i|\}_{i=0}^{n}$ и $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ существует, то и $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ существует.*

Теорема 11 (признак Лейбница)**.** *Пусть дана последовательность $\{a_n\}$, монотонно сверху сходящаяся к 0. Тогда ряд $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_i$ сходится.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} := \{S_{2n}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i a_i\right\}_{n=0}^{\infty} \qquad \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} := \{S_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^i a_i\right\}_{n=0}^{\infty}$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant 0 & \qquad Q_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} - a_{2n-3} \geqslant 0 \\ Q_n - P_n &= -a_{2n+1} \leqslant 0 & P_{n+1} - Q_n &= a_{2n+2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Тогда имеем, что $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно убывает, $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно возрастает, а также

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} \geqslant \{Q_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Тогда последовательности $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходятся и сходятся к P и Q соответственно. При этом последовательность

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} - \{Q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{P_n - Q_n\}_{n=0}^{\infty} = a_{2n+1}$$

тоже сходится по условию и сходится к 0. Поэтому

$$P - Q = \lim\{P_n\}_{n=0}^{\infty} - \lim\{Q_n\}_{n=0}^{\infty} = 0$$

значит $P = Q$. Значит и последовательность префиксных сумм тоже сходится к $P = Q$. □

Лемма 12 (преобразование Абеля)**.**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$$

где $B_n := \sum_{i=0}^{n} b_i$.

Теорема 13 (признак Дирихле). *Если даны $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$, что $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \searrow 0$, а $\{B_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{i=0}^{n} b_i\}_{i=0}^{\infty}$ ограничена, то ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$ сходится.*

Доказательство.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_k b_k = \sum_{i=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Пусть $|B_n| < C$ для всех n. Несложно видеть, что

$$\lim_{n \to \infty} |a_n B_n| \leqslant \lim a_n C = C \lim a_n = 0,$$

поэтому $\lim a_n B_n = 0$. Также

$$|(a_k - a_{k+1}) B_k| < C |a_k - a_{k+1}| = C(a_k - a_{k+1}),$$

поэтому

$$|S_n - a_n B_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k| < C \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = C(a_1 - a_{n+1}),$$

что тоже сходится. Поэтому $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится, т.е. и ряд сходится. □

2.2 Топология

Определение 13. *ε-окрестность* точки x (для $\varepsilon > 0$) — $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$. Обозначение: $U_\varepsilon(x)$.

Проколотая ε-окрестность точки x — $(x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon)$. Обозначение: $V_\varepsilon(x)$.

Определение 14. Пусть дано некоторое множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Тогда точка $x \in X$ называется *внутренней точкой множества* X, если она содержится в X вместе со своей окрестностью.

Само множество X называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Пример 1. Следующие множества открыты:

- $(a; b)$;
- $(a; +\infty)$;
- $\mathbb{R}$;
- $\varnothing$;
- $\bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i; b_i)$ (интервалы не обязательно не должны пересекаться).

Определение 15. Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества, если в любой проколотой окрестности x будет какая-либо точка X.

Множество предельных точек X называется *производным множеством* множества X и обозначается как X'.

Множество X называется замкнутым, если $X \supseteq X'$.

Определение 16. Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}$. Если у любой последовательности его точек есть предельная точка из самого множества X, то X называется *компактным*.

Теорема 14. *Подмножество $\mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда замкнуто и ограничено.*

Доказательство.

1. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно. Если X неограниченно, то несложно построить последовательность элементов X, которая монотонно возрастает или убывает, а разность между членами не меньше любой фиксированной константы (например, не меньше 1); такая последовательность не имеет предельных точек, что противоречит определению X, а значит X ограничено. Если X не замкнуто, то можно рассмотреть предельную точку x, не лежащую в X, и построить последовательность, сходящуюся к ней, а значит никаких других точек у последовательности быть не может, а значит опять получаем противоречие с определением X; значит X ещё и замкнуто.

2. Пусть X замкнуто и ограничено. Пусть также дана некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ элементов X. Поскольку X ограничено, то значит лежит внутри некоторого отрезка I_0. Определим последовательность $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ рекуррентно следующим образом. Пусть I_n определено; разделим I_n на две половины и определим I_{n+1} как любую из половин, в которой находится бесконечное количество членов последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. после этого определим последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ как подпоследовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $y_n \in I_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (это можно сделать рекуррентно: если определён член y_n, то найдётся ещё бесконечное количество членов начальной последовательности в I_{n+1}, которые идут после y_n, так как отброшено конечное количество, а значит можно взять любой). Несложно видеть, что $\lim_{n\to\infty} y_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n =: y$. Из-за замкнутости $y \in X$, а значит y — предельная точка $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — лежит в X и доказывает компактность X.

□

Лемма 15. *Пусть Σ — семейство интервалов длины больше некоторого $d > 0$, покрывающее отрезок $[a; b]$. Тогда у Σ есть конечное подсемейство Σ', покрывающее $[a; b]$.*

Доказательство. Давайте вести индукцию по $\lceil (b-a)/d \rceil$.

База. $\lceil (b-a)/d \rceil = 0$. В таком случае $a = b$, а значит, можно взять любой интервал, покрывающий единственную точку и получить всё искомое семейство Σ'.

Шаг. Рассмотрим $\Omega := \{I \in \Sigma \mid a \in I\}$. Заметим, что если у правых концов интервалов из Ω нет верхних граней (т.е. их множество не ограничено сверху), то значит найдётся интервал, покрывающий и a, и b, а значит его как единственный элемент семейства Σ' будет достаточно. Иначе определим a' как супремум правых концов интервалов из Ω.

Тогда мы имеем, что есть интервалы из Ω, подбирающиеся сколь угодно близко к a', а также что все интервалы из Σ, покрывающие a' не покрывают a. Если $a' > b$, то можно опять же взять интервал, который покроет весь $[a; b]$, и остановится. Иначе рассмотрим любой интервал I, покрывающий a' и любой интервал J из Ω, перекрывающийся с I. Пусть a'' — правый конец J.

Заметим, что I и J покрывают $[a; a'')$. При этом $a < J < a''$, значит $a'' - a \geqslant \operatorname{osc}(J) > d$. Если $a'' > b$, то $\Sigma = \{I, J\}$ будет достаточно. Иначе заметим, что

$$\left\lceil \frac{b-a''}{d} \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a}{d} - \frac{a''-a}{d} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{b-a}{d} - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a}{d} \right\rceil - 1 < \left\lceil \frac{b-a}{d} \right\rceil$$

Тогда по предположению индукции есть конечное подпокрытие Σ'' покрытия Σ отрезка $[a''; b]$. Значит $\Sigma' := \Sigma'' \cup \{I, J\}$ является конечным подпокрытием покрытия Σ множества $[a; b]$. □

Лемма 16. *Пусть Σ — семейство интервалов длины больше некоторого $d > 0$. Тогда найдётся не более чем счётное подсемейство Σ', имеющее такое же объединение, т.е. $|\Sigma'| \leqslant |\mathbb{N}|$, а $\bigcup \Sigma = \bigcup \Sigma'$.*

Доказательство. Несложно видеть, что $A := \bigcup \Sigma$ представляется в виде дизъюнктного объединения интервалов. Каждый из них можно представить как объединение не более чем счётного отрезков. Итого мы получим не более чем счётное семейство Ω отрезков, что $\bigcup \Omega = A$. Для каждого отрезка из Ω построим по лемме 15 конечное подпокрытие покрытия Σ, а затем объединив их, получим не более чем счётное семейство Σ', покрывающее любой из них, а значит и $\bigcup \Omega = A = \bigcup \Sigma$. С другой стороны Σ' — подмножество Σ, значит и $\bigcup \Sigma'$ — подмножество $\bigcup \Sigma$.

В итоге $\bigcup \Sigma' = \bigcup \Sigma$, и при этом Σ' — не более чем счётное подмножество Σ. □

Лемма 17. *Пусть дано семейство Σ интервалов. Тогда из него можно выделить не более чем счётное подсемейство Σ' с тем же объединением, т.е. $|\Sigma'| \leqslant |\mathbb{N}|$, а $\bigcup \Sigma = \bigcup \Sigma'$.*

Доказательство. Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{Z}$ семейство

$$\Sigma_n = \{I \in \Sigma \mid \operatorname{osc}(I) \in [2^n; 2^{n+1})\}$$

Применим лемму к Σ_n и получим Σ'_n. Тогда $\Sigma' := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma'_n$ является подмножеством Σ, даёт в объединении то же, что и Σ, и при этом имеет мощность не более $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. □

Теорема 18. *Подмножество $\mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда из любого его покрытия интервалами можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство.

1. Пусть X компактно, а Σ — некоторое его покрытие интервалами. Определим для каждого $d > 0$
$$\Sigma_d := \{I \in \Sigma \mid \operatorname{osc}(I) > d\}$$
Если никакое из Σ_d не является подпокрытием множества X, то рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, где x_n — любой элемент $X \setminus \Sigma_{1/2^n}$. У $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ есть предельная точка $x \in X$. Значит должен быть интервал, покрывающий x, но тогда он же покрывает весь некоторый хвост нашей последовательности, а сам лежит в некотором $\Sigma_{1/2^n}$ — противоречие. Значит некоторое Σ_d является подпокрытие, а значит далее можно рассматривать его в качестве Σ.

   $\bigcup \Sigma$ — открытое множество, поэтому является дизъюнктным объединением семейства Ω интервалов. Поскольку в Σ длины всех интервалов больше d, то в Ω тоже. Но также X ограничено, поэтому Ω конечно, да и все интервалы в нём ограничены. Заметим, что $X \cap I$, где I — любой интервал из Ω, является замкнутым множеством, поэтому его можно накрыть некоторым отрезком $S \subseteq I$ (для этого можно взять отрезок $[\inf(X \cap I); \sup(X \cap I)]$). Значит из накрытия Σ выделить $|\Omega|$ конечных подпокрытий для каждого отрезка (по лемме 16), а их объединение даст конечное покрытие X.

2. Пусть X таково, что из любого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

   Если X неограниченно, то тогда несложно будет видеть, что покрытие $\{(n; n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ нельзя уменьшить до конечного. Значит X конечно.

   Если X не замкнуто, то значит есть точка $x \notin X$, что в любой окрестности x будет точка. Тогда рассмотрим покрытие $\{(x + 2^n; x^{n+2}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x - 2^{n+2}; x^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Несложно видеть, что если взять любое конечное подсемейство интервалов, то оно не накроет некоторую окрестность x, а значит и X. Значит X замкнуто.

   Итого получаем, что X компактно.

□

2.3 Пределы функций, непрерывность

Определение 17 (по Коши)**.** *Предел* функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке x — такое значение y, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : f(V_\delta(x) \cap X) = U_\varepsilon(y)$$

Обозначение: $\lim\limits_{t \to x} f(t) = y$.

Определение 18 (по Гейне)**.** *Предел* функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке x — такое значение y, что для любой последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ элементов $X \setminus \{x\}$ последовательность $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к y. Обозначение: $\lim\limits_{t \to x} f(t) = y$.

Теорема 19. *Определения пределов по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Будем доказывать равносильность отрицаний утверждений, ставимых в определениях.

1. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ не сходится по Коши в x к значению y. Значит есть такое $\varepsilon > 0$, что в любой проколотой окрестности x (в множестве X) есть точка, значение f в которой не лежит в ε-окрестности. Рассмотрев любую такую проколотую окрестность $I_0 = V_{\delta_0}(x)$, берём в ней любую такую точку x_0. Далее рассмотрев $I_1 = V_{\delta_1}(x)$, где $\delta_1 = \min(\delta_0/2, |x - x_0|)$, берём там любую точку x_1, где значение f вылетает вне ε-окрестности y. Так далее строим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся к x, значения f в которой не лежат в ε-окрестности y, что означает, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ не сходится к y, что означает, что f не сходится по Гейне в x к значению y.

2. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ не сходится по Гейне в x к значению y. Значит есть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящаяся к x, что последовательность её значений не сходится к y. Значит есть $\varepsilon > 0$, что после любого момента в последовательности будет член, значение в котором вылезает вне ε-окрестности y. Поскольку для любой проколотой окрестности x есть момент, начиная с которого вся последовательность лежит в этой окрестности, то в любой проколотой окрестности x есть член, значение которого вылезает вне ε-окрестности y, что означает, что f не сходится по Коши в x к y.

□

Утверждение 20. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в x предел тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; \forall x_1, x_2 \in V_\delta(x) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Доказательство. Такое же как для последовательностей: см. теорему 4. □

Утверждение 21. *Для функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ верно, что*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} (f + g)(x)$
2. $\lim\limits_{x \to a} (-f)(x) = -\lim\limits_{x \to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim (f \cdot g)(x)$
4. $\frac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \lim\limits_{x \to a} (\frac{1}{f})(x)$ *(если $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$)*
5. $\lim\limits_{y \to \lim\limits_{x \to a} g(x)} f(y) = \lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x)$

и всегда, когда определена левая сторона определена, правая тоже определена.

Замечание 3. Утверждения 6, 7 и 8 верны, если заменить последовательности на функции, пределы последовательностей на пределы функций в некоторой точке x, а асимптотические неравенства на неравенства на окрестности x.

Определение 19. *Верхним пределом* функции f в точке x_0 называется

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \inf_{\delta > 0}(\sup_{V_\delta(x_0)} f)$$

Нижним пределом функции f в точке x_0 называется

$$\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \sup_{\delta > 0}(\inf_{V_\delta(x_0)} f)$$

Утверждение 22. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в x предел тогда и только тогда, когда $\overline{\lim\limits_{t \to x}} f(t) = \underline{\lim\limits_{t \to x}} f(t)$.*

Определение 20. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке x*, если $\lim\limits_{t \to x} f(t) = f(x)$. В изолированных точках f всегда непрерывна.

Определение 21. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной на множестве $Y \subseteq X$*, если она непрерывна во всех точках Y.

Утверждение 23. *Для непрерывных на X функций f и g верно, что*

- *$f + g$ непрерывна на X;*
- *fg непрерывна на X;*
- *$\frac{1}{f}$ непрерывна на X (если $f \neq 0$).*

Утверждение 24. *Для f, непрерывной в x_0, и g, непрерывной в $f(x_0)$, $g \circ f$ непрерывна в x_0.*

Теорема 25 (Вейерштрасса)**.** *Непрерывная функция на компакте ограничена на нём и принимает на нём свои минимум и максимум.*

Доказательство. Докажем утверждение для ограниченности сверху и максимума; для ограниченности снизу и минимума рассуждения аналогичны.

Пусть множество неограниченно сверху. Тогда есть $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty} \to +\infty$. Тогда рассмотрим подпоследовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся к y. Тогда

$$f(y) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = +\infty$$

— противоречие.

Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к супремуму S функции. Рассмотрим подпоследовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, сходящуюся к y. Тогда

$$f(y) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = S$$

□

Следствие 25.1. *Так как отрезок компактен, то любая непрерывная на нём функция ограничена и принимает на нём свои максимум и минимум.*

Теорема 26 (о промежуточном значении)**.** *Пусть f непрерывна на $[a;b]$, а $f(a) < f(b)$. Тогда $\forall y \in [f(a); f(b)]$ найдётся $c \in [a;b]$, что $f(c) = y$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{(a_n; b_n)\}_{n=0}^{\infty}$, что $(a;b) = (a_0; b_0)$, а следующие пары определяются так: если $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$, то $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (\frac{a_n+b_n}{2}; b_n)$, иначе $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (a_n; \frac{a_n+b_n}{2})$. Тогда $c = \lim\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда

$$f(c) = \lim\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty} = \lim\{f(b_n)\}_{n=0}^{\infty},$$

откуда получаем, что $f(c) \geqslant y$ и $f(c) \leqslant y$, т.е. $f(c) = y$. □

Определение 22. Функция f *равномерно непрерывна* на X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; \forall x \in X \quad f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

Теорема 27 (Кантор)**.** *Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \, \exists x, y : \quad |x - y| < \delta \land |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Тогда рассмотрим последовательность пар x и y построенных так для δ, сходящихся к 0. Из неё выделим подпоследовательность, что x сходится к некоторому a. Тогда y сойдутся к нему же. Тогда в любой окрестности a будет пара точек $(x'; y')$, что $|f(x') - f(y')| > \varepsilon$, значит будет в любой окрестности x будет точка, выбивающаяся из $\varepsilon/2$-окрестности — противоречие с непрерывностью. □

Определение 23. Пусть есть функции f и g, что $|f| \leqslant C|g|$ в окрестности x для некоторого $C \in \mathbb{R}$, тогда пишут, что $f = O(g)$ (при $t \to x$).

Если же $\forall \varepsilon > 0$ будет такая окрестность x_0, что $|f| \leqslant \varepsilon|g|$ в этой окрестности, тогда пишут, что $f = o(g)$ (при $t \to x$).

2.4 Гладкость (дифференцируемость)

Определение 24. Функция f называется *гладкой (дифференцируемой)* в x, если $f(x + \delta) = f(x) + A\delta + o(\delta)$ для некоторого $A \in \mathbb{R}$. В таком случае A называется *дифференциалом (производной)* f в точке x.

Обозначение: $f'(x) = A$.

Определение 25. Функция f называется *гладкой (дифференцируемой)* в x, если предел

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$$

определён. В таком случае его значение называется *дифференциалом (производной)* f в точке x.

Утверждение 28. *Определения 24 и 25 равносильны.*

Утверждение 29. *Непрерывная в некоторой точке функция там же непрерывна.*

Определение 26. Функция, значения которой равны производным функции f в тех же точках называется *производной функцией* (или просто *производной*) функции f. Обозначение: f'.

Лемма 30. *Для дифференцируемых в x функций f и g*

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;

2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *(правило Лейбница)*;

3. $(\frac{1}{f})'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$;

4. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Лемма 31. *Пусть дана $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция. Тогда существует $g : [f(a); f(b)] \to \mathbb{R}$ — непрерывная монотонно возрастающая (убывающая) функция, что $g \circ f = Id$.*

Доказательство. Заметим, что f — монотонно возрастающая (убывающая) биекция из $[a; b]$ в $[f(a); f(b)]$. Тогда существует монотонно возрастающая (убывающая) биекция $g : [f(a); f(b)] \to [a; b]$, что $g \circ f = id$. Осталось показать, что g непрерывна.

Предположим противное, тогда в любой окрестности некоторой точки $f(x)$ из $[f(a); f(b)]$ есть точки вылетающие вне ε-окрестности. Значит все точки из либо $(x - \varepsilon; x)$, либо $(x; x + \varepsilon)$ не принимаются, значит g не биекция — противоречие. Значит g непрерывна. □

Лемма 32.
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Доказательство. Пусть $g := f^{-1}$. Тогда
$$1 = Id' = (f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$$
Откуда следует, что
$$(f^{-1})' = g' = \frac{1}{f' \circ g} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$
□

Определение 27. Функция f *возрастает в точке* y, если есть $\varepsilon > 0$, что $f(x) \leqslant f(y)$ для любого $x \in (y - \varepsilon; y)$ и $f(x) \geqslant f(y)$ для любого $x \in (y; y + \varepsilon)$.

Аналогично определяется убываемость функции в точке.

Лемма 33. *Если f возрастает в любой точке на $[a; b]$, то $f(a) \leqslant f(b)$.*

Доказательство.

1. Можно рассмотреть для каждой точки $[a; b]$ окрестность, для которой верна её возрастаемость, и из покрытия, ими образуемого, выделить конечное. А тогда перебираясь между общими точками окрестностей, получим искомое.

2. Также можно предположить противное, рассмотреть последовательность вложенных отрезков, у которых левый конец выше правого, и тогда для точки пересечения отрезков будет противоречие.

□

Следствие 33.1. *f возрастает на всём отрезке.*

Теорема 34. *Если f гладка, а f' положительна на $[a; b]$, то f строго возрастает на $[a; b]$.*

Доказательство. Несложно видеть, что в любой точке на $[a; b]$ у функции есть окрестность, где она строго возрастает, так как если $t \in [a; b]$, а $f'(t) = \lambda > 0$, то в некоторой окрестности

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \in (0; 2\lambda) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \in (f(t); f(t) + 2\lambda(x - t))$$

что значит, что эта окрестность — подтверждение для возрастания f в t. Тогда по предыдущему следствию f возрастает на $[a; b]$. Если вдруг функция возрастает нестрого, то тогда найдётся подотрезок на $[a; b]$, на котором функция константа, а значит на интервале с теми же концами производная тождественна равна нулю. □

Теорема 35. *Если f возрастает, то f' в своей области определения неотрицательно.*

Доказательство. Если функция в точке t равна $\lambda < 0$, то в некоторой окрестности t

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \in \left(\frac{3}{2}\lambda; \frac{1}{2}\lambda\right) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \in \left(f(t) + \frac{3}{2}\lambda(x - t); f(t) + \frac{1}{2}\lambda(x - t)\right)$$

что значит, что f в точке t "строго" убывает — противоречие. Значит $f'(t) \geqslant 0$. □

Определение 28. *f имеет локальный максимум в x*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что $f(x) \geqslant f(y)$ для любого $y \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon)$.

Аналогично определяется точка локального минимума.

Теорема 36. *В точках локальных максимумов и минимумов функции f функция f' принимает нули (если определена).*

Доказательство. Слева от точки максимума функция возрастает в данной точке, значит производная в данной точке $\geqslant 0$, а справа — убывает, значит производная $\leqslant 0$, значит производная равна 0. Аналогично для точки минимума. □

Теорема 37 (Ролль)**.** *Если f — гладкая функция на $[a; b]$, и $f(a) = f(b)$, то существует $c \in (a; b)$, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. В точке максимума или минимума f на $[a; b]$ достигается ноль производной. Если они обе совпадают с концами отрезка, то значит функция константа, а тогда в любой точке отрезка производная равна нулю. □

Теорема 38. *Если f и g непрерывные на $[a; b]$ и гладкие на $(a; b)$ функции, а $g' \neq 0$, то существует $c \in (a; b)$, что*

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Пусть

$$\lambda := \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

а $\tau(x) := f(x) - \lambda g(x)$. В таком случае

$$\frac{\tau(a) - \tau(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{(f(a) - f(b) - \lambda(g(a) - g(b)))}{g(a) - g(b)} = \lambda - \lambda = 0$$

значит $\tau(a) = \tau(b)$, значит есть $c \in [a; b]$, что $\tau'(c) = 0$. Тогда

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{(\tau + \lambda g)'(c)}{g'(c)} = \frac{\tau'(c)}{g'(c)} + \lambda = \lambda = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

□

Теорема 39 (Лагранж). *Если f непрерывна на $[a;b]$ и гладка на $(a;b)$, то существует $c \in (a;b)$, что*

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$$

Доказательство. Очевидно следует из предыдущей теоремы с помощью подстановки $g(x) = x$. $\square$

Теорема 40. *Пусть f — гладкая на $(a;b)$ функция.*

1. *Если $f' \geqslant 0$, то f возрастающая функция.*

2. *Если $f' > 0$, то f строго возрастающая функция.*

3. *Если f возрастающая функция, то $f' \geqslant 0$.*

Теорема 41. *Пусть f — гладкая на $[a;b]$ функция. Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in [a;b]$, то $f \equiv const$ на том же отрезке.*

Замечание 4. Функция $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ (доопределённая в нуле) имеет производную $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ в случае ненулевых x и производную $f'(0) = 0$. При этом легко видно, что f' не является непрерывной функцией (она имеет разрыв в том же нуле).

Теорема 42. *Если f гладка на $(a;b)$, а f' не равна нулю, то f' либо положительна, либо отрицательна.*

Доказательство. f не принимает никакое значение на $(a;b)$ дважды (т.к. иначе у производной был бы корень), значит она либо строго возрастает, либо строго убывает, а значит f' либо неотрицательна, либо неположительна соответственно. Но ноль принимать не может, поэтому последнее утверждение равносильно тому, что f либо строго положительна, либо строго отрицательна. $\square$

Теорема 43. *Пусть f гладка на $(a;b)$ и для некоторых $u, v \in (a;b)$ верно, что $f'(u) < \alpha < f'(v)$. Тогда существует $c \in (u;v)$, что $f'(c) = \alpha$.*

Доказательство. Пусть $g(x) := f(x) - \alpha x$. Тогда $g'(u) < 0 < g'(v)$, значит g не может строго возрастать или убывать на $(u;v)$, значит $\exists c \in (u;v)$, что $g'(c) = 0$, а значит $f'(c) = \alpha$. $\square$

Замечание 5. Данная теорема по сути является теоремой о промежуточном значении для производной.

Теорема 44. *Пусть f непрерывна на $[a;b)$ и гладка на $(a;b)$. Пусть также $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ существует и равен d. Тогда $f'(a)$ тоже существует и равна d.*

Доказательство. Есть несколько способов:

1. Несложно видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ есть некоторая правая окрестность a, в которой функция f' лежит в ε-окрестности d. Тогда $f(x) - (d-\varepsilon)x$ возрастает в данной окрестности, а $f(x) - (d+\varepsilon)x$ убывает, значит $f(x) - f(a) \in ((d-\varepsilon)(x-a); (d+\varepsilon)(x-a))$. В таком случае $f'(a)$ определена и равна d.

2. По теореме Лагранжа для любого $x \in [a;b)$ найдётся $\xi \in (a;x)$, что

   $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$$

   Значит

   $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} f'(\xi) = d$$

   что буквально значит, что $f'(a) = d$.

□

Теорема 45 (правило Лопиталя)**.** *Пусть* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$*. Пусть также* f *и* g *гладки и* $g' \neq 0$ *на* $(a;b)$*. Тогда*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

если второй предел определён.

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$, а

$$d := \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда есть $\delta > 0$, что для любого $t \in (a; a+\delta)$ значение $f'(t)/g'(t)$ лежит в $U_\varepsilon(d)$. Легко видеть, что для любых $x, y \in (a; a+\delta)$ существует $\xi \in (x; y) \subseteq (a; a+\delta)$, что

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = f'(\xi) \in U_\varepsilon(d)$$

Устремляя x к a, получаем, что $f(y)/g(y)$ тоже лежит в $U_\varepsilon(d)$. Тогда по определению предела

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = d = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Определение 29. f'' — вторая производная f, т.е. $(f')'$, а $f^{(n)}$ — n-ая производная f, т.е. $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, $f^{(0)} := f$.

Определение 30. $P(x)$ — полином Тейлора степени n функции f, если $\deg(P) \leqslant n$, а

$$f(x) - P(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a$$

Теорема 46. *Если* P_1 *и* P_2 *— полиномы Тейлора степени* n *функции* f*, то* $P_1 = P_2$*.*

Теорема 47. *Пусть* $f : (a;b) \to \mathbb{R}$*,* $f^{(1)}$*, …,* $f^{(n-1)}$ *определены на* $(t-\delta; t+\delta)$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и определена* $f^{(n)}(t)$*. Тогда для всякого* $x \in U_\delta(t)$

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + o((x-t)^n)$$

Доказательство. Рассмотрим $g(x) := f(x) - f(t)/0! \cdot (x-t)^0 - \dots - f^{(n)}(t)/n! \cdot (x-t)^n$. Тогда задача сведена к следующей лемме.

Лемма 47.1. *Если* $g^{(1)}$*, …,* $g^{(n-1)}$ *определены на* $(t-\delta; t+\delta)$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и*

$$g(t) = g^{(1)}(t) = \dots = g^{(n)}(t) = 0.$$

Тогда $g(x) = o((x-t)^n)$*.*

Доказательство. Докажем по индукции по n.

База. Пусть $n = 1$. Тогда очевидно, что $f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + o(x-t) = o(x-t)$.

Шаг. По предположению индукции $f'(x) = o((x-t)^n)$. Тогда мы имеем, что

$$f(x) = f(x) - f(t) = f'(\xi)(x-t)$$

для некоторого $\xi \in (x, t)$. Тогда

$$\frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^n} = \frac{f'(\xi)}{(x-t)^{n-1}} = \frac{o((\xi-t)^{n-1})}{(x-t)^{n-1}} = o(1)\frac{(\xi-t)^{n-1}}{(x-t)^{n-1}} = o(1)$$

□

□

Теорема 48. *Пусть $f(t) = f^{(1)}(t) = \dots = f^{(n)}(t) = 0$, а $f^{(n+1)} \neq 0$. Если n чётно, то t — не экстремальные точка функции f, иначе t — экстремальная точка функции f.*

Теорема 49. *Пусть $f : (a; b) \to \mathbb{R}$, $f^{(1)}, \dots, f^{(n+1)}$ определены на $(t - \delta; t + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда для всякого $x \in U_\delta(t)$ существует $\xi \in (x; t)$, что*

$$f(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

Доказательство. Точно так же сведём f к g, что $g(t) = \dots g^{(n)}(t) = 0$. Тогда требуется показать, что $g(x) = g^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! \cdot (x-t)^{n+1}$ для некоторого $\xi \in (x, t)$. Докажем это по индукции.

База. $n = 0$. Теорема Лагранжа.

Шаг.
$$\frac{f(x)}{(x-t)^{n+1}} = \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{n+1} - (t-t)^{n+1}} = \frac{f'(\xi)}{(n+1)(\xi - t)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$$

где $\xi \in (x, t)$ (существует по теореме Лагранжа), а $\eta \in (\xi, t) \subseteq (x, t)$ (существует по предположению индукции для f' и ξ). Отсюда следует искомое утверждение. □

2.5 Стандартные функции, ряды Тейлора и их сходимость

Тут нужно рассказать про функции exp, sin, cos и $(1+x)^\alpha$ и их ряды

Определение 31. f является *(поточечным) пределом* $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ на E, если $\lim\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty = f(x)$ для любого $x \in E$.

Определение 32. f является *равномерным пределом* $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и $x \in E$.

Теорема 50 (Стокс, Зейдель). *Пусть $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность непрерывных функций, и $f_n \to f$ равномерно на E. Тогда f непрерывна.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ есть такое $n \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ для всех $x \in E$. Тогда существует $\delta > 0$, что $f_n(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(t))$ для данного t. Тогда

$$f(U_\delta(t)) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(U_\delta(t))) \subseteq U_{2\varepsilon/3}(f_n(t)) \subseteq U_\varepsilon(f(t)).$$

□

Теорема 51 (Коши). *TFAE (the following are equivalent):*

1. *$f_n \to f$ равномерно сходится на E.*

2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$ для любых $k, l > N$ и $x \in E$.*

Теорема 52 (Вейерштрасс). *Пусть $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность непрерывных функций, что есть последовательность чисел $\{d_n\}_{n=0}^\infty$, для которой верно, что $|u_n| < d_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $\sum_{n=0}^\infty d_n$ сходится. Тогда $\sum_{n=0}^\infty u_n$ равномерно сходится.*

Теорема 53. *Пусть $f_n \to f$ на E и $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ гладкие. Если $f_n' \to g$ равномерно, то f тогда тоже гладка и $f' = g$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что $|f'_k - f'_l| < \varepsilon/3$ для всех $k, l > N$. Тогда имеем, что

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y}\right| = \left|\frac{(f_k - f_l)(x) - (f_k - f_l)(y)}{x - y}\right| = |(f_k - f_l)'(\xi)| < \varepsilon/3$$

Устремляя l к бесконечности получаем, что

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant \varepsilon/3$$

Также имеем, что есть такое $\delta > 0$, что для всех $y \in U_\delta(x)$

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - f'_k(x)\right| < \varepsilon/3$$

Также есть $M \in \mathbb{N}$, что $|f'_k - g| < \varepsilon/3$ для любого $k > M$. Складывая всё вместе, получаем, что для всех $k > \max(N, M)$ и $y \in U_\delta(x)$

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - g(x)\right| < \varepsilon$$

Значит f гладка и $f' = g$. □

Следствие 53.1. *Если $\{f^{(0)}\}$, …, $\{f^{(n-1)}\}$ сходятся, а $f^{(n)}$ равномерно сходится. Тогда то же верно и про первые n производных.*

Следствие 53.2. *Если ряд Тейлора сходится, то функция бесконечно гладкая.*

3 Примеры и контрпримеры

Название раздела?

Теорема 54. *Существует непрерывная функция f на отрезке $[a; b]$, которая не имеет производной ни в какой точке на отрезке $[a; b]$*

Доказательство. Можно привести примеры данной функции f.

1. (функция Вейерштрасса) Определим

$$f_0(x) := \frac{1}{2} - \left|x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right| \qquad f_n(x) := \frac{f_0(4^n x)}{4^n} \qquad f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$$

Поскольку $|f_n| = 1/4^n$, а $\sum_{i=0}^{\infty} 1/4^i$ сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд равномерно сходится к f, а поскольку каждая f_n непрерывна, то по теореме Стокса-Зейделя функция f непрерывна. Теперь осталось показать, что у f нет производных. Карт

Пусть a — произвольная точка из $\mathbb{R}$. Заметим, что для всяких m и n, что $m \geqslant n$, период f_m равен $1/4^m$, значит $1/4^m \mid 1/4^n$, а тогда $f_m(a \pm 1/4^n) = f_m(a)$. Значит для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f(a \pm 1/4^n) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(a \pm 1/4^n) - f_i(a)$$

Заметим, что a находится на отрезке монотонности функции f_{n-1} длины $1/(2\cdot 4^{n-1}) = 2/4^n$, который также является отрезком монотонности каждой функции из $f_0, \ldots, f_{n-2}$. Поскольку $1/4^n$ в два раза меньше, то либо $a+1/4^n$, либо $a-1/4^n$ лежит на том же отрезке монотонности; пусть это будет точка b_n. Тогда имеем, что

$$\left|\frac{f_0(b_n)-f_0(a)}{b_n-a}\right| = \left|\frac{f_1(b_n)-f_1(a)}{b_n-a}\right| = \cdots = \left|\frac{f_{n-1}(b_n)-f_{n-1}(a)}{b_n-a}\right| = 1$$

Следовательно

$$\frac{f(b_n)-f(a)}{b_n-a} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{f_i(b_n)-f_i(a)}{b_n-a} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f_i(b_n)-f_i(a)}{b_n-a}$$

— целое число, совпадающее по чётности с n. Если $f'(a)$ определено, то $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ сходится, а значит должен сойтись и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a)}{b_n-a};$$

но это последовательность целых значений, значит с какого-то момента она должна быть тождественно равна 0, но это не так, так как нечётных членов бесконечно много в этой последовательности.

2. (пример Глеба Минаева) Рассмотрим $f_0(x) := x$. Представим её как бесконечную ломаную $\cdots \leftrightarrow (-2,-2) \leftrightarrow (-1,-1) \leftrightarrow (0,0) \leftrightarrow (1,1) \leftrightarrow (2,2) \leftrightarrow \ldots$. Далее будем получать f_{n+1} из f_n следующим образом.

   Тем более картиночки!!!

   f_n будет некоторой бесконечной в обе стороны ломанной, при этом всегда $f_n(x) = f_n(x+1)$. Следующая функция будет получаться заменой ребра $(a_1,b_1) \leftrightarrow (a_2,b_2)$ на три ребра:

$$(a_1,b_1) \quad\longleftrightarrow\quad \left(\frac{a_1+2a_2}{3}, \frac{2b_1+b_2}{3}\right) \quad\longleftrightarrow\quad \left(\frac{2a_1+a_2}{3}, \frac{b_1+2b_2}{3}\right) \quad\longleftrightarrow\quad (a_2,b_2)$$

   Так мы получим f_{n+1}. Рассматриваемой же функцией будет $f := \lim_{n\to\infty} f_n$.

   Несложно видеть, что звено высоты h каждый раз заменяется на три ребра: два высоты $2h/3$ и одно высоты $h/3$. При этом описанный прямоугольник любого ребра содержит описанные прямоугольники рёбер, на которые он был заменён, а значит, окажись точка на ребре, из его описанного прямоугольника больше не вылезет. Таким образом после функции f_n разброс положений $f_i(x)$ не более $1/3^n$, поэтому поточечный предел определён.

   При этом значения в точках $k/3^m$ с некоторого момента неподвижны: после функции f_n значения во всех точках $k/3^n$ не меняются. Таким образом мы имеем, что во всякой окрестности будут точки вида $k/3^n$, $(3k+1)/3^{n+1}$, $(3k+2)/3^{n+1}$ и $(k+1)/3^n$, а они ломают монотонность функции на данном интервале. Таким образом f нигде не монотонна.

   Также предположим в точке a есть производная. Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ пару (p_n, q_n), что p_n и q_n — абсциссы концов звена на котором лежит $(a, f_n(a))$ в ломаной функции f_n ($q_n > p_n$). Тогда заметим, что $q_n - p_n = 1/3^n$, $f_n(p_n) = f(p_n)$, $f_n(q_n) = f(q_n)$, а тогда

$$\frac{f_n(q_n)-f_n(p_n)}{q_n-p_n} = \frac{f(q_n)-f(p_n)}{q_n-p_n} = \frac{f(q_n)-f(a)}{q_n-a}\cdot\frac{q_n-a}{q_n-p_n} + \frac{f(a)-f(p_n)}{a-p_n}\cdot\frac{a-p_n}{q_n-p_n}$$

Следовательно значение $\frac{f_n(q_n)-f_n(p_n)}{q_n-p_n}$ лежит на отрезке между $\frac{f(q_n)-f(a)}{q_n-a}$ и $\frac{f(p_n)-f(a)}{p_n-a}$; при этом оно является коэффициентом наклона звена $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$.

Заметим, что звено $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$ будет заменено на три, среди которых будет и $(p_{n+1}, f(p_{n+1})) \leftrightarrow (q_{n+1}, f(q_{n+1}))$. Значит коэффициент наклона $(p_{n+1}, f(p_{n+1})) \leftrightarrow (q_{n+1}, f(q_{n+1}))$ можно получить из коэффициента наклона $(p_n, f(p_n)) \leftrightarrow (q_n, f(q_n))$ домножением либо на 2, либо на -1.

Таким образом мы имеем, что последовательность

$$\left(\frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n}\right)_{n=0}^{\infty}$$

либо расходится по модулю, либо с некоторого момента не меняет модуль, но знакочередуется. При этом если $f'(a)$ определена, то в некоторой окрестности a значение

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

несильно отличается от $f'(a)$ (чем меньше окрестность, тем меньше отличается). Но если мы будем рассматривать точки p_n и q_n, то для одной из них (обозначим её за x_n) верно, что

$$\left|\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right| \geqslant \left|\frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n}\right| \qquad \operatorname{sign}\left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{f_n(q_n) - f_n(p_n)}{q_n - p_n}\right)$$

Тогда про последовательность

$$\left(\frac{f_n(x_n) - f_n(a)}{x_n - a}\right)_{n=0}^{\infty}$$

с одной стороны можно сказать, что она сходится к $f'(a)$ (т.к. $|p_n - a|$ и $|q_n - a|$ не более $1/3^n$, а следовательно и $|x_n - a|$); с другой же стороны эта последовательность либо неограниченно растёт по модулю, либо с некоторого момента знакочередуется, а значит навряд ли сходится — противоречие. Значит ни в какой точке f' не определена.

□

4 Интегрирование

4.1 Первообразная

Определение 33. g — *первообразная* функции f, если на области определения f верно, что $g' = f$.

Теорема 55. *Если g_1 и g_2 — первообразные f на отрезке $[a; b]$, то $g_1 - g_2 = \text{const}$ на том же отрезке.*

Доказательство. Очевидно, что $(g_1 - g_2)' = f' - f' = 0$ на отрезке $[a; b]$. Если $g_1 - g_2$ не константна, то есть две точки на отрезке $[a; b]$, в которых принимаются разные значения, а тогда по теореме Лагранжа будет точка строго между ними (а значит и на отрезке), где производная не равна нулю — противоречие. Следовательно $g_1 - g_2$ является константой. □

Замечание 6. Для несвязного множества утверждение неверно. Например, если областью определения f будут два отрезка, то $g_1 - g_2$ будет константной на каждом отрезке, но константы могут быть различны.

Определение 34. Семейство первообразных функции f обозначается как

$$\int f$$

Определение 35. *Линейная форма* — линейная однородная функция ($f(x) = \alpha x$).

Теорема 56.

1.

$$\int \alpha f = \alpha \int f + C$$

2.

$$\int f + g = \int f + \int g$$

3.

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df$$

4.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left(\int f\right) \circ \varphi$$

Доказательство.

1. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int \alpha f\right)' = \alpha f = \alpha \left(\int f\right)' = \left(\alpha \int f\right)'$$

   Таким образом обе стороны отличаются на константу: её корректность гарантирует $+C$.

2. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f + g\right)' = f + g = \left(\int f\right)' + \left(\int g'\right) = \left(\int f + \int g\right)$$

   Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

3. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f\,dg\right)' = f \cdot g' = (fg)' - g \cdot f' = \left(fg - \int g\,df\right)'$$

   Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

4. Продифференцируем обе части:

$$\left(\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\right)' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \left(\left(\int f\right) \circ \varphi\right)'$$

   Таким образом обе стороны отличаются на константу; эта константа поглощается первообразными слева и справа (так как это семейства функций).

□

4.2 Суммы Дарбу и интеграл Римана

Определение 36. *Разбиение* отрезка $[a;b]$ — такое семейство $\Sigma := \{I_k\}_{k=1}^n$ отрезков (ненулевой длины), что $[a;b] = \bigcup_{k=1}^n I_k$, и все отрезки из Σ попарно пересекаются не более, чем по одной точке.

Пусть дана функция $f : E \to \mathbb{R}$, где $E \supseteq [a;b]$, и некоторое разбиение Σ отрезка $[a;b]$. Тогда *верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f при разбиении* Σ есть выражения

$$S^+(f, \Sigma) := \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) \qquad S^-(f, \Sigma) := \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_{x \in I} f(x)$$

соответственно. (При этом sup и inf могут принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ соответственно; и в таких случаях соответствующие суммы Дарбу тоже будут принимать значения $\pm\infty$.)

Пример 2.

- Пусть $f(x) := x^\alpha$, $\alpha > 0$, $[a;b] := [0;1]$, а $\Sigma := \{[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]\}_{k=1}^n$. Тогда

$$S^+(f, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$
$$S^-(f, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_{x \in I} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

- Пусть f — функция Дирихле, отрезок $[a;b]$ — любой, и его разбиение Σ — любое. Тогда

$$S^+(f, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot 1 = b - a$$
$$S^-(f, \Sigma) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \inf_{x \in I} f(x) = \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot 0 = 0$$

Лемма 57. *Пусть даны функция f, отрезка $[a;b]$ и его разбиение Σ. Назовём его* подразбиением *семейство отрезков Σ', которое является объединением разбиений отрезков из Σ (иначе говоря, множество концов отрезков Σ является подмножеством концов отрезков Σ'). Тогда верны неравенства*

$$S^+(f, \Sigma) \geqslant S^+(f, \Sigma') \qquad S^-(f, \Sigma) \leqslant S^-(f, \Sigma')$$

Доказательство. Покажем это для верхних сумм Дарбу; для нижних доказательство аналогично.

Пусть $\{\Lambda_I\}_{I \in \Sigma}$ — набор разбиений каждого отрезка I из Σ, что $\Sigma' = \bigcup_{I \in \Sigma} \Lambda_I$. Тогда мы имеем, что для всяких $I \in \Sigma$ и $J \in \Lambda_I$ верно, что

$$\sup_{x \in I} f(x) \geqslant \sup_{x \in J} f(x)$$

Следовательно

$$\sum_{J \in \Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x \in J} f(x) \leqslant \sum_{J \in \Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = \left(\sum_{J \in \Lambda_I} |J|\right) \cdot \sup_{x \in I} f(x) = |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x)$$

Значит, суммируя обе части по Σ, получаем, что

$$S^+(f, \Sigma') = \sum_{J \in \Sigma'} |J| \cdot \sup_{x \in J} f(x) = \sum_{I \in \Sigma} \sum_{J \in \Lambda_I} |J| \cdot \sup_{x \in J} f(x) \leqslant \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \sup_{x \in I} f(x) = S^+(f, \Sigma)$$

□

Лемма 58. *Пусть даны функция f, отрезок $[a;b]$, его разбиения Σ_1 и Σ_2. Тогда*

$$S^+(f,\Sigma_1) \geqslant S^-(f,\Sigma_2)$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\Sigma := \{I \cap J \mid I \in \Sigma_1 \wedge J \in \Sigma_2 \wedge |I \cap J| > 1\}$$

— (минимальное) подразбиение Σ_1 и Σ_2. Тогда верно, что

$$S^+(f,\Sigma_1) \geqslant S^+(f,\Sigma) \geqslant S^-(f,\Sigma) \geqslant S^-(f,\Sigma_2)$$

□

Следствие 58.1. *Пусть фиксированы функция f и отрезок $[a;b]$. Рассмотрим множества*

$$D^+ := \{S^+(f,\Sigma) \mid \Sigma \text{ — разбиение } [a;b]\} \qquad D^- := \{S^-(f,\Sigma) \mid \Sigma \text{ — разбиение } [a;b]\}$$

Тогда $D^+ \geqslant D^-$.

Определение 37. Пусть фиксированы функция f и отрезок $[a;b]$, разбиения которого рассматриваются. Если

$$\sup_\Sigma S^-(f,\Sigma) = \inf_\Sigma S^+(f,\Sigma) = S,$$

то тогда f называется *интегрируемой по Риману*, а S называют *интегралом Римана функции f на отрезке* $[a;b]$. Обозначение:

$$\int_a^b f(x)dx := S$$

Лемма 59. *Пусть даны функция f и отрезок $[a;b]$. Тогда если для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиение Σ отрезка $[a;b]$, что*

$$\forall I \in \Sigma \quad \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon$$

то f интегрируема по Риману на $[a;b]$.

Доказательство. Обозначим для каждого такого ε разбиение из условия за Σ_ε. Тогда мы имеем, что

$$S^+(f,\Sigma_\varepsilon) - S^-(f,\Sigma_\varepsilon) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot (\sup_I f - \inf_I f) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon \cdot \sum_{I\in\Sigma} |I| = \varepsilon \cdot (b-a)$$

Т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ верно, что

$$\inf_\Sigma S^+(f,\Sigma) - \sup_\Sigma S^-(f,\Sigma) \leqslant S^+(f,\Sigma_{\varepsilon/(b-a)}) - S^-(f,\Sigma_{\varepsilon/(b-a)}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Следовательно

$$\inf_\Sigma S^+(f,\Sigma) = \sup_\Sigma S^-(f,\Sigma),$$

что значит, что f интегрируема по Риману. □

Лемма 60. *Пусть даны функция f и отрезок $[a;b]$. Тогда f интегрируема по Риману на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всякого разбиение Σ отрезка $[a;b]$, где $\forall I \in \Sigma \ |I| < \delta$, верно, что*

$$\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть f интегрируема по Риману на $[a;b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения Σ_1 и Σ_2 отрезка $[a;b]$, что

$$\{S^+(f, \Sigma_1); S^-(f, \Sigma_2)\} \subseteq U_{\varepsilon/4}\left(\int_a^b f(x)dx\right)$$

Пусть Σ — общее подразбиение Σ_1 и Σ_2 (например, минимальное). Тогда

$$S^+(f, \Sigma_1) \geqslant S^+(f, \Sigma) \geqslant S^-(f, \Sigma) \geqslant S^-(f, \Sigma_2)$$

Следовательно,

$$\{S^+(f, \Sigma); S^-(f, \Sigma)\} \subseteq U_{\varepsilon/4}\left(\int_a^b f(x)dx\right)$$

Заметим, что в таком случае $\sup_{[a;b]} f$ и $\inf_{[a;b]} f$ ограничены (равны вещественным значениям, а не $\pm\infty$). Поэтому $A := \operatorname{osc}_{[a;b]} f$ является вещественной величиной. Определим также $L := \min_\Sigma |I|$.

Пусть Λ — некоторое разбиение $[a;b]$, что длина всякого отрезка не больше $L \cdot \alpha$, где

$$\alpha := \min\left(1, \frac{\varepsilon \cdot |\Sigma|}{2 \cdot A \cdot L}\right) \in (0;1].$$

Тогда мы имеем, что всякий отрезок I из Λ либо является подотрезком некоторого отрезка J_I из Σ (обозначим множество таких I за Γ), либо является подотрезком объединения двух соседних отрезков K_1 и K_2 из Σ и содержит их общую границу (обозначим множество таких I за Θ). В случае I и J мы имеем, что $\operatorname{osc}_I f \leqslant \operatorname{osc}_J f$; в случае I, K_1 и K_2 мы имеем, что $\operatorname{osc}_I f \leqslant \operatorname{osc}_{K_1 \cup K_2} f \leqslant A$. Следовательно, используя только что оговоренные оценки,

$$\begin{aligned}
&\sum_{I \in \Lambda} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f \\
&\qquad = \sum_{I \in \Gamma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f + \sum_{I \in \Theta} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f \\
&\qquad \leqslant \sum_{I \in \Gamma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_{J_I} f + \sum_{I \in \Theta} |I| \cdot \operatorname*{osc}_{[a;b]} f \\
&\qquad \leqslant \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f + A \cdot \sum_{I \in \Theta} |I| \\
&\qquad \leqslant \sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f + A \cdot L \cdot \alpha \cdot |\Theta| \\
&\qquad \leqslant S^+(f, \Sigma) - S^-(f, \Sigma) + A \cdot L \cdot \alpha \cdot |\Sigma| \\
&\qquad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\qquad = \varepsilon
\end{aligned}$$

Таким образом $\delta := L \cdot \alpha$.

($\Leftarrow$) Пусть для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всякого разбиение Σ отрезка $[a;b]$, где $\forall I \in \Sigma\ |I| < \delta$, верно, что

$$\sum_{I \in \Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon$$

Тогда
$$S^+(f,\Sigma) - S^-(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot (\sup_I f - \inf_I f) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < \varepsilon$$
Т.е. для всякого $\varepsilon > 0$
$$\inf_\Sigma S^+(f,\Sigma) - \sup_\Sigma S^-(f,\Sigma) < \varepsilon$$
Следовательно
$$\inf_\Sigma S^+(f,\Sigma) = \sup_\Sigma S^-(f,\Sigma)$$
т.е. f интегрируема на $[a;b]$ по Риману.

□

Теорема 61. *Пусть f — непрерывная на $[a;b]$ функция. Тогда она интегрируема по Риману на $[a;b]$.*

Доказательство. Поскольку f непрерывна на компакте $[a;b]$, то она равномерно непрерывна, т.е.
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ \forall x \in [a;b] \qquad f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$
Для каждого такого ε получаемое δ обозначим за δ_ε. Тогда для всякого подотрезка I отрезка $[a;b]$ длины менее $\delta_{\varepsilon/2}$ верно, что $\operatorname{osc}_I f < \varepsilon$. Следовательно для любого разбиения Σ с шагом не более $\delta_{\varepsilon/2}$ (т.е. $\forall I \in \Sigma\ |I| < \delta_{\varepsilon/2}$) мы имеем, что
$$\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname{osc}_I f < [a;b] \cdot \varepsilon$$
Поэтому f интегрируема по Риману на $[a;b]$. □

Теорема 62.

1. $$\int_a^b \lambda dx = \lambda(b-a)$$
2. *Если f интегрируема по Риману на $[a;b]$, то*
$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$
3. *Если f и g интегрируемы по Риману на $[a;b]$, то*
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
4. *Если f интегрируема по Риману на $[a;b]$, то*
$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$
5. *f интегрируема по Риману на $[a;b]$ и $[b;c]$ тогда и только тогда, когда на $[c;a]$, и во всех случаях*
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Доказательство.

1. Очевидно, что для всякого разбиения Σ верно, что $S^+(f,\Sigma) = S^-(f,\Sigma) = \lambda(b-a)$, следовательно и интеграл Римана равен $\lambda(b-a)$.

2. Очевидно, что для всякого разбиения Σ верно, что $S^-(f,\Sigma) \geqslant 0$, следовательно, если интеграл Римана определён, то он неотрицателен.

3. Очевидно, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения Σ_1 и Σ_2, что

$$\sum_{I\in\Sigma_1} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad \sum_{I\in\Sigma_2} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I g < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим любое подразбиение Σ разбиений Σ_1 и Σ_2. Тогда

$$\begin{aligned}
&S^+(f+g,\Sigma) \\
&\qquad = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I (f+g) \\
&\qquad \leqslant \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f + \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I g \\
&\qquad \leqslant \sum_{I\in\Sigma_1} |I| \cdot \sup_I f + \sum_{I\in\Sigma_2} |I| \cdot \sup_I g \\
&\qquad = S^+(f,\Sigma_1) + S^+(g,\Sigma_2)
\end{aligned}$$

Аналогично мы имеем, что $S^-(f+g,\Sigma) \geqslant S^-(f,\Sigma_1) + S^-(g,\Sigma_2)$. Таким образом отметим две важные строки неравенств.

$$S^+(f,\Sigma_1) + S^+(g,\Sigma_2) \geqslant S^+(f+g,\Sigma) \geqslant S^-(f+g,\Sigma) \geqslant S^-(f,\Sigma_1) + S^-(g,\Sigma_2)$$
$$S^+(f,\Sigma_1) + S^+(g,\Sigma_2) \geqslant \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \geqslant S^-(f,\Sigma_1) + S^-(g,\Sigma_2)$$

Так мы получаем, что $S^+(f+g,\Sigma)$, $S^-(f+g,\Sigma)$ и $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ — три числа с отрезка

$$\left[S^-(f,\Sigma_1) + S^-(g,\Sigma_2); S^+(f,\Sigma_1) + S^+(g,\Sigma_2)\right],$$

длина которого меньше ε. Следовательно $f+g$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, и интеграл равен

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

4. Докажем сначала для $\lambda \geqslant 0$. Для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиение Σ отрезка $[a;b]$, что

$$\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon$$

Также имеем, что

$$S^+(\lambda f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I \lambda f = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \lambda \cdot \sup_I f = \lambda \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f = \lambda S^+(f,\Sigma)$$
$$S^-(\lambda f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_I \lambda f = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \lambda \cdot \inf_I f = \lambda \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_I f = \lambda S^-(f,\Sigma)$$

Следовательно

$$S^+(\lambda f,\Sigma) = \lambda S^+(f,\Sigma) \geqslant \lambda \int_a^b f(x)dx \geqslant \lambda S^-(f,\Sigma) = S^-(\lambda f,\Sigma)$$
$$S^+(\lambda f,\Sigma) - S^-(\lambda f,\Sigma) < \lambda\varepsilon$$

Таким образом интеграл λf по Риману на $[a;b]$ определён и равен $\lambda \int_a^b f(x)dx$.

Теперь покажем для $\lambda = -1$. Заметим, что

$$S^+(-f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I -f = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot -\inf_I f = -\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_I f = -S^-(f,\Sigma)$$
$$S^-(-f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_I -f = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot -\sup_I f = -\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f = -S^+(f,\Sigma)$$

Следовательно

$$S^+(-f,\Sigma) = -S^-(f,\Sigma) \geqslant -\int_a^b f(x)dx \geqslant -S^+(f,\Sigma) = S^-(-f,\Sigma)$$
$$S^+(-f,\Sigma) - S^-(-f,\Sigma) < \varepsilon$$

Таким образом интеграл $-f$ по Риману на $[a;b]$ определён и равен $-\int_a^b f(x)dx$.

Используя доказанные утверждения получаем, что для всякого λ верно, что

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f(x)dx &= \int_a^b \operatorname{sign}(\lambda)\cdot|\lambda| f(x)dx\\ &= \operatorname{sign}(\lambda)\int_a^b |\lambda| f(x)dx\\ &= \operatorname{sign}(\lambda)|\lambda|\int_a^b f(x)dx\\ &= \lambda\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

5. Если f интегрируема по Риману на некотором отрезке I, то $\sup_I f$ и $\inf_I f$ равны некоторым вещественным значениям (не $\pm\infty$).

   Таким образом пусть f интегрируема по Риману на $[a;b]$ и $[b;c]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения Σ_L отрезка $[a;b]$ и Σ_R отрезка $[b;c]$, что

$$\sum_{I\in\Sigma_L} |I| \operatorname*{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \sum_{I\in\Sigma_R} |I| \operatorname*{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Следовательно, если определить $\Sigma := \Sigma_L \cup \Sigma_R$,

$$S^+(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \sup_I f = \sum_{I\in\Sigma_L} |I| \sup_I f + \sum_{I\in\Sigma_R} |I| \sup_I f \geqslant \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

   По аналогии получаем, что

$$S^+(f,\Sigma) \geqslant \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \geqslant S^-(f,\Sigma)$$

   При этом

$$S^+(f,\Sigma) - S^-(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \operatorname*{osc}_I f = \sum_{I\in\Sigma_L} |I| \operatorname*{osc}_I f + \sum_{I\in\Sigma_R} |I| \operatorname*{osc}_I f < \varepsilon$$

Таким образом f интегрируема по Риману на $[a;c]$, а интеграл равен $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$. Пусть теперь f интегрируема на $[a;c]$. Тогда для всякого разбиения Σ отрезка $[a;c]$ мы можем рассмотреть

$$\Sigma_L := \{I \cap [a;b] \mid I \in \Sigma\}$$

и тогда

$$\sum_{I\in\Sigma_L} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f$$

Следовательно есть разбиения со сколь угодно маленькой осцилляцией f на них, а значит f интегрируема на $[a;b]$; аналогично и на $[b;c]$. А по предыдущим рассуждениям достигается равенство в тождестве интегралов.

□

Теорема 63. *Пусть дана функция f, а $M = \sup_{[a;b]} |f|$. Тогда*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant M(b-a)$$

Доказательство. Очевидно, что при разбиении $\Sigma := \{[a;b]\}$

$$S^+(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f = (b-a) \cdot \sup_{[a;b]} f$$
$$S^-(f,\Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_I f = (b-a) \cdot \inf_{[a;b]} f$$

Следовательно

$$M(b-a) \geqslant (b-a)\sup_{[a;b]} f = S^+(f,\Sigma) \geqslant \int_a^b f(x)dx \geqslant S^-(f,\Sigma) = (b-a)\sup_{[a;b]} f \geqslant -M(b-a)$$

откуда следует требуемое. □

Теорема 64. *Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

является первообразной f.

Доказательство. Рассмотрим какие-то x и y, что $a \leqslant x < y \leqslant b$. Тогда

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt$$

Следовательно, рассматривая $\Sigma := \{[x;y]\}$,

$$\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \inf_I f \leqslant F(y) - F(x) \leqslant \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f$$
$$(y-x) \cdot \inf_{[x;y]} f \leqslant F(y) - F(x) \leqslant (y-x) \cdot \sup_{[x;y]} f$$
$$\inf_{[x;y]} f \leqslant \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leqslant \sup_{[x;y]} f$$

Немного меняя обозначения, получаем, что для всякого $\varepsilon \in [a-x; b-x] \setminus \{0\}$

$$\inf_{U_{|\varepsilon|}(x)} f \leqslant \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \leqslant \sup_{U_{|\varepsilon|}(x)} f$$

Заметим, что по непрерывности f

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf_{U_\varepsilon(x)} f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{U_\varepsilon(x)} f = f(x)$$

Следовательно

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} = f(x)$$

Иначе говоря $F'(x) = f(x)$. Таким образом $F' = f$. □

Следствие 64.1 (формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть F — первообразная непрерывной на $[a;b]$ функции f. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Заметим, что $G(x) := \int_a^x f(t)dt$ — первообразная f. Следовательно $G(x) - F(x) = C$ на $[a;b]$. Значит

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) = G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

□

Теорема 65. *Пусть $(f_n)_{n=0}^\infty$ — последовательность интегрируемых по Риману на $[a;b]$ функций — равномерно сходится к f. Тогда f интегрируема по Риману на $[a;b]$, и*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Доказательство. Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для всяких $n, m > N$ верно, что

$$|f_n - f_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)};$$

следовательно для всякого $n > N$ верно, что

$$|f - f_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

При этом существует такое разбиение Σ отрезка $[a;b]$, что

$$S^+(f_{N+1}, \Sigma) - S^-(f_{N+1}, \Sigma) = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом для всякого $n > N$ верно, что

$$\begin{aligned} &S^+(f_n, \Sigma) \\ &\qquad = \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f_n \leqslant \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3(b-a)} + \sup_I f_{N+1} \right) = \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \sup_I f_{N+1} \\ &\qquad = S^+(f_{N+1}, \Sigma) + \frac{\varepsilon}{3}; \end{aligned}$$

аналогично $S^-(f_n,\Sigma) \geqslant S^-(f_{N+1},\Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$. Аналогично данные утверждения верны и для f (вместо f_n).

Заметим, что

$$S^+(f_{N+1},\Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} \geqslant S^+(f_n,\Sigma) \geqslant \int_a^b f_n(x)dx \geqslant S^-(f_n,\Sigma) \geqslant S^-(f_{N+1},\Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$$
$$S^+(f_{N+1},\Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} \geqslant S^+(f,\Sigma) \geqslant S^-(f,\Sigma) \geqslant S^-(f_{N+1},\Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$$

Таким образом

$$S^+(f,\Sigma) - S^-(f,\Sigma) < \varepsilon,$$

следовательно f интегрируема по Риману на $[a;b]$. Таким образом мы имеем, что

$$S^+(f_{N+1},\Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} \geqslant \int_a^b f_n(x)dx \geqslant S^-(f_{N+1},\Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$$
$$S^+(f_{N+1},\Sigma) + \frac{\varepsilon}{3} \geqslant \int_a^b f(x)dx \geqslant S^-(f_{N+1},\Sigma) - \frac{\varepsilon}{3}$$

т.е. для всех $n > N$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Это значит, что

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

□

Лемма 66. *Если f и g интегрируемы по Риману на $[a;b]$, то и $f \cdot g$.*

Доказательство. Заметим, что, поскольку f и g интегрируемы по Риману, есть такие константы $C_f > 0$ и $C_g > 0$, что $|f| \leqslant C_f$ и $|g| \geqslant C_g$. Следовательно для всяких $x, y \in [a;b]$

$$\begin{aligned}
&|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\
&\qquad \leqslant |f(x)g(x) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\
&\qquad\qquad \leqslant C_g|f(x) - f(y)| + C_f|g(x) - g(y)|
\end{aligned}$$

Значит для всякого отрезка I верно, что

$$\operatorname*{osc}_I f \cdot g \leqslant C_g \operatorname*{osc}_I f + C_f \operatorname*{osc}_I g$$

Следовательно для всякого разбиения Σ отрезка $[a;b]$

$$\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f \cdot g \leqslant C_g \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f + C_f \sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I g$$

Вспомним, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть разбиения Σ_f и Σ_g отрезка $[a;b]$, что

$$\sum_{I\in\Sigma_f} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f < \frac{\varepsilon}{2C_g} \qquad\qquad \sum_{I\in\Sigma_f} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I g < \frac{\varepsilon}{2C_f}$$

Рассмотрим общее подразбиение Σ разбиений Σ_f и Σ_g. Для него верны предыдущие предыдущие неравенства. Следовательно

$$\sum_{I\in\Sigma} |I| \cdot \operatorname*{osc}_I f \cdot g < C_g \frac{\varepsilon}{2C_g} + C_f \frac{\varepsilon}{2C_f} = \varepsilon$$

Поэтому $f \cdot g$ интегрируема по Риману на $[a;b]$. □

4.3 У чего есть выражаемая первообразная?

Лемма 67.

1.
$$\int 0 = C$$

2.
$$\int a_0 + \dots + a_n x^n = C + a_0 x + \dots + a_n x^{n+1}$$

3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x > 0$
$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

4. $\forall x > 0$
$$\int \frac{1}{x} = \ln(x) + C$$

5.
$$\int e^x = e^x + C$$

6.
$$\int \sin(x) = -\cos(x) + C$$
$$\int \cos(x) = \sin(x) + C$$

7.
$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

8.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

Теорема 68. *Следующие виды функций имеют выражаемую первообразную:*

1. *рациональные функции;*
2. *рациональные функции от* $\sin$ *и* $\cos$*;*
3. *рациональные функции от* $\sinh$ *и* $\cosh$*;*
4. *рациональные функции от* x *и* $\sqrt{ax^2+bx+c}$*, где* $a \neq 0$.

Доказательство.

1. Каждая рациональная функция представляется в виде суммы полиномов, членов вида $\frac{k}{(x+a)^n}$ и членов вида $\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$. Покажем, что каждый из них имеет выражаемую первообразную.

   - Первообразная многочлена очевидна.
   - $$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a) + C$$
   - Для всякого $n > 1$
   $$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$$
   - $$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{tg}^{-1}(x)$$
   - $$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$
   - Для всякого $n > 1$
   $$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}}$$

- Заметим, что

$$\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)' = \frac{1}{(x^2+1)^n} - 2n\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{2n}{(x^2+1)^{n+1}} - \frac{2n-1}{(x^2+1)^n}$$

  Следовательно

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

  Таким образом несложно понять по индукции, что $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ для $n > 1$ есть некоторая сумма рациональных функций и tg^{-1}.

- Линейными заменами задача нахождения первообразных у $\frac{1}{(x+a)^n}$ и $\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$ сводится к нахождению первообразных $\frac{1}{x^n}$, $\frac{1}{(x^2+1)^n}$ и $\frac{x}{(x^2+1)^n}$.

2. Заметим, что

$$\sin(x) = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}(x/2)^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-\operatorname{tg}(x/2)^2}{1+\operatorname{tg}(x/2)^2} \qquad dx = \frac{2d(\operatorname{tg}(x/2))}{1+\operatorname{tg}(x/2)^2}$$

   Следовательно задача сводится к нахождению первообразной рациональной функции при помощи подстановки $t := \operatorname{tg}(x)$.

3. С одной стороны это можно свести к предыдущей задаче заменой $t := ix$. С другой стороны можно заметить, что

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad dx = \frac{d(e^x)}{e^x}$$

   Следовательно задача сводится к нахождению первообразной рациональной функции при помощи подстановки $t := e^x$.

4. Линейными подстановками можно свести задачу к нахождению первообразной рациональной функции от y и $\sqrt{\pm y^2 \pm 1}$ или только от y.

   - Случай рациональной функции только от y уже был разобран.
   - Если нам дана рациональная функция от y и $\sqrt{1-y^2}$, то заменой $t := \sin^{-1}(y)$ она сводится к рациональной функции от sin и cos.
   - Если нам дана рациональная функция от y и $\sqrt{y^2-1}$, то заменой $t := \cosh^{-1}(y)$ она сводится к рациональной функции от sinh и cosh.
   - Если нам дана рациональная функция от y и $\sqrt{1+y^2}$, то заменой $t := \sinh^{-1}(y)$ она сводится к рациональной функции от sinh и cosh.

□

5 Логарифм? Полезности?? Что???

Теорема 69. *Пусть дана функция $\varphi : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, что*

- $\forall a, b \in (0; +\infty) \quad \varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$
- φ *монотонна.*

Тогда верны следующие утверждения:

1. $\varphi(1) = 0$;
2. $\forall a \in (0; +\infty), n \in \mathbb{N} \quad \varphi(a^n) = n\varphi(a)$;
3. $\forall a \in (0; +\infty) \quad \varphi(a^{-1}) = -\varphi(a)$;
4. $\forall a \in (0; +\infty), q \in \mathbb{Q} \quad \varphi(a^q) = q\varphi(a)$;
5. φ *непрерывна;*
6. φ *бесконечно дифференцируема;*
7. $\varphi'(x) = \frac{C}{x}$ *для некоторого* $C \in \mathbb{R}$;
8. *все такие* ϕ *имеют вид* $\int_1^x \frac{Cdt}{t}$ *для некоторого* $C > 0$ *и наоборот: любая такая функция удовлетворяет условиям на* ϕ.

Доказательство.

1. $$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) - \varphi(1) = \varphi(1) - \varphi(1) = 0.$$

2. Докажем по индукции по n. База при $n = 0$ и $n = 1$ очевидна. Весь шаг:
$$\varphi(a^{n+1}) = \varphi(a^n) + \varphi(a) = n\varphi(a) + \varphi(a) = (n+1)\varphi(a).$$

3. $$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a \cdot a^{-1}) - \varphi(a) = \varphi(1) - \varphi(a) = -\varphi(a)$$

4. Пусть $q = \frac{kn}{m}$, где $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, а $k = \pm 1$. Тогда
$$m\varphi(a^q) = \varphi(a^{mq}) = \varphi(a^{kn}) = k\varphi(a^n) = kn\varphi(a) = qm\varphi(a)$$
Следовательно
$$\varphi(a^q) = q\varphi(a)$$

5. Заметим, что $\lim_{x \to 1^+} \varphi(x)$ в связи с монотонностью и ограниченностью (например, значением $\varphi(1/2)$) функции φ определён, значит равен некоторому b. Тогда
$$2b = \lim_{x \to 1^+} 2\varphi(x) = \lim_{x \to 1^+} \varphi(x^2) = \lim_{y \to 1^+} \varphi(y) = b$$
значит $b = 0$. Следовательно
$$\lim_{x \to 1^-} \varphi(x) = -\lim_{x \to 1^-} \varphi(x^{-1}) = -\lim_{y \to 1^+} \varphi(y) = 0$$
Таким образом φ непрерывна в 1. Следовательно
$$\lim_{x \to y} \varphi(x) = \varphi(y) + \lim_{x \to y} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \varphi(y) + \lim_{\alpha \to 1} \varphi(\alpha)$$
т.е. φ непрерывна во всех точках $(0; +\infty)$.

6. Рассмотрим
$$\Phi := (0;+\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \varphi(t)dt$$
Тогда мы имеем, что Φ — первообразная, поскольку φ непрерывна. А тогда если φ имеет $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ производных, то Φ имеет $n+1$ производную. Заметим, что
$$\Phi(2x) - \Phi(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)dt = x\int_x^{2x} \varphi\left(\frac{t}{x}\right) d\frac{t}{x} + x\int_x^{2x} \varphi(x)d\frac{t}{x} = Cx + \varphi(x)x$$
где
$$C := \int_1^2 \varphi(t)dt$$
Следовательно
$$\varphi(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$$
Таким образом, если Φ имеет $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ производных, то φ тоже. Значит Φ и ϕ бесконечно дифференцируемы.

7. Пусть фиксировано некоторое $y > 0$. Следовательно
$$y\varphi'(xy) = (\varphi(xy))' = (\varphi(x) + \varphi(y))' = \varphi'(x)$$
а значит, если подставить $y = x^{-1}$
$$\varphi'(x) = \frac{\varphi'(1)}{x}$$
Таким образом определяя $C := \varphi'(1)$ имеем, что
$$\varphi'(x) = \frac{C}{x}$$

8. Действительно, если есть некоторое ϕ, то ϕ и $\int_1^x \frac{\phi'(1)dt}{t}$ являются первообразными $\frac{\phi'(1)}{x}$, значит отличаются на константу. При этом в 1 они обе равны 0, значит функции совпадают.

   Теперь же покажем, что $\psi(x) := \int_1^x \frac{Cdt}{t}$ является корнем функционального уравнения.

   - Поскольку $\frac{C}{x}$ — функция одного знака, то ψ монотонна.
   - $$\begin{aligned}\psi(xy) &= \int_1^{xy} \frac{Cdt}{t} & &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_x^{xy} \frac{Cdt}{t} & \\ &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_x^{xy} \frac{Cd(t/x)}{(t/x)} & &= \int_1^x \frac{Cdt}{t} + \int_1^y \frac{Cds}{s} & &= \psi(x) + \psi(y)\end{aligned}$$

□

Определение 38. *Натуральный логарифм* — функция
$$\ln : (0;+\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$$
Экспонента — функция
$$\exp : \mathbb{R} \to (0;+\infty), x \mapsto \ln^{-1}(x)$$

Теорема 70.

1. exp *корректно определена;*
2. exp *непрерывна;*
3. exp *бесконечно дифференцируема, и каждая производная* exp *равна* exp*;*
4. $\exp(0) = 1$*;*
5. $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$*;*
6. $$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

Доказательство.

1. Поскольку ln монотонна, то всякое значение из области значений ln — всё $\mathbb{R}$ — принимается единожды. Следовательно exp корректно определена.
2. Поскольку всякая монотонная биекция из интервала в интервал является непрерывной функцией, то и exp непрерывна на всяком интервале.
3. По свойству дифференцирования
$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x)$$
Таким образом exp дифференцируема раз, и при дифференцировании не меняется. Следовательно exp бесконечно дифференцируема.
4. Следует из того, что $\ln(1) = 0$.
5. Следует из того, что $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, подстановкой $x := \ln^{-1}(a)$ и $y := \ln^{-1}(b)$.
6. Вспомним, что по теореме 49 для всякого $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ есть $\xi_n \in (0; x)$, что
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \frac{\exp^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{\exp(\xi_n) x^{n+1}}{(n+1)!}$$
Вспомним также, что
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \overset{\text{def}}{=} \lim \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)_{n=0}^{\infty}$$
Чтобы показать, что предел этой последовательности реально совпадает с $\exp(x)$, покажем, что
$$\lim \left(\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)_{n=0}^{\infty} = 0$$
Действительно,
$$\left(\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \right)_{n=0}^{\infty} = \left(\left| \frac{\exp(\xi_n) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \right)_{n=0}^{\infty} \leqslant \exp(|x|) \left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right)_{n=0}^{\infty}$$

Пусть $N = \lceil 2|x| \rceil$. Тогда для всякого $n \geqslant N$ имеем, что

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^N}{N!} \prod_{k=N+1}^{n+1} \frac{|x|}{k} < \frac{|x|^N}{N!} \prod_{k=N+1}^{n+1} \frac{1}{2} = \frac{|x|^N \cdot 2^{N-1}}{N!} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Следовательно, с момента N последовательность

$$\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right)_{n=0}^{\infty}$$

сходится к 0 немедленнее, чем геометрическая прогрессия, а тогда и

$$\lim \left(\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)_{n=0}^{\infty} = 0$$

□

Теорема 71. *1.* $(a^x)' = \ln(a)a^x$ *2.* $(x^a)' = ax^{a-1}$

Доказательство.

1. $$(a^x)' = \exp(x \ln(a))' = (x \ln(a))' a^x = \ln(a) a^x$$

2. $$(x^a)' = \exp(a \ln(x))' = (a \ln(x))' x^a = \frac{a}{x} x^a = a x^{a-1}$$

□

Теорема 72. *Пусть* $f : (a; b) \to \mathbb{R}$, $f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)}$ *определены на* $(t - \delta; t + \delta)$ *для некоторого* $\delta > 0$. *Тогда для всякого* $x \in U_\delta(t)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k + \frac{1}{n!} \int_t^x f^{(n+1)}(s)(x - s)^n ds$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k$$

Тогда мы имеем, что $g(t) = g'(t) = g^{(2)}(t) = \cdots = g^{(n)}(t) = 0$, а $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$. Тогда нужно показать, что

$$g(x) = \frac{1}{n!} \int_t^x f^{(n+1)}(s)(x - s)^n ds$$

Докажем это по индукции по n.

База. $n = 0$. Тогда

$$g(x) = g(t) + \int_t^x g'(s) ds = \frac{1}{n!} \int_t^x g^{(n+1)}(s)(x - s)^n ds$$

Шаг. Пусть утверждение верно для n докажем для $n+1$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{n!}\int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^n ds \\
&= \frac{-g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)}}{(n+1)!}\Bigg|_x^t + \frac{1}{(n+1)!}\int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)} ds \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_t^x g^{(n+1)}(s)(x-s)^{(n+1)} ds
\end{aligned}$$

$\square$

5.1 Формулы Валлиса и Стирлинга

Теорема 73 (формула Валлиса)**.**

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots.$$

Доказательство. Для всякого $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ определим

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx$$

Заметим, что $\sin(x)^{n+1} < \sin(x)^n$ на $(0;\frac{\pi}{2})$, следовательно $I_n > I_{n+1}$. Также

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n+2} dx \\
&= -\sin(x)^{n+1}\cos(x)\big|_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin(x)^n\cos(x)^2 dx \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin(x)^n(1-\sin(x)^2)dx \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin(x)^n dx - (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin(x)^{n+2}dx \\
&= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

Следовательно $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$. При этом понятно, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$, а $I_1 = 1$. Таким образом для всякого $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 &&= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \\
I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1 &&= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}
\end{aligned}$$

Вспомним, что $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$. Следовательно

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$
$$\frac{(2n)!!\cdot(2n)!!}{(2n-1)!!\cdot(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2} < \frac{(2n)!!\cdot(2n-2)!!}{(2n-1)!!\cdot(2n-1)!!}$$
$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n}$$

Заметим, что в последнем неравенстве отношение значений слева и справа сходится к 1, значит

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

□

Теорема 74 (формула Стирлинга)**.**

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Доказательство. Вспомним, что для $x\in(-1;1)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\qquad\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots$$

Следовательно

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\cdots=2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\right)$$

Пусть $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Подставим $x=\frac{1}{2n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)&=\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\\&=1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\in\left(1;1+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}\right)=\left(1;1+\frac{1}{12n(n+1)}\right)\end{aligned}$$

Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}:=\left(\frac{n!\cdot e^n}{n^{n+1/2}}\right)_{n=1}^{\infty}$. Заметим, что

$$\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=\ln\left(\frac{(n+1)\cdot e}{(n+1)^{n+3/2}/n^{n+1/2}}\right)=\ln\left(\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}}\right)=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Таким образом $\ln(x_{n+1}/x_n)\in(0;\frac{-1}{12n(n+1)})$. Следовательно $\ln(x_n)<\ln(x_1)$ и

$$\begin{aligned}\ln(x_n)-\ln(x_1)&>\frac{-1}{12n(n-1)}+\frac{-1}{12(n-1)(n-2)}+\cdots+\frac{-1}{12\cdot2\cdot1}\\&=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)\\&=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-1\right)\end{aligned}$$

Значит $\lim_{n\to\infty}\ln(x_n)\geqslant\frac{-1}{12}$ (предел убывающей ограниченной последовательности), а тогда $\lim_{n\to\infty}x_n$ определён и равен $\alpha>0$. Значит

$$n!\sim\alpha\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Теперь нужно показать, что $\alpha=\sqrt{2\pi}$. По формуле Валлиса

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}&\sim2\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}&&=2\frac{((2n)!!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}&&=2\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\\&\sim2^{2n+1}\frac{\alpha^2n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\alpha\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}&&=\frac{2^{2n+1}\alpha^2n}{\alpha(2n)2^{2n}}=\alpha\end{aligned}$$

Таким образом $\alpha=\sqrt{2\pi}$. □

Замечание 7. Из оценки $\ln(x_n) - \ln(x_1) > \frac{1}{12}(\frac{1}{n} - 1)$ следует, что

$$\ln(x_n) - \ln(\alpha) = \lim_{m\to\infty} \ln(x_n) - \ln(x_m) = \sum_{k=n}^{\infty} \ln(x_k) - \ln(x_{k+1})$$

$$< \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{12k(k+1)} = \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{12n}$$

Таким образом $x_n = \alpha(1 + O(\frac{1}{n}))$. А значит

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Лемма 75. *Пусть дана функция $f \geqslant 0$, невозрастающая на $[0; +\infty)$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда $\int_0^{\infty} f(x)dx$ сходится.*

Доказательство.

(⇒)

$$\int_0^N f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} f(k)$$

Следовательно, поскольку $\int_0^A f(x)dx$ возрастает по A, но ограничена сверху значением $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$, то $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

(⇐)

$$\sum_{k=0}^{N} f(x) \leqslant f(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)dx = f(0) + \int_0^N f(x)dx$$

Следовательно, поскольку $\sum_0^N f(x)dx$ возрастает по N, но ограничена сверху значением $f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)dx$, то $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ сходится.

□

Теорема 76.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

для некоторой константы γ.

Определение 39. Константа γ из прошлой теоремы называется *константой Эйлера* или *константой Эйлера-Маскерони.*

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1)$$

Заметим, что

$$\ln(k-1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \cdots$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+\frac{1}{4k^4}+\cdots\right)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{k^3}+\cdots<\frac{1}{2k^2}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\cdots\right)=\frac{1}{2k(k-1)}=\frac{1}{2(k-1)}-\frac{1}{2k}$$

то

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+\frac{1}{4k^4}+\cdots\right)\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2(k-1)}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

Значит

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+\frac{1}{4k^4}+\cdots\right)$$

— ряд положительных значений, ограниченный сверху значением $1/2$, следовательно сходится; пусть к некоторой константе λ. Значит мы получаем, что

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+\frac{1}{4k^4}+\cdots\right)=\lambda-o(1)$$

и следовательно

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1-\lambda+o(1)=\gamma+o(1)$$

□

Замечание 8. Таким рассуждением мы получаем, что ряд

$$\sum_{k,l\geqslant 2}\frac{1}{l\cdot k^l}$$

сильно сходится и равен $1-\gamma$. Следовательно

$$1-\gamma=\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\zeta(l)-1}{l}$$

5.2 Бернулли обернули

Определение 40. Определим последовательность чисел Бернулли $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ как последовательность, чья экспоненциальная производящая функция есть $\frac{x}{\exp(x)-1}$, т.е. на уровне формальных степенных рядов верно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!}=\frac{x}{\exp(x)-1}$$

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	$\cdots$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	$\cdots$

Лемма 77.

$$B_0 = 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n+1}{k} = 0$$

Доказательство. На уровне формальных рядов

$$\frac{\exp(x) - 1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

Следовательно

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k\right)$$

Значит, рассматривая коэффициенты при степенях x, получаем, что

$$B_0 = 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} = 0$$

Домножая последнее равенство на $(n+1)!$, получаем, что

$$\sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n+1}{k} = 0$$

$\square$

Лемма 78. *Ряд Тейлора* $\frac{x}{\exp(x)-1}$ *при* $x = 0$ *равен* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$ *(если доопределить правильно функцию в нуле).*

Доказательство. Определим

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x = 0 \\ \frac{\exp(x)-1}{x} & \text{иначе} \end{cases} \qquad g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Заметим, что f просто задаётся рядом $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$ и всюду положительна, поэтому g определена корректно.

Тогда очевидно равенство $f \cdot g = 1$. Продифференцируем его $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ раз:

$$0 = (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

Подставляя в последнее 0 получаем, что

$$g^{(0)}(0) = 1 \qquad \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(0) \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(0) \binom{n}{n-k} \frac{1}{n-k+1} = 0$$

Тем самым последовательность $(g^{(n)}(0))_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и $(B_n)_{n=0}^{\infty}$, значит они совпадают. А это значит, что ряд Тейлора g есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

$\square$

Лемма 79. *Для всякого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ верно, что $B_{2n+1} = 0$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{x}{\exp(x)-1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\exp(x)+1}{\exp(x)-1} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\exp(x/2)+\exp(-x/2)}{\exp(x/2)-\exp(-x/2)} = \frac{x}{2} \cdot \coth(x/2)$$

При этом $\frac{x}{2}\operatorname{cth}(x/2)$ является чётной функцией, значит производные всех нечётных степеней равны 0, откуда и получаем, что $B_{2n+1} = 0$.[1] □

Определение 41. Многочлены Бернулли — такая последовательность многочленов $(B_n(t))_{n=0}^{\infty}$, что на уровне формальных рядов (теперь от x и y)

$$\frac{x\exp(yx)}{\exp(x)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)x^n}{n!}$$

Замечание. Определение корректно, поскольку данный формальный ряд по сути является произведением рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}x^n$ и $\exp(yx)$, что значит, что в каждом мономе степень x не менее степени y, значит формальные ряды при каждой степени x в разложении $\frac{x\exp(yx)}{\exp(x)-1}$ — ряды $B_n(y)$ — получаются конечными, т.е. являются просто многочленами.

Следствие 79.1. $B_n(0) = B_n$.

Лемма 80.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(y) = (n+1)y^n$$

Доказательство. По определению

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xy)^k}{k!}\right) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{(l+1)!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(y)x^m}{m!}\right)$$

Рассматривая коэффициенты при степенях x получаем, что

$$\frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k+1)!} \cdot \frac{B_k(y)}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(y)$$

Откуда мы и получаем требуемое равенство. □

Следствие 80.1. $\deg(B_n) = n$.

Лемма 81. $B'_{n+1} = (n+1)B_n$.

Доказательство. Давайте продифференцируем по y равенство (на уровне формальных рядов)

$$\frac{x\exp(yx)}{\exp(x)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)}{n!} x^n$$

Получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1}(y)}{(n-1)!} x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)}{n!} x^n = \frac{x^2\exp(yx)}{\exp(x)-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B'_n(y)}{n!} x^n$$

Следовательно $B'_n = nB_{n-1}$. □

[1] Но для B_1 мы получаем равенство $B_1 + \frac{1}{2} = 0$, поэтому только для $n = 0$ рассуждение неверно.

Следствие 81.1. $B_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} y^k$.

Доказательство.

$$B_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{n-k}(0) n!}{k!(n-k)!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k$$

□

Лемма 82. $B_n(y) = B_n(1-y)(-1)^n$.

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-y)x^n}{n!} = \frac{x \exp((1-y)x)}{\exp(x)-1} = \frac{x \exp(-yx)}{1-\exp(-x)}$$
$$= \frac{-x \exp(y(-x))}{\exp(-x)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n(y) x^n}{n!}$$

Следовательно, выделяя полиномы от y при степенях x, получаем искомое равенство. □

Следствие 82.1. $\int_0^1 B_n(y)dy = 0$

Доказательство.

$$\int_0^1 B_n(y)dy = \left.\frac{B_{n+1}(y)}{n+1}\right|_0^1 = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = 0$$

□

Теорема 83 (формула Эйлера-Маклорена)**.** *Пусть даны целые a и b и функция f, которая имеет m ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) производных на $[a;b]$. Тогда*

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\bigg|_a^b + R_m \qquad R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)dx$$

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать формулу для $a = 0$ и $b = 1$, а $\{x\}$ можно заменить на x. Также будем доказывать её по индукции по m.

База. $m = 1$. Тогда $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Следовательно по интегрированию по частям (по функциям f и B_1)

$$\frac{f(1)+f(0)}{2} = f(x)\left(x - \frac{1}{2}\right)\bigg|_0^1 = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx$$

Таким образом

$$f(0) = \int_0^1 f(x)dx + \frac{-1/2}{1!} f(x)|_0^1 + R_1$$

Шаг. Пусть утверждение для m верно; покажем верность для $m+1$. Заметим, что нужно показать, что

$$R_m = \frac{B_{m+1}}{(m+1)!} f^{(m)}(x)\bigg|_0^1 + R_{m+1}$$

Интегрируя по частям по функциям $f^{(m)}(x)$ и $B_{m+1}(x)/(m+1)!$, получаем, что

$$(-1)^{m+1}\int_0^1 \frac{B'_{m+1}(x)}{(m+1)!}f^{(m)}(x)dx = (-1)^{m+1}\left.\frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!}f^{(m)}(x)\right|_0^1 + (-1)^{m+2}\int_0^1 \frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!}f^{(m+1)}(x)dx$$
$$= (-1)^{m+1}\left.\frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!}f^{(m)}(x)\right|_0^1 + R_{m+1}$$

Поскольку $B'_{m+1}(x) = (m+1)B_m(x)$, то получаем

$$R_m = (-1)^{m+1}\left.\frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!}f^{(m)}(x)\right|_0^1 + R_{m+1}$$

Следовательно осталось показать, что $(-1)^{m+1}B_{m+1} = B_{m+1}(0) = B_{m+1}(1)$. Заметим, что уже есть $B_{m+1} = B_{m+1}(0) = (-1)^{m+1}B_{m+1}(1)$. Осталось заметить, что при нечётных m мы имеем $(-1)^{m+1} = 1$, а при чётных — $B_{m+1} = 0$, так как $m+1 \geqslant 2$. Отсюда следует искомое. □

Пример 3. Давайте посчитаем $\sum_{k=1}^{n-1} k^d$. Для этого подставим в формулу Эйлера-Маклорена функцию $f(x) := x^d$, отрезок $[a;b] := [0;n]$ и $m = d+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k^d &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \\
&= \int_0^n f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} \left. f^{(k-1)}(x)\right|_0^n + (-1)^{m+1}\int_0^n \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)dx \\
&= \left.\frac{x^{d+1}}{d+1}\right|_0^n + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!}\left.\frac{d!}{(d-k+1)!}x^{d-k+1}\right|_0^n + (-1)^{m+1}\int_0^n \frac{B_m(\{x\})}{m!}\cdot 0 \cdot dx \\
&= \frac{n^{d+1}}{d+1} + \sum_{k=1}^{d+1} B_k \frac{d!}{k!(d+1-k)!} n^{d+1-k} \\
&= \frac{1}{d+1}\sum_{k=0}^{d+1} B_k \binom{d+1}{k} n^{d+1-k}
\end{aligned}$$

5.3 Некоторые методы интегрирования и их результаты

Рассмотрим неформальные примеры и докажем теоремы, их формализующие.

Пример 4. Несложно понять, что

$$K := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

сходится. Заметим также, что для всякого $t > 0$

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-(ty)^2}d(ty) = \int_0^{+\infty} te^{-y^2t^2}dy$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
K^2 &= K \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt & &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cdot K \cdot dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left(\int_0^{+\infty} t e^{-t^2 y^2} dy \right) dt & &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t e^{-t^2(y^2+1)} dy \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t e^{-t^2(y^2+1)} dt \right) dy & &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)} \frac{d(t^2)}{2} \right) dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-v(y^2+1)} dv \right) dy & &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left. \frac{e^{-v(y^2+1)}}{-(y^2+1)} \right|_0^{+\infty} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1} & &= \frac{1}{2} \arctan(y)|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

откуда $K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Пример 5. Рассмотрим функцию

$$I(a) := \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Тогда

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} (-x) e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} -e^{-ax} \sin(x) dx = \left. \frac{e^{-ax}(a \sin(x) + \cos(x))}{a^2+1} \right|_0^{+\infty} = -\frac{1}{a^2+1}$$

Значит $I(a) = C - \arctan(a)$. Но поскольку

$$\lim_{a \to \infty} I(a) + \arctan(a) = \lim_{a \to \infty} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x} dx + \arctan(a) = 0 + \frac{\pi}{2}$$

то $C = \frac{\pi}{2}$, а значит

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

Пример 6.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} dx &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx & &= \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy \\
&= \int_a^b \frac{dy}{y+1} & &= \ln(b+1) - \ln(a+1) \\
&= \ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right)
\end{aligned}$$

Пример 7. Заметим, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy = \left. \frac{y}{x^2+y^2} \right|_0^{+\infty} = -\frac{1}{x^2+1}$$

Таким образом

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{но} \qquad \int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right) dy = \frac{\pi}{4}$$

Замечание. Этот пример говорит о том, что не всегда можно переставлять интегралы местами.

Теорема 84. *Пусть даны непрерывные функции a и b на $[x_0; x_1]$. Пусть также дана непрерывная функция $f(x,t)$ на $\{(x,t) \mid t \in [a(x); b(x)] \land x \in [x_0; x_1]\}$. Тогда $\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$ непрерывна.*

Доказательство.

$$\lim_{y\to x} \int_{a(y)}^{b(y)} f(y,t)dt = \lim_{y\to x} \int_{a(y)}^{a(x)} f(y,t)dt + \lim_{y\to x} \int_{b(x)}^{b(y)} f(y,t)dt + \lim_{y\to x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y,t)dt$$

Лемма 84.1.

$$\lim_{y\to x} \int_{b(x)}^{b(y)} f(y,t)dt = 0$$

Доказательство. Заметим, что

$$\left| \int_{b(x)}^{b(y)} f(y,t)dt \right| \leqslant |b(y) - b(x)| \cdot \max_{t\in[b(x);b(y)]} |f(y,t)|$$

Заметим, что из непрерывности f следует, что

$$\max_{t\in[b(x);b(y)]} |f(y,t)| \leqslant \max_{\substack{y\in[x-\varepsilon;x+\varepsilon]\\ t\in[b(x);b(y)]}} |f(y,t)|$$

Но при этом $\lim_{y\to x} |b(y) - b(x)| = 0$, следовательно

$$\lim_{y\to x} \left| \int_{b(x)}^{b(y)} f(y,t)dt \right| = 0$$

откуда и получается требуемое. □

Лемма 84.2.

$$\lim_{y\to x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y,t)dt = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$$

Доказательство. Поскольку f непрерывна, то непрерывна и $f(y,t) - f(x,t)$. Значит

$$\lim_{y\to x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y,t)dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = \lim_{y\to x} \int_{a(x)}^{b(x)} (f(y,t) - f(x,t))dt$$
$$\leqslant \lim_{y\to x} |b(x) - a(x)| \max_{t\in[a(x);b(x)]} |f(y,t) - f(x,t)| \leqslant |b(x) - a(x)| \lim_{\varepsilon\to 0} \max_{\substack{y\in[x-\varepsilon;x+\varepsilon]\\ t\in[a(x);b(x)]}} |f(y,t) - f(x,t)| = 0$$

□

Объединяя всё вышесказанное, получаем требуемое. □

Теорема 85 (интегральное правило Лейбница, “дифференцирование под знаком интеграла”). *Пусть даны функции a и b на $[x_0; x_1]$ с непрерывными производными. Пусть также дана функция $f(x,t)$, что f и $\frac{\partial}{\partial x} f$ непрерывны на множестве $\{(x,t) \mid t \in [a(x); b(x)] \land x \in [x_0; x_1]\}$. Тогда для всякого $x \in [x_0; x_1]$*

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt \overset{\text{def}}{=} \lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{a(x+\delta)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt}{\delta}$$
$$= \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\int_{a(x+\delta)}^{a(x)} f(x+\delta,t)dt}{\delta} + \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{\delta} + \frac{\int_{a(x)}^{b(x)}(f(x+\delta,t)-f(x,t))dt}{\delta}\right)$$

Лемма 85.1.

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{\delta} = f(x,b(x))\cdot\frac{d}{dx}b(x)$$

Доказательство.

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{b(x+\delta)-b(x)}{\delta}\cdot\frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{b(x+\delta)-b(x)}$$
$$= \frac{d}{dx}b(x)\cdot\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{b(x+\delta)-b(x)}$$

Заметим, что

$$\min_{t\in[b(x);b(x+\delta)]} f(x+\delta,t) \leqslant \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{b(x+\delta)-b(x)} \leqslant \max_{t\in[b(x);b(x+\delta)]} f(x+\delta,t)$$

По непрерывности f предыдущие минимум и максимум определены и

$$\lim_{\delta\to 0}\min_{t\in[b(x);b(x+\delta)]} f(x+\delta,t) = \lim_{\delta\to 0}\max_{t\in[b(x);b(x+\delta)]} f(x+\delta,t) = f(x,b(x))$$

Тогда

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{b(x)}^{b(x+\delta)} f(x+\delta,t)dt}{b(x+\delta)-b(x)} = f(x,b(x))$$

Отсюда следует требуемое. □

Лемма 85.2.

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{a(x)}^{b(x)}(f(x+\delta,t)-f(x,t))dt}{\delta} = \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt$$

Доказательство. Заметим, что для всяких δ и $t\in[a(x);b(x)]$ есть $\gamma_t(\delta)\in(0;\delta)$, что

$$\frac{f(x+\delta,t)-f(x,t)}{\delta} = \frac{\partial}{\partial x}f(x+\gamma_t(\delta),t)$$

Тогда

$$\frac{\int_{a(x)}^{b(x)}(f(x+\delta,t)-f(x,t))dt}{\delta} = \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x+\gamma_t(\delta),t)dt$$

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x+\gamma_t(\delta), t) dt - \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt\right| \\
\leqslant &\int_{a(x)}^{b(x)} \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x+\gamma_t(\delta), t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\right| dt \\
\leqslant &\int_{a(x)}^{b(x)} \max_{y\in[x;x+\delta]} \left|\frac{\partial}{\partial x} f(y, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\right| dt \\
\leqslant &(b(x)-a(x)) \max_{\substack{y\in[x;x+\delta]\\ t\in[a(x);b(x)]}} \left|\frac{\partial}{\partial x} f(y, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\right|
\end{aligned}
$$

Следовательно так как $\frac{\partial}{\partial x} f$ непрерывна, то $\frac{\partial}{\partial x} f(y,t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ непрерывна, а поэтому

$$
\lim_{\delta\to 0} \max_{\substack{y\in[x;x+\delta]\\ t\in[a(x);b(x)]}} \left|\frac{\partial}{\partial x} f(y, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\right| = 0
$$

и тогда

$$
\lim_{\delta\to 0} \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x+\gamma_t(\delta), t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt
$$

Таким образом получаем требуемое. □

Объединяя всё вышесказанное, получаем требуемое. □

Следствие 85.1. *Если взять функции a и b константными, то будет лишь условие на непрерывность f и $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ на прямоугольнике $[x_0; x_1] \times [a; b]$, а мы получим, что*

$$
\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) dt
$$

Теорема 86. *Пусть дана непрерывная функция $f(x, y)$ на $[a; b] \times [c; d]$. Тогда интегралы*

$$
\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx \qquad \text{и} \qquad \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy
$$

определены и равны.

Доказательство. Заметим, что $\int_a^t f(x,y)dx$ и $\int_c^s f(x,y)dy$ являются непрерывными функциями от y и x соответственно. Следовательно интегралы

$$
F(t,s) := \int_a^t \left(\int_c^s f(x,y)dy\right) dx \qquad \text{и} \qquad G(t,s) := \int_c^s \left(\int_a^t f(x,y)dx\right) dy
$$

определены. При этом

$$
\frac{\partial}{\partial t} F(t,s) = \int_c^s f(t,y)dy
$$

и

$$
\frac{\partial}{\partial t} G(t,s) = \frac{\partial}{\partial t}\int_c^s \left(\int_a^t f(x,y)dx\right) dy = \int_c^s \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_a^t f(x,y)dx\right) dy = \int_c^s f(t,y)dy
$$

Т.е. $\frac{\partial}{\partial t} F = \frac{\partial}{\partial t} G$.

При этом несложно видеть, что $F(a,s) = G(a,s) = 0$, следовательно

$$
F(t,s) = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} F(x,s)dx + F(a,s) = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} G(x,s)dx + G(a,s) = G(t,s)
$$

□

5.4 Кривые

Определение 42. *Кривая* — непрерывное отображение отрезка $[0; 1]$ в любое топологическое пространство (например, $\mathbb{R}^n$).

Кривая Пеано, тра-ля-ля...

Определение 43. *Длина кривой* τ — значение

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} d(\tau(x_{k-1}), \tau(x_k)) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge x_0 = 0 \wedge x_n = 1 \right\}$$

Утверждение 87. *Если дана кривая τ в $\mathbb{R}^n$ и она дифференцируема по всем координатам, то её длина равна*

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\tau(t)\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\tau(t)\right)^2} dt = \int_0^1 |\operatorname{grad}(\tau(t))| dt$$

6 Мои придумки вне лекций

6.1 Сильная сходимость

Определение 44. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *сильно сходится*, если сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Замечание. Это понятие распространяемо не только на $\mathbb{R}$, а также на $\mathbb{C}$. Также можно пытаться рассматривать любые векторные пространства с метрикой и полнотой.

Лемма 88. *Если ряд сильно сходится, то он сходится.*

Доказательство. Пусть дан сильно сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Лемма 88.1. *Для всякого $\varepsilon > 0$ есть такое натуральное N, что $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$.*

Доказательство. Давайте рассматривать префиксные суммы S_n последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Заметим, что $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ является неубывающей сходящейся последовательностью. Пусть предел равен A. Следовательно какой-то член S_N будет в ε-окрестности A (а на деле в $(A-\varepsilon; A]$). Следовательно для всякого $M > N$

$$\sum_{n=N+1}^{M} |a_n| = S_M - S_N$$

При этом $\{S_n - S_N\}_{n=N+1}^{\infty}$ сходится, поскольку равна $\{S_n\}_{n=N+1}^{\infty} - S_N$, а последняя последовательность сходится, поскольку является подпоследовательностью сходящейся $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$. При этом $S_M \in [S_N; A]$. Следовательно $S_M - S_N \in [0; A - S_N]$. Значит и предел $\{S_n - S_N\}_{n=N+1}^{\infty}$ лежит в $[0; A - S_N] \subseteq [0; \varepsilon)$. □

Заметим, что $|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|$. Пусть $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ — префиксные суммы последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, т.е. $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Мы видим, что

$$|S_M - S_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{M} a_k\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} |a_k| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_k|$$

Пусть $r_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_k|$. Тогда имеем, что все S_M для $M \geqslant N$ лежат в $\overline{U}_{r_N}(S_N)$. Несложно видеть, что

$$\left(\overline{U}_{r_N}(S_N)\right)_{N=0}^{\infty}$$

— последовательность замкнутых убывающих по включение множеств. Также по доказанной лемме последовательность $(r_N)_{N=0}^{\infty}$ сходится монотонно сверху к нулю. Таким образом последовательность замкнутых окрестностей имеет предел и ровно один. Поскольку размеры окрестностей сходятся, а для каждой из них верно, что все члены последовательности $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ начиная с некоторого лежат в этой окрестности, то сама последовательность $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ сходится к пересечению окрестностей. □

Теорема 89. *Пусть дан ряд $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

1. *Если f сходится в некоторой точке t, то сильно сходится и во всех точках s, где $|s| < |t|$.*

2. *При этом если f сильно сходится в точке t, то сильно сходится и во всех точках s, где $|s| \leqslant |t|$.*

Доказательство.

1. Мы имеем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сходится. Это значит, что есть такая константа C, что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $|a_n t^n| \leqslant C$, а тогда $|a_n| \cdot |t|^n \leqslant C$.

   Пусть дана точка s, что $|s| < |t|$. Тогда

$$|a_n s^n| = |a_n| \cdot |s|^n = |a_n| \cdot |t|^n \cdot \left(\frac{|s|}{|t|}\right)^n \leqslant C \cdot \left(\frac{|s|}{|t|}\right)^n$$

   Обозначим $|s|/|t|$ за α. Понятно, что $\alpha \in [0; 1)$. Следовательно

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n s^n| \leqslant \sum_{n=0}^{N} C\alpha^n = C\frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}$$

   Таким образом $C\frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}$ сходится, а значит сходится и последовательность префиксных сумм $(|a_n s^n|)_{n=0}^{\infty}$ (так как не убывает и ограничена). Следовательно f в точке s сильно сходится.

2. Мы имеем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сильно сходится. Пусть дана точка s, что $|s| \leqslant |t|$. Тогда

$$|a_n s^n| = |a_n| \cdot |s|^n \leqslant |a_n| \cdot |t|^n = |a_n t^n|$$

   Следовательно

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n s^n| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n t^n|$$

   Поскольку последовательность правых сумм сходится, то сходится и последовательность левых сумм (так как не убывает и ограничена). Следовательно f в точке s сильно сходится.

□

Следствие 89.1. *Область определения f как функция есть открытый шар с центром в нуле (возможно, нулевого радиуса) вместе с некоторыми (возможно, со всеми, возможно, с ни одной) точками на его границе.*

Теорема 90. *Пусть дана функция $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Пусть также известно, что для некоторой точки x и некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что f сильно сходится в ε-окрестности x.*

1. *Значит f бесконечно дифференцируема в этой окрестности.*

2. *Для всякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функция $g_k(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} x^n$ сильно сходится в этой окрестности.*

3. *Для всякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $f^{(k)} = g_k$ в этой окрестности.*

Доказательство. Докажем все утверждения теоремы только для первой производной f. Тогда для всех последующих производных утверждение будет выводится по индукции. Также докажем сильную сходимость не для всей окрестности, а только для точки x. Тогда, поскольку все другие точки окрестности так же имеют окрестность, где функция сильно сходится, то для них утверждение будет верно по аналогии.

Возьмём некоторую точку y из ε-окрестности x, что $|y| > |x|$. Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}(n+1)x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}y^n| \cdot (n+1) \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^n$$

Понятно, что $|x|/|y| < 1$; обозначим $\alpha := |x|/|y|$. Поэтому последовательность $\{(n+1)\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к нулю, а значит ограничена сверху константой C. Следовательно

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}(n+1)x^n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} C|a_{n+1}y^n| = C\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}y^n|,$$

причём последний ряд сходится по условию, значит и первый тоже, что означает сильную сходимость g_1 в x. Таким образом g_1 сильно сходится на всей ε-окрестности x.

Теперь покажем, что $f'(x) = g_1(x)$. Пусть t — любая точка из проколотой ε-окрестности x. Тогда

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\left(\frac{t^{n+1}-x^{n+1}}{t-x} - (n+1)x^n\right)$$

Заметим, что

$$\frac{t^{n+1}-x^{n+1}}{t-x} - (n+1)x^n = t^n + t^{n-1}x + \dots + tx^{n-1} - nx^n = (t-x)(t^{n-1} + 2t^{n-2}x + \dots + nx^{n-1})$$

Следовательно

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - g_1(x) = (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)$$

Пусть y некоторая точка из ε-окрестности x, что $\delta := |y| - |x| > 0$. Тогда для всякой точки t из проколотой $\delta/2$-окрестности x

$$\begin{aligned}
|a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| &= |a_{n+2}|(|t|^n + 2|t|^{n-1}|x| + \dots + (n+1)|x|^n) \\
&< |a_{n+2}|(|y| - \delta/2)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= |a_{n+2}y^{n+2}| \cdot |y|^{-2}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\left(\frac{|y|-\delta/2}{|y|}\right)^n
\end{aligned}$$

Тогда мы имеем, что $\alpha := \frac{|y|-\delta/2}{|y|} \in [0;1)$, а тогда последовательность $\left(|y|^{-2}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha^n\right)_{n=0}^{\infty}$ сходится к 0, значит ограничена сверху константой C. Следовательно

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| < \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|C = C\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|$$

причём последняя сумма сходится, так как f сильно сходится в y. Тогда пусть

$$A := C\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}y^{n+2}|.$$

Значит

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - g_1(x)\right| &= |t-x|\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)\right| \\
&\leqslant |t-x|\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}(t^n + 2t^{n-1}x + \dots + (n+1)x^n)| \\
&< |t-x|A
\end{aligned}$$

Таким образом

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = g_1(x),$$

что значит, что $f'(x) = g_1(x)$. □

Лемма 91. *Пусть дана функция $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Пусть также известно, что f сходится в a-окрестности нуля. Тогда для всякого x из этой окрестности верно, что ряд*

$$f_x(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \binom{n+k}{n} x^k \right) t^n$$

сильно сходится в $(a - |x|)$-окрестности нуля и равен $f(x+t)$.

Доказательство. Пусть дано t, что $|t| < a - |x|$. Тогда из сильной сходимости при модуле меньшем a получаем, что сумма $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x| + |t|)^n$ сходится. Заметим, что каждый член $|a_n|(|x| + |t|)^n$ можно разложить на $n+1$ членов: $|a_n|\binom{n}{0}|x|^n + |a_n|\binom{n}{1}|x|^{n-1}|t| + \ldots$. Тогда сумма новых членов будет равна тому же, а тогда можно получить для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ограничения

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n \right| &= |t|^n \frac{1}{n!} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!} x^k \right| \\ &\leqslant |t|^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \frac{(n+k)!}{k!} |x|^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n, \end{aligned}$$

так как последнее — подсумма нашей суммы. Причём по набору членов суммы

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x| + |t|)^n \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n$$

совпадают, поэтому мы можем сказать, что вторая сумма сходится. Следовательно сильно сходится и ряд $f_x(t)$.

Далее покажем, что $f_x(t) = f(x+t)$. Рассматривая префиксные суммы ряда $f(x+t)$ и раскрывая скобки, можно получить почленную сходимость (как ряды от t) к $f_x(t)$. Действительно:

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n = \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \binom{n+k}{k} t^n x^k;$$

таким образом раскрыв скобки в $f(x+t)$ до члена M мы получаем префиксную сумму для k до $M - n$. Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть некоторый хвост

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{k} |t|^n |x|^k \right) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Тогда для всех остальных членов от 0 до $N-1$ есть такие значения M_n, что для всякого n от 0 до $N-1$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=M_n+1}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{k} |t|^n |x|^k < \frac{\varepsilon}{4N}$$

Пусть $M := \max(M_0 + 0, M_1 + 1, \ldots, M_{N-1} + (N-1))$. Таким образом

$$\begin{aligned}
|f_x(t) - f(x+t)| &\leqslant \left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - f(x+t)\right| \\
&\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{k} |t|^n |x|^k\right) + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - f(x+t)\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{M} a_n (x+t)^n\right| + \left|\sum_{n=M+1} a_n (x+t)^n\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{n+k=0}^{M} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k\right| + \sum_{n+k>M} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |t|^n |x|^k \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{k=0}^{M-n} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k\right)\right| \\
&+ \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=M-n+1}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |x|^k |t|^n \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{4N} + \left|\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{k=0}^{M-n} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k\right)\right| \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{k=0}^{M-n} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k\right| \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \left|\sum_{k=M-n+1}^{\infty} a_{n+k} \binom{n+k}{n} t^n x^k\right| \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=M-n+1}^{\infty} |a_{n+k}| \binom{n+k}{n} |t|^n |x|^k \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{4N} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Замечание. Последняя часть с оценкой недостатка заимствует (но сложно) рассуждение из леммы 92. В обоих случаях находится малый хвост главной последовательности, после чего при выкидывании мы теряем его дважды (у основного ряда и у рядов под пределом) и нам остаётся с остатком от ε в запасе оценить разность между членами конечного префикса.

Лемма 92. *Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ — сильно сходящийся ряд, а $(\sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n})_{k=0}^{\infty}$ — последовательность сильно сходящихся рядов, что есть некоторая константа C, что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что*

- $(b_{k,n})_{k=0}^{\infty} \to a_n$,
- $|b_{k,n}| \leqslant C|a_n|$ *для всякого* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- *для всякого* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n}$ *сходится и равен* B_k.

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} B_k$.

Доказательство. Вспомним, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2(C+1)}$. Следовательно для всякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n}\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| + |b_{k,n}| &&\leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + (C+1)\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \\ &< \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + (C+1)\frac{\varepsilon}{2(C+1)} &&= \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Тогда для всякого $n \in [0; N-1]$ есть такое K_n, что для всех $k \geqslant K_n$ верно, что $|a_n - b_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{2N}$. Пусть $K := \max\{K_n\}_{n=0}^{N-1}$. Следовательно для всякого $k \geqslant K$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n}\right| < \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_{k,n}| + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Таким образом для всякого $k \geqslant K$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - B_k\right| < \varepsilon,$$

что значит, что

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

□

Теорема 93. *Пусть рассматривается ряд вещественных чисел.*

1. *Если ряд сильно сходится, то любая его перестановка сильно сходится к тому же значению.*

2. *Если ряд сходится, но не сильно, то для любого значения S можно так переставить его члены, что итоговый ряд сойдётся к S.*

Доказательство.

1. Пусть даны сильно сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и любая его перестановка $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Значит есть $M := \sigma^{-1}(N)$. Следовательно для всякого $L \geqslant M$

$$\left|\sum_{n=0}^{L} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

   Таким образом $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$; чтобы показать сильную сходимость достаточно проделать те же рассуждения для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$.

2. Заметим, что сходимость ряда значит, что $(|a_n|)_{n=0}^{\infty} \to 0$. При этом несильная сходимость значит, что сумма положительных членов ряда и сумма отрицательных расходятся (уходят в $+\infty$ и $-\infty$ соответственно).

   Выделим из последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ подпоследовательности положительных членов $(a_n^+)_{n=0}^{\infty}$ и отрицательных $(a_n^-)_{n=0}^{\infty}$ (в основной последовательности могут быть нули, но их можно раскидывать по последовательности как угодно — это не изменит результат). Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ есть $N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для всякого $n \geqslant N$ верно, что $|a_n^+| < \varepsilon$ и $|a_n^-| < \varepsilon$.

Теперь составим нашу последовательность-перестановку следующим образом. В начальный момент у нас есть число $t = 0$ и пустая последовательность T. Также у нас есть две бесконечных последовательности: одна с положительными — A^+, другая с отрицательными членами — A^-. Суммы обеих бесконечны. Каждый ход мы можем только взять из одной из A^+ и A^- первое невзятое число, записать его в конец последовательности T и прибавить это число к t.

Какие же конкретно ходы мы хотим делать? Пусть C_0 — максимальный размер членов в A^+ и A^-, а $C := \max(C_0, S+1)$. Тогда на итерации № n ($n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$) будем удерживаться в интервале $(S - C/2^n; S + C/2^n)$. Чтобы достичь этой цели будем использовать следующую стратегию:

- если $t \in (S - C/2^n; S]$, то возьмём число из A^+;
- если $t \in [S; S - C/2^n)$, то возьмём число из A^-.

Заканчивать итерацию № n будем, когда из обеих последовательностей будут вытащены первые $N(C/2^{n+1})$ членов. Поскольку к началу каждой итерации № n оставшиеся члены в A^+ и A^- по модулю меньше $C/2^n$, то описанными выше шагами мы не выйдем из интервала $(S - C/2^n; S + C/2^n)$. При этом после каждого момента мы не можем вытаскивать только члены одной из A^+ и A^-, так как их суммы стремятся к $\pm\infty$, значит каждый член каждой последовательности будет взят, а следовательно мы попадём на каждую итерацию. Значит префиксные суммы будут сходится к S (после конца каждой итерации префиксные суммы будут находиться во всё меньшей окрестности S). Таким образом сумма полученного ряда-перестановки будет равна S.

□

Практика

Рассмотрим функцию $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Утверждение 94. $\exp(x)$ *сильно сходится при любых* $x \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Действительно, есть натуральное $N > 2|x|$, значит

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{N-1} \left|\frac{x^n}{n!}\right| + \frac{|x|^N}{N!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(N+n)!/N!} &< \sum_{n=0}^{N-1} \left|\frac{x^n}{n!}\right| + \frac{|x|^N}{N!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{N^n} \\
< \sum_{n=0}^{N-1} \left|\frac{x^n}{n!}\right| + \frac{|x|^N}{N!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left|\frac{x^n}{n!}\right| + 2\frac{|x|^N}{N!}
\end{aligned}$$

т.е. exp сильно сходится во всякой точке $x \in \mathbb{C}$. □

Следствие 94.1. exp *бесконечно дифференцируема. Причём* $\exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = \exp(x)$.

Утверждение 95. *Для абсолютных любых* a *и* b *верно, что* $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.

Доказательство. Давайте рассмотрим следующую таблицу.

$\times$	$\frac{a^0}{0!}$	$\frac{a^1}{1!}$	$\frac{a^2}{2!}$	$\frac{a^3}{3!}$	$\frac{a^4}{4!}$	$\dots$
$\frac{b^0}{0!}$	$\frac{a^0 \cdot b^0}{0! \cdot 0!}$	$\frac{a^1 \cdot b^0}{1! \cdot 0!}$	$\frac{a^2 \cdot b^0}{2! \cdot 0!}$	$\frac{a^3 \cdot b^0}{3! \cdot 0!}$	$\frac{a^4 \cdot b^0}{4! \cdot 0!}$	$\dots$
$\frac{b^1}{1!}$	$\frac{a^0 \cdot b^1}{0! \cdot 1!}$	$\frac{a^1 \cdot b^1}{1! \cdot 1!}$	$\frac{a^2 \cdot b^1}{2! \cdot 1!}$	$\frac{a^3 \cdot b^1}{3! \cdot 1!}$	$\frac{a^4 \cdot b^1}{4! \cdot 1!}$	$\dots$
$\frac{b^2}{2!}$	$\frac{a^0 \cdot b^2}{0! \cdot 2!}$	$\frac{a^1 \cdot b^2}{1! \cdot 2!}$	$\frac{a^2 \cdot b^2}{2! \cdot 2!}$	$\frac{a^3 \cdot b^2}{3! \cdot 2!}$	$\frac{a^4 \cdot b^2}{4! \cdot 2!}$	$\dots$
$\frac{b^3}{3!}$	$\frac{a^0 \cdot b^3}{0! \cdot 3!}$	$\frac{a^1 \cdot b^3}{1! \cdot 3!}$	$\frac{a^2 \cdot b^3}{2! \cdot 3!}$	$\frac{a^3 \cdot b^3}{3! \cdot 3!}$	$\frac{a^4 \cdot b^3}{4! \cdot 3!}$	$\dots$
$\frac{b^4}{4!}$	$\frac{a^0 \cdot b^4}{0! \cdot 4!}$	$\frac{a^1 \cdot b^4}{1! \cdot 4!}$	$\frac{a^2 \cdot b^4}{2! \cdot 4!}$	$\frac{a^3 \cdot b^4}{3! \cdot 4!}$	$\frac{a^4 \cdot b^4}{4! \cdot 4!}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

В ней в верхней строчке написаны подряд члены ряда $\exp(a)$, в левом столбце — $\exp(b)$, а в пересечении строки и столбца — произведение соответствующих членов. Тогда легко видеть, что

$$\exp(a)\exp(b) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^k}{k!}\right).$$

В таком случае при раскрытии скобок мы получаем члены, находящиеся в угловом квадрате $n+1 \times n+1$ таблицы. Если же раскрыть скобки у члена $(a+b)^n/n!$ ряда $\exp(a+b)$, то получим члены на диагонали № n (без учёта особой строки и особого столбца); значит при раскрытии скобок у префиксных суммы в $\exp(a+b)$ мы получаем члены в равнобедренных прямоугольных треугольниках размера n, вписанных прямым углом в угол таблицы. Тогда получаем, что $\exp(a)\exp(b)$ и $\exp(a+b)$ — просто суммы рядов, членами которых являются значения из таблицы, но в разных порядках.

Заметим, что ряд членов из таблицы сильно сходится. Действительно, давайте в последовательность подряд выпишем члены диагоналей. Получается, что эо всё та же последовательность $\exp(a+b)$, но только в ней каждый член разбили сразу на несколько подряд идущих. Заметим, что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\frac{(|a|+|b|)^n}{n!} = \frac{|a|^n \cdot |b|^0}{n! \cdot 0!} + \dots + \frac{|a|^0 \cdot |b|^n}{0! \cdot n!}.$$

Соответственно выписанный ряд сильно сходится, поскольку сильно сходится ряд $\exp(|a|+|b|)$. Значит при любых перестановках мы получим одно и то же, значит $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$. $\square$

Утверждение 96.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$$

Доказательство. Давайте раскроем скобки в подпредельном выражении:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{\binom{n}{1}}{n}x + \frac{\binom{n}{2}}{n^2}x^2 + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n^n}x^n$$

Заметим, что при всяком $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ член степени k равен

$$\frac{\binom{n}{k}}{n^k} x^k = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}$$

Тогда видно, что для всякого k

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} x^k = \frac{x^k}{k!}$$

и заодно

$$\left| \frac{\binom{n}{k}}{n^k} x^k \right| < \left| \frac{x^k}{k!} \right|$$

Следовательно мы получаем последовательность рядов, почленно сходящихся к $\exp(x)$ и почленно ограниченных по модулю константой $C = 1$. Значит по теореме предел определён и равен $\exp(x)$. $\square$

Упражнение 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) := x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

1. Покажите, что f сходится при любом x.
2. Покажите, что $f(x+1) = -f(x)$.
3. Превратите f в ряд и покажите, что f сильно сходится при всяком x (осторожно, аккуратная возня с суммами и не очень аккуратная — с оценками).
4. Какое значение получается, если подставить $x = \frac{1}{2}$? Чему конкретно, можно предположить, равна функция $f(x)$?

Замечание. До синуса недалеко, но я пока не знаю, что нужно сделать, чтобы окончательно доказать, что это он...

Упражнение 2. Рассмотрим функции

$$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\exp(xi) - \exp(-xi)}{2i} \qquad \text{и} \qquad c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\exp(xi) + \exp(-xi)}{2}$$

1. Покажите, что s и c определены корректно, т.е. они действительно возвращают вещественные значения.
2. Докажите, что $s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$ и $c(x+y) = c(x)c(y) - s(y)s(x)$ для всевозможных $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Докажите, что $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$ для всевозможных $x \in \mathbb{R}$.
4. Докажите, что s и c — бесконечно дифференцируемые функции.
5. Докажите, что $s'(x) = c(x)$ и $c'(x) = -s(x)$ для всевозможных $x \in \mathbb{R}$.
6. Докажите, что $\lim_{x \to 0} \frac{s(x)}{x} = 1$.
7. Докажите, что $s(x) = \sin(x)$, а $c(x) = \cos(x)$.