Занятие от 3.12.
Геометрия и топология. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

3 декабря 2020 г.

Задача 48.

- Покажем, что это действительно топологическое пространство.

  1. $\mathbb{R}$ и $\varnothing$ безусловно открыты.
  2. Пусть даны открытые в обычном смысле множества $U_1, \ldots, U_n$ и счётные множества $C_1, \ldots, C_n$. Тогда
  $$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \setminus C_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)$$
  При этом первая скобка — открытое множество, а вторая — счётное. Следовательно пересечение конечного числа открытых в новом смысле множеств открыто в новом смысле.
  3. Пусть дано семейство $\{U_i\}_{i\in I}$ открытых в обычном смысле множеств и семейство $\{C_i\}_{i\in I}$ счётных множеств. Заметим, что
  $$\bigcup_{i\in I} U_i$$
  — открытое в обычном смысле множество, значит раскладывается в счётное объединение попарно непересекающихся интервалов. Пусть I — такой интервал разложения. Тогда I является объединением счётного числа отрезков, каждый из которых покрывается конечным набором открытых множеств из $\{U_i\}_{i\in I}$, следовательно и I покрывается счётным набором множеств из $\{U_i\}_{i\in I}$. Значит
  $$\bigcup_{i\in I} U_i \setminus C_i$$
  содержит всё тот же интервал без счётного числа точек, поэтому
  $$\bigcup_{i\in I} U_i \setminus C_i = \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \setminus C$$
  где C счётно. Таким образом объединение любого семейства открытых в новом смысле множеств открыто в новом смысле.

- Покажем, что пространство хаусдорфово. Поскольку обычные метрические окрестности открыты в новом смысле, а любые две точки можно разделить метрическими окрестностями правильных размеров, то T_2 верна для нового пространства.

- По теореме с лекции достаточно предъявить точку a и её окрестность U, что замыкание всякой подокрестности U точки a не будет подмножеством U.

  Для этого рассмотрим $a := \sqrt{2}$ и $U := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Пусть V — некоторая окрестность a, являющаяся подмножеством U. Тогда V содержит как подмножество некоторую метрическую окрестность I точки a без счётного множества C. При этом понятно, что $C \supseteq \mathbb{Q}$.

  Покажем, что $\mathrm{Cl}(V) \supseteq I$. Пусть t — некоторая точка $I \cap C$. Если t — непредельная точка V, то в некоторой окрестности (в новом смысле) точки t нет точек V. Это значит, что в некоторой метрической окрестности t не более чем счётное число точек V. Но на деле их там континуум (поскольку из V в этой окрестности лежит он весь без счётного количество точек (например, без C)) — противоречие. Следовательно всякая точка $t \in I$ является предельной точкой V. Т.е. $I \subseteq \mathrm{Cl}(V)$.

  Заметим, что $I \nsubseteq U$, значит $\mathrm{Cl}(V) \nsubseteq U$. Поскольку это утверждение верно независимо от V, то имеем, что новое пространство не регулярно.
