Геометрия и топология.

Лектор — Евгений Анатольевич Фоминых
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

Литература:

- Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М., "Элементарная топология", М.:МЦНМО, 2012.
- Коснёвски Чес, "Начальный курс алгебраической топологии", М.:Мир, 1983.
- Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко, "Введение в топологию", М.:Наука. Физматлит, 1995.
- James Munkres, Topology.

Определение 1. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *метрикой* (или *расстоянием*) в множестве X, если:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ ("неравенство треугольника").

Пара (X, d), где d — метрика в X, называется *метрическим пространством.*

Пример 1. Пусть X — произвольное множество. Тогда метрика

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{если } x \neq y \\ 0 & \text{если } x = y \end{cases}$$

называется *дискретной* метрикой на множестве X.

Пример 2.

- $X := \mathbb{R}$, тогда $d(x, y) := |x - y|$ — метрика.
- $X := \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Тогда

  $$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2}$$

  называется *евклидовой* метрикой.
- $X := \mathbb{R}^n$, $d(x, y) := \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- $X := \mathbb{R}^n$, $d(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

- $X := C[0;1]$, $d(x(t), y(t)) = \max_{t\in[0;1]} |x(t) - y(t)|$. (X, d) называют *пространством непрерывных функций.*

Определение 2. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Сужение функции d на $Y \times Y$ является метрикой в Y. Метрическое пространство $(Y, d|_{Y\times Y})$ называется *подпространством* пространства (X, d).

Теорема 1. *Пусть дана* $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *что*

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad g(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y = 0$;
- $\forall x, y, d \in \mathbb{R}_+ \quad g(x + d, y) \geqslant g(x, y) \wedge g(x, y + d) \geqslant g(x, y)$;
- $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+ \quad g(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leqslant g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2)$.

Тогда для любых метрических пространств (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *функция*

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

будет метрикой на $X \times Y$.

Доказательство. Проверим, что $d_{X\times Y}$ — метрика.

- $\forall x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$

$$\begin{aligned} d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 \quad &\longleftrightarrow \quad g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) = 0 \\ &\longleftrightarrow \quad d_X(x_1, x_2) = 0 \wedge d_Y(y_1, y_2) = 0 \\ &\longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \end{aligned}$$

- $\forall x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$

$$\begin{aligned} &d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\ &\quad = g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) = g(d_X(x_2, x_1), d_Y(y_2, y_1)) \\ &\quad = d_{X\times Y}((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \end{aligned}$$

- $\forall x_1, x_2, x_3 \in X, y_1, y_2, y_3 \in Y$

$$\begin{aligned} &d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_3, y_3)) \\ &\quad = g(d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3)) \\ &\quad \leqslant g(d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3), d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3)) \\ &\quad \leqslant g(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) + g(d_X(x_2, x_3), d_Y(y_2, y_3)) \\ &\quad = d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_{X\times Y}((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

$\square$

Следствие 1.1. *Для любых метрических пространств* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *пара* $(X \times Y, d_{X\times Y})$, *где*

$$d_{X\times Y} := \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

есть метрическое пространство.

Доказательство. Необходимо лишь проверить, что $g(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ удовлетворяет условиям теоремы.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x^2+y^2} \leftrightarrow x^2+y^2=0 \leftrightarrow x=0=y$.

- $\forall x, y, d \in \mathbb{R}_+ \quad x+d \geqslant x \Rightarrow (x+d)^2 \geqslant x^2 \Rightarrow (x+d)^2+y^2 \geqslant x^2+y^2 \Rightarrow \sqrt{(x+d)^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$; для y аналогично.

- $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$ по неравенству Коши-Буняковского-Шварца

$$
\begin{gathered}
(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0 \\
x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \geqslant 2x_1x_2y_1y_2 \\
(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \geqslant (x_1x_2+y_1y_2)^2 \\
(x_1^2+y_1^2) + 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} + (x_2^2+y_2^2) \geqslant (x_1^2+y_1^2) + 2(x_1x_2+y_1y_2) + (x_2^2+y_2^2) \\
\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)^2 \geqslant (x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 \\
\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2} \geqslant \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}
\end{gathered}
$$

$\square$

Замечание 1. Если g ассоциативна (например, $g(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$; она заодно коммутативна). То аналогично можно определить метрику на $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = (X_1 \times (X_2 \times (\dots \times X_n)\dots))$.

Таким образом евклидова метрика есть метрика, так как её можно получить, применяя $g(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ к пространствам $(X_i, d_i) = (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ (где $d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y|$).

Определение 3. Пусть (X,d) — метрическое пространство, $a \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Тогда:

- $B_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$ — *(открытый) шар пространства* (X,d) *с центром в точке* a *и радиусом* r;

- $\overline{B}_r(a) = D_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) \leqslant r\}$ — *замкнутой шар пространства* (X,d) *с центром в точке* a *и радиусом* r;

- $S_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) = r\}$ — *сфера пространства* (X,d) *с центром в точке* a *и радиусом* r.

Определение 4. Пусть (X,d) — метрическое пространство, $A \subseteq X$. Множество A называется *открытым* в метрическом пространстве, если

$$\forall a \in A\ \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq A$$

Теорема 2. *В любом метрическом пространстве* (X,d)

1. $\varnothing$ *и* X *открыты;*

2. *для всяких* $a \in X$ *и* $r > 0$ *открытый шар* $B_r(a)$ *открыт;*

3. *объединение любого семейства открытых множеств открыто;*

4. *пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.*

Доказательство.

1. Очевидно.

2. Для всякого $x \in B_r(a)$ верно, что $B_{r-d(x,a)}(x) \subseteq B_r(a)$, откуда утверждение очевидно следует.

3. Пусть дано семейство открытых множеств Σ. Пусть также $I = \bigcup \Sigma$. Для любого $x \in I$ верно, что существует $J \in \Sigma$, что $x \in J$, а значит есть $r > 0$, что $B_r(x) \subseteq J \subseteq I$, т.е. x — внутренняя точка I. Таким образом I открыто.

4. Пусть $I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. Тогда для любого $x \in I$ верно, что существуют $r_1, \ldots, r_n > 0$, что $B_{r_i}(x) \subseteq I_n$, значит $B_{\min r_i} \subseteq I$, значит x — внутренняя точка I. Таким образом I открыто.

$\square$

Определение 5. Пусть X — некоторое множество. Рассмотрим набор Ω его подмножеств, для которого:

1. $\varnothing, X \in \Omega$;

2. объединение любого семейства множеств из Ω лежит в Ω;

3. пересечение любого конечного семейства множеств, принадлежащих Ω, также принадлежит Ω.

В таком случае:

- Ω — *топологическая структура* или просто *топология* в множестве X;
- множество X с выделенной топологической структурой Ω (т.е.пара (X, Ω)) называется *топологическим пространством*;
- элементы множества Ω называются *открытыми множествами* пространства (X, Ω).

Пример 3.

- Если Ω — множество открытых множеств в метрическом пространстве (X, d), то (X, Ω) — топологическое пространство. Таким образом любое метрическое пространство можно отождествлять с соответствующим топологическим пространством.
- Топология, индуцированная евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^n$, называется *стандартной*.
- $\Omega := 2^X$ — *дискретная* топология на произвольном множестве X. Именно она порождается дискретной метрикой на X.
- $\Omega := \{\varnothing, X\}$ — *антидискретная* топология на произвольном множестве X.
- $X := \mathbb{R}$, $\Omega := \{(a; +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\}$. Такая топология называется *стрелкой*.
- $\Omega = \{\varnothing\} \cup \{A \in X : |X \setminus A| \in \mathbb{N}\}$ — топология *конечных дополнений* на произвольном множестве X.

Определение 6. Множество $F \subseteq X$ *замкнуто* в топологическом пространстве (X, Σ), если его дополнение $X \setminus F$ открыто (т.е. если $X \setminus F \in \Sigma$).

Теорема 3. *В любом топологическом пространстве X*

- *$\varnothing$ и X — замкнуты;*
- *объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто;*

- *пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.*

Теорема 4. *Пусть U — открыто, а V — замкнуто в (X, Ω). Тогда:*

- $U \setminus V$ *открыто;*
- $V \setminus U$ *замкнуто.*

Определение 7. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда *внутренностью* множества A называется объединение всех открытых подмножеств A:

$$\operatorname{Int}(A) := \bigcup_{\substack{U \in \Omega \\ U \subseteq A}} U$$

Теорема 5.

- $\operatorname{Int}(A)$ — *открытое множество.*
- $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$.
- B — *открыто* $\wedge B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq \operatorname{Int}(A)$.
- $A = \operatorname{Int}(A) \Leftrightarrow A$ — *открыто.*
- $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = \operatorname{Int}(A)$.
- $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{Int}(A) \subseteq \operatorname{Int}(B)$.
- $\operatorname{Int}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Int}(A_k)$.
- $\operatorname{Int}(\bigcup_{A \in \Sigma} A) \supseteq \bigcup_{A \in \Sigma} \operatorname{Int}(A)$.

Определение 8. *Окрестность* точки a в топологическом пространстве X — открытое множество в X, содержащее a.

Точка a топологического пространства X называется *внутренней точкой* множества $A \subseteq X$, если A содержит как подмножество некоторую окрестность a.

Теорема 6.

- *Множество открыто тогда и только тогда, когда все его точки внутренние.*
- *Внутренность множества есть множество всех его внутренних точек.*

Доказательство.

- ($\Rightarrow$) Пусть A открыто, а $a \in A$. Тогда A — та самая окрестность a, которая является подмножеством A, поэтому a — внутренняя точка A.

  ($\Leftarrow$) Пусть каждая точка A внутренняя. Тогда для каждого $a \in A$ определим окрестность I_a, лежащую в A как подмножество (такая есть по определению). Тем самым $A = \bigcup_{a \in A} I_a$, т.е. A есть объединение открытых множеств, следовательно открытое множество.

- ($\subseteq$) Пусть $a \in \operatorname{Int}(A)$. Вспомним, что $\operatorname{Int}(A)$ — открытое подмножество A. Следовательно, a — внутренняя точка A.

  ($\supseteq$) Пусть a — внутренняя точка A. Следовательно есть открытое I, что $a \in I \subseteq A$, следовательно $I \subseteq \operatorname{Int}(A)$, а значит $a \in \operatorname{Int}(A)$.

$\square$

Определение 9. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, а $A \subseteq X$. *Замыканием* множества A называется пересечение всех замкнутых пространств, содержащих A как подмножество:

$$\mathrm{Cl}(A) := \bigcap_{\substack{X \setminus V \in \Omega \\ V \supseteq A}} V$$

Теорема 7.

- $\mathrm{Cl}(A)$ — *замкнутое множество.*
- $\mathrm{Cl}(A) \supseteq A$.
- B — *замкнуто* $\wedge B \supseteq A \Rightarrow B \supseteq \mathrm{Cl}(A)$.
- $A = \mathrm{Cl}(A) \Leftrightarrow A$ — *замкнуто.*
- $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(A)$.
- $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(B)$.
- $\mathrm{Cl}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{Cl}(A_k)$.
- $\mathrm{Cl}(\bigcap_{A \in \Sigma} A) \supseteq \bigcap_{A \in \Sigma} \mathrm{Cl}(A)$.
- $\mathrm{Cl}(A) \sqcup \mathrm{Int}(X \setminus A) = X$.

Определение 10. Пусть X — топологическое пространство, $A \subseteq X$ и $b \in X$. Точка b называется *точкой прикосновения* множества A, если всякая её окрестность пересекается с A.

Теорема 8.

- *Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно является множеством своих точек прикосновения.*
- *Замыкание множества есть множество всех его точек прикосновения.*

Определение 11. Пусть X — топологическое пространство, $A \subseteq X$ и $a \in X$.

Граница множества A — разность замыкания и внутренности A: $\mathrm{Fr}(A) := \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$.

Точка a — *граничная точка* множества A, если всякая её окрестность пересекается с A и с $X \setminus A$.

Теорема 9. *Граница множества совпадает с множеством его граничных точек.*

Теорема 10.

- $\mathrm{Fr}(A)$ *замкнуто.*
- $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$.
- A *замкнуто* $\Leftrightarrow A \supseteq \mathrm{Fr}(A)$.
- A *открыто* $\Leftrightarrow A \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Определение 12. Пусть X — топологическое пространство, $A \subseteq X$ и $a \in X$.

a — *предельная точка* A, если в любой окрестности a есть точка $A \setminus \{a\}$.

a — *изолированная точка* A, если $a \in A$ и есть окрестность a без точка $A \setminus \{a\}$.

Теорема 11.

- b — *предельная* $\Rightarrow b$ — *точка прикосновения.*
- $\mathrm{Cl}(A) = \{$*внутренние точки* $A\} \sqcup \{$*граничные точки* $A\}$.
- $\mathrm{Cl}(A) = \{$*предельные точки* $A\} \sqcup \{$*изолированные точки* $A\}$.

Определение 13. Пусть Ω_1 и Ω_2 — топологии на X. Тогда если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, то говорят, что Ω_1 *слабее (грубее)* Ω_2, а Ω_2 *сильнее (тоньше)* Ω_1.

Пример 4. Из всех топологий на X антидискретная — самая грубая, а дискретная — самая тонкая.

Теорема 12. *Топология метрики d_1 грубее топологии метрики d_2 тогда и только тогда, когда в любом шаре метрики d_1 содержится шар метрики d_2 с тем же центром.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть топология метрики d_1 грубее топологии метрики d_2. Тогда любой шар $B_r^{d_1}(a)$ открыт в d_2, следовательно по определению открытости есть шар $B_q^{d_2}(a) \subseteq B_r^{d_1}(a)$.

($\Leftarrow$) Пусть в любом шаре метрики d_1 содержится шар метрики d_2 с тем же центром. Возьмём любое открытое в d_1 множество U. Тогда для всякой точки $a \in U$ есть шар $B_r^{d_1}(a) \subseteq U$. При этом есть шар $B_q^{d_2}(a) \subseteq B_r^{d_1}(a)$, таким образом a — внутренняя точка U в d_2. Следовательно U открыто в d_2.

□

Следствие 12.1. *Если d_1 и d_2 — метрики на X и $d_1 \leqslant d_2$, то топология d_1 грубее топологии d_2.*

Определение 14. Две метрики на одном множестве называются *эквивалентными*, если они порождают одну топологию.

Лемма 13. *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Тогда для всякого $C > 0$ функция $C \cdot d$ — метрика на X, эквивалентная d.*

Следствие 13.1. *Если для метрик d_1 и d_2 на X есть такое $C > 0$, что $d_1 \leqslant Cd_2$, то d_1 грубее d_2.*

Определение 15. Метрики d_1 и d_2 на одном множестве называются *липшицево эквивалентными*, если существуют $c, C > 0$, что $c \cdot d_1 \leqslant d_2 \leqslant C \cdot d_1$.

Теорема 14. *Липшицево эквивалентные метрики просто эквивалентны.*

Определение 16. Топологическое пространство *метризуемо*, если есть метрика, её порождающая.

Определение 17. *База* топологии Ω — такое семейство Σ открытых множеств, что всякое U открытое представимо в виде объединения множеств из Σ.

$$\Sigma \subseteq \Omega - \text{база} \iff \forall U \in \Omega\ \exists \Lambda \subseteq \Sigma : \quad U = \bigcup_{W \in \Lambda} W$$

Определение 18. Множество Γ подмножеств множества X называются его *покрытием*, если $X := \bigcup_{A \in \Gamma} A$. Часто покрытие записывают в виде $\Gamma = \{A_i\}_{i \in I}$.

Теорема 15 (второе определение базы). *Пусть (X, Ω) — топологическое пространство и $\Sigma \subseteq \Omega$. Тогда Σ — база топологии Ω тогда и только тогда, когда для любой точки a любого открытого множества U есть окрестность из Σ, лежащая в U как подмножество.*

Определение 19. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, $a \in X$ и $\Lambda \subseteq \Omega$. Λ называется *базой топологии (базой окрестности) в точке a*, если:

1. $\forall U \in \Lambda \; a \in U$;

2. $\forall$ окрестности U точки $a \exists V_a \in \Lambda : \; V_a \subseteq U$.

Теорема 16.

- *Если Σ — база топологии, то для всякой точки $a \in X$ множество $\Sigma_a := \{U \in \Sigma \mid a \in U\}$ — база топологии в точке a.*

- *Пусть для каждой точки $a \in X$ определена база топологии Σ_a в ней. Тогда $\bigcup_{a \in X} \Sigma_a$ — база топологии.*

Теорема 17 (критерий базы). *Пусть X — произвольное множество, а Σ — его покрытие. Σ — база некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда для всяких $A, B \in \Sigma$ есть семейство $\Lambda \subseteq \Sigma$, что $A \cap B = \bigcup_{S \in \Lambda} S$.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Если Σ — база, то для всяких $A, B \in \Sigma$ множество $A \cap B$ открыто, а поэтому представляется как объединение некоторого подсемейства Σ.

($\Leftarrow$) Рассмотрим топологию Ω, образованную всевозможными объединениями множеств из Σ, т.е.

$$\Omega := \left\{ \bigcup_{S \in \Lambda} S \mid \Lambda \subseteq \Sigma \right\}$$

Проверим, что это действительно топология.

1. Σ — покрытие, поэтому $X = \bigcup_{S \in \Sigma} S \in \Omega$. Также рассматривая $\Lambda = \varnothing$, получаем, что $\bigcup_{S \in \Lambda} S = \varnothing \in \Omega$.
2. Пусть $\Phi \subseteq \Omega$. Тогда для каждого $S \in \Phi$ есть семейство $\Lambda_S \subseteq \Sigma$, его образующее, т.е. $S = \bigcup_{T \in \Lambda_S} T$. В таком случае $\Lambda := \bigcup_{S \in \Phi} \Lambda_S$ является подмножеством Σ, а тогда

$$\bigcup_{S \in \Phi} S = \bigcup_{S \in \Phi} \bigcup_{T \in \Lambda_S} T = \bigcup_{T \in \Lambda} T \in \Omega$$

3. Пусть $U, V \in \Omega$. Тогда существуют $M, N \subseteq \Sigma$, что $U = \bigcup_{S \in M} S$ и $V = \bigcup_{S \in N} S$. Также для каждой $P = (A, B) \in M \times N$ существует $\Lambda_P \subseteq \Sigma$, что $A \cap B = \bigcup_{S \in \Lambda_P}$. Пусть $\Lambda := \bigcup_{P \in M \times N} \Lambda_S$. Понятно, что $\Lambda \subseteq \Sigma$. Следовательно

$$U \cap V = \left(\bigcup_{A \in M} A \right) \cap \left(\bigcup_{B \in N} B \right) = \bigcup_{(A,B) \in M \times N} A \cap B = \bigcup_{P \in M \times N} \bigcup_{S \in \Lambda_P} S = \bigcup_{S \in \Lambda} S \in \Omega$$

$\square$

Определение 20. *Предбаза* — семейство Δ открытых множеств в пространстве (X, Ω), что Ω — наименьшая топология по включению топология, содержащая Δ.

Теорема 18. *Любое семейство Δ подмножеств множества X является предбазой некоторой топологии.*

Доказательство. Определим

$$\Sigma := \{X\} \cup \left\{ \bigcap_{A \in W} A \mid W \subseteq \Delta \wedge |W| \in \mathbb{N} \right\}$$

Заметим, что $\Delta \subseteq \Sigma$. Действительно, для всякого $A \in \Delta$ семейство $W := \{A\}$ является подмножеством Δ, следовательно $A = \bigcap_{T \in W} T \in \Sigma$.

Покажем, что любая топология, которая содержит как подмножество Δ, содержит и Σ как подмножество. Действительно, пусть $A \in \Sigma$ (будем считать, что A — не X и не $\varnothing$; иначе утверждение очевидно). Тогда есть конечное семейство $W \subseteq \Delta$, что $A = \bigcap_{T \in W} T$. Пусть Ω — любая топология, содержащая Δ как подмножество. Тогда $W \subseteq \Omega$, а следовательно $A = \bigcap_{T \in W} T \in \Omega$. Таким образом $\Sigma \subseteq \Omega$. Поэтому для топология, для которой Σ будет предбазой, Δ тоже будет предбазой.

Покажем, что Σ удовлетворяет критерию базы.

- $X \in \Sigma$, значит Σ — покрытие X.
- Пусть $A, B \in \Sigma$. Если $A = X$, то $A \cap B = B = \bigcup_{T \in W} T$, где $W := \{B\} \subseteq \Sigma$. Если $A = \varnothing$, то $A \cap B = \varnothing = \bigcup_{T \in W} T$, где $W := \varnothing \subseteq \Sigma$. Аналогично, если B есть X или $\varnothing$. Иначе есть непустые $V, U \subseteq \Delta$, что $A = \bigcap_{T \in V} T$, а $B = \bigcap_{T \in U} T$. Следовательно $A \cap B = \bigcap_{T \in V \cup U} T$. Но поскольку $V \cup U \subseteq \Delta$, то $A \cap B \in \Sigma$. Таким образом $A \cap B = \bigcup_{T \in W} T$, где $W := \{A \cap B\} \subseteq \Sigma$.

Рассмотрим

$$\Omega := \left\{ \bigcup_{S \in \Lambda} S \mid \Lambda \subseteq \Sigma \right\}$$

По теореме о критерии базы Ω — топология, где Σ — база. С другой стороны Ω — множество, которое содержится как подмножество в любой топологии, которая содержит как подмножество Σ. Следовательно Ω — минимальное топология, содержащая как подмножество Σ, а значит и Δ. Поэтому Δ — предбаза в Ω. $\square$

Теорема 19. *Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, а $A \subseteq X$. Тогда множество*

$$\Omega_A := \{U \cap A \mid U \in \Omega\}$$

есть топология на A.

Определение 21. Пусть (X, Ω) топологическое пространство, а $A \subseteq X$. Тогда

$$\Omega_A := \{U \cap A \mid U \in \Omega\}$$

— топология, *индуцированная* множеством A, а (A, Ω_A) — подпространство (X, Ω).

Теорема 20.

- *Множества, открытые в подпространстве, не обязательно открыты в объемлющем пространстве.*
- *Открытые множества открытого подпространства открыты и во всём пространстве.*

- *Если Σ — база топологии Ω, то*

$$\Sigma_A := \{U \cap A \mid U \in \Sigma\}$$

  — база индуцированной топологии.

- *Пусть (X, Ω) — топологическое пространство и $B \subseteq A \subseteq X$. Тогда $(\Omega_A)_B = \Omega_B$, т.е. топология, которая индуцируется в B топологией, индуцированной в A, совпадает с топологией,индуцированной непосредственно из X.*

Определение 22. Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если прообраз всякого открытого множества из Y открыт в X.

Теорема 21.

- *Отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз замкнутого замкнут.*
- *Композиция непрерывных отображений непрерывно.*
- *Пусть Z — подпространство X, а $f : X \to Y$ непрерывно. Тогда $f|_Z : Z \to Y$ непрерывно.*
- *Пусть Z — подпространство Y, $f : X \to Y$ и $f(X) \subseteq Z$. Пусть $\widetilde{f} : X \to Z, x \mapsto f(x)$. Тогда f непрерывна тогда и только тогда, когда $\widetilde{f}$ непрерывна.*

Определение 23. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $a \in X$, если для любой окрестности U точки $f(a)$ существует такая окрестность V точки a, что $f(V) \subseteq U$.

Теорема 22. *Отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке пространства X.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Очевидно, $V = f^{-1}(U)$.

($\Leftarrow$) Пусть $U \in \Omega_Y$. Тогда для всякого $a \in f^{-1}(U)$ есть окрестность V_a точки a, что $V_a \subseteq f^{-1}(U)$. Следовательно любая точка $f^{-1}(U)$ внутренняя, а значит $f^{-1}(U)$ открыто.

$\square$

Теорема 23. *Пусть X и Y — топологические пространства, $a \in X$, $f : X \to Y$, Σ_a — база окрестностей в точке a и $\Lambda_{f(a)}$ — база окрестностей в точке $f(a)$. Тогда f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда для всякого $U \in \Lambda_{f(a)}$ есть $V \in \Sigma_a$, что $f(V) \subseteq U$.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть f непрерывна в a. Рассмотрим любое $U \in \Lambda_{f(a)}$. U — окрестность $f(a)$, соответственно есть W — окрестность a, что $f(W) \subseteq U$. Но тогда есть $V \in \Sigma_a$, что $V \subseteq W$. Тогда $V \in \Sigma_a$ и $f(V) \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Пусть для всякого $U \in \Lambda_{f(a)}$ найдётся $V \in \Sigma_a$, что $f(V) \subseteq U$. Рассмотрим любую окрестность U точки $f(a)$. Тогда есть семейство $W \in \Lambda_{f(a)}$, что $W \subseteq U$. Следовательно найдётся $V \in \Sigma_a$, что $f(V) \subseteq W$, а следовательно V — окрестность a, и $f(V) \subseteq U$.

$\square$

Следствие 23.1. *Пусть X, Y — метрические пространства, $a \in X$, $f : X \to Y$. Тогда*

1. *f непрерывно в точке a тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \quad f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$$

2. *f непрерывно в точке a тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \quad d_X(x,a) < \delta \to d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Определение 24. Пусть X, Y — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *липшицевым*, если:

$$\exists C > 0:\ \forall a, b \in X \quad d_Y(f(a), f(b)) \leqslant C \cdot d_X(a, b)$$

Значение C называют *константой Липшица* отображения f.

Теорема 24. *Всякое липшицево отображение непрерывно.*

Доказательство. Действительно,

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \delta := \frac{\varepsilon}{C} \quad \Longrightarrow \quad \Big(d_X(x,a) < \delta \quad \longrightarrow \quad d_Y(f(x), f(a)) \leqslant C \cdot d_X(x,a) < C \cdot \delta = \varepsilon\Big)$$

□

Пример 5.

- Пусть фиксирована точка x_0 в метрическом пространстве (X, d). Тогда отображение

  $$f : X \to \mathbb{R},\ a \mapsto d(a, x0),$$

  непрерывно.

- Пусть A — непустое подмножество метрического пространства (X, d). *Расстоянием от точки $x \in X$ до множества A* называется число

  $$d(x, A) := \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

  Отображение

  $$f : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x, A),$$

  непрерывно.

- Метрика d на множестве X является непрерывным отображением $X \times X \to \mathbb{R}$.

Определение 25. Покрытие Γ топологического пространства X называется *фундаментальным*, если

$$\forall U \subseteq X: \quad \Big(\forall A \in \Gamma \quad U \cap A \text{ открыто в } A\Big) \quad \longrightarrow \quad \Big(U \text{ открыто в } X\Big)$$

Лемма 25. *Покрытие Γ топологического пространства X фундаментально тогда и только тогда, когда*

$$\forall V \subseteq X \quad \Big(\forall A \in \Gamma \quad V \cap A \textit{ замкнуто в } A\Big) \quad \longrightarrow \quad \Big(U \textit{ замкнуто в } X\Big)$$

Доказательство.

(⇒) Пусть Γ фундаментально. Рассмотрим $V \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $V \cap A$ замкнуто в A. Следовательно $(X \setminus V) \cap A$ открыто в A, а тогда по фундаментальности Γ множество $X \setminus V$ открыто, а значит всё V замкнуто.

(⇐) Аналогично, поменяв местами слова "открыто"и "замкнуто".

□

Теорема 26. *Пусть X, Y — топологические пространства, Γ — фундаментальное покрытие X и $f : X \to Y$. Если сужение f на всякое $A \in \Gamma$ непрерывно, то и само f непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим любое открытое в Y множество U. Если $A \in \Gamma$, то $f^{-1}(U) \cap A = (f|_A)^{-1}(U)$ открыто. А в таком случае из фундаментальности Γ следует, что $f^{-1}(U)$ открыто. Таким образом f непрерывно. □

Определение 26. Покрытие топологического пространства называется

- *открытым*, если оно состоит из открытых множеств;
- *замкнутым* — если из замкнутых;
- *локально конечным* — если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия.

Теорема 27.

1. *Всякое открытое покрытие фундаментально.*
2. *Всякое конечное замкнутое покрытие фундаментально.*
3. *Всякое локально конечное замкнутое покрытие фундаментально.*

Доказательство. Пусть Γ — данное покрытие.

1. Пусть дано $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ открыто в A, а значит открыто в X. Тогда
$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$
есть объединение открытых множеств, а значит само открыто. Таким образом Γ фундаментально.

2. Пусть дано $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ замкнуто в A, а значит замкнуто в X. Тогда
$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$
есть конечное объединение замкнутых множеств, а значит само замкнуто. Таким образом Γ фундаментально.

3. Пусть дано $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ открыто в A. Рассмотрим некоторую точку $u \in U$ и её окрестность V_u, которая пересекается с конечным набором Γ_u элементов из Γ. Тогда для всякого $A \in \Gamma_u$ множество
$$U \cap A \cap V = (U \cap A) \cap (A \cap V)$$
открыто в $V \cap A$. При этом
$$\{V \cap A \mid A \in \Gamma_u\}$$
— конечное замкнутое покрытие, а значит $U \cap V$ открыто в V, а значит и в X. Таким образом $U \cap V$ — окрестность u, а значит u — внутренняя точка U. Значит U открыто.

□

Теорема 28. *Пусть* (X, Ω_X) *и* (Y, Ω_Y) — *топологические пространства. Тогда*

$$\Sigma := \{U \times V \mid U \in \Omega_X \wedge V \in \Omega_Y\}$$

является базой топологии на $X \times Y$.

Доказательство. Проверим критерий базы:

1. $X \in \Omega_X$, $Y \in \Omega_Y$, следовательно $X \times Y \in \Sigma$. Таким образом Σ — покрытие $X \times Y$.
2. Пусть $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \Sigma$. Тогда $U_1 \cap U_2 \in X$, $V_1 \cap V_2 \in Y$, а значит $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \Sigma$.

Таким образом Σ — база. □

Определение 27. Пусть (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) — топологические пространства, а $\Omega_{X \times Y}$ — топология, порождённая базой Σ из предыдущей теоремы. Тогда $(X \times Y, \Omega_{X \times Y})$ называется *произведением* топологических пространств, а сама $\Omega_{X \times Y}$ называется *стандартной* топологией.

Замечание 2. По аналогии если Σ_X и Σ_Y — базы топологий Ω_X и Ω_Y соответственно, то

$$\Lambda := \{U \times V \mid U \in \Sigma_X \wedge V \in \Sigma_Y\}$$

также являются базой стандартной топологии на $X \times Y$.

Определение 28. Обозначения:

- $X = \prod_{i \in I} X_i$– произведение топологических пространств.
- Элементами X являются такие функции $x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$, что $x(i) \in X_i$.
- $p_i : X \to X_i$ — координатная проекция, где $p_i(x) := x(i)$.

Определение 29. Пусть $\{(X_i, \Omega_i)\}_{i \in I}$ — семейство топологических пространств. *Тихоновская топология* на $X = \prod_{i \in I} X_i$ задаётся предбазой, состоящей из всевозможных множеств вида $p^{-1}(U)$, где $i \in I$, а $U \subseteq \Omega_i$.

Замечание 3. В случае конечного произведения тихоновская топология совпадает со стандартной.