

Дискретная математика.

А. В. Тискин

Содержание

1	Булевы функции	1
2	Комбинаторика	3
3	Теория графов	4

1 Булевы функции

Определение 1. $\mathbb{B} := \{0; 1\}$. Булева функция — $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$.

Множество булевых функций — P_2 .

Множество булевых функций — $P_2^{(n)}$.

Количество всех булевых функций — $|P_2^{(n)}| = 2^{2^n}$.

Определение 2. Базовые функции:

- $0, 1$ — функции-константы.
- $\neg x := 1 - x$
- \wedge и \vee — стандартные AND и OR.

Определение 3. Булева функция $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ существенно зависит от x_i , если существуют $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$, что $f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Определение 4. Пусть F — множество булевых функций. Тогда сигнатурой F или множеством формул над F называется множество итеративно заданных формул по принципу:

- формальный символ x ;
- $f(A_1, \dots, A_n)$, где $f \in F$, а A_1, \dots, A_n — уже определённые функции.

Формула реализует некоторую функцию (не обязательно из F). Формулы реализующие одну и ту же функцию называются эквивалентными.

Определение 5. Функция f выражима через F , если существует формула над F , реализующая f .

Определение 6. Замыкание F — множество $[F]$ функций, выражимых через F .

Утверждение 1.

- $F \subseteq [F]$

- $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow [F_1] \subseteq [F_2]$
- $[[F]] = [F]$

Определение 7. Множество F булевых функций называется *замкнутым*, если $F = [F]$.

Определение 8. Пусть R замкнуто, а $Q \subseteq R$.

- Q *полно* для R , если $[Q] = R$.
- R *конечно порождено*, если существует конечное полное для R множество Q , подмножество R . Минимальное по включению Q — *базис* R .

Определение 9. Функция f называется *монотонной*, если

$$\forall x_1 \leq x'_1, \dots, x_n \leq x'_n : f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x'_1, \dots, x'_n).$$

Утверждение 2. Множество монотонных функций замкнуто.

Определение 10.

Литерал — это x или $\neg x$, где x — формальный символ (переменная).

Элементарная конъюнкция — $Y_1 \wedge \dots \wedge Y_k$, где Y_1, \dots, Y_k — литералы (с попарно различными элементами).

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) — $Z_1 \vee \dots \vee Z_m$, где Z_1, \dots, Z_m — (различные) элементарные конъюнкции.

Совершенная ДНФ — для любой функции f от n переменных

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n},$$

где $x^0 = \neg x$, а $x^1 = x$.

Утверждение 3. Система $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *полна* (в P_2).

Следствие 0.1. Системы $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{1, \wedge, \oplus\}$, $\{\uparrow\}$ и $\{\downarrow\}$ *полны*.

Определение 11. Аналогично определяется (совершенная) *конъюнктивная нормальная форма (КНФ)*.

Определение 12. Двойственная функция к f — $f^* := \neg f(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$.

Свойства:

- $f^{**} = f$

Утверждение 4 (принцип двойственности). Если f реализуема формулой Φ , то f^* реализуема формулой Φ^* , где все функции заменяются на двойственные.

Определение 13 (полином Жегалкина (над \mathbb{F}_2)). Выражение функции в базисе $\{1, \wedge, \oplus\}$.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}} a_{i_1, \dots, i_s} x_{i_1} \dots x_{i_s}$$

Теорема 1 (Жегалкин). Любая функция реализуется полиномом Жегалкина единственным образом (с точностью до пропуска членов тождественно равных 0 и перестановок слагаемых и сомножителей).

Доказательство. Всего коэффициентов $a_{i_1, \dots, i_s} = 2^n$. Тогда многочленов Жегалкина ровно 2^{2^n} ; сколько и булевых функций. Покажем, что для каждой функций найдётся полином Жегалкина, и тогда докажем теорему.

Построение полинома аналогично рассуждению в формуле включений-исключений. Сначала рассмотрим значение f в точке $(0, \dots, 0)$: оно определяет свободный член полинома. Далее рассмотрим значение f и имеющегося полинома (пока что состоящего только из, может быть, свободного члена) в точках вида $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$: по ним определяются коэффициенты при мономах первой степени (по аналогии с формулой включений-исключений). Так далее определяются все коэффициенты. \square

Определение 14. Функция f самодвойствена, если $f = f^*$.

Пример 1.

- e_i и $\neg e_i$ для любого n и i самодвойственны;
- $\vee, \wedge, \oplus, \rightarrow, \leftarrow, \uparrow$ и \downarrow не самодвойственны.

Утверждение 5. Класс S самодвойственных функций замкнут.

Определение 15. f линейна, если $f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus \dots \oplus (a_n \wedge x_n)$ для некоторых a_1, \dots, a_n .

Они же представляются как полиномы Жегалкина степени не выше первой.

Утверждение 6. Класс L линейных функций замкнут.

Теорема 2 (теорема Поста). Система функций полна (в P_2) тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из T_0, T_1, S, L и M .

Доказательство. Пусть даны $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_S \notin S, f_L \notin L, f_M \notin M$.

Заметим, что $f_0(x, \dots, x) \in \{1, \neg\}$, а $f_1(x, \dots, x) \in \{0, \neg\}$. Тогда либо $0, 1 \in \{f_0, f_1\}$, либо $\neg \in \{f_0, f_1\}$.

Заметим, что для некоторых $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ имеем $f_S(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f_S(\neg\sigma_1, \dots, \neg\sigma_n)$. Поэтому $f_S(x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma)$ — константная функция, а тогда она и $\neg f_S(x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma)$ вместе дают 0 и 1, поэтому $0, 1 \in \{\neg, f_S\}$.

Заметим, что $\neg \in \{0, 1, f_M\}$.

Заметим, что $\wedge \in \{f_L\}$ или $\uparrow \in \{f_L\}$. Для заметим, что в полиноме Жегалкина f_L есть член хотя бы второй степени. \square

2 Комбинаторика

Утверждение 7 (правило произведения). Если объект A можно выбрать t способами, а $B = n$, то пару $(A; B)$ можно выбрать tn способами.

Утверждение 8 (правило суммы). Если объект A можно выбрать t способами, а $B = n$ способами, то объект “ A или B ” — $t + n$ способами.

Утверждение 9 (принцип Дирихле). Пусть имеется $n + 1$ шаров, разложенных по n урнам, то найдётся урна с хотя бы 2 шарами.

Утверждение 10 (обобщённый принцип Дирихле). Пусть имеется n шаров, разложенных по k урнам, то найдётся урна с хотя бы $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ шарами.

Определение 16. Упорядоченная расстановка n элементов в ряд есть упорядоченная последовательность этих n элементов без повторов. Количество упорядоченных расстановок на n элементах равно $n! := \prod_{k=1}^n k$.

Упорядоченная расстановка k элементов из n в ряд есть упорядоченная последовательность каких-то k элементов из n без повторов. Количество упорядоченных расстановок k элементов из n равно $P(n, k) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

k -элементная выборка среди n элементов есть подмножество множества данных n элементов. Таких выборов $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Утверждение 11. Свойства:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2. (тождество Паскаля) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

3. (биномиальная теорема)

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

4.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

5.

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

6. (тождество Вандермонда)

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{r=0}^k \binom{m}{r} \binom{n}{k-r}$$

Определение 17. Треугольником Паскаля называется диаграмма следующего вида.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Здесь каждое число равно сумме своих верхних соседей, а порождающими являются единичные левая и правая “стороны” диграммы.

3 Теория графов

To be read...