Домашнее задание от 28.09.
Теоретическая информатика. 2 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 204 (20.Б04-мкн)

3 октября 2021 г.

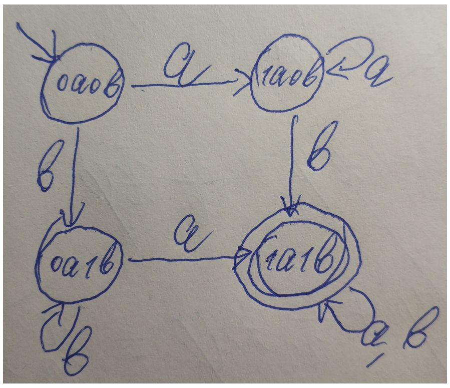
Содержание

Задача (2.3)**.** Для всякого $p \geqslant 1$ можно взять слово $w := a^p b^p \in L$, и тогда для всякого разбиения $w = xyz$, где $|xy| \leqslant p$ и $y \neq \varepsilon$, верно что $x = a^k$, $y = a^l$, $z = a^{p-k-l}b^p$, а значит для всякого $m \geqslant 2$

$$xy^m z = a^{k+ml+(p-k-l)}b^p = a^{p+(m-1)l}b^p \notin L.$$

Получаем прямое противоречие с леммой о накачке.

Задача (2.4)**.**



Задача (2.5)**.** Для всякого $p \geqslant 1$ можно взять слово $w := a^p b^{p!+p} \in L$, и тогда для всякого разбиения $w = xyz$, где $|xy| \leqslant p$ и $y \neq \varepsilon$, верно что $x = a^k$, $y = a^l$, $z = a^{p-k-l}b^{p!+p}$, а значит есть $m = \frac{p!+l}{l}$, что $k + ml + (p - k - l) = p! + p$, а тогда

$$xy^m z = a^{k+ml+(p-k-l)}b^{p!+p} = a^{p!+p}b^{p!+p} \notin L.$$

Получаем прямое противоречие с леммой о накачке.

Задача (4.2)**.** Пусть ДКА $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ реализует язык L. Рассмотрим ДКА

$$B := (\Sigma, Q^Q, f_0 := \mathrm{Id}_Q, \eta, \{f \in Q^Q \mid \exists i \geqslant 2\colon\ f^i(q_0) \in F\}),$$

где

$$\eta(f, a) := \delta_a \circ f.$$

Тогда несложно видеть, что $\eta(f_0, w) = \delta^*_w$, а тогда w принимается тогда и только тогда, когда есть $i \geqslant 2$, что $(\delta^*_w)^i(q_0) \in L$, т.е. $\delta(q_0, w^i) \in L$, т.е. $w_i \in L$. Таким образом

$$L(B) = E(L).$$

Задача (4.3)**.** Пусть $L = \Sigma^*$ — очевидно, регулярный. Тогда $\mathrm{PAL}(L)$ — язык всех палиндромов — не регулярен (задача 2.1).

Задача (4.4)**.** Пусть ДКА $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ реализует язык L. Рассмотрим НКА

$$B := (\Sigma, Q^Q \cup Q \times Q^Q, f_0 := \mathrm{Id}_Q, \eta, \{(q, f) \in Q \times Q^Q \mid f(q) \in F\}),$$

где

$$\eta(t, a) := \begin{cases} \{\delta_a \circ t; (q_0, \delta_a \circ t)\} & \text{если } t \in Q^Q, \\ \{(\delta(q, a), f)\} & \text{если } t = (q, f) \in Q \times Q^Q. \end{cases}$$

Тогда несложно показать по индукции, что $\eta^*(f_0, w)$ — множество, состоящее из δ_w и пар $(\delta(q_0, u), \delta_v)$ для каждого разбиения $w = vu$. А тогда w принимается тогда и только тогда, когда есть разбиение $w = vu$, что $\delta_v(\delta(q_0, u)) \in L$, т.е. $\delta(\delta(q_0, u), v) \in L$, т.е. $\delta(q_0, uv) \in L$. Таким образом

$$L(B) = \mathrm{SHIFT}(L).$$

Задача (4.5)**.** Пусть ДКА $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ реализует язык L. Рассмотрим ДКА

$$B := (\Sigma, Q \times 2^Q, (q_0; F), \eta, \{(q; S) \in Q \times 2^Q \mid q \in S\}),$$

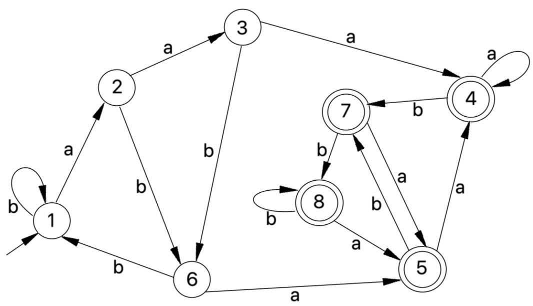
где

$$\eta((q, S), a) := (\delta(q, a), \{p \in Q \mid \exists s \in \Sigma^2 \colon\ \delta(p, s) \in S\}).$$

Тогда несложно видеть, что $\eta(q_0, w) = (\delta(q_0, w), S)$, где S — множество состояний, из которых можно попасть хоть как-нибудь в F за ровно $|w|$ переходов. А тогда w принимается тогда и только тогда, когда есть $v \in \Sigma^{2|w|}$, что $\delta(q_0, wv) \in F$. Таким образом

$$L(B) = 1/3(L).$$

Задача (5.1)**.**



Будем использовать нумерацию рисунка. Тогда мы имеем последовательность разбиений:

$$\{\{1; 2; 3; 6\}; \{4; 5; 7; 8\}\}$$

(1 и 2 имеют стрелки a и b в первое множество, а 3 и 6 — стрелку a во второе, b в первое)

$$\{\{1; 2\}; \{3; 6\}; \{4; 5; 7; 8\}\}$$

(3 имеет стрелку b во второе множество, а 6 — в третье)

$$\{\{1; 2\}; \{3\}; \{6\}; \{4; 5; 7; 8\}\}$$

(1 имеет стрелку a в первое множество, а 2 — нет)

$$\{\{1\};\{2\};\{3\};\{6\};\{4;5;7;8\}\}$$

(первые четыре множества неделимы, а последнее имеет стрелки в себя, поэтому тоже неделимо).

Итого нужно просто склеить все принимающие состояния в одно.