

# Алгебраическая геометрия.

Лектор — Иван Александрович Панин

Создатель конспекта — Глеб Минаев \*

## TODOs

Дописать. . . . .	2
Дописать. . . . .	3
Ref . . . . .	4
Дописать? . . . . .	8
Обозначить это по-нормальному. . . . .	9

## Содержание

0.1 Алгебраические и чисто трансцендентные расширения полей . . . . .	5
---	---

Литература:

- Хартсхорн, “Алгебраическая геометрия”.
- Атья, Макдональд, “Введение в коммутативную алгебру”.

*Замечание 1.* Все кольца ассоциативны, коммутативны и с единицей.

**Определение 1.** Пусть  $I$  — частично упорядоченное по порядку  $\leq$  множество, т.е.

$$a \leq b \leq c \implies a \leq c.$$

ОВУ: всякая последовательности элементов  $i_1 \leq i_2 \leq \dots$  стабилизируется с некоторого момента (т.е. последовательность имеет константный хвост).

*Наличие минимального элемента.* Для всякого  $J \subseteq I$  существует  $j_{\max} \in J$ , что для всякого  $j \in J$  имеет место следствие  $j_{\max} \leq j \Rightarrow j = j_{\max}$ .

**Лемма 1.**  $I$  удовлетворяет ОВУ тогда и только тогда, когда  $I$  удовлетворяет наличию минимального элемента.

**Доказательство.**

$\Rightarrow$ ) Предположим, что максимального элемента, т.е. для всякого элемента есть строго больший. Тогда мы можем построить строго возрастающую последовательность, что противоречит ОВУ.

---

\*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

$\Leftarrow$ ) Пусть дана нестрогая возрастающая последовательность  $(i_m)_{m=1}^\infty$ . Тогда применяя свойство наличия максимального элемента для  $J := \{i_m\}_{m=1}^\infty$ , получаем, что есть  $j_M \in J$  (для некоторого  $M$ ), для которого нет строго большего в  $J$ . Значит после  $j_M$  все элементы с ним совпадают.

□

**Определение 2.** Пусть  $A$  — кольцо, а  $M$  —  $A$ -модуль. Тогда  $\text{mod}(A)$  — множество всех подмодулей в  $M$ , упорядоченных по включению  $((0), M \in \text{mod}(M))$ .

$M$  нётеров, если  $\text{mod}(A)$  удовлетворяет ОВУ (или наличию максимального элемента).

**Лемма 2.**

1. Если  $M$  нётеров, то любой подмодуль  $N \subseteq M$  конечнопорождён (как  $A$ -модуль).
2. Если любой подмодуль  $M$  конечнопорождён, то  $M$  нётеров.

**Доказательство.**

$1 \Rightarrow 2$ ) Пусть  $M$  нётеров,  $N \subseteq M$  — подмодуль. Пусть  $I$  — все конечнопорождённые модули в  $N$ .

$I$  непуст, так как  $(0) \in I$ . Следовательно, в  $I$  есть максимальный элемент, пусть  $N_{\max}$ . Если  $N_{\max} = N$ , то  $N$  конечнопорождён. Если  $N_{\max} \neq N$ , то существует  $x \in N \setminus N_{\max}$ , что  $N_{\max} \not\subseteq N_{\max} + x \cdot A \subseteq N$  — противоречие.

$2 \Rightarrow 1$ ) Пусть имеется последовательность  $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$  подмодулей  $M$ . Определим

$$M_\infty := \bigcup_{m=1}^\infty M_m.$$

$M_\infty$  тоже подмодуль  $M$ . Значит  $M_\infty$  конечнопорождён.  $x_1, \dots, x_n \in M_\infty$ , значит есть  $n_0$ , что  $x_1, \dots, x_n \in M_{n_0}$ . Следовательно,

$$M_{n_0} = M_{n_0+1} = M_{n_0+2} = \dots$$

□

**Лемма 3.**  $M'$  — подмодуль  $M$  и есть сюръективный гомоморфизм  $\pi : M \rightarrow M/M' = M''$ . Тогда  $M$  нётеров тогда и только тогда, когда  $M'$  и  $M''$  нётеровы.

**Доказательство.** Пусть  $M$  — нётерово. Покажем, что  $M'$  нётерово. Пусть есть цепочка  $M'_1 \subseteq M'_2 \subseteq \dots$  подмодулей  $M$ .  $M$  нётерово, значит цепочка стабилизируется, значит  $M'$  нётерова.

Покажем, что  $M''$  нётерово. Пусть есть цепочка подмодулей  $M''_1 \subseteq M''_2 \subseteq \dots$ . Следовательно  $[\pi(\pi^{-1}(M''_1) \subseteq \pi^{-1}(M''_2) \subseteq \dots)] \subseteq M$ . Значит цепочка стабилизируется. Значит стабилизируется изначальная цепочка, значит  $M''$  нётерово.

Теперь предположим, что  $M'$  и  $M''$  нётеровы.

Дописать.

□

**Определение 3.** Кольцо  $A$  нётерово, если как модуль над собой нётерово.

*Замечание 2.*  $1$  — образующая  $A$  как  $A$ -модуля. Всякий идеал  $I$  является подмодулем  $A$ , но может не иметь одного образующего.

**Определение 4.** Идеал  $I$  кольца  $A$  — непустое подмножество  $A$ , что для всяких  $a, b \in I$   $a + b \in I$  и для всяких  $a \in I, k \in A$   $ak \in I$ .

**Лемма 4.** Пусть дано кольцо  $A$ . TFAE

1.  $A$  нётерово.
2. Любая цепочка идеалов  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$  стабилизируется.
3. Всякий идеал  $I$  конечнопорождён.

**Доказательство.**

$1 \Leftrightarrow 2$ ) По определению.

$1 \Leftrightarrow 3$ ) По лемме 2.

□

**Лемма 5.** Пусть дано нётерово кольцо  $A$ . Тогда для всякого  $n \geq 0$   $A^n$  — нётеров модуль.

**Доказательство.**  $(0)$  — нётеров.  $A^1 = A$  — нётеров. Далее легко провести по индукции, что  $A^{n-1}$  нётерово и  $A^n/A^{n-1} = A$  нётерово, а тогда  $A^n$  нётерово. □

**Следствие 5.1.** Если  $A$  — нётерово кольцо, то всякий конечнопорождённый  $A$ -модуль  $M$  нётеров.

**Доказательство.** Пусть  $m_1, \dots, m_r \in M$  — система порождающих модуля  $M$ . Тогда имеем сюръективный гомоморфизм  $A^r \rightarrow M$ , порождённый  $e_i \mapsto m_i$ . Следовательно, по лемме 3 из нётеровости  $A^r$  следует нётеровость  $M$ . □

**Следствие 5.2.** Если  $M$  — конечнопорождённый модуль и  $N$  — подмодуль  $M$ , то  $N$  конечнопорождён. В частности всякий подмодуль  $N \subseteq A^r$  конечнопорождён.

**Доказательство.**

Дописать.

□

**Теорема 6** (Гильберта). Если кольцо  $A$  нётерово, то  $A[t]$  нётерово.

**Доказательство.** Пусть фиксирован некоторый идеал  $I$  в  $A[t]$ . Как только мы покажем, что  $I$  конечнопорождён, то применяя лемму 4, получим нётеровость  $A[t]$ .

Пусть  $\mathcal{A} \subseteq A$  — множество старших членов многочленов из  $I$ .

**Лемма 6.1.**  $\mathcal{A}$  — идеал. И, следовательно, конечнопорождено.

**Доказательство.** Действительно, для всяких  $a, b \in \mathcal{A}$  есть многочлены  $f_a, f_b \in I$  со старшими коэффициентами  $a$  и  $b$  соответственно. Следовательно  $f_a t^{\deg(f_b)} + f_b t^{\deg(f_a)}$  лежит в  $I$  и имеет старший коэффициент  $a + b$  (если только  $a + b \neq 0$ ; иначе очевидно). Также если  $a \in \mathcal{A}$ , а  $k \in A$ , то есть многочлен  $f_a \in I$  с данным старшим коэффициентом. Но тогда  $k f_a$  (если  $ak \neq 0$ ; иначе очевидно) лежит в  $I$  и имеет старший член  $ak$ . □

Рассмотрим  $a_1, \dots, a_r$  — система порождающих  $\mathcal{A}$ , а  $f_1, \dots, f_r$  — многочлены из  $I$  с данными старшими коэффициентами.

Тогда всякий  $f \in I$  порождается тогда и только тогда, когда порождается соответствующий ему  $g \in I$  степени меньше  $n := \max_k \deg(f_k)$ , так как иначе с помощью старших членов  $f_i$  можно породить старший член  $f$ , вычесть его из  $f$  и тем самым понизить степень. Значит вопрос свёлся к порождаемости многочленов из  $I$  степени не выше  $n$ .

Заметим, что описанные многочлены образуют модуль  $I \cap (A \oplus At \oplus \dots \oplus At^{n-1})$  — подмодуль  $A^n$ . Значит  $I \cap (A \oplus At \oplus \dots \oplus At^{n-1})$  конечнопорождён, а отсюда  $I$  конечнопорождён.  $\square$

**Лемма 7.** Если  $B$  — нётерово кольцо,  $C$  — кольцо, а  $\varphi : B \rightarrow C$  — гомоморфизм колец, то  $\varphi(B)$  — нётерово.

**Доказательство.** Пусть дана последовательность идеалов  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$  в  $\varphi(B)$ . Тогда  $\varphi^{-1}(I_i)$  — идеалы и

$$\varphi^{-1}(I_1) \subseteq \varphi^{-1}(I_2) \subseteq \dots$$

Значит с какого-то момента эта цепочка стабилизируется, а значит стабилизируется образ этой цепочки по  $\varphi$ , т.е. изначальная цепочка.  $\square$

**Лемма 8.** Если  $\psi : A \rightarrow C$  — гомоморфизм колец, такой что  $C$  — конечная  $A$ -алгебра, порождённая элементами  $x_1, \dots, x_n$ . Тогда  $C$  нётерово.

**Доказательство.** Мы можем рассмотреть нативное вложение  $A$  в  $A[t_1, \dots, t_n]$  и гомоморфизм  $A$ -алгебр  $\varphi : A[t_1, \dots, t_n] \rightarrow C$ , порождённый  $\psi$  и соотношениями  $\varphi(t_i) = x_i$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & C \\ & \searrow & \nearrow \varphi \\ & A[t_1, \dots, t_n] & \end{array}$$

$\varphi$  сюръективен, а  $A[t_1, \dots, t_n]$  нётерово. Таким образом  $\varphi(B) = C$  нётерово.  $\square$

*Замечание 3.* Всякое поле нётерово.

**Следствие 8.1.** Любая конечнопорождённая  $F$ -алгебра, где  $F$  — поле, нётерова.

*Замечание 4.* •  $\mathbb{Z}$  — нётерово кольцо.

- Всякое кольцо является  $\mathbb{Z}$ -кольцом.
- Если кольцо  $R$  — конечнопорождённая  $\mathbb{Z}$ -алгебра, то оно нётерово.

**Лемма 9.** Пусть  $A$  — нётерово кольцо, а  $M''$  —  $A$ -модуль. Тогда  $M$  конечнопорождён тогда и только тогда, когда нётеров.

**Доказательство.** Если  $M''$  нётеров, то уже доказано, что  $M''$  конечнопорождён, так как является собственным подмодулем (см. лемму).

Если  $M''$  конечнопорождено, то есть система порождающих  $m_1, \dots, m_s$ . Тогда есть сюръективный гомоморфизм

$$\varphi : A^s \rightarrow M'', e_i \mapsto m_i.$$

При этом  $A^s$  нётеров, значит  $M''$  нётеров.  $\square$

**Лемма 10.** Пусть даны кольца  $A \subseteq B \subseteq C$ , что  $A$  — нётерово,  $C$  — конечнопорождённый  $B$ -модуль и конечнопорождённая  $A$ -алгебра. Тогда  $B$  — конечнопорождённая  $A$ -алгебра.

**Доказательство.** Пусть  $y_1, \dots, y_n$  — система порождающих  $C$  как  $A$ -алгебру, а  $x_1, \dots, x_m$  — система порождающих  $C$  как  $B$ -модуль. Тогда есть  $b_{i,j} \in B$ , что

$$y_i = \sum b_{i,j} x_j,$$

и  $b_{i,j,k} \in B$ , что

$$x_i x_j = \sum b_{i,j,k} x_k.$$

Пусть  $B_0$  — это  $A$ -подалгебра в  $B$ , порождённая всеми  $b_{i,j}$  и  $b_{i,j,k}$ . Заметим, что количество перечисленных порождающих конечно, т.е.  $B_0$  — конечнопорождённая алгебра. Следовательно,  $B_0$  нётерова.

Поймём, что  $C$  порождается уже над  $B_0$  элементами  $x_1, \dots, x_n$ . Действительно, для всякого  $c \in C$  есть  $F \in A[t_1, \dots, t_n]$ , что  $c = F(y_1, \dots, y_n)$ . При этом  $y_i = \sum b_{i,j} x_j$ . Значит

$$c = G(x_1, \dots, x_m) \in B_0 x_1 + \dots + B_0 x_m,$$

так как при раскрытии скобок каждый квадратный  $x_i x_j$  член заменяется на линейную сумму  $\sum b_{i,j,k} x_k$ , т.е. можно запустить банальный алгоритм понижения степени и получить линейное по  $x_i$  выражение.

Таким образом  $C$  как  $B_0$ -модуль конечнопорождён (а  $B_0$  нётеров), значит всякий  $B_0$ -подмодуль в  $C$  конечнопорождён, значит  $B$  — конечнопорождённый  $B_0$ -модуль. Поскольку  $B_0 \subseteq B$ , то  $B$  — конечнопорождённая  $B_0$ -алгебра. Следовательно,  $B$  — конечнопорождённая  $B_0$ -алгебра, а  $B_0$  — конечнопорождённая  $A$ -алгебра, и тогда  $B$  — конечнопорождённая  $A$ -алгебра.  $\square$

## 0.1 Алгебраические и чисто трансцендентные расширения полей

**Определение 5.** Пусть есть поле  $F$ , содержащееся в поле  $E$ . Элемент  $x \in E$  называется *алгебраическим над  $F$* , если есть  $g \in F[t]$ , что  $g(x) = 0 \in E$ . Иначе  $x$  называется *трансцендентным над  $F$* .

**Лемма 11.** Если  $x$  алгебраический над  $F$ , то рассмотрим  $F$ -подалгебру  $F[x]$  в  $E$ , порождённую  $x$ , т.е. есть гомоморфизм алгебр  $\varphi : F[t] \rightarrow E$ , порождённый соотношением  $\varphi(t) = x$ , определяет алгебру  $\varphi(F[t])$ . Тогда существует неприводимый многочлен  $f \in F[t]$ , что  $f(x) = 0$  и  $F[x] = \varphi(F[t]) = F[t]/(f)$ .

**Доказательство.**  $\varphi$  — гомоморфизм алгебр, а значит гомоморфизм колец, значит  $\text{Ker}(\varphi) \subseteq F[t]$  непуст (из-за алгебраичности  $x$ ) и является идеалом. Но всякий идеал в  $F[t]$  является главным, следовательно  $\text{Ker}(\varphi) = (f(t))$  для некоторого  $f \in F[t]$ . При этом, так как  $E$  поле,  $\text{Ker}(\varphi)$  — простой идеал, т.е.  $f(t)$  неприводим. Отсюда получаем искомое.  $\square$

**Следствие 11.1.** Уже  $F[x]$  является подполем в  $E$ .

**Следствие 11.2.**  $\dim_F F[x] = \deg f(t) < \infty$ .

**Следствие 11.3.**  $F[x]$  порождается как векторное пространство над  $F$  элементами (базисом)  $1, x, \dots, x^d$  для некоторого  $d \in \mathbb{N}$ .

**Определение 6.** Пусть  $K \subseteq L$  — поля. Если  $y_1, \dots, y_m \in L$  алгебраичны над  $K$  и

$$K \subseteq K[y_1] \subseteq K[y_1][y_2] \subseteq \dots \subseteq K[y_1] \dots [y_m] = L,$$

то  $L$  называется *конечнопорождённым алгебраически порождённым алгебраическим расширением поля  $K$* .

**Лемма 12.** Если даны поля  $K \subseteq L$ , что  $L$  — конечнопорождённое алгебраическое расширение  $K$ , то  $\dim_K L < \infty$ .

**Доказательство.** Если  $m = 1$ , то утверждение превращается в следствие 11.2.

По следствию 11.3  $1, \dots, y_2^{d_2}$  порождают  $K[y_1][y_2]$  как векторное пространство над  $K[y_1]$ . При этом  $K[y_1]$  порождается  $1, \dots, y_1^{d_1}$  как векторное пространство над  $K$ . Следовательно, все элементы вида  $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2}$ ,  $\alpha_1 \in \{0; \dots; d_1\}$ ,  $\alpha_2 \in \{0; \dots; d_2\}$ , порождают  $K[y_1][y_2]$  как векторное пространство над  $K$ . Следовательно

$$\dim_K K[y_1][y_2] = \dim_K K[y_1] \cdot \dim_{K[y_1]} K[y_1][y_2] < \infty.$$

□

**Упражнение 1.** Верно и обратное: если  $\dim_K L < \infty$ , то  $L$  — конечнопорождённое алгебраическое расширение поля  $K$ .

**Определение 7.** Пусть даны поля  $F \subseteq E$  и  $x \in E$ , трансцендентный в  $F$ . Тогда

$$F(x) := \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in F[t], g(t) \neq 0 \right\}.$$

**Лемма 13.** 1.  $F(x)$  корректно определено.

2.  $F(x)$  — поле.

**Доказательство.**

1. Если  $g(x) = 0$ , то  $x$  алгебраично. Значит  $f(x)/g(x)$  определено.
2. Операции наследуются от поля. Несложно видеть, что  $F(x)$  относительно них замкнуто.

□

**Лемма 14.**  $F(x) \cong F(t)$  как поля, где  $F(t)$  — поле рациональных функций.

**Доказательство.** Построим понятный гомоморфизм полей

$$\varphi : F(t) \rightarrow F(x), f/g \mapsto f(x)/g(x).$$

По построению  $\varphi$  сюръективен.  $\text{Ker}(\varphi)$  — идеал в поле, т.е. либо  $(0)$ , либо всё  $F(t)$ . Но  $\varphi$  сохраняет  $F$ , значит  $\text{Ker}(\varphi) = 0$ , т.е.  $\varphi$  инъективен. Итого  $\varphi$  — изоморфизм. □

**Лемма 15.** Пусть  $x$  трансцендентно. Тогда  $1, x, x^2, \dots$  линейно независимы.

**Доказательство.** В противном случае это означает, что есть некоторое  $n \in \mathbb{N}$  и  $a_0, \dots, a_n \in F$ , что

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0.$$

Тогда  $f(x) = 0$ , где

$$f(t) := \sum_{k=0}^n a_k t^k.$$

Это противоречит с трансцендентностью  $x$ . □

**Лемма 16.** Пусть даны поле  $L$  и независимая переменная  $t$ . Тогда

$$L(t) := \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \mid f(t), g(t) \in L[t], g(t) \neq 0 \right\}$$

не является конечнопорождённой  $L$ -алгеброй.

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть  $L(t) = L[y_1, \dots, y_s]$  — конечнопорождённая  $L$ -алгебра, где  $y_i = \frac{f_i(t)}{g_i(t)}$ . Тогда есть гомоморфизм

$$\varphi : L[T_1, \dots, T_s] \rightarrow L(t), T_i \mapsto y_i.$$

Понятно, что

$$L[y_1, \dots, y_s] = \varphi(L[T_1, \dots, T_s]).$$

Тогда рассмотрим  $h(t)$  — неприводимый делитель значения

$$1 - \prod_{i=1}^s q_i(t).$$

Поскольку  $L = L[y_1, \dots, y_s]$ , то  $1/h(t) \in L[y_1, \dots, y_s]$ , то есть  $G(T_1, \dots, T_s) \in L[T_1, \dots, T_s]$ , что  $G(y_1, \dots, y_s) = \frac{1}{h(t)}$ . Понятно, что есть некоторое  $N \in \mathbb{N}$ , что

$$G(y_1, \dots, y_s) = \frac{F(t)}{(\prod q_i(t))^N}.$$

Тогда

$$\left( \prod q_i(t) \right)^N = h(t)F(t).$$

Вспомним, что

$$\begin{aligned} \prod g_i(t) - 1 = h(t) \cdot h_1(t) &\implies \prod g_i(t) \equiv 1 \pmod{h(t)} \implies \left( \prod g_i(t) \right)^N \equiv 1 \pmod{h(t)}, \\ \left( \prod g_i(t) \right)^N = h(t)F(t) &\implies \left( \prod g_i(t) \right)^N \equiv 0 \pmod{h(t)}, \end{aligned}$$

т.е.  $0 \equiv 1 \pmod{h(t)}$ . □

**Лемма 17.** Пусть  $F \subseteq E$  — поля, и  $E = F[x_1, \dots, x_n]$  конечнопорождено как  $F$ -алгебра. Тогда  $[x_1, \dots, x_n]$  алгебраичны над  $F$  и  $\dim_F E < \infty$ .

**Доказательство.** Среди  $x_1, \dots, x_n$  может оказаться элемент трансцендентный над  $F$ , WLOG  $x_1$ . Получим

$$F \subseteq F(x_1) \subseteq E.$$

Среди оставшихся может оказаться элемент, трансцендентный над  $F(x_1)$ , WLOG  $x_2$ . Получим

$$F \subseteq F(x_1) \subseteq F(x_1)(x_2) \subseteq E.$$

Будем повторять данную операцию до конца. Таким образом выделим  $x_1, \dots, x_r$ , получим

$$F \subseteq F(x_1) \subseteq F(x_1)(x_2) \subseteq \dots \subseteq \underbrace{F(x_1) \dots (x_r)}_K \subseteq E,$$

что все  $x_{r+1}, \dots, x_n$  алгебраичны над  $K$ . Тогда  $E$  как векторное пространство над  $K$  конечномерно (лемма 12).

Тогда имеем, что

$$F \subseteq K \subseteq E,$$

где  $E$  — конечнопорождённый  $K$ -модуль и конечнопорождённая  $F$ -алгебра. Следовательно, по лемме 10  $K$  — конечнопорождённая  $F$ -алгебра.

Пусть  $r \neq 0$ . Пусть  $L = F(x_1) \dots (x_{r-1})$ . Тогда  $L(x_r) = K$ , где  $x_r \in K$  трансцендентен над  $L$ . Следовательно,  $L(x_r) \cong L(t)$ , т.е.  $K = L(x_r)$  — не конечнопорождённая  $L$ -алгебра, и тем более не конечнопорождённая  $F$ -алгебра. Противоречие.  $\square$

**Следствие 17.1.** Пусть  $F \rightarrow A$  — конечнопорождённая  $F$ -алгебра, а  $\mathcal{M}$  — максимальный идеал  $A$ . Тогда  $F \hookrightarrow A/\mathcal{M}$  — конечное алгебраическое расширение поля.

**Доказательство.**

Дописать?  $\square$

**Следствие 17.2.** Пусть  $F$  — алгебраически замкнутое поле, а  $F \rightarrow A$  — конечнопорождённая  $F$ -алгебра. Тогда  $F \rightarrow A/\mathcal{M}$  — изоморфизм.

**Доказательство.**  $A/\mathcal{M}$  — конечное алгебраическое расширение поля  $F$ , т.е. совпадает с  $F$ .  $\square$

**Упражнение 2.** Пусть  $R$  — кольцо,  $I \subseteq J \subseteq R$  — два идеала в  $R$ . Тогда TFAE.

1.  $I = J$ .
2.  $\bar{\varphi} : R/I \rightarrow R/J, r \bmod I \mapsto r \bmod J$  — изоморфизм колец.

**Доказательство.** Если  $I = J$ , то очевидно что  $r \bmod I = r \bmod J$ , а  $R/I = R/J$ , а тогда  $\bar{\varphi}$ , являясь тождественным отображением, является изоморфизмом колец.

Пусть  $\bar{\varphi}$  — изоморфизм колец. Рассмотрим вложения  $\pi_I : R \rightarrow R/I, r \mapsto r \bmod I$  и  $\pi_J : R \rightarrow R/J, r \mapsto r \bmod J$ . Следовательно, имеем коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ p_I \swarrow & & \searrow p_J \\ R/I & \xrightarrow[\bar{\varphi}]{\sim} & R/J \end{array}$$

Следовательно,

$$r \in I \Leftrightarrow r \in \text{Ker}(p_I) \Leftrightarrow p_I(r) = 0 \Leftrightarrow p_J(r) = 0 \Leftrightarrow r \in \text{Ker}(p_J) \Leftrightarrow r \in J,$$

т.е.  $I = J$ .  $\square$

**Упражнение 3.** Пусть  $\mathcal{M} \subseteq R$  — идеал. Тогда TFAE.

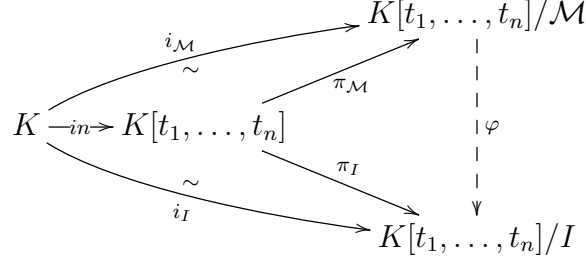
1.  $\mathcal{M}$  максимален.
2.  $R/\mathcal{M}$  — поле.

**Теорема 18** (Гильберта о нулях (слабая), Nullstellensatz). Пусть  $K$  — алгебраически замкнутое поле (например,  $\mathbb{C}$ ),  $\mathcal{M} \subseteq K[t_1, \dots, t_n]$  — максимальный идеал. Тогда  $\mathcal{M} = (t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n)$ , где  $x_i \in F$ .



**Доказательство.** Зафиксируем некоторые значения  $x_1, \dots, x_n \in K$  и рассмотрим идеал  $I := (t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n)$ . Также рассмотрим следующие гомоморфизмы:

$$\begin{aligned} in : K &\rightarrow K[t_1, \dots, t_n], r \mapsto r, \\ \pi_{\mathcal{M}} : K[t_1, \dots, t_n] &\rightarrow K[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{M}, r \mapsto r \bmod \mathcal{M}, & i_{\mathcal{M}} &:= \pi_{\mathcal{M}} \circ in, \\ \pi_I : K[t_1, \dots, t_n] &\rightarrow K[t_1, \dots, t_n]/I, r \mapsto r \bmod I, & i_I &:= \pi_I \circ in. \end{aligned}$$



Заметим, что  $i_{\mathcal{M}}$  — изоморфизм колец, так как  $\mathcal{M}$  максимален. При этом для всякого многочлена  $F \in K[t_1, \dots, t_n]$  по теореме Безу  $F(t_1, \dots, t_n) \equiv F(x_1, \dots, x_n) \pmod{I}$ , а значит  $i_I$  инъективен, так как  $K$  поле, и сюръективен, так как  $[F]_I = [F(x_1, \dots, x_n)]_I = i_I(F(x_1, \dots, x_n))$ . Следовательно  $i_I$  тоже изоморфизм колец. Следовательно есть изоморфизм колец  $\varphi = i_{\mathcal{M}}^{-1} \circ i_I$ , т.е. для всякого  $r \in K$

$$\varphi(r \bmod \mathcal{M}) = r \bmod I.$$

Осталось показать, что  $\varphi \circ \pi_{\mathcal{M}} = \pi_I$ , т.е. для всякого  $F \in K[t_1, \dots, t_n]$   $\varphi : F \bmod \mathcal{M} \mapsto F \bmod I$ .

На деле для случайных  $x_1, \dots, x_n$  это не верно. Поэтому возьмём  $x_k := i_{\mathcal{M}}^{-1}(t_k \bmod \mathcal{M})$ , т.е. чтобы  $t_k - x_k \in \mathcal{M}$ . Тогда получим, что

$$\varphi(t_k \bmod \mathcal{M}) = \varphi(x_k \bmod \mathcal{M}) = x_k \bmod I = t_k \bmod I.$$

Поскольку  $\varphi$  — гомоморфизм колец, а всякий многочлен представляется в виде суммы произведений элементов  $K$  и  $t_1, \dots, t_n$ , то теперь это верно для всех многочленов. Значит  $\mathcal{M} = I$ .  $\square$

*Замечание.* Глава I. §1. Замкнутые подмножества  $A_k^n$ .

Обозначить это по-нормальному.

**Определение 8.** Пусть фиксировано поле  $k$ . *Аффинное пространство* над полем  $k$  размерности  $n$  — есть пространство

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_k^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in k\} = k^n.$$

Пусть  $A := k[T_1, \dots, T_n]$ ,  $f \in A$ . Тогда  $f$  — отображение  $\mathbb{A}^n \rightarrow k$ . Пусть фиксировано  $S \subseteq A$ . Тогда *множеством общих нулей многочленов из  $S$*  (также “общие нули многочленов из  $S$ ” или “нули  $S$ ”) — это множество

$$Z(S) := \{x \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in S \ f(x) = 0\}.$$

Все подмножества  $Z(S)$  называются *замкнутыми подмножествами в  $\mathbb{A}^n$*  или *аффинными подмножествами в  $\mathbb{A}^n$* .

*Пример 1.*

$$1. \ \emptyset = Z(\{a\}_{a \in k}) = Z(A).$$

2.  $\mathbb{A}^n = Z(\emptyset) = Z(\{0\})$ .
3.  $\{(x_1, \dots, x_n)\} = Z(\{T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n\})$ .
4. Замкнутые подмножества в  $\mathbb{A}^1$  — это  $\mathbb{A}$ ,  $\emptyset$  и любое конечное подмножество.
5. Если  $n = 2$ , то  $Z(f)$  называется *плоской кривой*.

**Определение 9.** Пусть  $I$  — некоторый идеал. *Радикал из идеала*  $I$  —  $\sqrt{I} := \{h \in A \mid \exists N: h^N \in I\}$ .

**Лемма 19.**  $\sqrt{I}$  — идеал.

**Доказательство.** Пусть  $h \in \sqrt{I}$ . Тогда есть  $N$ , что  $h^N \in I$ . Значит для всякого  $f \in A$

$$(hf)^N = h^N f^N \in IA \subseteq I.$$

Т.е.  $hf \in \sqrt{I}$ . Значит  $hA \subseteq \sqrt{I}$ .

Пусть  $h_1, h_2 \in \sqrt{I}$ . Тогда есть  $N_1$  и  $N_2$ , что  $h_1^{N_1}, h_2^{N_2} \in I$ . Тогда

$$(h_1 + h_2)^{N_1+N_2} = \sum_{k=0}^{N_1+N_2} h_1^k h_2^{N_1+N_2-k} \binom{N_1+N_2}{N_1}.$$

При этом при  $k \leq N_1$

$$h_2^{N_2} \in I, \quad h_1^k h_2^{N_1-k} \binom{N_1+N_2}{N_1} \in A, \quad \implies \quad h_1^k h_2^{N_1+N_2-k} \binom{N_1+N_2}{N_1} \in I;$$

аналогично для  $k \geq N_1$ . □

**Лемма 20.**

1. Если  $S \subseteq S'$ , то  $Z(S') \subseteq Z(S)$ .
2. Пусть  $I$  — идеал, порождённый многочленами из  $S$ . Тогда  $Z(I) = Z(S)$ .
3.  $Z(\sqrt{I}) = Z(I)$ .
4. Для всякого  $S$  есть конечное  $S'$ , что  $Z(S) = Z(S')$ .
5. Пусть есть семейство  $\{S_i\}_{i \in I}$ . Тогда

$$Z\left(\bigcup_{i \in I} S_i\right) = \bigcap_{i \in I} Z(S_i).$$

6. Пусть дано семейство идеалов  $\{I_j\}_{j \in J}$ . Тогда

$$Z\left(\sum_{j \in J} I_j\right) = \bigcap_{j \in J} Z(I_j).$$

7. Пусть дано семейство  $\{S_i\}_{i=1}^n$ .  $S' := S_1 S_2 \dots S_n = \{f_1 \dots f_n \mid f_1 \in S_1 \wedge \dots \wedge f_n \in S_n\}$ . Тогда

$$Z(S') = \bigcup_{i=1}^n Z(S_i).$$

8. Пусть дано семейство идеалов  $\{I_j\}_{j=1}^n$ . Тогда

$$Z\left(\bigcap_{j=1}^n I_j\right) = \bigcup_{j=1}^n Z(I_j).$$

**Доказательство.**

1. Действительно, для всякой точки  $x \in Z(S')$  верно, что для всякого  $f \in S'$   $f(x) = 0$ , а значит то же верно для всякого  $f \in S$  (так как  $S \subseteq S'$ ), т.е.  $x \in Z(S)$ .
2. Поскольку  $S \subseteq I$ , то  $Z(I) \subseteq Z(S)$ . При этом для всякого  $x \in Z(S)$  верно, что для всякого  $f \in S$   $f(x) = 0$ , а значит то же верно для всех  $f \in I$  (так как  $I$  — идеал, порождённый  $S$ ), т.е.  $x \in Z(I)$ . Т.е.  $Z(S) \subseteq Z(I)$ . Следовательно,  $Z(S) = Z(I)$ .
3. Поскольку  $I \subseteq \sqrt{I}$ , то  $Z(\sqrt{I}) \subseteq Z(I)$ . При этом для всякого  $x \in Z(I)$  верно, что для всякого  $f \in S$   $f(x) = 0$ , а значит для всякого  $f \in \sqrt{I}$  есть  $N$ , что  $f^N(x) = 0$ , а тогда  $f(x) = 0$ , т.е.  $x \in Z(\sqrt{I})$ . Т.е.  $Z(I) \subseteq Z(\sqrt{I})$ . Следовательно,  $Z(\sqrt{I}) = Z(I)$ .
4. Если известно, что  $S$  и  $S'$  порождают одинаковые идеалы, то  $Z(S) = Z(S')$ . Но всякий идеал в  $k[T_1, \dots, T_n]$  конечнопорождён, а значит у идеала, порождённого  $S$ , есть конечное порождающее множество  $S'$  — искомое  $S'$ .
5. Заметим, что  $x \in Z(\bigcup_{i \in I} S_i)$  тогда и только тогда, когда на  $x$  зануляются все многочлены из  $\bigcup_{i \in I} S_i$ , что равносильно тому, что на  $x$  зануляются все многочлены из каждого  $S_i$ , что равносильно тому, что  $x$  лежит в каждом  $Z(S_i)$ , что равносильно тому, что  $x \in \bigcap_{i \in I} Z(S_i)$ . Отсюда следует требуемое.
6. По прошлому пункту.

$$Z\left(\bigcup_{j \in J} I_j\right) = \bigcap_{j \in J} Z(I_j).$$

Но также несложно видеть, что идеал, порождённый  $\bigcup_{j \in J} I_j$ , есть  $\sum_{j \in J} I_j$ . Отсюда сразу следует искомое (по ранее доказанному пункту).

7. Покажем утверждение для  $n = 2$ . Заметим, что если  $x \in Z(S_1)$ , то на  $x$  зануляются все многочлены из  $S_1$ , а значит и из  $S_1 \cdot S_2$ , т.е.  $x \in Z(S_1 S_2)$ . Следовательно  $Z(S_1) \subseteq Z(S_1 S_2)$ . Из аналогичного утверждения получаем, что  $Z(S_1) \cup Z(S_2) \subseteq Z(S_1 S_2)$ . При этом если  $x \in Z(S_1 S_2) \setminus Z(S_1)$ , то есть многочлен  $f \in S_1$ , что  $f(x) \neq 0$ . Но для всякого  $g \in S_2$  верно  $fg \in S_1 S_2$ , а значит  $f(x)g(x) = 0$ , а тогда  $g(x) = 0$ , т.е.  $x \in Z(S_2)$ . Итого  $Z(S_1 S_2) = Z(S_1) \cup Z(S_2)$ . Утверждение для всякого  $n$  получается по индукции с помощью данного.
8. Покажем для  $n = 2$ ; общий случай получается по индукции. Пусть даны идеалы  $I$  и  $J$ . Имеем по прошлому пункту

$$Z(I \cdot J) = Z(I) \cup Z(J).$$

При этом  $I \cdot J \subseteq I \cap J$ , а  $I \cap J \subseteq I$ ,  $I \cap J \subseteq J$ . Следовательно  $Z(I \cdot J) \supseteq Z(I \cap J)$ ,  $Z(I \cap J) \supseteq Z(I)$ ,  $Z(I \cap J) \supseteq Z(J)$ . Итого

$$Z(I \cdot J) \supseteq Z(I \cap J) \supseteq Z(I) \cup Z(J),$$

откуда

$$Z(I \cdot J) = Z(I \cap J) = Z(I) \cup Z(J).$$

**Следствие 20.1.** *Мораль такова.*

1. *Замкнутые идеалы образуют топологию, где они являются замкнутыми. Т.е. их дополнения образуют топологию (являясь открытыми).*
2. *Каждое замкнутое подмножество имеет вид  $Z(I)$ , где  $I$  — идеал.*
3. *Сумма идеалов соответствует пересечению замкнутых множеств (и наоборот). Т.е. для всякого семейства идеалов  $\{I_j\}_{j \in J}$  верно, что*

$$\bigcap_{j \in J} Z(I_j) = Z\left(\sum_{j \in J} I_j\right).$$

4. *Конечные пересечения идеалов соответствуют конечным объединениям замкнутых множеств. Т.е. для всякого семейства идеалов  $\{I_j\}_{j=1}^n$  верно, что*

$$\bigcup_{j=1}^n Z(I_j) = Z\left(\bigcap_{j=1}^n I_j\right).$$

**Определение 10.** Идеал  $I$  называется *радикальным* тогда и только тогда, когда для всякого  $g \in A$ , что есть  $m \geq 1$ , что  $g^m \in I$  верно, что  $g \in I$ .

**Лемма 21.**

1. *Идеал  $I$  радикален тогда и только тогда, когда  $\sqrt{I} \subseteq I$ .*
2.  *$\sqrt{I}$  радикален.*
3. *Пусть  $X$  — подмножество  $A$ . Тогда множество*

$$I(X) := \{f \in A \mid \forall x \in X \ f(x) = 0\}$$

*будет радикальным идеалом.*

4. *Пусть даны подмножества  $X$  и  $Y$  пространства  $\mathbb{A}_k^n$ , что  $X \subseteq Y$ . Тогда  $I(X) \supseteq I(Y)$ .*
5. *Если  $X \subseteq Y$ , то  $ZI(X) \subseteq ZI(Y)$ .*
6. *Для всякого подмножества  $X$   $ZI(X) \supseteq X$ .*
7. *Для всякого подмножества  $S$   $IZ(S) \supseteq S$ .*
8. *Если  $X$  замкнуто, то  $ZI(X) = X$ .*
9.  *$ZI(X) = \overline{X}$  ( $\overline{X}$  — замыкание  $X$  в смысле рассмотренной топологии).*
10.  *$IZ(S) = \sqrt{I_S}$ .*

**Доказательство.**

1. Определение по-другому написанное.

2. Несложно видеть, что  $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$  по определению радикала. Значит  $\sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I}$ , т.е.  $\sqrt{I}$  радикален.
3.  $I(X)$  — максимальный идеал, что  $X \subseteq Z(I(X))$ . При этом  $Z(\sqrt{I(X)}) = Z(I(X))$ , значит  $\sqrt{I} \subseteq I$ . Таким образом  $I$  максимален.
4. Если  $f \in I(Y)$ , то  $f(Y) = 0$ , значит  $f(X) = 0$ , тогда  $f \in I(X)$ .
5.  $X \subseteq Y \Rightarrow I(X) \supseteq I(Y) \Rightarrow ZI(X) \subseteq ZI(Y)$ .
6. Поскольку  $I(X)$  — множество всех многочленов, зануляющихся на  $X$ , то всё  $I(X)$  зануляется на  $X$ , т.е.  $ZI(X) \supseteq X$ .
7. Поскольку  $Z(S)$  — множество всех точек, на которых зануляется  $S$ , то  $S$  на нём зануляется, а тогда  $ZI(S) \supseteq S$ .
8. ...

□

**Теорема 22** (Гильберта о нулях (сильная)).  $ZI(S) = \sqrt{I_S}$ .