

Рейтинговое домашнее задание от 08.10

Дифференциальные уравнения и динамические системы

Глеб Минаев @ 204 (20.Б04-мкн)

Задача 5. Покажем, что производная данного двойного отношения равна нулю.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} \right)' = \left(\frac{(y_4 - y_2)(y_3 - y_1)}{(y_4 - y_1)(y_3 - y_2)} \right)' \\ &= \frac{((y_4 - y_2)(y_3 - y_1))'(y_4 - y_1)(y_3 - y_2) - (y_4 - y_2)(y_3 - y_1)((y_4 - y_1)(y_3 - y_2))'}{(y_4 - y_1)^2(y_3 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(y_i - y_j)' = p(y_i^2 - y_j^2) + q(y_i - y_j) = (y_i - y_j)(p(y_i + y_j) + q).$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_{i,j,k,l} &:= ((y_i - y_k)(y_j - y_l))'(y_i - y_l)(y_j - y_k) \\ &= (y_i - y_k)'(y_j - y_l)(y_i - y_l)(y_j - y_k) + (y_i - y_k)(y_j - y_l)'(y_i - y_l)(y_j - y_k) \\ &= (y_i - y_k)(y_j - y_l)(y_i - y_l)(y_j - y_k)(p(y_i + y_k) + q + p(y_j + y_l) + q) \\ &= (y_i - y_k)(y_j - y_l)(y_i - y_l)(y_j - y_k)(p(y_i + y_j + y_k + y_l) + 2q), \end{aligned}$$

и значит $E_{i,j,k,l} = E_{j,i,k,l}$. Тем самым

$$\begin{aligned} & \left(\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} \right)' \\ &= \frac{E_{4,3,2,1} - E_{3,4,2,1}}{(y_4 - y_1)^2(y_3 - y_2)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Равенство производной данного двойного отношения нулю означает константность данного двойного отношения.
