С. Ю. Пилюгин

Пространства динамических систем

Москва ♦ Ижевск

2008

УДК 517.91/.93
ББК 22.161.61
П324

РФФИ

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №08-01-07011.

Пилюгин С. Ю.

Пространства динамических систем. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. — 272 с.

Книга представляет собой не имеющее аналогов в мировой математической литературе введение в три основные теории возмущений динамических систем: теорию C^1-малых возмущений (теория структурной устойчивости), теорию C^0-малых возмущений и теорию малых разрывных возмущений (теория отслеживания псевдотраекторий). В монографии даны точные определения основных объектов, изучаемых в теории пространств динамических систем, а также сформулированы наиболее важные и фундаментальные результаты этой теории. При ее написании автор стремился к замкнутости и последовательности изложения с той целью, чтобы монография была доступна для понимания не только профессионалов-математиков, но и студентов и аспирантов.

ISBN 978-5-93972-???-? **ББК 22.161.61**

http://shop.rcd.ru
http://ics.org.ru

Посвящаю моей жене Ире, без помощи и терпения которой эта книга не смогла бы появиться

Оглавление

Список основных обозначений

R^n – n-мерное евклидово пространство (вместо R^1 пишем R)
C^n – n-мерное комплексное пространство (вместо C^1 пишем C)
Z — множество целых чисел
Z_+ — множество неотрицательных целых чисел
Z_- — множество неположительных целых чисел
E - единичная матрица
$\operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_m)$ — блочно-диагональная матрица, на диагонали которой стоят блоки $A_1, \ldots, A_m$
Id — тождественное отображение
$f \circ g$ — суперпозиция отображений f и g
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ — частная производная отображения f по аргументу x
$C^k(U, V)$ – класс непрерывных отображений из U в V, имеющих непрерывные производные до порядка k по всем своим аргументам
Df — дифференциал отображения f
$T_x M$ — касательное пространство многообразия M
$\dim M$ — размерность многообразия M
$N(a, A)$ — a-окрестность множества A
$\mathrm{Cl}\, A$ — замыкание множества A
$\mathrm{Int}\, A$ — внутренность множества A
∂A — граница множества A
$\mathrm{card}\, A$ — число элементов конечного множества A

Предисловие

Предлагаемая читателю книга написана на основе специальных курсов «Грубые системы дифференциальных уравнений» и «Пространства динамических систем», которые автор читал в течение последних 30 лет студентам кафедр дифференциальных уравнений и высшей геометрии математико-механического факультета Ленинградского-Санкт-Петербургского университета.

Как показывает ее название, книга посвящена теории динамических систем (точнее, структуре пространств динамических систем с различными топологиями).

Мировая математическая литература содержит немало книг, посвященных теории динамических систем. Их список открывает классическая монография Биркгофа [Bi1927]; многие годы советские математики учились теории динамических систем по основополагающей книге Немыцкого и Степанова [НС1949].

Новые подходы к теории динамических систем, связанные с задачей о структурной устойчивости, были отражены в книге Нитецки [Ni1971]; именно по этой книге (а также по оригинальным статьям) автор изучал современную теорию динамических систем.

Позже появились книги Гукенхеймера, Мозера и Ньюхауса [GMN1980], Палиса и ди Мелу [PM1982], Шуба [Sh1987], Робинсона [Robi1995] и других авторов.

Отметим, наконец, недавнюю книгу Брина и Штука [BS2002] и энциклопедическую по охвату тем монографию Катка и Хассельблатта [KH1995].

Предлагаемая книга отличается от известных автору монографий прежде всего тем, что она адресована не только профессионалам-математикам, но в первую очередь людям, которые только начинают знакомство с теорией динамических систем — студентам и аспирантам математических специальностей, а также людям, которые интересуются приложениями математики (в основном тем, кто изучает модели, описываемые динамическими системами).

Этим определяются и две основные цели, которые ставил перед собой автор при написании этой книги:

— дать и объяснить читателю точные определения основных объектов, изучаемых в теории пространств динамических систем, а также сформулировать наиболее важные и фундаментальные результаты этой теории;

— при проведении доказательств излагать их так, чтобы они не требовали от читателя, начинающего знакомиться с теорией, восстановления опускаемых иногда фрагментов рассуждений (которые часто заменяются фразами «ясно, что ...» или «при правильном выборе констант наше утверждение вытекает теперь из ...»).

Такими же были установки автора при написании первой его книги «Введение в грубые системы дифференциальных уравнений» [Пи1988], напечатанной в 1988 г. Сравнив эту книгу с предлагаемым текстом, внимательный читатель увидит, что эти книги не дублируют (несмотря на совпадения заголовков некоторых параграфов), а дополняют друг друга.

И дело не только (и не столько) в том, что основными изучаемыми в данной книге объектами являются дискретные динамические системы (в отличие от потоков, порождаемых системами дифференциальных уравнений, которым в основном была посвящена книга [Пи1988]). Изменились подходы автора к описанию некоторых основных конструкций (как, например, при введении топологий на пространствах динамических систем) и к доказательству многих утверждений — упомянем, к примеру, принципиально иное доказательство структурной устойчивости диффеоморфизмов Аносова или иную трактовку гомоклинических точек (в книге [Пи1988] доказательство существования счетного числа периодических точек в окрестности трансверсальной гомоклинической точки проводилось на основе теории индекса, в то время как в данной книге мы сводим эту задачу к описанию подковы Смейла, о которой вообще не упоминалось в [Пи1988]).

Кроме того, в данную книгу включены разделы, посвященные C^0-типичным свойствам динамических систем и отслеживанию псевдотраекторий. Эти современные области теории динамических систем мало освещены в доступных источниках (в этом случае автор опирается на собственные книги [Pi1994] и [Pi1999], явившиеся первыми в мировой математической литературе монографиями по указанной тематике).

Перейдем к описанию содержания книги. Книга состоит из 12 параграфов и 2 приложений.

В п. 1 мы определяем основные изучаемые в книге объекты — динамические системы с дискретным и непрерывным временем. Описаны возможные виды траекторий и простейшие свойства инвариантных множеств. В качестве примера рассмотрен гомеоморфизм сдвига на пространстве двоичных последовательностей (позже этот пример будет использован для описания структуры инвариантного множества в подкове Смейла). Описаны вложения дискретных динамических систем в потоки (системы с непрерывным временем) и локальный диффеоморфизм Пуанкаре, порождаемый парой трансверсальных площадок к траектории автономной системы дифференциальных уравнений.

В п. 2 вводятся две основные топологии на пространствах динамических систем: C^0-топология на пространстве гомеоморфизмов компактного метрического пространства и C^1-топология на пространстве диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия. Для потоков, порождаемых автономными системами дифференциальных уравнений, описаны связи между двумя возможными путями введения топологии: через оценки разности между правыми частями и через оценки близости самих потоков. Введены понятия множеств II категории по Бэру и типичных свойств.

В п. 3 мы изучаем основные отношения эквивалентности на пространствах динамических систем: топологическую сопряженность систем с дискретным временем и топологическую эквивалентность систем с непрерывным временем. Введены понятия структурной устойчивости и Ω-устойчивости. Определено множество неблуждающих точек и доказана теорема Биркгофа о том, что любая траектория проводит лишь конечное время вне окрестности неблуждающего множества.

П. 4 — один из основных разделов книги, в котором многие важные для теории структурной устойчивости понятия (устойчивые и неустойчивые многообразия, фундаментальные области и т. д.) детально изучаются в простейшем случае гиперболической неподвижной точки. Описаны свойства гиперболического линейного отображения и доказана теорема Гробмана-Хартмана о локальной топологической сопряженности диффеоморфизма в окрестности гиперболической неподвижной точки и соответствующего линейного отображения. Приведено детальное доказательство теоремы об устойчивом многообразии, основанное на методе Перрона. Рассмотрен случай гиперболической периодической точки.

В п. 5 мы переносим результаты, полученные в п. 4, на случай гиперболических точки покоя и замкнутой траектории автономной системы дифференциальных уравнений. Показано, как переформулировать определение гиперболичности замкнутой траектории в стандартных для теории дифференциальных уравнений терминах мультипликаторов.

П. 6 посвящен определению свойства трансверсальности. Определена трансверсальность отображений и подмногообразий, введено условие трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий для динамических систем. Доказана λ-лемма Палиса. Описана связь между трансверсальностью и гиперболичностью для одномерных отображений.

П. 7, второй из основных разделов книги, посвящен гиперболическим множествам. Дается и анализируется определение гиперболического множества. Приведены два примера гиперболических множеств: гиперболическая неподвижная точка и гиперболический автоморфизм двумерного тора. Описаны некоторые свойства гиперболических множеств, используемые в дальнейшем. Сформулирована теорема об устойчивом многообразии. Введена Аксиома A и доказана теорема о спектральном разложении. Формулируются основные результаты теории структурной устойчивости: теоремы о необходимых и достаточных условиях структурной устойчивости и Ω-устойчивости. Описаны гиперболические множества потоков. Проанализированы связи между теоремой о структурной устойчивости и классической теоремой Андронова–Понтрягина о грубости плоских автономных систем.

В п. 8 мы доказываем теорему о структурной устойчивости диффеоморфизмов Аносова.

Подкове Смейла и хаотическим множествам посвящен п. 9. Мы доказываем теорему о топологической сопряженности диффеоморфизма на инвариантном множестве подковы Смейла и гомеоморфизма сдвига на пространстве двоичных последовательностей. Дано определение хаотического множества и показано, что инвариантное множество подковы Смейла хаотично. Рассмотрены трансверсальные гомоклинические точки плоских диффеоморфизмов. Мы поясняем (на геометрически-интуитивном уровне), почему трансверсальная гомоклиническая точка порождает инвариантное множество хаотического типа.

Классическая C^1-лемма о замыкании сформулирована в п. 10. Приведено доказательство более простого результата, C^0-леммы о замыкании (этот результат используется позже, при изучении C^0-типичных свойств динамических систем). Мы формулируем также эргодическую лемму о замыкании, доказанную Мане (эта лемма сыграла очень важную роль при доказательстве необходимости гиперболичности неблуждающего множества для структурной устойчивости).

В п. 11 изучаются C^0-типичные свойства динамических систем. Мы определяем метрику Хаусдорфа на пространстве замкнутых подмножеств компактного метрического пространства. Доказана теорема о точках непрерывности полунепрерывного сверху (или снизу) многозначного отображения. Изложены основные результаты теории Такенса о множествах максимально ϵ-эквивалентных и минимально ϵ-эквивалентных систем, связанные с гипотезой о толерантной устойчивости.

Вторая часть п. 11 посвящена аттракторам динамических систем и их поведению при C^0-малых возмущениях системы. Вначале мы описываем некоторые фундаментальные свойства аттракторов. Доказана теорема Херли о типичности устойчивости аттракторов в метрике Хаусдорфа относительно C^0-малых возмущений системы. Изучается устойчивость аттракторов относительно метрики R_0; показано, что такая устойчивость C^0-типична и что она влечет устойчивость по Ляпунову границы аттрактора.

В п. 12 излагаются некоторые основные результаты теории отслеживания псевдотраекторий динамических систем. Доказана теорема о липшицевом отслеживании в окрестности гиперболического множества диффеоморфизма. Установлено наличие липшицевого обратного свойства отслеживания для траектории, обладающей (C, λ)-структурой. Приведенные в книге доказательства этих утверждений основаны на использовании теоремы Тихонова-Шаудера о неподвижной точке (насколько известно автору, такие методы не отражены в монографической литературе, хотя круг их использования в задачах теории отслеживания интенсивно расширяется). Полностью охарактеризованы свойства отслеживания для линейных диффеоморфизмов.

В приложении 1 мы излагаем схему доказательства теоремы Мане о необходимости гиперболичности неблуждающего множества для структурной устойчивости.

Приложение 2 основано на лекциях по истории теории дифференциальных уравнений и динамических систем, которые автор читал для аспирантов математико-механического факультета СПбГУ в последние годы. Мы прослеживаем основные направления развития этой теории от Ньютона до конца XX в.

Математические утверждения, входящие в общие университетские курсы, приводятся без ссылки на источник.

Автор этой книги много узнал о дифференциальных уравнениях и динамических системах из книг и статей; не менее важны, однако, были для него контакты с людьми, которые создавали и создают теорию дифференциальных уравнений и динамических систем.

Автор глубоко благодарен тем людям, которые не только учили его дифференциальным уравнениям, динамическим системам и топологии, но и щедрым личным общением помогли ему стать профессиональным математиком: Ю. Н. Бибикову, С. М. Лозинскому, Н. Н. Петрову, В. А. Плиссу и В. А. Рохлину.

Автор благодарен за сотрудничество своим коллегам по математико-механическому факультету Л. Я. Адриановой, А. Ф. Андрееву, О. А. Ива-

нову, Ю. А. Ильину, С. Г. Крыжевичу, Г. А. Леонову, Н. Ю. Нецветаеву, А. В. Осипову, В. Е. Чернышеву и Ю. В. Чурину.

Много полезного вынес автор из общения с отечественными и иностранными математиками Д. В. Аносовым, В. И. Арнольдом, В. С. Афраймовичем, Ю. С. Ильяшенко, В. М. Миллионщиковым, Ю. И. Неймарком, Г. С. Осипенко, Н. Х. Розовым, А. Н. Шарковским, Л. П. Шильниковым, а также В.-Ю. Байном и П. Клоденом (Германия), Р. Корлессом (Канада), Л. Веном и Ш. Ганом (Китай), Дж. Селлом и Дж. Хейлом (США) и К. Сакаем (Япония).

Автор счастлив, что ему удалось не только научить теории дифференциальных уравнений и динамических систем многих студентов ЛГУ-СПбГУ, но и самому поучиться у некоторых из своих учеников: Н. Ампиловой, А. Катиной, А. Осипова, О. Пламеневской, В. Погонышевой, О. Тараканова, С. Тихомирова и А. Фельштына.

1. Динамические системы

1.1. Основные определения

В теории динамических систем изучают два основных класса динамических систем – системы с дискретным временем (каскады) и системы с непрерывным временем (потоки).

Начнем с определения динамической системы с дискретным временем.

Пусть f — гомеоморфизм топологического пространства M. Определим (функциональные) степени f так:

положим $f^0 = \mathrm{Id}$, где Id – тождественное отображение M;

для натурального m положим

$$f^m = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{m \text{ раз}};$$

и, наконец, для целого отрицательного m положим

$$f^m = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}}_{|m| \text{ раз}},$$

где f^{-1} — отображение, обратное к f.

Ясно, что отображения f^m непрерывны при всех $m \in Z$.

Обозначим $\phi(m, x) = f^m(x)$. Ясно, что отображение $\phi\colon Z \times M \to M$ обладает следующими тремя свойствами:

(ДДС1) $\phi(0, x) = x, \quad x \in M$;

(ДДС2) $\phi(l + m, x) = \phi(l, \phi(m, x)), \quad l, m \in Z, x \in M$;

(ДДС3) при любом $m \in Z$ отображение $\phi(m, \cdot)$ непрерывно.

Любое отображение $\phi\colon Z \times M \to M$, обладающее свойствами (ДДС1)-(ДДС3) называется *(непрерывной) динамической системой с дискретным временем* (иногда такую систему называют *каскадом*). Пространство M называется *фазовым пространством* системы.

Легко понять, что если нам дано отображение $\phi\colon Z \times M \to M$, обладающее свойствами (ДДС1)–(ДДС3), то существует такой гомеоморфизм f, что $\phi(m,x) = f^m(x)$.

Действительно, положим $f(x) = \phi(1,x)$ и покажем, что f — гомеоморфизм. Отображение f непрерывно по свойству (ДДС3); отображение $g(x) = \phi(-1,x)$ также непрерывно, и для него по свойствам (ДДС2) и (ДДС1) верны равенства

$$f(g(x)) = \phi(1, \phi(-1,x)) = \phi(0,x) = x, \quad x \in M,$$

и $g(f(x)) = x$. Следовательно, $g = f^{-1}$. Равенство $\phi(m,x) = f^m(x)$ является очевидным следствием свойства (ДДС2).

Таким образом, введение динамической системой с дискретным временем с помощью гомеоморфизма и ее аксиоматическое определение свойствами (ДДС1)–(ДДС3) приводят к одному и тому же результату. Поэтому в дальнейшем мы не будем различать гомеоморфизм и порождаемую им динамическую систему.

Основной объект, порождаемый динамической системой, определяется так: фиксируем гомеоморфизм f и точку x фазового пространства; назовем *траекторией* точки x в динамической системе f множество

$$O(x,f) = \{f^m(x) : m \in Z\}.$$

Иногда, если система фиксирована, мы будем обозначать траекторию символом $O(x)$; если нас не интересует точка x, будет использоваться обозначение $O(f)$.

Очевидно, что верно следующее утверждение.

Лемма 1.1.
$$O(f^m(x), f) = O(x,f)$$
для любого $m \in Z$.

Мы будем использовать также следующие обозначения:

$$O^+(x,f) = \{f^m(x) : m \in Z_+\} \text{ и } O^-(x,f) = \{f^m(x) : m \in Z_-\};$$

множества $O^+(x,f)$ и $O^-(x,f)$ называются *положительной* и *отрицательной полутраекториями* точки x.

Аналогичные объекты вводятся для подмножества A фазового пространства: множество

$$O(A,f) = \{f^m(A) : m \in Z\}.$$

называется траекторией множества A в динамической системе f, а множества

$$O^+(A,f) = \{f^m(A) : m \in Z_+\} \text{ и } O^-(A,f) = \{f^m(A) : m \in Z_-\}$$

называются положительной и отрицательной полутраекториями множества A.

Легко понять, что для траектории дискретной динамической системы может выполняться только одна из следующих трех возможностей.

1. $f(x) = x$. В этом случае точка x называется *неподвижной точкой*; ее траектория совпадает с ней самой.

2. Существует такое натуральное число m, что точки $x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)$ различны, а $f^m(x) = x$. Такая точка называется *периодической*, а число m называется периодом точки x. Траектория точки состоит из m точек $x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)$.

Конечно, неподвижная точка является периодической (с периодом 1), но по традиции их рассматривают отдельно.

3. Точки $f^l(x)$ и $f^m(x)$ различны при различных l, m. В этом случае траектория точки x состоит из счетного множества различных точек.

Обозначим через $\mathrm{Per}(f)$ множество периодических точек (конечно, мы включаем неподвижные точки в это множество).

Тот факт, что для траектории дискретной динамической системы может выполняться только одна из возможностей 1 – 3, очевидно вытекает из следующего простого, но полезного утверждения.

Лемма 1.2. *Множество $O(x,f)$ конечно тогда и только тогда, когда $x \in \mathrm{Per}(f)$.*

Доказательство. Уже отмечалось, что если $x \in \mathrm{Per}(f)$, то множество $O(x,f)$ конечно.

Предположим теперь, что множество $O(x,f)$ конечно. В этом случае существуют такие различные целые числа k и l, что $f^k(x) = f^l(x)$. Пусть $l > k$; положим $n = l - k$. Применяя к равенству $f^k(x) = f^l(x)$ гомеоморфизм f^{-k}, мы получим равенство $x = f^n(x)$. Если точки $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ различны, то x — периодическая точка периода n. В противном случае существуют такие различные целые числа $k_1, l_1 \in [1, n-1]$, что $f^{k_1}(x) = f^{l_1}(x)$. Рассуждение, аналогичное приведенному выше, показывает, что существует такое число $n_1 \in (0,n)$, что $x = f^{n_1}(x)$. Ясно, что наименьшее из таких чисел n_1 является периодом точки x. •

Введем еще одно основное понятие теории динамических систем. Будем называть множество $I \subset M$ *инвариантным* для системы f, если $O(x,f) \subset I$ для любой точки $x \in I$.

Лемма 1.3. *Множество I инвариантно тогда и только тогда, когда $f(I) = I$.*

Доказательство. Пусть множество I инвариантно. Фиксируем точку $x \in I$. Так как $O(x, f) \subset I$, $f(x) \in I$ и $f^{-1}(x) \in I$. Поэтому $f(I) \subset I$ и $f^{-1}(I) \subset I$ (но тогда и $I \subset f(I)$; следовательно, $f(I) = I$.

Те же рассуждения, проведенные в обратном порядке, показывают, что если $f(I) = I$, то множество I инвариантно. •

Из хорошо известных свойств гомеоморфизмов и из леммы 1.3 вытекает, что если множества I и J инвариантны, то и множества $I \cap J$, $I \cup J$, $I \setminus J$, $\mathrm{Cl}I$, $\mathrm{Int}I$, ∂I инвариантны.

Приведем один важный для дальнейшего пример динамической системы с дискретным временем.

Пример 1.1. Пусть $\mathcal{X}$ — пространство, элементами которого являются бесконечные в обе стороны двоичные последовательности

$$a = \{a_i : a_i \in \{0, 1\}, i \in Z\}.$$

Зададим метрику в пространстве $\mathcal{X}$ так: если $a = \{a_i\}$ и $b = \{b_i\}$, положим

$$\mathrm{dist}(a, b) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^{|i|}}$$

(проверьте, что выписанная формула действительно задает метрику).

Из определения метрики легко следует, что по любому $\epsilon > 0$ можно указать такие числа $N(\epsilon)$ и $n(\epsilon)$ что если

$$a_i = b_i, \quad |i| \leqslant N(\epsilon),$$

то $\mathrm{dist}(a, b) < \epsilon$ и если $\mathrm{dist}(a, b) < \epsilon$, то

$$a_i = b_i, \quad |i| \leqslant n(\epsilon).$$

Ясно, что $N(\epsilon), n(\epsilon) \to \infty$ при $\epsilon \to 0$.

Пространство $\mathcal{X}$ компактно. Это утверждение следует из теоремы Тихонова (так как пространство $\mathcal{X}$ является счетным произведением компактных пространств $\{0, 1\}$, а введенная нами метрика индуцирует на $\mathcal{X}$ тихоновскую топологию произведения). Мы приведем простое доказательство. Известно, что метрическое пространство компактно тогда и только тогда,

когда из любой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Рассмотрим произвольную последовательность $a^m = \{a_i^m\}, m > 0$.

Элементы $a_i^m, -1 \leqslant i \leqslant 1$, принимают значения 0 и 1, поэтому существует такая последовательность

$$m(1) = \{m(1, 1), m(1, 2), \dots\},$$

что $0 < m(1, 1) < m(1, 2) < \dots$ и

$$a_i^{m(1,1)} = a_i^{m(1,2)} = \dots, \quad i = -1, 0, 1.$$

Точно так же у последовательности $m(1)$ существует такая подпоследовательность

$$m(2) = \{m(2, 1), m(2, 2), \dots\},$$

что $m(2, 1) < m(2, 2) < \dots$ и

$$a_i^{m(2,1)} = a_i^{m(2,2)} = \dots, \quad i = -2, -1, 0, 1, 2.$$

Продолжая этот процесс, мы найдем такие подпоследовательности

$$m(k) = \{m(k, 1), m(k, 2), \dots\}$$

последовательностей $m(k-1)$, что $m(k, 1) < m(k, 2) < \dots$ и

$$a_i^{m(k,1)} = a_i^{m(k,2)} = \dots, \quad i = -k, \dots, k.$$

Определим элементы $b^k, k \geqslant 1$, пространства $\mathcal{X}$ равенствами $b^k = a^{m(k,1)}$. Ясно что последовательность $\{b^k\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{a^m\}$.

Если элемент b пространства $\mathcal{X}$ определен равенствами

$$b_i = a_i^{m(|i|+1,1)}, i \in Z,$$

то из соотношений

$$b_i = b_i^k, \quad i = -k, \dots, k,$$

следует, что $\mathrm{dist}(b^k, b) \to 0$, $k \to \infty$. Компактность пространства $\mathcal{X}$ доказана.

Определим на пространстве $\mathcal{X}$ отображение σ: поставим в соответствие элементу $a = \{a_i\}$ элемент $\sigma(a) = b = \{b_i\}$ по правилу

$$b_i = a_{i+1}, \quad i \in Z.$$

Отображение σ сдвигает индексы элемента на 1. Ясно, что отображение σ обратимо: $\sigma^{-1}(a) = b$ тогда и только тогда, когда

$$b_i = a_{i-1}, \quad i \in Z.$$

Оба отображения σ и $\sigma^{-1}(a) = b$ непрерывны.

Докажем непрерывность σ. Фиксируем $\epsilon > 0$ и найдем по нему введенное выше число $N(\epsilon)$. Так как $n(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$, найдется такое $\delta > 0$, что $n(\delta) > N(\epsilon) + 1$. Если $\operatorname{dist}(a, b) < \delta$, то

$$b_i = a_i, \quad |i| \leqslant n(\delta).$$

Но тогда

$$b_{i+1} = a_{i+1}, \quad |i| \leqslant N(\epsilon),$$

поэтому $\operatorname{dist}(\sigma(a), \sigma(b)) < \epsilon$.

Таким образом, σ — гомеоморфизм пространства $\mathcal{X}$. Отображение σ (а также и порождаемую им дискретную динамическую систему) называют *гомеоморфизмом сдвига* на пространстве последовательностей.

Отметим несколько важных свойств этой системы.

Свойство 1. *Система σ имеет бесконечно много различных периодических точек.*

Доказательство. Ясно, что равенство $\sigma^m(a) = b$ равносильно тому, что

$$b_i = a_{i+m}, \quad i \in Z.$$

Таким образом, $\sigma^m(a) = a$ тогда и только тогда, когда

$$a_i = a_{i+m}, \quad i \in Z.$$

Это означает, что множество периодических точек отображения σ совпадает с множеством периодических двоичных последовательностей. •

Свойство 2. *Множество периодических точек систем σ плотно в пространстве $\mathcal{X}$.*

Доказательство. Фиксируем произвольные элемент a пространства $\mathcal{X}$ и число $\epsilon > 0$. Найдем по числу ϵ введенное выше число $N(\epsilon)$ и обозначим его N. Построим бесконечную в обе стороны периодическую последовательность b следующим образом: представим любой индекс $i \in Z$ в виде $i = k(2N+1) + l$, где $k \in Z$ и $|l| \leqslant N$, и положим $b_i = a_k$. Ясно, что b — периодическая точка σ и $b_i = a_i$ при $|i| \leqslant N$, т. е. $\operatorname{dist}(a, b) < \epsilon$. •

Свойство 3. *Существует элемент пространства $\mathcal{X}$, траектория которого в системе σ плотна в пространстве $\mathcal{X}$.*

Доказательство. Построим элемент a с указанным свойством так. Выберем числа $a_i, i < 0$, произвольными. Положим $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$. Зафиксируем пары

$$(a_2, a_3) = (0,0), (a_4, a_5) = (0,1), (a_6, a_7) = (1,0), (a_8, a_9) = (1,1),$$

т. е. будем приписывать к a_1 справа все различные блоки из нулей и единиц длины 2. После этого припишем справа от a_9 все различные блоки из нулей и единиц длины 3 и т. д. Ясно, что полученный элемент a будет обладать следующим свойством: какой бы конечный набор $(b_1, \ldots, b_n)$ из нулей и единиц мы ни взяли, найдется такой индекс k, что

$$a_k = b_1, a_{k+1} = b_2, \ldots, a_{k+n-1} = b_n.$$

Докажем теперь, что замыкание траектории $O(a, \sigma)$ совпадает со всем пространством $\mathcal{X}$. Для этого фиксируем произвольные элемент пространства $b \in \mathcal{X}$ и число $\epsilon > 0$. Найдем по числу ϵ введенное выше число $N(\epsilon)$ и обозначим его N.

По построению элемента a найдется такой индекс k, что

$$a_{k-N} = b_{-N}, \ldots, a_k = b_0, \ldots, a_{k+N} = b_N.$$

Это означает, что $\operatorname{dist}\left(\sigma^k(a), b\right) < \epsilon$. •

Второй основной класс динамических систем мы определим аксиоматически. Пусть, как и выше, M — топологическое пространство.

Назовем (*непрерывной*) *динамической системой с непрерывным временем* (*потоком*) отображение $\phi\colon R \times M \to M$, обладающее следующими свойствами:

(НДС1) $\phi(0, x) = x, \quad x \in M$;

(НДС2) $\phi(t+s, x) = \phi(t, \phi(s, x)), \quad t, s \in R, x \in M$;

(НДС3) отображение ϕ непрерывно.

И в этом случае пространство M называется фазовым пространством системы.

Иногда свойство (НДС3) заменяется более слабым требованием:

(НДС3$'$) при любом $t \in R$ отображение $\phi(t, \cdot)$ непрерывно

(такое предположение точнее соответствует общему понятию действия группы, рассматриваемому ниже, в п. 1.5).

Мы будем рассматривать потоки, обладающие свойствами (НДС1)-(НДС3) (отметим, что в основном для нас случае потоков, порожденных системами дифференциальных уравнений, эти свойства заведомо выполнены).

Наряду с непрерывными динамическими системами (как с дискретным, так и с непрерывным временем), мы будем рассматривать и гладкие системы, заменяя в свойствах (ДДС3) и (НДС3) условие непрерывности отображений ϕ на условие их гладкости (уточняемое в каждом конкретном случае).

Аналогично случаю динамической системы с дискретным временем, мы определяем *траекторию точки x в потоке ϕ* равенством

$$O(x,\phi)=\{\phi(t,x) : t\in R\}.$$

Возможны следующие три вида траекторий потоков (для случая потоков, порождаемых автономными системами дифференциальных уравнений, соответствующее утверждение доказывается в общем курсе). Рассмотрим точку $x_0\in M$.

1. $O(x_0,\phi)=\{x_0\}$. Такая траектория (как и сама точка x_0) называется *точкой покоя*.

2. $O(x_0,\phi)\neq\{x_0\}$ и отображение $\phi(t,x_0)$ периодично по t. В этом случае траектория $O(x_0,\phi)$ называется *замкнутой траекторией* потока ϕ.

3. $\phi(t,x_0)\neq\phi(s,x_0)$ при $s\neq t$. В этом случае траектория $O(x_0,\phi)$ является взаимно-однозначным образом прямой.

Аналогично случаю динамической системы с дискретным временем, мы определяем инвариантное множества потока как множество, содержащее траектории всех своих точек. Читателю рекомендуется сформулировать и доказать для случая потока аналог леммы 1.3 и ее следствия.

Как было отмечено выше, мы ограничимся потоками, порожденными системами дифференциальных уравнений.

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=F(x) \tag{1.1}$$

в евклидовом пространстве R^n. Будем предполагать, что вектор-функция F принадлежит классу C^1 в R^n.

Пусть x_0 — произвольная точка пространства R^n. Как известно из общего курса дифференциальных уравнений, найдется такое число $h>0$, что на промежутке $(-h,h)$ существует единственное решение $\phi(t,x_0)$ системы (1.1) с начальными данными $(0,x_0)$. Как обычно, *интегральной кривой* этого решения мы называем график отображения

$$\phi(\cdot,x_0):(-h,h)\to R^n,$$

т. е. множество

$$\{(t,\phi(t,x_0)) : t\in(-h,h)\}.$$

Траекторией решения $\phi(t,x_0)$ называется проекция интегральной кривой на фазовое пространство R^n, т. е. множество точек

$$\{x=\phi(t,x_0) : t\in(-h,h)\}.$$

Предположим вначале, что каждая максимально продолжимая траектория системы (1.1) определена при $t\in R$. В этом случае возникающее отображение $\phi\colon R\times R^n\to R^n$ обладает свойствами (НДС1)-(НДС3), т. е. является потоком. Свойство (НДС1) выполнено, так как $\phi(0,x)=x$. Свойство (НДС2) — это групповое свойство автономных систем (называемое иногда основным тождеством автономных систем). При наших предположениях о гладкости вектор-функции F отображение ϕ непрерывно по совокупности переменных и дифференцируемо как по t, так и по x (эти утверждения следуют из определения решения и из теорем об интегральной непрерывности и о дифференцируемости решения по начальным данным).

Как известно, предположение о продолжимости всех траекторий автономной системы на всю ось выполнено не всегда. Для преодоления этой трудности используют следующий прием.

Рассмотрим, наряду с системой (1.1), систему

$$\frac{dx}{dt}=G(x), \tag{1.2}$$

где

$$G(x)=\frac{F(x)}{1+|F(x)|_e^2},$$

а $|x|_e$ — евклидова норма вектора x (таким образом, если $F=(F_1,\ldots,F_n)$, то $|F(x)|_e^2=F_1^2+\ldots+F_n^2$). Будем писать $F^2(x)$ вместо $|F(x)|_e^2$.

Ясно, что вектор-функция G принадлежит классу C^1 и выполнено неравенство

$$|G(x)|<1,\quad x\in R^n \tag{1.3}$$

(здесь $|x|=\max(|x_1|,\ldots,|x_n|)$ — норма вектора $x=(x_1,\ldots,x_n)$, обычно используемая в теории дифференциальных уравнений; мы будем использовать эту норму наряду с евклидовой).

Будем обозначать через $\psi(t,x)$ траекторию системы (1.2), проходящую через точку $x \in R^n$ при $t = 0$.

Из неравенства (1.3) следует, что каждая максимально продолжимая траектория системы (1.2) определена при $t \in R$. Таким образом, система (1.2) порождает поток в R^n.

Выясним, как связаны решения систем (1.1) и (1.2). Пусть $y(t)$ — решение системы (1.2), определенное при $t \in R$. Рассмотрим функцию

$$H(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{1 + F^2(y(s))},$$

определенную при $\tau \in R$. Пусть V — область значений функции H.

Так как

$$\frac{dH}{d\tau} > 0,$$

для любого $t \in V$ уравнение $t = H(\tau)$ имеет единственное решение $\theta(t)$; ясно, что функция θ класса C^1.

Дифференцируя тождество $\theta(H(\tau)) \equiv \tau$ по τ, мы получаем очевидное тождество

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{dH}{d\tau} \equiv 1.$$

Поэтому

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{1}{1 + F^2(y(\tau))}\right)^{-1} = 1 + F^2(y(\theta(t))).$$

Проверим, что функция $z(t) = y(\theta(t))$ — решение системы (1.1). Действительно,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{F(y(\theta(t)))}{1 + F^2(y(\theta(t)))}(1 + F^2(y(\theta(t)))) = F(z(t)).$$

Таким образом, решения систем (1.1) и (1.2) (и их траектории) отличаются лишь параметризацией; при этом структура разбиения фазового пространства на траектории у этих систем одинакова.

Так как именно структура разбиения фазового пространства на траектории будет основным объектом нашего изучения, далее мы будем считать, что каждая рассматриваемая автономная система дифференциальных уравнений порождает поток.

При изучении глобальной структуры динамических систем естественно рассматривать системы на многообразиях. Мы будем рассматривать детально гладкие динамические системы с дискретным временем, порождаемые диффеоморфизмами гладких многообразий. Для потоков, порождаемых гладкими векторными полями, мы будем лишь формулировать аналоги результатов, полученных для гладких динамических систем с дискретным временем, поэтому мы не будем давать здесь точные определения теории гладких векторных полей на многообразиях (читатель может найти их в книге [Биб1995]).

Напомним лишь, что гладким касательным векторным полем F на гладком многообразии M называется гладкое отображение многообразия M в его касательное расслоение TM.

Траекторией точки $x \in M$ в поле F называется такая гладкая кривая

$$\gamma = \phi(\cdot, x) : I \to M,$$

где I — интервал вещественной оси, что $\phi(0,x) = x$, а касательный вектор к γ в точке $\phi(t,x)$ совпадает с вектором $F(\phi(t,x))$ для любого $t \in I$.

Если многообразие M компактно, то любая траектория поля F продолжима на R; таким образом, в этом случае векторное поле F порождает поток на M.

Отметим некоторые связи между введенными выше конструкциями и теориями гладких векторных полей и дифференциальных уравнений.

1.2. Вложение дискретной динамической системы в поток

Пусть ϕ — поток на топологическом пространстве M. Фиксируем $T > 0$ и рассмотрим отображение $f\colon M \to M$, задаваемое формулой $f(x) = \phi(T,x)$.

Покажем, что f — гомеоморфизм M. Действительно, если $g(x) = \phi(-T,x)$, то g — непрерывное отображение M (см. свойство (НДС3)) и

$$g(f(x)) = \phi(-T, \phi(T,x)) = \phi(0,x) = x$$

по свойствам (НДС2) и (НДС1). Аналогично показывается, что $f(g(x)) = x$. Следовательно, отображение g обратно к f, и f — гомеоморфизм.

В этом случае говорят, что гомеоморфизм f *вложен в поток* ϕ.

Тот же термин употребляется, если нам даны поток на M и гомеоморфизм f пространства M, для которых существует такое число $T > 0$, что $f(x) = \phi(T,x)$.

Если M — гладкое многообразие и поток ϕ гладкий (т. е. отображения $\phi(t,\cdot)$ гладкие при любом t), то те же рассуждения показывают, что любой гомеоморфизм f, вложенный в поток ϕ, является диффеоморфизмом.

Ясно, что разбиения пространства на траектории потока и вложенного в него гомеоморфизма имеют много общего.

Следует помнить, однако, что в этом случае свойства соответствующих динамических систем не обязаны быть абсолютно одинаковыми.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.2. Пусть S — окружность единичной длины; введем на ней координату $x \in [0,1)$. Зададим на S поток равенством

$$\phi(t,x) = x + t \pmod 1;$$

таким образом, под действием потока точка движется по окружности в положительном направлении с единичной скоростью. Ясно, что у потока ϕ есть ровно одна траектория, совпадающая со всей окружностью S; эта траектория замкнутая.

Как показано выше, при любом $T > 0$ отображение $f(x) = \phi(T,x)$ является гомеоморфизмом окружности S. Динамика f зависит от того, рационально число T или нет. Если число $T \in (0,1)$ имеет вид n/m, где n и m — взаимно простые натуральные числа, то каждая точка $x \in S$ является периодической точкой периода m. Если число T иррационально, то периодических точек нет, а каждая траектория состоит из счетного множества точек, которое плотно в S (проверьте!).

Кроме того, следует иметь в виду, что существуют диффеоморфизмы, не вкладывающиеся в потоки, порождаемые гладкими векторными полями, и таких диффеоморфизмов достаточно много — они образуют множество II категории по Бэру в пространстве всех диффеморфизмов (объяснения этих терминов и точная формулировка результата приведены ниже, в п. 2.4).

1.3. Локальный диффеоморфизм Пуанкаре

Рассмотрим систему (1.1) и точку $p \in R^n$, которая не является точкой покоя. Фиксируем число $T > 0$ и обозначим $q = \phi(T,p)$.

Рассмотрим две гладкие $(n-1)$-мерные поверхности P и Q в R^n, содержащие соответственно точки p и q.

Эти поверхности локально (т. е. в окрестностях точек p и q) задаются гладкими отображениями

$$\Phi\colon R^{n-1} \to R^n \text{ и } \Psi\colon R^{n-1} \to R^n, \quad \Phi, \Psi \in C^r, r \geqslant 1,$$

при этом P параметризуется параметром $s \in R^{n-1}$, Q параметризуется параметром $\sigma \in R^{n-1}$ и выполнены равенства $\Phi(0) = p$ и $\Psi(0) = q$.

Будем предполагать, что поверхности P и Q невырождены в точках p и q, т. е. ранги матриц

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial s}(0) \text{ и } B = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}(0)$$

максимально возможные и равные $n-1$.

Обозначим через $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и $b_1, \ldots, b_{n-1}$ столбцы матриц A и B.

В этом случае касательные пространства T_pP к P в точке p и T_qQ к Q в точке q натянуты на векторы $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и $b_1, \ldots, b_{n-1}$, соответственно.

Будем говорить, что поверхности P и Q трансверсальны к траектории $\phi(t,p)$ в точках p и q, если векторы скорости $F(p)$ и $F(q)$ не принадлежат, соответственно, пространствам T_pP и T_qQ.

Теорема 1.1. *Если поверхности P и Q трансверсальны к траектории $\phi(t,p)$ в точках p и q, то отображение, определяемое сдвигом по траекториям системы* (1.1), *является диффеоморфизмом окрестности точки p в P на окрестность точки q в Q.*

Для доказательства теоремы 1.1 нам понадобится теорема о неявной функции (теорема 1.2). Рассмотрим два евклидовых пространства R^l и R^m, координаты в которых будем обозначать соответственно через x и y.

Теорема 1.2. *Пусть f — отображение класса $C^r, r \geqslant 1$, из некоторой окрестности точки (a,b) в $R^l \times R^m$ в пространство R^m. Предположим, что $f(a,b) = 0$ и $\operatorname{rank} \partial f/\partial y(a,b) = m$. Тогда существуют такие окрестность U точки a в R^l и отображение g класса C^r окрестности U в R^m, что $g(a) = b$ и $f(x, g(x)) = 0$ для $x \in U$.*

Доказательство теоремы 1.1. Так как вектор $F(p)$ не принадлежит пространству, натянутому на векторы $a_1, \ldots, a_{n-1}$,

$$\operatorname{rank}(A, F(p)) = n. \tag{1.4}$$

Аналогично,

$$\operatorname{rank}(B, F(q)) = n. \tag{1.5}$$

Траектория системы (1.1), начинающаяся в точке $\Phi(s) \in P$, пересекает поверхность Q тогда и только тогда, когда найдутся такие $t \in R$ и $\sigma \in R^{n-1}$, что $\phi(t, \Phi(s)) = \Psi(\sigma)$.

Рассмотрим функцию

$$f(s,t,\sigma) = \phi(t,\Phi(s)) - \Psi(\sigma).$$

Эта функция отображает окрестность точки $(0,T,0)$ в $R^{n-1}\times R\times R^{n-1}$ в пространство R^n. Так как решение $\phi(t,x)$ непрерывно дифференцируемо по t и x, функция f класса C^1. При этом

$$f(0,T,0) = \phi(T,p) - q = 0.$$

Вычислим матрицу Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial(t,\sigma)}(0,T,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)(0,T,0) =$$
$$= \left(\frac{\partial\phi(t,\Phi(s))}{\partial t}, -\frac{\partial\Psi(\sigma)}{\partial\sigma}\right)(0,T,0) = (F(q),-B)\,.$$

Из равенства (1.5) следует, что для f выполнены условия теоремы 1.2 с $R^l = R^{n-1}$, $R^m = R\times R^{n-1}$, $a=0$, $b=(T,0)$. Поэтому существуют такие отображения $t(s)$ и $\sigma(s)$ класса C^1, определенные при малых $|s|$, что $f(s,t(s),\sigma(s)) = 0$, т. е.

$$\phi(t(s),\Phi(s)) = \Psi(\sigma(s));$$

при этом $t(0)=T$, $\sigma(0)=0$. Отображение, сопоставляющее точкам $\Phi(s)\in P$ при малых $|s|$ точки $\phi(t(s),\Phi(s)) = \Psi(\sigma(s))\in Q$, дифференцируемо и обратимо (существование и дифференцируемость обратного отображения доказываются так же с использованием равенства (1.4)). Теорема доказана. •

Замечание. Рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 1.1 и примененные к функции

$$f(x,t,\sigma) = \phi(t,x) - \Psi(\sigma),$$

отображающей окрестность точки $(p,T,0)$ в $R^n\times R\times R^{n-1}$ в пространство R^n, показывают, что существуют такие окрестность U точки p в R^n и отображения $t(x)$ и $\sigma(x)$ класса C^1, определенные в U, что $f(x,t(x),\sigma(x)) = 0$, т. е.

$$\phi(t(x),x) = \Psi(\sigma(x)),$$

$t(x)\to T$ и $\sigma(x)\to 0$ при $x\to p$.

Таким образом, любая траектория, проходящая через малую окрестность точки p, пересекает поверхность Q.

Диффеоморфизм, существование которого доказано в теореме 1.1, называют *локальным диффеоморфизмом Пуанкаре*, порожденным трансверсальными поверхностями P и Q.

Наиболее важным частным случаем описанной конструкции является тот, в котором траектория точки p соответствует периодическому решению системы (1.1), а поверхности P и Q совпадают (именно этот случай и был рассмотрен самим Пуанкаре).

1.4. Периодические системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим периодическую по t систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \tag{1.6}$$

где $x\in R^n$. Будем предполагать, что вектор-функция F принадлежит классу $C^{0,1}_{t,x}$ в $R\times R^n$ и

$$F(t+\omega,x)\equiv F(t,x)$$

при некотором $\omega>0$.

Обозначим через $x(t,t_0,x_0)$ решение системы (1.6) с начальными данными (t_0,x_0).

Хорошо известно, что если $x(t)$ — решение системы (1.6), то при любом целом k функция $x(t+k\omega)$ — тоже решение.

Предположим для определенности, что каждое решение системы (1.6) продолжимо на R.

Определим отображение $T(\xi) = x(\omega,0,\xi)$. Покажем, что T — диффеоморфизм пространства R^n. Рассмотрим отображение $U(\xi) = x(-\omega,0,\xi)$. Фиксируем ξ и обозначим $\xi' = U(\xi)$.

Определим два решения $x_1(t) = x(t,0,\xi')$ и $x_2(t) = x(t-\omega,-\omega,\xi')$ (функция $x_2(t)$ — решение как сдвиг на $-\omega$ решения $x(t,-\omega,\xi')$).

Так как $x_1(0)=\xi'$ и $x_2(0) = x(-\omega,-\omega,\xi') = \xi'$, решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ совпадают.

По единственности, $x_2(\omega) = x(0,-\omega,x(-\omega,0,\xi)) = \xi$. Так как $x_1(\omega)=\xi$, мы приходим к равенству $T(U(\xi))=\xi$, которое показывает, что отображение U обратно к T.

Отображения T и U дифференцируемы, следовательно, T — диффеоморфизм (его называют *диффеоморфизмом Пуанкаре* системы (1.6)).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.4. *Решение* $x(t, 0, x_0)$ *системы* (1.6) *имеет период* $m\omega$ *тогда и только тогда, когда* x_0 *— неподвижная точка диффеоморфизма* T^m.

Доказательство. Если решение $x(t, 0, x_0)$ имеет период $m\omega$, то $x(t, 0, x_0) \equiv x(t + m\omega, 0, x_0)$. Полагая в этом тождестве $t = 0$, приходим к равенству $x_0 = x(m\omega, 0, x_0) = T^m(x_0)$. Следовательно, x_0 — неподвижная точка T^m.

Пусть теперь x_0 — неподвижная точка диффеоморфизма T^m, т. е. $x_0 = T^m(x_0)$. Рассмотрим решения $x_1(t) = x(t, 0, x_0)$ и $x_2(t) = x(t+m\omega, 0, x_0)$. Так как $x_1(0) = x_0$ и $x_2(0) = x(m\omega, 0, x_0) = T^m(x_0) = x_0$, решения совпадают, что и означает $m\omega$-периодичность решения $x(t, 0, x_0)$. •

Таким образом, важная задача о существовании периодических решений у систем дифференциальных уравнений сводится к задаче о неподвижной точке диффеоморфизма, для решения которой в современной математике разработано много разнообразных методов.

Мы завершим этот параграф описанием одной конструкции, обобщающей понятия динамических систем с дискретным и непрерывным временем.

1.5. Действие коммутативной группы

Пусть G — коммутативная группа, т. е. множество с бинарной операцией $*$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(G1) операция $*$ ассоциативна, т. е. $(a * b) * c = a * (b * c)$ для $a, b, c \in G$;

(G2) существует единица, т. е. такой элемент $e \in G$, что $a * e = e * a$ для $a \in G$;

(G3) существуют обратные элементы, т. е. для любого $a \in G$ существует такой элемент $b \in G$, что $a * b = e$;

(4) $a * b = b * a$ для любых $a, b \in G$.

Действием группы G на топологическом пространстве M называется отображение $\phi: G \times M \to M$ со следующими свойствами:

(A1) $\phi(e, x) = x$ для $x \in M$;

(A2) $\phi(a * b, x) = \phi(a, \phi(b, x))$ для $a, b \in G$ и $x \in M$.

Обычно рассматривают непрерывные действия, т. е. предполагают, что

(A3) отображение $\phi(a, \cdot)$ непрерывно для любого $a \in G$.

Траекторией точки $x \in M$ при действии группы G называется множество

$$O(x, G) = \{\phi(a, x) \ : a \in G\}.$$

Ясно, что динамические системы с дискретным и непрерывным временем – это действия групп Z и R по сложению.

2. Топологии на пространствах динамических систем

2.1. C^0-топология

Пусть (M, dist) — компактное метрическое пространство. Если f и g — два гомеоморфизма пространства M, положим

$$\rho_0(f, g) = \max_{x \in M} \max(\mathrm{dist}(f(x), g(x)), \mathrm{dist}(f^{-1}(x), g^{-1}(x))). \tag{2.1}$$

Легко понять, что ρ_0 — метрика на пространстве гомеоморфизмов M.

Будем обозначать через $H(M)$ пространство гомеоморфизмов M с метрикой ρ_0; топологию, индуцированную метрикой ρ_0, будем называть *C^0-топологией*.

Лемма 2.1. *Пространство* $H(M)$ *— полное метрическое пространство*.

Доказательство. Рассмотрим последовательность гомеоморфизмов f_m, сходящуюся в себе относительно метрики ρ_0.

Это означает, что по любому ϵ найдется такое m_0, что $\rho_0(f_l, f_k) < \epsilon$ при $k, l > m_0$.

Тогда

$$\max_{x \in M} \mathrm{dist}(f_l(x), f_k(x)) < \epsilon$$

и

$$\max_{x \in M} \mathrm{dist}(f_l^{-1}(x), f_k^{-1}(x)) < \epsilon$$

при $k, l > m_0$.

Таким образом, последовательности f_m и f_m^{-1} сходятся в себе относительно равномерной метрики

$$r(f, g) = \max_{x \in M} \mathrm{dist}(f(x), g(x)).$$

Так как пространство непрерывных отображений полно относительно равномерной метрики r, существуют такие непрерывные отображения f и g пространства M, что $r(f_m, f) \to 0$ и $r(f_m^{-1}, g) \to 0$ при $m \to \infty$.

Фиксируем $x \in M$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в равенстве $f_m(f_m^{-1}(x)) = x$, мы видим, что $f(g(x)) = x$. Аналогично, $g(f(x)) = x$.

Таким образом, отображение f — гомеоморфизм пространства M и $g = f^{-1}$. Ясно, что $\rho_0(f_m, f) \to 0$. Лемма доказана. •

Замечание. Легко показать, что если определять топологию на пространстве гомеоморфизмов не метрикой ρ_0, а равномерной метрикой r, то возникающее метрическое пространство не будет полным.

Действительно, пусть M — отрезок $[0,1]$. Фиксируем целое число $m > 1$ и рассмотрим непрерывное отображение $f_m\colon [0,1] \to [0,1]$, заданное так: $f_m(0) = 0$, $f_m(1) = 1$, $f_m(1/3) = 1/m$, $f_m(2/3) = 1 - 1/m$, и f_m линейно на каждом из отрезков $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$. Очевидно, f_m — гомеоморфизм отрезка $[0,1]$.

Ясно, что для любых целых $m, n > 1$ выполнено неравенство

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \max\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right), \quad x \in [0,1];$$

таким образом, последовательность f_m сходится в себе (и, следовательно, сходится) относительно равномерной метрики r. Легко понять, что предельная функция f тождественно равна нулю на $[0,1/3]$ и единице на $[2/3,1]$. Поэтому f — не гомеоморфизм.

Пусть теперь ϕ и ψ — два потока на компактном метрическом пространстве (M, dist). В п. 1.2 было показано, что при любом $t \neq 0$ отображение $\phi(t,\cdot)$ — гомеоморфизм пространства M (при $t = 0$ отображение $\phi(0,\cdot) =$Id – также гомеоморфизм). Определим

$$\rho_0(\phi, \psi) = \max_{t\in[-1,1]} \rho_0(\phi(t,\cdot), \psi(t,\cdot)). \tag{2.2}$$

Легко понять, что ρ_0 — метрика на пространстве потоков на M. Будем обозначать через $\mathcal{F}^0(M)$ пространство потоков на M с метрикой ρ_0; как и в случае пространства гомеоморфизмов, топологию, индуцированную метрикой ρ_0, будем называть C^0-топологией.

Так же, как в лемме 2.1, показывается, что $\mathcal{F}^0(M)$ — полное метрическое пространство.

2.2. C^1-топология

Пусть M — гладкое замкнутое (т. е. компактное и без края) многообразие. Для введения C^1-топологии на пространстве диффеоморфизмов

многообразия M удобно предположить, что M является подмногообразием евклидова пространства R^N (другой, эквивалентный, способ введения C^1-топологии, основанный на использовании локальных координат, описан в [Пи1988]).

Это предположение не ограничивает общность рассмотрения, так как по классической теореме Уитни любое гладкое замкнутое многообразие может быть вложено в евклидово пространство достаточно большой размерности.

Итак, предположим, что M является подмногообразием R^N. В этом случае, для любой точки $x \in M$ мы можем отождествить касательное пространство T_xM к M в x с линейным подпространством пространства R^N. Фиксируем метрику dist на M, индуцированную евклидовой метрикой пространства R^N. Для вектора $v \in T_xM$ будем обозначать через $|v|$ его норму как норму в пространстве R^N (мы не уточняем здесь выбор нормы, так как в силу эквивалентности различных норм на R^N определяемая топология на пространстве диффеоморфизмов от этого выбора не зависит).

Пусть f и g — диффеоморфизмы многообразия M. Определим величину $\rho_0(f,g)$ той же формулой (2.1), которая была использована в п. 2.1 для введения C^0-топологии на пространстве $H(M)$.

Пусть x — точка M и пусть v — вектор из касательного пространства T_xM. Так как мы можем рассматривать векторы $Df(x)v \in T_{f(x)}M$ и $Dg(x)v \in T_{g(x)}M$ как векторы пространства R^N, определены величины $|Df(x)v - Dg(x)v|$ и

$$||Df(x) - Dg(x)|| = \sup_{v\in T_xM, |v|=1} |Df(x)v - Dg(x)v|.$$

Введем число

$$\rho_1(f,g) = \rho_0(f,g) + \sup_{x\in M} ||Df(x) - Dg(x)||.$$

Легко понять, что ρ_1 — метрика на пространстве диффеоморфизмов многообразия M. Будем обозначать через Diff $^1(M)$ пространство диффеоморфизмов M с метрикой ρ_1; топологию, индуцированную метрикой ρ_1, будем называть *C^1-топологией.*

Стандартные рассуждения (предлагаем читателю провести их самостоятельно) показывают, что (Diff $^1(M)$,ρ_1) – полное метрическое пространство.

Рассмотрим теперь пространство гладких потоков на M. Будем называть поток $\phi\colon R \times M \to M$ гладким, если при любом $t \in R$ отображение $\phi(t,\cdot)$ гладкое (для наших целей достаточно предполагать, что это отображение непрерывно дифференцируемо; такое предположение заведомо выполнено, если мы рассматриваем поток, порожденный векторным полем класса C^1).

В этом случае, как показывают рассуждения, проведенные в начале п. 1.2, отображение $\phi(t, \cdot)$ является диффеоморфизмом многообразия M при любом t.

Пусть ϕ и ψ — два гладких потока на M. Введем число

$$\rho_1(\phi, \psi) = \max_{t \in [-1,1]} \rho_1(\phi(t, \cdot), \psi(t, \cdot)). \tag{2.3}$$

Легко понять, что ρ_1 — метрика на пространстве гладких потоков многообразия M. Будем обозначать через $\mathcal{F}^1(M)$ пространство гладких потоков M с метрикой ρ_1. Так же, как и в случае пространства диффеоморфизмов, топологию, индуцированную метрикой ρ_1, будем называть C^1-топологией.

2.3. Метрики на пространстве систем дифференциальных уравнений

Рассматривая потоки, порожденные векторными полями на гладких замкнутых многообразиях, мы ввели две метрики ρ_0 и ρ_1. Определяя эти метрики, мы оценивали разности между траекториями потоков и между «производными потоков по начальным данным» на временных промежутках фиксированной длины.

При рассмотрении потоков, порожденных автономными системами дифференциальных уравнений, естественно рассматривать метрики, основанные на оценках близости самих систем дифференциальных уравнений (точнее говоря, их правых частей), а не их траекторий.

Как отмечалось в п. 1.1, мы используем две нормы вектора $x \in R^n$: евклидову норму $|x|_e$ и норму $|x| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

Для $n \times n$ матрицы A обозначим через $\|A\|$ ее операторную норму, соответствующую норме $|\cdot|$, т. е. величину

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|.$$

Хорошо известно, что если $A = (a_{ij})$, то

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Из неравенств

$$|x| \leqslant |x|_e \leqslant \sqrt{n}|x|$$

следует, что

$$|Ax|_e \leqslant \sqrt{n}|Ax| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|\,|x| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|\,|x|_e \tag{2.4}$$

для любых A и x.

Рассмотрим две автономные системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{2.5}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = G(x) \tag{2.6}$$

в R^n.

Будем предполагать, что вектор-функции F и G класса C^1 в R^n. Обозначим через ϕ и ψ потоки, порождаемые системами (2.5) и (2.6) (как отмечалось выше, мы предполагаем, что любая рассматриваемая система порождает поток).

Будем, кроме того, предполагать, что матрица Якоби $\partial F/\partial x$ вектор-функции F ограничена (отсюда следует, в частности, что вектор-функция F глобально липшицева в R^n; обозначим через L ее константу Липшица) и равномерно непрерывна в R^n.

Вторая группа предположений выглядит не очень естественной — это наша «плата» за рассмотрение систем в некомпактном пространстве R^n (для векторного поля класса C^1 на компактном многообразии соответствующие предположения выполнены автоматически).

Будем, наконец, предполагать, что величины

$$r_0(F, G) = \sup_{x \in R^n} |F(x) - G(x)|$$

и

$$r_1(F, G) = r_0(F, G) + \sup_{x \in R^n} \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x) - \frac{\partial G}{\partial x}(x) \right\|$$

конечны (на самом деле, мы будем изучать случай, в котором эти величины стремятся к0).

Мы будем ссылаться на следующую элементарную оценку разности решений двух систем дифференциальных уравнений (для ее доказательства достаточно представить рассматриваемые решения задач Коши как решения эквивалентных интегральных уравнений и применить лемму Гронуолла; аналогичная, но более сложная, конструкция применена ниже при доказательстве леммы 2.2).

Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{2.7}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x), \tag{2.8}$$

где $x \in R^n$.

Предположим, что вектор-функции f и g непрерывны в R^{n+1}, f глобально липшицева по x с константой L и величина

$$m = \sup_{(t,x)\in R^{n+1}} |f(t,x) - g(t,x)|$$

конечна.

Если $x(t)$ и $y(t)$ — решения систем (2.7) и (2.8) на одном и том же промежутке $[a,b]$ с одними и теми же начальными данными (t_0, x_0), где $t_0 \in [a,b]$, то

$$|x(t) - y(t)| \leqslant m \exp(L(b-a)), \quad t \in [a,b]. \tag{2.9}$$

Лемма 2.2.
(1) *Если* $r_0(F,G) \to 0$, *то* $\rho_0(\phi,\psi) \to 0$.
(2) *Если* $r_1(F,G) \to 0$, *то* $\rho_1(\phi,\psi) \to 0$.

Доказательство. Пусть x — произвольная точка пространства R^n. Так как $\phi(t,x)$ и $\psi(t,x)$ — решения систем (2.5) и (2.6) с одними и теми же начальными данными $(0,x)$, из оценки (2.9) следует, что

$$\rho_0(\phi,\psi) = \sup_{x\in R^n} \max_{t\in[-1,1]} |\phi(t,x) - \psi(t,x)| \leqslant r_0(F,G)\exp(L).$$

Это доказывает утверждение (1).

Для того, чтобы оценить величину $\rho_1(\phi,\psi)$, фиксируем вновь точку $x \in R^n$ и рассмотрим производные потоков ϕ и ψ по начальным данным:

$$Y(t) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(t)$$

и

$$Z(t) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(t).$$

Напомним, что они являются матричными решениями систем в вариациях

$$\frac{dY}{dt} = \Phi(t,Y), \text{ где } \Phi(t,Y) = \frac{\partial F}{\partial x}(t,\phi(t))Y, \tag{2.10}$$

и

$$\frac{dZ}{dt} = \Psi(t,Z), \text{ где } \Psi(t,Z) = \frac{\partial G}{\partial x}(t,\psi(t))Z, \tag{2.11}$$

с одними и теми же начальными данными $Y(0) = Z(0) = E$, где E — единичная матрица размера $n \times n$.

Мы предполагали, что матрица Якоби $\partial F/\partial x$ ограничена; кроме того, так как $r_1(F,G) \to 0$, мы можем считать, например, что $r_1(F,G) \leqslant 1$. Поэтому существует такое число $N > 0$, что

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\| \leqslant N, \quad \left\|\frac{\partial G}{\partial x}\right\| \leqslant N, \quad x \in R^n. \tag{2.12}$$

Оценим, прежде всего, величину $\|Z(t)\|$ для $t \in [-1,1]$ (мы не будем стремиться получить сколько-либо точную оценку величины $\|Z(t)\|$; для нас важно оценить ее сверху константой, зависящей от N и не зависящей от начальной точки x траектории $\psi(t,x)$).

Если z — столбец матрицы Z, то выполнены равенства

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x}(t,\psi(t))z \tag{2.13}$$

и $|z(0)|_e = 1$.

Умножим равенство (2.13) скалярно на $z(t)$:

$$\left\langle \frac{dz}{dt}, z \right\rangle = \left\langle \frac{\partial G}{\partial x}(t,\psi(t)), z \right\rangle, \tag{2.14}$$

где $\langle\cdot\rangle$ — знак скалярного умножения.

Обозначая, как и выше, через $z^2(t)$ квадрат евклидовой нормы $z(t)$ и учитывая соотношения (2.4), (2.12) и (2.14), мы приходим к неравенствам

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}z^2 = \left\langle \frac{dz}{dt}, z \right\rangle = \left\langle \frac{\partial G}{\partial x}(t,\psi(t))z, z \right\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\partial G}{\partial x}(t,\psi(t))z\right|_e |z|_e \leqslant \sqrt{n}\left\|\frac{\partial G}{\partial x}(t,\psi(t))\right\| |z|_e |z|_e \leqslant \sqrt{n}Nz^2.$$

Так как $z(t) \neq 0$, из последнего неравенства следует, что

$$\frac{d}{dt}(\log z^2) \leqslant 2\sqrt{n}N.$$

Интегрируя это неравенство и учитывая, что $z^2(0) = 1$, мы получаем оценку

$$z^2(t) \leqslant N_1^2 \colon = \exp(2\sqrt{n}N), \quad |t| \leqslant 1.$$

Таким образом,

$$|z(t)| \leqslant |z(t)|_e \leqslant N_1$$

и

$$\|Z(t)\| \leqslant N_2 \colon = nN_1, \quad |t| \leqslant 1.$$

Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и найдем по нему такое $\delta > 0$, что если $|x - x'| < \delta$, то

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x) - \frac{\partial F}{\partial x}(x') \right\| \leqslant \epsilon.$$

Ясно, что если $r_1(F,G) \to 0$, то и $r_0(F,G) \to 0$. Найдем такое $\delta_1 > 0$, что если $r_1(F,G) < \delta_1$, то $r_0(F,G)\exp(L) < \delta$. То же рассуждение, что было применено при доказательстве утверждения (1), показывает, что в этом случае

$$|\phi(t,x) - \psi(t,x)| \leqslant \delta, \quad |t| \leqslant 1,$$

для любого $x \in R^n$.

Но тогда и

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(\phi(t,x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(\psi(t,x)) \right\| \leqslant \epsilon, \quad |t| \leqslant 1, \tag{2.15}$$

для любого $x \in R^n$.

Выпишем эквивалентные интегральные уравнения для Y и Z:

$$Y(t) = E + \int_0^t \Phi(s, Y(s))\, ds \tag{2.16}$$

и

$$Z(t) = E + \int_0^t \Psi(s, Z(s))\, ds. \tag{2.17}$$

Из (2.16) и (2.17) следует, что

$$\|Y(t) - Z(t)\| \leqslant \left| \int_0^t \|\Phi(s,Y(s)) - \Psi(s,Z(s))\|\, ds \right|.$$

Оценим выражение под знаком интеграла:

$$\|\Phi(s,Y(s)) - \Psi(s,Z(s))\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Phi(s,Y(s)) - \Phi(s,Z(s))\| + \|\Phi(s,Z(s)) - \Psi(s,Z(s))\|.$$

Из оценок (2.12) следует, что

$$\|\Phi(s,Y(s)) - \Phi(s,Z(s))\| = \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(\phi(s,x))(Y(s) - Z(s)) \right\| \leqslant N\|Y(s) - Z(s)\|. \tag{2.18}$$

Далее, если $r_1(F,G) < \delta_1$, то

$$\|\Phi(s,Z(s)) - \Psi(s,Z(s))\| \leqslant \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\phi(s,x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(\psi(s,x)) \right) Z(s) \right\| +$$
$$+ \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\psi(s,x)) - \frac{\partial G}{\partial x}(\psi(s,x)) \right) Z(s) \right\| \leqslant (\epsilon + r_1(F,G))N_2.$$

Объединяя эти неравенства с оценкой (2.18), мы приходим к неравенству

$$\|Y(t) - Z(t)\| \leqslant \left| \int_0^t (N\|Y(s) - Z(s)\| + (\epsilon + r_1(F,G))N_2)\, ds \right|.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гроноулла, мы видим, что если $r_1(F,G) < \delta_1$, то

$$\|Y(t) - Z(t)\| \leqslant (\epsilon + r_1(F,G))N_2 \exp(N)$$

при $t \in [-1,1]$.

Из этой оценки и из произвольности ϵ немедленно следует второе утверждение доказываемой леммы. •

2.4. Типичные свойства

В глобальной теории динамических систем важную роль играет понятие типичного свойства.

Пусть X — топологическое пространство. Будем называть множество $A \subset X$ *множеством* II *категории по Бэру* (дальше будем говорить просто о множестве II категории), если существует такое счетное семейство открытых и плотных подмножеств $\{A_n : n \in Z\}$ пространства X, что

$$\bigcap_{n \in Z} A_n = A. \tag{2.19}$$

Свойство элементов пространства X называется *типичным*, если этим свойством обладают все элементы некоторого множества II категории. Если некоторое свойство типично, говорят, что *типичный элемент* пространства X обладает этим свойством.

Справедлива классическая теорема Бэра.

Теорема 2.1. *Если X — полное метрическое пространство, то множество* II *категории плотно в X.*

Следует помнить, что множество II категории может быть малым по мере. Покажем, что существует множество II категории на прямой, лебегова мера которого равна нулю. Фиксируем счетное плотное множество точек $\{a_n,\ n = 0, 1, \dots\}$ прямой (например, множество рациональных чисел).

Фиксируем натуральное число m и определим множество

$$A_m = \bigcup_{n\geqslant 0}\left(a_n - \frac{1}{m2^n}, a_n + \frac{1}{m2^n}\right).$$

Множество A_m открыто и плотно на прямой, а его лебегова мера оценивается так:

$$\mathrm{mes} A_m \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{m2^n} = \frac{4}{m}.$$

Множество $A = \cap_{m>0} A_m$ — множество II категории, при этом $\mathrm{mes} A = 0$.

В п. 1.2 упоминалось о существовании диффеоморфизмов, не вкладывающихся в потоки. Точная формулировка соответствующего утверждения (доказанного в работе [Бр1972]) такова.

Теорема 2.2. *Если M — гладкое замкнутое многообразие, размерность которого не меньше двух, то типичный диффеоморфизм в* $\mathrm{Diff}^{\,1}(M)$ *не вкладывается в поток, порожденный липшицевым векторным полем на M.*

2.5. Погружения и вложения

Мы будем рассматривать два класса изучаемых в топологии отображений — погружения и вложения, ограничиваясь погружениями и вложениями гладких многообразий (в основном евклидовых пространств) в евклидовы пространства.

Напомним основные определения.

Пусть f — отображение многообразия M в многообразие N. Отображение f называется *топологическим погружением*, если f — гомеоморфизм M на $f(M)$.

Отображение f называется *погружением класса $C^k, k \geqslant 1$*, если оно инъективно, принадлежит классу C^k и

$$\mathrm{rank} Df(x) = \dim M$$

для любого $x \in M$ (отметим, что выполнение последнего условия возможно лишь в случае $\mathrm{dim} N \geqslant \mathrm{dim} M$).

Отображение f называется *вложением класса $C^k, k \geqslant 1$*, если $f(M)$ — подмногообразие N и f — диффеоморфизм M на $f(M)$.

Кроме того, мы будем рассматривать гладкие диски. Мы будем называть *гладким диском* образ диска (шара) при вложении.

Рассмотрим диск

$$D = \{x \in R^k\ : |x|_e < r,\ r > 0\}$$

в евклидовом пространстве R^k и многообразие M (как при введении топологии на пространстве диффеоморфизмов, будем считать, что многообразие M вложено в евклидово пространство R^N достаточно большой размерности).

Для двух вложений h и g диска D в многообразие M положим

$$\rho_1(h, g) = \sup_{x\in D}\left(|h(x) - g(x)| + \|Dh(x) - Dg(x)\|\right),$$

где $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ — расстояние в R^N и порожденная им операторная норма (обоснование корректности введения этого числа проводится так же, как в п. 2.2).

3. Отношения эквивалентности

3.1. Топологическая сопряженность

Рассмотрим два гомеоморфизма $f\colon M \to M$ и $g\colon N \to N$, где M и N — топологические пространства.

Гомеоморфизмы f и g называются *топологически сопряженными*, если существует такой гомеоморфизм h пространства M на пространство N, что

$$g(h(x)) = h(f(x)) \tag{3.1}$$

для любого $x \in M$ (другими словами, $g \circ h = h \circ f$).

Сам гомеоморфизм h называют в этом случае *сопрягающим гомеоморфизмом* (или *топологическим сопряжением*).

Условие (3.1) иногда формулируют в следующем виде: диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

коммутативна.

Справедливо следующее простое, но очень важное утверждение.

Лемма 3.1. *Если выполнено равенство $g \circ h = h \circ f$, то*

$$g^m \circ h = h \circ f^m \tag{3.2}$$

для любого целого m.

Доказательство. Докажем утверждение леммы по индукции для целых $m \geqslant 0$ (для $m < 0$ доказательство аналогично). При $m = 0$, $f^0 = g^0 = \mathrm{Id}$, и равенство (3.2) приобретает вид $h = h$. Пусть равенство (3.2) доказано для m.

Тогда

$$g^{m+1} \circ h = g \circ (g^m \circ h) = g \circ (h \circ f^m) = (g \circ h) \circ f^m = (h \circ f) \circ f^m = h \circ f^{m+1},$$

и утверждение леммы доказано. ●

Из доказанной леммы вытекает, что сопрягающий гомеоморфизм отображает траектории динамической системы, порожденной гомеоморфизмом f, на траектории динамической системы, порожденной гомеоморфизмом g. Таким образом, если гомеоморфизмы f и g топологически сопряжены, то структура разбиения фазовых пространств M и N на траектории соответствующих динамических систем одинакова с топологической точки зрения.

При этом, например, периодические точки гомеоморфизма f переходят в периодические точки гомеморфизма g. Действительно, пусть p — периодическая точка f периода m, т. е. точки

$$p_0 = p, p_1 = f(p), \ldots, p_{m-1} = f^{m-1}(p)$$

различны и $f^m(p)$. Если $r = h(p)$, то

$$r_i = g^i(r) = g^i(h(p)) = h(f^i(p)) = h(p_i)$$

по лемме 3.1, поэтому точки $r_i, i = 0, \ldots, m-1$, различны. Наконец, $g^m(r) = h(f^m(p)) = h(p) = r$.

Так же показывается, что если траектория $O(p, f)$ плотна в M, то траектория $O(h(p), g)$ плотна в N.

Замечание. Иногда переход от гомеоморфизма к топологически сопряженному к нему гомеоморфизму позволяет существенно упростить задачу.

Рассмотрим следующий пример, относящийся, впрочем, не к динамическим, а к полудинамическим системам.

Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства M в себя. Полагая $\phi(m, x) = f^m(x), m \in Z_+$, мы приходим к *полудинамической системе*, т. е. к отображению $\phi\colon Z_+ \times M \to M$, обладающему свойствами, аналогичными свойствам (ДДС1)–(ДДС3) (следует лишь заменить Z на Z_+ в свойствах (ДДС2) и (ДДС3)).

Траектория точки x в полудинамической системе ϕ определяется равенством

$$O(x, \phi) = \{\phi(m, x) : m \in Z_+\};$$

определение периодической точки дословно повторяет определение, данное в случае динамической системы.

Две полудинамические системы, порожденные отображениями f и g, называются топологически сопряженными, если существует такой гомеоморфизм h, что выполнены равенства (3.1).

Упражнение 3.1. Рассмотрите две полудинамические системы на отрезке $[0,1]$, порожденные отображениями

$$f(x) = 4x(1-x)$$

и

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2], \\ 2(1-x), & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Докажите, что отображение

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\arcsin\sqrt{x}$$

— гомеоморфизм отрезка $[0,1]$ на себя, сопрягающий полудинамические системы, порожденные отображениями f и g.

Таким образом, мы можем свести изучение динамики существенно нелинейного отображения f к рассмотрению кусочно-линейного отображения g.

Обратимся к случаю динамических систем на одном и том же фазовом пространстве M.

Лемма 3.2. *Отношение топологической сопряженности – отношение эквивалентности на пространстве гомеоморфизмов* $H(M)$.

Доказательство. Отношение топологической сопряженности рефлексивно – тождественный гомеоморфизм Id сопрягает любой гомеоморфизм с самим собой.

Отношение топологической сопряженности симметрично – если h сопрягает f и g, т. е. $g \circ h = h \circ f$, то h^{-1} сопрягает g и f; действительно, применяя h^{-1} к равенству $g \circ h = h \circ f$ справа и слева, мы получаем искомое равенство $f \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g$.

Докажем, наконец, что отношение топологической сопряженности транзитивно. Пусть h_1 сопрягает f и g, а h_2 сопрягает g и k. Тогда $h = h_2 \circ h_1$ – гомеоморфизм пространства M и

$$h \circ f = h_2 \circ (h_1 \circ f) = h_2 \circ (g \circ h_1) = (k \circ h_2) \circ h_1 = k \circ h.$$

Утверждение леммы доказано. •

Конечно, отношение топологической сопряженности является отношением эквивалентности и на пространстве диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^1(M)$ гладкого многообразия M.

Это отношение используется при формулировке основного определения теории структурной устойчивости.

Пусть M — гладкое замкнутое многообразие. Диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ называется *структурно устойчивым*, если существует такая окрестность W диффеоморфизма в C^1-топологии, что любой диффеоморфизм $g \in W$ топологически сопряжен с f.

Иногда (особенно в русскоязычной математической литературе) структурная устойчивость называется *грубостью*.

Из определения и из леммы 3.2 немедленно следует, что любой диффеоморфизм $g \in W$ структурно устойчив. Таким образом, справедлива следующая теорема. Обозначим через $\mathcal{S}(M)$ множество структурно устойчивых диффеоморфизмов в $\mathrm{Diff}^1(M)$.

Теорема 3.1. *Множество $\mathcal{S}(M)$ — открытое подмножество* $\mathrm{Diff}^1(M)$.

Первоначальному определению грубости системы дифференциальных уравнений (мы обсудим это определение позже, в п. 7.6) соответствует другое понятие структурной устойчивости диффеоморфизмов.

Диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ называется *структурно устойчивым в сильном смысле*, если по любому $\epsilon > 0$ можно найти такую окрестность W диффеоморфизма в C^1-топологии, что для любого диффеоморфизма $g \in W$ существует такой гомеоморфизм h, топологически сопрягающий g с f, что

$$\max_{x \in M} \mathrm{dist}(h(x), x) < \epsilon.$$

Легко понять, что открытость множества диффеоморфизмов, обладающих свойством структурной устойчивости в сильном смысле, не следует непосредственно из определения.

Обратимся к случаю потоков. Рассмотрим два потока $\phi\colon M \to M$ и $\psi\colon N \to N$, где M и N — топологические пространства. Потоки ϕ и ψ называются *топологически сопряженными*, если существует такой гомеоморфизм h пространства M на пространство N, что

$$\psi(t, h(x)) = h(\phi(t, x)) \tag{3.3}$$

для любых $t \in R$ и $x \in M$.

Таким образом, топологическая сопряженность потоков означает, что существует гомеоморфизм фазовых пространств, отображающий траектории одного из потоков на траектории другого и сохраняющий «время» t.

Оказывается, что отношение топологической сопряженности является слишком тонким для задачи глобальной классификации потоков, порождаемых системами дифференциальных уравнений.

Рассмотрим, например, две автономные системы дифференциальных уравнений на плоскости R^2 с координатами (x, y):

$$\frac{dx}{dt} = -2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x, \tag{3.4}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \tag{3.5}$$

Системы (3.4) и (3.5) имеют точки покоя в начале координат; остальные траектории этих систем являются концентрическими окружностями с центром в начале, по которым точки движутся в положительном направлении с ростом t. Фиксируем начальную точку $(x_0, 0)$ на оси абсцисс. Траектории этой точки в потоках ϕ и ψ, порождаемых системами (3.4) и (3.5), задаются следующими формулами:

$$\phi(t, x_0, 0): \quad x = x_0 \cos 2t, \quad y = x_0 \sin 2t,$$

и

$$\psi(t, x_0, 0): \quad x = x_0 \cos t, \quad y = x_0 \sin t.$$

Ясно, что с точки зрения глобальной классификации разбиения фазового пространства на траектории системы (3.4) и (3.5) одинаковы; в то же время потоки ϕ и ψ не являются топологически сопряженными. Покажем это.

Предположим, что существует гомеоморфизм $h\colon R^2 \to R^2$, для которого выполнено равенство (3.3). Траектория $\phi(t, 1, 0)$ замкнутая, поэтому ее образ под действием гомеоморфизма h — тоже замкнутая траектория. Таким образом, если $h(1, 0) = (x_0, y_0)$, то

$$(x_0, y_0) \neq (0, 0). \tag{3.6}$$

Из определения потока ϕ следует, что $\phi(\pi, 1, 0) = (1, 0)$. Поэтому

$$(x_0, y_0) = h(1, 0) = h(\phi(\pi, 1, 0)) = \psi(\pi, h(1, 0)) = \psi(\pi, x_0, y_0) = -(x_0, y_0),$$

и мы приходим к противоречию с равенством (3.6).

В задаче глобальной классификации потоков используется отношение топологической эквивалентности, к определению которого мы переходим.

3.2. Топологическая эквивалентность потоков

Два потока $\phi\colon M \to M$ и $\psi\colon N \to N$, где M и N — топологические пространства, называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм h пространства M на пространство N, отображающий

траектории потока ϕ на траектории потока ψ и сохраняющий направление движения по траекториям.

Иными словами, существует такая функция $\tau\colon R \times M \to R$, что

(1) при любом $x \in M$ функция $\tau(\cdot, x)$ строго возрастает и отображает R на R;

(2) $\tau(0, x) = x$ при любом $x \in M$;

(3) $h(\phi(t, x)) = \psi(\tau(t, x), h(x))$ при любых $(t, x) \in R \times M$.

Ясно, что потоки ϕ и ψ, порождаемые системами дифференциальных уравнений (3.4) и (3.5), топологически эквивалентны; при этом в качестве h можно взять тождественное отображение плоскости, а $\tau(t, x) = 2t$.

3.3. Неблуждающее множество.

Важные для глобальной качественной теории динамических систем отношения эквивалентности связаны с понятием неблуждающих точек.

Рассмотрим гомеоморфизм f топологического пространства M и порожденную им динамическую систему. Точка $x_0 \in M$ называется *блуждающей точкой* для f, если существуют такие окрестность U точки x_0 и число N, что

$$f^n(U) \cap U = \emptyset \text{ при } |n| > N.$$

Точка x_0 называется *неблуждающей*, если она не является блуждающей. Легко понять, что точка x_0 — неблуждающая тогда и только тогда, когда для любой окрестности U точки x_0 и для любого числа N найдутся такие точка $x \in U$ и число n, $|n| > N$, что $f^n(x) \in U$.

Будем обозначать через $\Omega(f)$ *множество неблуждающих точек* гомеоморфизма f (иногда $\Omega(f)$ называют просто *неблуждающим множеством*).

При весьма общих предположениях на топологическое пространство M (всегда выполненных, например, для метрических пространств) мы можем дать удобную для дальнейшего переформулировку определения неблуждающей точки.

Напомним, что *базой окрестностей* точки x топологического пространства M называется такая совокупность окрестностей точки x, что любая окрестность точки x содержит одну из окрестностей этой совокупности.

Говорят, что топологическое пространство M удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если у любой его точки есть счетная база окрестностей. Хорошо известно, что любое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Лемма 3.3. *Если пространство M удовлетворяет первой аксиоме счетности, то точка $x_0 \in M$ является неблуждающей для гомеоморфизма f тогда и только тогда, когда существуют такие последовательности точек $p_k, q_k \in M$ и чисел τ_k, θ_k, что*

$$p_k, q_k, f^{\tau_k}(p_k), f^{\theta_k}(q_k) \to x_0,$$

$\tau_k \to \infty$ *и* $\theta_k \to -\infty$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Ясно, что если указанные последовательности существуют, то $x_0 \in \Omega(f)$.

Пусть теперь $x_0 \in \Omega(f)$. Фиксируем счетную базу $V_m, m > 0$, окрестностей точки x_0. Для любого натурального m мы можем найти такое число $n(m)$, что $|n(m)| > m$ и

$$f^{n(m)}(V_m) \cap V_m \neq \emptyset.$$

Это означает, что существуют такие точки $r_m \in V_m$, что $f^{n(m)}(r_m) \in V_m$.

Если последовательность $n(m)$ содержит подпоследовательность $n(l_k) \to \infty$, положим $p_k = r_{n(l_k)}$, $\tau_k = n(l_k)$, $q_k = f^{\tau_k}(p_k)$ и $\theta_k = -\tau_k$.

Случай подпоследовательности $n(l_k) \to -\infty$ рассматривается так же. •

Очевидно, неподвижные и периодические точки гомеоморфизма f являются неблуждающими. Действительно, если p — периодическая точка периода m, то все точки $f^{mk}(p)$ лежат в любой окрестности точки p, а числа mk могут быть сколь угодно велики. Такие неблуждающие точки иногда таназывают тривиальными.

Существуют и нетривиальные неблуждающие точки.

Хорошо известны понятия ω-предельных и α-предельных точек траектории $O(x, f)$. Напомним, что ω-предельное множество $\omega(x, f)$ траектории $O(x, f)$ определяется как множество предельных точек всевозможных последовательностей $f^{n(k)}(x)$, где $n(k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Аналогично, α-предельное множество $\alpha(x, f)$ траектории $O(x, f)$ определяется как множество предельных точек всевозможных последовательностей $f^{n(k)}(x)$, где $n(k) \to -\infty$ при $k \to \infty$.

Каждое из множеств $\omega(x, f)$ и $\alpha(x, f)$ замкнуто и инвариантно.

Лемма 3.4. $\omega(x, f) \cup \alpha(x, f) \subset \Omega(f)$ *для любой точки* $x \in M$.

Доказательство. Докажем, что $\omega(x, f) \subset \Omega(f)$; случай α-предельного множества рассматривается аналогично.

Рассмотрим точку $x_0 \in \omega(x, f)$. Существует такая последовательность $n(k) \to \infty$, $k \to \infty$, что $f^{n(k)}(x) \to x_0$.

Пусть U — произвольная окрестность точки x_0 и N — произвольное число. Найдется такое k_0, что $f^{n(k)}(x) \in U$ при $k \geqslant k_0$. Кроме того, найдется такое $k_1 > k_0$, что $n_1 := n(k_1) - n(k_0) > N$.

В этом случае $f^{n(k_1)}(x) = f^{n_1}(f^{n(k_0)}(x)) \in U$, т. е. $f^{n_1}(U) \cap U \neq \emptyset$.

Это и означает, что $x_0 \in \Omega(f)$. •

Можно показать, что существуют динамические системы, в которых неблуждающие множества не исчерпываются объединениями ω-предельных и α-предельных множеств индивидуальных траекторий. Ниже мы приведем пример потока, обладающего сформулированным свойством (пример 3.1; отметим, что некоторые понятия и конструкции в случае потоков гораздо более наглядны, чем в случае каскадов).

Опишем основные свойства неблуждающего множества.

Теорема 3.2. *Множество $\Omega(f)$ замкнуто и инвариантно. Если пространство M компактно, то $\Omega(f) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Докажем вначале, что множество $\Omega(f)$ замкнуто. Из определения следует, что если x_0 — блуждающая точка, то и любая точка рассмотренной в определении окрестности U является блуждающей. Таким образом, множество блуждающих точек открыто, а его дополнение $\Omega(f)$ замкнуто.

Докажем теперь, что множество $\Omega(f)$ инвариантно. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \Omega(f)$ и фиксируем произвольные окрестность U точки $x' = f(x_0)$ и число N. Так как отображение f непрерывно, множество $U_1 = f^{-1}(U)$ — окрестность точки x_0. Поэтому найдутся такие точка $x_1 \in U_1$ и число $n, |n| > N$, что $f^n(x_1) \in U_1$. Пусть $x = f(x_1)$. Тогда $x \in U$ и $f^n(x) = f(f^n(x_1)) \in f(U_1) = U$. Таким образом, $x' \in \Omega(f)$; следовательно, $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$. Так же показывается, что $f^{-1}(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$. Таким образом, $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$. Теперь инвариантность множества $\Omega(f)$ следует из леммы 1.3.

Предположим теперь, что пространство M компактно. В этом случае ω-предельное множество любой траектории непусто, и последнее утверждение теоремы вытекает из леммы 3.4. •

Легко понять, что если предположение о компактности пространства M не выполнено, то неблуждающее множество может быть пустым. Достаточно рассмотреть пример гомеоморфизма $f(x) = x + 1$ прямой R.

Неблуждающее множество играет очень важную роль в теории динамических систем в связи с тем, что лишь конечное множество точек траектории может лежать вне окрестности неблуждающего множества. Точнее, справедлива следующая теорема, доказанная Биркгофом (константа T, существование которой доказываются в теореме 3.3, называется *константой Биркгофа* для окрестности U множества $\Omega(f)$).

Теорема 3.3. *Предположим, что фазовое пространство M компактно. Пусть U — произвольная окрестность множества $\Omega(f)$. Существует такое число $T > 0$, что*

$$\operatorname{card}\{k\colon f^k(x) \notin U\} \leqslant T$$

для любой точки $x \in M$.

Доказательство. Фиксируем окрестность U множества $\Omega(f)$. Для любой точки $x \in M \setminus U$ найдутся такие число $t(x)$ и окрестность $V(x)$, что

$$f^k(V(x)) \cap V(x) = \emptyset, \quad |k| \geqslant t(x).$$

Так как множество $M \setminus U$ компактно, из открытого покрытия $\{V(x)\}$ мы можем выбрать конечное подпокрытие $V_1, \ldots, V_n$ множества $M \setminus U$ со следующим свойством: существуют такие числа $t_1, \ldots, t_n \geqslant 1$, что

$$f^k(V_i) \cap V_i = \emptyset, \quad k \geqslant t_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Положим $t = \max t_i$ и $T = (n+1)t$.

Для доказательства того, что выбранное число T обладает искомым свойством, предположим противное. В этом случае найдутся такие точка x и множество целых чисел

$$L = \{l(0) < l(1) < \cdots < l(m)\}$$

с $\operatorname{card} L = m + 1 \geqslant T$, что $f^{l(i)}(x) \notin U$, $i = 0, \ldots, m$.

Отметим что если $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ и $j \geqslant i$, то $l(j) - l(i) \geqslant j - i$.

Положим $y_0 = f^{l(0)}(x)$; пусть W_0 — та из окрестностей V_i, в которой лежит точка y_0 (конечно, такая окрестность не единственна; возьмем в качестве W_0 любую из них).

Отметим что $f^k(y_0) \notin W_0$ при $k \geqslant t$. Положим теперь $y_1 = f^{l(t)}(x)$ и пусть W_1 — та из окрестностей V_i, в которой лежит точка y_1. Так как $y_1 = f^{l(t)-l(0)}(y_0)$, из выбора t и из неравенства $l(t) - l(0) \geqslant t$ следует, что $W_1 \neq W_0$. Кроме того, $f^k(y_1) \notin W_0$ при $k \geqslant 0$ и $f^k(y_1) \notin W_0 \cup W_1$ при $k \geqslant t$.

Так как выполнено неравенство $m + 1 \geqslant (n+1)t$, то $m \geqslant nt$, поэтому множество L содержит число $l(nt)$.

Те же рассуждения, что проведены выше для точек y_0 и y_1, показывают, что если $y_j = f^{l(jt)}(x)$, $j = 1, \ldots, n$, а W_j — элементы набора $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, содержащие точки y_j, то множества W_j попарно различны и

$$f^k(y_j) \notin W_0 \cup W_1 \cup \cdots \cup W_{j-1}, \quad k \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом,

$$f^k(y_n) \notin W_0 \cup W_1 \cup \cdots \cup W_{n-1}, \quad k \geqslant 0.$$

Так как множества $W_0, W_1, \ldots, W_{n-1}$ — различные элементы набора $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, наборы $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ и $\{W_0, W_1, \ldots, W_{n-1}\}$ совпадают. Следовательно,

$$f^k(y_n) = f^{l(nt)+k}(x) \notin M \setminus U, \quad k \geqslant 0.$$

Полученное соотношение при $k = 0$ противоречит включению $l(nt) \in L$. Теорема доказана. •

Рассмотрим теперь два гомеоморфизма $f\colon M \to M$ и $g\colon N \to N$. Назовем гомеоморфизмы f и g *Ω-сопряженными*, если существует такой гомеоморфизм h, отображающий $\Omega(f)$ на $\Omega(g)$, что $g(h(x)) = h(f(x))$ для $x \in \Omega(f)$ (поясним, что в этом определении имеется в виду такое взаимнообратное отображение $\Omega(f)$ на $\Omega(g)$, что h и h^{-1} непрерывны в смысле топологий, индуцированных на множествах $\Omega(f)$ и $\Omega(g)$ объемлющими пространствами M и N).

Лемма 3.5. *Если h — топологическая сопряженность f и g, то $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \Omega(f)$ и фиксируем произвольные окрестность U точки $y_0 = h(x_0)$ и число N. Так как отображение h непрерывно, множество $V = h^{-1}(U)$ — окрестность точки x_0. Поэтому найдутся такие точка $x \in V$ и число $n, |n| > N$, что $f^n(x) \in V$. Пусть $y = h(x)$. Тогда $y \in U$ и $g^n(y) = g^n(h(x)) = h(f^n(x)) \in U$. Таким образом, $y \in \Omega(g)$; следовательно, $h(\Omega(f)) \subset \Omega(g)$. Так же показывается, что $h^{-1}(\Omega(g)) \subset \Omega(f)$. Таким образом, $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$. •

Следствие. *Если гомеоморфизмы f и g топологически сопряжены, то они Ω-сопряжены.*

Так же, как в лемме 3.2, показывается, что отношение Ω-сопряженности — отношение эквивалентности на пространстве гомеоморфизмов $H(M)$.

Пусть M — гладкое замкнутое многообразие. Диффеоморфизм $f \in \in \mathrm{Diff}^1(M)$ называется Ω-*устойчивым*, если существует такая окрестность W диффеоморфизма в C^1-топологии, что любой диффеоморфизм $g \in \in W$ Ω-сопряжен с f.

Из следствия клемме 3.5 немедленно вытекает, что если диффеоморфизм структурно устойчив, то он Ω-устойчив.

Неблуждающие точки потоков определяются так же, как неблуждающие точки каскадов.

Пусть ϕ — поток на топологическом пространстве M. Точка x_0 называется неблуждающей для потока ϕ, если для любой окрестности U точки x_0 и для любого числа N найдутся такие точка $x \in U$ и число t, $|t| > N$, что $\phi(t, x) \in U$.

Множество неблуждающих точек потока обладает такими же свойствами, как и неблуждающее множество гомеоморфизма.

Покажем, что существует поток, множество неблуждающих точек которого не совпадает с объединением ω-предельных и α-предельных множеств индивидуальных траекторий.

Пример 3.1. Рассмотрим на плоскости R с координатами (x, y) автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - x^2). \tag{3.7}$$

Система (3.7) имеет интеграл

$$U(x, y) = y^2 - x^2 + x^4/2,$$

следовательно, ее траектории лежат на кривых

$$y = \pm\sqrt{C + x^2 - x^4/2};$$

множество траекторий изображено на рис. 1.

У системы (3.7) $(0, 0)$ — седловая точки покоя, точки покоя $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ — центры, а все траектории, отличные от точек покоя и траекторий точек $s = (-\sqrt{2}, 0)$ и $r = (\sqrt{2}, 0)$, замкнутые.

Пусть ϕ — поток, порожденный системой (3.7).

Точки замкнутых траекторий — неблуждающие точки потока ϕ. Так как объединение замкнутых траекторий плотно на плоскости, а множество

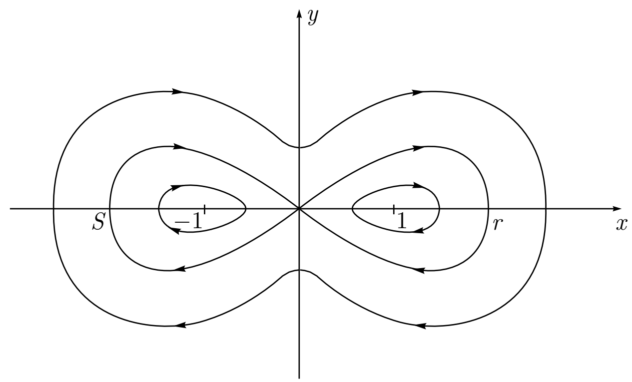

Рис. 1. Структура траекторий системы (3.7)

неблуждающих точек замкнуто (это доказывается буквально так же, как и в случае каскада), любая точка плоскости — неблуждающая.

Легко понять, что ω-предельные и α-предельные множества точек покоя и замкнутых траекторий совпадают с самими траекториями. ω-предельные и α-предельные множества траекторий точек r и s — точка покоя $(0, 0)$.

Таким образом, неблуждающие точки r и s не лежат в объединении ω-предельных и α-предельных множеств индивидуальных траекторий.

Отметим, кроме того, что сама точка r при движении по траектории потока ϕ уходит из своей малой окрестности и больше не попадает в эту окрестность как при возрастании, так и при убывании t. Принадлежность этой точки множеству неблуждающих точек объясняется наличием точек замкнутых траекторий в сколь угодно малой ее окрестности.

3.4. Локальная эквивалентность

Иногда исследователя интересует вопрос о сохранении при возмущениях структуры множества траекторий динамической системы не во всем фазовом пространстве, а на его подмножествах (обычно в качестве таких подмножеств выступают окрестности инвариантных множеств). В связи с этим рассматриваются локальные отношения топологической сопряженности и эквивалентности.

Дадим одно из соответствующих определений (читатель легко сформулирует необходимые аналоги).

Пусть $f\colon M \to M$ и $g\colon N \to N$ — гомеоморфизмы топологических пространств. Предположим, что I и J — инвариантные множества гомеоморфизмов f и g.

Пусть X — подмножество M. Фиксируем точку $x \in X$ и определим множество

$$K(x, X) = \{n > 0\colon f^k(x) \in X,\, 0 < k \leqslant n\} \cup \{n < 0 : f^k(x) \langle\in X,\, n \leqslant k < 0\}.$$

Таким образом, множество

$$\{f^k(x) : k \in K(x, X)\}$$

— это «компонента» пересечения траектории $O(x, f)$ с множеством X.

Будем говорить, что инвариантные множества I и J *локально топологически сопряжены*, если существуют их окрестности U и V и гомеоморфизм h, отображающий U в V и обладающий следующими свойствами:

(ЛС1) $h(I) = J$;

(ЛС2) $h(f^k(x)) = g^k(h(x))$ для $x \in U$ и $k \in K(x, U)$.

4. Гиперболическая неподвижная точка

4.1. Гиперболическое линейное отображение

Понятие гиперболичности является одним из основных понятий теории структурной устойчивости динамических систем. Мы начнем изучение свойства гиперболичности с рассмотрения простейшего объекта – гиперболического линейного отображения евклидова пространства R^n.

Пусть L — неособое линейное отображение пространства R^n в себя. Хорошо известно, что если базис пространства фиксирован, то отображению L однозначно сопоставляется такая $n \times n$ матрица A, что отображение L задается формулой $y = Ax, x \in R^n$.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A. Матрица A называется *гиперболической*, если выполнены неравенства

$$|\lambda_i| \neq 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.1}$$

Если мы выберем другой базис пространства R^n (т. е. произведем неособую замену переменных $z = Sx$), то в новом базисе отображению L будет соответствовать матрица $A' = S^{-1}AS$, подобная матрице A. Так как спектры подобных матриц совпадают, матрица A' и матрица A являются гиперболическими или негиперболическими одновременно.

Будем называть отображение L *гиперболическим*, если спектр задающей его матрицы в некотором (а тогда и в любом) базисе удовлетворяет условию (4.1).

Лемма 4.1. *Если L — гиперболическое линейное отображение пространства R^n, то существует базис пространства, в котором матрица A отображения L блочно-диагональна*: $A = \operatorname{diag}(B, C)$, *и при этом выполнены неравенства* $||B|| < 1$ *и* $||C^{-1}|| < 1$.

Доказательство. Фиксируем некоторый базис пространства R^n; пусть A' — матрица оператора L в этом базисе.

Мы проведем доказательство в том общем случае, когда у матрицы A' есть как собственные числа по модулю меньшие 1, так и собственные числа по модулю большие 1.

Таким образом, мы предполагаем, что существует такой индекс $m \in \in (0, n)$, что

$$|\lambda_1| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_m| < 1 < |\lambda_{m+1}| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n|. \tag{4.2}$$

Найдем такое число $b \in (0,1)$, что $|\lambda_i| \leqslant b$ при $i = 1, \ldots, m$ и $b|\lambda_i|>1$ при $i = m+1, \ldots, n$. Фиксируем такое $a > 0$, что $b + a < 1$.

Согласно теореме о канонической форме линейного оператора в конечномерном вещественном пространстве (см., например, [Ф1984]), можно найти такую неособую вещественную матрицу S, что выполнено равенство $A\colon = S^{-1}A'S = G + F$, в котором структура матриц G и F описывается следующим образом.

Матрица G — блочно-диагональная матрица вида

$$G = \operatorname{diag}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l, \Lambda_{l+1}, \ldots \Lambda_n),$$

где каждая из подматриц Λ_j есть либо скаляр (1×1 матрица), равный вещественному собственному числу матрицы A', либо матрица

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

соответствующая паре комплексно-сопряженных собственных чисел $\lambda = \alpha \pm i\beta$, при этом собственные числа матриц $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l$ удовлетворяют неравенствам $|\lambda| < 1$, а собственные числа матриц $\Lambda_{l+1}, \ldots \Lambda_n$ удовлетворяют неравенствам $|\lambda| > 1$ (таким образом, матрица

$$A_1 = \operatorname{diag}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l)$$

имеет размер $m \times m$, а матрица

$$A_2 = \operatorname{diag}(\Lambda_{l+1}, \ldots \Lambda_n)$$

имеет размер $(n-m) \times (n-m)$).

Матрица F — блочно-диагональная матрица вида $F = \operatorname{diag}(F_1, F_2)$, где подматрицы F_1 и F_2 имеют размеры $m \times m$ и $(n-m) \times (n-m)$, соответственно, а норма матрицы F удовлетворяет неравенству $||F||<a$.

Таким образом, матрица A имеет искомый блочно-диагональный вид, при этом размеры матриц $B = A_1+F_1$ и $C = A_2+F_2$ суть $m\times m$ и $(n-m)\times \times(n-m)$.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $y = Bx$ и $y' = A_1x$. В этом случае для $j \in \{1, \ldots, m\}$ выполнено одно из равенств

$$y'_j = \lambda_k x_j$$

(если λ_k вещественно),

$$y'_j = \alpha_k x_j - \beta_k x_{j+1}, \quad \text{либо} \quad y'_j = \beta_k x_{j-1} + \alpha_k x_j, \quad 1 \leqslant k \leqslant m$$

(если $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$, при этом $j+1 \leqslant m$ в первом случае). Ясно, что в случае матрицы Λ_k, соответствующей паре комплексно-сопряженных собственных чисел $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$, выполнено неравенство

$$\max(|\alpha_k|, |\beta_k|) \leqslant |\lambda_k| \leqslant b.$$

Из выписанных соотношений следует, что

$$|y'_j| \leqslant b \max\{|x_{j-1}|, |x_j|, |x_{j+1}|\},$$

поэтому $|y'| \leqslant b|x|$ и $|y| \leqslant (b+a)|x|$. Следовательно, $||B|| \leqslant b + a < 1$.

Пусть теперь $x = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $y = (y_{m+1}, \ldots, y_n)$, $y = Cx$ и $x' = = A_2^{-1}y$.

Матрица A_2^{-1} блочно-диагональна, при этом ее скалярные блоки имеют вид $1/\lambda_k$ (если λ_k вещественно) и

$$\frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$$

(если $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$). В последнем случае выполнены неравенства

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 = |\lambda_k|^2 \geqslant b^{-2},$$

поэтому те же рассуждения, что и в первом случае, показывают, что $|x'| \leqslant b|y|$.

Применяя A_2^{-1} к равенству $y = A_2x + F_2x$, мы получаем равенство $x' = A_2^{-1}y = x + A_2^{-1}F_2x$. Так как

$$b|y| \geqslant |x'| \geqslant |x| - a|x|$$

(мы учитываем, что $||A_2^{-1}|| < 1$), выполнено неравенство

$$|x| \leqslant \frac{b}{1-a}|y|.$$

Это означает, что $||C^{-1}|| \leqslant b/(1-a)$. Отметим, что $b/(1-a) < 1$ в силу неравенства $a + b < 1$. •

Так как мы изучаем динамические системы с точностью до топологической сопряженности, мы можем считать, что при изучении динамической системы, порожденной линейным гиперболическим отображением L, координаты выбраны так, что для матрицы A отображения L выполняется утверждение леммы 4.1.

Представим вектор $x \in R^n$ в виде $x = (y, z)$ в соответствии с блочно-диагональным видом матрицы A. В этом случае L отображает вектор (y, z) в (By, Cz). Мы предполагали, что отображение L обратимо, поэтому матрица A неособенная, и выполнены равенства $L^k(y, z) = (B^k y, C^k z)$ при $k \in Z$.

Рассмотрим линейные подпространства $\mathcal{S} = \{z = 0\}$ и $\mathcal{U} = \{y = 0\}$ пространства R^n. Ясно, что если выполнены соотношения (4.2), то $\dim\mathcal{S} = m$ и $\dim\mathcal{U} = n - m$. Очевидно, что каждое из подпространств $\mathcal{S}$ и $\mathcal{U}$ инвариантно относительно отображения L.

Фиксируем такое число $\lambda \in (0, 1)$, что $||B|| \leqslant \lambda$ и $||C^{-1}|| \leqslant \lambda$.

Если $x = (y, 0) \in \mathcal{S}$, то $|L^k x| = |B^k y| \leqslant \lambda^k |y|, k \geqslant 0$, и $L^k x \to 0, k \to \infty$. Если $x \in \mathcal{U}$, то $L^k x \to 0, k \to -\infty$.

Пусть $x = (0, z) \in \mathcal{U}$ и $Lx = (0, z')$. Так как $z' = Cz$, то $z = C^{-1} z'$, поэтому $|z'| \geqslant \lambda^{-1}|z|$. Таким образом, если $x \in \mathcal{U}$, то $|L^k x| \geqslant \lambda^{-k}|x|, k \geqslant 0$, и $|L^k x| \to \infty$ при $k \to \infty$. Аналогично, если $x \in \mathcal{S}$, то $|L^k x| \geqslant \lambda^k |x|, k \leqslant 0$, и $|L^k x| \to \infty$ при $k \to -\infty$.

Ясно, что если $x \notin \mathcal{S} \cup \mathcal{U}$, то $|L^k x| \to \infty$ при $|k| \to \infty$.

Если $m \neq 0, n$, то неподвижная точка $x = 0$ отображения L называется *седловой*. Если $m = n$, т. е. $|\lambda_i| < 1, i = 1, \ldots, n$, неподвижная точка $x = 0$ называется *притягивающей* (в этом случае $\mathcal{S} = R^n$); если $m = 0$, т. е. $|\lambda_i| > 1, i = 1, \ldots, n$, неподвижная точка $x = 0$ называется *отталкивающей* (в этом случае $\mathcal{U} = R^n$).

4.2. Теорема Гробмана–Хартмана

Пусть p — неподвижная точка диффеоморфизма f пространства R^n (как будет видно из дальнейшего рассмотрения, в изучаемой ситуации мы можем без ограничения общности рассматривать как диффеоморфизм пространства R^n на себя, так и диффеоморфизм окрестности точки p на область в R^n, поэтому доказываемый ниже результат применим и к диффеоморфизму гладкого многообразия). Будем предполагать, что f — диффеоморфизм класса C^1.

Точка p называется *гиперболической* неподвижной точкой, если матрица Якоби $Df(p)$ — гиперболическая матрица.

Мы докажем, что гиперболическая неподвижная точка p диффеоморфизма f локально топологически сопряжена с неподвижной точкой $x = 0$ линейного отображения $L\colon x \to Df(p)x$. Это утверждение было независимо доказано Д. М. Гробманом и Ф. Хартманом. Оно играет фундаментальную роль в глобальной качественной теории динамических систем. Подходы, примененные Гробманом и Хартманом, были принципиально различны: Гробман строил искомое топологическое сопряжение исходя из геометрии траекторий, в то время как Хартман решал функциональное уравнение для искомого гомеоморфизма. Приводимое ниже доказательство использует идею Хартмана (как показало дальнейшее развитие теории, этот подход позволил решать гораздо более общие задачи — мы применим его при доказательстве структурной устойчивости диффеоморфизмов Аносова).

Теорема 4.1. *Гиперболическая неподвижная точка p диффеоморфизма f локально топологически сопряжена с неподвижной точкой $x = 0$ линейного отображения $L\colon x \to Df(p)x$.*

Не ограничивая общности, при доказательстве теоремы 4.1 мы будем считать, что $p = 0$ и f — диффеоморфизм окрестности U начала координат в R^n на некоторую область, содержащую начало. В этом случае мы можем записать f в виде

$$f(x) = Ax + F(x), \tag{4.3}$$

где матрица Якоби A диффеоморфизма f в нуле имеет вид, описанный в лемме 4.1, а нелинейность F обращается в нуле в нуль вместе со своей матрицей Якоби.

Вначале мы распространим диффеоморфизм f на все пространство R^n; точнее, мы построим гомеоморфизм G пространства R^n на себя, совпадающий с f в некоторой окрестности W начала, а затем докажем, что G топологически сопряжен с линейным отображением L во всем пространстве. Ясно, что если h – топологическое сопряжение G и L в R^n, то ограничение $h|_W$ осуществляет искомое локальное топологическое сопряжение нулевых неподвижных точек диффеоморфизма f и линейного отображения L.

Матрица A — матрица Якоби диффеоморфизма f в точке $x = 0$, поэтому A обратима. Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что $|Ax| \geqslant \delta|x|$ для всех x. Фиксируем такое $\varepsilon > 0$, что:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \varepsilon < \delta; \\ &(2) \quad c\colon = \max(\|B\|, \|C^{-1}\|) + \varepsilon + \varepsilon\|C^{-1}\| < 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Нам понадобится простое вспомогательное утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть скалярная функция g принадлежит классу $C^r(V, R)$, где V — окрестность начала координат в R^n. Предположим, что*

$$g(0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0) = 0. \tag{4.5}$$

Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такие окрестность V_0 начала координат, $V_0 \subset V$, и функцию $\widetilde{g} \in C^r(R^n, R)$, что:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \widetilde{g}(x) = g(x) \quad \text{для любого } x \in V_0,\\ &(2) \quad \left|\frac{\partial \widetilde{g}(x)}{\partial x_i}\right| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{для любого } x \in R^n. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Доказательство. Обозначим через $\eta(t)$ скалярную функцию класса $C^\infty(R, R)$, обладающую следующими свойствами:

(1) $\eta(t) = 1$ при $t \leqslant 1$;

(2) $\eta(t) = 0$ при $t \geqslant 2$;

(3) $0 < \eta(t) < 1$ при $1 < t < 2$;

(4) $-2 \leqslant \eta'(t) \leqslant 0$ при $t \in R$.

Существование такой функции известно из курса математического анализа.

Фиксируем такое число $\delta > 0$, чтобы шар $x^2 < 2\delta$ лежал в V (напомним, что $x^2 = |x|_e^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$). Зададим функцию $g_\delta(x)$ в R^n так:

$$\begin{aligned} &g_\delta(x) = g(x)\eta(x^2/\delta) \quad \text{при} \quad x^2 < 2\delta,\\ &g_\delta(x) = 0 \quad \text{при } x^2 \geqslant 2\delta. \end{aligned}$$

Ясно, что $g_\delta \in C^r(R^n, R)$ и $g_\delta(x) = g(x)$ при $x^2 < \delta$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что если δ достаточно мало, то

$$\left|\frac{\partial g_\delta}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4.7}$$

в R^n. Тогда функция g_δ и будет искомой функцией $\widetilde{g}$. При $x^2 \geqslant 2\delta$ производная $\partial g_\delta/\partial x = 0$, поэтому оценку (4.7) достаточно доказать в области $x^2 < 2\delta$. Распишем

$$\frac{\partial g_\delta}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\eta\left(\frac{x^2}{\delta}\right) + g(x)\eta'\left(\frac{x^2}{\delta}\right)\frac{2x_i}{\delta}.$$

Найдется такое $\delta_1 > 0$, что если $x^2 < 2\delta_1$, то

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем некоторое число $\delta \leqslant \delta_1$. Если $x^2 < 2\delta$, из неравенства $|\eta| \leqslant 1$ следует, что

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x)\eta\left(\frac{x^2}{\delta}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для оценки второго слагаемого умножим и разделим его на $|x|$:

$$\left|\frac{g(x)\eta'(x^2/\delta)2x_i}{\delta}\right| = \frac{|g(x)|}{|x|}\left|\eta'\left(\frac{x^2}{\delta}\right)\right|\frac{2|x_i||x|}{\delta}.$$

По условию (4.5) найдется такое $\delta_2 > 0$, что

$$\frac{|g(x)|}{|x|} < \frac{\varepsilon}{16}$$

при $0 < x^2 < 2\delta_2$. Из очевидного неравенства $|x_i| \leqslant |x| \leqslant |x|_e$ получаем, что

$$2|x_i||x| \leqslant 2x^2.$$

Учитывая, что $|\eta'| \leqslant 2$, мы видим, что если $0 < x^2 < 2\delta$, где $\delta \leqslant \delta_2$, то

$$\frac{|g(x)|}{|x|}\left|\eta'\left(\frac{x^2}{\delta}\right)\right|\frac{2|x_i||x|}{\delta} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Число δ — искомое. Лемма доказана. ●

Используя доказанную лемму, построим такую функцию F' класса C^1 в R^n, что

$$F' = F \quad \text{в некоторой окрестности } V \text{ начала координат} \tag{4.8}$$

и

$$\left\|\frac{\partial F'}{\partial x}(x)\right\| < \varepsilon, \quad x \in R^n. \tag{4.9}$$

Рассмотрим отображение, определенное так:

$$G(x) = Ax + F'(x).$$

Мы покажем, что G является гомеоморфизмом R^n на себя. Можно показать, что G является диффеоморфизмом R^n на себя; мы не будем доказывать этот факт по двум причинам: во-первых, он не нужен нам для дальнейшего, и, во-вторых, мы применим то же самое доказательство ниже еще однажды, на этот раз к отображению h (которое диффеоморфизмом не является).

Мы покажем, что нужное нам утверждение (G является гомеоморфизмом R^n на себя) вытекает из следующих трех свойств отображения G:

(G1) G непрерывно;

(G2) G инъективно;

(G3) $|G(x)| \to \infty$ при $|x| \to \infty$.

Свойство (G1) выполнено по построению G. Докажем, что выполнено свойство (G2). Действительно, если $G(x_1) = G(x_2)$, то

$$Ax_1 + F'(x_1) = Ax_2 + F'(x_2), \quad \text{или} \quad A(x_1 - x_2) = F'(x_2) - F'(x_1).$$

В силу выбора δ выполнено неравенство $|A(x_1 - x_2)| \geqslant \delta|x_1 - x_2|$. По теореме Лагранжа

$$|F'(x_1) - F'(x_2)| \leqslant \max_{x \in R^n} \left\| \frac{\partial F'}{\partial x}(x) \right\| |x_1 - x_2| \leqslant \varepsilon |x_1 - x_2|,$$

поэтому $\delta|x_1 - x_2| \leqslant \varepsilon|x_1 - x_2|$, и из условия (4.4) следует, что $x_1 = x_2$. Свойство (G3) очевидно следует из обратимости матрицы A и из того факта, что функция F' равна нулю вне некоторого шара.

Из того, что G непрерывно и инъективно, следует, что G – гомеоморфизм на любом компакте в R^n. Из теоремы Брауэра следует, что G переводит ограниченные открытые множества в открытые; поэтому $G(R^n)$ открыто. Покажем, что $G(R^n)$ замкнуто. Пусть $G(x_k) \to y$. Последовательность x_k ограничена, так как из наличия неограниченной подпоследовательности x_{k_l} следовало бы в силу свойства (G3), что $|G(x_{k_l})| \to \infty$.

Выберем из x_k сходящуюся подпоследовательность $x_{k_m} \to x$. Поскольку отображение G непрерывно, $G(x_{k_m}) \to G(x)$, а из-за единственности предела $y = G(x) \in G(R^n)$. Следовательно, $G(R^n)$ – замкнутое множество. Отсюда $G(R^n) = R^n$, и наше утверждение доказано (конечно, мы учитываем, что $G(R^n)$ непусто так как $G(0) = 0$).

Докажем теперь, что гомеоморфизм G и линейное отображение L топологически сопряжены во всем пространстве.

Найдем гомеоморфизм h, сопрягающий G и L, в виде

$$h(x) = x + g(x), \tag{4.10}$$

где g — непрерывное отображение $R^n \to R^n$, удовлетворяющее дополнительному условию

$$|g(x)| \to 0 \tag{4.11}$$

при $|x| \to \infty$. Обозначим через Id тождественное отображение пространства R^n. Запишем равенство (4.10) без аргументов:

$$h = \mathrm{Id} + g.$$

Условие топологической сопряженности G и L имеет следующий вид:

$$G \circ h = h \circ L \tag{4.12}$$

или

$$G \circ (\mathrm{Id} + g) = (\mathrm{Id} + g) \circ L. \tag{4.13}$$

Решим уравнение (4.13) методом неподвижной точки. Рассмотрим пространство

$$H = \{g \in C(R^n, R^n)\colon g(0) = 0, |g(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty\}.$$

В соответствии с разбиением $R^n = R^m \times R^{n-m}$ (отвечающем представлению матрицы A в блочно-диагональном виде), будем записывать элементы $g \in H$ в виде $g = (g_1, g_2)$ (и будем обозначать через f_1, f_2 соответствующие компоненты вектор-функции F'). Для $g, j \in H$ введем число

$$\varrho(g, j) = \sup_{x \in R^n} |g_1(x) - j_1(x)| + \sup_{x \in R^n} |g_2(x) - j_2(x)|.$$

Легко понять, что ϱ - метрика на H, причем H с этой метрикой - полное метрическое пространство.

Подставим выражение $G(x) = Lx + F'(x)$ в равенство (4.13):

$$(L + F') \circ (\mathrm{Id} + g) = (\mathrm{Id} + g) \circ L,$$

или

$$L + L \circ g + F' \circ (\mathrm{Id} + g) = L + g \circ L. \tag{4.14}$$

Из линейности L следует, что $L \circ (\mathrm{Id} + g) = L + L \circ g$; в то же время $F' \circ (\mathrm{Id} + g) \neq F' \circ \mathrm{Id} + F' \circ g$. Сокращая L в правой и левой частях (4.14), получаем уравнение

$$L \circ g + F' \circ (\mathrm{Id} + g) = g \circ L. \tag{4.15}$$

Перепишем уравнение (4.15), вычислив левую и правую части в точке x:

$$Ag(x)) + F'(x + g(x)) = g(Ax).$$

Оператор L обратим, поэтому уравнение (4.15) равносильно уравнению

$$g = L^{-1} \circ (g \circ L - F' \circ (\mathrm{Id} + g)). \tag{4.16}$$

В соответствии с выбранным разбиением пространства R^n, а также учитывая, что $A^{-1} = \mathrm{diag}(B^{-1}, C^{-1})$, перепишем (4.16) покомпонентно:

$$g_1 = B^{-1} \circ [g_1 \circ L - f_1 \circ (\mathrm{Id} + g)], \tag{4.17}$$

$$g_2 = C^{-1} \circ [g_2 \circ L - f_2 \circ (\mathrm{Id} + g)] \tag{4.18}$$

(заметим, что в аргументах у f_1 и f_2 стоит $I + g$, то есть в точке x аргументы равны $x + g(x)$). Линейный оператор C^{-1} сжимает, а оператор B^{-1} нет. Перепишем (4.17), умножив обе части на B, применив справа L^{-1} и преобразовав выражение:

$$g_1 = B \circ g_1 \circ L^{-1} + f_1 \circ (\mathrm{Id} + g) \circ L^{-1}.$$

Введем оператор T, сопоставляющий функции $g \in H$ функцию

$$T(g) = \begin{pmatrix} B \circ g_1 \circ L^{-1} + f_1 \circ (\mathrm{Id} + g) \circ L^{-1} \\ C^{-1} \circ [g_2 \circ L - f_2 \circ (\mathrm{Id} + g)] \end{pmatrix}.$$

Ясно, что функция $T(g)$ непрерывна в R^n и $T(g)(0) = 0$. Если $|x| \to \infty$, то $|(\mathrm{Id} + g)(x)| = |x + g(x)| \to \infty$, так как по условию $|g(x)| \to 0$. Но по построению $F'(x) = 0$ при достаточно больших $|x|$, поэтому

$$|f_2 \circ (\mathrm{Id} + g)(x)| \to 0$$

при $|x| \to \infty$. Из того, что $|x| \to \infty$, следует, что $|Lx| \to \infty$, поэтому $|g_2(Lx)| \to 0$ и $|C^{-1} g_2(Lx)| \to 0$, то есть вторая компонента $T(g)$ стремится по норме к нулю при $|x| \to \infty$. Аналогичное рассуждение для первой компоненты показывает, что $|T(g)(x)| \to 0$ при $|x| \to \infty$. Таким образом, $T(g) \in H$, то есть T – отображение $H \to H$. Докажем, что оно сжимающее, Оценим для $g, j \in H$

$$\begin{aligned} \varrho(T(g), T(j)) = \sup_{x \in R^n} \{|Bg_1(L^{-1}x) - Bj_1(L^{-1}x) + \\ + f_1(L^{-1}x + g(L^{-1}x)) - f_1(L^{-1}x + j(L^{-1}x))|\} + \\ + \sup_{x \in R^n} \{|C^{-1}[g_2(Lx) - j_2(Lx) + f_2(x + j(x)) - f_2(x + g(x))]|\}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Отметим, что

$$\sup_{x \in R^n} |B(g_1(L^{-1}x) - j_1(L^{-1}x))| = \sup_{x \in R^n} |B(g_1(x) - j_1(x))|$$

так как L^{-1} обратимо, и если точка x пробегает все пространство R^n, то и $L^{-1}x$ пробегает все пространство R^n, и наоборот. Поэтому первое слагаемое в (4.2) оценивается сверху выражением

$$\begin{aligned} \|B\| \sup_{x \in R^n} |g_1(x) - j_1(x)| + \sup_{x \in R^n} \left\| \frac{\partial f_1}{\partial x} \right\| |g(x) - j(x)| \leqslant \\ \leqslant \|B\| \sup_{x \in R^n} |g_1(x) - j_1(x)| + \varepsilon \sup_{x \in R^n} |g(x) - j(x)|. \end{aligned}$$

Здесь применяется теорема Лагранжа к выражению

$$f_1(L^{-1}x + g(L^{-1}x)) - f_1(L^{-1}x + j(L^{-1}x))$$

и учитывается неравенство (4.9). Аналогично, второе слагаемое в (4.2) не превосходит

$$\|C^{-1}\| \sup_{x \in R^n} |g_2(x) - j_2(x)| + \varepsilon \|C^{-1}\| \sup_{x \in R^n} |g(x) - j(x)|.$$

Учитывая очевидное неравенство

$$|g(x) - j(x)| \leqslant |g_1(x) - j_1(x)| + |g_2(x) - j_2(x)|,$$

мы приходим к оценке

$$\varrho(T(g), T(j)) \leqslant [\max(\|B\|, \|C^{-1}\|) + \varepsilon(1 + \|C^{-1}\|)] \varrho(g, j).$$

Из (4.4) следует, что оператор T – сжимающий. Следовательно, в H существует (и притом единственная) неподвижная точка g^* оператора T. Из определения оператора T немедленно следует, что $g^* = (g_1^*, g_2^*)$ есть решение системы (4.17), (4.18), а следовательно, g^* удовлетворяет (4.13). Для отображения $h(x) = x + g^*(x)$ выполнено соотношение (4.12), поэтому для завершения доказательства теоремы 4.1 осталось показать, что h – гомеоморфизм. Ясно, что отображение h непрерывно. Докажем, что оно инъективно. Пусть, напротив, найдутся такие $x_1, x_2 \in R^n$, что $x_1 \neq x_2$ и $h(x_1) = h(x_2)$. Легко видеть, что из (4.12) следуют соотношения

$$G^k \circ h = h \circ L^k, \quad k \in Z,$$

а так как по предположению

$$G^k(h(x_1)) = G^k(h(x_2)), \quad \text{то} \quad h(L^k x_1) = h(L^k x_2),$$

или, что то же самое, для всех $k \in Z$

$$h(L^k x_1) = h(L^k x_2). \tag{4.20}$$

По построению $h(x) = x + g^*(x)$, поэтому из (4.20) следует, что для всех $k \in Z$

$$L^k x_1 + g^*(L^k x_1) = L^k x_2 + g^*(L^k x_2),$$

или

$$L^k(x_1 - x_2) = g^*(L^k x_2) - g^*(L^k x_1). \tag{4.21}$$

Пусть $x_1 - x_2 = v = (v_1, v_2)$. По предположению $v \neq 0$, пусть, например, $v_1 \neq 0$. В конце п. 4.1 было показано, что

$$|B^k v_1| \to \infty \quad \text{при} \quad k \to -\infty,$$

поэтому норма $|L^k(x_1 - x_2)|$ неограничена. В то же время из определения пространства H следует, что правая часть (4.21) ограничена. Полученное противоречие доказывает инъективность отображения h.

Отметим, наконец, что если $|x| \to \infty$, то $|g^*(x)| \to 0$, поэтому $|h(x)| \to \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Таким образом, то же рассуждение, что было применено к отображению G после леммы 4.2, показывает, что h — гомеоморфизм пространства R^n на себя. Теорема Гробмана–Хартмана доказана. •

4.3. Окрестность гиперболической неподвижной точки

Теорема Гробмана–Хартмана и утверждения, доказанные в конце п. 4.1, позволяют нам описать поведение траекторий диффеоморфизма в окрестности его гиперболической неподвижной точки.

Пусть p — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма f (в данном случае нам не важно, является f диффеоморфизмом евклидова пространства или гладкого многообразия).

По теореме Гробмана–Хартмана существуют окрестность U точки p, окрестность V начала координат в R^n и гомеоморфизм $h\colon V \to U$, переводящий начало координат в p и отображающий пересечения траекторий линейного отображения $Ly = Df(p)y$ с V на пересечения траекторий диффеоморфизма f с U.

Из утверждений, доказанных в конце п. 4.1, вытекают следующие факты.

Если 0 — притягивающая неподвижная точка отображения L (т. е. собственные числа λ_j матрицы оператора L удовлетворяют неравенствам $|\lambda_j| < 1, j = 1, \ldots, n$) и $x \neq p$ — произвольная точка окрестности U, то $f^k(x) \to p$ при $k \to \infty$ и траектория $f^k(x)$ покидает окрестность U при убывании k (в этом случае и сама неподвижная точка p диффеоморфизма f называется *притягивающей*).

Если 0 — отталкивающая неподвижная точка отображения L (т. е. собственные числа λ_j матрицы оператора L удовлетворяют неравенствам $|\lambda_j| > 1, j = 1, \ldots, n$) и $x \neq p$ — произвольная точка окрестности U, то $f^k(x) \to p$ при $k \to -\infty$ и траектория $f^k(x)$ покидает окрестность U при возрастании k (в этом случае и сама неподвижная точка p диффеоморфизма f называется *отталкивающей*).

Наиболее важным для нас является случай седловой неподвижной точки отображения L (т. е. тот случай, когда существует такое $m \in (0, n)$, что собственные числа λ_j матрицы оператора L удовлетворяют неравенствам (4.2); в этом случае и сама неподвижная точка p диффеоморфизма f называется *седловой*).

Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{U}$ — линейные пространства, определенные в конце п. 4.1 для случая седловой неподвижной точки отображения L.

Рассмотрим множество $W^s_U(p) \colon = h(\mathcal{S} \cap V)$; это множество обладает следующими свойствами: если $x \in W^s_U(p)$, то $f^k(x) \to p$ при $k \to \infty$ и если $x \in U \setminus W^s_U(p)$, то траектория $f^k(x)$ покидает окрестность U при возрастании k. Множество $W^s_U(p)$ называется *локальным устойчивым многообразием* седловой неподвижной точки диффеоморфизма f в окрестности U.

Без ограничения общности мы будем считать в дальнейшем, что окрестность V является шаром. В этом случае из теоремы Гробмана–Хартмана следует, что множество $W^s_U(p)$ является топологическим m-мерным диском (т. е. гомеоморфным образом единичного шара m-мерного евклидова пространства).

Множество $W^u_U(p) := h(\mathcal{U} \cap V)$ обладает следующими свойствами: если $x \in W^u_U(p)$, то $f^k(x) \to p$ при $k \to -\infty$ и если $x \in U \setminus W^u_U(p)$, то траектория $f^k(x)$ покидает окрестность U при убывании k. Множество $W^u_U(p)$ называется *локальным неустойчивым многообразием* седловой неподвижной точки диффеоморфизма f в окрестности U.

Из теоремы Гробмана–Хартмана следует, что множество $W^u_U(p)$ является топологическим $(n - m)$-мерным диском (т. е. гомеоморфным образом единичного шара $(n - m)$-мерного евклидова пространства).

Ясно, что если
$$x \in U \setminus (W^s_U(p) \cup W^u_U(p)),$$
то траектория $f^k(x)$ покидает окрестность U при возрастании $|k|$.

В следующем пункте мы покажем, что множества $W^s_U(p)$ и $W^u_U(p)$ на самом деле являются гладкими дисками.

Из описанных выше свойств множеств $W^s_U(p)$ и $W^u_U(p)$ следует, что эти множества не являются инвариантными. Определим связанные с ними инвариантные множества – устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболической неподвижной точки p (эти множества и их аналоги играют основную роль в теории структурной устойчивости).

Пусть f — диффеоморфизм либо евклидова пространства, либо гладкого замкнутого многообразия (в обоих случаях мы обозначаем фазовое пространство через M) и пусть p — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма f.

Определим множества
$$W^s(p) = \{x \in M: \ f^k(x) \to p, \quad k \to \infty\}$$
и
$$W^u(p) = \{x \in M: \ f^k(x) \to p, \quad k \to -\infty\}.$$
Множества $W^s(p)$ и $W^u(p)$ называются *устойчивым* и *неустойчивым многообразиями* неподвижной точки p.

Фиксируем окрестность U точки p в M, поведение траекторий в которой описано выше.

Лемма 4.3.
(1) *Множества $W^s(p)$ и $W^u(p)$ инвариантны*;
(2) $x \in W^s(p)$ *тогда и только тогда, когда* $O(x,f) \cap W^s_U(p) \neq \emptyset$;
(3) $x \in W^u(p)$ *тогда и только тогда, когда* $O(x,f) \cap W^u_U(p) \neq \emptyset$.

Доказательство. (1) Пусть $y = f^m(x)$, где $m \in Z$. Так как
$$f^k(y) = f^k(f^m(x)) = f^m(f^k(x)) \to f^m(p) = p, \quad k \to \infty,$$
верно включение $y \in W^s(p)$. Аналогично доказывается инвариантность множества $W^u(p)$.

(2) Если $x \in W^s(p)$, то найдется такой индекс m, что $f^k(x) \in U$ при $k \geqslant m$. Включение $f^m(x) \in W^s_U(p)$ следует из описанных выше свойств множества U.

Если $O(x,f) \cap W^s_U(p)$, то найдется такой индекс m, что $y\colon = f^m(x) \in \in W^s_U(p)$, поэтому
$$f^k(y) \to p, \quad k \to \infty.$$

Теперь наше утверждение следует из включения $y \in W^s(p)$ и из доказанной выше инвариантности множества $W^s(p)$.

Утверждение (3) доказывается совершенно аналогично. •

Устойчивым многообразием неподвижной точки для гиперболического линейного отображения L является введенное в п. 4.1 m-мерное линейное подпространство $\mathcal{S}$ (если собственные числа λ_j матрицы оператора L удовлетворяют неравенствам (4.2)).

Покажем, что с топологической точки зрения устойчивое многообразие гиперболической неподвижной точки p устроено так же просто.

Фиксируем положительное число a и рассмотрим m-мерный шар
$$D_a = \{|x| \leqslant a\} \cap \mathcal{S}.$$
Пусть $c\colon = ||B|| < 1$ (матрица B введена в лемме 4.1). Так как $|Lx| \leqslant c|x|$ для $x \in \mathcal{S}$, выполнены включения
$$L(D_a) \subset \mathrm{Int} D_a \subset D_a \tag{4.22}$$
(здесь $\mathrm{Int} D_a$ — внутренность в подпространстве $\mathcal{S}$). Рассмотрим множества
$$G_k = L^k(D_a) \setminus L^{k+1}(D_a), \quad k \geqslant 0. \tag{4.23}$$

Лемма 4.4. *Для любого ненулевого $x \in \mathcal{S}$ пересечение $O(x,L) \cap G_0$ непусто и состоит ровно из одной точки.*

Доказательство.
Докажем вначале, что
$$D_a \setminus \{0\} = \bigcup_{k \geqslant 0} G_k. \tag{4.24}$$
Из включений (4.22) следует, что каждое из множеств G_k является подмножеством $D_a \setminus \{0\}$, поэтому правая часть в (4.24) является подмножеством левой.

Для доказательства обратного включения рассмотрим точку $x \in \in D_a \setminus \{0\}$.

Если $x \in G_0$, наше утверждение доказано. Если $x \notin G_0$, то из равенства (4.23) с $k = 0$ следует, что $x \in L(D_a)$; если при этом $x \notin G_1$, то из равенства (4.23) с $k = 1$ следует, что $x \in L^2(D_a)$, и т. д.

Таким образом, если $x \notin G_0 \cup G_1 \cup \ldots G_m$, то $x \in L^{m+1}(D_a)$.

Теперь равенство (4.24) следует из того, что если m столь велико, что $c^m a < |x|$, то включение $x \in L^m(D_a)$ невозможно, так как
$$L^m(D_a) \subset \{|x| \leqslant c^m a\} \cap \mathcal{S}.$$

Для любого ненулевого $x \in \mathcal{S}$ его траектория $O(x, L)$ пересекает $D_a \setminus \{0\}$, поэтому найдутся такие индексы m и k, что $L^m x \in G_k$. Так как $G_k = L^k(G_0)$, выполнено включение $L^{m-k}x \in G_0$.

Из определения G_0 вытекает, что если $x \in G_0$, то $Lx \notin G_0$; отсюда следует, что любая траектория системы L имеет в G_0 не более одной точки. •

Выберем такое $a > 0$, чтобы выполнялось включение

$$L^{-1}(D_a) \subset V \tag{4.25}$$

(где V — окрестность точки $x = 0$, для которой выполнено утверждение теоремы Гробмана–Хартмана). Обозначим $D = h(D_a)$ и $F = h(G_0)$. Множество F называется *фундаментальной окрестностью* неподвижной точки p в ее устойчивом многообразии $W^s(p)$.

Так как для любой точки $x \in W^s(p)$ ее траектория попадает в множество D и остается в D с ростом времени, из леммы 4.4 следует, что эта траектория пересекает множество F; из равенства

$$F = h(D_a \setminus L(D_a)) = D \setminus f(D)$$

следует, что это пересечение состоит из единственной точки.

Лемма 4.5. *Устойчивое многообразие $W^s(p)$ является образом подпространства $\mathcal{S}$ при топологическом погружении.*

Доказательство. Выберем такое $a > 0$, чтобы выполнялось включение (4.25). Определим отображение подпространства $\mathcal{S}$ в устойчивое многообразие $W^s(p)$ следующим образом. По лемме 4.4, для ненулевой точки $x \in \mathcal{S}$ найдется такой (единственный) индекс $m(x)$, что $L^{m(x)}x \in G_0$. Положим

$$\alpha(x) = f^{-m(x)}(h(L^{m(x)}x))$$

и $\alpha(0) = p$.

Отображение α сюръективно. Действительно, если $y \in W^s(p) \setminus \{p\}$, то существует такое m, что $f^m(y) \in F$; тогда $y = \alpha(L^{-m}h^{-1}(y))$. По определению, $p = \alpha(0)$.

Отображение α инъективно. Рассмотрим две различные точки y_1 и y_2 многообразия $W^s(p)$; пусть $y_i = \alpha_i(x_i)$, $i = 1, 2$. Мы ограничимся тем случаем, когда $y_1, y_2 \neq p$.

Если $y_2 \in O(y_1, f)$, то $y_2 = f^n(y_1)$ для некоторого $n \neq 0$. Пусть $y = O(y_1, f) \cap F$. Если $y_1 = f^m(y)$, то $y_2 = f^{m+n}(y)$. Ясно, что точки $x_1 = L^{-m}h^{-1}(y)$ и $x_2 = L^{-m-n}h^{-1}(y)$ различны.

Если $y_2 \notin O(y_1, f)$, то точки $O(y_1, f) \cap F$ и $O(y_2, f) \cap F$ различны. Поэтому точки x_1, x_2 принадлежат различным траекториям отображения L (следовательно, $x_1 \neq x_2$).

Докажем, наконец, что отображение α непрерывно.

Если $x \in D_a \setminus \{0\}$ и $x' = O(x, L) \cap G_0$, то $x = L^m x'$ для некоторого $m \geqslant 0$; при этом $\{L^k x' : 0 \leqslant k \leqslant m\}$ — подмножество D_a и, следовательно, подмножество V. Тогда $h(L^{-m}x) = f^{-m}(h(x))$, поэтому

$$\alpha(x) = f^m(h(L^{-m}x)) = h(x).$$

Так как $p = \alpha(0)$, на множестве D_a отображение α совпадает с сопрягающим гомеоморфизмом h (следовательно, α непрерывно на этом множестве).

Рассмотрим теперь точку $x \in \mathcal{S} \setminus D_a$ и такую последовательность $x_k \in \mathcal{S}$, что $x_k \to x, k \to \infty$.

Если $x' = L^{m(x)}x$ — внутренняя точка множества G_0 (относительно внутренней топологии подпространства $\mathcal{S}$), то $L^{m(x)}x_k \in G_0$ при достаточно больших k, поэтому

$$\alpha(x_k) = f^{-m(x)}(h(L^{m(x)}x_k)) \to \alpha(x), \quad k \to \infty.$$

Если же x' — не внутренняя точка множества G_0, то из определения множества G_0 следует, что у точки x' есть окрестность в $\mathcal{S}$, принадлежащая объединению $G_0 \cup L^{-1}(G_0)$. Поэтому если k достаточно велико, то либо $m(x_k) = m(x)$ либо $m(x_k) = m(x) + 1$. В последнем случае,

$$L^{m(x)}x_k, L^{m(x)+1}x_k \in V,$$

и из равенства

$$h(L^{m(x_k)}x_k) = h(L^{m(x)+1}x_k) = f(h(L^{m(x)}x_k))$$

следует, что

$$\alpha(x_k) = f^{-m(x)-1}(f(h(L^{m(x)}x_k))) \to \alpha(x), \quad k \to \infty.$$

Таким образом, и во втором случае непрерывность отображения α в точке x' установлена.

Мы показали, что отображение α сюръективно, инъективно и непрерывно. Те же рассуждения, что были применены котображению G после леммы 4.2, показывают, что α — гомеоморфизм $\mathcal{S}$ на $W^s(p)$. Лемма 4.5 доказана. •

Замечание 1. Пусть $x \in \mathcal{S}, x \neq 0$, и $x' = Lx$. В этом случае $m(x') = m(x) - 1$. Тогда

$$\alpha(Lx) = \alpha(x') = f^{-m(x)+1}(h(L^{m(x)-1}x')) =$$

$$= f(f^{-m(x)}(h(L^{m(x)}x))) = f(\alpha(x)).$$

Таким образом, отображение α сопрягает систему L на $\mathcal{S}$ и диффеоморфизм f на $W^s(p)$.

Замечание 2. Отметим, что устойчивое многообразие не обязательно является (топологическим) подмногообразием фазового пространства (т. е. топология, индуцированная топологией фазового пространства, не всегда совпадает с внутренней топологией, порождаемой описанным выше топологическим погружением подпространства $\mathcal{S}$; в качестве примера рассмотрите диффеоморфизм сдвига на 1 по траекториям системы дифференциальных уравнений, рассмотренной в примере 3.1 п. 3).

4.4. Теорема об устойчивом многообразии

В этом пункте мы покажем, что локальные устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболической неподвижной точки являются гладкими дисками. Соответствующее утверждение (обычно называемое теоремой об устойчивом многообразии) было доказано А. М. Ляпуновым (для аналитических систем дифференциальных уравнений; в этом случае Ляпунов использовал специальные представления решений), Ж. Адамаром (техника Адамара была основана на изучении отображений графиков; детальное изложение подхода Адамара приведено в [KH1995]) и О. Перроном (приводимое ниже доказательство теоремы 4.2 основано на методе Перрона).

Так как теорема об устойчивом многообразии является локальным утверждением, мы будем рассматривать диффеоморфизм класса C^1, имеющий вид (4.3) в окрестности начала координат евклидова пространства R^n. Предположим, что матрица Якоби A диффеоморфизма f в нуле имеет вид, описанный в лемме 4.1, а нелинейность F обращается в нуле в нуль вместе со своей матрицей Якоби. Мы обозначаем через y и z координаты в подпространствах $\mathcal{S}$ и $\mathcal{U}$, введенных в конце п. 4.1. Фиксируем такое число $\lambda \in (0,1)$, что выполнены неравенства

$$||B|| \leqslant \lambda \text{ и } ||C^{-1}|| \leqslant \lambda.$$

Теорема 4.2. *Предположим, что $x = 0$ — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма f, имеющего вид* (4.3) *в окрестности U начала координат. Тогда*

(1) *существует такое $\Delta > 0$, что*

(1.1) *существует такое отображение*

$$\gamma\colon \{y\colon |y| < \Delta\} \to \mathcal{U}$$

класса C^1, что

$$\gamma(0) = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y}(0) = 0 \tag{4.26}$$

и поверхность

$$\Gamma = \{(y, \gamma(y)) : |y| < \Delta\}$$

обладает следующим свойством: если $x \in \Gamma$, то $|f^k(x)| \to 0, k \to \infty$;

(1.2) *если $|f^k(x)| < \Delta$ при $k \geqslant 0$, то $x \in \Gamma$;*

(2) *для любых чисел $b > 1$ и $\nu \in (\lambda, 1)$ существует такое $\delta = \delta(b, \nu)$, что если $x_0 = (y_0, z_0) \in \Gamma$ и $|y_0| < \delta$, то*

$$|f^k(x_0)| \leqslant b\nu^k |y_0|, \quad k \geqslant 0. \tag{4.27}$$

Замечание 1. Уменьшая Δ, если необходимо, мы можем считать, что выполнены включения

$$\{(y, \gamma(y)) : |y| < \Delta\} \subset \{|x| < \Delta\} \subset U$$

(мы учитываем соотношения (4.26)). Ясно, что в этом случае

$$W^s_U(0) \cap \{|y| < \Delta\} = \Gamma.$$

Таким образом, в некоторой окрестности точки $x = 0$ локальное устойчивое многообразие является C^1-гладким диском.

Замечание 2. Из соотношений (4.26) следует, что $\mathcal{S}$ является касательным пространством к поверхности Γ в начале координат.

Замечание 3. Если диффеоморфизм принадлежит классу $C^k, k \geqslant 1$ (или является аналитическим), то диск Γ имеет такую же гладкость (см., например, [Пл1977]).

Замечание 4. Так как $A^k x_0 = (B^k y_0, C^k z_0)$, то скорость стремления траектории линейного отображения L по его устойчивому многообразию к нулю оценивается неравенствами $|B^k y_0| \leqslant \lambda^k |y_0|$.

Утверждение (2) теоремы 4.2 показывает, что скорость стремления траектории диффеоморфизма f по его локальному устойчивому многообразия $W_U^s(0)$ к точке $x = 0$ сколь угодно близка к соответствующей скорости для линейного отображения (если начальное данное достаточно мало).

Доказательство теоремы 4.2 достаточно длинное; мы разобьем его на несколько лемм. Отметим, прежде всего, что верны два следующие соотношения.

Предположим, что $\nu \in (\lambda, 1)$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i}\nu^i < \nu^k \frac{1}{\nu - \lambda} \tag{4.28}$$

и

$$\sum_{i=k}^{\infty} \lambda^{i+1-k}\nu^i = \nu^k \frac{\lambda}{1 - \nu\lambda} \tag{4.29}$$

для любого $k > 0$.

Докажем, например, неравенство (4.28) (равенство (4.29) доказывается аналогично):

$$\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i}\nu^i = \lambda^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^i = \lambda^{k-1} \frac{(\nu/\lambda)^k - 1}{\nu/\lambda - 1} <$$

$$< \nu^k \frac{1/\lambda}{\nu/\lambda - 1} = \nu^k \frac{1}{\nu - \lambda}.$$

Фиксируем вначале числа $b_0 > 1$ и $\nu_0 \in (\lambda, 1)$. Выберем число Δ так, чтобы множество $D_\Delta = \{|x| \leqslant b_0\Delta\}$ лежало в области определения диффеоморфизма f и чтобы для константы Липшица l_0 функции F на множестве D_Δ выполнялись неравенства

$$l_0^*{:} = \max\left(\frac{l_0}{\nu_0 - \lambda}, \frac{l_0}{1 - \nu_0\lambda}\right) < 1 \tag{4.30}$$

и

$$1 + \frac{l_0 b_0}{\nu_0 - \lambda} < b_0. \tag{4.31}$$

Основную роль в доказательстве теоремы 4.2 играет так называемый *оператор Перрона*. Этот оператор определяется так. Фиксируем вектор y_0 и сопоставим последовательности $X = \{x_k \in R^n{:}\, k \geqslant 0\}$ с $x_0 = (y_0, z_0)$ последовательность $T(X) = \Xi = \{\xi_k \in R^n{:}\, k \geqslant 0\}$, где

$$\eta_k = B^k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i} f_1(x_i) \quad \text{и} \quad \zeta_k = -\sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i} f_2(x_i) \tag{4.32}$$

(мы представляем вектор ξ_k в виде (η_k, ζ_k) в соответствии с представлением $x = (y, z)$, а f_1 и f_2 — соответствующие компоненты F). Мы будем обосновывать корректность определения (т. е. сходимость ряда, представляющего ζ_k) в каждом конкретном случае.

Фиксируем числа $d > 0$, $b > 1$ и $\nu \in (\lambda, 1)$. Будем обозначать через $G(d, b, \nu)$ множество последовательностей $X = \{x_k \in R^n{:}\, k \geqslant 0\}$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x_k| \leqslant bd\nu^k, \quad k \geqslant 0. \tag{4.33}$$

Лемма 4.6. *Для любых чисел $b > 1$ и $\nu \in (\lambda, 1)$ найдется такое $\delta > 0$, что если $|y_0| \leqslant \delta$, то существует такая положительная полутраектория $X = \{x_k{:}\, k \geqslant 0\}$ диффеоморфизма f, что $x_0 = (y_0, z_0)$ и $X \in G(|y_0|, b, \nu)$.*

Доказательство. Выберем число $\delta \leqslant \Delta$ так, чтобы для константы Липшица l функции F на множестве $D_\delta = \{|x| \leqslant b\delta\}$ выполнялись неравенства

$$l^*{:} = \max\left(\frac{l}{\nu - \lambda}, \frac{l}{1 - \nu\lambda}\right) < 1 \tag{4.34}$$

и

$$1 + \frac{lb}{\nu - \lambda} < b. \tag{4.35}$$

Фиксируем вектор y_0 с $|y_0| \leqslant \delta$ и сопоставим последовательности $X \in G(|y_0|, b, \nu)$ с $x_0 = (y_0, z_0)$ последовательность $T(X) = \Xi = \langle\{\xi_k{:}\, k \geqslant 0\}$. Мы проведем необходимые оценки и одновременно докажем, что ряд в выражении для ζ_k сходится, т. е. оператор T определен корректно.

Если $X \in G(|y_0|, b, \nu)$, то $x_k \in D_\delta$, поэтому выполнены неравенства

$$|f_j(x_i)| \leqslant l|x_i| \leqslant lb|y_0|\nu^i, \quad i \geqslant 0,\ j = 1, 2.$$

Следовательно,

$$|\eta_k| \leqslant \lambda^k|y_0| + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} lb|y_0|\nu^i \leqslant \lambda^k|y_0| + \frac{lb}{\nu - \lambda}|y_0|\nu^k \leqslant b|y_0|\nu^k$$

(мы учитываем неравенства $\lambda < \nu$, (4.28) и (4.35)) и

$$|\zeta_k| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \lambda^{i+1-k} lb|y_0|\nu^i \leqslant \frac{lb\lambda}{1-\nu\lambda}|y_0|\nu^k \leqslant b|y_0|\nu^k$$

(мы учитываем равенство (4.29) и неравенство (4.34), из которого следует, что

$$\frac{lb\lambda}{1-\nu\lambda} \leqslant b).$$

Таким образом, $T(X) \in G(|y_0|, b, \nu)$.

Построим последовательность $\{X^m \in G(|y_0|, b, \nu) \colon m \geqslant 0\}$ следующим образом: положим $X^0 = \{x_k = 0 \colon k \geqslant 0\}$ (очевидно, $X^0 \in G(|y_0|, b, \nu)$) и $X^m = T(X^{m-1})$ (как было показано выше, в этом случае $X^m \in G(|y_0|, b, \nu)$ при всех m).

Пусть $X^m = \{x_k^m \colon k \geqslant 0\}$, где $x_k^m = (y_k^m, z_k^m)$. Докажем (индукцией по m), что

$$|x_k^{m+1} - x_k^m| \leqslant (l^*)^m b|y_0|\nu^k, \quad m \geqslant 0. \tag{4.36}$$

Так как $X^1 \in G(|y_0|, b, \nu)$, оценки (4.36) верны при $m = 0$. Пусть

$$|x_k^m - x_k^{m-1}| \leqslant (l^*)^{m-1} b|y_0|\nu^k.$$

Тогда

$$|y_k^{m+1} - y_k^m| = \left|\sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i} f_1(x_i^m) - \sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i} f_1(x_i^{m-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} l(l^*)^{m-1} b|y_0|\nu^i \leqslant (l^*)^m b|y_0|\nu^k \tag{4.37}$$

и

$$|z_k^{m+1} - z_k^m| = \left|\sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i} f_2(x_i^m) - \sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i} f_2(x_i^{m-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \lambda^{i+1-k} l(l^*)^{m-1} b|y_0|\nu^i \leqslant (l^*)^m b|y_0|\nu^k. \tag{4.38}$$

Объединяя оценки (4.37) и (4.38), мы завершаем доказательство оценок (4.36).

Так как $l^* < 1$ (см. неравенство (4.34)), из неравенств (4.36) следует, что при любом $k \geqslant 0$ существует предел $\lim_{m\to\infty} x_k^m = x_k$.

Покажем, что последовательность $X = \{x_k\}$ является положительной полутраекторией диффеоморфизма f.

Действительно, так как

$$y_k^{m+1} = B^k y_0 + B^{k-1} f_1(x_0^m) + \ldots + f_1(x_{k-1}^m),$$

то

$$y_{k+1}^{m+1} = B^{k+1} y_0 + B^k f_1(x_0^m) + \ldots + B f_1(x_{k-1}^m) + f_1(x_k^m) =$$
$$= B y_k^{m+1} + f_1(x_k^m); \tag{4.39}$$

аналогично, так как

$$z_k^{m+1} = -(C^{-1} f_2(x_k^m) + C^{-2} f_2(x_{k+1}^m) + C^{-3} f_2(x_{k+2}^m) + \ldots),$$

то

$$z_{k+1}^{m+1} = -(C^{-1} f_2(x_{k+1}^m) + C^{-2} f_2(x_{k+2}^m) + \ldots) = C z_k^{m+1} + f_2(x_k^m). \tag{4.40}$$

Из равенств (4.39) и (4.40) следует, что

$$x_{k+1}^{m+1} = A x_k^{m+1} + F(x_k^m). \tag{4.41}$$

Переходя в равенствах (4.41) к пределу при $m \to \infty$, мы видим, что $x_{k+1} = A x_k + F(x_k)$, т. е. последовательность $X = \{x_k\}$ является положительной полутраекторией диффеоморфизма f.

Кроме того, переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенствах $|x_k^m| \leqslant b|y_0|\nu^k$, мы видим, что верно включение $X \in G(|y_0|, b, \nu)$.

Для завершения доказательства осталось отметить, что из определения оператора T вытекают равенства $x_0^m = (y_0, z_0^m), m \geqslant 1$. Поэтому $x_0 = (y_0, z_0)$. •

Замечания.

1. Так как выполнены неравенства (4.30) и (4.31), аналогичные неравенствам (4.34) и (4.35), утверждение леммы 4.6 верно для $|y_0| \leqslant \Delta$; в этом случае существует такая положительная полутраектория $X = \{x_k \colon k \geqslant 0\}$ диффеоморфизма f, что $x_0 = (y_0, z_0)$ и $X \in G(|y_0|, b_0, \nu_0)$.

2. Те же рассуждения, что при доказательстве равенств (4.41), показывают, что если последовательность $X = \{x_k\}$ с $|x_k| \leqslant b_0\Delta$ является неподвижной точкой оператора T (т. е. $T(X) = X$), то последовательность X является положительной полутраекторией диффеоморфизма f.

Лемма 4.7. *Для любого $|y_0| \leqslant \Delta$ оператор Перрона T имеет не больше одной неподвижной точки $X = \{x_k\}$ с $|x_k| \leqslant b_0\Delta$.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_k\}$ и $X' = \{x'_k\}$ – неподвижные точки оператора T с $|x_k|, |x'_k| \leqslant b_0\Delta$. Положим

$$\mu = \sup_{k \geqslant 0} |x_k - x'_k|;$$

пусть $x_k = (y_k, z_k)$ и $x'_k = (y'_k, z'_k)$.

Из оценок

$$|y_k - y'_k| \leqslant \left| \sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i} f_1(x_i) - \sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i} f_1(x'_i) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} l_0 |x_i - x'_i| \leqslant \frac{l_0 \mu}{1-\lambda} \leqslant l_0^* \mu$$

и

$$|z_k - z'_k| \leqslant \left| \sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i} f_2(x_i) - \sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i} f_2(x'_i) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l_0 \mu \lambda}{1-\lambda} \leqslant l_0^* \mu$$

следует, что $\mu \leqslant l_0^* \mu$.

Так как $l_0^* < 1$, $\mu = 0$. Лемма доказана. •

Лемма 4.8. *Предположим, что $X = \{x_k\}$ — положительная полутраектория диффеоморфизма f с $|x_k| \leqslant b_0\Delta$ и $x_0 = (y_0, z_0)$. Тогда X — неподвижная точка оператора T, соответствующего y_0.*

Доказательство. Из равенств

$$y_1 = By_0 + f_1(x_0), \quad y_2 = By_1 + f_1(x_1) = B^2 y_0 + Bf_1(x_0) + f_1(x_1), \quad \ldots$$

следует, что

$$y_k = B^k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i} f_1(x_i).$$

Фиксируем $k \geqslant 0$. Из равенства

$$z_{k+1} = Cz_k + f_2(x_k)$$

следует, что

$$z_k = C^{-1} z_{k+1} - C^{-1} f_2(x_k).$$

Далее, из равенства

$$z_{k+2} = Cz_{k+1} + f_2(x_{k+1})$$

следует, что

$$z_k = C^{-2} z_{k+2} - C^{-2} f_2(x_{k+1}) - C^{-1} f_2(x_k).$$

Продолжая эту цепочку равенств, мы видим, что

$$z_k = C^{-m} z_{k+m} - \sum_{i=k}^{k+m-1} C^{k-1-i} f_2(x_i) \tag{4.42}$$

для любого натурального m.

Так как $|z_{k+m}| \leqslant b_0\Delta$ и $|f_2(x_i)| \leqslant l_0 b_0 \Delta$, первое слагаемое в (4.42) стремится к 0 при $m \to \infty$, а второе слагаемое – частная сумма сходящегося ряда $\sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i} f_2(x_i)$.

Переходя в (4.42) к пределу при $m \to \infty$, мы получаем равенство

$$z_k = -\sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i} f_2(x_i).$$

Лемма доказана. •

Мы можем суммировать выводы, вытекающие из лемм 4.6–4.8, следующим образом:

существует такое отображение

$$\gamma \colon \{y \colon |y| \leqslant \Delta\} \to \mathcal{U},$$

что если $x_0 = (y_0, \gamma(y_0))$, $|y_0| \leqslant \Delta$, и $X = \{x_k \colon k \geqslant 0\}$ — положительная полутраектория точки x_0 для диффеоморфизма f, то $X \in G(|y_0|, b_0, \nu_0)$;

если $x_0 = (y_0, z_0), |y_0| \leqslant \Delta$, и $z_0 \neq \gamma(y_0)$, то полутраектория $\{f^k(x_0) \colon k \geqslant 0\}$ покидает множество D_Δ при возрастании k.

Это отображение может быть определено так: фиксируем точку y_0 с $|y_0| \leqslant \Delta$; пусть X — единственная неподвижная точка оператора T, соответствующая y_0. Тогда

$$\gamma(y_0) = z_0 = -\sum_{i=0}^{\infty} C^{k-1-i} f_2(x_i). \tag{4.43}$$

Докажем теперь, что отображение γ является C^1-гладким. Покажем вначале, что отображение γ удовлетворяет условию Липшица. Точнее, выполнено следующее утверждение.

Лемма 4.9. *Для любого $L > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$, что*

$$|\gamma(y) - \gamma(y')| \leqslant L|y - y'|, \tag{4.44}$$

если $|y|, |y'| \leqslant \delta_1$.

Доказательство. Фиксируем числа $b > \max(1, L)$ и $\nu \in (\lambda, 1)$. Выберем число $\delta_2 \leqslant \Delta$ так, чтобы для константы Липшица l функции F на множестве $D_{\delta_2} = \{|x| \leqslant b\delta_2\}$ выполнялись неравенства (4.34) и (4.35), а также неравенство

$$\frac{lb\lambda}{\nu - \lambda} < L. \tag{4.45}$$

Положим $\delta_1 = \delta_2(1 - l^*)$. Пусть $|y|, |y'| \leqslant \delta_1$.

Построим, так же как при доказательстве леммы 4.6, последовательные приближения X^m и Ξ^m, сходящиеся к неподвижным точкам оператора T для y и y': $X^0 = \{x_k = 0\}$, $\Xi^0 = \{\xi_k = 0\}$ и $X^m = T(X^{m-1})$, $\Xi^m = T(\Xi^{m-1})$ при $m \geqslant 1$.

Пусть $X^m = \{x_k^m = (y_k^m, z_k^m)\}$ и $\Xi^m = \{\xi_k^m = (\eta_k^m, \zeta_k^m)\}$. Из неравенств (4.36) следует, что

$$|x_k^m|, |\xi_k^m| \leqslant \frac{1}{1 - l^*} b\delta_1 \leqslant b\delta_2.$$

Докажем (индукцией по m), что выполнены неравенства

$$|y_k^m - \eta_k^m| \leqslant b\nu^k |y - y'|, \quad k \geqslant 0, \tag{4.46}$$

и

$$|z_k^m - \zeta_k^m| \leqslant L\nu^k |y - y'|, \quad k \geqslant 0. \tag{4.47}$$

Из выбора числа b следует, что если неравенства (4.46) и (4.47) выполнены, то

$$|x_k^m - \xi_k^m| \leqslant b\nu^k |y - y'|, \quad k \geqslant 0.$$

Очевидно, неравенства (4.46) и (4.47) выполнены при $m = 0$. Пусть они верны при $m - 1$. Тогда

$$|y_k^m - \eta_k^m| \leqslant |B^k(y - y')| + \left| \sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i}(f_1(x_i^{m-1}) - f_1(\xi_i^{m-1})) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^k |y - y'| + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} lb\nu^k |y - y'| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\lambda^k + lb\frac{1}{\nu - \lambda}\nu^k \right) |y - y'| \leqslant b\nu^k |y - y'|$$

(мы учитываем неравенство (4.35)) и

$$|z_k^m - \zeta_k^m| \leqslant \left| \sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i}(f_2(x_i^{m-1}) - f_2(\xi_i^{m-1})) \right| \leqslant$$

$$\leqslant lb\frac{\lambda}{1 - \nu\lambda}\nu^k |y - y'| \leqslant L\nu^k |y - y'|$$

(мы учитываем неравенство (4.45)). Таким образом, неравенства (4.46) и (4.47) доказаны.

Переходя в неравенстве

$$|z_0^m - \zeta_0^m| \leqslant L|y - y'|$$

к пределу при $m \to \infty$, мы получаем искомую оценку (4.44). •

Замечание. Те же рассуждения, что при доказательстве леммы 4.9, показывают, что отображение γ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_0 = b_0$ на множестве $\{|y| \leqslant \Delta\}$.

Следует лишь заменить неравенство (4.46) на неравенство

$$|y_k^m - \eta_k^m| \leqslant L_0\nu^k |y - y'|, \quad k \geqslant 0,$$

и неравенство (4.47) на неравенство

$$|z_k^m - \zeta_k^m| \leqslant L_0\nu^k |y - y'|, \quad k \geqslant 0.$$

В этом случае из неравенств (4.30) и (4.31) следуют неравенство

$$|x_k^m - \xi_k^m| \leqslant L_0\nu^k |y - y'|, \quad k \geqslant 0,$$

и его предельный (при $m \to \infty$) вариант

$$|x_k - \xi_k| \leqslant L_0\nu^k |y - y'|, \quad k \geqslant 0. \tag{4.48}$$

Мы доказали лемму 4.9 для того, чтобы показать, что константа Липшица отображения γ может быть выбрана сколь угодно малой за счет выбора малой окрестности точки $y = 0$ в $\mathcal{S}$.

Лемма 4.10. *Отображение γ непрерывно дифференцируемо при $|y|<\Delta$ и выполнено второе равенство в* (4.26).

Доказательство. Пусть e_i — i-й единичный вектор пространства R^m. Фиксируем y с $|y| < \Delta$, рассмотрим скаляр h и положим $y' = y + h_i$, где $h_i = he_i$ (мы считаем, что величина $|h|$ столь мала, что $|y'| < \Delta$). Пусть $X = \{x_k\}$ и $X' = \{x'_k\}$ — неподвижные точки оператора Перрона T, соответствующие y и y', соответственно.

Обозначим $P(h)=\{p_k(h)\colon k\geqslant 0\}=X-X'$. Пусть $p_k(h)=(y_k(h), z_k(h))$ в соответствии с представлением $x = (y, z)$. Тогда

$$y_k(h) = B^k h_i + \sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i}\left[f_1(x_i) - f_1(x'_i)\right]$$

и

$$z_k(h) = -\sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i}\left[f_2(x_i) - f_2(x'_i)\right].$$

Из непрерывной дифференцируемости функций f_1 и f_2 следует, что

$$y_k(h) = B^k h_i + \sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_i)p_i(h) + d_{1,i}\right] \tag{4.49}$$

и

$$z_k(h) = -\sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i}\left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_i)p_i(h) + d_{2,i}\right], \tag{4.50}$$

где $d_{1,i}$ и $d_{2,i}$ — бесконечно малые при $h \to 0$ более высокого порядка, чем p_i.

Из неравенства (4.48) следует, что

$$|p_k(h)| \leqslant L_0|h|\nu^k, \quad k \geqslant 0, \tag{4.51}$$

где L_0 — константа Липшица отображения γ на множестве $\{|y| \leqslant \Delta\}$ (см. замечание клемме 4.9).

Матрица $\partial F/\partial x$ равномерно непрерывна на компакте D_Δ. Поэтому из неравенств (4.51) вытекает, что существует такая функция $\chi(h)$, что $\chi(h) \to 0$ при $h \to 0$ и

$$|d_{j,k}| \leqslant \chi(h)|h|\nu^k, \quad k \geqslant 0,\ j = 1, 2. \tag{4.52}$$

Фиксируем число μ, $|\mu| \leqslant \Delta$, и рассмотрим оператор Θ, сопоставляющий последовательности $G = \{g_k \in R^n\colon k \geqslant 0\}$ последовательность $\Theta(G) = Q = \{q_k \in R^n\colon k \geqslant 0\}$, где

$$r_k = B^k\mu e_i + \sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_i)g_i \quad \text{и} \quad t_k = -\sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i}\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_i)g_i$$

(как и выше, мы представляем вектор q_k в виде (r_k, t_k) в соответствии с представлением $x = (y, z)$).

Оператор Θ имеет тот же вид, что и оператор T. При доказательстве существования неподвижной точки оператора T (см. лемму 4.6 и замечание к ней) использовались оценки норм матриц B и C, приведенные перед формулировкой теоремы 4.2, и оценки констант Липшица функций f_1 и f_2 в D_Δ.

Так как множители при B^{k-1-i} и C^{k-1-i} в определении оператора Θ линейны по множителям g_i и в D_Δ выполнены оценки

$$\left\|\frac{\partial f_1}{\partial x}(x)\right\|, \left\|\frac{\partial f_2}{\partial x}(x)\right\| \leqslant l_0,$$

то доказательство существования неподвижной точки оператора Θ дословно повторяет доказательство существования неподвижной точки оператора T.

Пусть G — неподвижная точка оператора Θ; ясно, что последовательность $U = \{u_k = g_k/\mu\}$ удовлетворяет равенствам

$$v_k = B^k e_i + \sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_i)u_i \quad \text{и} \quad w_k = -\sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i}\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_i)u_i, \tag{4.53}$$

где $u_k = (v_k, w_k)$.

Разделим равенства (4.49) и (4.50) на h и вычтем из них равенства (4.53):

$$\frac{y_k(h)}{h} - v_k = \sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_i)\left(\frac{p_i(h)}{h} - u_i\right) + \frac{d_{1,i}}{h}\right]$$

и

$$\frac{z_k(h)}{h} - w_k = -\sum_{i=k}^{\infty} C^{k-1-i}\left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_i)\left(\frac{p_i(h)}{h} - u_i\right) + \frac{d_{2,i}}{h}\right].$$

Из этих равенств следует, что

$$\left|\frac{y_k(h)}{h} - v_k\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} \left(l_0 \left|\frac{p_i(h)}{h} - u_i\right| + \left|\frac{d_{1,i}}{h}\right| \right) \tag{4.54}$$

и

$$\left|\frac{z_k(h)}{h} - w_k\right| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \lambda^{i-k+1} \left(l_0 \left|\frac{p_i(h)}{h} - u_i\right| + \left|\frac{d_{2,i}}{h}\right| \right). \tag{4.55}$$

Пусть

$$\theta = \sup_{k\geqslant 0} \left|\frac{p_k(h)}{h} - u_k\right|.$$

Из неравенств (4.54), (4.55) и (4.52) следует, что

$$\theta \leqslant l_0^*\theta + \frac{l_0^*}{l_0}\chi(h).$$

Так как $l_0^* < 1$, из последнего неравенства вытекает, что $\theta \to 0$ при $h \to 0$.

Это и означает существование частной производной

$$\frac{\partial\gamma(y)}{\partial y_i} = \frac{\partial z_0}{\partial y_i} = w_0$$

(мы учитываем равенство (4.43)).

Докажем теперь непрерывность частной производной (непрерывную зависимость w_0 от y).

Фиксируем y с $|y| < \Delta$ и произвольное ε.

Так как матрица $\partial F/\partial x$ непрерывна (и, следовательно, равномерно непрерывна на D_Δ), существует такое $\delta > 0$, что если $y' \in D_\Delta$ и $|y - y'| < \delta$, а $X = \{x_k\}$ и $X' = \{x'_k\}$ — неподвижные точки оператора T, соответствующие y и y', то

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial x}(x_k) - \frac{\partial F}{\partial x}(x'_k)\right\| < \varepsilon$$

(см. замечание клемме 2.9). Будем считать далее, что если $|y - y'| < \delta$, то $y' \in D_\Delta$.

Пусть $U = \{u_k = (v_k, w_k)\}$ и $U' = \{u'_k = (v'_k, w'_k)\}$ — последовательности, удовлетворяющие равенствам (4.53) и их аналогам для y'.

Так как последовательность $G = \{g_k = \mu u_k\}$ (неподвижная точка оператора Θ) принадлежит множеству $G(|\mu|, b_0, \nu_0)$, существует такая константа $c > 0$, что $|u_k| \leqslant c\nu_0^k$.

Пусть $M = \sup_{k\geqslant 0} |u_k - u'_k|$ (ясно, что эта величина конечна). Оценим

$$|v_k - v'_k| = \left|\sum_{i=0}^{k-1} B^{k-1-i} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_i)u_i - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x'_i)u'_i\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} \left(\left|\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_i) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x'_i)\right] u_i\right| + \left|\frac{\partial f_1}{\partial x}(x'_i)(u_i - u'_i)\right| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} \left(\varepsilon c\nu_0^i + l_0 M\right) \leqslant$$

(мы учитываем, что $\|\partial F/\partial x\| \leqslant l_0$)

$$\leqslant \varepsilon c \frac{\nu_0^k}{\nu_0 - \lambda} + \frac{l_0 M}{1 - \lambda} \leqslant \varepsilon c \frac{1}{\nu_0 - \lambda} + l_0^* M.$$

Аналогично показывается, что

$$|w_k - w'_k| \leqslant \varepsilon c \frac{1}{1 - \nu_0\lambda} + l_0^* M.$$

Таким образом,

$$M \leqslant \varepsilon c \frac{l_0^*}{l_0} + l_0^* M.$$

Поэтому

$$|w_0 - w'_0| \leqslant M \leqslant \frac{c\varepsilon l_0^*}{l_0(1 - l_0^*)},$$

что и означает искомую непрерывную зависимость w_0 от y.

Второе равенство в (4.26) следует из замечания к лемме 4.9. Теорема 4.2 доказана. •

4.5. Гиперболическая периодическая точка

Пусть теперь p — периодическая точка диффеоморфизма f периода $m > 1$. Обозначим $p_i = f^i(p), i = 0, \ldots, m-1$.

Точка p называется *гиперболической периодической точкой*, если p — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма f^m.

Покажем, что в этом случае каждая из точек p_i, составляющих траекторию точки p, является гиперболической периодической точкой.

Рассмотрим точки p_i, p_j с $0 \leqslant i < j \leqslant m-1$. Обозначим $g = f^{j-i}$; ясно, что $g^{-1} = f^{i-j}$. Таким образом, $f^m = g^{-1} \circ f^m \circ g$.

Тогда
$$Df^m(p_i) = Dg^{-1}(p_j)\, Df^m(p_j)\, Dg(p_i).$$
Так как $g(p_i) = p_j$, матрицы $Dg^{-1}(p_j)$ и $Dg(p_i)$ взаимно-обратны. Поэтому наборы собственных чисел матриц $Df^m(p_i)$ и $Df^m(p_j)$ одинаковы, и эти матрицы являются или не являются гиперболическими одновременно. Отсюда и следует наше утверждение.

Назовем устойчивым многообразием $W^s(p)$ гиперболической периодической точки p устойчивое многообразие неподвижной точки p диффеоморфизма f^m. Таким образом, $x \in W^s(p)$ тогда и только тогда, когда $f^{mk}(x) \to p$ при $k \to \infty$.

Пусть $x' = f^j(x)$. Ясно, что $f^{mk}(x) \to p$ тогда и только тогда, когда $f^{mk}(x') = f^{mk+j}(x) \to f^j(p)$ при $k \to \infty$. Таким образом,
$$f^j(W^s(p)) = W^s(p_j). \tag{4.56}$$
Отметим, что
$$W^s(p_i) \cap W^s(p_j) = \emptyset, \quad 0 \leqslant i < j \leqslant m-1. \tag{4.57}$$

Действительно, если $x \in W^s(p_i) \cap W^s(p_j)$, то должны выполняться соотношения $f^{mk}(x) \to p_i$ и $f^{mk}(x) \to p_j$ при $k \to \infty$, что невозможно.

Определим устойчивое многообразие $W^s(O(p,f))$ траектории точки p равенством
$$W^s(O(p,f)) = \bigcup_{i=0}^{m-1} W^s(p_i).$$
Из соотношений (4.56) следует, что $W^s(O(p,f))$ — инвариантное множество диффеоморфизма f. Соотношения (4.57) показывают, что $W^s(O(p,f))$ – дизъюнктное объединение m экземпляров образов евклидова пространства одной и той же размерности.

Аналогично определяется неустойчивое многообразие $W^u(O(p,f))$.

5. Гиперболическая точка покоя и гиперболическая замкнутая траектория

5.1. Гиперболическая точка покоя

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений
$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad F \in C^1(R^n). \tag{5.1}$$
Как и раньше, будем предполагать, что система (5.1) порождает поток ϕ.

Пусть p — точка покоя системы (5.1). Назовем точку p *гиперболической*, если для собственных чисел λ_j матрицы Якоби
$$P = \frac{\partial F}{\partial x}(p)$$
выполнено условие
$$\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.2}$$
Для гиперболической точки покоя справедливы следующие аналоги теорем 4.1 и 4.2.

Теорема 5.1. *Гиперболическая точка p системы* (5.1) *локально топологически сопряжена с точкой покоя $u = 0$ линейной системы*
$$\frac{du}{dt} = Pu. \tag{5.3}$$
Предположим для определенности, что
$$\mathrm{Re}\lambda_j < 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \mathrm{Re}\lambda_j > 0, \quad j = m+1, \ldots, n$$

(мы не исключаем случаи $m = 0$ и $m = n$).

Будем считать что точка p совпадает с началом координат в R^n. Пусть координаты выбраны так, что

$$P = \operatorname{diag}(P_1, P_2), \tag{5.4}$$

где матрица P_1 имеет размер $m \times m$ и для ее собственных чисел выполнены неравенства $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$, а матрица P_2 имеет размер $(n-m)\times(n-m)$ и для ее собственных чисел выполнены неравенства $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$. Будем, как и в п. 4, представлять векторы x и u в виде $x = (y, z)$ и $u = (v, w)$ в соответствии с представлением (5.4). Рассмотрим подпространства $\mathcal{S} = \{z = 0\}$ и $\mathcal{U} = \{y = 0\}$.

Теорема 5.2. *Предположим, что $x = 0$ — гиперболическая точка покоя системы* (5.1)*. Тогда существуют такие $\Delta > 0$ и отображение*

$$\gamma\colon \{y\colon |y| < \Delta\} \to \mathcal{U}$$

класса C^1, что

(1)

$$\gamma(0) = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y}(0) = 0$$

и поверхность

$$\Gamma = \{(y, \gamma(y)) : |y| < \Delta\}$$

обладает следующим свойством: если $x \in \Gamma$, то $\phi(t, x) \to 0, t \to \infty$;

(2) *если $|\phi(t, x)| < \Delta$ при $t \geqslant 0$, то $x \in \Gamma$.*

Покажем, что теоремы 5.1 и 5.2 сводятся к теоремам 4.1 и 4.2, доказанным в предыдущем параграфе.

Обозначим через $\Psi(t)$ фундаментальную матрицу системы (5.3), которая обращается в единичную при $t = 0$. Из представления (5.4) следует, что

$$\Psi(t) = e^{Pt} = \operatorname{diag}\left(e^{P_1 t}, e^{P_2 t}\right).$$

В общем курсе дифференциальных уравнений показывается, что

$$\left\|e^{P_1 t}\right\| \to 0, \quad t \to \infty,$$

и

$$\left\|e^{P_2 t}\right\| \to 0, \quad t \to -\infty.$$

Поэтому существует такое $T > 0$,что

$$\left\|e^{P_1 T}\right\| < 1 \text{ и } \left\|e^{-P_2 T}\right\| < 1. \tag{5.5}$$

Таким образом, линейное отображение L, задаваемое матрицей

$$A = \operatorname{diag}\left(e^{P_1 T}, e^{P_2 T}\right),$$

является гиперболическим.

Рассмотрим диффеоморфизм $f(x) = \phi(T, x)$. Покажем, что f представим в виде

$$f(x) = Ax + G(x), \tag{5.6}$$

где нелинейность G обращается в нуле в нуль вместе со своей матрицей Якоби. Таким образом, представление (5.6) аналогично представлению (**??**).

В окрестности точки $x = 0$ мы можем записать правую часть системы (5.6) в виде

$$F(x) = Px + H(x), \tag{5.7}$$

где нелинейность H обращается в нуле в нуль вместе со своей матрицей Якоби.

В соответствии с представлением (5.4) запишем

$$x = (y, z), \quad \phi(t, x_0) = (y(t, y_0, z_0), z(t, y_0, z_0)), \quad H = (H_1, H_2).$$

Тогда функции $y(t, y_0, z_0)$ и $z(t, y_0, z_0)$ удовлетворяют системе

$$\dot y = P_1 y + H_1(y, z), \quad \dot z = P_2 z + H_2(y, z).$$

Таким образом, функция $y(t, y_0, z_0)$ является решением линейной неоднородной системы

$$\dot y = P_1 y(t, y_0, z_0) + H_1(y(t, y_0, z_0), z(t, y_0, z_0)).$$

Из формулы Лагранжа следует, что

$$y(T, y_0, z_0) = e^{P_1 T} y_0 + \int_0^T e^{P_1(T-s)} H_1(y(s, y_0, z_0), z(s, y_0, z_0))ds. \tag{5.8}$$

Положим

$$G_1(y_0, z_0) = \int_0^T e^{P_1(T-s)} H_1(y(s, y_0, z_0), z(s, y_0, z_0))ds.$$

Так как $(y(t,0,0), z(t,0,0)) \equiv (0,0)$, из формулы (5.8) следует, что $G_1(0,0) = 0$.

Далее,

$$\frac{\partial G_1}{\partial y_0} = \int_0^T e^{P_1(T-s)} \left(\frac{\partial H_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial H_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_0} \right) ds.$$

Поэтому из свойств нелинейности H вытекает, что

$$\frac{\partial G_1}{\partial y_0}(0,0) = 0.$$

Так же показывается, что

$$\frac{\partial G_1}{\partial z_0}(0,0) = 0.$$

Аналогичные рассуждения применимы и к

$$G_2(y_0, z_0) = z(T, y_0, z_0) - e^{P_2 T} z_0.$$

Формула (5.6) доказана.

Таким образом, теорема 4.1 применима к гиперболическому линейному отображению L и к диффеоморфизму f.

Обозначим через h_0 гомеоморфизм, сопрягающий L в окрестности неподвижной точки $u = 0$ и диффеоморфизм f в окрестности неподвижной точки $x = 0$ (для упрощения рассуждений будем считать, что h_0 — гомеоморфизм, сопрягающий L и модифицированный диффеоморфизм f во всем пространстве R^n).

Обозначим через

$$\psi(t, u) = \Psi(t) u = e^{Pt} u$$

поток, порождаемый линейной системой (5.3) (в этом случае $Lu = \psi(T, u)$).

Положим

$$h(x) = \int_0^T \psi(-s, h_0(\phi(s, x)))\, ds.$$

Покажем, что определенное таким образом отображение h является гомеоморфизмом, сопрягающим системы (5.1) и (5.3).

При любом фиксированном $t \in R$ верны равенства

$$\psi(t, h(x)) = \psi\left(t, \int_0^T \psi(-s, h_0(\phi(s, x)))\, ds\right) =$$

$$= e^{Pt} \int_0^T e^{-Ps} h_0(\phi(s, x))\, ds = \int_0^T e^{P(t-s)} h_0(\phi(s, x))\, ds =$$

$$= \int_0^T \psi(t - s, h_0(\phi(s - t, \phi(t, x))))\, ds. \tag{5.9}$$

Здесь мы воспользовались групповым свойством автономных систем:

$$\phi(s, x) \equiv \phi(s - t, \phi(t, x)).$$

Сделав замену переменных $\sigma = s - t$ в правой части равенства (5.9), мы получим следующие соотношения:

$$\int_{-t}^{T-t} \psi(-\sigma, h_0(\phi(\sigma, \phi(t, x))))\, d\sigma =$$

$$= \int_{-t}^{0} \psi(-\sigma, h_0(\phi(\sigma, \phi(t, x_0))))\, d\sigma + \int_0^{T-t} \psi(-\sigma, h_0(\phi(\sigma, \phi(t, x_0))))\, d\sigma. \tag{5.10}$$

Преобразуем выражение под знаком интеграла в (5.10):

$$\psi(-\sigma, h_0(\phi(\sigma, \cdot))) = \psi(-\sigma - T, \psi(T, h_0(\phi(\sigma, \cdot)))) =$$
$$= \psi(-\sigma - T, h_0(\phi(T, \phi(\sigma, \cdot)))).$$

Здесь мы использовали тот факт, что

$$\psi(T, h_0(\cdot)) = h_0(\phi(T, \cdot)).$$

Положим $\tau = T + \sigma$ в первом интеграле в правой части равенства (5.10) и отметим, что

$$\int_{-t}^{0} \psi(-\sigma, h_0(\phi(\sigma, \cdot)))\, d\sigma = \int_{-t}^{0} \psi(-\sigma - T, h_0(\varphi(T + \sigma, \cdot)))\, d\sigma =$$

$$= \int_{T-t}^{T} \psi(-\tau, h_0(\phi(\tau, \cdot)))\, d\tau. \tag{5.11}$$

Подставляя $\phi(t, x)$ в равенства (5.1), получаем, что

$$\int_0^T \psi(t - s, h_0(\phi(s - t, \phi(t, x))))\, ds =$$

$$= \int_0^T \psi(-s, h_0(\phi(s, \phi(t, x))))\, ds = h(\varphi(t, x)).$$

Таким образом, из (5.9) следует, что $\psi(t,\cdot)\circ h = h\circ\phi(t,\cdot)$. Тот факт, что h является гомеоморфизмом, проверяется с использованием тех же рассуждений, что были применены при доказательстве теоремы 4.1.

Предоставляем читателю показать самостоятельно, как теорема 5.2 выводится из теоремы 4.2.

Пусть p — гиперболическая точка покоя системы (5.1). Так же, как в п. 4.3, показывается, что из теоремы 5.1 вытекает следующее описание поведения траекторий в некоторой окрестности точки p.

Будем называть точку p *притягивающей*, если для всех собственных чисел матрицы P выполнены неравенства $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$. В этом случае у точки p есть такая окрестность U, что если $x \neq p$ — произвольная точка окрестности U, то $\phi(t,x)\to p$ при $t\to\infty$ и траектория $\phi(t,x)$ покидает окрестность U при убывании t. Отметим, что это утверждение близко к теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению, доказываемой в общем курсе дифференциальных уравнений.

Будем называть точку p *отталкивающей*, если для всех собственных чисел матрицы P выполнены неравенства $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$. В этом случае у точки p есть такая окрестность U, что если $x \neq p$ — произвольная точка окрестности U, то $\phi(t,x)\to p$ при $t\to-\infty$ и траектория $\phi(t,x)$ покидает окрестность U при возрастании t.

Наконец, будем называть точку покоя p *седловой*, если существует такое натуральное число $m\neq 0, n$, что $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$, $j=1,\dots,m$, и $\mathrm{Re}\lambda_j>0$, $j = m+1,\dots,n$.

В этом случае у точки p есть такие окрестность U и топологические диски $W^s_U(p)$ и $W^u_U(p)$ размерностей $m\times m$ и $(n-m)\times(n-m)$, соответственно, что

— если $x\in W^s_U(p)$, то $\phi(t,x)\to p$ при $t\to\infty$ и траектория $\phi(t,x)$ покидает окрестность U при убывании t;

— если $x\in W^u_U(p)$, то $\phi(t,x)\to p$ при $t\to-\infty$ и траектория $\phi(t,x)$ покидает окрестность U при возрастании t.

Диски $W^s_U(p)$ и $W^u_U(p)$ называются соответственно *локальным устойчивым* и *локальным неустойчивым многообразиями* точки покоя p; из теоремы 5.2 следует, что эти диски гладкие.

Так же, как в п. 4.3, мы определяем *устойчивое многообразие* точки покоя p

$$W^s(p) = \{x\colon \phi(t,x)\to p,\ t\to\infty\}$$

и *неустойчивое многообразие* точки покоя p

$$W^u(p) = \{x\colon \phi(t,x)\to p,\ t\to-\infty\}.$$

Так же, как в лемме 4.3, показывается, что множества $W^s(p)$ и $W^u(p)$ инвариантны относительно потока ϕ и что включение $x\in W^s(p)$ (включение $x\in W^u(p)$) равносильно непустоте пересечения $\phi(t,x)\cap W^s_U(p)$ (соответственно, непустоте пересечения $\phi(t,x)\cap W^u_U(p)$).

Так же, как в лемме 4.5, показывается, что множества $W^s(p)$ и $W^u(p)$ являются образами евклидовых пространств соответствующих размерностей при топологических погружениях.

5.2. Гиперболическая замкнутая траектория

Рассмотрим снова автономную систему (5.1), при этом для удобства изложения будем считать, что $x\in R^{n+1}$. Пусть, как и выше, ϕ — поток, порождаемый системой (5.1).

Предположим, что система (5.1) имеет нетривиальное периодическое решение ψ (т. е. решение, не являющееся постоянным). Пусть ω — наименьший период решения ψ и пусть γ — замкнутая траектория потока ϕ, соответствующая решению ψ.

Выберем координаты в R^{n+1} так, что $0\in\gamma$ и $F(0) = (0,\dots,0,a)$, $a>0$.

Обозначим через S координатную гиперплоскость $\{x_{n+1}=0\}$. Из нашего выбора координат следует, что вектор $F(0)$ ортогонален к гиперплоскости S. Из теоремы 1.1 вытекает, что существует диффеоморфизм T окрестности начала координат в S на окрестность начала координат в S, порождаемый сдвигом по траекториям потока ϕ — диффеоморфизм Пуанкаре замкнутой траектории γ.

При доказательстве теоремы 1.1 было показано, что для $s = (x_1,\dots,x_n)\in S$ с малыми $|s|$ определены такие гладкие функции $t(s)$ и $\sigma(s)$, что

$$t(0)=\omega,\quad \sigma(0)=0,\quad T(s)=\sigma(s)=\phi(t(s),(s,0))\cap S.$$

Назовем замкнутую траекторию γ *гиперболической*, если $0\in S$ — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма T.

Пусть ϕ^n — вектор первых n координат потока ϕ. Тогда

$$T(s)=\phi^n(t(s),(s,0)).$$

Из нашего выбора координат следует, что

$$\frac{\partial\phi^n}{\partial t}(\omega,0)=(0,\dots,0)\ \text{ и }\ DT(0)=\frac{\partial T}{\partial s}(0)=\frac{\partial\phi^n}{\partial s}(\omega,0).$$

Таким образом, матрица $DT(0)$ — это матрица производных первых n координат решения ϕ по первым n координатам начальных данных, вычисленная при $t=\omega$ и $s=0$.

Как известно, для вычисления производной решения по начальным данным следует рассмотреть систему в вариациях на решении ψ:

$$\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial x}(\phi(t,0))y = \frac{\partial F}{\partial x}(\psi(t))y \tag{5.12}$$

и рассмотреть такую ее фундаментальную матрицу $\Phi(t)$, что $\Phi(0)=E$ (напомним, что E — единичная матрица любой размерности). Тогда

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(\omega,0) = \Phi(\omega).$$

Собственные числа матрицы $\Phi(\omega)$ называются мультипликаторами замкнутой траектории γ.

Отметим, что вектор-функция $\xi(t)=\dot{\psi}(t)$ является решением системы (5.12). Действительно, продифференцируем равенство $\dot{\psi}(t)=F(\psi(t))$:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial F}{\partial x}(\psi(t))\xi.$$

Следовательно,

$$\xi(t) = \Phi(t)\xi(0).$$

Так как

$$\xi(0)=\dot{\psi}(0)=F(0) \;\text{ и }\; \xi(\omega)=F(\psi(\omega))=F(0)=\xi(0),$$

выполнено равенство

$$F(0)=\Phi(\omega)F(0).$$

Таким образом, у матрицы $\Phi(\omega)$ всегда есть собственное число, равное 1 и соответствующее собственному вектору $F(0)$. Это собственное число называют стандартным мультипликатором. Из равенства

$$\Phi(\omega)\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\a\end{pmatrix}$$

следует, что последний столбец матрицы $\Phi(\omega)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(\omega,0) = \Phi(\omega) = \begin{pmatrix} & 0\\ \frac{\partial \phi^n}{\partial s}(\omega,0) & \vdots\\ & 0\\ \dots & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0\\ DT(0) & \vdots\\ & 0\\ \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Поэтому собственные числа матрицы $DT(0)$ — это в точности мультипликаторы замкнутой траектории γ, отличные от стандартного единичного.

Таким образом, мы получаем эквивалентную формулировку условия гиперболичности замкнутой траектории: все мультипликаторы, не совпадающие со стандартным единичным, отличны от 1 по абсолютной величине.

Мы выбрали трансверсаль S к замкнутой траектории γ специальным образом. Покажем, что собственные числа производной диффеоморфизма Пуанкаре, вычисленной в начале координат трансверсальной площадки, не зависят от выбора этой площадки. Пусть S_1 и S_2 — две такие площадки, T_1 и T_2 – соответствующие диффеоморфизмы Пуанкаре, а χ – диффеоморфизм окрестности точки $\gamma\cap S_1$ на площадке S_1 на окрестность точки $\gamma\cap S_2$ на площадке S_2.

Фиксируем точку $x\in S_1$; пусть $\chi(x)=x_1\in S_2$, $T_1(x)=x_2\in S_1$ и $\chi(x_2)=x_3\in S_2$.

Тогда $x_3=T_2(x_1)$; это означает, что

$$\chi(T_1(x)) = T_2(\chi(x))$$

для точек $x\in S_1$, близких к $\gamma\in S_1$. Поэтому $T_1(x)=\chi^{-1}(T_2(\chi(x)))$ и

$$DT_1(0) = G^{-1}DT_2(0)G, \tag{5.13}$$

где $G=D\chi(0)$.

Из соотношения (5.13) следует, что матрицы $DT_1(0)$ и $DT_2(0)$ сопряжены; поэтому их спектры одинаковы.

Применим к гиперболической неподвижной точке $0 \in S$ диффеоморфизма T результаты п. 4.3. Предположим, что для собственных чисел λ_j матрицы $DT(0)$ выполнены соотношения (4.2).

Из теорем 4.1 и 4.2 следует, что через точку $0 \in S$ проходят два гладких лежащих в S диска D^s и D^u со следующими свойствами:

— размерности дисков D^s и D^u равны m и $n-m$, соответственно;

— если $x \in D^s$, то $T^k(x) \in D^s$ при $k \geqslant 0$ и $T^k(x) \to 0,\ k \to \infty$;

— если $x \in D^u$, то $T^k(x) \in D^u$ при $k \leqslant 0$ и $T^k(x) \to 0,\ k \to -\infty$;

— существует такая окрестность U точки в S, что если

$$x \in U \setminus (D^s \cup D^u),$$

то траектория $T^k(x)$ покидает U как при возрастании, так и при убывании k.

Рассмотрим точку $x \in D^s$ и проведем через нее траекторию $\phi(t,x)$ системы (5.1). Из положительной инвариантности диска D^s относительно диффеоморфизма T следует, что сделав оборот около γ, траектория $\phi(t,x)$ попадает на диск D^s в точке $T(x)$.

Проведем такие траектории от точек $x \in D^s$ до следующего пересечения с площадкой S; при этом возникает $(m+1)$-мерное многообразие $W_l^s(\gamma)$. Назовем это многообразие *локальным устойчивым многообразием* замкнутой траектории γ. Очевидно, многообразие $W_l^s(\gamma)$ положительно инвариантно относительно потока ϕ, т. е. $\phi(t,x) \in W_l^s(\gamma)$ при $x \in W_l^s(\gamma)$ и $t \geqslant 0$.

Аналогично (проводя через точки диска D^u траектории в сторону убывания t), мы построим $(n-m+1)$-мерное *локальное неустойчивое многообразие* $W_l^u(\gamma)$ замкнутой траектории γ; это многообразие отрицательно инвариантно относительно потока ϕ.

Мы определяем *устойчивое многообразие* замкнутой траектории γ равенством

$$W^s(\gamma) = \{x\ :\ \phi(t,x) \to \gamma,\ t \to \infty\}$$

и *неустойчивое многообразие* замкнутой траектории γ равенством

$$W^u(\gamma) = \{x\ :\ \phi(t,x) \to \gamma,\ t \to -\infty\}.$$

В этих определениях соотношение $\phi(t,x) \to \gamma$ означает, что

$$\operatorname{dist}(\phi(t,x),\gamma) \to 0.$$

Так же, как в лемме 4.3, показывается, что множества $W^s(\gamma)$ и $W^u(\gamma)$ инвариантны относительно потока ϕ.

Покажем, что включение $x \in W^s(\gamma)$ (включение $x \in W^u(\gamma)$) равносильно непустоте пересечения $\phi(t,x) \cap W_l^s(\gamma)$ (соответственно, непустоте пересечения $\phi(t,x) \cap W_l^u(\gamma)$). Мы ограничимся рассмотрением $W^s(\gamma)$; для $W^u(\gamma)$ рассуждения аналогичны.

Если $\phi(t,x) \cap W_l^s(\gamma)$, то существует такое τ, что $\phi(\tau,x) \cap W_l^s(\gamma)$. Из построения $W_l^s(\gamma)$ следует, что точка $\phi(\tau,x)$ принадлежит одному из отрезков траекторий с началом и концом в точках диска D^s. Таким образом, существует такое число θ, что $y\colon = \phi(\theta,x) \in D^s$.

Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$. По теореме об интегральной непрерывности существует такое $\delta > 0$, что если $|z| < \delta$, то

$$|\phi(t,z) - \psi(t)| < \epsilon, \quad t \in [0, 2\omega] \tag{5.14}$$

(напомним, что ω — период решения ψ и координаты выбраны так, что $\psi(0) = 0$).

Из доказательства теоремы 1.1 следует, что если $z \in D^s$, то $T(z) = \phi(t(z),z) \cap S$, где $t(z) \to \omega$ при $z \to 0$.

Так как $T^k(y) \to 0$ при $k \to \infty$, существует такое m, что $|T^k(y)| < \delta$ и $0 < t(T^k(y)) < 2\omega$ при $k \geqslant m$.

Если $z = T^k(y), k \geqslant m$, то из соотношения (5.14) вытекает, что

$$T(z) = \phi(t(z),z) \cap S \subset D^s$$

и

$$\operatorname{dist}(\phi(t,z),\gamma) \leqslant |\phi(t,z) - \psi(t)| < \epsilon, \quad t \in [0, t(z)].$$

Поэтому

$$\operatorname{dist}(\phi(t,z),\gamma) < \epsilon, \quad t \geqslant 0.$$

Из произвольности ϵ следует, что

$$\operatorname{dist}(\phi(t,y),\gamma) \to 0, \quad t \to \infty. \tag{5.15}$$

Так как $y = \phi(\theta,x)$, из соотношения (5.15) следует, что

$$\operatorname{dist}(\phi(t,x),\gamma) \to 0, \quad t \to \infty. \tag{5.16}$$

Пусть теперь $x \in W^s(\gamma)$, т. е. выполнено соотношение (5.16).

По замечанию к теореме 1.1 у каждой точки $y \in \gamma$ существует такая окрестность U_y, что если $z \in U_y$, то положительная полутраектория точки z пересекает площадку S в точке, принадлежащей области определения диффеоморфизма Пуанкаре T. Пусть

$$U = \bigcup_{y \in \gamma} U_y.$$

Существует такое τ, что

$$\phi(t,x) \in U, \quad t \geqslant \tau.$$

Рассмотрим точку $y = \phi(\tau, x)$. Из выбора τ следует, что положительная полутраектория точки y последовательно пересекает площадку S в точках $z_1, z_2, \ldots$, связанных соотношениями $z_{k+1} = T(z_k)$. Из свойств площадки S следует, что $z_1 \in D^s$. Ясно, что

$$z_1 \in \phi(t,x) \cap W_l^s(\gamma).$$

При построении устойчивых и неустойчивых многообразий замкнутой траектории может возникнуть следующее явление. Поясним его на простом примере. Пусть система (5.1) задана в R^3 и пусть (x,y,z) — координаты в R^3. Предположим, что плоскость $S = \{x = 0\}$ является трансверсальной площадкой для замкнутой траектории γ и соответствующий локальный диффеоморфизм Пуанкаре имеет вид

$$(y,z) \mapsto \left(\frac{-y}{2}, -2z\right).$$

Ясно, что в этом случае (при соответствующем выборе окрестности U) диск D^s является сегментом оси $\{x = z = 0\}$. Выберем маленький отрезок этой оси, начинаюшийся в начале координат, и зададим на нем направление. Ясно, что при сдвиге вдоль потока ϕ (до следующего пересечения с площадкой S) образ выбранного отрезка будем отрезком той же оси, но с противоположным направлением. Таким образом, возникающее локальное устойчивое многообразие $W_l^s(\gamma)$ замкнутой траектории γ – это лист Мебиуса со срединной окружностью γ.

Используя те же идеи, что были применены в п. 4.3, можно показать, что многообразия $W^s(\gamma)$ и $W^u(\gamma)$ являются образами при топологических погружениях либо цилиндров $R^m \times S^1$ и $R^{n-m} \times S^1$ либо неориентируемых расслоений над S^1 со слоями R^m и R^{n-m}.

6. Трансверсальность

6.1. Трансверсальность отображений и подмногообразий

Пусть K, M– гладкие многообразия, L — подмногообразие многообразия M, f — гладкое отображение K в M.

Говорят, что отображение f в точке $x \in K$ *трансверсально* к L, если либо $f(x) \notin L$, либо

$$Df(x)T_xK + T_{f(x)}L = T_{f(x)}M. \tag{6.1}$$

Левая часть формулы (6.1) — сумма двух линейных подпространств пространства $T_{f(x)}M$: образа T_xK под действием дифференциала отображения f в точке x и касательного пространства $T_{f(x)}L$.

Следует помнить, что, вообще говоря,

$$Df(x)T_xK \neq T_{f(x)}f(K)$$

(рассмотрите пример: $K = R$ с координатой t, $M = R^2$ с координатами (x,y), $f(t) = (0,t^3)$; в этом случае

$$Df(0)R \neq T_{(0,0)}f(K).$$

Говорят, что отображение f *трансверсально* к L, если f *трансверсально* к L в каждой точке $x \in K$.

Если K и L — два подмногообразия одного и того же многообразия M, говорят, что подмногообразие K *трансверсально* к L в точке $x_0 \in K$, если отображение Id, сопоставляющее каждой точке $x \in K$ ту же точку $x \in M$, трансверсально к L в точке x_0.

Иными словами, K трансверсально к L в точке $x_0 \in K \cap L$, если

$$T_{x_0}K + T_{x_0}L = T_{x_0}M, \tag{6.2}$$

т. е.

$$T_{x_0}M = \{a + b : \ a \in T_{x_0}K, b \in T_{x_0}L\}.$$

Говорят, что подмногообразия K и L *трансверсальны*, если упомянутое выше отображение Id трансверсально к L.

Условие (6.2) можно переформулировать следующим образом:

$$\dim K + \dim L - \dim(T_{x_0}K \cap T_{x_0}L) = \dim M. \tag{6.3}$$

Это утверждение вытекает из простой алгебраической леммы.

Лемма 6.1. *Если X_1 и X_2 — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства X, то*

$$\dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \cap X_2) = \dim(X_1 + X_2). \tag{6.4}$$

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $A\colon X_1 \times X_2 \to X$, заданный формулой

$$A(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Пусть R и K - образ и ядро оператора A, соответственно.

Очевидно,

$$K = \{(x, -x) : \ x \in X_1 \cap X_2\}.$$

Поэтому $\dim K = \dim(X_1 \cap X_2)$.

Так как $R = X_1 + X_2$, равенство (6.4) следует из соотношения

$$\dim R + \dim K = \dim(X_1 \times X_2) = \dim X_1 + \dim X_2. \bullet$$

Равенство (6.3) следует из равенства (6.4), в котором $X_1 = T_{x_0}K$ (в этом случае $\dim X_1 = \dim K$) и $X_2 = T_{x_0}L$ (в этом случае $\dim X_2 = \dim L$) так как $X_1 + X_2 = T_{x_0}M$ в силу (6.2).

Отметим одно простое, но очень важное для дальнейшего утверждение.

Лемма 6.2. *Если K и L — два подмногообразия многообразия M, f — диффеоморфизм M и x_0 — точка трансверсального пересечения K и L, то $f(x_0)$ – точка трансверсального пересечения $f(K)$ и $f(L)$.*

Доказательство. Так как выполнено равенство (6.2), существует базис пространства $T_{x_0}M$, каждый вектор которого лежит либо в $T_{x_0}K$ либо в $T_{x_0}K$. Так как f — диффеоморфизм, дифференциал $Df(x_0)$ является невырожденным линейным отображением пространства $T_{x_0}M$ в пространство $T_{f(x_0)}M$. Поэтому $Df(x_0)$ переводит упомянутый выше базис в базис пространства $T_{f(x_0)}M$, каждый вектор которого лежит либо в $T_{f(x_0)}K$ либо в $T_{f(x_0)}L$. $\bullet$

Следствие. *Если K и L — два подмногообразия многообразия M, ϕ — поток на многообразии M, порожденный гладким векторным полем, x_0 — точка трансверсального пересечения K и L и $T \neq 0$, то $\phi(T, x_0)$ – точка трансверсального пересечения $\phi(T, K)$ и $\phi(T, L)$.*

Доказательство. Как показано в п. 1.2, $\phi(T, \cdot)$– диффеоморфизм многообразия M. $\bullet$

Еще одно важное утверждение мы приведем без доказательства (читатель может найти доказательство в [РФ1977]).

Пусть K и L — два гладких диска в многообразии M с римановой метрикой dist. Предположим, что диски K и L являются образами дисков $D_1 \in R^k$ и $D_2 \in R^l$ при гладких вложениях h_1 и h_2.

Лемма 6.3. *Пусть x_0 — точка трансверсального пересечения дисков K и L. По любому $\epsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что если H_1, H_2 — вложения дисков D_1 и D_2 в M, удовлетворяющие неравенствам*

$$\rho_1(h_i, H_i) < \delta, \quad i = 1, 2,$$

то диски $H_1(D_1)$ и $H_2(D_2)$ содержат такую точку трансверсального пересечения x, что

$$\operatorname{dist}(x, x_0) < \epsilon.$$

6.2. Условие трансверсальности

Пусть p и q — две гиперболические неподвижные точки диффеоморфизма f многообразия M (мы не исключаем случай равенства $p = q$). Предположим, что x — точка пересечения неустойчивого многообразия $W^u(p)$ и устойчивого многообразия $W^s(q)$.

Выше было отмечено, что неустойчивое многообразие $W^u(p)$ и устойчивое многообразие $W^s(q)$ не обязательно являются подмногообразиями многообразия M. В то же время из теоремы 4.2 (примененной как к f, так и к f^{-1}) следует, что существуют такие окрестности U и V точек p и q, что локальное неустойчивое многообразие $W^u_U(p)$ и локальное устойчивое многообразие $W^s_V(q)$ являются гладкими дисками.

Предположим вначале, что $x \neq p$ и $x \neq q$. Из леммы 4.3 вытекает, что существуют такие индексы m и n, что $y = f^m(x) \in W^u_U(p)$ и $z = f^n(x) \in W^s_V(q)$. Фиксируем такие гладкие диски $K \subset W^u_U(p)$ и $L \subset W^s_V(q)$, что $y \in K$, $z \in L$, $\dim K = \dim W^u(p)$ и $\dim L = \dim W^s(q)$.

Будем говорить, что неустойчивое многообразие $W^u(p)$ и устойчивое многообразие $W^s(q)$ *трансверсальны* в точке x, если x — точка трансверсального пересечения дисков $f^{-m}(K)$ и $f^{-n}(L)$.

Из леммы 6.2 следует, что определенное выше свойство трансверсальности $W^u(p)$ и $W^s(q)$ в точке x не зависит от выбора индексов m и n, а также дисков K и L; к тому же, $W^u(p)$ и $W^s(q)$ трансверсальны в точке x тогда и только тогда, когда $W^u(p)$ и $W^s(q)$ трансверсальны в точке $f^l(x)$ при некотором (и при любом) $l \in Z$.

Если же $x = p$ (тогда и $x = q$), гладкие диски $W^u_U(p)$ и $W^s_U(p)$ трансверсальны в точке p (их касательные пространства в p суть дополнительные линейные подпространства T_pM); в этом случае естественно считать точку p точкой, в которой $W^u(p)$ и $W^s(p)$ трансверсальны.

Аналогичным образом определяется трансверсальность устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических периодических точек диффеоморфизма (напомним, что устойчивым многообразием периодической точки p периода m мы называем устойчивое многообразие неподвижной точки p диффеоморфизма f^m), а также устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических точек покоя и замкнутых траекторий гладких потоков, порождаемых системами дифференциальных уравнений.

Отметим одно простое следствие из условия трансверсальности.

Лемма 6.3. (1) *Если p и q — такие гиперболические периодические точки диффеоморфизма, что $W^u(p)$ и $W^s(q)$ имеют точку трансверсального пересечения, то*

$$\dim W^u(p) \geqslant \dim W^u(q). \tag{6.5}$$

(2) *Если p и q — такие гиперболические точки покоя или замкнутые траектории гладкого потока, что $W^u(p)$ и $W^s(q)$ имеют точку трансверсального пересечения, не являющуюся точкой покоя, то выполнено неравенство* (6.5), *при этом равенство в* (6.5) *возможно лишь если q — замкнутая траектория.*

Доказательство. (1) Если $\dim M = n$ и q — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма, у которой $\dim W^s(q) = m$, то $\dim W^u(q) = n - m$.

Пусть x_0 — точка трансверсального пересечения $W^u(p)$ и $W^s(q)$. Из соотношения (6.3) с $K = W^u(p)$ и $L = W^s(q)$ следует, что

$$\dim W^u(p) = n - \dim W^s(q) - \dim(T_{x_0}W^u(p) \cap T_{x_0}W^s(q)) =$$
$$= n - m - \dim(T_{x_0}W^u(p) \cap T_{x_0}W^s(q)) \geqslant n - m = \dim W^u(q).$$

(2) Пусть x_0 — точка трансверсального пересечения $W^u(p)$ и $W^s(q)$, не являющаяся точкой покоя. Так как многообразия $W^u(p)$ и $W^s(q)$ инвариантны относительно потока ϕ, траектория $\phi(t, x_0)$ принадлежит каждому из этих многообразий. Поэтому касательный вектор $F(x_0)$ к этой траектории в точке x_0 принадлежит пересечению $T_{x_0}W^u(p) \cap T_{x_0}W^s(q)$. Следовательно,

$$\dim(T_{x_0}W^u(p) \cap T_{x_0}W^s(q)) \geqslant 1.$$

Так же, как и выше, мы получаем неравенство

$$\dim W^u(p) \geqslant \dim M - \dim W^s(q) - 1.$$

Для завершения доказательства заметим, что если q — точка покоя, то

$$\dim W^s(q) + \dim W^u(q) = \dim M$$

и если q — замкнутая траектория, то

$$\dim W^s(q) + \dim W^u(q) = \dim M + 1. \quad \bullet$$

Из утверждения (2) леммы 6.3 следует, что если p — гиперболическая точка покоя гладкого потока, то многообразия $W^u(p)$ и $W^s(p)$ не могут иметь точек трансверсального пересечения, отличных от p.

В то же время условие трансверсальности не запрещает наличие точек трансверсального пересечения многообразий $W^u(p)$ и $W^s(p)$, отличных от p (для гиперболической неподвижной точки p диффеоморфизма) или не лежащих на p (для гиперболической замкнутой траектории p гладкого потока).

Следуя Пуанкаре, такие точки называют *двоякоасимптотическими* к p или *гомоклиническими*. Поведение траекторий в окрестности траектории гомоклинической точки весьма сложно (см. п. 9.3).

Определим важный класс динамических систем.

Диффеоморфизм f гладкого замкнутого многообразия M называется *диффеоморфизмом Купки–Смейла*, если все периодические точки f гиперболические, а их устойчивые и неустойчивые многообразия трансверсальны в любой точке пересечения.

И.Купка и С.Смейл независимо доказали следующее утверждение (см. также [Пи1988]).

Теорема 6.1. *Множество* KS *диффеоморфизмов Купки-Смейла является множеством* II *категории в* $\mathrm{Diff}^1(M)$.

Аналогично определяются потоки Купки–Смейла, порождаемые гладкими векторными полями: поток ϕ называется *потоком Купки–Смейла*, если все точки покоя и замкнутые траектории потока ϕ гиперболические, а их устойчивые и неустойчивые многообразия трансверсальны в любой точке пересечения.

В случае потоков справедливо утверждение, аналогичное теореме 6.1.

6.3. Лемма Палиса

Мы докажем важное утверждение, связанное с условием трансверсальности (это утверждение, называемое обычно λ-леммой, было доказано Ж. Палисом).

Пусть p — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма f (так как доказываемое утверждение локально, мы не различаем случаи диффеоморфизмов евклидова пространства и гладкого замкнутого многообразия). Предположим для определенности, что p — начало координат в R^n и что в окрестности U точки $x = 0$ диффеоморфизм f представлен в виде (**??**), где матрица Якоби A диффеоморфизма f в нуле имеет вид, описанный в лемме 4.1, а нелинейность F обращается в нуле в нуль вместе со своей матрицей Якоби.

Мы используем представление $x = (y, z)$, отвечающее представлению матрицы A в блочно-диагональном виде, и соответствующие координатные подпространства $\mathcal{S}$ и $\mathcal{U}$.

Фиксируем такое $\Delta > 0$, что локальное устойчивое многообразие $W^s_V(0)$ неподвижной точки $x=0$ в окрестности $V=\{|x| < \Delta\}$ имеет структуру, описанную в теореме 4.2. Пусть γ — отображение, задающее $W^s_V(0)$.

Будем считать, что локальное неустойчивое многообразие $W^u_V(0)$ задается отображением

$$\alpha : \{|z| < \Delta\} \to \mathcal{S},$$

обладающее свойствами

$$\alpha(0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z}(0) = 0$$

(существование такого отображения следует из теоремы 4.2, примененной к диффеоморфизму f^{-1}).

Лемма 6.4 (λ-лемма). *Пусть N — гладкий диск, имеющий точку трансверсального пересечения с $W^s_V(0)$. Существует гладкий диск $Q \subset W^u_V(0)$, содержащий неподвижную точку $x = 0$ (пусть диск Q задается гладким вложением h диска $D \subset R^{n-m}$ в R^n) и обладающий следующим свойством: по любому $\epsilon > 0$ можно указать такое $m(\epsilon)$, что для $m = m(\epsilon)$ существует вложение h_m диска D в R^n с $h_m(Q) \subset f^m(N)$ и $\rho_1(h, h_m) < \epsilon$.*

Доказательство. Для доказательства леммы 6.4 мы сделаем замену координат, при которой локальные устойчивое и неустойчивое многообразия превращаются в диски, лежащие в координатных подпространствах $\mathcal{S}$ и $\mathcal{U}$.

Так как утверждение о существовании такой замены координат представляет самостоятельный интерес, мы сформулируем его в виде отдельной леммы.

Лемма 6.5. *Существуют окрестности $V_1 \subset V$ и V_2 начала координат в R^n и диффеоморфизм H окрестности V_1 на V_2, отображающий $W^s_{V_1}(0)$ и $W^u_{V_1}(0)$ на диски, лежащие в координатных подпространствах $\mathcal{S}$ и $\mathcal{U}$.*

Доказательство леммы 6.5. Рассмотрим отображение

$$H : V \to R^n,$$

задаваемое равенствами

$$\xi = y - \alpha(z), \quad \eta = z - \gamma(y) \tag{6.6}$$

(здесь ξ и η — координаты в $\mathcal{S}$ и $\mathcal{U}$).

Из свойств отображений α и γ следует, что

$$H(0) = 0 \quad \text{и} \quad DH(0) = \mathrm{Id}.$$

По теореме об обратном отображении существуют такие окрестности $V_1 \subset V$ и V_2 начала координат в R^n, что H — диффеоморфизм V_1 на V_2 и множества $W^s_{V_1}(0)$ и $W^u_{V_1}(0)$ являются гладкими дисками.

Из равенств (6.6) следует, что диффеоморфизм H отображает $W^s_{V_1}(0)$ и $W^u_{V_1}(0)$ на диски, лежащие в координатных подпространствах $\mathcal{S}$ и $\mathcal{U}$. •

Пусть r — точка трансверсального пересечения гладкого диска N с $W^s_V(0)$. Так как $f^k(r) \to 0$ при $k \to \infty$, существует такой индекс k_0, что $r_0 = f^{k_0}(r) \in V_1$. Из леммы 6.2 следует, что диск $f^{k_0}(N)$ трансверсален к $W^s_{V_1}(0)$ в точке r_0. Ясно, что диск $f^{k_0}(N)$ содержит меньший диск N_0, лежащий в V_1, содержащий точку r_0 и трансверсальный к $W^s_{V_1}(0)$ в этой точке.

То же рассуждение, что при доказательстве леммы 6.2, показывает, что диск $N' = H(N_0)$ трансверсален к $\mathcal{S}$ в точке $\pi_0 = h(r_0)$.

Уменьшая окрестность V_1, мы можем считать, что диффеоморфизм H определен на $f(V_1)$. Рассмотрим отображение

$$g = H \circ f \circ H^{-1};$$

ясно, что g — диффеоморфизм V_2 на $H(f(V_1))$.

Из равенств $DH(0) = E$ и $DH^{-1}(0) = E$ следует, что

$$Dg(0) = DH(0)Df(0)DH^{-1}(0) = Df(0). \quad (6.7)$$

Поэтому $x = 0$ — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма g.

Мы сведем доказательство леммы 6.4 к следующему вспомогательному утверждению.

Лемма 6.6. *Существует число $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: по любому $\epsilon > 0$ можно указать такое $m(\epsilon)$, что для $m = m(\epsilon)$ существует набор таких гладких дисков $\nu_0, \ldots, \nu_m$, что*

$$\pi_0 \in \nu_0 \subset N', \quad \pi_k \colon = g^k(\pi_0) \in \nu_k \subset g(\nu_{k-1}) \cap V_2, \quad 1 \leqslant k \leqslant m-1, \quad (6.8)$$

и диск ν_m содержит гладкий диск μ_m, задаваемый уравнением

$$y = \beta(z), \quad |z| < \delta,$$

где

$$|\beta(z)| < \epsilon \quad \text{и} \quad \left\| \frac{\partial \beta}{\partial z} \right\| < \epsilon \quad (6.9)$$

при $|z| < \delta$.

Покажем, как лемма 6.4 выводится из леммы 6.6. Рассмотрим гладкие диски $N_k = H^{-1}(\nu_k), 1 \leqslant k \leqslant m$. Из соотношений (6.8) следует, что

$$H^{-1} \circ g|_{\nu_k} = f \circ H^{-1}|_{\nu_k},$$

поэтому

$$N_{k+1} = H^{-1}(\nu_{k+1}) \subset H^{-1} \circ g(\nu_k) = f \circ H^{-1}(\nu_k) = f(N_k). \quad (6.10)$$

Обозначим через D диск $\{y = 0, |z| < \delta\}$ (шар в пространстве $\mathcal{U}$). Положим $Q = H^{-1}(D)$. Диск Q является образом D при вложении H^{-1}, диск N_m является образом D при вложении $H^{-1} \circ b$, где $b \colon (0, z) \to (\beta(z), z)$.

Из соотношений (6.10) вытекает, что $N_m \subset f^m(N_0) \subset f^{m+k_0}(N)$. Так как H^{-1} — диффеоморфизм и мы можем добиться выполнения неравенств (6.9) со сколь угодно малым ϵ, величина $\rho_1(H^{-1}, H^{-1} \circ b)$ может быть сделана сколь угодно малой. Таким образом, выполнено утверждение леммы 6.4.

Докажем теперь лемму 6.6. Будем рассматривать диффеоморфизм g в малой окрестности V начала координат (мы будем несколько раз уменьшать окрестность V, добиваясь выполнения свойств, нужных нам для доказательства леммы 6.6). Из равенства (6.7) следует, что

$$g(x) = Ax + G(x).$$

Пусть, как и раньше, $A = \operatorname{diag}(B, C)$, а g_1 и g_2 — компоненты нелинейности G (в соответствии с представлением $x = (y, z)$). Если $x \in \mathcal{S}$, то $x = (y, 0)$ и $g(x) \in \mathcal{S}$. Из равенства

$$g(y, 0) = (By + g_1(y, 0), g_2(y, 0))$$

следует, что $g_2(y, 0) = 0$. Поэтому

$$g_2(y, 0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_2}{\partial y}(y, 0) = 0, \quad (y, 0) \in V. \quad (6.11)$$

Аналогично показывается, что если окрестность V достаточно мала, то

$$g_1(0, z) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_1}{\partial z}(0, z) = 0, \quad (0, z) \in V. \quad (6.12)$$

Пусть

$$a_0 = \|B\| < 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{b_0} = \|C^{-1}\| < 1, \quad (6.13)$$

где операторные нормы индуцированы евклидовой нормой векторов (в этом доказательстве для нас удобнее использовать евклидову норму). Существование координат, в которых выполнены оценки (6.13), доказывается аналогично лемме 4.1.

Выберем такое число $k > 0$, чтобы выполнялись неравенства

$$a = a_0 + k < 1, \quad b = b_0 - k > 1, \quad k < \frac{(b-1)^2}{8}. \quad (6.14)$$

Из соотношений (6.11) и (6.12) следует, что окрестность V можно выбрать столь малой, чтобы в V выполнялись неравенства

$$\left\| \frac{\partial g_i}{\partial (y, z)}(y, z) \right\| < k, \quad i = 1, 2. \quad (6.15)$$

Как и выше, фиксируем диск N_0, лежащий в пересечении $f^{k_0}(N) \cap V'$ (где $V' = H^{-1}(V)$), содержащий точку r_0 и трансверсальный к $W^s_{V'}(0)$ в этой точке.

Пусть $\dim \mathcal{S} = m$. Геометрически очевидно, что диск $N' = H(N_0)$ содержит $(n-m)$-мерный диск ν_0, содержащий точку $\pi_0 = H(r_0)$ и трансверсальный к $\mathcal{S}$ в этой точке.

Рассмотрим касательный вектор v_0 к ν_0 в точке π_0 с $|v|_e = 1$. В соответствии с представлением $x = (y, z)$ запишем $v = (v^s, v^u)$. Так как диск ν_0 трансверсален к $\mathcal{S}$ в точке π_0, из формулы (6.3) следует, что $v^u \neq 0$.

Определим наклон вектора v к подпространству $\mathcal{S}$ формулой

$$\lambda = \frac{|v^s|_e}{|v^u|_e}$$

(основным содержанием дальнейшего доказательства является оценка наклонов образов вектора v под действием дифференциалов $Dg^k(\pi_0)$; этим и объясняется термин «λ-лемма»).

Из компактности единичной сферы в $T_{\pi_0}\nu_0$ следует, что существует такое число $L > 0$, что для наклона любого вектора $v \in T_{\pi_0}\nu_0$ выполнено неравенство $\lambda \leqslant L$.

Запишем

$$Dg(\pi_0) = \begin{pmatrix} B + \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(\pi_0) & \dfrac{\partial g_1}{\partial z}(\pi_0) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(\pi_0) & C + \dfrac{\partial g_2}{\partial z}(\pi_0) \end{pmatrix}.$$

Так как $\pi_0 \in \mathcal{S}$, из соотношений (6.11) следует, что

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(\pi_0) = 0.$$

Если $v_1 = Dg(\pi_0)v = (v_1^s, v_1^u)$, то

$$v_1^s = \left(B + \frac{\partial g_1}{\partial y}(\pi_0)\right) v^s + \frac{\partial g_1}{\partial z}(\pi_0) v^u \quad \text{и} \quad v_1^u = \left(C + \frac{\partial g_2}{\partial z}(\pi_0)\right) v^u. \tag{6.16}$$

Из неравенств (6.15) и (6.13) следует, что

$$|v_1^s|_e \leqslant (a_0 + k)|v^s|_e + k|v^u|_e = a|v^s|_e + k|v^u|_e. \tag{6.17}$$

Применим ко второму равенству в (6.16) оператор C^{-1}:

$$v^u + C^{-1}\frac{\partial g_2}{\partial z}(\pi_0) = C^{-1}v_1^u.$$

Отсюда вытекают оценки

$$\frac{1}{b_0}|v^u|_e \geqslant \|C^{-1}\||v_1^u|_e \geqslant |v^u|_e - \left|C^{-1}\frac{\partial g_2}{\partial z}(\pi_0)v^u\right| \geqslant |v^u|_e - \frac{k}{b_0}|v^u|_e$$

и

$$|v_1^u|_e \geqslant (b_0 - k)|v^u|_e = b|v^u|_e. \tag{6.18}$$

Оценим наклон λ_1 вектора v_1 через наклон λ_0 вектора v, используя неравенства (6.17) и (6.18):

$$\lambda_1 = \frac{|v_1^s|_e}{|v_1^u|_e} \leqslant \frac{a|v^s|_e + k|v^u|_e}{b|v^u|_e} \leqslant \frac{a}{b}\lambda_0 + \frac{k}{b}. \tag{6.19}$$

Обозначая через $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ наклоны векторов $v_2 = Dg^2(\pi_0)v, \ldots, v_m = Dg^m(\pi_0)v$ и итерируя оценку (6.19), мы получаем следующую цепь неравенств:

$$\lambda_2 \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^2 \lambda_0 + \frac{k}{b^2} + \frac{k}{b}, \quad \ldots \quad ,$$

$$\lambda_m \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^m \lambda_0 + \frac{k}{b^m} + \ldots + \frac{k}{b} \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^m \lambda_0 + \frac{k}{b-1}. \tag{6.20}$$

Найдем такое m_1, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m L < \frac{b-1}{8}.$$

Из соотношений (6.14) и (6.20) следует, что если $m \geqslant m_1$, то

$$\lambda_m \leqslant \frac{b-1}{4}, \tag{6.21}$$

где λ_m — наклон вектора $Dg^m(\pi_0)v$ для любого вектора $v \in T_{\pi_0}\nu_0$.

Построим диски $\nu_1, \ldots, \nu_{m_1}$, выбирая последовательно при $k = 0, \ldots, m_1 - 1$ маленький диск ν_{k+1}, лежащий в $g(\nu_k) \cap V$ и содержащий точку π_{k+1}.

Так как ν_{m_1} — гладкий диск, содержащий точку π_{m_1}, и выполнены неравенства (6.21), мы можем выбрать в ν_{m_1} меньший диск (обозначаемый опять ν_{m_1}) содержащий точку π_{m_1}, трансверсальный к $\mathcal{S}$ в этой точке и такой, что наклон λ любого единичного вектора $v \in T_x\nu_{m_1}$ для любой точки ν_{m_1} удовлетворяет неравенству

$$\lambda < \frac{b-1}{2}. \tag{6.22}$$

(Отметим, что теперь мы начинаем рассматривать наклоны касательных векторов к дискам не только в точках пересечения дисков с подпространством $\mathcal{S}$.)

Положим
$$b_1 = \frac{b+1}{2}.$$
Выберем такое число $\delta > 0$, что если $D = \{(0,z)\colon |z| < \delta\}$, то диск $\mathrm{Cl}\,D$ лежит в окрестности V. Из соотношений (6.12) следует, что
$$\frac{\partial g_1}{\partial z} = 0$$
в точках диска D.

Пусть $\epsilon > 0$ — произвольное число; будем считать, что ϵ столь мало, что выполнены неравенства
$$b_2\colon = \frac{b_1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} > 1 \tag{6.23}$$
и
$$\left(\frac{a}{b_1}\right)\left(\frac{b-1}{2}\right) + \frac{\epsilon(b_1-1)}{2b_1} < \frac{b-1}{2} \tag{6.24}$$
(мы учитываем, что $a < b_1$).

Выберем окрестность $V_0 \subset V$ диска D, в которой выполняется неравенство
$$\left\|\frac{\partial g_1}{\partial z}\right\| < k_1\colon = \frac{\epsilon(b_1-1)}{2}. \tag{6.25}$$
Не ограничивая общности, мы можем считать, что выбранное выше число m_1 столь велико, что $\pi_{m_1} \in V_0$.

Уменьшим еще раз диск ν_{m_1} и выберем в нем меньший диск (обозначаемый опять ν_{m_1}), лежащий в V_0, содержащий точку π_{m_1} и трансверсальный к $\mathcal{S}$ в этой точке.

Рассмотрим произвольную точку $x \in \nu_{m_1}$; пусть v — единичный касательный вектор в $T_x\nu_{m_1}$. Представим v в виде (v^s, v^u) и обозначим через λ наклон вектора v.

Оценим число λ_1, наклон вектора $v_1 = (v_1^s, v_1^u) = Dg(x)v$. Из равенств
$$v_1^s = \left(B + \frac{\partial g_1}{\partial y}(x)\right)v^s + \frac{\partial g_1}{\partial z}(x)v^u$$
и
$$v_1^u = \frac{\partial g_2}{\partial y}(x)v^s + \left(C + \frac{\partial g_2}{\partial z}(x)\right)v^u$$

и из оценок (6.14), (6.15) и (6.25) следует (как и выше, мы умножаем второе равенство на C^{-1} слева), что
$$|v_1^s|_e \leqslant a|v^s|_e + k_1|v^u|_e,$$
$$\frac{1}{b_0}|v^u|_e \geqslant \|C^{-1}\||v_1^u|_e \geqslant \left(1 - \frac{k}{b_0}\right)|v^u|_e - \frac{k}{b_0}|v^s|_e$$
и
$$|v^u|_e \geqslant b|v^u|_e - k|v^s|_e, \tag{6.26}$$
поэтому
$$\lambda_1 \leqslant \frac{a|v^s|_e + k_1|v^u|_e}{b|v^u|_e - k|v^s|_e} = \frac{a\lambda + k_1}{b - k\lambda}.$$
Так как $0 < k < 1$, из неравенства (6.22) следует, что
$$b - k\lambda > b - \frac{b-1}{2} = b_1. \tag{6.27}$$
Учитывая неравенство (6.24) и определение числа k_1, мы приходим к неравенствам
$$\lambda_1 \leqslant \frac{a}{b_1}\lambda + \frac{k_1}{b_1} < \frac{b-1}{2}.$$
Предположим, что для точки $x \in \nu_{m_1}$ выполнены включения $g(x), \ldots, g^{m-1}(x) \in V_0$.

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — наклоны векторов $v_1 = Dg(x)v, \ldots, v_m = Dg^m(x)v$, то, итерируя проведенную выше оценку, мы приходим к неравенству
$$\lambda_m \leqslant \left(\frac{a}{b_1}\right)^m \lambda + \frac{k_1}{b_1^m} + \ldots + \frac{k_1}{b_1} \leqslant \left(\frac{a}{b_1}\right)^m \lambda + \frac{k_1}{b_1 - 1}. \tag{6.28}$$
Из неравенств (6.25) и (6.28) следует, что существует такое m_2, что $\lambda_m < \epsilon$ при $m \geqslant m_2$.

Если $m \geqslant m_2$, $g^m(x) \in V_0$ и $v_{m+1} = Dg(g^m(x))v_m$, то
$$\frac{|v_{m+1}|_e}{|v_m|_e} = \frac{\sqrt{(v_{m+1}^s)^2 + (v_{m+1}^u)^2}}{\sqrt{(v_m^s)^2 + (v_m^u)^2}} = \frac{|v_{m+1}^u|_e}{|v_m^u|_e}\frac{\sqrt{1+\lambda_{m+1}^2}}{\sqrt{1+\lambda_m^2}}. \tag{6.29}$$
Из (6.26) и (6.28) вытекает, что
$$|v_{m+1}^u|_e \geqslant b_1|v_m^u|_e.$$

Кроме того,

$$\frac{\sqrt{1+\lambda_{m+1}^2}}{\sqrt{1+\lambda_m^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_m^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}.$$

Поэтому из равенств (6.29) следует оценка

$$|v_{m+1}|_e \geqslant b_2 |v_m|_e.$$

Таким образом, если последовательно строить диски ν_{m_1+k+1}, лежащие в пересечениях образов $g(\nu_{m_1+k})$ с окрестностью V_0, то при $k \geqslant m_2$ эти диски будут равномерно растягиваться под действием диффеоморфизма g, а наклон их касательных пространств к подпространству $\mathcal{U}$ будет равномерно мал (малость наклона контролируется числом ϵ). Поэтому при достаточно больших m определены отображения

$$\beta_m \colon D \to \nu_m,$$

порождаемые проектированием на $\mathcal{U}$ параллельно $\mathcal{S}$.

Из теоремы Гробмана–Хартмана следует, что если окрестность V_0 достаточно мала, то диффеоморфизм g в V_0 топологически сопряжен со сжатием вдоль $\mathcal{S}$. Поэтому

$$|\beta_m(x) - x| < \epsilon, \quad x \in D,$$

при достаточно больших m.

Из доказанного следует, что при достаточно большом m отображение $(0, z) \mapsto (\beta_m(z), z)$ будет вложением диска D, обладающим требуемыми в лемме 6.6 свойствами. •

Мы предлагаем читателю сформулировать аналог леммы 6.4 для случая потоков.

6.4. Трансверсальность и гиперболичность для одномерных отображений

Опишем одну из возможных связей между трансверсальностью и гиперболичностью, относящуюся к одномерным отображениям.

Пусть f — диффеоморфизм прямой R.

Рассмотрим связанное с f отображение графика $\mathrm{grf} : R \to R^2$:

$$\mathrm{grf}\,(x) = (x, f(x)).$$

Обозначим через Δ диагональ в R^2: $\Delta = \{(x,x) \colon x \in R\}$.

Ясно, что точка p является неподвижной точкой f тогда и только тогда $\mathrm{grf}\,(p) \in \Delta$.

Лемма 6.7. *Если p — гиперболическая неподвижная точка f, то отображение grf трансверсально к Δ в точке p.*

Доказательство. Ясно, что спектр одномерного линейного отображения $Df(p)$ совпадает со значением производной $f'(p)$. Из определения гиперболичности неподвижной точки p следует, что $|f'(p)| \neq 1$. Поэтому прямая

$$\{y = f'(p)x\} = Df(p)R$$

не совпадает с $T_{(p,p)}\Delta = \Delta$, что и означает трансверсальность отображения grf к Δ в точке p. •

Замечание. Как показывает пример диффеоморфизма $f(x) = -x$, обратное утверждение неверно.

Рассмотрим два множества диффеоморфизмов: обозначим через $\mathcal{F}_1$ множество диффеоморфизмов, у которых все периодические точки гиперболические, и через $\mathcal{F}_2$ множество диффеоморфизмов, для которых отображения $\mathrm{grf}^{\,m}$ трансверсальны к Δ при всех $m \geqslant 1$.

Лемма 6.8. $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Доказательство. Включение $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ следует из леммы 6.7, примененной к семейству диффеоморфизмов $\{f^m\}$. Для доказательства обратного включения предположим, что существует диффеоморфизм $f \in \mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_1$, обладающий негиперболической периодической точкой p.

Если m — период точки p, то выполнено равенство $|(f^m)'(p)| = 1$.

Если $(f^m)'(p) = 1$, то прямая

$$\{y = (f^m)'(p)x\} = Df(p)R$$

совпадает с $T_{(p,p)}\Delta = \Delta$, поэтому отображение $\mathrm{grf}^{\,m}$ нетрансверсально к Δ в точке p, что противоречит включению $f \in \mathcal{F}_2$.

Если же $(f^m)'(p) = -1$, то

$$\left(f^{2m}\right)'(p) = (f^m \circ f^m)'(p) = (f^m)'(f^m(p))\,(f^m)'(p) = 1,$$

поэтому отображение $\mathrm{grf}^{\,2m}$ нетрансверсально к Δ в точке p, что вновь противоречит включению $f \in \mathcal{F}_2$. •

7. Гиперболические множества

7.1. Определение гиперболического множества

В параграфах 4 и 5 мы определили и изучили гиперболические неподвижные и периодические точки диффеоморфизмов, а также гиперболические точки покоя и замкнутые траектории гладких потоков, порождаемых автономными системами дифференциальных уравнений.

Дадим общее определение гиперболического множества — основного объекта, изучаемого в теории структурной устойчивости.

Начнем рассмотрение со случая диффеоморфизма f гладкого замкнутого многообразия M.

Пусть dist — риманова метрика на M и пусть $|v|$ — индуцированная метрикой dist норма касательного вектора $v \in T_xM$.

Будем называть множество $I \subset M$ *гиперболическим множеством* диффеоморфизма f, если:

(ГМ1) множество I компактно и инвариантно относительно f;

(ГМ2) существуют числа $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$, обладающие следующим свойством: для любой точки $p \in I$ определены такие два подпространства $S(p)$ и $U(p)$ касательного пространства T_pM, что

(ГМ2.1) $S(p) + U(p) = T_pM$;

(ГМ2.2) $Df(p)S(p) = S(f(p)), \quad Df(p)U(p) = U(f(p))$;

(ГМ2.3) если $v \in S(p)$, то $|Df^{\,k}(p)v| \leqslant C\lambda^k|v|$ при $k \geqslant 0$;

(ГМ2.4) если $v \in U(p)$, то $|Df^{\,k}(p)v| \leqslant C\lambda^{-k}|v|$ при $k \leqslant 0$.

Числа $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$ называются *константами гиперболичности* множества I; семейства $S(p)$ и $U(p)$ называются *гиперболической структурой* на I.

Замечание. В определении гиперболического множества предполагается инвариантность гиперболической структуры относительно дифференциала диффеоморфизма f (свойство (ГМ2.2)).

Покажем, что условие (ГМ2.2) можно заменить на следующее: для любой точки $p \in I$ размерности пространств $S(f^{\,k}(p))$ и $U(f^{\,k}(p))$ одни и те же для всех $k \in Z$.

Предположим, что сформулированное условие выполнено и

$$Df^{\,\nu}S(p) \neq S(q)$$

для некоторых $p \in I$ и $q = f^{\,\nu}(p)$ (случай подпространств U рассматривается так же). Будем считать, что $\dim S(f^{\,k}(p)) = l$, $k \in Z$.

Так как Df – невырожденное линейное преобразование,

$$Q := Df^{\,-\nu}S(q) \neq S(p).$$

Для любого вектора $v \in Q$ выполнено включение

$$Df^{\,\nu}v \in S(q),$$

поэтому из условия (ГМ2.3) вытекают неравенства

$$|Df^{\,k}(p)v| \leqslant C\lambda^{k-\nu}|Df^{\,\nu}(p)v|, \quad k \geqslant \nu.$$

Поэтому существует такое $C_1 \geqslant C$, что

$$|Df^{\,k}(p)v| \leqslant C_1\lambda^k|v|, \quad k \geqslant \nu, \tag{7.1}$$

для всех $v \in Q$.

По нашему предположению, подпространства Q и $S(p)$ пространства T_pM имеют одну и ту же размерность l и не совпадают. Фиксируем вектор v_0 единичной длины, лежащий в Q и не лежащий в $S(p)$.

Обозначим через L одномерное подпространство, натянутое на v_0, и положим $P = L + S(p)$.

Угол между вектором v_0 и подпространством $S(p)$ ненулевой. Поэтому существует такое число $a > 0$, что если вектор $w \in P$, $|w| = 1$, представлен в виде

$$w = a_0v_0 + a_1v_1, \quad v_1 \in S(p),\ |v_1| = 1,$$

то $|a_i| \leqslant a$, $i = 0, 1$.

Из условия (ГМ2.3) и неравенств (7.1) следует, что найдется такое число $C_2 \geqslant C_1$, что если $w \in P$, то

$$|Df^{\,k}(p)w| \leqslant C_2\lambda^k|w|, \quad k \geqslant 0. \tag{7.2}$$

Выберем такое m, чтобы выполнялось неравенство $C_2\lambda^m < 1/2$.

Пусть $r = f^{\,m}(p)$. Из свойства (ГМ2.1) и из постоянства размерности $U(f^{\,k}(p))$ следует, что

$$\dim Df^{\,-m}U(r) = \dim U(p) \geqslant n - l.$$

Так как $\dim P = l + 1$, найдется вектор

$$w_0 \in Df^{-m}U(r) \cap P$$

единичной длины.

Для этого вектора выполнены соотношения

$$1 = |w_0| = |Df^{-m}(r)Df^{m}(p)w_0| \leqslant \frac{1}{2}|Df^{m}(p)w_0| \leqslant \frac{1}{4}|w_0| = \frac{1}{4}$$

(в первом неравенстве мы учитываем свойство (ГМ2.4) и неравенство $C\lambda^m < 1/2$, а во втором – неравенство (7.2)). Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

7.2. Примеры гиперболических множеств

Приведем два примера гиперболических множеств.

Пример 1. Гиперболическая неподвижная точка.

Простейшим примером гиперболического множества является рассмотренная выше гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма.

Пусть p – гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма f гладкого многообразия M. Проверим приведенное выше определение, используя координаты, введенные в лемме 4.1.

Пусть L – матрица, задающая отображение

$$Df(p) : T_pM \to T_pM.$$

Существует такая неособая матрица T, что матрица $A = T^{-1}LT$ обладает свойствами, описанными в лемме 4.1 (с естественной заменой R^n на T_pM).

Рассмотрим представление $x=(y,z)$, соответствующее блочно-диагональной структуре матрицы $A=\operatorname{diag}(A_+, A_-)$, в которой $\max(\|A_+\|, \|A_-\|)<1$.

Обозначим через S' и U' подпространства T_pM, задаваемые равенствами $z = 0$ и $y = 0$, соответственно.

Пусть $S = TS'$ и $U = TU'$ (мы отождествляем матрицу T и порождаемое ей неособое линейное преобразование T_pM).

Из очевидного равенства $S' \oplus U' = T_pM$ следует равенство $S \oplus U = T_pM$. Таким образом, выполнено свойство (ГМ2.1).

Проверим выполнение свойства (ГМ2.2). Рассмотрим вектор $v \in S$ и найдем такой вектор $v' \in S'$, что $v = Tv'$.

Так как подпространство S' инвариантно относительно A, из равенства

$$Lv = TAT^{-1}Tv' = TAv'$$

следует, что $Lv \in S$. Таким образом, пространство S инвариантно относительно $Df(p)$. То же рассуждение доказывает инвариантность U.

Докажем теперь, что свойство (ГМ2.3) выполняется с $C = \|T\|\|T^{-1}\|$ и $\lambda = \max(\|A_+\|, \|A_-\|)$.

Если $v \in S$ и $v = Tv'$, то для v' выполнены неравенства $|A^kv'| \leqslant \lambda^k|v'|$ при $k \geqslant 0$. Поэтому

$$|L^kv| = |TA^kv'| \leqslant \|T\|\lambda^k|v'|, \quad k \geqslant 0,$$

и искомая оценка следует из неравенства $|v'| \leqslant \|T^{-1}\||v|$.

Аналогичное рассуждение доказывает свойство (ГМ2.4).

Пример 2. Гиперболический автоморфизм тора.

Рассмотрим линейное отображение L плоскости R^2, задаваемое формулой $x \mapsto Ax$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$\det A = 1. \tag{7.3}$$

Зададим двумерный тор T^2, факторизуя плоскость R^2 по целочисленной решетке Z^2, т.е. отождествляя точки плоскости $x = (x_1, x_2)$ и $x' = (x'_1, x'_2)$, если $x_1 - x'_1 \in Z$ и $x_2 - x'_2 \in Z$.

Элементы матрицы A – целые числа. Поэтому если $x = (x_1, x_2) \in R^2$ и $Ax = y = (y_1, y_2)$, то для любого вектора $x' = (x_1 + m_1, x_2 + m_2)$, где m_1 и m_2 – целые числа, выполнено равенство $Ax' = (y_1 + n_1, y_2 + n_2)$, где n_1 и n_2 – целые числа. Таким образом, отображение L порождает отображение f тора T^2. Из равенства (7.3) следует, что элементы матрицы A^{-1} также целые. Поэтому отображение L^{-1} порождает отображение f^{-1}.

Диффеоморфизм f называют *гиперболическим автоморфизмом тора*. В теорию динамических систем диффеоморфизм f был введен Р. Томом. Доказательство структурной устойчивости f (см. теорему 8.1) было важным этапом в развитии теории структурной устойчивости.

Рассмотрим точку $p \in T^2$ и отождествим естественным образом касательное пространство T^2_p с плоскостью R^2. Ясно что при таком отождествлении дифференциал $Df(p)$ задается тем же линейным отображением L.

Собственные числа матрицы A равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ясно, что

$$\lambda := \lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \in (0,1) \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1.$$

Обозначим через S и U одномерные подпространства, натянутые на собственные векторы v^s и v^u, соответствующие собственным числам λ_1 и λ_2.

Для любой точки $p \in T^2$ положим $S(p) = S$ и $U(p) = U$.

Так как векторы v^s и v^u линейно независимы, выполнено свойство (ГМ2.1). Из равенств $Av^s = \lambda_1 v^s$ и $Av^u = \lambda_2 v^u$ следует, что выполнено свойство (ГМ2.2).

Если $v \in S(p)$, то

$$Df^{\,k}(p)v = A^k v = \lambda^k v, \quad k \geqslant 0;$$

если $v \in U(p)$, то

$$Df^{\,k}(p)v = A^k v = \lambda_2^k v = \lambda^{-k} v, \quad k \leqslant 0.$$

Таким образом, весь тор T^2 является гиперболическим множеством диффеоморфизма f (с константами гиперболичности λ и $C = 1$).

Докажем теперь, что неблуждающее множество $\Omega(f)$ диффеоморфизма f совпадает со всем тором T^2.

Лемма 7.1. *Точка тора является периодической точкой диффеоморфизма f тогда и только тогда, когда ее координаты рациональны.*

Доказательство. Фиксируем натуральное число n и расмотрим множество Q_n точек тора T^2, соотвествующих множеству

$$\left\{\left(\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}\right), \quad 0 \leqslant m_1, m_2 \leqslant n-1\right\}$$

точек плоскости R^2.

Ясно, что $f(Q_n) \subset Q_n$. Так как множество Q_n конечно, траектория любой его точки конечна. Из леммы 1.2 следует, что любая точка множества Q_n – периодическая точка диффеоморфизма f.

Ясно, что любая точка тора с рациональными координатами принадлежит одному из множеств Q_n. Таким образом любая точка тора с рациональными координатами является периодической.

Докажем обратное утверждение. Пусть p – периодическая точка диффеоморфизма f периода m.

Если точка p соответствует точке x плоскости R^2, то из равенства $f^{\,m}(p) = p$ следует равенство $A^m x = x + y$, где y – точка с целыми координатами.

Тогда $(A^m - E)x = y$. Так как собственные числа матрицы A^m равны $\lambda^{\pm m}$ (и, следовательно, отличны от 1), верно равенство

$$x = (A^m - E)^{-1} y.$$

Осталось заметить, что матрица $(A^m - E)$ целочисленная, поэтому элементы матрицы $(A^m - E)^{-1}$ – рациональные числа. Следовательно, координаты вектора x рациональны. •

Из доказанной леммы следует, что любая точка тора с рациональными координатами принадлежит неблуждающему множеству $\Omega(f)$. Так как множество точек с рациональными координатами плотно в T^2, а множество $\Omega(f)$ замкнуто (см. теорему 3.2), $\Omega(f) = T^2$.

Рассмотренные нами два примера гиперболических множеств диаметрально противоположны по своему характеру: в первом случае гиперболическое множество является точкой, а во втором – всем фазовым пространством.

7.3. Основные свойства гиперболических множеств

Мы отметим некоторые основные свойства гиперболических множеств, которые будут использованы в дальнейшем изложении.

Пусть I — гиперболическое множество диффеоморфизма f гладкого замкнутого многообразия M с гиперболической структурой $\{S(p), U(p)\}$ и константами гиперболичности C, λ.

Фиксируем вектор $v \in U(p)$, $p \in I$, и целое число $k > 0$. Пусть $q = f^{\,k}(p)$. Запишем вектор v в виде

$$v = Df^{\,-k}(q) Df^{\,k}(p) v.$$

Из свойства (ГМ2.2) гиперболической структуры следует, что $Df^{\,k}(p)v \in U(q)$. По свойству (ГМ2.4),

$$|v| \leqslant C\lambda^k |Df^{\,k}(p)v|.$$

Поэтому

$$|Df^k(p)v| \geqslant \frac{\lambda^{-k}}{C}|v|, \quad v \in U(p),\ k \geqslant 0. \tag{7.4}$$

Аналогично показывается, что

$$|Df^k(p)v| \geqslant \frac{\lambda^{k}}{C}|v|, \quad v \in S(p),\ k \leqslant 0. \tag{7.5}$$

Покажем вначале, что подпространства $S(p)$ и $U(p)$ являются дополнительными подпространствами T_pM.

Лемма 7.2. *Если $p \in I$, то $T_pM = S(p) \oplus U(p)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $S(p) \cap U(p) = \{0\}$.

Рассмотрим вектор $v \in S(p) \cap U(p)$. Из свойства (ГМ2.3) и неравенств (7.4) следует, что если $k > 0$, то

$$\frac{\lambda^{-k}}{C}|v| \leqslant |Df^k(p)v| \leqslant C\lambda^k|v|.$$

Таким образом, выполнены неравенства

$$\left(C\lambda^k - \frac{\lambda^{-k}}{C}\right)|v| \geqslant 0. \tag{7.6}$$

Так как

$$C\lambda^k - \frac{\lambda^{-k}}{C} < 0$$

при достаточно больших k, из неравенств (7.6) вытекает, что $v = 0$. •

Из леммы 7.2 следует, что любой вектор $v \in T_pM$ однозначно представим в виде

$$v = v^s + v^u,$$

где $v^s \in S(p)$ и $v^u \in U(p)$. Таким образом, определены проекторы $P(p)$ на $S(p)$ параллельно $U(p)$ и $Q(p)$ на $U(p)$ параллельно $S(p)$: $v^s = P(p)v$ и $v^u = Q(p)v$.

Покажем, что нормы этих проекторов ограничены сверху константами, зависящими лишь от констант гиперболичности и от оценки дифференциала Df на множестве I.

Пусть L и K – дополнительные линейные подпространства T_pM. Определим величину

$$\angle(L, K) = \min|v - w|,$$

где минимум берется по всем парам векторов $v \in L, w \in K$ с $|v| = |w| = 1$.

Пусть $N = \max_{p\in I}\|Df(p)\|$.

Лемма 7.3. *Существует такое число $\alpha = \alpha(C, \lambda, N) > 0$, что если $p \in I$, то $\angle(S(p), U(p)) \geqslant \alpha$.*

Доказательство. Фиксируем векторы $v \in S(p), w \in U(p)$ с $|v| = |w| = 1$ и число $k \geqslant 0$ и рассмотрим вектор $a(k) = Df^k(p)(v - w)$.

Из определения числа N следует, что

$$|a(k)| \leqslant N^k|a(0)|. \tag{7.7}$$

Из свойства (ГМ2.3) и неравенств (7.4) вытекает, что

$$|a(k)| \geqslant \frac{\lambda^{-k}}{C} - C\lambda^k \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Поэтому существует такое число $l = l(C, \lambda)$, что $|a(l)| \geqslant 1$. Из неравенства (7.7) с $k = l$ следует, что

$$|v - w| = |a(0)| \geqslant \alpha(C, \lambda, N) = N^{-l(C,\lambda)}. \quad \bullet$$

Рассмотрим вектор $v \in T_pM$ и представим его в виде

$$v = P(p)v + Q(p)v.$$

Если $P(p)v = 0$, то $|Q(p)v| = |v|$; если $Q(p)v = 0$, то $|P(p)v| = |v|$.

Рассмотрим тот случай, когда $P(p)v \neq 0$ и $Q(p)v \neq 0$; пусть

$$v^s = \frac{P(p)v}{|P(p)v|}, \quad v^u = \frac{Q(p)v}{|Q(p)v|} \quad \text{и} \quad w^u = -v^u.$$

Ясно, что если β – угол между векторами $P(p)v$ и $Q(p)v$, то

$$|v^s - v^u| = 2\sin(\beta/2) \geqslant \alpha \quad \text{и} \quad |v^s - w^u| = 2\cos(\beta/2) \geqslant \alpha.$$

Поэтому $\sin(\beta) \geqslant b := \alpha^2/2$.

Из теоремы синусов, примененной к треугольнику со сторонами v, $P(p)v$ и $Q(p)v$, следует, что

$$|P(p)v| \leqslant \frac{|v|}{\sin(\beta)} \leqslant \frac{|v|}{b}.$$

Ясно, что аналогичное неравенство справедливо и для вектора $Q(p)v$.

Таким образом, из леммы 7.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Существует такое число $R = R(C, \lambda, N)$, что*

$$\|P(p)\|, \|Q(p)\| \leqslant R, \quad p \in I. \tag{7.8}$$

Докажем, наконец, что гиперболическая структура непрерывна на гиперболическом множестве.

Рассмотрим подмножество $M_0 \subset M$ и предположим, что в каждой точке $p \in M_0$ задано линейное подпространство $L(p) \subset T_pM$. Так как касательное расслоение TM многообразия M является многообразием (см. [РФ1977]), то для последовательности точек $p_k \in M_0$, сходящейся к точке $p \in M_0$, мы можем определить предел

$$\lim_{k\to\infty} L(p_k) = \{v \in T_pM \, : v = \lim_{k\to\infty} v_k, \ v_k \in T_{p_k}M\}.$$

Будем говорить, что семейство $\{L(p)\}$ непрерывно на M_0, если

$$\lim_{k\to\infty} L(p_k) = L(p)$$

для любой точки $p \in M_0$ и для любой последовательности точек p_k, сходящейся к p.

Лемма 7.4. *Семейства подпространств $\{S(p)\}$ и $\{U(p)\}$ непрерывны на гиперболическом множестве I.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек $p_k \in I$, сходящуюся к $p \in I$. Докажем вначале, что если $v_k \in S(p_k)$ — последовательность векторов единичной длины и $v_k \to v$, то

$$v \in S(p). \tag{7.9}$$

Предположим, что включение (7.9) неверно. Так как $v \in T_pM$, из свойства (ГМ2.1) гиперболической структуры следует, что

$$v = v^s + v^u, \quad v^s \in S(p), \quad v^u \in U(p), \quad v^u \neq 0.$$

Выберем такое число m, чтобы выполнялись неравенства

$$C\lambda^m < \frac{1}{3}, \quad |Df^{\,m}(p)v^s| < \frac{1}{3}, \quad |Df^{\,m}(p)v^u| > 1. \tag{7.10}$$

В силу первого из этих неравенств

$$|Df^{\,m}(p_k)v| < \frac{1}{3}.$$

Из непрерывности отображения $Df^{\,m}(r)w$ по r и w следует, что

$$|Df^{\,m}(p)v| \leqslant \frac{1}{3}.$$

Из второго и третьего неравенств в (7.10) вытекает, что

$$|Df^{\,m}(p)v| \geqslant |Df^{\,m}(p)v^u| - |Df^{\,m}(p)v^s| \geqslant \frac{2}{3}.$$

Полученное противоречие доказывает включение (7.9).

Из включения (7.9) следует, что

$$\mathcal{S}(p) = \lim_{k\to\infty} S(p_k) \subset S(p). \tag{7.11}$$

Аналогичное рассуждение показывает, что

$$\mathcal{U}(p) = \lim_{k\to\infty} U(p_k) \subset U(p).$$

Пусть s – одно из чисел, встречающихся в последовательности $\dim S(p_k)$ бесконечно много раз. Рассмотрим такую подпоследовательность p_{k_l}, что $\dim S(p_{k_l}) = s$.

Выберем в каждом из пространств $S(p_{k_l})$ ортонормированный базис $v^1_{k_l}, \ldots, v^s_{k_l}$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что существуют пределы

$$v^i = \lim_{k_l\to\infty} v^i_{k_l}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Ясно, что $v^1, \ldots, v^s$ – попарно ортогональные векторы единичной длины в $\mathcal{S}(p)$. Из соотношения (7.11) следует, что

$$\dim S(p) \geqslant s.$$

Аналогично (учитывая, что $\dim U(p_{k_l}) \geqslant n-s$), мы приходим к неравенству

$$\dim U(p) \geqslant n - s.$$

Так как

$$\dim S(p) + \dim U(p) = n,$$

мы видим, что

$$\dim S(p) = s \quad \text{и} \quad \dim U(p) = n - s.$$

Отсюда следует, что введенное число s определено однозначно, а $\mathcal{S}(p)$ и $\mathcal{U}(p)$ – линейные подпространства в $S(p)$ и $U(p)$, имеющие те же размерности, что $S(p)$ и $U(p)$. Очевидно,

$$\mathcal{S}(p) = S(p) \quad \text{и} \quad \mathcal{U}(p) = U(p).$$

Лемма доказана. •

Замечания.

1. Из доказательства леммы 7.4 следует, что размерности подпространств $S(p)$ и $U(p)$ локально постоянны в точках гиперболического множества.

2. Используя рассуждения, близкие к доказательству леммы 7.4, можно доказать, что определенные после леммы 7.2 проекторы $P(p)$ и $Q(p)$ обладают свойством непрерывности: если

$$p_k \in I,\ p_k \to p \in I,\ w_k \in T_{p_k}M \quad \text{и} \quad w_k \to w \in T_pM,$$

то

$$P(p_k)w_k \to P(p)w \quad \text{и} \quad P(p_k)w_k \to P(p)w. \tag{7.12}$$

7.4. Теорема об устойчивом многообразии

Точки гиперболических множеств обладают устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, свойства которых близки к свойствам устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических неподвижных и периодических точек.

Определим эти объекты. Пусть p – точка гиперболического множества I диффеоморфизма f гладкого замкнутого многообразия M.

Устойчивое и неустойчивое многообразия точки p определяются равенствами

$$W^s(p) = \{x \in M\ : \mathrm{dist}(f^k(x), f^k(p)) \to 0,\ k \to \infty\}$$

и

$$W^u(p) = \{x \in M\ : \mathrm{dist}(f^k(x), f^k(p)) \to 0,\ k \to -\infty\}.$$

Свойства этих множеств описывает формулируемая ниже теорема 7.1. Эта теорема называется обычно теоремой об устойчивом многообразии (или теоремой Ляпунова-Перрона).

Обозначим через $N(a,p)$ открытый шар радиуса $a > 0$ с центром в точке p (в выбранной римановой метрике dist).

Теорема 7.1. *Предположим, что диффеоморфизм f принадлежит классу $C^r, r \geqslant 1$; пусть I – гиперболическое множество диффеоморфизма f. Существует число $\Delta > 0$, обладающее следующими свойствами. Если $p \in I$ и $\dim S(p) = l$, то:*

(1) существуют такие погружения $b^s : R^l \to M$ и $b^u : R^{n-l} \to M$ класса C^r, что

$$b^s(0) = p,\ b^s(R^l) = W^s(p),\ b^u(0) = p \quad \textit{и} \quad b^s(R^{n-l}) = W^u(p);$$

(2) при любом $a \in (0, \Delta)$ через точку p проходят гладкие (класса C^r) диски $W^s(a,p)$ и $W^u(a,p)$, являющееся компонентами пересечений $W^s(p)$ и $W^u(p)$ с $N(a,p)$ и такие, что

(2.1) $T_pW^s(a,p) = S(p)$ и $T_pW^u(a,p) = U(p)$;

(2.2) если $x \in N(a,p) \setminus W^s(a,p)$, то найдется такое $m > 0$, что

$$\mathrm{dist}(f^m(x), f^m(p)) \geqslant a;$$

(2.3) если $x \in N(a,p) \setminus W^u(a,p)$, то найдется такое $m < 0$, что

$$\mathrm{dist}(f^m(x), f^m(p)) \geqslant a.$$

Доказательство утверждения (2) теоремы 7.1 для множества $W^s(a,p)$ практически совпадает с приведенным выше доказательством теоремы 4.2. В теореме 4.2 при изучении свойств оператора Перрона используются оценки

$$|B^{k-1-i}f_1(x_i)| \leqslant \lambda^{k-1-i}|f_1(x_i)| \quad \text{и} \quad |C^{k-1-i}f_2(x_i)| \leqslant \lambda^{i+1-k}|f_2(x_i)|. \tag{7.13}$$

При доказательстве соответствующего утверждения теоремы 7.1 рассматриваются представления

$$f(p_k + v) = f(p_k) + Df(p_k)v + F(p_k, v) \tag{7.14}$$

в локальных координатах около точек $p_k = f^k(p)$, где $v \in T_{p_k}M$.

Для построения локального устойчивого многообразия используется оператор Перрона, сопоставляющий последовательности $V = \{v_k \in T_{p_k}M\}$ последовательность $W = \{w_k \in T_{p_k}M\}$ по формулам

$$P(p_k)w_k = Df^{\,k}(p)P(p)v_0 + \sum_{i=0}^{k-1} Df^{\,k-1-i}(p)P(p_i)F(p_i, v_i)$$

и

$$Q(p_k)w_k = -\sum_{i=k}^{\infty} Df^{\,k-1-i}(p)Q(p_i)F(p_i, v_i),$$

где P и Q – проекторы, определенные после леммы 7.2.

Из свойств (ГМ2.3) и (ГМ2.4) гиперболического множества и из оценок (7.8) следуют оценки

$$|Df^{\,k-1-i}(p)P(p_i)F(p_i, v_i)| \leqslant CR\lambda^{k-1-i}|F(p_i, v_i)|$$

и

$$|Df^{\,k-1-i}(p)(p_i)F(p_i, v_i)| \leqslant CR\lambda^{i+1-k}|F(p_i, v_i)|,$$

аналогичные оценкам (7.13) (с точностью до множителя CR).

Осталось заметить, что величина Δ (размер локальных устойчивых многообразий в теореме 4.2) определяется малостью константы Липшица нелинейности F в окрестности гиперболической неподвижной точки p, радиус которой пропорционален Δ.

Из равномерной непрерывности Df на компактном множестве I следует, что можно выбрать размер Δ окрестностей точек гиперболического множества I таким, чтобы константы Липшица нелинейностей $F(p_k, v)$ по v в представлениях (7.14) были столь малы, чтобы доказательство теоремы 7.1 полностью повторяло рассуждения, примененные в доказательстве теоремы 4.2.

Остальные детали доказательства теоремы 7.1 читатель может найти, например, в [Пл1977].

7.5. Аксиома А

С.Смейл ввел следующее условие на диффеоморфизм f гладкого замкнутого многообразия M.

Аксиома А.
(1) *Неблуждающее множество $\Omega(f)$ гиперболично.*
(2) *Множество периодических точек f плотно в $\Omega(f)$.*

Это условие сыграло очень важную роль в развитии теории структурной устойчивости. Опишем вначале структуру неблуждающего множества диффеоморфизма, удовлетворяющего Аксиоме А. Смейл доказал следующее утверждение.

Теорема 7.2 (теорема о спектральном разложении). *Если диффеоморфизм f удовлетворяет Аксиоме А, то его неблуждающее множество единственным образом представимо в виде*

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_m, \tag{7.15}$$

где Ω_i – компактные непересекающиеся инвариантные множества, в каждом из которых есть плотная траектория.

Множества Ω_i в представлении (7.15) называются *базисными*.

В лемме 7.4 показано, что пространства $S(p)$ и $U(p)$ гиперболической структуры на множестве $\Omega(f)$ непрерывно зависят от точки p. Описанные в теореме 7.2 гладкие диски, лежащие в устойчивых и неустойчивых многообразиях точки p, касаются в точке p пространств $S(p)$ и $U(p)$; анализируя доказательство непрерывной дифференцируемости отображений b^s, b^u (и используя рассуждения из доказательства леммы 4.10), можно показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.5. *У любой точки $p \in \Omega(f)$ есть такая окрестность U_p, что если $x, y \in U_p \cap \Omega(f)$, то существует точка трансверсального пересечения многообразий $W^u(x)$ и $W^s(y)$.*

При доказательстве теоремы 7.2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7.6. *Пусть p и q — гиперболические периодические точки диффеоморфизма f. Если x_1 и x_2 — точки трансверсального пересечения пар многообразий $W^u(p), W^s(q)$ и $W^u(q), W^s(p)$, то $x_1, x_2 \in \Omega(f)$.*

Доказательство. Пусть для определенности p и q – гиперболические неподвижные точки диффеоморфизма f (для доказательства леммы в общем случае следует перейти от диффеоморфизма f к его достаточно большой степени f^k, для которой точки p и q неподвижные; ясно, что если $x \in \Omega(f^k)$, то $x \in \Omega(f)$).

Фиксируем произвольную шаровую окрестность V точки x_1. Окрестность V является гладким диском, трансверсально пересекающим $W^s(p)$ в точке x_1. Из λ-леммы (лемма 6.4) следует, что существует гладкий диск $Q^u \subset W^u(q)$, содержащий q (пусть Q^u – образ шара D_0 при вложении g_u), для которого найдется такая последовательность вложений g_u^m диска D_0, что

$$g_u^m(D_0) \subset f^m(V) \quad \text{и} \quad \rho_1(g_u^m, g_u) \to 0,\ m \to \infty.$$

Рассмотрим такие гладкие диски P^s и P^u, лежащие соответственно в $W^s(p)$ и $W^u(q)$, что x_2 – точка трансверсального пересечения P^s и P^u.

Пусть диски P^s и P^u являются образами шаров D_1 и D_2 при вложениях h_s и h_u. Применим лемму 6.3 и найдем такое $\delta > 0$, что если H_s и H_u – такие вложения D_1 и D_2, что $\rho_1(H_s, h_s) < \delta$ и $\rho_1(H_u, h_u) < \delta$, то $H_s(D_1) \cap H_u(D_2) \neq \emptyset$.

Существует такое отрицательное число l, что $f^{\,l}(P_u) \subset Q^u$.

Ясно, что диски $g_u^m(D_0)$ содержат диски ν_m, являющиеся образами D_2 при вложениях h_u^m, для которых $\rho_1(h_u^m, f^{\,l} \circ h_u) \to 0$ при $m \to \infty$.

Положим $H_u^m = f^{-l} \circ h_u^m$. Тогда

$$H_u^m(D_2) = f^{-l}(\nu_m) \subset f^{m+l}(V).$$

Так как число l фиксировано, $\rho_1(H_u^m, h_u) \to 0$ при $m \to \infty$.

Поэтому найдется такое число m_1, что $\rho_1(H_u^m, h_u) < \delta$ при $m \geqslant m_1$.

Аналогичные рассуждения показывают, что найдутся такие числа $k > 0$ и m_2, а также вложения H_s^m диска D_1, что $\rho_1(H_s^m, h_s) < \delta$ при $m \geqslant m_2$ и диски $H_s^m(D_1)$ являются подмножествами $f^{-k-m}(V)$.

Из выбора числа δ следует, что

$$f^{m+l}(V) \cap f^{-k-m}(V) \neq \emptyset, \quad \text{т.е.} \quad f^{2m+l+k}(V) \cap V \neq \emptyset \tag{7.16}$$

при $m \geqslant \max(m_1, m_2)$.

Так как соотношения (7.16) справедливы при сколь угодно больших m. из произвольности окрестности V следует, что $x_1 \in \Omega(f)$. Аналогично показывается, что $x_2 \in \Omega(f)$. •

Перейдем к доказательству теоремы 7.2. Фиксируем точку $x_0 \in \Omega(f)$ и рассмотрим ее окрестность U, обладающую свойством, сформулированным в лемме 7.5 (в качестве гиперболического множества I берется множество $\Omega(f)$).

Положим

$$\Xi(x_0) = \mathrm{Cl}\, O(U \cap \Omega(f), f)$$

(напомним, что $O(A, f)$ — траектория множества A в динамической системе f). Множество $\Xi(x_0)$ — замыкание инвариантного множества, лежащего в $\Omega(f)$, поэтому $\Xi(x_0)$ замкнуто, инвариантно и лежит в $\Omega(f)$.

Докажем, что множество $\Xi(x_0)$ зависит лишь от точки x_0 и не зависит от выбора окрестности U (сформулируем точное утверждение в виде отдельной леммы).

Лемма 7.7. *Если V — открытое множество, лежащее в U и такое, что $V \cap \Omega(f) \neq \emptyset$, то множество*

$$\Xi_1(x_0) = \mathrm{Cl}\, O(V \cap \Omega(f), f)$$

совпадает с $\Xi(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим точку $y \in V \cap \Omega(f)$. Так как множество периодических точек плотно в $\Omega(f)$, найдется периодическая точка p, лежащая в V. Пусть q — произвольная периодическая точка, лежащая в U.

Из выбора окрестности U следует, что существуют точки x_1, x_2 трансверсального пересечения пар $W^u(p), W^s(q)$ и $W^u(s), W^s(p)$. По лемме 7.6 $x_1, x_2 \in \Omega(f)$.

Так как $x_1 \in W^u(p)$, траектория точки x_1 пересекает множество V; следовательно, $x_1 \in \Xi_1(x_0)$. Кроме того, $x_1 \in W^s(q)$; поэтому в любой окрестности точки q есть точки траектории $O(x_1, f)$. Отсюда следует, что $q \in \mathrm{Cl}\,\Xi_1(x_0)$; из замкнутости множества $\Xi_1(x_0)$ вытекает, что $q \in \Xi_1(x_0)$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $x \in U \cap \Omega(f)$. В любой ее окрестности есть периодическая точка $q \in U$. Как показано выше, $q \in \Xi_1(x_0)$, поэтому и $x \in \Xi_1(x_0)$. Таким образом,

$$O(U \cap \Omega(f), f) \subset \Xi_1(x_0).$$

Переходя в этом включении к замыканиям, мы получаем включение

$$\Xi(x_0) \subset \Xi_1(x_0).$$

Обратное включение очевидно. •

Следствие. *Для любой точки $x \in \Xi(x_0)$ верно равенство $\Xi(x_0) = \Xi(x)$.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x \in \Xi(x_0)$ и ее произвольную окрестность W. Построим множество

$$\Xi(x) = \mathrm{Cl}\, O(W \cap \Omega(f), f).$$

Из определения множества $\Xi(x_0)$ следует, что найдутся такие точка $x_1 \in U \cap \Omega(f)$ и число k, что $f^{\,k}(x_1) \in W$. В этом случае существует такое открытое множество $V \subset U$, что $f^{\,k}(V) \subset W$.

Из леммы 7.7 следует, что

$$\Xi(x_0) = \mathrm{Cl}\, O(V \cap \Omega(f), f) \subset \mathrm{Cl}\, O(W \cap \Omega(f), f) = \Xi(x). \tag{7.17}$$

Из соотношений (7.17) вытекает, что $x_0 \in \Xi(x)$, поэтому то же рассуждение показывает, что $\Xi(x) \subset \Xi(x_0)$. •

Построим определенные выше множества Ω_x для всех точек $x \in \Omega(f)$. Из доказанного следствия к лемме 7.7 вытекает, что если $x, y \in \Omega(f)$, то множества Ω_x и Ω_y либо не пересекаются, либо совпадают. Действительно, если $z \in \Omega_x \cap \Omega_y$, то

$$\Omega_z = \Omega_y = \Omega_x.$$

Покажем, что различных множеств Ω_x конечное число. Если это не так, существует счетное множество различных множеств $\Omega_{x_1}, \Omega_{x_2}, \ldots$; пусть y – предельная точка последовательности $\{x_k\}$ (такая точка существует в силу компактности многообразия M). Так как $x_k \in \Omega(f)$ и множество $\Omega(f)$ замкнуто, $y \in \Omega(f)$. Пусть V – та окрестность, по которой строилось множество Ω_y. Найдется такое k_0, что $x_k \in V$ при $k \geqslant k_0$. По построению множества Ω_y выполнены включения $x_k \in \Omega_y$ при $k \geqslant k_0$, т.е. множества Ω_{x_k}, $k \geqslant k_0$, совпадают с Ω_y.

Полученное противоречие доказывает, что число различных множеств Ω_x конечно. Обозначим эти множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$.

Для доказательства того, что в каждом из множеств Ω_i есть плотная траектория, мы используем конструкцию Биркгофа (см. [Бир1941]).

Выберем одно из множеств Ω_i и фиксируем в нем счетное плотное множество точек $p_k, k = 1, 2, \ldots$. Фиксируем число $d \in (0, 1)$. Будем считать, что число d столь мало, что если x, y – точки различных базисных множеств, то

$$\mathrm{dist}(x, y) \geqslant d.$$

Ясно, что если для точек $q_k \in \Omega_i$ выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(p_k, q_k) < d^k,$$

то множество точек $q_k, k = 1, 2, \ldots$, плотно в Ω_i. Как и выше, мы обозначаем через $N(a, p)$ шар радиуса a с центром в точке p. Пусть $D_k = N(d^k, p_k)$.

Множество D_1 открыто и содержит точку $p_1 \in \Omega_i$; из леммы 7.6 и ее следствия вытекает, что

$$\Omega_i = \mathrm{Cl}\, O(D_1 \cap \Omega(f), f).$$

Следовательно, найдутся такие точка $r_2 \in D_1 \cap \Omega(f)$ и число k_2, что

$$f^{k_2}(r_2) \in D_2.$$

В этом случае найдется такая окрестность Q_2 точки r_2, что $\mathrm{Cl}\, Q_2 \subset D_1$ и

$$f^{k_2}(\mathrm{Cl}\, Q_2) \in D_2.$$

Аналогичное рассуждение показывает, что найдутся такие точка $r_3 \in Q_2 \cap \Omega(f)$ и число k_2, что

$$f^{k_3}(r_3) \in D_3.$$

Выберем такую окрестность Q_3 точки r_3, что $\mathrm{Cl}\, Q_3 \subset Q_2$ и

$$f^{k_3}(\mathrm{Cl}\, Q_3) \in D_3.$$

Из построения следует, что

$$f^{k_2}(\mathrm{Cl}\, Q_3) \in D_2,$$

т.е. любая траектория точки из Q_3 пересекает как D_2, так и D_3.

Продолжая описанный процесс, построим такую последовательность точек r_j, чисел k_j и окрестностей Q_j, что

$$r_j \in Q_j \cap \Omega(f), \quad f^{k_j}(\mathrm{Cl}\, Q_j) \in D_j$$

и

$$D_1 \supset \mathrm{Cl}\, Q_1 \supset Q_1 \supset \mathrm{Cl}\, Q_2 \supset Q_2 \supset \ldots.$$

Потребуем при этом, чтобы

$$\mathrm{diam} Q_j \to 0, \quad j \to \infty \tag{7.18}$$

(очевидно, этого легко добиться, сужая окрестность Q_j при ее построении). Последовательность вложенных компактов $\mathrm{Cl}\, Q_j$ имеет непустое пересечение; из соотношения (7.18) следует, что это пересечение – точка (обозначим эту точку q).

Из (7.18) следует, что $r_j \to q$, $j \to \infty$. Так как $r_j \in \Omega_i$, выполнено включение $q \in \Omega_i$. Из нашего построения вытекает, что $q_j = f^{k_j}(q) \in D_j$, поэтому траектория точки q плотна в Ω_i.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать единственность представления (7.15).

Пусть

$$\Omega(f) = \Xi_1 \cup \ldots \cup \Xi_l,$$

где множества Ξ_i компактны, инвариантны, не пересекаются и каждое из них обладает плотной траекторией.

Рассмотрим такую точку $x \in \Xi_1$, что

$$\Xi_1 = \mathrm{Cl}\, O(x, f).$$

Существует такой индекс $i \in \{1, \ldots, m\}$, что $x \in \Omega_i$.

Тогда $O(x, f) \subset \Omega_i$. Переходя в этом включении к замыканиям, мы видим, что $\Xi_1 \subset \Omega_i$.

То же рассуждение показывает, что существует такой индекс j, что $\Omega_i \subset \Xi_j$. Ясно, что $j = 1$ и $\Omega_i = \Xi_j$.

Таким образом, каждое из множеств Ω_i совпадает с одним из множеств Ξ_k. Теорема 7.2 доказана. •

Определим для базисного множества Ω_i множества

$$W^s(\Omega_i) = \{x \in M\ : \mathrm{dist}(f^k(x), \Omega_i) \to 0,\ k \to \infty\}$$

и

$$W^u(\Omega_i) = \{x \in M\ : \mathrm{dist}(f^k(x), \Omega_i) \to 0,\ k \to -\infty\},$$

являющиеся аналогами устойчивых и неустойчивых многообразий отдельных траекторий.

Теорема 7.3. *Если диффеоморфизм f удовлетворяет Аксиоме А, то*

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} W^s(\Omega_i) = \bigcup_{i=1}^{m} W^u(\Omega_i). \tag{7.19}$$

Доказательство. Рассмотрим точку $x \in M$. Из леммы 3.3 следует, что множества $\alpha(x, f)$ и $\omega(x, f)$ являются подмножествами неблуждающего множества $\Omega(f)$.

Покажем, что множество $\omega(x, f)$ пересекается не более чем с одним базисным множеством. Предположив противное, мы найдем два базисных множества Ω_i и Ω_j, для которых

$$\omega(x, f) \cap \Omega_i \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \omega(x, f) \cap \Omega_j \neq \emptyset.$$

Выберем такие окрестности $U_1, \dots, U_m$ базисных множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, чтобы

$$(U_k \cup \mathrm{Cl} f(U_k)) \cap U_l = \emptyset, \quad k \neq l,$$

и положим $U = U_1 \cup \dots \cup U_m$.

Существуют такие последовательности индексов $l_k, m_k \to \infty,\ k \to \infty$, что $l_k < m_k < l_{k+1}$.

$$\mathrm{dist}(f^{\,l_k}(x), \Omega_i) \to 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{dist}(f^{\,m_k}(x), \Omega_j) \to 0.$$

При достаточно больших k выполнены включения

$$f^{\,l_k}(x) \in U_i \quad \text{и} \quad f^{\,m_k}(x) \in U_j.$$

Поэтому найдется такая последовательность индексов n_k, что $l_k < n_k < m_k$ и

$$f^{\,n_k}(x) \in \mathrm{Cl} f(U_i) \setminus U_i.$$

Предельная точка y последовательности $f^{\,n_k}(x)$ лежит в компакте $\mathrm{Cl} f(U_i) \setminus U_i$. Из выбора окрестностей U_k следует, что $y \notin U$, а это противоречит включениям

$$y \in \omega(x, f) \subset \Omega(f).$$

Таким образом множество $\omega(x, f)$ лежит ровно в одном базисном множестве (пусть это множество Ω_i). Ясно, что $x \in W^s(\Omega_i)$.

Аналогично доказывается второе равенство в (7.19). •

Теорема 7.3 означает, что каждая траектория диффеоморфизма, удовлетворяющего Аксиоме А, стремится к одному из базисных множеств как при $k \to \infty$, так и при $k \to -\infty$.

Оказывается, справедливо и более точное утверждение (мы не доказываем его, отсылая читателя к оригинальной статье [HPPS1970]).

Теорема 7.4. *Если диффеоморфизм f удовлетворяет Аксиоме А, то*

$$M = \bigcup_{p \in \Omega(f)} W^s(p) = \bigcup_{p \in \Omega(f)} W^u(p). \tag{7.20}$$

Теперь мы приведем определения, необходимые для формулировки необходимых и достаточных условий Ω-устойчивости и структурной устойчивости диффеоморфизмов.

Пусть Ω_i и Ω_j – два различных базисных множества диффеоморфизма, удовлетворяющего Аксиоме А. Будем писать $\Omega_i \to \Omega_j$, если

$$W^u(\Omega_i) \cap W^s(\Omega_i) \neq \emptyset.$$

Будем говорить, что у диффеоморфизма есть 1-*цикл*, если существует такое базисное множество Ω_i, что

$$(W^u(\Omega_i) \cap W^s(\Omega_i)) \setminus \Omega_i \neq \emptyset.$$

Будем говорить, что у диффеоморфизма есть k-*цикл* ($k > 1$), если существуют такие k различных базисных множеств $\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_k}$, что

$$\Omega_{i_1} \to \dots \to \Omega_{i_k} \to \Omega_{i_1}.$$

Будем говорить, что диффеоморфизм удовлетворяет *условию отсутствия циклов*, если у него нет k-циклов с $k \geqslant 1$.

Необходимые и достаточные условия Ω-устойчивости приведены в следующей теореме.

Теорема 7.5. *Диффеоморфизм f Ω-устойчив тогда и только тогда, когда f удовлетворяет Аксиоме А и условию отсутствия циклов.*

Будем говорить, что диффеоморфизм f удовлетворяет *строгому условию трансверсальности*, если для любых точек $p, q \in \Omega(f)$ устойчивое многообразие $W^s(p)$ и неустойчивое многообразие $W^u(q)$ трансверсальны (в случае диффеоморфизма, удовлетворяещего Аксиоме А, этот термин в приложении к множествам $W^s(p)$ и $W^u(q)$, которые не обязаны быть подмногообразиями фазового пространства, понимается в том же смысле, как в п. 6.2).

Теорема 7.6. *Диффеоморфизм f структурно устойчив тогда и только тогда, когда f удовлетворяет Аксиоме А и строгому условию трансверсальности.*

История доказательства теоремЁ7.5 и 7.6 достатоточно сложна; она описана в приложенииё2.

В частном, но важном случае диффеоморфизмов Аносова достаточность условий теоремы 7.1 для структурной устойчивости доказана в следующем параграфе (для простоты мы ограничиваемся случаем гиперболического автоморфизма двумерного тора). Необходимость условий теоремы 1 была установлена Мане; в приложении 1 мы излагаем схему доказательства Мане.

Отметим, что еще для одного частного случая диффеоморфизмов — диффеоморфизмов с конечным неблуждающим множеством — аналог теоремы 7.6 был доказан Смейлом и Палисом [PS1970]. Из леммы 1.2 следует, что неблуждающее множество диффеоморфизма конечно тогда и только тогда, когда оно совпадает с множеством периодических точек (и это последнее множество конечно).

Соответствующая формулировка аналога теоремы 7.6 такова:

Диффеоморфизм f с конечным неблуждающим множеством структурно устойчив тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(MC1) *неблуждающее множество является объединенеием конечного числа гиперболических периодических точек;*

(MC2) *устойчивые и неустойчивые многообразия периодических точек трансверсальны.*

Диффеоморфизмы, обладающие свойствами (MC1) и (MC2), получили название *диффеоморфизмов Морса–Смейла.* Они являются непосредственным аналогом грубых систем Андронова–Понтрягина, с введения которых и началось развитие теории структурной устойчивости (см. следующий раздел).

Отметим (также без доказательств) еще несколько важных утверждений, связанных с описанием множеств структурно устойчивых и Ω-устойчивых диффеоморфизмов.

Смейл доказал [Sm1966], что множество структурно устойчивых диффеоморфизмов не плотно в пространстве $\mathrm{Diff}^{\,1}(M)$, где $\dim M \geqslant 3$; позже Вильямс установил неплотность множества структурно устойчивых диффеоморфизмов в $\mathrm{Diff}^{\,1}(T^2)$, где T^2 — двумерный тор [Wi1970].

Абрахам и Смейл построили такое открытое подмножество U пространства $\mathrm{Diff}^{\,1}(M)$, где M – четырехмерное многообразие, что любой диффеоморфизм $f \in U$ не является Ω-устойчивым и не удовлетворяет Аксиоме А [AS1970].

Следующие два утверждения часто используются при доказательстве того, что определенные множества диффеоморфизмов состоят из структурно устойчивых и Ω-устойчивых диффеоморфизмов.

Если X — некоторое подмножество $\mathrm{Diff}^{\,1}(M)$, будем обозначать через $\mathrm{Int}^{\,1}(X)$ C^1-внутренность множества X.

Обозначим через $\mathcal{H}$ множество диффеоморфизмов, все периодические точки которых гиперболические.

Хаяши и Аоки [Ha1992,Ao1992] независимо показали, что множество $\mathrm{Int}^{\,1}(\mathcal{H})$ совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов.

Кроме того, Аоки установил [Ao1992], что множество $\mathrm{Int}^{\,1}(\mathrm{KS})$ совпадает с множеством структурно устойчивых диффеоморфизмов (напомним, что мы обозначили через KS множество диффеоморфизмов Купки–Смейла, см. п. 6.2).

Из теоремы 6.2 и из установленной Смейлом неплотности множества структурно устойчивых диффеоморфизмов следует, что существуют диффеоморфизмы Купки–Смейла, которые не являются структурно устойчивыми.

7.6. Гиперболические множества потоков

Сформулируем аналоги приведенных выше определений и теорем для гладких потоков, порождаемых гладкими касательными векторными полями.

Начнем с технически простейшего случая потока $\phi(t, x)$, порождаемого автономной системой дифференциальных уравнений (1.1) в R^n.

Будем называть множество $I \subset M$ *гиперболическим множеством* потока ϕ, если:

(ГМП1) множество I компактно и инвариантно относительно ϕ;

(ГМП2) существуют числа $C > 0$ и $\lambda > 0$, обладающие следующим свойством: для любой точки $p \in I$ определены такие два подпространства $S(p)$ и $U(p)$ пространства R^n, что

(ГМП2.1) $S(p) + U(p) + \{F(x)\} = R^n$, где $\{F(x)\}$ – подпространство, натянутое на вектор скорости $F(x)$;

(ГМП2.2) если $\Phi(t)$ – такая фундаментальная матрица системы в вариациях

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}(\phi(t,x)y$$

вдоль траектории $\phi(t,p)$, что $\Phi(0) = E$, то

$$\Phi(t)S(p) = S(\phi(t,p)) \quad \text{и} \quad \Phi(t)U(p) = U(\phi(t,p)), \quad t \in R;$$

(ГМП2.3) если $v \in S(p)$, то $|\Phi(t,p)v| \leqslant C\exp(-\lambda t)|v|$ при $t \geqslant 0$;

(ГМП2.4) если $v \in U(p)$, то $|\Phi(t,p)v| \leqslant C\exp(\lambda t)|v|$ при $t \leqslant 0$.

Самое существенное различие между определениями гиперболических множеств для диффеоморфизмов и потоков состоит в том, что в представлении $S(p) + U(p) + \{F(x)\} = R^n$ в случае потока есть подпространство $\{F(x)\}$, векторы из которого не растут и не убывают с экспоненциальной скоростью под действием оператора $\Phi(t)$.

Определение гиперболического множества для потока на многообразии, порожденного гладким векторным полем, дословно такое же (с естественной заменой R^n на соответствующее касательное пространство). Дальше мы будем рассматривать именно такие потоки ϕ (если не сказано противное).

Аналогом Аксиомы A является следующее условие, также введенное Смейлом.

Аксиома A′.

(1) *Неблуждающее множество $\Omega(\phi)$ потока ϕ гиперболично;*

(2) *$\Omega(\phi)$ есть объединение двух непересекающихся компактных инвариантных множеств Q_1 и Q_2, причем Q_1 состоит из конечного числа точек покоя, а в Q_2 нет точек покоя и плотны точки замкнутых траекторий.*

При выполнении Аксиомы A′ справедлив аналог теоремы 7.2 о спектральном разложении: неблуждающее множество $\Omega(\phi)$ единственным образом представимо в виде

$$\Omega(\phi) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_m,$$

где Ω_i – компактные непересекающиеся инвариантные множества, в каждом из которых есть плотная траектория.

Так же, как и в случае диффеоморфизма, множества Ω_i называются базисными. Каждое базисное множество есть либо точка покоя либо замкнутое инвариантное множество, в котором нет точек покоя и плотны точки замкнутых траекторий.

Пусть Ω_i и Ω_j – два различных базисных множества потока ϕ, удовлетворяющего Аксиоме A′. Будем писать $\Omega_i \to \Omega_j$, если существует такая точка x, что

$$\phi(t,x) \to \Omega_i,\ t \to -\infty, \quad \text{и} \quad \phi(t,x) \to \Omega_j,\ t \to \infty.$$

Условие отсутствия циклов для потока ϕ дословно повторяет соответствующее условие для диффеоморфизма.

Аналогом теоремы 7.5 является следующее утверждение: поток ϕ Ω-устойчив тогда и только тогда, когда ϕ удовлетворяет Аксиоме A′ и условию отсутствия циклов.

Если поток ϕ удовлетворяет Аксиоме A′, то гиперболические траектории $\phi(t,p)$, $p \in \Omega(\phi)$, обладают устойчивыми и неустойчивыми многообразиями $W^s(\phi(t,p))$ и $W^u(\phi(t,p))$, свойства которых аналогичны свойствам устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических траекторий диффеоморфизма, описанным в теореме 7.1.

Будем говорить, что поток ϕ удовлетворяет строгому условию трансверсальности, если для любых точек $p, q \in \Omega(\phi)$ многообразия $W^s(\phi(t,p))$ и $W^u(\phi(t,q))$ трансверсальны.

Приведем аналог теоремы 7.6: поток ϕ структурно устойчив тогда и только тогда, когда ϕ удовлетворяет Аксиоме A′ и строгому условию трансверсальности.

Как мы уже говорили выше, понятие структурной устойчивости (грубости) было впервые введено Андроновым и Понтрягиным [АП1937] для двумерных автономных систем дифференциальных уравнений и для потоков на двумерной сфере, порождаемых гладкими касательными векторными полями.

Для простоты изложения ограничимся случаем автономных систем на плоскости. Будем рассматривать системы вида (1.1) в замкнутом двумерном диске D, ограниченном гладкой замкнутой кривой Г. Будем предполагать, что в точках кривой Г поле системы не касается этой кривой и направлено внутрь диска D.

Ясно, что если для системы

$$\frac{dx}{dt} = G(x) \tag{7.21}$$

число

$$r_{1,D}(F,G) = \max_{x \in D} \left(|F(x) - G(x)| + \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x) - \frac{\partial G}{\partial x}(x) \right\| \right)$$

достаточно мало, то в точках кривой Γ поле системы (7.21) также не касается этой кривой и направлено внутрь диска D.

В этом случае диск D положительно инвариантен относительно потоков ϕ и ψ, порождаемых системами (1.1) и (7.21), т.е.

$$\phi(t,x) \in D \quad \text{и} \quad \psi(t,x) \in D \quad \text{при} \quad t \in D,\ t \geqslant 0.$$

Андронов и Понтрягин назвали систему (1.1) *грубой*, если по любому $\epsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что если для системы (7.21) выполнено неравенство

$$r_{1,D}(F,G) < \delta,$$

то существует гомеоморфизм диска D на себя, отображающий пересечения траекторий системы (1.1) с D на пересечения траекторий системы (7.21) с D и удовлетворяющий неравенству

$$\max_{x \in D} |h(x) - x| < \epsilon$$

(ясно, что это определение соответствует введенному в п. 3.1 понятию структурной устойчивости в сильном смысле).

Перед тем как сформулировать теорему Андронова–Понтрягина, введем одно понятие. Пусть p — седловая гиперболическая точка покоя системы (1.1). Из нашего описания устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических точек покоя (см. п. 5.1) следует, что устойчивое многообразие $W^s(p)$ точки p является объединением трех траекторий: самой точки p и двух таких траекторий $g_1^s = O(x_1, \phi)$ и $g_2^s = O(x_2, \phi)$, что $x_i \neq p, i = 1, 2$, и при этом $\phi(t, x_1)$ и $\phi(t, x_2)$ стремятся к p при $t \to \infty$. Траектории g_1^s и g_2^s называют *устойчивыми сепаратрисами* седла p (иногда, впрочем, устойчивой сепаратрисой называют само устойчивое многообразие $W^s(p)$).

Аналогично определяются неустойчивые сепаратрисы g_1^u и g_2^u седла p.

Говорят, что у системы (1.1) есть *сепаратриса, ведущая из седла в седло*, если существуют такие седловые гиперболические точки покоя p и q, а также их устойчивая и неустойчивая сепаратрисы g^s и g^u, что $g^s = g^u$.

Сформулируем теорему Андронова–Понтрягина в терминах, принятых в этой книге.

Теорема 7.7. *Система* (1.1) *груба тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(АП1) *все точки покоя гиперболические;*
(АП2) *все замкнутые траектории гиперболические;*
(АП3) *нет сепаратрис, ведущих из седла в седло.*

Полное доказательство теоремы 7.7 было впервые опубликовано де Баггисом в [Ba1952].

Прокомментируем связи между условиями теорем 7.6 и 7.7.

Отметим прежде всего, что из соотношения $r_{1,D}(F,G) \to 0$ следует, что $\rho_1(\phi,\psi) \to 0$ (см. лемму 2.2; конечно, при определении соответствующей величины $\rho_1(\phi,\psi)$ максимум берется по точкам диска D).

Обозначим через Ω множество неблуждающих точек потока ϕ в диске D и через P множество ее точек покоя и замкнутых траекторий в D.

Аналогом Аксиомы A$'$ в этом случае является следующее условие:

(AA$'$1) *Множество Ω гиперболично;*

(AA$'$2) *Ω есть объединение двух непересекающихся компактных инвариантных множеств Q_1 и Q_2, причем Q_1 состоит из конечного числа точек покоя, а в Q_2 нет точек покоя и плотны точки замкнутых траекторий.*

Ясно, что из условия (AA$'$1) следуют условия (АП1) и (АП2).

В то же время, если p и q – две различные седловые гиперболические точки покоя системы (1.1) в диске D и устойчивая сепаратриса g^s седла p совпадает с неустойчивой сепаратрисой g^u седла q, то в любой точке $x \in g^s \cap g^u$ устойчивое многообразие $W^s(p)$ и неустойчивое многообразие $W^u(q)$ нетрансверсальны. Действительно, в этом случае каждое из касательных пространств $T_x W^s(p)$ и $T_x W^u(q)$ совпадает с одномерным пространством, натянутым на вектор $F(x)$. Следовательно, условие трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий траекторий из Ω (естественный аналог строгого условия трансверсальности) не выполнено.

То же рассуждение показывает, что если у системы есть сепаратриса, ведущая из седловой точки покоя p в то же седло (т.е. одна из устойчивых сепаратрис седла p совпадает с одной из его неустойчивых сепаратрис), то условие трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий траекторий из Ω также не выполнено.

Таким образом, из условия трансверсальности следует условие (АП3). Мы показали, что для двумерной автономной системы в плоском диске условия теоремы Андронова–Понтрягина следуют из условий аналога теоремы 7.6 для случая потоков.

Покажем, что верно и обратное утверждение.

Начнем с простой леммы.

Лемма 7.8. *Пусть p — седловая гиперболическая точка покоя системы* (1.1). *Для любой последовательности точек $p_k \to p$, $k \to \infty$, с $p_k \notin W^s(p)$ существуют такие точка $r \in W^u(p) \setminus \{p\}$ и последовательность времен t_k, что $\phi(t_k, p_k) \to r$.*

Доказательство. Применим теорему Гробмана–Хартмана и найдем такие окрестность V начала координат в R^2, числа $a, b > 0$ и гомеоморфизм h окрестности V на окрестность U точки p, сопрягающий систему

$$\dot{y} = -ay, \quad \dot{z} = bz \tag{7.22}$$

в V и систему (1.1) в U. Пусть ψ — поток системы (7.22) и пусть $q_k = h^{-1}(p_k) = (y_k, z_k)$. Так как $p_k \notin W^s(p)$, $z_k \neq 0$.

Найдем такое число $c > 0$, что

$$\{(y, z) : |y|, |z| \leqslant c\} \subset V.$$

Выберем из последовательности $\{z_k\}$ бесконечную подпоследовательность элементов одного знака (будем считать для определенности, что $z_k > 0$).

При достаточно больших k выполнены неравенства $0 < z_k < c$. Так как

$$\psi(t, q_k) = (y_k \exp(-at), z_k \exp(bt)),$$

при больших k существуют такие числа t_k, что $z_k \exp(bt_k) = c$. Ясно, что $t_k \to \infty$, $k \to \infty$.

Тогда $y_k \exp(-at_k) \to 0$ и $\psi(t_k, q_k) \to (0, c)$.

Поэтому $\phi(t_k, p_k) \to h^{-1}(0, c) \in W^u(p) \setminus \{p\}$. •

Докажем еще одно утверждение.

Лемма 7.9. *Если система* (1.1) *удовлетворяет условиям теоремы* 7.7, *то множество P конечно и объединение траекторий из P совпадает с множеством Ω.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{P}$ объединение траекторий из P.

Каждая траектория множества $\mathcal{P}$ состоит из неблуждающих точек потока ϕ, поэтому $\mathcal{P} \subset \Omega$. Докажем обратное включение.

Каждая точка покоя p системы (1.1) в диске D, не являющаяся седлом, является либо притягивающей либо отталкивающей. В каждом из этих случаев у точки p есть такая окрестность $U \subset D$, что если $x \in U$, то $\phi(t, x) \to p$ либо при $t \to \infty$ либо при $t \to -\infty$. Из теоремы Гробмана–Хартмана следует, что окрестность U можно выбрать так, что если $x \in U$, то $\phi(t, x) \in U$ при $t \geqslant 0$ в первом случае и $\phi(t, x) \in U$ при $t \leqslant 0$ во втором случае.

Если γ — гиперболическая замкнутая траектория автономной системы на плоскости, то ее локальный диффеоморфизм Пуанкаре T – диффеоморфизм интервала на интервал. Ясно, что в этом случае гиперболическая неподвижная точка T может быть либо притягивающей либо отталкивающей. Поэтому траектория γ имеет окрестность U с теми же свойствами, что описанная выше окрестность гиперболической точки покоя, не являющейся седлом.

Из классической теоремы Пуанкаре–Бендиксона (см., например, [БЛ1976]) следует, что для любой точки $x \in R^2$ ее α-предельное и ω-предельное множества $\alpha(x, \phi)$ и $\omega(x, \phi)$ могут иметь один из трех видов. Они могут быть: а) точкой покоя, б) замкнутой траекторией, в) контуром Γ, состоящим из точек покоя и траекторий, стремящихся к этим точкам покоя при $t \to \pm\infty$.

Из сказанного выше вытекает, что если контур Γ лежит в диске D, то любая точка покоя, принадлежащая контуру Γ, является седловой. Поэтому любой такой контур состоит из седловых точек покоя и их сепаратрис, но тогда из условия (АП3) теоремы 7.7 следует, что третий вид множеств $\alpha(x, \phi)$ и $\omega(x, \phi)$ не может реализоваться в диске D.

Фиксируем точку $x \in \Omega$ и покажем, что $x \in \mathcal{P}$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $O(x, \phi) \subset D$.

Так как диск D замкнут, $\mathrm{Cl}\, O(x, \phi) \subset D$. В этом случае каждое из множеств $\alpha(x, \phi)$ и $\omega(x, \phi)$ является подмножеством D.

Из доказанного выше следует, что

$$\alpha(x, \phi) \cup \omega(x, \phi) \subset \mathcal{P}.$$

Из условия (АП3) теоремы 7.7 вытекает, что хотя бы одно из множеств $\alpha(x, \phi)$ и $\omega(x, \phi)$ не является седловой точкой покоя; пусть для определенности $\omega(x, \phi)$ – не седло. Тогда $p = \omega(x, \phi)$ – либо притягивающая точка покоя либо притягивающая замкнутая траектория. Фиксируем окрестность U траектории p с отмеченными выше свойствами.

Если $x \in p$, то $x \in \mathcal{P}$.

Покажем, что соотношение $x \notin p$ невозможно. Если это соотношение выполнено, то, уменьшая в случае необходимости выбранную выше окрестность U, мы можем считать, что $x \notin U$.

Найдем такое число $T > 0$, что $\phi(T, x) \in U$. Из непрерывности ϕ следует, что существует такая окрестность V точки x, что $V \cap U = \emptyset$ и $\phi(T, V) \subset U$.

Из аналога леммы 3.3 для случая потока вытекает, что существуют такие последовательности $x_k \to x$ и $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$, что $\phi(t_k, x_k) \to x$.

При достаточно больших k выполнены включения $x_k \in V$. Из свойств окрестности V следует, что при таких k выполнены включения $\phi(T, x_k) \in U$, но тогда из свойств окрестности U вытекают включения $\phi(t, x_k) \in U, t \geqslant T$.

Так как $t_k \geqslant T$ при достаточно больших k, соотношение $V \cap U = \emptyset$ показывает, что $\phi(t_k, x_k) \notin V$ при таких k.

Полученное противоречие доказывает, что $x \in \mathcal{P}$.

Случай 2: существует такое T, что $\phi(T, x) \notin D$.

В этом случае существует такая окрестность U точки $\phi(T, x)$ что $D \cap U = \emptyset$. Диск D ограничен замкнутой кривой, в точках которой поле системы направлено внутрь диска D, поэтому если $y \in$ и $t \leqslant 0$, то $\phi(t, y) \notin U$.

Из аналога леммы 3.3 для случая потока вытекает, что существуют такие последовательности $x_k \to x$ и $t_k \to -\infty$ при $k \to \infty$, что $\phi(t_k, x_k) \to x$.

При достаточно больших k выполнены включения $\phi(T, x_k) \in U$, поэтому те же рассуждения, что в первом случае, приводят нас к противоречию, показывающему, что второй случай невозможен.

Таким образом, $\mathcal{P} = \Omega$. Так как множество Ω замкнуто, множество $\mathcal{P}$ также замкнуто.

Если p — притягивающая или отталкивающая точка покоя или замкнутая траектория, то, как показано выше, у нее есть такая окрестность U_p, что

$$U_p \cap \mathcal{P} = \{p\}. \tag{7.23}$$

Если p — седловая точка покоя, то по теореме Гробмана–Хартмана у нее есть окрестность, не содержащая других точек покоя. Покажем, что у нее есть окрестность, не содержащая точек замкнутых траекторий. Предположив противное, найдем последовательность точек $p_k \to p$, $k \to \infty$, лежащих на замкнутых траекториях. Для любой точки $q \in W^s(p)$ выполнено соотношение $\phi(t, q) \to p$, $t \to \infty$, поэтому q не может лежать на замкнутой траектории. Следовательно, $p_k \in W^s(p) \setminus \{p\}$. По лемме 7.8 найдутся такие последовательность чисел t_k и точка $r \in W^u(p) \setminus \{p\}$, что $\phi(t_k, p_k) \to r$. Так как $p_k \in \mathcal{P}$, а множество $\mathcal{P}$ инвариантно и замкнуто, $r \in \mathcal{P} = \Omega$, и мы приходим к противоречию с описанной выше структурой множества Ω.

Таким образом, каждая траектория $p \in P$ обладает окрестностью со свойством (7.23).

Теперь конечность множества P очевидным образом вытекает из замкнутости множества $\mathcal{P}$ и компактности диска D. ●

Из доказанной леммы следует, что множество Ω удовлетворяет условиям (АА′1) и (АА′2).

Если p — притягивающая точка покоя или замкнутая траектория, то $W^u(p) = \{p\}$, а устойчивое многообразие $W^s(p)$ двумерно. Так

как $W^u(p)$ не может пересекаться с устойчивыми многообразиями траекторий из P, отличных от p, $W^u(p)$ и $W^s(p)$ трансверсальны с любыми $W^u(q)$ и $W^s(q)$.

То же самое верно в случае отталкивающей точки покоя или замкнутой траектории.

Если p — седловая точка покоя, то из условия (АП3) следует, что многообразия $W^u(p)$ и $W^s(p)$ могут пересекаться лишь с двумерными устойчивыми и неустойчивыми многообразиями траекторий из P, отличных от p.

Таким образом, выполнен аналог строгого условия трансверсальности.

Мы показали, что в случае двумерной автономной системы в диске условия грубости по Андронову–Понтрягину равносильны общим условиям структурной устойчивости для гладких потоков.

8. Диффеоморфизмы Аносова

Диффеоморфизм гладкого замкнутого многообразия M называется *диффеоморфизмом Аносова*, если все многообразие является гиперболическим множеством (определяя такие диффеоморфизмы в своей основополагающей книге [Ан1967], Аносов называет их У-диффеоморфизмами). Рассмотренный в п. 7.2 гиперболический автоморфизм двумерного тора является диффеоморфизмом Аносова.

Основной результат, связанный с диффеоморфизмами Аносова, сформулирован в следующей теореме.

Теорема 8.1. *Диффеоморфизм Аносова структурно устойчив.*

Мы докажем, что диффеоморфизм Аносова структурно устойчив в сильном смысле (см. п. 3.1), ограничившись при этом случаем автоморфизма двумерного тора (чтобы не загромождать изложение несущественными техническими деталями). По ходу доказательства мы будем пояснять, как рассуждения модифицируются в общем случае.

Существует несколько принципиально различных доказательств структурной устойчивости диффеоморфизмов Аносова (приводимое ниже доказательство является далеко идущим обобщением метода Хартмана, использованного нами при доказательстве теоремы 4.1).

Напомним, что если на M фиксирована риманова метрика, то определено экспоненциальное отображение окрестности U сечения $M \times \{0\}$ в касательном расслоении TM в M, сопоставляющее паре $(x, v) \in U$ точку $\exp_x(v)$ следующим образом. Пусть V — касательный вектор в T_xM единичной длины и пусть $\gamma(t)$ — такая геодезическая с натуральным параметром t, что

$$\gamma(0) = x \quad \text{и} \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = V. \tag{8.1}$$

Если $v = tV$, положим

$$\exp_x(v) = \gamma(t).$$

Известно, что $\exp_x(\cdot)$ — диффеоморфизм окрестности начала координат в T_xM на окрестность точки x в M; из определения следует, что

$$\exp_x(0) = x \quad \text{и} \quad D\exp_x(0) = \mathrm{Id}. \tag{8.2}$$

Будем считать, что риманова метрика на $M = T^2$ (для краткости мы используем обозначение M вместо T^2) индуцирована евклидовой метрикой плоскости, из которой тор получается после факторизации по целочисленной решетке.

Для любого $x \in M$ мы естественным образом отождествляем касательное пространство T_xM с плоскостью R^2.

Пусть $x \in M$ и пусть y — точка квадрата

$$[0,1] \times [0,1] \subset R^2,$$

которой соответствует точка x при факторизации R^2 по Z^2 (если точке x соответствует точка, лежащая на стороне квадрата, то в качестве y мы выбираем одну из таких точек).

Мы естественно отождествляем $N(1/4, x) \subset M$ (напомним, что $N(a, A)$ — a-окрестность множества A) с $N(1/4, y) \subset R^2$.

Пусть $V \in T_xM$ — касательный вектор единичной длины. Ясно, что при описанных нами отождествлениях геодезическая $\gamma(t)$, удовлетворяющая условиям (8.1), отождествляется с лежащей в $N(1/4, y) \subset R^2$ частью прямой, проходящей через точку y и параллельной вектору V.

Очевидно, эта прямая задается уравнением $\gamma(t) = x + Vt$.

Таким образом, если $|v| < 1/4$, мы можем отождествить точку $\exp_x(v)$ тора с точкой $x + v$.

Поэтому равенство

$$\exp_x(v) = x + v \tag{8.3}$$

(в смысле указанного выше отождествления) верно для любой точки $x \in M$ и для любого вектора $v \in T_xM$ с $|v| < 1/4$.

Мы будем использовать сформулированное свойство тора при доказательстве теоремы 8.1, рассматривая малые касательные векторные поля v и считая точки $x + v(x)$ точками тора, близкими к x.

Итак, рассмотрим диффеоморфизм Аносова f; пусть $\{S(x), U(x)\}$ — соответствующая гиперболическая структура на M и пусть $C > 0, \lambda \in (0, 1)$ — константы гиперболичности.

Пусть g — диффеоморфизм, C^1-близкий к f. Мы ищем гомеоморфизм h многообразия M, сопрягающий f и g.

Перепишем уравнение

$$h \circ f = g \circ h$$

в эквивалентном виде:

$$f^{-1} \circ h \circ f = f^{-1} \circ g \circ h. \tag{8.4}$$

Будем искать гомеоморфизм h в виде $h(x) = x + v(x)$, где v — малое касательное векторное поле на M.

Замечание. При доказательстве теоремы 8.1 в общем случае гомеоморфизм h ищется в виде $h(x) = \exp_x(v(x))$, где v — малое касательное поле на M (для получения необходимых оценок используются равномерные оценки экспоненциального отображения, вытекающие из соотношений (8.2)).

Введем в пространстве X непрерывных касательных векторных полей норму

$$\|v\| = \max_{x \in M} |v(x)|.$$

Ясно, что X — полное пространство.

Мы можем сделать диффеоморфизм $f^{-1} \circ g$ сколь угодно C^1-близким к тождественному отображению, если величина $\rho_1(f, g)$ достаточно мала. Поэтому мы можем записать

$$f^{-1} \circ g(x) = x + w_1(x), \tag{8.5}$$

где w_1 — векторное поле, для которого величины

$$\|w_1\| \quad \text{и} \quad \max_{x \in M} \left\| \frac{\partial w_1}{\partial x}(x) \right\|$$

малы, если величина $\rho_1(f, g)$ мала.

Определим на пространстве X оператор Φ, сопоставляющий полю v поле u по формуле

$$u(x) = Df^{-1}(f(x))v(f(x));$$

мы можем написать $\Phi v = Df^{-1}v(f)$.

Применим формулу Тейлора к левой части уравнения (8.4):

$$f^{-1} \circ h \circ f(x) = f^{-1}(f(x) + v(f(x))) = x + \Phi v(x) + s(v)(x).$$

Ясно, что $s(0) = 0$ (в этом равенстве 0 обозначает нулевой элемент пространства X).

Так как дифференциал Df непрерывен (и, следовательно, равномерно непрерывен) на M, существует такая функция $G(a)$, что

$$\text{если} \quad \|v\|, \|v'\| \leqslant a, \quad \text{то} \quad \|s(v) - s(v')\| \leqslant G(a)\|v - v'\|,$$

и $G(a) \to 0$ при $a \to 0$.

Преобразуем правую часть уравнения (8.4), используя представление (8.5):

$$f^{-1} \circ g \circ h(x) = (\mathrm{Id} + w_1)(x + v(x)) = x + v(x) + w(v)(x),$$

где $w(v)(x) = w_1(x + v(x))$.

Так как

$$\|w(v) - w(v')\| \leqslant \max_{x \in M} \left\| \frac{\partial w_1}{\partial x}(x) \right\| \|v - v'\|,$$

константа Липшица поля w по v может быть сделана сколь угодно малой, если величина $\rho_1(f, g)$ достаточно мала.

Таким образом, уравнение (8.4) может быть записано в виде

$$(\mathrm{Id} - \Phi)(v)(x) = r(v)(x), \tag{8.6}$$

где $r(v) = s(v) - w(v)$.

Отметим, что $r(0) = -w(0)$ (поэтому $\|r(0)\| \to 0$ при $\rho_1(f, g) \to 0$) и что константа Липшица поля r по v на шаре $\{\|v\| \leqslant a\}$ пространства X может быть сделана сколь угодно малой, если величины a и $\rho_1(f, g)$ достаточно малы.

Положим

$$\mu = RC\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda},$$

где C, λ — константы гиперболичности диффеоморфизма f, а число R обладает свойством, описанным в следствии из леммы 7.3.

Замечание. Конечно, в случае гиперболического автоморфизма тора число R можно выписать явно, но мы предпочитаем использовать общий результат, как это и происходит при доказательстве теоремы 8.1 в общем случае.

Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$; будем считать, что число ϵ столь мало, что

$$\|r(v) - r(v')\| \leqslant \frac{1}{2\mu}\|v - v'\| \tag{8.7}$$

при $\|v\|, \|v'\| \leqslant \epsilon$ и $\rho_1(f,g) \leqslant \epsilon$.

Кроме того, мы будем считать, что ϵ столь мало, что выполнены следующие три утверждения:

$2\epsilon < \Delta$, где число Δ обладает свойством, описанным в утверждении (2) теоремы 7.1; таким образом, если $x \in M$, а $W^s(2\epsilon, x)$ и $W^u(2\epsilon, x)$ — гладкие диски, описанные в этом утверждении, то

$$W^s(2\epsilon, x) \cap W^u(2\epsilon, x) = \{x\};$$

$\epsilon < 1/4$; таким образом, для касательных векторов с $|v| \leqslant \epsilon$ верно равенство (8.3);

если h — такое непрерывное отображение M в себя, что

$$\max_{x\in M} \operatorname{dist}(x, h(x)) \leqslant \epsilon,$$

то $h(M) = M$ (существование такого ϵ следует из стандартных утверждений теории индекса).

Найдем такое $\delta \in (0, \epsilon)$, что если $\rho_1(f,g) < \delta$, то

$$\|r(0)\| \leqslant \frac{\epsilon}{2\mu}. \tag{8.8}$$

Основным этапом решения уравнения (8.6) является построение оператора $(\mathrm{Id} - \Phi)^{-1}$.

Рассмотрим векторное поле $v \in X$ и представим его в виде $v = (v_s, v_u)$, где $v_s(x)$ и $v_u(x)$ — проекции вектора $v(x)$ на пространство $S(x)$ параллельно пространству $U(x)$ и на пространство $U(x)$ параллельно пространству $S(x)$.

Из свойства (ГС2) гиперболической структуры следует, что в соответствии с представлением $v = (v_s, v_u)$ дифференциал $Df(x)$ имеет блочно-диагональный вид: $Df(x) = \operatorname{diag}(Df_s(x), Df_u(x))$.

Как легко понять, оператор Φ также блочно-диагонален: $\Phi = \operatorname{diag}(\Phi_s, \Phi_u)$.

Определим оператор Ψ на пространстве X равенством

$$\Psi v(x) = Df(f^{-1}(x))v(f^{-1}(x)).$$

Ясно, что $\Psi v(f(x)) = Df(x)v(x)$. Оператор Ψ также блочно-диагонален: $\Psi = \operatorname{diag}(\Psi_s, \Psi_u)$.

Фиксируем поле $v \in X$; пусть $u = \Psi v$ и $v' = \Phi u$.

Из равенств

$$u(f(x)) = Df(x)v(x)$$

и

$$v'(x) = Df^{-1}(f(x))u(f(x)) = Df^{-1}(f(x))Df(x)v(x) = v(x)$$

следует, что операторы Φ и Ψ взаимно-обратны. Ясно, что

$$\Phi_s\Psi_s = \mathrm{Id} \quad \text{и} \quad \Phi_u\Psi_u = \mathrm{Id} \tag{8.9}$$

(мы используем один и тот же символ Id для обозначения тождественного оператора в различных пространствах).

Построим оператор $L = (\mathrm{Id} - \Phi)^{-1}$ в блочно-диагональном виде: $L = \operatorname{diag}(L_s, L_u)$, где

$$L_s = -\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_s^k \quad \text{и} \quad L_u = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_u^{-k}$$

(ряды, определяющие L_s и L_u, называют *неймановскими*).

Докажем сходимость введенных рядов.

Фиксируем такое векторное поле v, что $v(x) \in S(x)$ при любом $x \in M$. Пусть $k \geqslant 0$. По определению,

$$\|\Psi_s^k v\| = \max_{x\in M} |\Psi_s^k v(x)|.$$

Существует такая точка $x_0 \in M$, что

$$\|\Psi_s^k v\| = |\Psi_s^k v(x_0)| = |Df^k(f^{-k}(x_0))v(f^{-k}(x_0))|.$$

Из свойства (ГМ3) гиперболической структуры следует, что

$$|Df^k(f^{-k}(x_0))v(f^{-k}(x_0))| \leqslant C\lambda^k|v(f^{-k}(x_0))| \leqslant C\lambda^k \max_{x\in M}|v(x)| = C\lambda^k\|v\|.$$

Таким образом,

$$\|\Psi_s^k\| \leqslant C\lambda^k, \quad k \geqslant 0. \tag{8.10}$$

Аналогичные оценки показывают, что

$$\|\Psi_u^{-k}\| \leqslant C\lambda^k, \quad k \geqslant 0. \tag{8.11}$$

Из полученных оценок следует, что если $m > l$, то

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\Psi_s^k - \sum_{k=1}^{l}\Psi_s^k\right\| \leqslant \sum_{k=l+1}^{m}\|\Psi_s^k\| \leqslant$$

$$\leqslant C(\lambda^{l+1} + \ldots + \lambda^m) < C\frac{\lambda^{l+1}}{1-\lambda} \to 0, \quad l \to \infty;$$

таким образом, последовательность частных сумм для ряда, определяющего оператор L_s, сходится в себе (и сходится, так как соответствующее пространство операторов полно). Те же рассуждения применимы к ряду, определяющему оператор L_u.

Из равенств (8.9) следует, что

$$(\mathrm{Id} - \Phi_s)\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_s^k\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_s^k + \Phi_s(\Psi_s + \Psi_s^2 + \ldots) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_s^k + \mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{\infty}\Psi_s^k = \mathrm{Id}$$

и

$$(\mathrm{Id} - \Phi_u)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_u^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\Psi_u^{-k} - \Phi_u(\mathrm{Id} + \Psi_u^{-1} + \Psi_u^{-2} + \ldots) =$$

$$= \mathrm{Id} + \Psi_u^{-1} + \Psi_u^{-2} + \ldots - \Psi_u^{-1} - \Psi_u^{-2} - \ldots = \mathrm{Id};$$

поэтому $L = (\mathrm{Id} - \Phi)^{-1}$.

Оценим, наконец, норму оператора L. Рассмотрим векторное поле $v \in X$; пусть $v = (v_s, v_u)$, где $v_s(x)$ и $v_u(x)$ — проекции вектора $v(x)$ на пространство $S(x)$ параллельно пространству $U(x)$ и на пространство $U(x)$ параллельно пространству $S(x)$.

По следствию клемме 7.3, $|v_s(x)| \leqslant R|v(x)|$ и $|v_u(x)| \leqslant R|v(x)|$, поэтому $\|v_s\| \leqslant R\|v\|$ и $\|v_u\| \leqslant R\|v\|$.

Из оценок (8.10) и (8.11) следует, что

$$\|L_s v_s\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C\lambda^k\|v_s\| \leqslant RC\frac{\lambda}{1-\lambda}\|v\|$$

и

$$\|L_u v_u\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C\lambda^k\|v_u\| \leqslant RC\frac{1}{1-\lambda}\|v\|.$$

Так как $Lv = (L_s v_s, 0) + (0, L_u v_u)$,

$$\|L\| \leqslant RC\left(\frac{\lambda}{1-\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}\right) = \mu. \tag{8.12}$$

Покажем теперь, что если $\rho_1(f, g) < \delta$, то существует непрерывное векторное поле $v \in X$ с $\|v\| \leqslant \epsilon$, удовлетворяющее уравнению (8.6). Применяя к уравнению (8.6) оператор L, мы получаем эквивалентное уравнение

$$v = Lr(v). \tag{8.13}$$

Из оценок (8.12), (8.7) и (8.8) следует, что если $\rho_1(f, g) < \delta$ и $\|v\| \leqslant \epsilon$, то

$$\|Lr(v)\| \leqslant \mu(\|r(0)\| + \|r(v) - r(0)\|) \leqslant \mu\left(\frac{\epsilon}{2\mu} + \epsilon\frac{1}{2\mu}\right) \leqslant \epsilon$$

и если $\|v\|, \|v'\| \leqslant \epsilon$, то

$$\|Lr(v) - Lr(v')\| \leqslant \mu\frac{1}{2\mu}\|v - v'\| \leqslant \frac{1}{2}\|v - v'\|.$$

Таким образом, оператор Lr отображает шар $S = \{\|v\| \leqslant \epsilon\}$ пространства X в себя и является сжатием на этом шаре. Из отмеченной выше полноты пространства X следует, что шар S содержит (и притом единственное) решение v уравнения (8.13) (и, следовательно, уравнения (8.6)).

Положим $h(x) = x + v(x)$. Так как поле v непрерывно, h — непрерывное отображение M в себя. Из выбора ϵ следует, что $h(M) = M$.

Покажем, что отображение h инъективно. Пусть $h(p) = h(r)$. Так как

$$h \circ f^k(p) = g^k \circ h(p) \quad \text{и} \quad h \circ f^k(r) = g^k \circ h(r), \quad k \in Z,$$

выполнены равенства

$$h \circ f^k(p) = h \circ f^k(r), \quad k \in Z.$$

Следовательно,

$$\mathrm{dist}(f^k(p), f^k(r)) < 2\epsilon, \quad k \in Z.$$

Поэтому

$$r \in W^s(2\epsilon, p) \cap W^u(2\epsilon, p).$$

Из выбора ϵ следует, что $p = r$. Поэтому h — гомеоморфизм многообразия M. ●

9. Подкова Смейла и хаос

9.1. Подкова Смейла

В 1961 г. Смейл привел первый пример структурно устойчивого диффеоморфизма с бесконечным числом периодических точек. В основе конструкции Смейла лежала так называемая *подкова* (история возникновения этой конструкции описана в приложении 2).

Опишем эту конструкцию в ее простейшем, линейном варианте.

Пусть $Q = [0,1] \times [0,1]$ — квадрат на плоскости переменных (x, y). Построим отображение квадрата Q в плоскость в два этапа. На первом этапе к Q применяется гиперболическое линейное отображение

$$f_0(x, y) = (x/4, 4y).$$

Образом Q при этом отображении является вертикальный прямоугольник Q', высота которого равна 4, а ширина – 1/4.

На втором этапе применяется отображение f_1 плоскости в себя, которое изгибает прямоугольник Q' и накладывает его образ на исходный квадрат Q так, как показано на рис. 2. Именно рис. 2 и объясняет происхождение термина «подкова».

Мы будем изучать отображение $f = f_1 \circ f_0$. Легко понять, что можно построить отображение f, являющееся диффеоморфизмом плоскости на себя (или построить диффеоморфизм двумерной сферы, действие которого в некоторой координатной окрестности на сфере аналогично действию f на плоскости).

Уточним, как действует отображение f_1. Обозначим через Q_0 и Q_1 компоненты пересечения $f_1(Q')$ с квадратом Q (см. рис. 2). Будем считать, что Q_0 и Q_1 — вертикальные прямоугольники. Обозначим через Q_0' и Q_1' прообразы Q_0 и Q_1 при отображении f_1 и будем считать, что Q_0' и Q_1' — горизонтальные прямоугольники в Q'.

В этом случае множества

$$R_0 = f_0^{-1}(Q_0') = f^{-1}(Q_0) \;\text{ и }\; R_1 = f_0^{-1}(Q_1') = f^{-1}(Q_1)$$

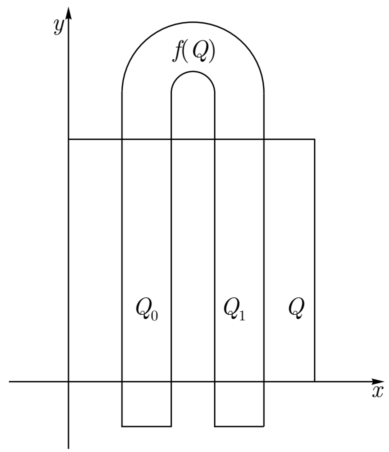

Рис. 2. Отображение подковы

являются горизонтальными прямоугольниками в Q. Будем считать, наконец, что при действии отображения f_1 на прямоугольниках Q_0' и Q_1' вертикальные и горизонтальные отрезки переходят соответственно в вертикальные и горизонтальные отрезки и их длины сохраняются (т. е. ограничение отображения f_1 на каждый из прямоугольников Q_0' и Q_1' является движением).

Из построения следует, что множество $f(Q) \cap Q$ является объединением двух прямоугольников ширины 1/4; назовем эти прямоугольники вертикальными прямоугольниками первого ранга.

Легко понять, что множество $f^2(Q) \cap Q$ является объединением четырех прямоугольников ширины 1/16 (предоставляем читателю нарисовать образ исходного квадрата Q под действием f^2); назовем эти прямоугольники вертикальными прямоугольниками второго ранга.

При этом для каждого из прямоугольников Q_0 и Q_1 пересечение $f(Q_i) \cap Q$ состоит из двух прямоугольников второго ранга, лежащих в различных прямоугольниках первого ранга.

Продолжая этот процесс, мы видим, что при любом натуральном k множество $f^k(Q) \cap Q$ является объединением 2^k вертикальных прямоугольников ширины 4^{-k}; назовем эти прямоугольники вертикальными прямоугольниками ранга k.

Ясно, что для каждого вертикального прямоугольника S ранга k пересечение $f(S) \cap Q$ состоит из двух вертикальных прямоугольников ранга $k+1$, лежащих в различных вертикальных прямоугольниках первого ранга.

Переходя к рассмотрению действия отрицательных степеней отображения f, назовем прямоугольники R_0 и R_1 горизонтальными прямоугольниками первого ранга.

Заметим, что при любом натуральном k множество $f^{-k}(Q) \cap Q$ является объединением 2^k горизонтальных прямоугольников высоты 4^{-k}; назовем эти прямоугольники горизонтальными прямоугольниками ранга k.

Для каждого горизонтального прямоугольника S ранга k пересечение $f^{-1}(S) \cap Q$ состоит из двух горизонтальных прямоугольников ранга $k+$ $+1$, лежащих в различных горизонтальных прямоугольниках первого ранга.

Основным объектом нашего изучения будет множество

$$\Lambda = \{p \in Q : O(p, f) \subset Q\}.$$

Из определения следует, что Λ — инвариантное множество отображения f.

Рассмотрим точку $p \in Q$. Ясно, что если $f^{-1}(p) \in Q$, то $p \in Q_0 \cup Q_1$, т. е. точка лежит в одном из вертикальных прямоугольников первого ранга. Далее, если $f^{-2}(p) \in Q$ и $f^{-1}(p) \in Q$, то точка p лежит в одном из вертикальных прямоугольников ранга 2 и т. д. Таким образом, если отрицательная траектория точки p лежит в множестве Q, то сама точка p принадлежит пересечению счетного набора вложенных друг в друга вертикальных прямоугольников всех положительных рангов.

Ясно, что верно и обратное утверждение: если точка p принадлежит пересечению счетного набора вложенных друг в друга вертикальных прямоугольников всех положительных рангов, то ее отрицательная траектория лежит в множестве Q.

Это позволяет нам описать геометрическую структуру множества Λ.

Назовем нижними основаниями вертикальных прямоугольников их пересечения с осью абсцисс. Объединение нижних оснований вертикальных прямоугольников ранга 1 получается из отрезка $[0, 1]$ оси абсцисс после исключения из этого отрезка трех частей (см. рис. 3).

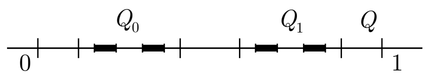

Рис. 3. Нижние основания вертикальных прямоугольников

Объединение нижних оснований вертикальных прямоугольников ранга 2 получается исключением трех частей из каждого из нижних оснований вертикальных прямоугольников ранга 1 (см. рис. 3, на котором нижние основания вертикальных прямоугольников ранга 2 выделены жирными линиями).

Продолжая этот процесс, мы построим на отрезке $[0, 1]$ оси абсцисс классическое канторово множество, которое мы обозначим Λ_x. Из отмеченных выше свойств отображения f следует, что отрицательная траектория точки $p \in Q$ лежит в множестве Q тогда и только тогда, когда точка p принадлежит вертикальному отрезку в Q, нижнее основание которого принадлежит множеству Λ_x.

Аналогичные рассуждения показывают, что на отрезке $[0, 1]$ оси ординат возникает канторово множество Λ_y со следующим свойством: положительная траектория точки $p \in Q$ лежит в множестве Q тогда и только тогда, когда точка p принадлежит горизонтальному отрезку в Q, левое основание которого принадлежит множеству Λ_y.

Таким образом, множество Λ есть произведение двух одномерных канторовых множеств: $\Lambda = \Lambda_x \times \Lambda_y$.

Динамика системы на множестве Λ описывается следующей теоремой Смейла. Напомним, что в п. 1.1 мы обозначили через $\mathcal{X}$ пространство двоичных последовательностей, а через σ гомеоморфизм сдвига на $\mathcal{X}$ (см. пример 1.1).

Теорема 9.1. *Существует гомеоморфизм*

$$h : \Lambda \to \mathcal{X},$$

топологически сопрягающий f на Λ и σ на $\mathcal{X}$.

Доказательство. Начнем с построения гомеоморфизма h. Он строится предельно наглядным образом. Рассмотрим точку $p \in \Lambda$. Ясно, что $f^k(p) \in Q_0 \cup Q_1$ при любом k (если $f^k(p) \notin Q_0 \cup Q_1$, то $f^{k-1}(p) \notin Q$).

Сопоставим точке p двоичную последовательность $a = \{a_k\}$ так:

$$f^k(p) \in Q_{a_k}, \quad k \in Z$$

(таким образом, $a_k = 0$, если $f^k(p) \in Q_0$, и $a_k = 1$, если $f^k(p) \in Q_1$). Определение корректно, так как $Q_0 \cap Q_1 = \emptyset$.

Покажем, что $h(f(p)) = \sigma(h(p))$ для всех $p \in \Lambda$. Рассмотрим точки $p \in \Lambda$ и $q = f(p)$; пусть $a = \{a_k\} = h(p)$ и $b = \{b_k\} = h(q)$.

Так как

$$f^k(p) = f^{k-1}(q) \in Q_{b_{k-1}} \text{ и } f^k(p) \in Q_{a_k},$$

то $a_k = b_{k-1}$. Это и означает, что $b = h(f(p)) = \sigma(a) = \sigma(h(p))$.

Покажем теперь, что h отображает Λ на $\mathcal{X}$ и является гомеоморфизмом. Оба эти утверждения доказываются по одной и той же схеме.

Докажем вначале, что отображение h инъективно. Пусть $h(p) = h(q) = \{a_k\}$ для двух точек $p, q \in \Lambda$.

Проанализируем структуру прообразов прямоугольников Q_0 и Q_1. Напомним, что множества $f^{-1}(Q_0)$ и $f^{-1}(Q_1)$ суть горизонтальные прямоугольники ранга 1.

Множество $f^{-k}(Q_0)$ состоит из горизонтальных прямоугольников ранга k, каждый из которых лежит в одном из горизонтальных прямоугольников ранга $k-1$, при этом никакие два из прямоугольников, составляющих $f^{-k}(Q_0)$, не лежат в одном и том же горизонтальном прямоугольнике ранга $k-1$ (то же верно и для $f^{-k}(Q_1)$).

Так как $f(p), f(q) \in Q_{a_1}$, точки p и q лежат в одном и том же горизонтальном прямоугольнике ранга 1, а именно в R_{a_1}.

Так как $f^2(p), f^2(q) \in Q_{a_2}$, точки p и q лежат в $f^{-2}(Q_{a_2})$. Поскольку в $f^{-2}(Q_{a_2})$ есть только один горизонтальный прямоугольник ранга 2, лежащий в R_{a_1}, точки p и q лежат в одном и том же горизонтальном прямоугольнике ранга 2.

Применяя то же рассуждение и ссылаясь на включения $f^k(p)$, $f^k(q) \in Q_{a_k}$, мы приходим а выводу, что точки p и q лежат в пересечении семейства вложенных друг в друга горизонтальных прямоугольников всех положительных рангов. Это означает, что p и q лежат на одном горизонтальном отрезке в Q.

Повторяя аналогичные утверждения и ссылаясь на включения $f^k(p)$, $f^k(q) \in Q_{a_k}$ с $k \leqslant 0$, мы заключаем, что p и q лежат на одном вертикальном отрезке в Q. Следовательно, $p = q$, и и отображение h инъективно.

Покажем теперь (используя ту же схему), что отображение h сюръективно. Рассмотрим последовательность $a = \{a_k\} \in \mathcal{X}$. Так же, как выше, построим семейство вложенных друг в друга горизонтальных прямоугольников всех положительных рангов: в качестве горизонтального прямоугольника ранга 1 возьмем R_{a_1}; в качестве прямоугольника ранга 2 возьмем тот из прямоугольников, составляющих $f^{-2}(Q_{a_2})$, который лежит в R_{a_1}, и т. д.

Пересечение L этого семейства вложенных друг в друга горизонтальных прямоугольников является горизонтальным отрезком в Q со следующим свойством: если $p \in L$, то $f^k(p) \in Q_{a_k}$ при всех $k > 0$.

Аналогично строится такой вертикальный отрезок L' в Q, что если $p \in L'$, то $f^k(p) \in Q_{a_k}$ при всех $k \leqslant 0$.

Ясно, что если $p \in L \cap L'$, то $h(p) = a$.

Из общего курса топологии известно, что если g — непрерывное инъективное отображение метрического компакта K на $g(K)$, то g — гомеоморфизм K на $g(K)$.

Мы доказали уже, что h^{-1} — инъективное отображение $\mathcal{X}$ на Λ. Таким образом, для завершения доказательства теоремы 9.1 достаточно доказать, что отображение h^{-1} непрерывно.

Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и найдем такое натуральное число n, что $\sqrt{2} \cdot 4^{-n} < \epsilon$. По этому n найдется такое δ, что если для последовательностей $a, b \in \mathcal{X}$ выполнено неравенство $\operatorname{dist}(a, b) < \delta$, то $a_k = b_k, |k| \leqslant n$.

Покажем, что если $\operatorname{dist}(a, b) < \delta$, то

$$\left|h^{-1}(a) - h^{-1}(b)\right| < \epsilon. \tag{9.1}$$

Действительно, пусть $p = h^{-1}(a)$ и $q = h^{-1}(b)$. Так как $a_k = b_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, из рассуждения, использованного при доказательстве инъективности отображения h, следует, что p и q лежат в одном и том же горизонтальном прямоугольнике ранга n.

Аналогичное рассуждение, основанное на равенствах $a_k = b_k, 0 \geqslant k \geqslant -n$, показывает, что p и q лежат в одном и том же вертикальном прямоугольнике ранга n.

Таким образом, p и q лежат в квадрате со стороной 4^{-n}. Поэтому выполнено неравенство (10.1). Теорема 9.1 доказана. •

Замечание 1. Гомеоморфизм h, построенный в теореме 9.1, часто называют *кодировкой*. Смысл этого термина таков: мы выделили два непересекающихся вертикальных прямоугольника Q_0 и Q_1 в квадрате Q; любая точка инвариантного множества Λ кодируется последовательностью индексов тех вертикальных прямоугольников, в которые траектория этой точки последовательно попадает.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 9.1 мы использовали не все сформулированные выше предположения об отображении f.

Фактически в доказательстве использовались только следующие свойства (а)–(г).

(а) Пересечение $f(Q) \cap Q$ состоит из двух непересекающихся множеств (как и выше, назовем их вертикальными прямоугольниками ранга 1); пересечение $f^{-1}(Q) \cap Q$ состоит из двух непересекающихся множеств (как и выше, назовем их горизонтальными прямоугольниками ранга 1).

Конечно, термин прямоугольник в этом случае является условным, и соответствующие множества могут быть очень непохожи на обычные прямоугольники.

(б) Существуют вертикальные и горизонтальные прямоугольники всех положительных рангов, при этом для каждого вертикального прямоугольника S ранга k пересечение $f(S) \cap Q$ состоит из двух вертикальных прямоугольников ранга $k+1$, лежащих в различных вертикальных прямоугольниках первого ранга (и аналогичное утверждение верно для горизонтальных прямоугольников).

(в) Если $S_1 \supset S_2 \supset \ldots$ — последовательность вложенных вертикальных прямоугольников всех положительных рангов, а $S'_1 \supset S'_2 \supset \ldots$ — последовательность вложенных горизонтальных прямоугольников всех положительных рангов, то пересечение множеств

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k \ \text{ и } \ \bigcap_{k=1}^{\infty} S'_k$$

состоит ровно из одной точки.

(г) По любому $\epsilon > 0$ можно указать такое n, что если S — вертикальный прямоугольник ранга n, а S' — вертикальный прямоугольник ранга n, то диаметр пересечения $S \cap S'$ меньше ϵ.

Если выполнены предположения, сформулированные перед теоремой 9.1, инвариантное множество Λ является гиперболическим с константами гиперболичности $C = 1$ и $\lambda = 1/4$. Для доказательства следует взять в качестве подпространств гиперболической структуры пространства $S(p) = \{y = 0\}$ и $U(p) = \{x = 0\}$ для всех $p \in \Lambda$.

9.2. Хаотические множества

Существует довольно много различных определений инвариантных множеств динамических систем с хаотическим поведением (их иногда называют просто хаотическими множествами).

Мы приведем здесь определение хаотического множества, близкое к одному из наиболее известных определений, которое было дано Дивени [De1989] (определение Дивени относилось к полудинамическим системам, см. п. 3.1, а мы определяем хаотические множества для динамических систем, порождаемых гомеоморфизмами).

Введем вначале следующие понятия. Пусть Λ — компактное инвариантное множество динамической системы, порожденной гомеоморфизмом f метрического пространства (M, dist).

Будем говорить, что f обладает *свойством сверхчувствительности* на множестве Λ, если существует число $a > 0$ со следующим свойством: в любой окрестности любой точки $p \in \Lambda$ найдется такая точка q, что $\mathrm{dist}(f^k(p), f^k(q)) \geqslant a$ при некотором $k \in Z$.

Смысл сформулированного свойства сверхчувствительности таков: сколь угодно малая ошибка в выборе начальной точки траектории из множества Λ может привести к существенному расхождению траекторий.

Будем говорить, что f *топологически транзитивен* на множестве Λ, если для любой пары U, V открытых множеств, обладающих тем свойством, что $U \cap \Lambda \neq \emptyset$ и $V \cap \Lambda \neq \emptyset$, то $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ при некотором $k \in Z$.

Ясно, что если в множестве есть плотная траектория гомеоморфизма f, то f топологически транзитивен на множестве Λ.

Будем, наконец, говорить, что компактное инвариантное множество Λ является *хаотическим*, если

(а) множество Λ содержит бесконечно много различных периодических точек, при этом периодические точки плотны в множестве Λ;

(б) на множестве Λ гомеоморфизм f топологически транзитивен;

(в) гомеоморфизм f обладает свойством сверхчувствительности на множестве Λ.

Замечание. Отметим, что после введения Дивени сформулированного выше определения хаотического множества было показано, что условие (в) является следствием условий (а) и (б) (см., например, [GW1993]). Несмотря на это, определение хаотического множества часто приводят именно в терминах условий (а), (б) и (в), так как эти условия выделяют самые характерные черты хаотического поведения динамической системы.

Покажем, что рассмотренное выше инвариантное множество Λ, порожденное подковой Смейла, является хаотическим в смысле данного определения.

Из описанных нами в примере 1.1 свойств гомеоморфизма сдвига σ на пространстве $\mathcal{X}$ следует, что σ обладает свойствами (а) и (б) на всем пространстве $\mathcal{X}$.

Покажем, что выполнение свойств (а) и (б) на множестве Λ для диффеоморфизма f, порождающего подкову, следует из теоремы 9.1.

В п. 3.1 было показано, что при топологическом сопряжении периодические точки переходят в периодические точки.

Таким образом, из существования бесконечного множества периодических точек у гомеоморфизма сдвига σ следует существование бесконечного множества периодических точек диффеоморфизма f, лежащих в Λ.

Остальные утверждения, входящие в свойства (а) и (б), доказываются так же (проверьте это!).

Докажем теперь, что f обладает свойством сверхчувствительности на множестве Λ.

Пусть $a > 0$ — наименьшее из расстояний между точками непересекающихся компактных множеств Q_0 и Q_1. Покажем, что мы можем взять именно это a в качестве константы в определении свойства сверхчувствительности.

Действительно, пусть p — произвольная точка множества Λ и пусть U — произвольная окрестность точки p на плоскости. Положим $a = h(p)$.

Из теоремы 9.1 следует, что существует такая последовательность $b \in \mathcal{X}$ что $b \neq a$ и $q\colon = h^{-1}(b) \in U$.

Так как последовательности a и b различны, существует такое $k \in Z$, что $a_k \neq b_k$. Но это означает, что точки $f^k(p)$ и $f^k(p)$ лежат в различных вертикальных прямоугольниках первого ранга, поэтому

$$|f^k(p) - f^k(q)| \geqslant a.$$

Наше утверждение доказано.

9.3. Гомоклинические точки

Мы вводили понятие гомоклинической точки в п. 6.2.

Рассмотрим такие точки более подробно (в геометрически наиболее простом плоском случае).

Пусть f — диффеоморфизм плоскости. Предположим, что точка p является гиперболической седловой неподвижной точкой диффеоморфизма f. Обозначим через $W^s(p)$ и $W^u(p)$ одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия точки p.

Как уже говорилось, гомоклиническими называются точки пересечения многообразий $W^s(p)$ и $W^u(p)$, отличные от самой неподвижной точки p.

Так как многообразия $W^s(p)$ и $W^u(p)$ инвариантны, траектория гомоклинической точки состоит из гомоклинических точек.

Будем говорить, что точка q — *трансверсальная гомоклиническая точка* диффеоморфизма f, если многообразия $W^s(p)$ и $W^u(p)$ трансверсальны в точке q.

Оказывается, что из наличия трансверсальной гомоклинической точки следует существование инвариантного множества, аналогичного инвариантному множеству, порождаемому подковой Смейла (отсюда, в частности, следует, что в произвольной окрестности трансверсальной гомоклинической точки существует бесконечно много различных периодических точек).

Мы не будем давать строгое доказательство сформулированного утверждения, приведя лишь наглядное геометрическое обоснование.

Рассмотрим гомоклиническую точку q, лежащую на локальном устойчивом многообразии неподвижной точки p (см. рис. 4). Построим прямоугольник Q, внутри которого содержатся точки p и q и отрезок локального устойчивого многообразия между этими точками.

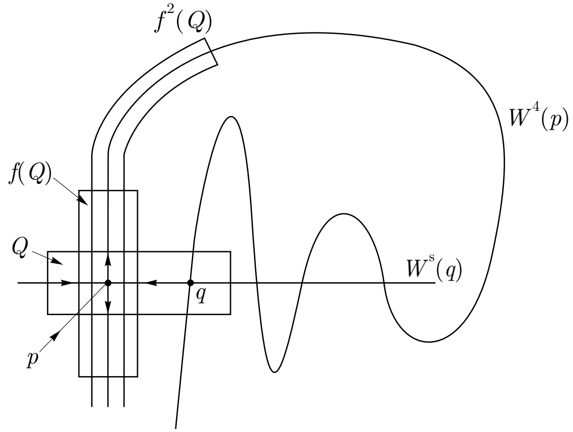

Рис. 4. Подкова, порождаемая трансверсальной гомоклинической точкой

Так как диффеоморфизм f сжимает вдоль направления устойчивого многообразия и растягивает вдоль направления неустойчивого многообразия (в правильно выбранной системе координат), образы $f(Q), f^2(Q), \ldots$ будут выглядеть так, как показано на рис. 4. При применении дальнейших степеней диффеоморфизма f образ прямоугольника Q будет вытягиваться вдоль неустойчивого многообразия $W^u(p)$ и, наконец, пересечет сам прямоугольник Q, образовав подкову.

Таким образом, если диффеоморфизм имеет трансверсальную гомоклиническую точку, то у него есть инвариантные множества с хаотической динамикой.

Следует отметить, что случай нетрансверсальной гомоклинической точки гораздо более сложен для исследования. Здесь мы только приведем пример диффеоморфизма, обладающего нетрансверсальной гомоклинической точкой и не имеющего бесконечного множества периодических точек в окрестности этой гомоклинической точки.

Рассмотрим поток, изображенный на рис. 5. Будем предполагать, что каждая траектория этого потока, не принадлежащая множеству, ограниченному замыканием траектории точки q, стремится к бесконечности хотя бы одним из своих концов.

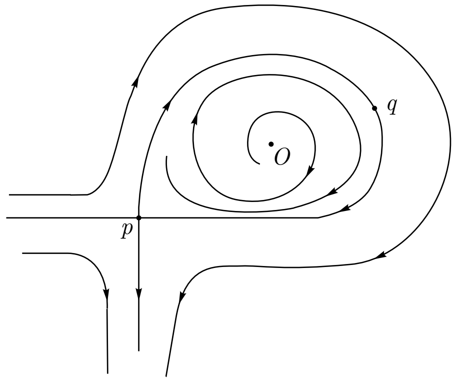

Рис. 5. Поток с нетрансверсальной гомоклинической точкой

Если f — диффеоморфизм сдвига на единичное время по траекториям такого потока, то точка q является нетрансверсальной гомоклинической точкой для неподвижной точки p; в то же время ясно, что f не имеет периодических точек, отличных от o и p.

10. Лемма о замыкании

Леммой о замыкании обычно называют следующее утверждение.

Теорема 10.1. *Пусть p — неблуждающая точка диффеоморфизма f гладкого замкнутого многообразия M. Любая окрестность f в $\mathrm{Diff}^1(M)$ содержит диффеоморфизм g, для которого точка p является периодической.*

Аналог теоремы 10.1 был впервые доказан Ч.Пью [Pu1967] для случая гладких векторных полей. Позже в оригинальном доказательстве Пью были обнаружены неточности, и было опубликовано исправленное доказательство, принадлежащее Пью и Робинсону [PR1983].

Важным следствием теоремы 10.1 является приводимое ниже утверждение, часто называемое теоремой плотности.

Теорема 10.2. *У типичного диффеоморфизма в $\mathrm{Diff}^1(M)$ множество периодических точек плотно в множестве неблуждающих точек.*

Многочисленные модификации леммы о замыкании были получены различными математиками; все имеющиеся к настоящему времени доказательства соответствующих теорем весьма сложны и громоздки.

Приведем одно из современных утверждений о возможности соединения близких траекторий диффеоморфизма при C^1-малом возмущении (именно такая техника и лежит в основе доказательств леммы о замыкании и ее вариантов).

Рассмотрим диффеоморфизм f гладкого замкнутого многообразия M. Фиксируем точку $z \in M$, положительное число d и натуральное число L.

Введем обозначение

$$D(z, d, L, f) = \bigcup_{m=1}^{L} f^{-m}(N(d, z)).$$

Теорема 10.3 (равномерный вариант леммы о соединении траекторий [We2002]). *По любой окрестности V диффеоморфизма f в* $\mathrm{Diff}^1(M)$ *можно указать числа $R > 1$, $d_0 > 0$, натуральное число L и окрестность W диффеоморфизма f в* $\mathrm{Diff}^1(M)$, *обладающие следующим свойством. Пусть точки $p, q, z \in M$, число $d \in (0, d_0)$ и диффеоморфизм $h \in W$ таковы, что*

(1) *выполнены включения* $h^{-m}(N(z,d)) \subset N(d_0, h^{-m}(z))$, $m = 1, \ldots, L$;

(2) *множества* $h^{-m}(N(z,d))$, $m = 1, \ldots, L$, *попарно не пересекаются;*

(3) $p, q \notin D(z, d, L, f)$;

(4) *положительная полутраектория* $O^+(p,h)$ *и отрицательная полутраектория* $O^-(q,h)$ *пересекают множество* $N(d/R, z)$.

Тогда существует такой диффеоморфизм $g \in V$, совпадающий с h вне множества $D(z,d,L,f)$, что $q \in O^+(p,g)$.

Отметим, что аналог леммы о замыкании, в котором C^1 топология заменяется C^0 топологией, является простым утверждением (ниже мы приводим его доказательство); в то же время, вопрос о том, верен ли аналог леммы о замыкании, в котором C^1 топология заменяется C^2 топологией, является одной из основных открытых проблем теории динамических систем (Смейл включил эту проблему в составленный им обзор «Математические проблемы следующего столетия» [Sm1998]).

Докажем аналог теоремы 10.1 для случая C^0 топологии; для упрощения рассмотрений будем рассматривать гомеоморфизм евклидова пространства (так как наша конструкция ограничивается малой окрестностью неблуждающей точки p, то практически то же рассуждение применимо и в случае гомеоморфизма многообразия).

Итак, мы докажем следующее утверждение.

Теорема 10.4. *Пусть p — неблуждающая точка гомеоморфизма f евклидова пространства R^n. По любому $\epsilon > 0$ можно указать такой гомеоморфизм g пространства R^n, что точка p является периодической точкой g и выполнено неравенство*

$$\sup_{x \in R^n} \max(|f(x) - g(x)|, |f^{-1}(x) - |g^{-1}(x)|) < \epsilon. \tag{10.1}$$

Начнем с доказательства простой леммы.

Лемма 10.1. *Пусть l — отрезок, соединяющий точки a, b евклидова пространства R^n. Для любой окрестности U отрезка l найдется такой гомеоморфизм h пространства R^n, что*

(h1) $h(a) = b$;

(h2) $h = \mathrm{Id}$ *вне* U;

(h3)
$$\sup_{x \in R^n} \max(|h(x) - x|, |h^{-1}(x) - x|) \leqslant |b - a|. \tag{10.2}$$

Доказательство. Фиксируем такую скалярную функцию $\alpha(x)$ класса C^∞ в R^n, что выполнены следующие утверждения:

(a1) $\alpha(x) = 1, \quad x \in l$;

(a2) $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1, \quad x \in R^n$;

(a3) $\alpha(x) = 0$ вне U.

Для построения такой функции достаточно взять, например, окрестность отрезка l, лежащую в U и имеющую вид параллелепипеда, и рассмотреть произведение функций, аналогичных функции $\eta(t)$, использованной в доказательстве леммы 4.2.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x)(b - a) \tag{10.3}$$

и обозначим через $\phi(t,x)$ траекторию системы (10.3) с начальными данными $(0,x)$.

Так как

$$a + t(b - a) \in l, \quad t \in [0,1],$$

выполнены равенства

$$\phi(t,a) = a + t(b-a), \quad t \in [0,1], \text{ и } \phi(1,a) = b. \tag{10.4}$$

Положим $h(x) = \phi(1,x)$. Мы показали в п. 1.2, что h — диффеоморфизм (следовательно, и гомеоморфизм) и что $h^{-1}(x) = \phi(-1,x)$.

Второе равенство в (10.4) доказывает свойство (h1) гомеоморфизма h.

Если $x \notin U$, то x — точка покоя системы (10.3), поэтому $h(x) = x$, и свойство (h2) доказано.

Наконец, из неравенства $|\alpha(x)(b-a)| \leqslant |b-a|$ следует свойство (h3) гомеоморфизма h. •

Перейдем к доказательству теоремы 10.2. Если p — неподвижная точка f, то доказывать нечего. Рассмотрим тот случай, когда p — не неподвижная точка.

Существует такая малая шаровая окрестность V точки p, что множества $V' = f^{-1}(V)$, V и $f(V)$ не пересекаются.

Фиксируем натуральное число k (для упрощения обозначений мы не отмечаем зависимость возникающих объектов от k).

Из леммы 3.3 следует, что существуют такие точка r и число ν, что

$$\max(|r-p|, |q-p|) < \frac{1}{k}, \tag{10.5}$$

где $q = f^{\nu}(r)$; будем считать при этом, что k столь велико, что $r, q \in V$.

Пусть $y = f(r)$. Рассмотрим множество

$$Y = \{f^k(y) : 0 \leqslant k \leqslant \nu - 1\}.$$

Предположим, что $p \notin Y$ (если $p \in Y$, то на первом этапе построения g мы полагаем $f_1 = f$).

Пусть $z = f^m(y)$ — ближайшая к p точка множества Y (если таких точек несколько, возьмем в качестве z ту из них, которой соответствует наименьшее значение m).

Так как $q \in Y$, из неравенств (10.5) следует, что

$$|z - p| < \frac{1}{k}.$$

Пусть

$$Y_1 = \{f^k(y) : 0 \leqslant k \leqslant m\}.$$

Если l_1 — отрезок, соединяющий p и z, из выбора точки z следует, что $Y_1 \cap l_1 = \{z\}$.

Поэтому существует такая окрестность V_1 отрезка l_1, что $Y_1 \cap V_1 = \{z\}$. Из наших предположений следует, что $l_1 \subset V$, поэтому мы можем считать, что $V_1 \subset V$.

Применим лемму 10.1 и найдем такой гомеоморфизм h_1, что $h_1(z) = p$, $h_1(x) = x$ вне V_1 и

$$\sup_{x \in R^n} \max(|h_1(x) - x|, |h_1^{-1}(x) - x|) \leqslant \frac{1}{k}. \tag{10.6}$$

Положим $f_1 = h_1 \circ f$ (как уже отмечалось, если $p \in Y$, то мы полагаем $f_1 = f$). Заметим, что $f_1(x) = f(x)$ при $x \notin f^{-1}(V_1)$.

Так как $Y_1 \cap l_1 = \{z\}$, то $f^k(y) \notin f^{-1}(V_1)$ при $0 \leqslant k \leqslant m-1$; поэтому $f_1^k(y) = f^k(y)$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, и $f_1^m(y) = p$ (последнее равенство верно и если $p = f^m(y)$).

Рассмотрим теперь отрезок l_2, соединяющий p и r.

Пусть $Y_1 \cap l_2 = \emptyset$. В этом случае мы находим окрестность V_2 отрезка l_2, лежащую в V и не пересекающуюся с Y_1. Применим лемму 10.1 и найдем такой гомеоморфизм h_2, что $h_2(p) = r$, $h_2(x) = x$ вне V_2 и

$$\sup_{x \in R^n} \max(|h_2(x) - x|, |h_2^{-1}(x) - x|) \leqslant \frac{1}{k}. \tag{10.7}$$

Положим $g = f_1 \circ h_2$. Заметим, что $g(x) = f_1(x)$ при $x \notin V_2$. Так как $f^{-1}(V_1) \subset V'$, $V_2 \subset V$ и $V' \cap V = \emptyset$, то $g^k(y) = f^k(y)$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $g^m(y) = p$ и $g(p) = y$. Следовательно, p — периодическая точка g.

Для того, чтобы доказать, что мы можем добиться выполнения неравенства (10.1), заметим, что

$$|f_1(x) - f(x)| = |h_1(f(x)) - f(x)|$$

и

$$|f_1^{-1}(x) - f^{-1}(x)| = |f^{-1}(h_1(x)) - f^{-1}(x)|,$$

при этом указанные величины следует оценивать лишь на множествах $f^{-1}(V_1)$ и V_1, соответственно.

Аналогично,

$$|g(x) - f_1(x)| = |f_1(h_2(x)) - f_1(x)|,$$

и эту величину следует оценивать лишь для $x \in V_2$, но для таких x выполнено равенство $f_1(x) = f(x)$.

Следовательно,

$$|g(x) - f_1(x)| = |f(h_2(x)) - f(x)|$$

для $x \in V_2$.

Такая же аргументация применима при оценке величины $|g^{-1}(x) - f_1^{-1}(x)|$.

Мы модифицируем гомеоморфизм f на ограниченном множестве, на котором f и f^{-1} равномерно непрерывны. Из неравенств (10.6) и (10.7) и из произвольности k следует, что при любом $\epsilon > 0$ мы можем добиться выполнения неравенства (10.1).

Если же $Y_1 \cap l_2 \neq \emptyset$, то мы строим гомеоморфизм h_2, отображающий p не в r, а в ближайшую к p точку пересечения $Y_1 \cap l_2$ (предлагаем читателю провести соответствующее рассуждение во всех деталях). ●

Мы сформулируем еще один очень важный вариант леммы о замыкании, доказанный Мане [M1982]. Этот результат был использован Мане при доказательстве необходимости гиперболичности неблуждающего множества для структурной устойчивости (см. Приложение 1).

Пусть f — диффеоморфизм гладкого замкнутого многообразия M.

Как обычно, будем называть f*-инвариантной нормированной мерой* такую меру μ на множестве борелевских подмножеств M, что $\mu(M) = 1$ и $\mu(f(A)) = \mu(A)$ для любого борелевского подмножества A.

Фиксируем точку $x \in M$ и число $\epsilon > 0$ и определим множество $B(\epsilon, x, f)$ как множество таких точек $y \in M$, для которых существует целое число n со свойством $\operatorname{dist}(f^n(x), y) \leqslant \epsilon$ (иными словами, $B(\epsilon, x, f)$ — замыкание ϵ-окрестности траектории точки x).

Наконец, определим множество $\Sigma(f)$ как множество точек $x \in M$ со следующим свойством: по любому $\epsilon > 0$ и по любой окрестности V диффеоморфизма в $\operatorname{Diff}^1(M)$ найдутся такие диффеоморфизм $g \in V$, точка $y \in M$ и натуральное число m, что

(1) y — периодическая точка g периода m;

(2) $g = f$ на множестве $M \setminus B(\epsilon, x, f)$;

(3) $\operatorname{dist}(f^k(x), g^k(y)) \leqslant \epsilon$ для всех $0 \leqslant k \leqslant m$.

Теорема 10.5. *Равенство $\mu(\Sigma(f)) = 1$ верно для любой f-инвариантной нормированной меры μ.*

Принципиальное отличие между теоремами 10.1 и 10.5 таково: в стандартной лемме о замыкании (теорема 10.1) мы лишь устанавливаем существование C^1-близкого к f диффеоморфизма g, для которого точка $p \in \Omega(f)$ становится периодической; при этом траектории точки p в системах f и g не обязаны быть близкими.

В теореме 10.5 траектория периодической точки y для возмущенного диффеоморфизма g близка к траектории точки x в системе f на всем периоде (и при этом множество точек x, для которых такое замыкание возможно, имеет полную меру относительно любой f-инвариантной меры).

11. C^0-типичные свойства динамических систем

11.1. Метрика Хаусдорфа

При изучении C^0-типичных свойств динамических систем важную роль играет метрика Хаусдорфа на множестве компактных подмножеств фазового пространства.

Пусть (M, dist) — компактное метрическое пространство. Обозначим через $\mathcal{C}(M)$ множество непустых замкнутых подмножеств пространства M. Так как M компактно, его замкнутые подмножества компактны.

Фиксируем два множества $A, B \in \mathcal{C}(M)$.

Назовем число

$$\operatorname{dev}(A, B) = \max_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B)$$

отклонением множества A от множества B.

Расстоянием по Хаусдорфу между множествами A и B называется число

$$\operatorname{dist}_H(A, B) = \max(\operatorname{dev}(A, B), \operatorname{dev}(B, A)).$$

Покажем, что dist_H — метрика на $\mathcal{C}(M)$.

Ясно, что $\operatorname{dist}_H(A, A) = 0$ и что если $\operatorname{dist}_H(A, B) = 0$, то $A = B$. Докажем неравенство треугольника. Пусть $A, B, C \in \mathcal{C}(M)$.

Если $x \in A$ и $y \in B$, то

$$\operatorname{dist}(x, C) \leqslant \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}(y, C) \leqslant \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}_H(B, C).$$

Поэтому

$$\operatorname{dist}(x, C) \leqslant \min_{y \in B} \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}_H(B, C) = \operatorname{dist}(x, B) + \operatorname{dist}_H(B, C)$$

и
$$\mathrm{dist}(x, C) \leqslant \mathrm{dist}_H(A, B) + \mathrm{dist}_H(B, C).$$
Следовательно,
$$\mathrm{dev}(A, C) \leqslant \mathrm{dist}_H(A, B) + \mathrm{dist}_H(B, C).$$
Так же показывается, что
$$\mathrm{dev}(C, A) \leqslant \mathrm{dist}_H(A, B) + \mathrm{dist}_H(B, C),$$
и мы приходим к искомому неравенству.

Дальше мы всюду рассматриваем пространство $\mathcal{C}(M)$ с топологией, индуцированной метрикой Хаусдорфа.

11.2. Полунепрерывные отображения

Пусть X — топологическое пространство и (M, dist) — метрическое пространство. Рассмотрим отображение
$$F : X \to \mathcal{C}(M).$$
Будем называть отображение F *полунепрерывным сверху,* если для любой точки $x \in X$ и для любого числа $\epsilon > 0$ найдется такая окрестность W точки x в X, что
$$F(y) \subset N(\epsilon, F(x)), \quad y \in W$$
(напомним, что $N(a, A)$ обозначает a-окрестность множества A).

Будем называть отображение F *полунепрерывным снизу,* если для любой точки $x \in X$ и для любого числа $\epsilon > 0$ найдется такая окрестность W точки x в X, что
$$F(x) \subset N(\epsilon, F(y)), \quad y \in W.$$

Фиксируем число $d > 0$. Будем говорить, что отображение F *d-непрерывно* в точке $x \in X$, если существует такая окрестность W точки x в X, что
$$\mathrm{dist}_H(F(y), F(z)) < d$$
для любых $y, z \in W$.

Ясно, что отображение F непрерывно в точке x относительно метрики Хаусдорфа тогда и только тогда, когда F d-непрерывно в x для любого $d > 0$.

Обозначим через $V_d(F)$ множество точек d-непрерывности отображения F.

Лемма 11.1 [T1971]. *Если пространство M компактно и отображение F полунепрерывно сверху или снизу, то множество $V_d(F)$ открыто и плотно в X для любого $d > 0$.*

Доказательство. Мы проведем доказательство для случая полунепрерывного сверху отображения F; случай полунепрерывного снизу отображения рассматривается аналогично.

Открытость множества $V_d(F)$ следует непосредственно из определения. Докажем его плотность.

Так как пространство M компактно, существует такое конечное покрытие M открытыми множествами $U_1, \ldots, U_k$, что
$$\mathrm{diam} U_i < d, \quad i = 1, \ldots, k.$$
Рассмотрим множество $K = \{1, \ldots, k\}$ как топологическое пространство с дискретной топологией; в этом случае множество $K^* = \mathcal{C}(K)$ совпадает с множеством всех непустых подмножеств K.

Фиксируем $L \in K^*$ и определим следующее подмножество $N_L \subset \mathcal{C}(M)$: $A \in N_L$ тогда и только тогда, когда

(1) $A \cap U_i \neq \emptyset$ для любого $i \in L$;

(2) $A \subset \cup_{i \in L} U_i$.

Ясно, что множество N_L открыто в $\mathcal{C}(M)$ для любого L.

Пусть W — произвольное открытое множество в X. Нам достаточно показать, что $W \cap V_d(F) \neq \emptyset$. Рассмотрим множество
$$B_W = \{L \in K^* : \text{ существует такое } x \in W, \text{ что } F(x) \in N_L\}.$$
Так как множество K^* конечно и на нем есть частичный порядок (определяемый включением), множество B_W содержит минимальный (относительно включения) элемент L_0. Минимальность означает в этом случае, что не существует такого $L \in B_W$, что $L \subset L_0$ и $L \neq L_0$.

Рассмотрим такую точку $x_0 \in W$, что $F(x_0) \in N_{L_0}$.

Покажем, что $x_0 \in V_d(F)$, т.е. отображение F d-непрерывно в точке x_0.

Так как отображение F полунепрерывно сверху в x_0, существует такая окрестность V точки x_0, что
$$F(x) \subset \bigcup_{i \in L_0} U_i, \quad x \in V.$$
Будем считать, что $V \subset W$.

Так как L_0 — минимальный элемент B_W, выполнены соотношения
$$F(x) \cap U_i \neq \emptyset, \quad i \in L_0,$$
для любого $x \in V$.

Рассмотрим точки $x, y \in V$; пусть $x' \in F(x)$. Существует такой индекс $i \in L_0$, что $x' \in U_i$. Найдем такое $y' \in F(y)$, что $y' \in U_i$. Из неравенства $\mathrm{diam} U_i < d$ следует, что $\mathrm{dist}(x', y') < d$. Таким образом,

$$\mathrm{dist}_H(F(x), F(y)) < d,$$

и плотность множества $V_d(F)$ доказана. •

Следствие 11.1. *Если пространство M компактно и отображение F полунепрерывно сверху или снизу, то типичный элемент пространства X является точкой непрерывности отображения F.*

11.3. Толерантная устойчивость и теория Такенса

Пусть $H(M)$ — пространство гомеоморфизмов компактного метрического пространства (M, dist) с метрикой ρ_0 (см. п. 2.1). Как и выше, будем обозначать через $\mathcal{C}(M)$ множество непустых замкнутых подмножеств пространства M. Символом $\mathcal{C}(\mathcal{C}(M))$ мы будем обозначать множество непустых замкнутых подмножеств пространства $(\mathcal{C}(M), \mathrm{dist}_H)$.

Для гомеоморфизма $f \in H(M)$ и точки $x \in M$ множество $\mathrm{Cl}\, O(x, f)$ является элементом пространства $\mathcal{C}(M)$.

Равенство

$$F(f) = \mathrm{Cl}\,\{\mathrm{Cl}\, O(x, f) : x \in M\} \tag{11.1}$$

определяет отображение $F : H(M) \to \mathcal{C}(\mathcal{C}(M))$.

Фиксируем $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(\mathcal{C}(M))$.

По аналогии с п. 11.1 рассмотрим отклонение

$$\mathrm{Dev}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max_{A \in \mathcal{A}} \min_{B \in \mathcal{B}} \mathrm{dist}_H(A, B)$$

и расстояние по Хаусдорфу

$$\mathrm{Dist}_H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max(\mathrm{Dev}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \mathrm{Dev}(\mathcal{A}, \mathcal{B})).$$

Так же, как в п. 11.1, показывается, что Dist_H — метрика на $\mathcal{C}(\mathcal{C}(M))$.

Легко понять (проверьте!), что в случае компактного пространства M пространства $\mathcal{C}(M)$ и $(\mathcal{C}(\mathcal{C}(M)), \mathrm{Dist}_H)$ компактны.

Пусть D — подмножество $H(M)$. Будем рассматривать на D топологию, которая не грубее, чем топология, индуцированная метрикой ρ_0 (т. е. из сходимости в этой топологии следует сходимость в стандартной топологии $H(M)$).

В случае гладкого замкнутого многообразия M в качестве D можно взять, например, пространство диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^1(M)$ с его стандартной C^1 топологией.

Говорят, что система $f \in H(M)$ *толерантно D-устойчива*, если f — точка непрерывности ограничения $F|_D$.

В работе [T1971] Такенс сформулировал следующую гипотезу (назвав ее *гипотезой Зимана о толерантной устойчивости*): *любое подмножество $D \subset H(M)$ содержит такое множество D_0* II *категории по Бэру, что любая система $f \in D_0$ толерантно D-устойчива.*

В общем виде гипотеза о толерантной устойчивости неверна; контрпример к ней построил Уайт [Wh1971] (см. также [Pi1994]).

Тем не менее, Такенс получил в [T1971] ряд интересных результатов, связанных с этой гипотезой. Мы изложим некоторые результаты Такенса.

Рассмотрим две системы $f, g \in H(M)$; будем обозначать их траектории $O(f)$ и $O(g)$, соответственно (нас не будут интересовать начальные точки траекторий).

Фиксируем $\epsilon > 0$. Будем говорить, что системы f и g *орбитально ϵ-эквивалентны,* если выполнены следующие условия:

(ОЭ1) для любой траектории $O(f)$ найдется такая траектория $O(g)$, что

(ОЭ1.1) $O(f) \subset N(\epsilon, O(g))$

(ОЭ1.2) $O(g) \subset N(\epsilon, O(f))$;

(ОЭ2) для любой траектории $O(g)$ найдется такая траектория $O(f)$, что

(ОЭ2.1) $O(g) \subset N(\epsilon, O(f))$

(ОЭ2.2) $O(f) \subset N(\epsilon, O(g))$.

Легко понять, что система $f \in D$ толерантно D-устойчива тогда и только тогда, когда по любому $\epsilon > 0$ можно указать такую окрестность V системы f в D, что любая система в V орбитально ϵ-эквивалентна системе f.

Такенс рассмотрел два ослабленных варианта свойства толерантной D-устойчивости.

Как и выше, фиксируем $\epsilon > 0$. Будем говорить, что системы f и g *минимально ϵ-эквивалентны,* (*максимально ϵ-эквивалентны*), если в приведенном выше определении орбитальной ϵ-эквивалентности опущены условия (ОЭ1.1) и (ОЭ2.1) (соответственно, условия (ОЭ1.2) и (ОЭ2.2)).

Таким образом, системы f и g максимально ϵ-эквивалентны, если любая траектория системы f лежит в ϵ-окрестности некоторой траектории системы g и наоборот, любая траектория системы g лежит в ϵ-окрестности некоторой траектории системы f.

Пусть, как и выше, D — подмножество $H(M)$. Обозначим через $D^{\max}$ подмножество D, состоящее из систем f со следующим свойством: по любому $\epsilon > 0$ можно указать такую окрестность W системы f в D, что любые две системы $h, g \in W$ максимально ϵ-эквивалентны (напомним, что мы рассматриваем множество D с топологией, которая не грубее стандартной C^0 топологии).

Аналогично, обозначим через $D^{\min}$ подмножество D, состоящее из систем f со следующим свойством: по любому $\epsilon > 0$ можно указать такую окрестность W системы f в D, что любые две системы $h, g \in W$ минимально ϵ-эквивалентны.

Такенс доказал следующее утверждение.

Теорема 11.1. *Каждое из множеств $D^{\max}$ и $D^{\min}$ является множеством* II *категории по Бэру в D.*

Доказательство. Мы приведем доказательство только для множества $D^{\max}$; случай множества $D^{\min}$ рассматривается аналогично (мы прокомментируем ниже различие в доказательствах).

Фиксируем $\epsilon > 0$ и рассмотрим подмножество Q_ϵ множества D, состоящее из систем f со следующим свойством: можно указать такую окрестность W системы f в D, что любые две системы $h, g \in W$ максимально ϵ-эквивалентны.

Ясно, что каждое из множеств Q_ϵ открыто в D и что верно равенство

$$D^{\max} = \bigcup_{\epsilon > 0} Q_\epsilon.$$

Поэтому для завершения доказательства нам следует показать, что каждое из множеств Q_ϵ плотно в D.

Так как пространство M компактно, существует такое конечное покрытие M открытыми множествами $U_1, \ldots, U_k$, что

$$\mathrm{diam} U_i < \epsilon, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Так же, как в доказательстве леммы 11.1, рассмотрим множество $K = \{1, \ldots, k\}$ как топологическое пространство с дискретной топологией; рассматривая множество $K^* = \mathcal{C}(K)$ тоже с дискретной топологией, определим множество $K^{**} = \mathcal{C}(\mathcal{C}(K))$.

Рассмотрим отображение

$$F^{\max} : D \to K^{**},$$

определяемое так: подмножество $L \subset K$ (т. е. элемент множества K^*) является элементом множества $F^{\max}(f)$ тогда и только тогда, когда существует такая траектория $O(f)$ системы f, что

$$O(f) \cap U_i \neq \emptyset, \quad i \in L$$

(таким образом, траектория $O(f)$ пересекает каждый элемент U_i покрытия с $i \in L$, но мы не требуем, чтобы траектория $O(f)$ принадлежала объединению этих элементов покрытия).

Покажем, что отображение $F^{\max}$ полунепрерывно снизу. Пусть $f \in D$ и $L = \{l_1, \ldots, l_m\} \subset F^{\max}(f)$.

В этом случае существуют такие точка $x \in M$ и целые числа $n_1, \ldots, n_m$, что

$$f^{n_i}(x) \in U_{l_i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Так как множества U_i открыты, существует такая окрестность W системы f в D, что если $g \in W$, то

$$g^{n_i}(x) \in U_{l_i}, \quad i = 1, \ldots, m$$

(здесь мы учитываем, что из сходимости в топологии множества D следует сходимость в стандартной топологии $H(M)$).

Таким образом, $L \subset F^{\max}(f)$. Так как множество K^* конечно, отсюда следует, что отображение $F^{\max}$ полунепрерывно снизу.

Множество K^{**} дискретно, поэтому из леммы 11.1 вытекает теперь, что существует открытое и плотное подмножество D' в D, на котором отображение $F^{\max}$ локально постоянно. Докажем, что $D' \subset Q_\epsilon$.

Покажем для этого, что если $F^{\max}(g) = F^{\max}(h)$, то системы g и h максимально ϵ-эквивалентны. Рассмотрим траекторию $O(g)$ и найдем такой элемент $L \in K^*$, что

$$O(g) \cap U_i \neq \emptyset, \quad i \in L, \text{ и } O(g) \subset \bigcup_{i \in L} U_i.$$

Так как $L \in F^{\max}(g)$, то $L \in F^{\max}(h)$, поэтому существует такая траектория $O(h)$, что

$$O(h) \cap U_i \neq \emptyset, \quad i \in L.$$

Ясно, что в этом случае $O(f) \subset N(\epsilon, O(h))$.

Таким образом, системы g и h удовлетворяют аналогам условий (ОЭ1.1) и (ОЭ2.1) в определении орбитальной ϵ-эквивалентности. Теорема доказана. •

Прокомментируем теперь различие в доказательстве теоремы 11.1 для случаев множеств $D^{\max}$ и $D^{\min}$.

Для доказательства в случае множества $D^{\min}$ мы вновь фиксируем $\epsilon > 0$ и рассматриваем такое конечное покрытие M замкнутыми множествами $U_1, \ldots, U_k$, что

$$\mathrm{diam} U_i < \epsilon, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Рассмотрим отображение

$$F^{\min} : D \to K^{**},$$

определяемое так: подмножество $L \subset K$ является элементом множества $F^{\min}(f)$ тогда и только тогда, когда существует такая траектория $O(f)$ системы f, что

$$O(f) \subset \bigcup_{i \in L} U_i.$$

Покажем, что отображение $F^{\min}$ полунепрерывно сверху. Пусть $f \in D$; рассмотрим множество $L \subset K$, не лежащее в $F^{\min}(f)$. В этом случае для любой точки $x \in M$ найдется такой индекс $n(x)$, что

$$f^{n(x)}(x) \notin \bigcup_{i \in L} U_i.$$

Множества M и $\cup_{i \in L} U_i$ компактны, поэтому существуют такие числа $T > 0$ и $d > 0$, что для любой точки $x \in M$ найдется такой индекс $n(x)$, $|n(x)| \leqslant T$, что

$$\operatorname{dist}\left(f^{n(x)}(x), \bigcup_{i \in L} U_i\right) > d. \qquad (11.2)$$

Существует такая окрестность W системы f, что для любой системы $g \in W$ выполнен аналог неравенства (11.2) с $d/2$ вместо d. Поэтому $L \notin F^{\min}(g)$ для $g \in W$. Из конечности множества K^* вытекает, что отображение $F^{\min}$ полунепрерывно сверху.

Дальнейшие рассуждения полностью повторяют доказательство теоремы 11.1.

11.4. Аттракторы динамических систем

Пусть f — гомеоморфизм топологического пространства M.

Будем говорить, что множество $I \subset M$ *устойчиво по Ляпунову* в динамической системе f, если

(УЛ1) множество I — компактное инвариантное множество системы f;

(УЛ2) по любой окрестности U множества I можно указать такую его окрестность V, что $O^+(V,f) \subset U$ (напомним, что $O^+(V,f)$ — положительная полутраектория множества V в системе f).

Будем говорить, что множество $I \subset M$ является *аттрактором* динамической системы f, если

(А1) множество I устойчиво по Ляпунову;

(А2) существует такая окрестность W множества I, что если $x \in W$, то

$$f^k(x) \to I, \quad k \to \infty. \qquad (11.3)$$

Иногда вместо термина аттрактор используется термин *притягивающее множество*.

Рассмотрим множество тех $x \in M$, для которых выполнено соотношение (11.3); это множество называется *областью притяжения аттрактора* I и обозначается $D(I)$.

Начнем с описания некоторых основных свойств аттракторов.

Лемма 11.2. *Множество $D(I)$ открыто.*

Доказательство. Рассмотрим точку $x \in D(I)$. Так как выполнено соотношение (11.3), существует такое m, что $f^m(x) \in W$ (где W — окрестность из определения аттрактора I). Тогда существует такая окрестность N точки x, что $f^m(N) \subset W$. Ясно, что $N \subset D(I)$. •

Лемма 11.3. *Если K — компактное подмножество $D(I)$ и U — окрестность аттрактора I, то найдется такое m_0, что $f^m(K) \subset U$ при $m \geqslant m_0$.*

Доказательство. Предположим, напротив, что существуют такие компактное подмножество K области притяжения $D(I)$ и окрестность U аттрактора I, что для любого m_0 найдется такое $m \geqslant m_0$, что

$$f^m(K) \setminus U \neq \emptyset. \qquad (11.4)$$

Найдем такую последовательность точек $x_m \in K, m \geqslant 0$, что $f^m(x_m) \notin U$. Пусть y — предельная точка последовательности x_m (считаем для простоты, что $y = \lim_{m\to\infty} x_m$).

Тогда $y \in K$, поэтому $y \in D(I)$. Так как множество I устойчиво по Ляпунову, найдется такая окрестность V множества I, что $f^k(V) \subset U$ при $k \geqslant 0$.

Найдем такое k_0, что $f^{k_0}(y) \in V$. Если m достаточно велико, то $f^{k_0}(x_m) \in V$. Поэтому

$$f^{k+k_0}(x_m) \in U, \quad k \geqslant 0.$$

При $m > k_0$ и $k = m - k_0$ мы получаем противоречие с соотношением (11.4). Лемма доказана. •

Дальше мы будем предполагать, что M — метрическое пространство (в частности, мы будем использовать следующее свойство, которым обладают метрические пространства: если точка x не принадлежит компакту K, то существует окрестность множества K, не содержащая x). Мы не будем повторять это предположение до конца данного пункта.

Следствие 11.1. *Если K — компактное подмножество $D(I)$ и $x \notin I$, то найдется такое m_0, что $f^m(x) \notin K$ при $m \leqslant -m_0$.*

Доказательство. Так как точка x не принадлежит компакту I, то существует окрестность U аттрактора I, не содержащая x. Из леммы 11.3 следует, что существует такое m_0, что $f^m(K) \subset U$ при $m > m_0$. Ясно, что это m_0 обладает сформулированным свойством. •

Опишем одну общую конструкцию, позволяющую устанавливать существование аттракторов динамических систем.

Теорема 11.2. *Предположим, что для открытого множества U в M найдется такое натуральное число N, что*

$$f^N(\mathrm{Cl}\, U) \subset U \quad \text{и} \quad f^{N+1}(\mathrm{Cl}\, U) \subset U. \tag{11.5}$$

Тогда множество

$$I = \bigcup_{k \geqslant 0} f^{kN}(\mathrm{Cl}\, U) \tag{11.6}$$

является аттрактором динамической системы f, и $\mathrm{Cl}\, U \subset D(I)$.

Доказательство. Из первого условия в (11.5) следует, что

$$\mathrm{Cl}\, U \supset f^N(\mathrm{Cl}\, U) \supset f^{2N}(\mathrm{Cl}\, U) \supset \ldots. \tag{11.7}$$

Поэтому множество I, определенное равенством (11.6), является непустым компактом.

Заметим, что для любого натурального l верно равенство

$$(l+1)(N+1)N = l(N+1)N + N^2 + N.$$

Поэтому

$$f^{(l+1)(N+1)N}(\mathrm{Cl}\, U) = f^{l(N+1)N+N^2}(f^N(\mathrm{Cl}\, U) \subset$$
$$\subset f^{l(N+1)N+N^2}(\mathrm{Cl}\, U).$$

Аналогично показывается, что

$$f^{(l+1)(N+1)N}(\mathrm{Cl}\, U) \subset f^{l(N+1)N+N(N-1)}(f^N(\mathrm{Cl}\, U) \subset$$
$$\subset \ldots \subset f^{l(N+1)N}(\mathrm{Cl}\, U). \tag{11.8}$$

Из соотношений (11.7) и (11.8) следует, что

$$I = \bigcup_{l > 0} f^{l(N+1)N}(\mathrm{Cl}\, U).$$

Применяя второе условие в (11.5), определим компакт

$$I_1 = \bigcup_{k \geqslant 0} f^{k(N+1)}(\mathrm{Cl}\, U).$$

Так же, как и выше, показывается, что

$$I_1 = \bigcup_{l > 0} f^{l(N+1)N}(\mathrm{Cl}\, U),$$

поэтому $I = I_1$.

Заметим теперь, что

$$f^N(I) = \bigcup_{k \geqslant 1} f^{kN}(\mathrm{Cl}\, U) = I.$$

Аналогично,

$$f^{N+1}(I) = f^{N+1}(I_1) = I_1 = I.$$

Следовательно,

$$f^{N+1}(I) = f^N(I), \quad \text{и } f(I) = I.$$

Таким образом, I — инвариантное множество системы f.

Докажем, что множество I устойчиво по Ляпунову. Фиксируем произвольную окрестность Y множества I. Так как I — компактное инвариантное множество, найдется такая окрестность V_0 множества I, что

$$f^m(V_0) \subset Y, \quad m = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Из соотношений (11.6) и (11.7) следует, что существует такое m_0, что

$$f^{mN}(\mathrm{Cl}\, U) \subset V_0, \quad m \geqslant m_0. \tag{11.9}$$

Положим $V = f^{m_0 N}(U)$ и рассмотрим произвольное $k \geqslant 0$. Представляя k в виде

$$k = lN + l_1, \quad l \geqslant 0,\ 0 \leqslant l_1 \leqslant N-1,$$

мы получаем соотношения

$$f^k(V) = f^{l_1}(f^{lN}(V)) = f^{l_1}(f^{(m_0+l)N}(U)) \subset f^{l_1}(V_0) \subset Y,$$

из которых следует устойчивость I по Ляпунову.

Аналогичные рассуждения, использующие тот факт, что по любой окрестности V_0 множества I мы можем указать число m_0, для которого выполнены соотношения (11.9), показывают, что множество I обладает свойством (A2). При этом в качестве W можно взять любое открытое множество, содержащее $\mathrm{Cl}\, U$ и такое, что $f^N(W) \subset U$ (ясно, что сформулированными свойствами обладает любая достаточно малая окрестность $\mathrm{Cl}\, U$).

Очевидно, отсюда следует искомое включение $\mathrm{Cl}\, U \subset D(I)$. •

Дальше мы будем предполагать, что M — компактное метрическое пространство.

Будем говорить, что аттрактор I динамической системы f *устойчив в $H(M)$ по отношению к метрике Хаусдорфа*, если по любому $\epsilon > 0$ можно указать такую окрестность W системы f в $H(M)$, что у любой системы $g \in W$ есть такой аттрактор I', что

$$\mathrm{dist}_H(I, I') < \epsilon.$$

М. Херли изучил в [Hu1982] устойчивость аттракторов в $H(M)$ по отношению к метрике Хаусдорфа.

Теорема 11.3 [Hu1982]. *Любой аттрактор типичной динамической системы устойчив в $H(M)$ по отношению к метрике Хаусдорфа.*

Мы не будем доказывать здесь теорему Херли, а получим ее как следствие более общего утверждения.

Введем на пространстве $\mathcal{C}(M)$ еще одну метрику: положим

$$R_0(A, B) = \max(\mathrm{dist}_H(A, B), \mathrm{dist}_H(\mathrm{Cl}\,(M \setminus A), \mathrm{Cl}\,(M \setminus B))$$

(мы сохраняем обозначение, введенное автором в [Pi1994]). Легко показать, что R_0 — действительно метрика.

Упражнение 11.2. Докажите, что метрики dist_H и R_0 порождают различные топологии на пространстве $\mathcal{C}(D^2)$, где D^2 — двумерный диск.

Будем говорить, что аттрактор I динамической системы f *устойчив в $H(M)$ по отношению к метрике R_0*, если по любому $\epsilon > 0$ можно указать такую окрестность W системы f в $H(M)$, что у любой системы $g \in W$ есть такой аттрактор I', что

$$R_0(I, I') < \epsilon.$$

Теорема 11.4. *Любой аттрактор типичной динамической системы устойчив в $H(M)$ по отношению к метрике R_0.*

Ясно, что $\mathrm{dist}_H(A, B) \leqslant R_0(A, B)$, поэтому теорема 11.3 следует из теоремы 11.4.

Предпошлем доказательству теоремы 11.4 простую лемму.

Лемма 11.4. *Если $I \in \mathcal{C}(M)$, то*

$$\lim_{d \to 0} \mathrm{dist}_H(M \setminus N(d, I)), \mathrm{Cl}\,(M \setminus I)) = 0.$$

Доказательство. Очевидно,

$$M \setminus N(d, I) \subset \mathrm{Cl}\,(M \setminus I),$$

поэтому нам следует только доказать , что

$$\lim_{d \to 0} \mathrm{dev}(M \setminus N(d, I)), \mathrm{Cl}\,(M \setminus I)) = 0. \tag{11.10}$$

Предположив противное, мы найдем такие число $a > 0$ и последовательность точек $x_k \in \mathrm{Cl}\,(M \setminus I)$, что

$$\mathrm{dist}(x_k, N(1/k, I)) \geqslant a.$$

Если x — предельная точка последовательности x_k (напомним, что пространство M компактно), то при достаточно больших k выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(x, M \setminus N(1/k, I)) \geqslant a/2. \tag{11.11}$$

Если $x \notin I$, то $x \notin N(1/k, I)$ при больших k, поэтому неравенства (11.11) невозможны.

Если же $x \in I$, то ясно, что $x \in \partial I$. Найдем такую последовательность точек $y_l \in M \setminus I$, что $y_l \to x$ при $l \to \infty$. Тогда существует такое m, что

$$\mathrm{dist}(y_m, x) < a/2. \tag{11.12}$$

Так как $y_m \notin I$, $y_m \notin N(1/k, I)$ при больших k, и мы получаем противоречие между соотношениями (11.11) и (11.12).

Таким образом, равенство (11.10) доказано. •

Докажем теперь теорему 11.4.

Продолжим метрику Хаусдорфа dist_H с $\mathcal{C}(M)$ на $\mathcal{C}(M) \cup \{\emptyset\}$, считая, что

$$\mathrm{dist}_H(\emptyset, A) = \mathrm{diam} M,$$

если $A \neq \emptyset$. Легко понять (проверьте!), что лемма 11.1 (и следствие 11.1) остаются верными при рассмотрении отражений

$$F\colon X \to \mathcal{C}(M) \cup \{\emptyset\}.$$

Пусть U — непустое открытое множество в M. Сопоставим ему два отображения

$$G^+, G^- : H(M) \to \mathcal{C}(M) \cup \{\emptyset\}$$

следующим образом. Если у системы f есть такой аттрактор I, что

$$I \subset U \subset \mathrm{Cl}\, U \subset D(I), \tag{11.13}$$

положим

$$G^+(f) = I \ \text{ и } \ G^-(f) = \mathrm{Cl}\,(M \setminus I).$$

В противном случае положим

$$G^+(f) = M \ \text{ и } \ G^-(f) = \emptyset.$$

Для того чтобы показать, что отображения G^+ и G^- корректно определены, докажем, что система f не может иметь больше одного аттрактора, удовлетворяющего условиям (11.13).

Предположим противное; пусть у системы f есть два таких аттрактора $I_1 \neq I_2$, что

$$I_1 \subset U \subset \mathrm{Cl}\, U \subset D(I_1)$$

и

$$I_2 \subset U \subset \mathrm{Cl}\, U \subset D(I_2).$$

Пусть $I_1 \setminus I_2 \neq \emptyset$; рассмотрим точку $x \in I_1 \setminus I_2$. Так как множество I_1 инвариантно, $O(x, f) \subset I_1 \subset \mathrm{Cl}\, U$. Из следствия 11.1, примененного к x и I_2, вытекает что $f^m(x) \notin \mathrm{Cl}\, U$ при некотором m. Полученное противоречие показывает, что отображения G^+ и G^- корректно определены.

Покажем теперь, что отображение G^+ полунепрерывно сверху, а отображение G^- полунепрерывно снизу.

Начнем с отображения G^+. Фиксируем систему $f \in H(M)$. Если $G^+(f) = M$, то полунепрерывность отображения G^+ в f сверху очевидна. Предположим, что выполнены условия (11.13) и $G^+(f) = I$. Возьмем столь малое $d > 0$, что $N(d, I) \subset U$.

Из леммы 11.3 следует существование такого натурального числа n, что

$$f^n(\mathrm{Cl}\, U) \subset N(d, I) \ \text{ и } \ f^{n+1}(\mathrm{Cl}\, U) \subset N(d, I).$$

Существует такая окрестность W системы f в $H(M)$, что если $g \in W$, то

$$g^n(\mathrm{Cl}\, U) \subset N(d, I) \ \text{ и } \ g^{n+1}(\mathrm{Cl}\, U) \subset N(d, I).$$

По теореме 11.2 существует такой аттрактор I' системы g, что

$$I' \subset U \subset \mathrm{Cl}\, U \subset D(I').$$

Ясно, что $G^+(g) = I'$, поэтому отображение G^+ полунепрерывно сверху в f.

Рассмотрим теперь отображение G^- и систему f. Если $G^+(f) = \emptyset$, то полунепрерывность отображения G^+ в f снизу очевидна. Предположим, что выполнены условия (11.13) и $G^-(f) = \mathrm{Cl}\,(M \setminus I)$.

Фиксируем $d > 0$. Используя лемму 11.4, найдем столь малое $b > 0$, что $N(b, I) \subset U$ и

$$\mathrm{dist}_H(M \setminus N(b, I), \mathrm{Cl}\,(M \setminus I)) < a. \tag{11.14}$$

Те же рассуждения, что были применены выше к случаю отображения G^+, показывают, что существует такая окрестность W системы f в $H(M)$, что у любой системы $g \in W$ есть такой аттрактор I', что

$$I' \subset N(b, I) \subset U \subset \mathrm{Cl}\, U \subset D(I').$$

Докажем, что в этом случае выполнено включение

$$\mathrm{Cl}\,(M \setminus I) \subset N(d, \mathrm{Cl}\,(M \setminus I')), \tag{11.15}$$

из которого следует, что

$$G^-(g) \subset N(d, G^-(f)).$$

Рассмотрим точку $x \in \mathrm{Cl}\,(M \setminus I)$. Так как $I' \subset N(d, I)$,

$$M \setminus N(d, I) \subset M \setminus I' \subset \mathrm{Cl}\,(M \setminus I'),$$

поэтому

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{Cl}(M \setminus I')) \leqslant \operatorname{dist}(x, M \setminus N(d, I)) < d$$

(здесь мы ссылаемся на неравенство (11.14)). Это и доказывает включение (11.15) (следовательно, и полунепрерывность отображения G^+ в f снизу).

Мы предположили, что M — компактное метрическое пространство. Поэтому у его топологии существует счетная база. Следовательно, существует счетное семейство $\mathcal{U} = \{U_m, m \in Z\}$ открытых подмножеств M со следующим свойством: для любой пары K_1, K_2 непересекающихся компактных подмножеств M существует такое множество U_m из этого семейства $\mathcal{U}$, что

$$K_1 \subset U_m \ \text{ и } \ K_2 \cap \operatorname{Cl} U_m = \emptyset.$$

Определим для множеств U_m семейства $\mathcal{U}$ соответствующие отображения G_m^+ и G_m^-; пусть C_m^+ и C_m^- — множества точек непрерывности отображений G_m^+ и G_m^-.

Из следствия 11.1 (и из доказанной выше полунепрерывности отображений G_m^+ и G_m^-) вытекает, что множество

$$C^* = \bigcap_{m \in Z} (C_m^+ \cap C_m^-)$$

является множеством II категории в $H(M)$. Покажем, что если $f \in C^*$, то любой аттрактор I системы f непрерывен в $H(M)$ относительно метрики R_0.

Пусть I — аттрактор системы $f \in C^*$ (ограничимся рассмотрением случая $I \neq M$, оставив случай $I = M$ читателю). Множества I и $M \setminus D(I)$ — непересекающиеся компакты, поэтому найдется такое множество U_m из семейства $\mathcal{U}$, что

$$I' \subset U \subset \operatorname{Cl} U \subset D(I').$$

Фиксируем $\epsilon > 0$. Так как отображения G_m^+ и G_m^- непрерывны в f, существует такая окрестность W системы f в $H(M)$, что если $g \in W$, то

$$\operatorname{dist}_H(G_m^+(g), G_m^+(f)) < \epsilon \ \text{ и } \ \operatorname{dist}_H(G_m^-(g), G_m^-(f)) < \epsilon. \qquad (11.16)$$

Из определения отображений G_m^+ и G_m^- следует, что в этом случае множество $I' = G_m^+(g)$ является аттрактором системы g, а $G_m^-(g) = \operatorname{Cl}(M \setminus I')$. Поэтому из неравенств (11.16) вытекает, что $R_0(I, I') < \epsilon$. Теорема доказана. ●

Аттракторы, которые устойчивы относительно метрики R_0, обладают важными качественными свойствами. Отметим одно из таких свойств систем на гладких замкнутых многообразиях (оно имеет место и для систем на более общих пространствах, но для упрощения доказательства мы ограничимся случаем системы на гладком замкнутом многообразии).

Теорема 11.5. *Пусть M — гладкое замкнутое многообразие. Если аттрактор I системы $f \in H(M)$ отличен от M и устойчив в $H(M)$ относительно метрики R_0, то его граница $J = \partial I$ устойчива по Ляпунову.*

Доказательство. Предположим, напротив, что граница J аттрактора I неустойчива. В этом случае существуют такие число $a > 0$ и последовательности точек x_m и чисел k_m, что

$$\operatorname{dist}(x_m, J) \to 0, \quad m \to \infty; \quad \operatorname{dist}\left(f^{k_m}(x_m), J\right) \geqslant a.$$

Ясно, что такое возможно лишь если аттрактор I не совпадает со своей границей J (так как сам аттрактор устойчив по Ляпунову), т. е. его внутренность $\operatorname{Int} I$ непуста.

Кроме того, ясно, что такие точки x_m должны принадлежать $\operatorname{Int} I$, а числа k_m должны стремиться к ∞ (так как J — компактное инвариантное множество).

Пусть $x \in J$ — предельная точка последовательности x_m (будем считать для простоты, что $x_m \to x$, $m \to \infty$). Так как x — точка границы I, существует такая последовательность точек $y_m \in M \setminus I$, что $y_m \to x$, $m \to \infty$.

Множество $D(I)$ открыто, поэтому существует такое $b > 0$, что

$$\operatorname{Cl}(N(b, I)) \subset D(I).$$

Из следствия 11.1 вытекает что существуют такие числа $l_m<0$, что $f^{l_m}(y_m) \notin \operatorname{Cl}(N(b, I))$.

Положим $\eta_m = f^{l_m}(y_m)$ и $\xi_m = f^{k_m}(x_m)$. Рассмотрим множества

$$Y_m = \{f^l(y_m) : l_m \leqslant l \leqslant 0\}$$

и

$$X_m = \{f^k(x_m) : 0 \leqslant l \leqslant k_m\}.$$

Выберем маленькую координатную окрестность V точки x и будем считать, что эта окрестность выпукла в локальных координатах (дальше, говоря о точках окрестности V, мы будем рассматривать только локальные координаты этих точек, поэтому мы можем считать, что все происходящее в V происходит в области евклидова пространства; это позволит нам применять лемму 10.1).

Будем рассматривать столь большие значения m, чтобы точки x_m и y_m лежали в V; пусть L_m — отрезок, соединяющий точки x_m и y_m.

Предположим вначале, что

$$X_m \cap L_m = \{x_m\} \ \text{ и } \ Y_m \cap L_m = \{y_m\}. \tag{11.17}$$

В этом случае существует такая окрестность U_m отрезка L_m, что $X_m \cap U_m = \{x_m\}$ и $Y_m \cap U_m = \{y_m\}$.

Применим лемму 10.1 и найдем такой гомеоморфизм h_m многообразия M, что $h_m(y_m) = x_m$ и h_m совпадает с Id вне окрестности U_m. Пусть $g_m = h_m \circ f$.

Ясно, что мы можем выбирать гомеоморфизмы h_m так, чтобы

$$\rho_0(g_m, f) \to 0, \quad m \to \infty. \tag{11.18}$$

Так как $g_m(y) = y$ при $y \notin (X_m \cup Y_m) \setminus \{y_m, f^{-1}(y_m)\}$ и $g_m(f^{-1}(y_m)) = f(x_m)$, верно включение

$$\xi_m \in O(\eta_m, g_m). \tag{11.19}$$

По предположению, аттрактор I устойчив в $H(M)$ относительно метрики R_0, поэтому из соотношения (11.18) следует, что у систем g_m есть такие аттракторы I_m, что

$$R_0(I, I_m) \to 0, \quad m \to \infty. \tag{11.20}$$

Если $\eta_m \in I_m$, то

$$\mathrm{dist}_H(I_m, I) \geqslant b. \tag{11.21}$$

Если $\eta_m \notin I_m$, то из включения (11.19) следует, что $\xi_m \in M \setminus I_m$, поэтому

$$\mathrm{dist}_H(\mathrm{Cl}\,(M \setminus I), \mathrm{Cl}\,(M \setminus I_m)) \geqslant a. \tag{11.22}$$

Из соотношения (11.20) вытекает, что ни одно из неравенств (11.21), (11.22) не может выполняться при больших m. Полученное противоречие доказывает теорему 11.5 в том случае, когда выполнено условие (11.17).

В том случае, когда условие (11.17) не выполнено, следует найти на отрезке L_m ближайшие друг кдругу точки y' и x' множеств Y_m и X_m. После этого доказательство повторяется (с естественной заменой множеств Y_m и X_m на их отрезки от η_m до y' и от x' до ξ_m). •

Будем считать, что пустое множество (граница аттрактора, совпадающего со всем многообразием) устойчиво по Ляпунову. Тогда мы можем сформулировать важное утверждение, вытекающее из теорем 11.4 и 11.5.

Теорема 11.6. *Пусть M — гладкое замкнутое многообразие. У типичной системы $f \in H(M)$ граница любого аттрактора устойчива по Ляпунову.*

Упражнение 11.3. Приведите пример системы, у которой есть такой аттрактор I, что I устойчив в $H(M)$ относительно метрики Хаусдорфа, а его граница не является устойчивой по Ляпунову.

Пусть $I \subset M$ — непустое компактное множество. Будем говорить, что I — *квазиаттрактор* системы f, если существует такое счетное семейство аттракторов I_m, $m \geqslant 0$, системы f, что

$$I = \bigcap_{m \geqslant 0} I_m.$$

Ясно, что квазиаттрактор f-инвариантен.

Определим область притяжения $D(I)$ квазиаттрактора I как множество тех $x \in M$, для которых выполнено соотношение (11.3).

Отметим, что в отличие от области притяжения аттрактора область притяжения квазиаттрактора не всегда открыта.

Пример 11.1. Пусть $M = S^1$ с координатой $x \in [0, 1)$. Рассмотрим гладкую скалярную функцию $F(x)$, для которой выполнены следующие соотношения:

$$F(x) = 0, \quad x \in \{0, 1/2, 1/3, \dots\},$$
$$F(x) > 0, \quad x \in (0, 1),$$

и

$$F(x) < 0, \quad x \in (1/3, 1/2) \cup (1/4, 1/3) \cup \dots .$$

Пусть $\phi(t, x)$ — поток на S^1, порожденный системой

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

и пусть $f(x) = \phi(1, x)$.

Очевидно, множества

$$I_m = [0, 1/(m + 3)], \quad m \geqslant 0,$$

являются аттракторами системы f, а множество

$$I = \bigcap_{m \geqslant 0} I_m$$

является ее квазиаттрактором.

Область притяжения этого квазиаттрактора есть $(1/2,1)\cup\{0\}$, поэтому она не открыта.

Упражнение 11.3. Докажите, что любой квазиаттрактор устойчив по Ляпунову.

Легко понять, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Рассмотрите для примера динамическую систему, задаваемую тождественным отображением компактного метрического пространства M. Ясно, что любое компактное подмножество M устойчиво по Ляпунову; в то же время единственным аттрактором системы является все пространство M.

Оказывается, соответствующее утверждение верно для C^0-типичных систем.

Теорема 11.7. *Пусть M — гладкое замкнутое многообразие. Любое устойчивое по Ляпунову множество типичной системы $f\in H(M)$ является квазиаттрактором.*

Мы отсылаем читателя к книге [Pi1994] за доказательством теоремы 11.7.

Из теорем 11.6 и 11.7 вытекает, что если M — гладкое замкнутое многообразие, то граница любого аттрактора типичной системы $f\in H(M)$ является квазиаттрактором.

12. Отслеживание псевдотраекторий динамических систем

12.1. Определения и результаты

Пусть f - гомеоморфизм метрического пространства (M, dist).

Фиксируем $d>0$. Будем называть *d-псевдотраекторией* системы f последовательность

$$\xi=\{x_k\in M\ : k\in Z\}, \tag{12.1}$$

для которой выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, f(x_k))<d, \quad k\in Z. \tag{12.2}$$

Основное свойство динамических систем, связанное с понятием псевдотраекторий, получило название свойства отслеживания.

Будем говорить, что система f обладает *свойством отслеживания*, если по любому $\epsilon>0$ можно указать такое d, что для любой d-псевдотраектории ξ найдется такая точка $x\in M$, что выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(x_k, f^k(x))<\epsilon, \quad k\in Z \tag{12.3}$$

(в этом случае говорят, что псевдотраектория ξ ϵ-отслеживается точной траекторией $O(x,f)$).

Если система обладает свойством отслеживания, то около любой ее приближенной траектории есть настоящая. Это означает, например, что построенная с помощью численных методов приближенная картина траекторий системы соответствует реальной структуре множества траекторий.

Наряду со сформулированным свойством отслеживания изучается еще одно, так называемое обратное свойство отслеживания. В этом случае вопрос ставится так. Предположим, что нам дано некоторое множество псевдотраекторий. Можем ли мы для каждой точной траектории найти близкую к ней псевдотраекторию из данного множества?

Конечно, в этом случае ответ зависит не только от изучаемой динамической системы, но и от заданного множества псевдотраекторий. К настоящему времени задача обратного отслеживания, поставленная впервые в работе автора [CP1995], изучена для довольно широкого набора множеств псевдотраекторий.

В данной книге мы ограничимся одним из таких множеств, введенных автором в работе [Pi2002].

Будем называть d-методом класса Θ_s семейство непрерывных отображений $\psi_k\colon M \to M,\ k \in Z$, для которых выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(\psi_k(x), f(x)) < d, \quad x \in M,\ k \in Z. \tag{12.4}$$

Будем говорить, что псевдотраектория вида (12.1) порождена d-методом $\{\psi_k\}$ класса Θ_s, если выполнены равенства

$$x_{k+1} = \psi_k(x_k), \quad k \in Z.$$

Будем говорить, наконец, что система f обладает *свойством обратного отслеживания* относительно класса Θ_s, если по любому $\epsilon > 0$ можно указать такое d, что для любой точки $x \in M$ и для любого d-метода $\{\psi_k\}$ класса Θ_s найдется такая псевдотраектория ξ, порожденная этим методом, что выполнены неравенства (12.3).

Исследованию задачи об отслеживании псевдотраекторий, впервые изученной Аносовым и Боуэном, посвящено много работ (отметим также монографии автора [Pi1999] и Палмера [Palm2000], содержащие обзоры современного состояния теории отслеживания).

Задача об обратном отслеживании изучена сравнительно меньше (отметим, например, работы [ADKKP1996,Pi2002]).

Кроме описанных выше свойств отслеживания изучаются их липшицевы варианты.

Будем говорить, что система f обладает *липшицевым свойством отслеживания*, если существуют такие положительные константы $\mathcal{L}$ и d_0, что для любой d-псевдотраектории ξ с $d \leqslant d_0$ найдется такая точка $x \in M$, что выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(x_k, f^k(x)) \leqslant \mathcal{L}d, \quad k \in Z. \tag{12.5}$$

Будем говорить, что система f обладает *липшицевым обратным свойством отслеживания* относительно класса Θ_s, если существуют такие положительные константы $\mathcal{L}$ и d_0, что для любой точки $x \in M$ и для любого d-метода $\{\psi_k\}$ класса Θ_s с $d \leqslant d_0$ найдется такая псевдотраектория ξ, порожденная этим методом, что выполнены неравенства (12.5).

В данной книге мы докажем следующие основные утверждения теории отслеживания (для упрощения изложения мы ограничимся рассмотрением диффеоморфизмов евклидова пространства).

Теорема 12.1. *Если Λ — гиперболическое множество диффеоморфизма f, то f обладает липшицевым свойством отслеживания в окрестности множества Λ.*

Отметим, что при доказательстве теоремы 12.1 мы используем конструкцию, предложенную в [ADKKP1996].

Для формулировки теоремы об условиях обратного отслеживания мы введем одно важное понятие, возникшее в теории структурной устойчивости. Пусть f — диффеоморфизм гладкого многообразия M.

Фиксируем числа $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$ и точку $p \in M$. Будем говорить, что f обладает (C,λ)-*структурой* на траектории $O(p,f)$, если в каждой точке $p_i = f^i(p)$ существуют такие линейные подпространства $S(p_i), U(p_i)$ касательного пространства $T_{p_i}M$, что

(C1) $T_{p_i}M = S(p_i) \oplus U(p_i)$;

(C2) $Df(p_i)S(p_i) \subset S(p_{i+1})$ и $Df^{-1}(p_i)U(p_i) \subset U(p_{i-1})$;

(C3.1) $|Df^k(p_i)v| \leqslant C\lambda^k|v|$ для $v \in S(p_k)$ и $k \geqslant 0$;

(C3.2) $|Df^{-k}(p_i)v| \leqslant C\lambda^k|v|$ для $v \in U(p_k)$ и $k \leqslant 0$;

(C4) если $P(p_i)$ и $Q(p_i)$ — проекторы в $T_{p_i}M$ на $S(p_i)$ параллельно $U(p_i)$ и на $U(p_i)$ параллельно $S(p_i)$, то $\|S(p_i)\|, \|U(p_i)\| \leqslant C$.

Одним из важных этапов при доказательстве достаточности условий теоремы 7.6 (из Аксиомы А и строгого условия трансверсальности следует структурная устойчивость) было доказательство существования (C,λ)-структуры (с одними и теми же C,λ) на каждой траектории диффеоморфизма (заметим, что наше определение отличается от введенного в [Robb1971]).

Отметим отличия между определениями гиперболичности (см. п. 7.1) и (C,λ)-структуры. Свойство (C1) аналогично свойству (ГМ2.1) (с учетом леммы 7.2); неравенства (C3.1)–(C3.2) аналогичны неравенствам (ГМ2.2)–(ГМ2.3). Основное отличие заключается в том, что равенства (ГМ2.2) заменяются на включения C2).

Следствие из леммы 7.3 показывает, что в случае гиперболического множества нормы проекторов $P(p)$ и $Q(p)$ ограничены константой, зависящей лишь от констант гиперболичности C,λ в неравенствах (ГМ2.2)–(ГМ2.3) и оценки нормы $\|Df(x\|$.

Оказывается, что даже в случае структурно устойчивого диффеоморфизма (у которого, как отмечалось выше, есть (C,λ)-структуры с одними и теми же C,λ на каждой траектории), могут существовать (C,λ)-структуры со сколь угодно большой константой C в свойстве (C4) при фиксированных константах в неравенствах (C3.1) и (C3.2).

Пример 12.1. Рассмотрим диффеоморфизм f двумерной сферы S^2, у которого северный полюс P_0 и южный полюс P_1 являются гиперболическими неподвижными точками (P_1 — притягивающая неподвижная точка, а P_0 — отталкивающая), а траектории всех остальных точек стремятся к P_1 при $k \to \infty$ и к P_0 при $k \to -\infty$.

Ясно, что $\Omega(f) = P_0 \cup P_1$; таким образом, f удовлетворяет Аксиоме А. Так как устойчивое многообразие $W^s(P_1)$ и неустойчивое многообразие $W^u(P_0)$ двумерны, они трансверсальны в любой точке пересечения; таким образом, выполнено строгое условие трансверсальности. Из теоремы 7.6 следует, что f структурно устойчив.

Диффеоморфизм f можно построить так, чтобы в локальных координатах $x = (x_1, x_2)$ в окрестности U_0 точки P_0 он имел вид

$$f(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2),$$

а в локальных координатах $y = (y_1, y_2)$ в окрестности U_1 точки P_1 — вид

$$f(y_1, y_2) = (y_1/2, y_2/2).$$

Можно считать, что $U_0 = \{|x| < a\}$ и $U_1 = \{|y| < a\}$ при некотором $a > 0$.

Положим $S(p) = \{0\}$ и $U(p) = T_pS^2$ при $p \in U_0$ и $S(p) = T_pS^2$ и $U(p) = \{0\}$ при $p \in U_1$. Пусть $\lambda = 1/2$.

Ясно, что если $p \in U_0$ и $v \in U(p)$, то выполняются неравенства

$$|Df^{-k}(p)v| \leqslant \lambda^k |v|, \quad k \geqslant 0;$$

аналогично, если $p \in U_1$ и $v \in S(p)$, то выполняются неравенства

$$|Df^{k}(p)v| \leqslant \lambda^k |v|, \quad k \geqslant 0.$$

Пусть

$$N = \max_{p \in S^2} \max(\|Df(p)\|, \|Df^{-1}(p)\|).$$

Из теоремы 3.3 вытекает существование такого числа $n > 0$, что если $p \in S^2 \setminus (U_0 \cup U_1)$, то $f^k(p) \in U_0$ при $k \leqslant -n$ и $f^k(p) \in U_1$ при $k \geqslant n$.

Возьмем одну из точек $p \in S^2 \setminus (U_0 \cup U_1)$ и найдем для нее такие числа $n_0 < 0$ и $n_1 > 0$, что $f^{n_0}(p) \in U_0$, $f^{n_0+1}(p) \notin U_0$, $f^{n_1}(p) \in U_1$ и $f^{n_1-1}(p) \notin U_1$ (ясно, что в этом случае $f^k(p) \in U_0$ при $k \leqslant n_0$ и $f^k(p) \in U_1$ при $k \geqslant n_1$).

Из сказанного выше вытекает, что $|n_0|, n_1 \leqslant n$.

Возьмем в качестве пространств $S(p)$ и $U(p)$ любые два одномерные линейно независимые подпространства T_pS^2 и положим

$$S(f^i(p)) = Df^i S(p) \text{ и } U(f^i(p)) = Df^i U(p), \quad n_0 + 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1$$

(в точках $f^i(p)$ с $i \leqslant n_0$ и $i \geqslant n_1$ пространства S и U уже определены).

Покажем, что для построенных пространств выполнены свойства (C1)–(C3) из определения (C, λ)-структуры с $\lambda = 1/2$ и $C = (2N)^n$.

Отметим, что для вектора $v \in S(p)$ выполнены неравенства

$$|Df^k(p)v| \leqslant N^k |v|, \quad 0 \leqslant k \leqslant n_1,$$

и

$$|Df^k(p)v| \leqslant N^{n_1} 2^{-k} |v|, \quad n_1 < k.$$

Теперь наше утверждение о выполнении неравенств (C3.1) следует из очевидных неравенств

$$N^k \leqslant 2^{n_1 - k} N^{n_1} \leqslant (2N)^n 2^{-k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n_1.$$

Так же доказывается, что выполнены неравенства (C3.2).

Ясно, что можно построить аналогичные пространства S и U для всех точек сферы.

В то же время, мы можем взять в качестве $S(p)$ и $U(p)$ одномерные подпространства T_pS^2, угол между которыми сколь угодно мал (в этом случае нормы проекторов в T_pS^2 на $S(p)$ параллельно $U(p)$ и на $U(p)$ параллельно $S(p)$ сколь угодно велики).

Таким образом, у диффеоморфизма f существуют траектории с (C, λ)-структурой, для которой константа C в свойстве (C4) сколь угодно велика при фиксированных константах $\lambda = 1/2$ и $C = (2N)^n$ в неравенствах (C3.1) и (C3.2).

Мы сформулируем и докажем теорему об условиях обратного отслеживания в локальном варианте (т. е. для одной траектории рассматриваемого диффеоморфизма); легко понять, однако, что если f обладает (C, λ)-структурой с одними и теми же C, λ на любой траектории и существует такое $r > 0$, что сформулированное ниже условие (12.6) выполнено в любой точке $q \in R^n$, то f обладает липшицевым свойством обратного отслеживания во всем пространстве.

Теорема 12.2. *Предположим, что диффеоморфизм f пространства R^n обладает (C, λ)-структурой на траектории $O(p, f)$. Пусть существует такое $r > 0$, что*

$$|f(q + v) - f(q) - Df(q)v| \leqslant \frac{1}{2\mathcal{L}_0} |v|, \quad |v| \leqslant r, \tag{12.6}$$

для всех точек $q = f^i(p), i \in Z$, где

$$\mathcal{L}_0 = C^2 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}.$$

Положим
$$d_0 = \frac{r}{2\mathcal{L}_0}.$$
Тогда любой d-метод $\{\psi_k\}$ класса Θ_s с $d \leqslant d_0$ порождает такую псевдотраекторию $\{x_k\}$, что выполнены неравенства (12.5) *с $x = p$ и $\mathcal{L} = 2\mathcal{L}_0$.*

В последней теореме мы охарактеризуем линейные диффеоморфизмы пространства R^n, обладающие свойствами отслеживания (отметим, что лишь для случая линейных диффеоморфизмов возможно получение необходимых и достаточных условий наличия свойств отслеживания).

Теорема 12.3. *Для линейного диффеоморфизма L пространства R^n, задаваемого отображением $x \mapsto Ax$, следующие утверждения равносильны*:

(1) *L обладает свойством отслеживания*;

(2) *L обладает липшицевым свойством отслеживания*;

(3) *L обладает свойством обратного отслеживания относительно класса Θ_s*;

(4) *L обладает липшицевым свойством обратного отслеживания относительно класса Θ_s*;

(5) *A — гиперболическая матрица.*

12.2. Доказательство теоремы 12.1

В доказательстве теоремы 12.1 мы опираемся на существование так называемой *ляпуновской нормы* в окрестности гиперболического множества (по отношению к этой норме константа C в неравенствах (ГМ2.3) и (ГМ2.4) в определении гиперболического множества равна 1). Использование такой нормы упрощает многие доказательства в теории гиперболических множеств.

Лемма 12.1. *Пусть Λ — гиперболическое множество диффеоморфизма f с константами гиперболичности C, λ_0. По любым $\epsilon > 0$ и $\lambda \in (\lambda_0, 1)$ можно указать окрестность W множества Λ со следующим свойством. Существуют такие положительные константы N, δ, C^∞ норма $|\cdot|_x$ для $x \in W$ и непрерывные (но не обязательно Df-инвариантные) продолжения S' и U' семейств S, U гиперболической структуры на окрестность W, что*

(1) $S'(x) \oplus U'(x) = R^n, \quad x \in W;$

(2) *если $x, y \in W$ и $|f(x) - y| \leqslant \delta$, а Q_x — проекция на $S'(x)$ параллельно $U'(x)$, то отображение $Q_y Df(x)$ является линейным изоморфизмом между $S'(x)$ и $S'(y)$ (соответственно, если $P_x = \mathrm{Id} - Q_x$, то отображение $P_y Df(x)$ является линейным изоморфизмом между $U'(x)$ и $U'(y)$) и выполнены неравенства*
$$|Q_y Df(x) v|_y \leqslant \lambda |v|_x, \quad |P_y Df(x) v|_y \leqslant \epsilon |v|_x, \quad v \in S'(x), \tag{12.7}$$
и
$$\lambda |P_y Df(x) v|_y \geqslant |v|_x, \quad |Q_y Df(x) v|_y \leqslant \epsilon |v|_x, \quad v \in U'(x); \tag{12.8}$$
(3)
$$\frac{1}{N}|v|_x \leqslant |v| \leqslant N|v|_x, \quad x \in W, \ v \in R^n. \tag{12.9}$$

Доказательство. Начнем с построения непрерывной нормы $|\cdot|_x$ с искомыми свойствами. Фиксируем число $\mu \in (\lambda_0, \lambda)$ и найдем такое натуральное число ν, что
$$C\left(\frac{\lambda_0}{\mu}\right)^{\nu+1} < 1. \tag{12.10}$$
Рассмотрим точку $p \in \Lambda$ и вектор $v \in R^n$; представим $v = v^s + v^u \in S(p) \oplus U(p)$ и положим
$$|v|_p^2 = \left(|v^s|_p^2 + |v^u|_p^2\right)^2,$$
где
$$|v^s|_p = \sum_{j=0}^{\nu} \mu^{-j} |Df^j(p) v^s| \ \text{ и } \ |v^u|_p = \sum_{j=0}^{\nu} \mu^{-j} |Df^{-j}(p) v^u|.$$
Для вектора v^s справедлива следующая оценка:
$$|Df(p)v^s|_{f(p)} = \sum_{j=0}^{\nu} \mu^{-j} |Df^j(f(p)) Df(p) v^s| =$$
$$= \mu \left(\sum_{j=1}^{\nu} \mu^{-j} |Df^j(p) v^s| + \mu^{-\nu-1} |Df^{\nu+1}(p) v^s| \right) \leqslant$$
$$\leqslant \mu \left(\sum_{j=1}^{\nu} \mu^{-j} |Df^j(p) v^s| + \mu^{-\nu-1} C \lambda_0^{\nu+1} |v^s| \right) \leqslant \mu |v^s|_p$$

(в последнем неравенстве мы ссылаемся на оценку (12.10)).

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$|Df(p)v^u|_{f(p)} = \sum_{j=0}^{\nu} \mu^{-j}|Df^{-j}(f(p))Df(p)v^u| =$$

$$=\mu^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\nu-1} \mu^{-j}|Df^{-j}(p)v^u| + \mu|Df(p)v^u|\right).$$

Так как

$$w: = Df^{-\nu}(p)v^u = Df^{-\nu-1}(f(p))Df(p)v^u,$$

из (ГМ2.4) следует, что

$$|w| \leqslant C\lambda_0^{\nu+1}|Df(p)v^u|,$$

поэтому мы приходим к неравенству

$$|Df(p)v^u|_{f(p)} \geqslant$$
$$\geqslant \mu^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\nu-1} \mu^{-j}|Df^{-j}(p)v^u| + \mu^{-\nu}\frac{\mu^{\nu+1}}{C\lambda_0^{\nu+1}}|Df^{-\nu}(p)v^u|\right) \geqslant \mu^{-1}|v^u|_p.$$

По построению норма $|\cdot|_x$ непрерывна на множестве Λ (напомним, что пространства S и U непрерывны по лемме 7.4).

Продолжим гиперболическую структуру с множества Λ непрерывными (но не обязательно Df-инвариантными) семействами подпространств S', U' на маленькую замкнутую окрестность W_0 (т. е. замыкание окрестности Λ) так, чтобы в W_0 выполнялось утверждение (1) доказываемой леммы.

После этого мы продолжаем на W_0 (уменьшая W_0, если необходимо) построенную норму $|\cdot|_x$ и находим такую константу N, чтобы в W_0 выполнялось неравенство (12.9).

Для точек $x \in \Lambda$ и $y = f(x)$ отображения $Q_yDf(x)$ и $P_yDf(x)$ являются линейными изоморфизмами между $S(x)$ и $S(y)$ (соответственно, между $U(x)$ и $U(y)$). При этом выполнены соотношения

$$\|Q_yDf(x)|_{S(x)}\| \leqslant \mu \quad \text{и} \quad P_yDf(x)|_{S(x)} = 0,$$
$$\mu\|P_yDf(x)|_{U(x)}\| \geqslant 1 \quad \text{и} \quad Q_yDf(x)|_{U(x)} = 0$$

(в которых операторные нормы порождаются нормой $|\cdot|_x$).

Мы выбрали число $\mu < \lambda$. Рассмотрим число $\lambda' \in (\mu, \lambda)$.

Отображения Q_x, P_x, f и Df равномерно непрерывны. Из первых двух выписанных соотношений и из неравенства $\mu > \lambda'$ следует, что по произвольному $\epsilon > 0$ мы можем найти такие окрестность $W = W(\epsilon, \lambda')$ и число $\delta > 0$, что если $x, y \in W$ и $|f(x) - y| \leqslant \delta$, то

$$\|Q_yDf(x)|_{S'(x)}\| \leqslant \lambda' \quad \text{и} \quad \|P_yDf(x)|_{S'(x)}\| \leqslant \epsilon,$$

т. е. выполнены аналоги неравенств (12.7) (с λ' вместо λ). Те же соображения позволяют добиться выполнения аналогов неравенств (12.8).

Для завершения доказательства леммы остается сгладить норму $|\cdot|_x$ (уменьшая W, если необходимо) с сохранением всех требуемых оценок (и с заменой λ' на λ). •

Перейдем к доказательству теоремы 12.1.

Как было сказано перед формулировкой этой теоремы, мы рассматриваем гиперболическое множество $\Lambda \subset R^n$ диффеоморфизма f с константами гиперболичности C, λ_0.

Применим лемму 12.1 и найдем окрестность W множества Λ с описанными в этой лемме свойствами. Мы можем и будем считать, что W — ограниченное множество.

Так как проекторы P_x и Q_x непрерывны, найдется такое число $M > 0$, что

$$\|P_x\|, \|Q_x\| \leqslant M, \quad x \in W. \tag{12.11}$$

Уменьшая окрестность W и число δ, мы можем добиться выполнения утверждений леммы 12.1 со сколь угодно малым ϵ. Так как при уменьшении окрестности W числа λ и M не возрастают, мы можем считать, что выполнено неравенство

$$\lambda + \epsilon(1 + 2M) < 1. \tag{12.12}$$

Покажем, что f обладает липшицевым свойством отслеживания в окрестности W.

Рассмотрим последовательность $\xi = \{x_k\} \subset W$, для которой выполнены неравенства

$$|f(x_k) - x_{k+1}| \leqslant d. \tag{12.13}$$

Из оценок (12.9) следует, что выполнены неравенства

$$|f(x_k) - x_{k+1}|_{x_{k+1}} \leqslant N|f(x_k) - x_{k+1}| \leqslant Nd. \tag{12.14}$$

Предположим, что мы сумеем найти такие числа D_0 и $\mathcal{L}_0$, что если последовательность ξ удовлетворяет неравенствам (12.14) с $Nd \leqslant D_0$, то найдется

такая точка x, что
$$|f^k(x) - x_k|_{x_{k+1}} \leqslant \mathcal{L}_0 N d.$$
В этом случае
$$|f^k(x) - x_k| \leqslant \mathcal{L}_0 N^2 d;$$
таким образом, f обладает липшицевым свойством отслеживания в окрестности W с константами $d_0 = D_0/N$ и $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 N^2$.

Следовательно, не теряя общности, мы можем предполагать, что стандартная евклидова норма обладает свойствами нормы $|\cdot|_x$, описанными в лемме 12.1. Чтобы упростить обозначения, будем писать S, U вместо S', U'.

Рассмотрим точку $x \in W$ и вектор $v \in R^n$ и представим
$$f(x+v) = f(x) + Df(x)v + h(x,v).$$
Ясно, что мы можем найти такое число $a > 0$ (зависящее только от ϵ, а не от $x \in W$), что
$$|h(x,v)| \leqslant \epsilon |v| \quad \text{при} \quad |v| \leqslant a. \tag{12.15}$$
Положим
$$\mathcal{L} = \frac{2M}{1 - \lambda - \epsilon(1+2M)} \tag{12.16}$$
и
$$d_0 = \min\left(\delta, \frac{a}{\mathcal{L}}\right) \tag{12.17}$$
и покажем, что f обладает липшицевым свойством отслеживания в окрестности W с константами d_0 и $\mathcal{L}$.

Итак, рассмотрим последовательность $\xi \subset W$, для которой выполнены неравенства (12.13) с $d \leqslant d_0$. Рассмотрим, кроме того, последовательность $\eta = \{y_k \in R^n\}$ и положим $y_k = x_k + v_k$. Последовательность η является траекторией диффеоморфизма f тогда и только тогда, когда
$$v_k + x_k = f(x_{k-1} + v_{k-1}).$$
Перепишем эти уравнения в виде
$$v_k = Df(x_{k-1})v_{k-1} + (f(x_{k-1}) - x_k) + h(x_{k-1}, v_{k-1}). \tag{12.18}$$
Положим $b = d\mathcal{L}/2$ и обозначим через $\mathcal{B}$ банахово пространство последовательностей $V = \{v_k \in R^n\}$, для которых выполнены неравенства
$$|P_{x_k} v_k|, |Q_{x_k} v_k| \leqslant b. \tag{12.19}$$

Так как P_{x_k} и Q_{x_k} — дополнительные проекторы, выполнены равенства
$$P_{x_k} v_k + Q_{x_k} v_k = v_k,$$
Поэтому если $V \in \mathcal{B}$, то
$$|v_k| \leqslant 2b = d\mathcal{L} \leqslant a. \tag{12.20}$$

Зададим на пространстве $\mathcal{B}$ оператор T. Этот оператор сопоставляет последовательности $V \in \mathcal{B}$ последовательность $W = \{w_k \in R^n\}$ по следующему правилу.

Мы определим проекции элементов w_k последовательности $W = T(V)$ на подпространства $S(x_k), U(x_k)$ (ясно, что этим мы определяем последовательность W однозначно).

Пусть $x = x_{k-1}$ и $y = x_k$ — две последовательные точки псевдотраектории ξ.

Положим
$$Q_y w_k = Q_y \left[Df(x)v_{k-1} + (f(x) - y) + h(x, v_{k-1}) \right]. \tag{12.21}$$

Проекции на подпространства $U(x_k)$ определяются более сложным образом. Рассмотрим линейное отображение $G(w) = P_y Df(x) w$ на подпространстве $U(x)$. Из утверждения (2) леммы 12.1 следует, что G отображает подпространство $U(x)$ в подпространство $U(y)$ и выполнены неравенства
$$|G(w) - G(w')| \geqslant \frac{1}{\lambda}|w - w'|, \quad w, w' \in U(x). \tag{12.22}$$

Рассмотрим замкнутые шары
$$B(x) = \{w \in U(x) \colon |w| \leqslant b\} \quad \text{и} \quad B(y) = \left\{ z \in U(y) \colon |z| \leqslant \frac{b}{\lambda} \right\}.$$
Из неравенств (12.22) следует, что $B(y) \subset G(B(x))$ и что на шаре $B(y)$ определено отображение Γ, обратное к G. Кроме того,
$$|\Gamma(z) - \Gamma(z')| \leqslant \lambda |z - z'|, \quad z, z' \in B(y). \tag{12.23}$$

Теперь мы определяем проекции элементов w_k на подпространства $U(x_k)$ (точнее, проекции элементов w_{k-1} на подпространства $U(x_{k-1})$) равенствами
$$P_x w_{k-1} = \Gamma\left(P_y \left[v_k - Df(x) Q_x v_{k-1} - (f(x) - y) - h(x, v_{k-1}) \right] \right). \tag{12.24}$$

Так как $|y - f(x)| \leqslant d \leqslant \delta$, к паре (x, y) применимо утверждение леммы 12.1. Кроме того, из выбора a и неравенств (12.15) следует, что если $V \in \mathcal{B}$, то

$$|h(x_k, v_k)| \leqslant \epsilon |v_k|, \quad k \in Z.$$

Оценим величину в правой части формулы (12.21). Из утверждения (2) леммы 12.1 (см. неравенства (12.7) и (12.8)) следует, что

$$|Q_y\left[Df(x)v_{k-1}\right]| = |Q_y\left[Df(x)(Q_x v_{k-1} + P_x v_{k-1}\right]| \leqslant \lambda |Q_x v_{k-1}| + \epsilon |P_x v_{k-1}|.$$

Так как $|f(x) - y| \leqslant d$, из оценок (12.11) вытекает, что верно неравенство

$$|Q_y[f(x) - y]| \leqslant Md.$$

Наконец, справедлива оценка

$$|Q_y h(x, v_k)| \leqslant M\epsilon |v_k| \leqslant 2M\epsilon b.$$

Из этих оценок следует, что если $V \in \mathcal{B}$, то

$$|Q_y w_k| \leqslant \lambda(1 + \epsilon + 2M\epsilon)b + Md = \lambda(1 + \epsilon + 2M\epsilon)b + \frac{2Mb}{\mathcal{L}},$$

но тогда из выбора чисел $\mathcal{L}$ и d_0 вытекает, что

$$|Q_y w_k| \leqslant b.$$

Оценим теперь аргумент отображения Γ в правой части формулы (12.24). Те же рассуждения, что выше, показывают, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} &|P_y\left[v_k - Df(x)Q_x v_{k-1} - (f(x) - y) - h(x, v_{k-1})\right]| \leqslant \\ &\leqslant |P_y v_k| + \epsilon |Q_x v_{k-1}| + 2M\epsilon b + Md \leqslant (1 + \epsilon + 2M\epsilon)b + Md. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\lambda((1 + \epsilon + 2M\epsilon)b + Md) < \lambda(1 + \epsilon + 2M\epsilon)b + Md.$$

Поэтому из свойства (12.23) отображения Γ, из выбора числа $\mathcal{L}$ и из полученной оценки следует, что

$$|P_x w_{k-1}| \leqslant b.$$

Таким образом, при нашем выборе чисел $\mathcal{L}$ и d оператор T определен на пространстве $\mathcal{B}$ и переводит это пространство в себя.

Докажем, что оператор T имеет в $\mathcal{B}$ неподвижную точку.

Введем на $\mathcal{B}$ метрику

$$\operatorname{dist}(V, V') = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|v_i - v_i'|}{2^{|i|}}.$$

Эта метрика порождает на $\mathcal{B}$ тихоновскую топологию произведения (см. пример 1.1). Так как $\mathcal{B}$ является счетным произведением компактных множеств, задаваемых неравенствами (12.19), пространство $\mathcal{B}$ компактно в тихоновской топологии. Кроме того, очевидно, что $\mathcal{B}$ выпукло.

Для доказательства существования неподвижной точки оператора T в $\mathcal{B}$ мы можем применить следующее утверждение (принцип Тихонова–Шаудера, см., например, [KA1977]): если непрерывный оператор отображает выпуклое компактное подмножество банахова пространства в себя, то он имеет в этом подмножестве неподвижную точку.

Из определения оператора T следует, что элемент w_k последовательности $W = T(V)$ определяется элементами v_{k-1}, v_k, v_{k+1} последовательности V. Таким образом, непрерывность оператора T в тихоновской топологии очевидна.

Покажем, наконец, что неподвижная точка V оператора T порождает искомую отслеживающую траекторию для псевдотраектории ξ.

Действительно, если V — неподвижная точка оператора T, то выполнены равенства

$$Q_y v_k = Q_y\left[Df(x)v_{k-1} + (f(x) - y) + h(x, v_{k-1})\right]. \tag{12.25}$$

и

$$P_x v_{k-1} = \Gamma\left(P_y\left[v_k - Df(x)Q_x v_{k-1} - (f(x) - y) - h(x, v_{k-1})\right]\right).$$

Применим ко второму равенству отображение G:

$$\begin{aligned} G(P_x v_{k-1}) = &P_y Df(x) P_x v_{k-1} = \\ &= P_y\left[v_k - Df(x)Q_x v_{k-1} - (f(x) - y) - h(x, v_{k-1})\right]. \end{aligned}$$

Преобразуя это равенство, мы приходим к равенству

$$P_y v_k = P_y[Df(x)v_{k-1} + (f(x) - y) + h(x, v_{k-1})]. \tag{12.26}$$

Сложим, наконец, равенства (12.25) и (12.26). Мы видим, что последовательность V удовлетворяет равенствам (12.18). Из неравенств $|v_k| \leqslant 2b = \mathcal{L}d$ следует, что точка $x = x_0 + v_0$ порождает искомую отслеживающую траекторию. Теорема доказана. •

Замечание 12.1. Несложно показать, что если число d достаточно мало, то d-псевдотраектория, лежащая в окрестности гиперболического множества, может отслеживаться не более чем одной точной траекторией. Ясно, что это свойство единственности отслеживающей траектории вытекает из следующего свойства гиперболических множеств (называемого обычно *свойством разделения траекторий*): существуют такие окрестность W гиперболического множества Λ и число $c > 0$, что если $O(x,f), O(y,f) \subset W$ и

$$\operatorname{dist}(f^k(x), f^k(y)) \leqslant c, \quad k \in Z, \tag{12.27}$$

то $x = y$.

Задача 12.1. Выведите сформулированное выше свойство разделения траекторий из леммы 12.1. Указание: пусть $x_k = f^k(x)$ и $y_k = f^k(y)$. Представим

$$x_k - y_k = v_k + w_k,$$

где $v_k \in S(x_k), w_k \in U(x_k)$.

Так как

$$x_{k+1} - y_{k+1} = f(x_k) - f(y_k) = Df(x_k)(v_k + w_k) + o(c),$$

из леммы 12.1 следует, что

$$|v_{k+1}| \leqslant \lambda |v_k| + \epsilon |w_k| + o(c)$$

и

$$|w_{k+1}| \geqslant \lambda^{-1} |w_k| - \epsilon |w_k| + o(c).$$

Докажите, что если c достаточно мало и выполнены неравенства (12.27), то $v_0 = 0, w_0 = 0$.

12.3. Доказательство теоремы 12.2

Рассмотрим траекторию $O(p,f)$ диффеоморфизма f, на которой f имеет (C,λ)-структуру.

Фиксируем d-метод $\{\psi_k\}$ класса Θ_s с $d \leqslant d_0$ и будем искать близкую к $O(p,f)$ псевдотраекторию $\xi = \{x_k\}$, порожденную методом $\{\psi_k\}$, в виде

$$x_k = p_k + v_k, \quad k \in Z, \tag{12.28}$$

где $p_k = f^k(p)$.

Равенства $x_{k+1} = \psi_k(x_k)$ равносильны равенствам

$$p_{k+1} + v_{k+1} = \psi_k(p_k + v_k). \tag{12.29}$$

Так как $p_{k+1} = f(p_k)$ и

$$f(p_k + v_k) = f(p_k) + Df(p_k)v_k + g(p_k, v_k),$$

мы можем переписать равенства (12.29) в виде

$$v_{k+1} = Df(p_k)v_k + G_{k+1}(v_k), \tag{12.30}$$

где

$$G_{k+1}(v) = g(p_k, v) + (\psi_k(p_k + v) - f(p_k + v)).$$

Так как $\{\psi_k\}$ — d-метод, выполнены неравенства

$$|\psi_k(p_k + v) - f(p_k + v)| < d. \tag{12.31}$$

Из условия (12.6) следует, что

$$|g(p_k, v)| \leqslant \frac{1}{2\mathcal{L}_0}|v| \tag{12.32}$$

при $|v| \leqslant r$.

Обозначим через E пространство последовательностей

$$V = \{v_k \in R^n : k \in Z\},$$

для которых верны неравенства

$$\|V\|_\infty = \sup_k |v_k| \leqslant 2\mathcal{L}_0 d.$$

Построим по последовательности $V \in E$ последовательность $Z(V) = \{z_k(V)\}$, где $z_{k+1}(V) = G_{k+1}(v_k)$.

Учитывая, что $2\mathcal{L}_0 d \leqslant r$ и верны неравенства (12.31) и (12.32), мы видим, что

$$\|Z(V)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2\mathcal{L}_0}\|V\|_\infty + d. \tag{12.33}$$

Зададим на пространстве E оператор R: $R(V) = W = \{w_k\}$, где

$$w_k = \sum_{i=-\infty}^{k} Df^{k-i}(p_i)P(p_i)z_i(V) - \sum_{i=k+1}^{\infty} Df^{k-i}(p_i)Q(p_i)z_i(V) \tag{12.34}$$

(сравните этот оператор с оператором Перрона, использованным при доказательстве существования устойчивого многообразия гиперболической неподвижной точки в п. 4.4).

Так как $P(p_i)z_i(V) \subset S(p_i)$ и $Q(p_i)z_i(V) \subset U(p_i)$, из определения (C,λ)-структуры вытекают неравенства

$$|Df^{k-i}P(p_i)z_i(V)| \leqslant C^2\lambda^{k-i}|z_i(V)|, \quad k \geqslant i,$$

и

$$|Df^{k-i}Q(p_i)z_i(V)| \leqslant C^2\lambda^{i-k}|z_i(V)|, \quad i \geqslant k.$$

Из этих неравенств следует, что оператор R определен корректно, при этом верна оценка

$$\|R(V)\|_\infty \leqslant \mathcal{L}_0\|Z(V)\|_\infty.$$

Из неравенства (12.33) следует, что R отображает пространство E в себя.

Докажем, что оператор R имеет в E неподвижную точку.

Так же, как при доказательстве теоремы 12.1, введем на E метрику

$$\operatorname{dist}(V,V') = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|v_i - v_i'|}{2^{|i|}},$$

которая порождает на E тихоновскую топологию произведения. Так как E является счетным произведением компактных шаров $\{|v| \leqslant 2\mathcal{L}_0 d\}$, пространство E компактно в тихоновской топологии. Кроме того, очевидно, что E выпукло.

Для доказательства существования неподвижной точки оператора R в E мы опять можем применить принцип Тихонова–Шаудера (см. доказательство теоремы 12.1).

В отличие от случая теоремы 12.1, доказательство непрерывности оператора R в тихоновской топологии для рассматриваемого случая требует дополнительных рассуждений.

Пусть m — натуральное число. Рассмотрим пространство E_m конечных последовательностей

$$V = \{v_k \in R^n \,:\, |k| \leqslant m\},$$

для которых верны неравенства

$$\|V\|_m = \max_{|k|\leqslant m} |v_k| \leqslant 2\mathcal{L}_0 d.$$

Обозначим через π_m и $\pi_m^l, m \leqslant l$, естественные проекторы E на E_m и E_l на E_m, соответственно (проекторы π_m и π_m^l просто отрезают лишние компоненты у соответствующих последовательностей).

Введем операторы $R_m\colon E \to E_m$ по аналогии с оператором R: $R_m(V) = W = \{w_k \,:\, |k| \leqslant m\}$, где

$$w_k = \sum_{i=-m}^{k} Df^{k-i}P(p_i)z_i(V) - \sum_{i=k+1}^{m} Df^{k-i}Q(p_i)z_i(V).$$

Так как значения $z_i(V), |i| \leqslant m$, определяются значениями v_k с $|k| \leqslant m+1$, оператор R_m непрерывен.

Оператор $\pi_m R$ отображает последовательность $V \in E$ на последовательность $\{w_k \,:\, |k| \leqslant m\}$, где значения w_k определены формулами (12.34).

Фиксируем $l > m$ и рассмотрим оператор $\pi_m^l R_l$; этот оператор отображает последовательность $V \in E$ на последовательность $\{w_k' \,:\, |k| \leqslant m\}$, где

$$w_k' = \sum_{i=-l}^{k} Df^{k-i}P(p_i)z_i(V) - \sum_{i=k+1}^{l} Df^{k-i}Q(p_i)z_i(V).$$

Оценим

$$\|\pi_m R(V) - \pi_m^l R_l(V)\|_m = \max_{|k|\leqslant m} |w_k - w_k'| \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathcal{L}_0 C^2 d \max_{|k|\leqslant m}\left(\sum_{i=-\infty}^{-l-1}\lambda^{k-i} + \sum_{i=-l+1}^{\infty}\lambda^{i-k}\right) \leqslant \frac{4\mathcal{L}_0 C^2 d\lambda^{1-m}}{1-\lambda}\lambda^l.$$

Из этой оценки следует, что оператор $\pi_m R$ является равномерным (по $V \in E$) пределом при $l \to \infty$ непрерывных операторов $\pi_m^l R_l$. Следовательно, оператор $\pi_m R$ непрерывен. Из определения тихоновской топологии следует, что и оператор R непрерывен.

Таким образом, мы доказали, что что оператор R имеет в E неподвижную точку V.

Для последовательности V выполнены равенства

$$v_{k+1} = \sum_{i=-\infty}^{k+1} Df^{k+1-i}(p_i)P(p_i)z_i(V) - \sum_{i=k+2}^{\infty} Df^{k+1-i}(p_i)Q(p_i)z_i(V) =$$

$$= P(p_{k+1})z_{k+1}(V) + Df(p_k)P(p_k)z_k(V) + Df^2(p_{k-1})P(p_{k-1})z_{k-1}(V) + \ldots -$$
$$- Df^{-1}(p_{k+2})Q(p_{k+2})z_{k+2}(V) - Df^{-2}(p_{k+3})Q(p_{k+3})z_{k+3}(V) - \ldots.$$

Так как

$$Df(p_k)v_k = Df(p_k)P(p_k)z_k(V) + Df^2(p_{k-1})P(p_{k-1})z_{k-1}(V) + \ldots$$
$$- Q(p_{k+1})z_{k+1}(V) - Df^{-1}(p_{k+2})Q(p_{k+2})z_{k+2}(V) -$$
$$- Df^{-2}(p_{k+3})Q(p_{k+3})z_{k+3}(V) - \ldots$$

и

$$P(p_{k+1})z_{k+1}(V) + Q(p_{k+1})z_{k+1}(V) = z_{k+1}(V),$$

последовательность V удовлетворяет уравнениям (12.30). Теорема доказана. •

12.4. Доказательство теоремы 12.3

Отметим вначале, что верно следующее простое утверждение. Мы предоставляем читателю доказать это утверждение самостоятельно.

Упражнение 12.2. Если матрицы A и B сопряжены, то отображения $x \mapsto Ax$ и $x \mapsto Bx$ обладают свойствами отслеживания и обратного отслеживания относительно класса Θ_s (а также липшицевыми вариантами этих свойств) одновременно.

Таким образом, при доказательстве теоремы 12.3 мы можем считать, что матрица A приведена к жордановой форме.

Импликации $(2) \Rightarrow (1)$ и $(4) \Rightarrow (3)$ очевидны.

Докажем импликацию $(5) \Rightarrow (2)$.

Мы можем применить для доказательства модификацию рассуждения, использованного при доказательстве теоремы 12.1, но мы используем более простой метод, дающий, кроме того, явное представление отслеживающей траектории.

Мы показали в лемме 4.1, что у гиперболической матрицы A есть жорданова форма $\operatorname{diag}(B, C)$, для которой выполнены неравенства $\|B\| \leqslant \lambda$ и $\|C^{-1}\| \leqslant \lambda$ с $\lambda \in (0, 1)$. Будем считать для простоты, что $A = \operatorname{diag}(B, C)$.

Представим вектор $x \in R^n$ в виде $x = (y, z)$ в соответствии с представлением $A = \operatorname{diag}(B, C)$. Ясно, что

$$\left| A^k \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right| = |B^k y| \leqslant \lambda^k |y|, \quad k \geqslant 0, \tag{12.35}$$

и

$$\left| A^k \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \right| = |C^k z| \leqslant \lambda^{-k} |z|, \quad k \leqslant 0. \tag{12.36}$$

Рассмотрим d-псевдотраекторию $\xi = \{x_k\}$ отображения L.

Будем искать отслеживающую ее траекторию $O(p, L)$ отображения L в виде

$$p_k = A^k p = x_k + v_k, \quad k \in Z. \tag{12.37}$$

Ясно, что равенства (12.37) равносильны равенствам

$$x_{k+1} + v_{k+1} = A(x_k + v_k),$$

или

$$v_{k+1} = Av_k + z_{k+1}, \quad k \in Z, \tag{12.38}$$

где $z_{k+1} = Ax_k - x_{k+1}$. Так как ξ — d-псевдотраектория,

$$|z_k| < d, \quad k \in Z. \tag{12.39}$$

Пусть P и Q — проекторы в R^n на подпространства переменных y и z. Ясно, что $\|P\| = 1$ и $\|Q\| = 1$.

Покажем, по аналогии с доказательством теоремы 12.2, что последовательность

$$v_k = \sum_{i=-\infty}^{k} A^{k-i} P z_i - \sum_{i=k+1}^{\infty} A^{k-i} Q z_i$$

удовлетворяет равенствам (12.38), т. е. траектория $O(p_0, L)$ точки $p_0 = x_0 + v_0$ является искомой отслеживающей траекторией.

Из неравенств (12.35), (12.36) и (12.39) следует, что ряды, определяющие последовательность v_k, сходятся, и

$$|v_k| \leqslant d\frac{1+\lambda}{1-\lambda}. \tag{12.40}$$

Теперь мы используем ту же идею, что была применена в доказательстве теоремы 12.2 для того, чтобы показать, что последовательность V удовлетворяет соотношениям (12.30).

Из равенств

$$\begin{aligned} v_{k+1} = Pz_{k+1} + APz_k + A^2Pz_{k-1} + \ldots - A^{-1}Qz_{k+2} - A^2Qz_{k+3} - \ldots &= \\ = Pz_{k+1} + Qz_{k+1} + Av_k = Av_k + z_{k+1} \end{aligned}$$

следует, что последовательность V удовлетворяет равенствам (12.38).

Таким образом, отображение L обладает липшицевым свойством отслеживания с константой

$$\mathcal{L} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

и с произвольным $d_0 > 0$.

Импликация $(5) \Rightarrow (2)$ доказана.

Импликация $(5) \Rightarrow (4)$ является прямым следствием из теоремы 12.2, так как на любой своей траектории $\{p_k\}$ отображение L обладает $(1, \lambda)$-структурой с пространствами $S(p_k) = PR^n$ и $U(p_k) = QR^n$, а левая часть неравенства (12.6) обращается в 0 для линейного диффеоморфизма $f(x) = Ax$.

Для доказательства импликации (1) $\Rightarrow$ (5) предположим противное: пусть отображение L с негиперболической матрицей A обладает свойством отслеживания.

Рассмотрим два возможных случая. Предположим вначале, что собственное число λ матрицы A с единичной абсолютной величиной вещественное (т. е. $\lambda = \pm 1$).

Будем считать, что жорданова форма матрицы A выбрана так, что A имеет блочно-диагональный вид: $A = \operatorname{diag}(B, C)$, при этом B — жорданов блок размера $m \times m$,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

соответствующий собственному числу λ (конечно, мы не исключаем случай $m = 1$).

Возьмем $\epsilon = 1$; пусть d — соответствующее ему число из определения свойства отслеживания.

Рассмотрим такую последовательность векторов $\xi = \{x_k\}$, что первая компонента x_k^1 имеет вид $x_k^1 = k\lambda^k/2$, компоненты $x_k^2, \ldots, x_k^m$ удовлетворяют соотношениям

$$x_{k+1}^i = \lambda x_k^i + x_{k-1}^i, \quad i = 2, \ldots, m,\ k \in Z,$$

а компоненты $x_k^i, i > m$, нулевые.

Тогда
$$x_{k+1} - Ax_k = (\lambda^{k+1} d/2, 0, \ldots, 0);$$
таким образом, последовательность ξ является d-псевдотраекторией отображения L.

Для любого $y = (y^1, \ldots, y^n) \in R^n$ первая компонента вектора $A^k y$ равна $\lambda^k y^1$, поэтому

$$|A^k y - x_k| \geqslant |y^1 - kd/2|.$$

Так как правая часть выписанного неравенства неограничена при $k \in Z$ для любого y, L не обладает свойством отслеживания.

Для рассмотрения случая комплексного λ отметим, что если отображение $L\colon R^n \to R^n$ с вещественной матрицей A обладает свойством отслеживания, то отображение $L_1\colon C^n \to C^n$ с той же матрицей A также обладает свойством отслеживания.

Действительно, пусть $\{z_k = v_k + iw_k\}$ — комплексная d-псевдотраектория отображения L_1, т. е. выполнены неравенства
$$|Az_k - z_{k+1}| < d.$$
Так как A — вещественная матрица, это означает, что
$$|Av_k - v_{k+1}| < d \ \text{ и } \ |Aw_k - w_{k+1}| < d.$$
Если d было выбрано по ϵ (для L), то существуют такие $\psi, \chi \in R^n$, что
$$|A^k\psi - v_k| < \epsilon \ \text{ и } \ |A^k\chi - w_k| < \epsilon.$$
Но тогда
$$|A^k(\psi + i\chi) - z_k| < \epsilon,$$
т. е. отображение L_1 обладает свойством отслеживания.

Теперь доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (5) в случае комплексного собственного числа λ матрицы A с $|\lambda| = 1$ следует из тех соображений, что и в случае собственных чисел $\lambda = \pm 1$: мы рассматриваем комплексную жорданову форму матрицы A того же вида, что выше, и строим такую же (но теперь комплексную) псевдотраекторию.

Докажем теперь импликацию (3) $\Rightarrow$ (5).

Мы опять предполагаем противное: пусть отображение L с негиперболической матрицей A обладает свойством обратного отслеживания относительно класса Θ_s.

Начнем опять со случая, когда собственное число λ матрицы A с единичной абсолютной величиной вещественное.

Будем считать, что жорданова форма матрицы A выбрана так же, как при рассмотрении импликации (1) $\Rightarrow$ (5), т. е. A имеет блочно-диагональный вид: $A = \operatorname{diag}(B, C)$, при этом B — тот же жорданов блок размера $m \times m$, что выше.

Возьмем $\epsilon = 1$; пусть d — соответствующее ему число из определения свойства обратного отслеживания.

Рассмотрим отображения
$$\psi_k(x) = A^k x + (d\lambda^k/2, 0, \ldots, 0);$$
ясно, что последовательность $\{\psi_k\}$ — d-метод класса Θ_s.

Пусть $\xi = \{x_k\}$ — псевдотраектория, порождаемая методом $\{\psi_k\}$, и пусть $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$.

Легко показать, что

$$x_k^1 = x_0^1 + k\lambda^{k-1} d/2.$$

Рассмотрим точку $p{=}(1, \ldots, 0)$. Первая компонента p_k^1 вектора $A^k p$ равна λ^k.

Для любой псевдотраектории $\xi = \{x_k\}$, порождаемой методом $\{\psi_k\}$, выражение
$$|x_k^1 - p_k^1| = |\lambda^k(x_0^1 - 1) + k\lambda^{k-1}d/2|$$
неограничено при $k \in Z$. Поэтому L не обладает свойством обратного отслеживания.

В том случае, когда матрица A имеет комплексное собственное число λ с $|\lambda| = 1$, у нее есть так называемая вещественная жорданова форма, первые две строки которой имеют следующий вид (см., например, [Ф1984]):
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & \dots & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$
где $\phi \in (-\pi, \pi)$.

Возьмем $\epsilon = 1$; пусть d — соответствующее ему число из определения свойства обратного отслеживания.

Рассмотрим отображения
$$\psi_k(x) = A^k x + \left(\frac{d\cos(k+1)\phi}{2}, \frac{d\sin(k+1)\phi}{2}, 0, \dots, 0\right);$$
ясно, что последовательность $\{\psi_k\}$ — d-метод класса Θ_s.

Легко показать по индукции, что если псевдотраектория $\xi = \{x_k\}$ порождена методом $\{\psi_k\}$ и $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$, то
$$x_k^1 = x_0^1 \cos k\phi - x_0^2 \sin k\phi + k\frac{d\cos k\phi}{2} \quad \text{и} \quad x_k^2 = x_0^1 \sin k\phi + x_0^2 \cos k\phi + k\frac{d\sin k\phi}{2}$$
при $k \geqslant 0$.

Рассмотрим точку $p = (1, \dots, 0)$. Первые две компоненты p_k^1 и p_k^1 вектора $A^k p$ равны $\cos k\phi$ и $\sin k\phi$.

Так как
$$k^2\cos^2 k\phi + k^2 \sin^2 k\phi = k^2,$$
для любой псевдотраектории $\xi = \{x_k\}$, порождаемой методом $\{\psi_k\}$, сумма величин
$$|x_k^1 - p_k^1| = \left|x_0^1 \cos k\phi - x_0^2 \sin k\phi + k\frac{d\cos k\phi}{2} - \cos k\phi\right|$$
и
$$|x_k^2 - p_k^2| = \left|x_0^1 \sin k\phi - x_0^2 \cos k\phi + k\frac{d\sin k\phi}{2} - \sin k\phi\right|$$
неограничена при $k \in Z$. Поэтому L не обладает свойством обратного отслеживания.

Теорема доказана. •

Приложение 1

Схема доказательства теоремы Мане

Окончательный шаг в получении необходимых и достаточных условий структурной устойчивости диффеоморфизмов был сделан в 1987 г. Р. Мане, который доказал в [M1987], что структурно устойчивый диффеоморфизм удовлетворяет Аксиоме A (необходимость выполнения строгого условия трансверсальности для структурно устойчивого диффеоморфизма, удовлетворяющего Аксиоме A, устанавливается относительно просто, см. [Robi1971]).

Приведенное Мане в статье [M1987] доказательство очень сложное; мы опишем здесь лишь схему этого доказательства, опуская многие технические детали.

Пусть f — диффеоморфизм гладкого замкнутого n-мерного многообразия M. Обозначим через $P(f)$ множество периодических точек диффеоморфизма f. Для диффеоморфизма f, все периодические точки которого гиперболические, будем обозначать через $P_i(f), 0 \leqslant i \leqslant n$, множество тех периодических точек p, для которых выполнено равенство $\dim W^u(p) = i$; пусть $R_i(f) := \mathrm{Cl} P_i(f)$.

Напомним (см. п. 7.5), что мы обозначили через $\mathcal{F}(M)$ множество диффеоморфизмов f, обладающих следующим свойством: у f есть такая окрестность U в $\mathrm{Diff}^1(M)$, что все периодические точки любого диффеоморфизма $g \in U$ гиперболические.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующее несложное утверждение.

Упражнение П. 1. Если диффеоморфизм f структурно устойчив, то $f \in \mathcal{F}(M)$.

Указание. Предположим, что диффеоморфизм f структурно устойчив и не принадлежит множеству $\mathcal{F}(M)$. Так как множество структурно устойчивых диффеоморфизмов открыто в $\mathrm{Diff}^1(M)$ (см. теорему 3.1), у f есть такая окрестность V в $\mathrm{Diff}^1(M)$, что любой диффеоморфизм $g \in V$ структурно устойчив. Так как $f \notin \mathcal{F}(M)$, в V есть диффеоморфизм g, имеющий негиперболическую неподвижную точку p. Пусть m — период p. C^1-мало возмущая диффеоморфизм g, найдите такой диффеоморфизм $h \in V$, что p — периодическая точка h периода m, h^m линеен в окрестности точки p и у дифференциала $Dh^m(p)$ есть собственное число λ с $|\lambda| = 1$. Покажите, что в этом случае диффеоморфизм h не является структурно устойчивым (получив тем самым противоречие с включением $h \in V$).

Значительная часть доказательства Мане основана на включении $f \in \mathcal{F}(M)$ (как пишет сам Мане, лишь на последнем этапе доказательства используется вся полнота предположения о структурной устойчивости f).

Первым шагом доказательства Мане является следующее утверждение (вытекающее по существу из леммы Пью о замыкании, см. теорему 10.1).

Теорема П. 1. *Если $f \in \mathcal{F}(M)$, то $\Omega(f) = \mathrm{Cl}P(f)$.*

Таким образом, для того чтобы показать, что структурно устойчивый диффеоморфизм f удовлетворяет Аксиоме А, достаточно доказать, что каждое из множеств $R_i(f)$ гиперболическое.

Отметим, что для $i = 0$ и для $i = n$ (напомним, что n — размерность многообразия M) соответствующее утверждение было доказано Плиссом [Пл1972a].

Теорема П. 2 [Пл1972a]. *Если $f \in \mathcal{F}(M)$, то множества $P_0(f)$ и $P_n(f)$ конечны.*

Ясно, что конечное множество, состоящее из гиперболических периодических точек, совпадает со своим замыканием и является гиперболическим.

Рассмотрим теперь устойчивое и неустойчивое подпространства $S(p)$ и $U(p)$ гиперболической структуры для гиперболической периодической точки p. Основная стратегия следующих этапов доказательства теоремы Мане такова: распространить разложение $S(p) \oplus U(p) = T_pM$ с множеств $P_i(f)$ на множества $R_i(f)$.

Определим важное для дальнейшего свойство (наряду со свойством гиперболичности, это свойство является одним из основных в глобальной качественной теории динамических систем).

Пусть Λ — компактное инвариантное множество диффеоморфизма f. Будем говорить, что f обладает на Λ *мажорируемым разложением*, если существуют такие непрерывные семейства линейных подпространств $E(x)$ и $F(x)$ касательного пространства T_xM для $x \in \Lambda$, что

(1) $E(x) \oplus F(x) = T_xM$, $x \in \Lambda$;

(2) подпространства $E(x)$ и $F(x)$ инвариантны относительно Df (т. е. выполнены аналоги равенств (ГМ2.2) из определения гиперболической структуры);

(3) существуют такие числа $C > 0$ и $\lambda \in (0, 1)$, что

$$\left\|Df^n|_{E(x)}\right\| \cdot \left\|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\right\| \leqslant C\lambda^n$$

для всех $x \in \Lambda$, $n \geqslant 0$.

Замечание. Отметим, что диффеоморфизм может обладать мажорируемым разложением на компактном инвариантном множестве, не являющимся гиперболическим. Рассмотрите в качестве примера неподвижную точку $p = (0, 0)$ линейного диффеоморфизма плоскости $f(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$.

Покажите, что f обладает на p мажорируемым разложением с подпространствами $E(p) = \{x_1 = 0\}$ и $F(p) = \{x_2 = 0\}$ и с константами $C = 1$ и $\lambda = 1/2$.

Следующее утверждение было независимо доказано в работах [Пл1972b, M1975, Li1980]. Оно показывает, что если $f \in \mathcal{F}(M)$, то все C^1-близкие к f диффеоморфизмы g обладают на множествах $R_i(g)$ мажорируемыми разложениями с одними и теми же характеристиками. Как обычно, мы обозначаем через $[a]$ целую часть числа a.

Теорема П. 3. *Если $f \in \mathcal{F}(M)$, то существуют числа $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$, $m > 0$ и окрестность U диффеоморфизма f в $\mathrm{Diff}^1(M)$ со следующим свойством. Если $g \in U$ и $0 < i < n$, то существует такое мажорируемое разложение $E_i \oplus F_i$ для g на $R_i(g)$, что*

(1) $\left\|Dg^m|_{E_i(x)}\right\| \cdot \left\|Dg^{-m}|_{F(g^m(x))}\right\| \leqslant \lambda$ *для всех* $x \in R_i(g)$;

(2) $E_i(x) = S(x)$ *и* $F_i(x) = U(x)$ *для* $x \in P_i(g)$ *(здесь $S(x)$ и $U(x)$ — подпространства гиперболической структуры для гиперболической периодической точки x диффеоморфизма g);*

(3) *если $x \in P_i(g)$ и $l > m$ — период периодической точки x, то*

$$\prod_{j=0}^{[l/m]-1} \left\|Dg^m|_{S(g^{mj}(x))}\right\| \leqslant C\lambda^{[l/m]}$$

и

$$\prod_{j=0}^{[l/m]-1} \left\|Dg^{-m}|_{U(g^{mj}(x))}\right\| \leqslant C\lambda^{[l/m]};$$

(4) *если* $x \in P_i(g)$, *то*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \log \left\|Dg^{m}|_{S(g^{mj}(x))}\right\| \leqslant \log\lambda$$

и

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \log \left\|Dg^{-m}|_{U(g^{mj}(x))}\right\| \leqslant \log\lambda.$$

Теорема П. 3 устанавливает существование инвариантного разложения $E_i \oplus F_i$ для f на множестве $R_i(f)$. Заключительная (и основная) часть доказательства теоремы Мане посвящена доказательству того, что это разложение является гиперболической структурой.

Оказывается, что для этого достаточно показать, что дифференциал Df диффеоморфизма f сжимает на подпространствах E_i, т. е. существуют такие константы $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$, что

$$\left\|Df^k|_{E_i(x)}\right\| \leqslant C\lambda^k$$

для $x \in R_i(f)$, $k \geqslant 0$.

Теорема П. 4. *Если* $f \in \mathcal{F}(M)$, $0 < i < n$ *и дифференциал* Df *сжимает на подпространствах* E_i, *то существуют такие числа* $C_1 > 0$ *и* $\lambda_1 \in (0,1)$, *что*

$$\left\|Df^{-k}|_{F_i(x)}\right\| \leqslant C_1\lambda_1^k$$

для $x \in R_i(f)$, $k \geqslant 0$ (*т. е. разложение* $E_i \oplus F_i$ *является гиперболической структурой*).

Таким образом, задача сводится к обоснованию того, что дифференциал Df диффеоморфизма f сжимает на подпространствах E_i.

Именно на этом этапе доказательства Мане начинает использовать методы теории инвариантных мер динамических систем (которые, как казалось, никак не связаны с теорией структурной устойчивости).

Рассмотрим инвариантное множество Λ диффеоморфизма f и множество инвариантных нормированных мер на алгебре борелевских подмножеств Λ (см. п. 10).

Инвариантная нормированная мера μ называется *эргодической*, если для любого инвариантного подмножества A множества Λ выполнено одно из равенств $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1$.

Обозначим через $\mathcal{M}(f|_\Lambda)$ пространство нормированных инвариантных мер ограничения $f|_\Lambda$ со слабой топологией, т. е. с топологией, определяемой следующим соотношением:

$$\mu_k \to \mu \quad \Leftrightarrow \quad \int \phi\, d\mu_k \to \int \phi\, d\mu$$

для любой непрерывной функции $\phi\colon \Lambda \to \mathbf{R}$.

Теорема П. 5. *Пусть* Λ *— компактное инвариантное множество диффеоморфизма* f. *Предположим, что*

$$\{E(x) \subset T_xM \colon x \in \Lambda\}$$

— непрерывное Df*-инвариантное семейство линейных подпространств. Если существует такое* $m > 0$, *что*

$$\int_\Lambda \log\|Df^m|_E\|\, d\mu < 0$$

для любой эргодической меры $\mu \in \mathcal{M}(f|_\Lambda)$, *то дифференциал* Df *диффеоморфизма* f *сжимает на подпространствах* $\{E(x)\}$.

Теперь доказательство идет по индукции. Из теоремы П. 2 следует, что если диффеоморфизм f структурно устойчив (следовательно, $f \in \mathcal{F}(M)$), то множество $P_0(f)$ гиперболично. Предполагается, что множества $R_k(f)$ гиперболичны при $0 \leqslant k \leqslant j$; мы хотим доказать, что множество $R_{j+1}(f)$ также гиперболично. Для этой цели используется следующее утверждение. Именно при доказательстве этого утверждения Мане использует свою эргодическую лемму о замыкании (см. теорему 10.5).

Теорема П. 6. *Пусть* $f \in \mathcal{F}(M)$ *и пусть* $m > 0$ *— число, существование которого доказано в теореме П. 3. Существует такое число* $\lambda_0 \in (0,1)$, *что если множества* $R_k(f)$ *гиперболичны при* $0 \leqslant k \leqslant i$ *и для некоторой меры* $\mu \in \mathcal{M}(f^m|_{R_i(f)})$ *выполнено неравенство*

$$\int_{R_i(f)} \log\|Df^m|_{E_i}\|\, d\mu \geqslant \log\lambda_0, \tag{1.1}$$

то

$$\mu\left(\bigcup_{0\leqslant k<i} R_k(f)\right) > 0. \tag{1.2}$$

Чтобы завершить индукционный шаг, достаточно показать, что

$$\mu\left(\bigcup_{0\leqslant k\leqslant j} R_k(f)\right) = 0 \tag{1.3}$$

для любой меры $\mu \in \mathcal{M}(f^m|_{R_{j+1}(f)})$. Действительно, по теореме П. 6 из этого утверждения следует, что не существует мер $\mu \in \mathcal{M}(f^m|_{R_{j+1}(f)})$, удовлетворяющих соотношению (1.1). Следовательно,

$$\int_{R_{j+1}(f)} \log \left\| Df^m|_{E_{j+1}} \right\| \, d\mu < \log \lambda_0 < 0$$

для любой меры $\mu \in \mathcal{M}(f^m|_{R_{j+1}(f)})$. Тогда Df сжимает на подпространствах E_{j+1} по теореме П. 5, и множество R_{j+1} гиперболично по теореме П. 4.

К сожалению, не удается доказать, что соотношение (1.3) выполнено для любой меры $\mu \in \mathcal{M}(f^m|_{R_{j+1}(f)})$, предполагая лишь, что $f \in \mathcal{F}(M)$. Поэтому начиная с этого этапа доказательства предполагается, что диффеоморфизм f структурно устойчив.

Мане вводит понятие базисного множества для диффеоморфизма f следующим образом: гиперболическое множество Λ называется базисным, если оно содержит плотную полутраекторию (т. е. существует такая точка $x \in \Lambda$, что $\omega(x, f) = \Lambda$) и изолированно, т. е. существует такая окрестность U множества Λ, что если $V = \mathrm{Cl}U$, то

$$\bigcap_k F^k(V) = \Lambda$$

(иными словами, если траектория диффеоморфизма f лежит в V, то она лежит в Λ).

Отметим, что базисные множества, определенные после теоремы 7.2, очевидно обладают перечисленными свойствами.

Так как гиперболическая структура $\{S(x), U(x)\colon x \in \Lambda\}$ на множестве Λ непрерывна, из наличия плотной полутраектории следует, что размерности устойчивых подпространств $S(x)$ одни и те же для всех точек $x \in \Lambda$; это общее значение называется индексом базисного множества и обозначается $\mathrm{Ind}(\Lambda)$.

Множества $W^s(\Lambda)$ и $W^u(\Lambda)$ определяются аналогично множествам $W^s(\Omega_i)$ и $W^u(\Omega_i)$.

Пусть g — диффеоморфизм, совпадающий с f в некоторой окрестности множества Λ (ясно, что Λ является базисным множеством для g). Аналоги множеств $W^s(\Lambda)$ и $W^u(\Lambda)$ для g будут обозначаться $W^s_g(\Lambda)$ и $W^u_g(\Lambda)$.

Следующее утверждение относится к компактным инвариантным множествам Λ с мажорируемым разложением, для которых существуют такие базисные множества Λ_i, что дополнение $\Lambda \setminus \Lambda_i$ не является замкнутым.

Теорема П. 7. *Пусть Λ — компактное инвариантное множество диффеоморфизма со следующими свойствами: $\Omega(f|_\Lambda) = \Lambda$ и f обладает мажорируемым разложением $\{E(x), F(x)\}$ на Λ.*

Предположим, кроме того, что существуют такие базисные множества $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ диффеоморфизма f и числа $c, m > 0$ и $\lambda \in (0,1)$, что

(1) $\mathrm{Ind}(\Lambda_1) < \dim E(x)$ *для всех* $1 \leqslant i \leqslant s$ *и* $x \in \Lambda$;

(2) *существует такая C^1-окрестность U диффеоморфизма f, что если диффеоморфизм $g \in U$ совпадает с f в некоторой окрестности множества*

$$\bigcup_{1\leqslant k\leqslant s} \Lambda_k,$$

то

$$W^s_g(\Lambda_i) \cap W^u_g(\Lambda_i) = \Lambda_i$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant s$;

(3) *если для меры $\mu \in \mathcal{M}(f^m|_\Lambda)$ выполнено неравенство*

$$\int_\Lambda \log \|Df^m|_E\| \, d\mu \geqslant -c,$$

то

$$\mu\left(\bigcup_{1\leqslant k\leqslant s} \Lambda_k\right) > 0;$$

(4) $\left\|Df^m|_{E(x)}\right\| \cdot \left\|Df^{-m}|_{F(f^m(x))}\right\| \leqslant \lambda$ *для всех* $x \in \Lambda$.

Тогда верно следующее утверждение: если множество $\Lambda \setminus \Lambda_i$ не является замкнутым при некотором $1 \leqslant i \leqslant s$, то любая C^1-окрестность диффеоморфизма f содержит такой диффеоморфизм g, что g совпадает с f в некоторой окрестности множества

$$\bigcup_{1\leqslant k\leqslant s} \Lambda_k$$

и существует такой индекс $1 \leqslant r \leqslant s, r \neq i$, *что множество* $\Lambda \setminus \Lambda_r$ *не замкнуто и*

$$W_g^s(\Lambda_i) \cap W_g^u(\Lambda_r) \neq \emptyset.$$

Следующее утверждение доказывается относительно несложно. Пусть $g \in \mathcal{F}(M)$; обозначим через $N(i, m, g)$ число неподвижных точек диффеоморфизма g^m, лежащих в $P_i(g)$.

Теорема П. 8. *Если* $f \in \mathcal{F}(M)$, *то существует такая* C^1*-окрестность* U *диффеоморфизма* f, *что*

(1) $N(i, m, g) = N(i, m, g')$ *для любых* $g, g' \in U, m > 0$ *и для всех* $0 \leqslant i \leqslant n$;

(2) *если диффеоморфизм* $g \in U$ *совпадает с* f *в окрестности множества* $R_i(f)$ *при некотором* $0 \leqslant i \leqslant n$, *то* $R_i(g) = R_i(f)$.

Вернемся к индукционному процессу, описанному перед теоремой П. 6.

Нам следует доказать, что если диффеоморфизм f структурно устойчив (и, следовательно, выполнено включение $f \in \mathcal{F}(M)$), а множества $R_0, \ldots, R_j$ гиперболичны, то и множество R_{j+1} гиперболично. Как было показано, последнее утверждение будет доказано, если мы покажем, что соотношение (1.3) выполняется для любой меры $\mu \in \mathcal{M}(f^m|_{R_{j+1}(f)})$.

Предположим, напротив, что существует такая мера $\mu_0 \in \mathcal{M}(f^m|_{R_{j+1}(f)})$ что

$$\mu_0 \left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant j} R_k(f) \right) > 0. \tag{1.4}$$

Отметим, что гиперболическое множество $\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant j} R_k(f)$, в котором плотны периодические точки диффеоморфизма f, может быть представлено в виде

$$\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant j} R_k(f) = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_s, \tag{1.5}$$

где $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ — непересекающиеся базисные множества (этот факт доказывается буквально так же, как теорема 7.2 о спектральном разложении).

Отметим, кроме того, что если пересечения $\Lambda_k \cap R_{j+1}(f)$ пусты для всех $1 \leqslant k \leqslant s$, то соотношение (1.4) не может выполняться, так как носителем меры μ_0 является множество R_{j+1}. Поэтому из соотношения (1.4) следует, что хотя бы одно из пересечений $\Lambda_k \cap R_{j+1}(f)$ непусто. В этом случае нетрудно показать, что одно из множеств $R_{j+1}(f) \setminus \Lambda_k$ не является замкнутым. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема П. 9. *Если существует такая мера* $\mu_0 \in \mathcal{M}(f^m|_{R_{j+1}(f)})$, *что выполнено соотношение* (1.4), *то существует базисное множество* Λ_k *в разложении* (1.5), *для которого множество* $R_{j+1}(f) \setminus \Lambda_k$ *не является замкнутым.*

Следующий шаг доказательства состоит в проверке того факта, что теорема П. 7 применима к множеству $\Lambda = R_{j+1}(f)$, мажорируемому разложению $E_{j+1} \oplus F_{j+1}$ на $R_{j+1}(f)$, к базисным множествам $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ и к числам $\lambda \in (0, 1)$ и $m > 0$ (см. теорему П. 3)
и $c = -\log \lambda_0$ (см. теорему П. 6).

Так как $\operatorname{Ind}(\Lambda_i) \leqslant j$ для всех i и $\dim E_{j+1}(x) = j+1$ для $x \in R_{j+1}(f)$, выполнено предположение (1) теоремы П. 7. Равенство

$$\Omega\left(f|_{R_{j+1}(f)}\right) = R_{j+1}(f)$$

вытекает из плотности периодических точек в множестве $R_{j+1}(f)$. Условие (4) есть следствие теоремы П. 3.

Кроме того, из теоремы П. 6 следует, что если для меры $\mu \in \mathcal{M}(f^m|_{R_{j+1}(f)})$ выполнено неравенство

$$\int_{R_{j+1}(f)} \log \left\| Df^m|_{E_{j+1}} \right\| \, d\mu \geqslant -c = \log \lambda_0,$$

то

$$\mu\left(\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_s\right) = \mu \left(\bigcup_{0 \leqslant k \leqslant j} R_k(f) \right) > 0.$$

Следовательно, выполнено предположение (3).

Таким образом, остается проверить выполнение предположения (2).

Предположим, что диффеоморфизм g принадлежит окрестности U диффеоморфизма f, описанной в теореме П. 8, совпадает с f в некоторой окрестности множества $\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_s$, и в то же время

$$W_g^s(\Lambda_q) \cap W_g^u(\Lambda_q) \neq \Lambda_q$$

для некоторого $1 \leqslant q \leqslant s$.

Из утверждения, аналогичного теореме 7.4, следует, что существуют такие точки $x, y \in \Lambda_q$ и p, что точка p принадлежит множеству

$$\left(W_g^s(\Lambda_q) \cap W_g^u(\Lambda_q)\right) \setminus \Lambda_q$$

и является точкой трансверсального пересечения многообразий $W_g^u(x)$ и $W_g^s(y)$ (возможно, для получения трансверсальной точки пересечения $W_g^u(x)$ и $W_g^s(y)$ потребуется слабо возмутить диффеоморфизм g).

Пусть X и Y — компактные диски в многообразиях $W_g^u(x)$ и $W_g^s(y)$, пересечение внутренностей которых содержит точку p.

Так как периодические точки диффеоморфизма g плотны в множестве Λ_q, существуют такие последовательности периодических точек $r_k, \rho_k \in \Lambda_q$, что $r_k \to x$ и $\rho_k \to y$.

Из известных свойств устойчивых и неустойчивых многообразий для точек гиперболических множеств (см., например, [Пл1977]) следует, что устойчивые и неустойчивые многообразия $W_g^u(r_k)$ и $W_g^s(\rho_k)$ содержат гладкие диски X_k и Y_k, сходящиеся к X и Y относительно C^1 топологии.

Из леммы 6.3 следует, что при достаточно больших k диски X_k и Y_k содержат точки трансверсального пересечения p_k, для которых выполнено соотношение $p_k \to p$.

То же рассуждение, что было применено при доказательстве леммы 7.6, показывает, что многообразия $W_g^u(r_k)$ и $W_g^s(\rho_k)$ имеют точку трансверсального пересечения, но тогда из λ-леммы (лемма 6.4) следует, что многообразия $W_g^s(\rho_k)$ содержат последовательности гладких дисков, сходящихся к X_k относительно C^1 топологии.

Применяя лемму 6.3 еще раз, мы видим, что существуют такие трансверсальные гомоклинические точки π_k периодических точек ρ_k, что $\pi_k \to p$.

Так как произвольно малая окрестность трансверсальной гомоклинической точки для периодической точки ρ с $\dim W^s(\rho) = l$ содержит периодические точки π с $\dim W^s(\pi) = l$ (см. [Не1967,Ши1967]), из приведенного рассуждения следует, что сколь угодно близко к точке p есть периодические точки π диффеоморфизма g, у которых размерность устойчивого многообразия совпадает с $\mathrm{Ind}(\Lambda_q)$ (обозначим эту размерность через l).

Отметим, что точка p не лежит в объединении $\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_s$. Действительно, если $p \in \Lambda_k$, то и вся траектория $O(p, f)$ лежит в Λ_k, но так как эта траектория стремится к Λ_q при $k \to \pm\infty$, то $k = q$, что невозможно.

Диффеоморфизм g совпадает с f в некоторой окрестности множества $\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_s$, а это множество содержит все периодические точки f, у которых размерность устойчивого многообразия равна l. Так как у g есть периодические точки сколь угодно близко к p (следовательно, вне $\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_s$), то существует такое ν, что $N(l, \nu, g) > N(l, \nu, f)$.

Полученное противоречие с теоремой П. 8 показывает, что выполнено условие (2) теоремы П. 7.

Применим теорему П. 7 к множествам $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ и R_{j+1}.

По теореме П. 9 существует такое множество Λ_k, что множество $R_{j+1} \setminus \Lambda_k$ не замкнуто. Пусть t — минимум индексов базисных множеств, для которых разности $R_{j+1} \setminus \Lambda_k$ не замкнуты. Среди всех базисных множеств мы выбираем множество Λ_i со следующими свойствами:

— разность $R_{j+1} \setminus \Lambda_i$ не замкнута;

— $\mathrm{Ind}\Lambda_i = t$;

— если множество $R_{j+1} \setminus \Lambda_k$ не замкнуто и $k \neq i$, то

$$W_f^s(\Lambda_i) \cap W_f^u(\Lambda_k) = \emptyset.$$

Покажем, что множество Λ_i с перечисленными свойствами существует. Если это не так, найдется такой набор различных базисных множеств $\Lambda_{i_1}, \ldots, \Lambda_{i_p}$, что индексы всех этих множеств равны t, и при этом существуют такие точки $x_1, \ldots, x_p$, что

$$x_j \in W_f^s(\Lambda_{i_j}) \cap W_f^u(\Lambda_{i_{j+1}}), \quad j = 1, \ldots, p-1,$$

и

$$x_p \in W_f^s(\Lambda_{i_p}) \cap W_f^u(\Lambda_{i_1}).$$

Из аналога теоремы 7.4 для базисных множеств Λ_k следует, что найдутся такие точки $r_j, \rho_j \in \Lambda_{i_j}$, что

$$x_j \in W_f^s(\rho_{i_j}) \cap W_f^u(r_{i_{j+1}})$$

(естественно, мы считаем, что $\Lambda_{i_{p+1}} = \Lambda_{i_1}$).

Так как диффеоморфизм f структурно устойчив, пересечения многообразий $W_f^s(\rho_{i_j})$ и $W_f^u(r_{i_{j+1}})$ в точках x_j трансверсальны (необходимость трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий неблуждающих точек для структурной устойчивости была установлена довольно давно, см.).

Рассуждения, аналогичные примененным при доказательстве теоремы 7.2 и использующие наличие в множестве Λ_k плотной траектории, показывают, что многообразия $W_f^s(\rho_{i_j})$ и $W_f^u(r_{i_j})$ также имеют точки трансверсального пересечения таким образом, возникает контур из гиперболических траекторий, связанных траекториями, по которым их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально.

Динамика в окрестности такого контура подобна динамике в окрестности трансверсальной гомоклинической траектории, поэтому в произвольной окрестности точки x_1 есть периодические точки, у которых размерность устойчивого многообразия равна t. Отсюда следует, что $x_1 \in R_j$. Поэтому x_1 принадлежит одному из базисных множеств Λ_k, но тогда Λ_{i_1} и Λ_{i_2} множества совпадают с Λ_k.

Полученное противоречие показывает, что существует базисное множество Λ_i с описанными выше свойствами.

Именно к этому множеству мы применяем заключение теоремы П. 7 и находим в произвольной C^1-окрестности диффеоморфизма f такой диффеоморфизм g, что g совпадает с f в некоторой окрестности множества

$$\bigcup_{1\leqslant k\leqslant s} \Lambda_k$$

и существует такой индекс $1 \leqslant r \leqslant s, r \neq i$, что множество $\Lambda \setminus \Lambda_r$ не замкнуто и

$$W^s_g(\Lambda_i) \cap W^u_g(\Lambda_r) \neq \emptyset. \tag{1.6}$$

Так как точка, лежащая в пересечении (1.6), является точкой трансверсального пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий неблуждающих точек, выполнено неравенство $\mathrm{Ind}(\Lambda_i) \geqslant \mathrm{Ind}(\Lambda_i)$ (сравните с неравенствами леммы 6.3).

Из определения числа t следует, что $\mathrm{Ind}(\Lambda_i) = \mathrm{Ind}(\Lambda_i) = t$.

Так как диффеоморфизм g может быть найден в произвольной C^1-окрестности диффеоморфизма f, мы можем считать, что g и f топологически сопряжены (пусть гомеоморфизм h многообразия таков, что $g \circ h = h \circ f$).

Очевидно, что $h(P_i(f)) = P_i(g)$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n$, но тогда $h(R_i(f)) = R_i(g)$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

Поэтому

$$h\left(\bigcup_{1\leqslant k\leqslant s} \Lambda_k\right) = h\left(\bigcup_{1\leqslant k\leqslant j} R_k(f)\right) = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant j} R_k(g). \tag{1.7}$$

Так как диффеоморфизм g совпадает с f в некоторой окрестности множества

$$\bigcup_{1\leqslant k\leqslant s} \Lambda_k,$$

из утверждения (2) теоремы П. 8 следует, что $R_i(f) = R_i(g)$ для всех $0 \leqslant i \leqslant j$.

Поэтому из равенств (1.7) вытекает, что

$$h\left(\bigcup_{1\leqslant k\leqslant s} \Lambda_k\right) = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant s} \Lambda_k.$$

Легко понять, что если $1 \leqslant k \leqslant s$, то $h(\Lambda_k)$ — одно из множеств из семейства $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$, имеющее тот же индекс, что Λ_k.

Определим $T(f)$ как множество пар (m, q), для которых $m \neq q$, $\mathrm{Ind}(\Lambda_m) = \mathrm{Ind}(\Lambda_q) = t$ и

$$W^s_f(\Lambda_m) \cap W^u_f(\Lambda_q) \neq \emptyset. \tag{1.8}$$

Определим множество $T(g)$ аналогично множеству $T(f)$.

Так как гомеоморфизм h отображает каждое из множеств семейства $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ на множество из этого же семейства, имеющее такой же индекс, то

$$\mathrm{card}\, T(f) = \mathrm{card}\, T(g). \tag{1.9}$$

Кроме того, все точки пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий в (1.8) трансверсальны. Поэтому, если диффеоморфизм g достаточно близок к диффеоморфизму f, то все такие пересечения сохраняются. Из (1.9) следует тогда, что

$$T(f) = T(g). \tag{1.10}$$

Отметим теперь, что $(i, r) \notin T(f)$ в силу выбора базисного множества Λ_i. С другой стороны, из (1.6) следует, что $(i, r) \in T(g)$. Полученное противоречие с (1.10) завершает доказательство теоремы Мане.

Приложение 2

Лекции по избранным главам истории дифференциальных уравнений и динамических систем

Конечно, практически невозможно дать более или менее полное изложение всей истории дифференциальных уравнений и динамических систем в нескольких лекциях. Эти заметки и не ставят перед собой такой цели. Их главная цель — осветить некоторые узловые (с точки зрения автора) моменты развития теории дифференциальных уравнений и показать, что это развитие (как, впрочем, развитие любой глубокой и содержательной области математики, да, пожалуй, и всей науки в целом) было отнюдь не гладким движением по прямой (как можно подумать, читая учебники). Мы увидим, что путь развития теории сопровождался ошибками, непониманием со стороны современников и т. д.

В изложение включены несколько комментариев нематематического характера; они отмечены знаками • . . . •.

2.1. Дифференциальные уравнения и анаграмма Ньютона[1]

Говоря о возникновении теории дифференциальных уравнений как отдельной области математики, мы в первую очередь должны вспомнить имя Исаака Ньютона[2].

Весь современный математический анализ вырос из теории бесконечно малых, созданной в конце XVII века Ньютоном и Готфридом Вильгельмом Лейбницем[3].

[1] В этом пункте мы в значительной степени следуем книге [B1945].
[2] Sir Isaac Newton, 1642–1727.
[3] Baron Gottfried Wilhelm von Leibniz, иногда Leibnitz, 1646–1716.

Известно, что создание теории бесконечно малых сопровождалось долгим спором о приоритете (точнее, о том, был ли Лейбниц плагиатором).

Для большинства современных исследователей вопрос о приоритете не стоит — ясно, что Ньютон и Лейбниц развивали свои теории независимо; достаточно просто посмотреть на их терминологию.

Терминология Ньютона пропитана духом физики (вообще, по мнению многих историков науки, математика была для Ньютона вспомогательным орудием для развития физики). К основному изучаемому объекту — величине, которая изменяется при изменении независимой переменной — Ньютон применяет термин флюента (fluenta — от латинского слова, означающего течение), а скорость изменения флюенты названа флюксией (fluxia).

В то же время Лейбниц использует термины функция, дифференциал, интеграл и т. д. (пришедшие в наше время).

Конечно, Ньютон создал свой метод флюксий не на пустом месте. Он сам признавал, что отправной точкой при создании им метода флюксий был способ Ферма[4] проведения касательных; до Ньютона метод Ферма развивали и улучшали Грегори[5], учитель Ньютона Барроу[6], Валлис[7] и другие.

Ньютон высоко ценил заслуги предшественников и выразил свое отношение к ним в знаменитой фразе: «Мы видели так далеко потому, что стояли на плечах гигантов».

• Впрочем, у историков науки есть и другое, гораздо менее возвышенное, толкование этой фразы — таким образом Ньютон мог подчеркнуть неприязнь к Гуку[8], который, как известно, был очень маленького роста. •

Ньютон создавал метод флюксий прежде всего как математический аппарат для исследования структуры окружающего нас мира. Основным орудием для описания любого процесса изменения он считал выведение и решение соответствующего дифференциального уравнения. Это подтверждается знаменитой анаграммой[9] Ньютона:

$$6a \quad cc \quad d \quad æ \quad 13e \quad ff \quad 7i \quad 3l \quad 9n \quad 4o \quad 4q \quad rr \quad 4s \quad 8t \quad 12u \quad x\,.$$

В 1676 г. Лейбниц приезжал в Лондон. В письме Ньютона от 24 октября 1676 г., переданном Лейбницу через секретаря Королевского Общества

[4] Pierre de Fermat, 1601–1665.
[5] James Gregory, 1638–1675.
[6] Isaac Barrow, 1630–1677.
[7] John Wallis, 1616–1703.
[8] Robert Hooke, 1635–1703.
[9] Анаграмма — это способ шифрованной записи фразы, при котором указывается, сколько раз та или иная буква встречается в этой фразе. В те времена анаграммы использовали для того, чтобы зафиксировать свой приоритет и в то же время сохранить суть открытия в тайне.

Ольденбурга, содержалась приведенная выше анаграмма. Она формулировала основное (по мнению самого Ньютона) его открытие:

Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa[10].

Эта латинская фраза (приведенная полностью в основном труде Ньютона «Математические Начала Натуральной Философии» [Ne1687], ставшем Библией естествознания Нового времени) дословно переводится так: «Дано уравнение, содержащее текущие количества (флюенты), найти течения (флюксии) и наоборот»; в переложении В. И. Арнольда[11], смысл приведенной фразы Ньютона таков: «Полезно решать дифференциальные уравнения».

Ко времени написания «Математических Начал» Ньютон уже владел развитым аппаратом теории бесконечно малых. Тем интереснее отметить, что он отказался от использования нового математического языка при изложении таких своих важнейших открытий, как фундаментальные законы механики (законы Ньютона). Одно из возможных объяснений состоит в упоминавшейся выше вспомогательной (с точки зрения Ньютона) роли математики при разработке физических теорий. Но есть и другое объяснение – Ньютон мог опасаться, что его современники просто не поймут изложения на этом новом для них языке.

У таких опасений были реальные основания — известно, что в 1692 г. Гюйгенс[13] писал Лейбницу, что ему непонятны преимущества дифференциального исчисления по сравнению со старыми приемами.

При жизни Ньютона его теория бесконечно малых практически не была изложена в печати. Критикуя его, Валлис писал Ньютону в 1695 г.: «Вы не заботитесь как следует о Вашей чести и чести науки, удерживая столь долго Ваши ценные открытия».

Лишь кизданию «Оптики» Ньютона (1704 г.) были приложены два трактата «О квадратуре кривых» (De quadratura curvarum) и «Перечисление линий третьего порядка» (Enumeratio linearum tertii ordinis), относящиеся по тематике к исчислению бесконечно малых.

Систематическое изложение метода флюксий (содержащее также методы решения простых дифференциальных уравнений) было опубликовано лишь посмертно в книге «Метод флюксий и бесконечные ряды» (The method of fluxions and infinite series), 1736 г.

[10]Внимательный читатель заметит, что приведенная фраза содержит 9 букв t, а не 8; кроме того, u и v считаются одной и той же буквой. Есть разные версии этого несоответствия; см., например, http://vismaya.narod.ru/math/kmath414.htm

[11]Владимир Игоревич Арнольд, р. 1937.

[13]Christian Huygens, иногда Huyghens, 1629–1695.

2.2. Развитие общей теории

Основным методом решения дифференциальных уравнений, применявшимся Ньютоном, было представление решения в виде ряда по степеням независимой переменной и последующее определение коэффициентов ряда. В то время о сходимости получающихся рядов не беспокоились (хотя легко привести примеры дифференциальных уравнений, для которых такие ряды расходятся всюду кроме начальной точки).

Первый строгий результат о сходимости рядов, представляющих решения дифференциальных уравнений, получил Коши[14] (теорема Коши явилась первой из длинного ряда теорем существования, доказанных различными математиками в процессе развития теории дифференциальных уравнений). Коши был одним из ярких представителей течения, направленного на повышение строгости доказательств (такие течения возникают в математике время от времени; они действительно устанавливают новые стандарты строгости, которые, впрочем, оказываются недостаточными для следующих поколений. Эти процессы повторяются, но их влияние на развитие математики не следует преувеличивать – весьма многие современные исследователи не очень задумываются, например, о соотношении их результатов и теоремы Геделя[15] о неполноте ...).

В одной из более чем 800 своих работ Коши доказал, что если правая часть системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2.1}$$

аналитична в окрестности точки (t_0, x_0), то существует единственное решение этой системы, удовлетворяющее условию

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.2}$$

и представимое рядом

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k, \tag{2.3}$$

сходящимся в некоторой окрестности точки t_0. Задачу (2.1)-(2.2) стали называть начальной задачей (или, чаще, задачей Коши).

[14]Augustin Louis Cauchy, 1789–1857.

[15]Kurt Gödel, 1906–1978.

Доказательство Коши распадается на два этапа – вначале показывается, что можно однозначно определить коэффициенты c_k из условия, что после подстановки ряда (2.3) в систему (2.1) коэффициенты при одинаковых степенях $(t-t_0)^k$ в левой и правой частях совпадают. После этого строится мажорирующая система, решение которой представимо сходящимся рядом, и этот ряд мажорирует полученный ряд (2.3).

Дальнейшее развитие математики показало, что метод мажорант Коши в различных его модификациях применим к очень широкому кругу задач; возможности этого метода не исчерпаны и в наше время.

Следующим важным шагом явилось использование условия Липшица[16]. Это условие, введенное Липшицем в 1864 г. для изучения сходимости рядов Фурье[17], было применено Пикаром[18] для доказательства однозначной разрешимости задачи Коши при существенном ослаблении условия аналитичности.

Пикар показал, что если правая часть системы (2.1) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x в некоторой окрестности точки (t_0, x_0), то последовательные приближения

$$g_0(t) \equiv x_0, \quad g_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g_k(s))ds, \ k \geqslant 0, \tag{2.4}$$

равномерно сходятся к решению задачи Коши (2.1)-(2.2) на некотором интервале, содержащем точку t_0.

Теорема существования Пикара (называемая иногда теоремой Коши-Пикара или Коши-Липшица) является практически основной теоремой существования, используемой в современной теории дифференциальных уравнений.

Так же, как и метод Коши, метод последовательных приближений Пикара (основанный на использовании аналогов итерационного процесса (2.4)) применяется к широкому кругу задач, в которых возникает необходимость доказательства существования решений операторных уравнений.

Упомянем, наконец, теорему существования, доказанную Пеано[19]. Пеано (известный, в частности, введенной им аксиоматикой натурального ряда) показал, что для разрешимости задачи Коши (2.1)–(2.2) достаточно требовать непрерывности правой части системы (2.1) в окрестности точки (t_0, x_0). Отметим, что в этом случае решение задачи Коши (2.1)–(2.2) уже не обязательно единственное.

[16]Rudolf Lipschitz, 1832–1903.
[17]Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830.
[18]Charles Émile Picard, 1856–1941.
[19]Giuseppe Peano, 1858–1932.

Доказательство теоремы Пеано основано на применении простейших кусочно-линейных аппроксимаций решения — ломаных Эйлера[20]. Как оказалось, именно простота формул, задающих ломаные Эйлера, явилась причиной их интенсивного использования при создании методов приближенного построения решений для современных компьютеров.

Известны также теоремы существования решений, в которых правые части соответствующих систем не предполагаются непрерывными, но такие результаты относятся скорее к теории управления, чем к теории дифференциальных уравнений.

По существу, дифференциальные уравнения начали решать еще до создания Ньютоном и Лейбницем основ исчисления бесконечно малых — способы нахождения решений некоторых задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, были известны геометрам XVII века.

Речь шла об интегрировании в квадратурах, т. е. о нахождении решений в явном виде с использованием операции интегрирования (именно эта операция и называлась тогда квадратурой). Были изобретены весьма хитроумные подстановки, позволявшие проинтегрировать в квадратурах многие классы дифференциальных уравнений, при этом очень многие достижения связаны с именем Эйлера, о чем мы скажем в следующем пункте. (Интересно отметить, что активность в этой области не прекратилась и до наших дней, несмотря на упоминаемую ниже теорему Лиувилля[21], сделавшую значение такой деятельности весьма ограниченным.)

Развитие теории интегрирования дифференциальных уравнений в квадратурах повторило общую логику развития теории решения алгебраических уравнений (как мы увидим, связь между этими теориями не была формальной).

Напомним, что квадратное уравнение умели решать еще математики древности, а способы решения уравнений 3-й и 4-й степени были найдены итальянскими математиками Даль Ферро[22], Тартальей[23] и Феррари[24] в первой половине XVI века.

Много усилий математиков было потрачено в попытках найти решение в радикалах (т. е. выразить корни через коэффициенты) для общего уравнения 5-й степени. Считалось, что необходимо найти новые подстановки, которые сведут такое уравнение к уравнениям меньших степеней.

[20]Leonhard Euler, 1707–1783.
[21]Joseph Liouville, 1809–1882.
[22]Scipione Dal Ferro, 1465–1526.
[23]Nicolo Fontana Tartaglia, 1499–1557.
[24]Lodovico Ferrari, 1522–1565.

Лишь в начале XIX в. Абель[25] доказал неразрешимость в радикалах произвольных уравнений степени n с $n \geqslant 5$. Работы Абеля и Галуа[26], связанные с задачей о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, стали фундаментом современной алгебры.

• Галуа погиб на дуэли, оставив основную часть своего математического наследства в рукописной (и далеко не окончательной) форме. Одной из важнейших заслуг Лиувилля перед мировой математикой явилось издание им специального журнала, в значительной степени посвященного как публикации работ Галуа, так и популяризации новых идей, введенных Галуа в алгебру. •

Одним из результатов этой деятельности Лиувилля было создание так называемой дифференциальной алгебры и, в частности, доказательство знаменитой теоремы о неинтегрируемости (1841 г.).

Итальянский инженер и математик Риккати[27] рассмотрел дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} + ax^2 = bt^\alpha \tag{2.5}$$

(называемое обычно специальным уравнением Риккати).

Даниил Бернулли [28], один из представителей многочисленного математического семейства Бернулли, в 1824–1825 гг. проинтегрировал в квадратурах уравнение (2.5) при всех $\alpha = -4k/(2k-1)$, $k \in Z$.

• Отметим, что это было сделано в первой печатной работе Д. Бернулли, посвященной защите его отца Иоганна старшего[29] и дяди Якова[30] в их полемике с итальянскими математиками. •

Многие математики пытались расширить множество тех показателей α, для которых уравнение (2.5) интегрируемо в квадратурах; Лиувилль нашел окончательное решение этой задачи.

Не приводя точную формулировку теоремы Лиувилля, поясним ее смысл. Рассмотрим класс функций $\mathcal{L}$, который строится так: включим вначале в этот класс все элементарные функции (полиномы, показательные, степенные и тригонометрические), а затем станем расширять класс $\mathcal{L}$, включая в него вместе с любыми его элементами функции, которые получаются из этих элементов конечным числом операций, включающих арифметические операции, операции суперпозиции и взятия первообразной, а

[25]Niels Henrik Abel, 1802–1829.
[26]Évariste Galois, 1811–1832.
[27]Jacopo Francesco Riccati, 1676–1754.
[28]Daniel Bernoulli, 1700–1782.
[29]Johann, иногда Jean, Bernoulli, 1667–1748.
[30]Jacob, иногда Jacques, Bernoulli, 1654–1705.

также операцию вычисления обратной функции. Ясно, что такой класс $\mathcal{L}$ будет включать все функции, которые можно представить конечными формулами.

Из теоремы Лиувилля следует, что если показатель α в уравнении (2.5) не равен одному из показателей Бернулли $\alpha = -4k/(2k-1)$ (а также $\alpha \neq -2$), то ни одно решение этого уравнения не попадает в описанный выше класс $\mathcal{L}$ (т. е. ни одно решение не может быть представлено конечной формулой).

Этот результат показал, что попытки проинтегрировать любое дифференциальное уравнение в квадратурах принципиально обречены на неудачу (так же, как попытки выразить корни любого многочлена явной формулой, содержащей его коэффициенты).

После появления теоремы Лиувилля основной частью теории дифференциальных уравнений стала качественная теория (в широком смысле этого слова): решения дифференциальных уравнений стали изучать опираясь не на их явные представления, а на свойства функций, задающих сами исследуемые дифференциальные уравнения. В наиболее явной форме такую постановку основной задачи качественной теории сформулировал Анри Пуанкаре[31] (мы приведем точную цитату в п. 5).

2.3. Линейные уравнения и системы

Вклад Эйлера в развитие теории дифференциальных уравнений бесценен. Он придумал целый ряд подстановок, позволявших интегрировать в квадратурах многочисленные нелинейные дифференциальные уравнения, интегрировал уравнение Риккати с помощью непрерывных дробей, разработал метод интегрирующего множителя.

По образному выражению Н. Н. Лузина[32], «математики в течение 150 лет не могли пробить брешь в том кольце интеграций, которое было выковано Эйлером».

Однако важнейшим достижением Эйлера в теории дифференциальных уравнений явилось создание им общего метода решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассматривая уравнение вида

$$0 = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n},$$

[31]Jules Henri Poincaré, 1854–1912.
[32]Николай Николаевич Лузин, 1883–1950.

Эйлер применил кнему разработанный им же самим метод понижения порядка, основанный на последовательном вычислении производных функции

$$y = e^{\int p\,dx}.$$

«Если принять, что p — постоянное, писал Эйлер, то его дифференциалы исчезнут и, следовательно, при этом предположении получится такое алгебраическое уравнение:

$$0 = A + Bp + Cp^2 + \ldots + Np^n.$$

Если отсюда найти p, то сразу будем иметь частное решение $y = e^{px}$».

Следует отметить, что метод не сразу приобрел знакомый нам чисто алгебраический вид. Так, в случае комплексных корней характеристического многочлена Эйлер вначале решал уравнения для вещественной и мнимой частей решения, и только потом пришел к общему методу; именно в этом месте в математику вошла знаменитая формула Эйлера

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx.$$

Довольно громоздким был и первоначальный подход Эйлера к случаю кратных корней характеристического многочлена.

Не сразу метод был принят современниками. Впервые Эйлер сообщил о нем в письме Иоганну Бернулли от 15 сентября 1739 г.; как следует из ответных писем, И.Бернулли не смог должным образом оценить силу нового метода.

Эйлер применял свой метод и к линейным системам дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Как известно, для нахождения всех решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad x \in R^n \text{ (или } x \in C^n), \tag{2.6}$$

с непрерывной матрицей коэффициентов $P(t)$ достаточно знать фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ этой системы (т. е. матрицу, столбцами которой являются n линейно независимых решений системы (2.6)); в этом случае формула

$$x(t) = \Phi(t)c$$

устанавливает линейный изоморфизм между пространством решений системы (2.6) и пространством n-мерных постоянных векторов c.

Результатом развития метода Эйлера явилось представление фундаментальной матрицы системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2.7}$$

в виде $\Phi(t) = \exp(At)$.

Точнее говоря, аналогом применения метода Эйлера к системе (2.7) является построение фундаментальной матрицы в виде $\Phi(t) = S\exp(Jt)$, где J — жорданова форма матрицы A, а S — приводящая матрица, т. е. матрица, удовлетворяющая равенству $J = S^{-1}AS$.

В общем случае (когда $n > 1$ и матрица $P(t)$ коэффициентов системы (2.6) не является постоянной), не существует общего метода явного построения фундаментальной матрицы по матрице $P(t)$.

Действительно, рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t^\alpha y = 0. \tag{2.8}$$

Легко проверить, что если $y(t)$ — ненулевое решение уравнения (2.8), то функция

$$x(t) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$$

является решением уравнения Риккати

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = -t^\alpha.$$

Из упоминавшейся выше теоремы Лиувилля о неинтегрируемости следует, что если $\alpha \neq -4k/(2k-1)$ и $\alpha \neq -2$, то ни одно ненулевое решение уравнения (2.8) не может принадлежать классу $\mathcal{L}$ (так как если $y(t) \in \mathcal{L}$, то $dy/dt \in \mathcal{L}$ и $x(t) \in \mathcal{L}$).

Из сказанного немедленно вытекает, что если

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

– столбец фундаментальной матрицы линейной системы

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -t^\alpha y,$$

соответствующей уравнению (2.8), то функция $y(t)$ не принадлежит классу $\mathcal{L}$.

В то время как общая теория линейных систем дифференциальных уравнений с непрерывными матрицами коэффициентов была построена достаточно давно (и по существу весьма проста), линейные дифференциальные уравнения и системы, коэффициенты которых имеют особенности, изучены гораздо хуже.

Наиболее исследованным классом таких уравнений и систем являются уравнения и системы класса Фукса[33].

Их естественно изучать в комплексных областях (независимая переменная становится комплексной; мы будем обозначать ее буквой z).

Уравнение

$$\frac{d^n y}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \ldots + p_n(z)y = 0 \tag{2.9}$$

является уравнением класса Фукса тогда и только тогда, когда

$$p_j(z) = \Pi_{m=1}^k (z-a_m)^{-j} q_j(z),$$

где $a_1, \ldots, a_k$ — различные точки, а q_j — многочлены, степень которых не превосходит $j(k-1)$.

Система

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y, \quad y \in C^n,$$

принадлежит классу Фукса, если она имеет вид

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{m=1}^{k} \frac{A_m}{z-a_m} y, \tag{2.10}$$

где $a_1, \ldots, a_k$ — различные точки, а A_m — ненулевые постоянные $n \times n$ матрицы.

Мы остановимся на уравнениях и системах класса Фукса, так как именно к ним относится 21-я проблема из знаменитого списка проблем Гильберта[34], если и не определившего весь ход развития математики в XX веке, то по крайней мере выделившего важнейшие на момент постановки проблем (1900 г.) разделы различных областей математики. Дифференциальные уравнения упоминаются в двух проблемах Гильберта, и было бы

[33] Immanuel Lazarus Fuchs, 1833–1902.

[34] David Hilbert, 1862–1943.

неестественно не коснуться их в любом обзоре по истории дифференциальных уравнений (тем более, что истории этих проблем нетривиальны и поучительны). О 21-й проблеме мы поговорим сейчас, а 16-й проблемы коснемся в п. 5.

Изучая поведение решений уравнения (2.9), Риман[35] поставил следующую задачу (которая позже стала называться задачей Римана-Гильберта и составила содержание 21-й проблемы в списке Гильберта).

Опишем ее для случая фуксовой системы (2.10). Фиксируем на комплексной плоскости базовую точку a и рассмотрим простой контур γ_j, проходящий через точку a и охватывающий ровно один из полюсов a_j (см. рис. 6).

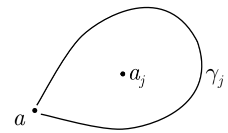

Рис. 6. Контур γ_j

Так как коэффициенты системы (2.10) непрерывны в окрестности точки a, мы можем определить в этой окрестности фундаментальную матрицу $\Phi(z)$ системы (2.10). Продолжая эту матрицу вдоль контура γ_j и возвращаясь в базовую точку a, мы вновь получим фундаментальную матрицу $\Psi(z)$ системы (2.10) (но, вообще говоря, другую). Так как $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — фундаментальные матрицы одной и той же системы, существует такая постоянная неособая матрица G_j, что $\Psi(z) = \Phi(z)G_j$. Эта матрица (не зависящая от конкретного выбора контура γ_j) называется матрицей монодромии.

Предполагается, что

$$A_1 + \ldots + A_k = 0$$

(это условие регулярности системы (2.10) на бесконечности). В этом случае выполнено соотношение

$$G_1 \cdots G_k = \mathrm{Id}. \tag{2.11}$$

Задача Римана-Гильберта ставится так: дан набор матриц $G_1, \ldots, G_k$, удовлетворяющих условию (2.11).

Существует ли такой набор матриц $A_1, \ldots, A_k$, что данный набор $G_1, \ldots, G_k$ является набором матриц монодромии для соответствующей фуксовой системы (2.10)?

[35] Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866.

Проблема Римана-Гильберта была решена в положительном смысле Племелем[36] в 1908 г.

Упомянем в связи с проблемой Римана-Гильберта об одной яркой математической судьбе, связанной с Петербургским-Ленинградским университетом.

• И.А.Лаппо-Данилевский[37] был сыном известного русского историка, академика А.С.Лаппо-Данилевского. Он поступил в Санкт-Петербургский университет в 1914 г., но вначале тяжелая болезнь сердца, а потом сложная послереволюционная ситуация привели к тому, что он смог посвятить интенсивной исследовательской работе лишь несколько лет. В январе 1931 г. он был избран членом-корреспондентом АНСССР, а в марте того же года он умер в г. Гиссене (Германия), куда уехал лечиться, получив Рокфеллеровскую стипендию. •

Учителем И. А. Лаппо-Данилевского был В.И.Смирнов[41]. Согласно традициям Санкт-Петербургской математической школы, целью исследования проблемы Римана–Гильберта и ее обобщений было не доказательство абстрактных теорем существования, а построение алгоритмов, позволяющих находить решения основных задач теории линейных систем дифференциальных уравнений в виде степенных рядов от матриц коэффициентов, при этом коэффициенты рядов должны вычисляться по рекуррентным формулам.

Именно такое решение проблемы Римана–Гильберта было получено Лаппо-Данилевским. Он показал, что если заданные матрицы монодромии $G_1, \ldots, G_k$ достаточно близки к единичной, то существует единственное решение $A_1, \ldots, A_k$ проблемы Римана-Гильберта, при этом верны разложения

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}(G_j - \mathrm{Id}) + \sum_{1\leqslant l,m\leqslant k} c_{l,m,j}(a_1, \ldots, a_k)(G_l - \mathrm{Id})(G_m - \mathrm{Id}) + \ldots$$

и существует такое число $b > 0$, что стоящие справа степенные ряды сходятся при $\|G_j - \mathrm{Id}\| < b$.

Приведенное выше решение проблемы Римана-Гильберта – лишь одно из применений созданной Лаппо-Данилевским теории аналитических функций от матриц. Монография [ЛД1957], содержащая детальное изложение его теории, была опубликована лишь в 1957 г., и многие ее идеи еще ждут надлежащего развития.

[36] Josip Plemelj, 1873–1967.
[37] Иван Александрович Лаппо-Данилевский, 1896–1931.
[41] Владимир Иванович Смирнов, 1887–1974.

Однако история 21-й проблемы Гильберта не была завершена работами Племеля и некоторых его последователей (несмотря на высказанное в книге [ПГ1969] утверждение о том, что благодаря результату Племеля общая теория фуксовых систем вида (2.10) в определенном смысле полностью завершена).

В 1964 г. была опубликована монография, содержащая полный вариант доказательств Племеля. В 1980-х эти доказательства детально проанализировал молодой московский математик А.А.Болибрух[39]. Он понял, что в доказательстве Племеля неявно использовано предположение о том, что хотя бы одна из заданных матриц монодромии $G_1, \ldots, G_k$ имеет диагональную жорданову форму. После долгих попыток дать корректное доказательство, пригодное в общем случае, в 1989 г. Болибрух построил контрпример к21-й проблеме Гильберта – оказалось, что существуют наборы матриц монодромии $G_1, \ldots, G_k$, которым не соответствует ни одна фуксова система вида (2.10).

• К сожалению, выпускник 45-й школы-интерната при Ленинградском университете и Московского университета, академик РАН А.А.Болибрух ушел из жизни в 2003 г.•

2.4. Устойчивость

Теория устойчивости – несомненно самый важный с точки зрения приложений раздел теории дифференциальных уравнений. Подробное изложение истории развития теории устойчивости невозможно в ограниченном объеме этих заметок (отметим, что вышедшая в 1949 г. книга [М1949], посвященная этой истории, содержит более 600 страниц.)

Первая в истории попытка дать строгую формулировку определения устойчивости принадлежит Эйлеру. В трактате «Корабельная наука» ([E1749]) Эйлер рассматривает возможное поведение плавающего в воде тела, которое немного отклонено от положения равновесия. Он говорит о положительной устойчивости (если тело будет возвращаться в первоначальное положение равновесия), отрицательной устойчивости (если тело все далее отходит от первоначального положения равновесия) и нулевой устойчивости (если отклоненное от первоначального положения равновесия тело покоится).

Основной метод Эйлера при изучении устойчивости плавающего тела был основан на нахождении такого математического маятника, колебания которого моделировали бы колебания плавающего тела (т. е. имели бы

[39] Андрей Андреевич Болибрух, 1950–2003.

те же период и амплитуду). Математической моделью при этом являлось стандартное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (тем самым закладывались основы аналитической теории малых колебаний).

• В 1759 г. Парижская академия отметила премией исследования Эйлера по теории расчета корабля.

«В результате исследований Эйлера, писал А. Н. Крылов[40], военный парусный корабль получил ту форму и развитие, которые он сохранил почти без изменений сто лет, т. е. до 1850 г., когда ему на смену пришли паровые суда, а затем и броненосцы». •

Важным вкладом в развитие теории устойчивости явились работы Лагранжа[41] по устойчивости механических систем.

В своем фундаментальном труде по аналитической механике (1788 г.) Лагранж так формулирует основной результат об устойчивости положения равновесия консервативной механической системы: «если функция П (т. е. потенциальная энергия) имеет минимум, то равновесие будет иметь устойчивость, так что система, будучи первоначально размещенной в состоянии равновесия и будучи после этого весьма мало смещенной из этого состояния, будет стремиться сама по себе возвратиться в него, совершая бесконечно малые колебания. Напротив, в случае, когда та же функция будет иметь максимум, равновесие не будет иметь устойчивости, и, будучи однажды возмущена, система сможет тогда совершать такие колебания, которые не будут весьма малыми, но которые будут уклонять ее все более и более от ее первичного состояния».

Отметим, что давая одновременно с формулировкой теоремы об устойчивости определение устойчивости, Лагранж ограничивается лишь малыми смещениями, не упоминая о возможных малых возмущениях скоростей (что, как мы теперь понимаем, следует делать, определяя устойчивость механических систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка).

Доказательство сформулированной теоремы также неполно: Лагранж раскладывает потенциальную энергию в ряд в окрестности положения равновесия и отбрасывает члены, порядок которых больше двух, мотивируя это так: поскольку наши переменные являются весьма малыми, достаточно учесть лишь члены второго измерения относительно этих переменных.

Такой подход к задачам устойчивости, при котором учитывается лишь линейное приближение правой части системы дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия (или учитываются лишь члены

[40] Алексей Николаевич Крылов, 1863–1945.
[41] Compte Joseph Louis Lagrange, 1736–1813.

порядка два в разложении энергии), был основным до появления трудов А.М.Ляпунова[42], которые поставили теорию устойчивости на прочный математический фундамент.

Строгое доказательство теоремы Лагранжа об устойчивости было дано Миндингом[43] в 1838 г.

Отметим, что проверяемый по матрице A критерий, при котором нулевое решение линейной системы с постоянными коэффициентами (2.7) асимптотически устойчиво при $t \to \infty$ (что, как известно, равносильно тому, что для собственных чисел матрицы A выполнены соотношения

$$\mathrm{Re}\lambda_j < 0) \tag{2.12}$$

был найден Раусом [44] в 1877 г. Схема Рауса была модифицирована в 1895 г. Гурвицем[45]. Матрицы, для собственных чисел которых выполнены соотношения (2.12), стали называть гурвицевыми.

Как уже говорилось выше, теория устойчивости как строго обоснованный раздел математики была создана Александром Михайловичем Ляпуновым.

• А. М. Ляпунов родился в Ярославле в 1857 г. Он поступил на физико-математический факультет Санкт-Петербургского университета в 1876 г. (вначале Ляпунов хотел заниматься химией под руководством Д. И. Менделеева, но вскоре перешел на математическое отделение). В 1880 г. он закончил курс университета со степенью кандидата (его руководителем был Д. К. Бобылев). С 1885 по 1902 г. Ляпунов работал в Харькове, где он и написал свою знаменитую докторскую диссертацию «Общая задача об устойчивости движения» (1892 г.), содержавшую как основные определения современной теории устойчивости, так и многие фундаментальные результаты. В 1902 г. Ляпунов переехал в Петербург в связи с избранием в ординарные академики Академии наук по кафедре прикладной математики. Летом 1917 г. Ляпунов переехал в Одессу. Он умер 3 ноября 1918 г., выстрелив в себя после кончины любимой жены. •

А. М. Ляпунов получил много глубоких и важных результатов по теории устойчивости; им был разработан мощный метод исследования поведения решений дифференциальных уравнений, основанный на изучении поведения вспомогательных функций вдоль решений (такие функции стали называть функциями Ляпунова).

[42] Александр Михайлович Ляпунов, 1857–1918.
[43] Ernst Ferdinand Minding, 1806–1885.
[44] Edward John Routh, 1831–1907.
[45] Adolf Hurwitz, 1859–1919.

Мы остановимся здесь на том направлении развития теории устойчивости, начальной точкой которого явилась знаменитая теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению (несомненно, наиболее часто используемый в приложениях теории дифференциальных уравнений результат).

Стандартная формулировка этой теоремы такова. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(t, x), \tag{2.13}$$

в которой $g(t, 0) = 0$ при $t \geqslant t_0$ и

$$\frac{|g(t, x)|}{|x|} \to 0, \ |x| \to 0, \ \text{ равномерно по } \ t \geqslant t_0.$$

Если матрица A гурвицева, то нулевое решение системы (2.13) асимптотически устойчиво. Если у матрицы A есть собственное число λ с $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то нулевое решение системы (2.13) неустойчиво.

Таким образом, Ляпунов дал точный ответ на вопрос о том, когда характер устойчивости нулевого решения нелинейной системы такой же, как и у ее линеаризации. Тот факт, что этот вопрос был для него основным при создании теории устойчивости, подтверждается следующей фразой из предисловия к«Общей задаче об устойчивости движения»: «Задача, которую я себе поставил, предпринимая настоящее исследование, может быть формулирована так: указать те случаи, в которых первое приближение действительно решает вопрос об устойчивости, и дать какие-либо способы, которые позволяли бы решать его по крайней мере в некоторых из тех случаев, когда по первому приближению нельзя судить об устойчивости».

Рассмотренные в теореме об устойчивости по первому приближению случаи Ляпунов назвал обыкновенными. Те случаи, в которых об устойчивости нельзя судить по линейному приближению, были названы особенными. Ясно, что особенные случаи возникают, если некоторые собственные числа матрицы A имеют нулевые вещественные части, в то время как вещественные части остальных собственных чисел отрицательные.

В этой ситуации мы можем представить матрицу A (произведя неособое линейное преобразование) в блочно-диагональном виде

$$A = \mathrm{diag}(B, C), \tag{2.14}$$

где B — матрица, собственные числа которой имеют нулевые вещественные части, а C — гурвицева матрица.

Ляпунову удалось полностью изучить два из особенных случаев: случай, когда матрица B — нулевой скаляр, и случай, когда матрица B имеет размер 2×2 и чисто мнимые ненулевые собственные числа (в этом случае проблема устойчивости решается с точностью до отмеченной Пуанкаре проблемы различения центра и фокуса).

В 1963 г. была опубликована найденная в архивах АНСССР В. И. Смирновым рукопись А.М.Ляпунова «Исследование одного из особенных случаев задач об устойчивости движения». Этот текст Ляпунова был посвящен исследованию особенного случая, в котором матрица B имеет размер 2×2, ее собственные числа нулевые, и при этом есть некритические переменные (т. е. матрица C ненулевая). Исследование не было доведено до конца (остался недоизученным один из случаев, в котором B — нетривиальная жорданова клетка размера 2×2).

• Анализ этого текста показывает, насколько высокие требования Ляпунов предъявлял к уровню своих работ. Полученные в нем результаты (недостаточно завершенные для публикации, по мнению Ляпунова) далеко перекрывали многие опубликованные к началу 60-х годов результаты различных исследователей. •

Окончательное решение задачи об устойчивости в особенном случае нетривиальной жордановой клетки B размера 2×2 было получено В.А.Плиссом[46], который применил новый подход, связанный с так называемыми локально-инвариантными многообразиями и принципом сведения (1964 г.).

В применении к описанному выше особенному случаю задачи об устойчивости основную идею принципа сведения можно сформулировать следующим образом.

Представим фазовую переменную x в изучаемой системе

$$\frac{dx}{dt} = Ax + G(x) \tag{2.15}$$

в виде $x = (y, z)$ в соответствии с блочно-диагональным представлением (2.14) матрицы A. Существует такая функция $f(y)$, что в окрестности начала многообразие $z = f(y)$ является инвариантным для системы (2.15), при этом характер устойчивости нулевого решения редуцированной задачи

$$\frac{dy}{dt} = By + G(y, f(y))$$

таков же, как характер устойчивости нулевого решения первоначальной системы (2.15).

[46]Виктор Александрович Плисс, р. 1932.

Метод сведения (чаще называемый теоремой о центральном многообразии — по принятому названию локально-инвариантного многообразия $z = f(y)$) стал одним из фундаментальных методов качественной теории дифференциальных уравнений.

Многие исследователи продолжали изучение вопроса об устойчивости нулевого решения системы вида (2.15), накладывая условия на ее правую часть (чаще всего на коэффициенты рядов, задающих нелинейность $G(x)$ в предположении ее аналитичности).

Логика развития теории устойчивости в этом направлении повторила в некотором смысле логику теории интегрирования дифференциальных уравнений в квадратурах — оказалось, что задача об устойчивости является в общем случае алгебраически неразрешимой.

Дадим вначале необходимые определения.

Пусть f — такая функция класса $C^\infty(R^n, R^n)$, что $f(0) = 0$. Фиксируем натуральное число N и назовем N-струей функции f в 0 множество

$$jf^{(N)} = \{g \in C^\infty(R^n, R^n)\colon g(0) = 0 \text{ и } |f(x) - g(x)| = o(|x|^N), |x| \to 0\}.$$

Ясно, что функция g принадлежит $jf^{(N)}$ тогда и только тогда, когда тейлоровские разложения функций f и g в 0 совпадают до членов степени N.

В пространстве $J^{(N)}(n)$ N-струй функций класса $C^\infty(R^n, R^n)$ вводятся естественные координаты — каждой N-струе сопоставляется набор коэффициентов векторного полинома степени N, являющегося ее представителем.

Будем называть некоторое множество пространства $J^{(N)}(n)$ полуалгебраическим, если оно является объединением конечного числа подмножеств, задаваемых конечным числом уравнений $P = 0$ и неравенств $P > 0$, где P — полиномы.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{2.16}$$

где $f \in C^\infty(R^n, R^n)$ и $f(0) = 0$. Будем говорить, что струя $jf^{(N)}$ устойчива (неустойчива), если для любой функции $g \in jf^{(N)}$ нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = g(x)$$

устойчиво (соответственно, неустойчиво). Смысл этих терминов таков: если струя $jf^{(N)}$ устойчива (или неустойчива), то характер устойчивости нулевого решения системы (2.16) определяется коэффициентами тейлоровского разложения функции f степени N и не зависит от тейлоровских коэффициентов высших степеней.

Будем называть струю нейтральной, если она не является ни устойчивой, ни неустойчивой.

Условия, при которых матрица A является гурвицевой (имеет собственное число с положительной вещественной частью или собственное число с нулевой вещественной частью) можно выписать в виде конечного числа алгебраических условий на коэффициенты матрицы A.

Таким образом, из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению следует, что множества устойчивых, неустойчивых и нейтральных 1-струй являются полуалгебраическими при любой размерности фазового пространства.

В.И.Арнольд показал в 1970 г., что в общем случае аналог приведенного выше утверждения неверен (т. е. задача об устойчивости не является алгебраически разрешимой). Не формулируя теорему Арнольда полностью (что потребовало бы введения дополнительных определений), ограничимся одним из более поздних результатов этого направления (см. [ШХ1981]).

Рассмотрим в пространстве R^4 систему (2.15), в которой матрица A имеет собственные числа $\pm i, \pm 3i$. Пересечение подмножества струй пространства $J^{(3)}(4)$, соответствующего таким системам, с множеством устойчивых струй не является полуалгебраическим.

Этот результат означает, что мы не можем наложить конечное число условий вида полиномиальных равенств и неравенств на коэффициенты при членах степени 2 и 3 в разложении функции G так, чтобы выделить множество систем, у которых нулевое решение устойчиво независимо от членов более высоких степеней.

Мы завершим этот пункт описанием некоторых результатов об устойчивости гамильтоновых систем (этот класс систем, чрезвычайно важных с точки зрения механики, был рассмотрен У.Гамильтоном[47]).

Мы рассмотрим вначале простейшие гамильтоновы системы, которые определяются следующим образом: обозначим через (p, q) координаты в четномерном евклидовом пространстве R^{2n}, где $p, q \in R^n$. Фиксируем гладкую функцию $H\colon R \times R^{2n} \to R$ (эта функция называется функцией Гамильтона или просто гамильтонианом) и сопоставим ей систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.17}$$

Система (2.17) называется гамильтоновой системой с n степенями свободы.

[47]Sir William Rowen Hamilton, 1805–1865.

Одной из важнейших задач естествознания всех времен было создание адекватной модели нашей Солнечной системы. Несомненно, именно эта задача стимулировала Ньютона при совершении его великих открытий – формулировки основных законов механики и закона всемирного тяготения.

Ньютонова модель Солнечной системы пришла кЁнам в виде задачи n тел – задачи о движении в пространстве n материальных точек под действием сил взаимного притяжения.

Система дифференциальных уравнений задачи n тел является гамильтоновой. Обозначим через x_i вектор положения i-го тела в трехмерном пространстве и через m_i его массу.

Введем координаты q_i и импульсы p_i по формулам

$$q_i = x_i, \quad p_i = m_i \frac{dx_i}{dt}.$$

Если F_i — сила, действующая на i-е тело, то из законов Ньютона следует, что

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i.$$

Перепишем эти уравнения в виде системы

$$\frac{dp_i}{dt} = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{p_i}{m_i}. \tag{2.18}$$

Легко показать (проверьте!), что верны равенства (2.17), т. е. система (2.18) является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m_i} - \gamma \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|q_j - q_i|_e},$$

где $|x|_e$ — евклидова норма вектора x, а γ — постоянная в законе всемирного тяготения, при этом

$$F_i = \gamma \sum_{i \neq j} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|_e^3},$$

т. е. i-е тело притягивается к остальным по ньютонову закону.

Решение задачи двух тел было по существу известно уже Кеплеру[48]. В этом случае тела движутся по коническим сечениям.

[48]Johann Kepler, 1571–1630.

При $n = 3$ размерность соответствующей системы (2.18) равна 18, и ее полное исследование лежит далеко за пределами возможностей современной математики (о некоторых результатах, связанных с задачей трех тел, мы упомянем в п. 7).

Существенное продвижение в задаче об устойчивости гамильтоновых систем связано с именем А.Н.Колмогорова[49].

Рассмотрим гамильтонову систему вида (2.17), в которой координаты q_i принадлежат n-мерному тору, а импульсы p_i — некоторой области пространства R^n, при этом гамильтониан H зависит только от импульсов. В этом случае фазовое пространство расслаивается на инвариантные n-мерные торы. Колмогоров показал в 1954 г., что при выполнении некоторого условия невырожденности у возмущенной системы с гамильтонианом

$$H(p) + \epsilon H_1(p, q, \epsilon)$$

сохраняются инвариантные торы, заполненные всюду плотными интегральными кривыми, при этом мера дополнения к объединению таких торов мала при малых ϵ.

Теория Колмогорова была развита В. И. Арнольдом и Ю. Мозером[50] и получила название КАМ-теории (по именам ее создателей).

Арнольду принадлежит одно из самых известных приложений КАМ-теории к задачам теории устойчивости. Он рассмотрел задачу n тел в предположении, что масса одного из тел (Солнца) много больше масс остальных тел (планет). В качестве невозмущенной рассматривается задача, в которой Солнце неподвижно, а планеты не взаимодействуют друг с другом (ясно, что соответствующая система распадается на независимые кеплеровы системы).

Еще Лагранж показал, что можно так усреднить возмущенную систему, что у усреднения существует устойчивое положение равновесия, соответствующее движению всех планет в одной плоскости в одну сторону по круговым орбитам. Движение планет, соответствующее малым колебаниям в линеаризованной около этого равновесия усредненной системе, называется лагранжевым движением.

Арнольд доказал, что если массы планет достаточно малы, то в фазовом пространстве существует область достаточно большой меры, заполненная траекториями, близкими к лагранжевым движениям (это и означает устойчивость эволюции планетной системы, начинающейся в указанной области).

[49]Андрей Николаевич Колмогоров, 1903–1987.
[50]Juergen Moser, 1928–1999.

2.5. Нелокальная качественная теория. Динамические системы

Говоря о качественной теории дифференциальных уравнений, мы, как уже говорилось выше, имеем в виду теорию, изучающую свойства решений не по их явным представлениям, а по свойствам правых частей дифференциальных уравнений.

При таком широком понимании этого термина, в качественную теорию включаются теория существования и единственности, локальная качественная теория, изучающая поведение траекторий в малой окрестности фиксированной траектории (результатов этой теории мы не касаемся в данных лекциях), теория устойчивости и т. д.

В данном пункте мы остановимся в основном на развитии нелокальной качественной теории — теории, описывающей структуру множества траекторий либо во всем фазовом пространстве, либо в его частях, которые нельзя считать малыми.

Основоположником этой теории явился Пуанкаре. Ее основы были изложены Пуанкаре в четырех мемуарах с общим названием «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» [Po1881-6].

В начале первого мемуара Пуанкаре ставит задачу совершенно отчетливо: «Необходимо изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями, сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям, так же, как это было сделано по отношению к алгебраическим функциям, которые сначала пытались свести к радикалам, а теперь изучают непосредственно, так же, как это было сделано по отношению к интегралам от алгебраических дифференциалов после долгих попыток выразить их в конечном виде».

В этих мемуарах Пуанкаре классифицирует основные типы точек покоя в двумерном случае (узлы, седла, фокусы и центры), исследует предельные циклы, изучает уравнения на торе (вводя число вращения и детально изучая связь этого числа со структурой траекторий), рассматривает проблему центра и фокуса.

Он использует методы исследования кривых без контакта и применяет теорию индекса, предваряя тем самым многочисленные последующие работы по качественной теории. Богатство идей, введенных Пункаре в качественную теорию, трудно переоценить (вспомним к тому же, что Пуанкаре создавал топологию в первую очередь как средство для изучения расположения траекторий многомерных дифференциальных уравнений).

Позже мы коснемся еще одного чрезвычайно важного открытия Пуанкаре — он обнаружил возможность появления гомоклинических точек в задачах небесной механики.

Отметим два существенных результата, развивающие теорию Пуанкаре.

В 1901 г. Бендиксон[51] доказал теорему (получившую название теоремы Пуанкаре-Бендиксона) о возможной структуре предельного множества положительной полутраектории плоской автономной системы при условии, что замыкание этой полутраектории лежит в области, содержащей лишь конечное число точек покоя. Он показал, что в этом случае предельное множество полутраектории может иметь один из следующих видов:

— точка покоя;

— замкнутая траектория;

— контур, состоящий из точек покоя и траекторий, стремящихся к этим точкам покоя при $\to \pm\infty$

(мы ссылаемся на теорему Пуанкаре-Бендиксона в п. 7.6).

Данжуа[52] изучил структуру траекторий уравнения на торе в том случае, когда один из меридианов тора C является циклом без контакта и число вращения Пуанкаре, порождаемое этим циклом, иррационально. Пуанкаре показал, что для любой траектории пересечение P ее ω-предельного множества с меридианом C может либо совпадать с C либо быть канторовым совершенным подмножеством C (при этом множество P не зависит от выбора полутраектории).

Данжуа построил пример уравнения класса C^1, для которого реализуется второй случай и доказал, что если порождаемая меридианом C функция последования имеет ограниченную вариацию (для этого достаточно, чтобы уравнение было класса C^2), то $P = C$.

Одним из важнейших открытых до сих пор вопросов качественной теории плоских автономных систем является 16-я проблема Гильберта (точнее, та ее часть, которая относится к предельным циклам).

Замкнутая траектория плоской автономной системы называется предельным циклом, если у нее есть окрестность, не содержащая других замкнутых траекторий.

В оригинальной формулировке Гильберта 16-я проблема (в части, относящейся к дифференциальным уравнениям) – это вопрос о максимальном числе и о расположении предельных циклов Пуанкаре.

Первым существенным результатом по 16-й проблеме была опубликованная в 1923 г. в [Du1923] теорема Дюлака[53] о том, что плоская автономная

[51] Ivar Bendixson, 1861–1935.

[52] Arnaud Denjoy, 1884–1974.

[53] Henry Dulac, 1870–1955.

система
$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \tag{2.19}$$
(с полиномиальными или аналитическими правыми частями P и Q) может иметь лишь конечное число предельных циклов (эта теорема получила название теоремы конечности).

В 1980 г. вышел русский перевод книги Дюлака [Д1980], содержавший доказательство теоремы конечности. Московский математик Ю. С. Ильяшенко[54] проанализировал доказательство и нашел в нем существенный пробел.

Эта история развивалась не так, как история 21-й проблемы — после долгой работы Ильяшенко удалось разработать новый метод, позволивший ему доказать теорему конечности [I1991]; независимо от него, доказательство теоремы конечности получили и некоторые другие математики.

Одна из наиболее распространенных современных формулировок 16-й проблемы такова: существует ли такая функция $N(n)$ для натуральных $n \geqslant 2$, что число предельных циклов системы (2.19), правые части которой — полиномы степени n, не превосходит $N(n)$?

В настоящее время неизвестно даже, существует ли число $N(2)$ с описанным выше свойством (из теоремы конечности следует, что число предельных циклов любой квадратичной системы (2.19) конечно, но конечна ли верхняя грань множества таких чисел?).

Долгое время считалось, что
$$N(2) = 3. \tag{2.20}$$
Доказательство равенства (2.20) было опубликовано в 1955 г. И.Г.Петровским[55] и Е.М.Ландисом[56] однако позже оказалось, что это доказательство было ошибочным.

Равенство (2.20) было опровергнуто в 1980 г., когда китайский математик Ши Сонглинг[57] рассмотрел квадратичную плоскую систему вида (2.19) с
$$P(x,y) = -y + \lambda x - 10x^2 + (5+\delta)xy + y^2,$$
$$Q(x,y) = x + x^2 - (25 + 9\delta - 8\epsilon)xy,$$
и показал, что эта система имеет четыре предельных цикла при $\delta = -10^{-13}, \epsilon = -10^{-52}, \lambda = -10^{-200}$.

[54]Юлий Сергеевич Ильяшенко, р. 1943.
[55]Иван Георгиевич Петровский, 1901–1973.
[56]Евгений Михайлович Ландис, 1921–1987.
[57]Shi Songling, b. 1939.

Таким образом, несмотря на внешнюю простоту системы (2.19), построение полной качественной теории таких систем гораздо ближе к началу, чем к завершению.

Возникновение общей теории динамических систем можно считать естественным развитием идей Пуанкаре.

Книга [Пу1947], в которой напечатан русский перевод мемуаров Пуанкаре, содержат написанное Е. А. Леонтович[58] и А. Г. Майером[59] дополнение «Общая качественная теория».

Леонтович и Майер анализируют работу Бендиксона, в которой доказана теорема Пуанкаре–Бендиксона. Из этого анализа вытекает, что основные результаты Пуанкаре о поведении траекторий плоских автономных систем дифференциальных уравнений (как и последующие результаты Бендиксона) по существу следуют из того, что такие системы порождают потоки (в терминологии данной книги).

Рождение теории динамических систем с дискретным временем также следует считать заслугой Пуанкаре — отметим, прежде всего, использованный им метод исследования замкнутых траекторий с использованием преобразования Пуанкаре, а также так называемую последнюю геометрическую теорему Пуанкаре о неподвижных точках сохраняющих меру гомеоморфизмов плоского кольца (эта теорема имеет важные следствия при изучении периодических решений в задаче трех тел).

Существенный вклад в современную теорию динамических систем внес Биркгоф[60].

В 1927 он опубликовал книгу [Bi1927], появление которой стало этапом в развитии теории динамических систем.

Биркгоф ввел понятия неблуждающих и рекуррентных траекторий, описал важнейшие свойства неблуждающего множества и центра динамической системы (мы доказываем одну из теорем Биркгофа в п. 3.3), исследовал свойство транзитивности, доказал эргодическую теорему, обобщил упомянутую выше геометрическую теорему Пуанкаре, провел глубокое исследование вопроса о существовании и устойчивости периодических движений, доказал существование бесконечного множества периодических точек в окрестности гомоклинической точки двумерного диффеоморфизма.

Дальнейшее развитие глобальной качественной теории дифференциальных уравнений и теории динамических систем было бурным и интенсивным процессом, описать который в ограниченном пространстве нескольких лекций невозможно.

[58]Евгения Александровна Андронова–Леонтович, 1905–1997.
[59]Артемий Григорьевич Майер, 1905–1951.
[60]George David Birkhoff, 1884–1944.

Отметим, что когда в 1985 г. ВИНИТИ начал издавать серию книг «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», первые пять томов этой серии были посвящены динамическим системам (позже в эту серию были включены дополнительные тома по той же тематике).

Следующие разделы этих лекций будут посвящены развитию теории структурной устойчивости и теории систем с хаотическим поведением траекторий (таким образом, кроме упоминавшейся выше локальной качественной теории дифференциальных уравнений, мы не рассматриваем такие важные и развитые ветви качественной теории, как теория асимптотических методов, теория систем с инвариантной мерой, теория бифуркаций, теория комплексных систем).

2.6. Структурная устойчивость

Прошло ровно 250 лет между появлением ньютоновых «Математических Начал Натуральной Философии» (1687 г.) и опубликованием статьи А. А. Андронова[62] и Л. С. Понтрягина[63] [АП1937] (1937 г.).

Новизна постановки задачи в этой статье Андронова и Понтрягина состояла в том, что исследовалось сохранение (или изменение) всей топологической структуры множества траекторий системы дифференциальных уравнений при C^1-малом изменении правых частей. Тем самым, основным объектом изучения стало все пространство систем дифференциальных уравнений (или динамических систем), а основным вопросом стало выделение точек этого пространства, соответствующих устойчивости или неустойчивости глобальной структуры множества траекторий. Именно такой подход к теории динамических систем определяет содержание данной книги.

В п. 7.6 мы сформулировали теорему Андронова–Понтрягина.

Характерным свойством грубых двумерных автономных систем дифференциальных уравнений (в диске или на сфере) является конечность множества замкнутых траекторий.

Когда в конце 1950-х годов молодой (но уже известный своим доказательством гипотезы Пуанкаре при $n > 4$) американский тополог С. Смейл[64] проявил интерес ктеории динамических систем, он попытался распространить результат Андронова–Понтрягина на многомерный случай. Как писал сам Смейл, он предполагал вначале, что структурно устойчивый (этот термин заменил термин грубый сначала в США, а потом и повсеместно) диффеоморфизм на многообразии любой размерности имеет лишь конечное множество периодических точек.

[62]Александр Александрович Андронов, 1901–1952.
[63]Лев Семенович Понтрягин, 1908–1988.
[64]Stephen Smale, b. 1930.

Н. Левинсон[65] обратил внимание Смейла на статьи М. Картрайт[66] и Дж. Литтлвуда[67] [CL1945,CL1947-9], посвященные уравнению Ван дер Поля[68]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = b\lambda k \cos(\lambda t) \tag{2.21}$$

с большим параметром k и его обобщениям (мы расскажем о появлении этого уравнения в следующем пункте).

Картрайт и Литтлвуд обнаружили, что в уравнении Ван дер Поля возможно наличие множеств решений с очень странной структурой, при этом такая структура не разрушается при малых изменениях параметра. В частности, уравнение (2.21) может иметь бесконечные множества периодических решений с неограниченно растущими периодами.

Доказательства Картрайт и Литтлвуда технически очень сложны; Левинсон показал [Le1949], что аналогичным поведением решений обладает более простой вариант уравнения (2.21), в котором нелинейность $x^2 - 1$ заменена кусочно-постоянной функцией.

Анализируя поведение решений уравнения Левинсона, Смейл пришел к картине своей подковы (см. п. 9). Так в 1961 г. был построен первый пример структурно устойчивого диффеоморфизма с бесконечным множеством периодических точек [Sm1963].

Смейл предположил, что структурно устойчивыми являются рассмотренный Томом[69] гиперболический автоморфизм тора (см. п. 7) и геодезический поток на замкнутом римановом многообразии отрицательной кривизны.

Первое доказательство структурной устойчивости гиперболического автоморфизм тора было опубликовано В. И. Арнольдом и Я. Г. Синаем[70] в 1962 г., однако позже было показано, что гладкость используемых в доказательстве конструкций недостаточна для применения используемой в нем теории Данжуа. Структурную устойчивость гиперболического автоморфизма тора обосновал сам Смейл.

Доказательство гипотезы Смейла о структурной устойчивости геодезического потока на замкнутом римановом многообразии отрицательной кри-

[65]Norman Levinson, 1912–1975.
[66]Mary Cartwright, 1900–1998.
[67]John Edensor Littlewood, 1885–1977.
[68]Balthasar Van der Pol, 1889–1959.
[69]René Thom, 1923–2002.
[70]Яков Григорьевич Синай, р. 1935.

визны было получено Д. В. Аносовым[71] как частный случай его теоремы о структурной устойчивости (У)-систем.

В знаменитой монографии Аносова [Ан1967] им было введено условие (У), которое позже стало называться условием гиперболичности.

Аносов показал, что любая (У)-система (позже такие системы стали называться потоками и диффеоморфизмами Аносова) структурно устойчива. Он отметил, что условие (У) по существу использовалось еще Хопфом[72] при изучении эргодичности геодезических потоков.

В том же 1967 г., когда была напечатана книга Аносова, Смейл опубликовал большую статью [Sm1967]. В ней он ввел Аксиомы A и A′, доказал теорему о спектральном разложении и первоначальный вариант теоремы об Ω-устойчивости (в котором вместо условия отсутствия циклов использовалось несколько более сильное условие); позже Смейл доказал достаточность условий теоремы об Ω-устойчивости в ее наиболее общем виде [Sm1970].

По существу в статье Смейла [Sm1967] (и в нескольких последовавших за ней статьях Смейла и Смейла–Палиса[73]) была намечена программа построения теории Ω-устойчивости и структурной устойчивости. Основными гипотезами этой теории (для случая диффеоморфизмов) были высказанные Смейлом и Палисом [PaS1970] в конце 1960-х годов утверждения, сформулированные в виде теорем 7.5 и 7.6 данной книги.

Полное осуществление этой программы (как для диффеоморфизмов, так и для потоков, порождаемых гладкими векторными полями) потребовало около 30 лет.

Отметим вначале, что одним из краеугольных камней теории структурной устойчивости была теорема об устойчивом многообразии (современная ее формулировка приведена в теореме 7.1).

Д. В. Аносов указывает, что в аналитическом случае теоремы об инвариантных многообразиях были более или менее известны Дарбу[74], Пуанкаре и Ляпунову.

Вариант теоремы об устойчивом многообразии был доказан Ляпуновым в «Общей задаче об устойчивости движения» при исследовании вопроса об условной устойчивости (т. е. об устойчивости при условии, что отклонения начальных данных возмущенного движения принадлежат некоторому подмножеству пространства). Ляпунов привел условия, при которых (в случае аналитической системы) существует такое гладкое многообразие,

[71]Дмитрий Викторович Аносов, р. 1936.
[72]Eberhard Hopf, 1902–1983.
[73]Jacob Palis, b. 1940.
[74]Gaston Darboux, 1842–1917.

проходящее через начальную точку невозмущенного движения, что движения, начинающиеся на этом многообразии, стремятся к невозмущенному движению экспоненциально при возрастании времени. Метод Ляпунова использовал представление искомого многообразия специальными рядами.

Связанные с задачей об устойчивом многообразии геометрические идеи высказывал Боль[75].

Однако наиболее часто используются методы доказательства теоремы об устойчивом многообразии, предложенные Адамаром[76] и Перроном[77] (и саму теорему часто называют теоремой Адамара-Перрона).

Метод Адамара основан на изучении преобразования графиков.

Перрон использовал специальный метод последовательных приближений, использующий так называемый оператор Перрона; этот оператор оказался весьма эффективным инструментом при изучении многих задач теории дифференциальных уравнений и динамических систем. Именно метод Перрона применен в данной книге.

Отметим также результаты Гробмана[78] и Хартмана[79], доказавших, что динамическая система в окрестности гиперболической неподвижной точки локально топологически сопряжена с линейной системой (см. пп. 4,5).

Перейдем теперь к описанию истории доказательства теорем 7.5 и 7.6. Как уже отмечалось, достаточность условий теоремы 7.5 (из Аксиомы A и условия отсутствия циклов следует Ω-устойчивость) доказал сам Смейл.

Достаточность условий теоремы 7.6 (из Аксиомы A и строгого условия трансверсальности следует структурная устойчивость) доказали вначале Дж. Роббин[80] [Robb1971] (для диффеоморфизмов класса C^2), а затем К. Робинсон[81] [Robi1976] (в общем случае, для диффеоморфизмов класса C^1).

После доказательства достаточности условий теорем 7.5 и 7.6 около 20 лет многие специалисты по теории динамических систем пытались доказать их необходимость. Необходимость условий теоремы 7.6 обосновал Р. Мане[82] в 1987 году [M1987]. Доказательство Мане опиралось, в частности (совершенно неожиданно для специалистов), на теорию инвариантных мер. В приложении 1 к данной книге мы излагаем схему доказательства теоремы Мане.

[75]Pirs Bohl, 1865–1921.
[76]Jacques Salomon Hadamard, 1865–1963.
[77]Oskar Perron, 1880–1975.
[78]Давид Матвеевич Гробман, 1922- .
[79]Philip Hartman, b. 1915.
[80]Joel W. Robbin, b. 1941.
[81]Clark Robinson, b. 1943.
[82]Ricardo Mañé, 1948–1995.

Используя практически ту же технику, что Мане, необходимость условий теоремы 7.5 установил Палис [Pali1987].

Случай потоков, порожденных гладкими векторными полями, технически более сложен, чем случай диффеоморфизмов (а некоторые отличия являются не только техническими, но и идейными). Поэтому утверждения, аналогичные теоремам 7.5 и 7.6, были доказаны для потоков существенно позже (полные доказательства всех этих результатов появились лишь в 1996 г.).

Аналогом теоремы 7.5 является следующее утверждение: поток ϕ Ω-устойчив тогда и только тогда, когда ϕ удовлетворяет Аксиоме A$'$ и условию отсутствия циклов.

Достаточность этих условий для Ω-устойчивости гладкого потока была доказана Пью[83] и Шубом[84] [PuS1970]; необходимость следует из упоминаемых ниже результатов Вена[85] и Хаяши[86].

Аналог теоремы 7.6 был доказан Робинсоном [Robi1974] (если поток ϕ удовлетворяет Аксиоме A$'$ и строгому условию трансверсальности, то поток ϕ структурно устойчив) и Веном и Хаяши [We1996,Ha1997] (если поток ϕ структурно устойчив, то поток ϕ удовлетворяет Аксиоме A$'$ и строгому условию трансверсальности).

2.7. Динамические системы с хаотическим поведением

В 1927 г. голландский математик и инженер Балтазар Ван дер Поль (известный не только своими теоретическими исследованиями, но и строительством телеграфной линии, соединившей Голландию с ее колониями в Юго-Восточной Азии) изучал колебания в цепи, содержащей электронную лампу и периодический источник тока. Он менял амплитуду источника и слушал, как меняется звук в телефонной трубке (осциллограф еще не был изобретен).

Ван дер Поль заметил, что регулярный переход от одной установившейся частоты к другой сменяется иногда хаотическим шумом, не исчезающим при малом изменении амплитуды.

Это открытие Ван дер Поля послужило толчком кодному из самых значительных переворотов в истории естествознания – осознанию роли хаоса в математическом моделировании природы.

[83]Charles Chapman Pugh, b. 1940.
[84]Michael Shub, b. 1943.
[85]Lan Wen, b. 1946.
[86]Shuhei Hayashi, b. 1962.

Как уже отмечалось выше, Картрайт и Литтлвуд обнаружили, что в уравнении Ван дер Поля (2.21) возможно наличие множеств решений с очень странной структурой, при этом такая структура не разрушается при малых изменениях параметра.

Исследуя динамику инвариантного множества, возникающего у диффеоморфизма с подковой (мы говорили, что картинка подковы была обнаружена Смейлом при анализе поведения решений уравнения Левинсона, упрощенного аналога уравнения Ван дер Поля), Смейл понял, что такая же динамика порождается трансверсальной гомоклинической точкой.

Гомоклинические точки были открыты Пуанкаре (который называл их двояко-асимптотическими). Анализируя порождаемую гомоклиническими точками динамику в своем фундаментальном труде Новые методы небесной механики [Po1892-9], Пуанкаре написал знаменитые слова: «Если попытаться представить себе фигуру, образованную этими двумя кривыми[87] и их бесчисленными пересечениями, каждое из которых соответствует двоякоасимптотическому решению, то эти пересечения образуют нечто вроде решетки, ткани, сети с бесконечно тесными петлями; ни одна из этих двух кривых не должна пересечь самое себя, но она должна навиваться на самое себя очень сложным образом, чтобы пересечь бесконечно много раз все петли сети.

Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел».

Мы упоминали о том, что Биркгофом была отмечена возможность появления бесконечного множества периодических точек в окрестности гомоклинической точки двумерного диффеоморфизма.

Из теоремы Смейла о кодировке подковы (см. теорему 9.1) вытекает, что любая окрестность трансверсальной гомоклинической точки содержит инвариантное множество, на котором диффеоморфизм топологически сопряжен с гомеоморфизмом сдвига; в частности, это означает, что любая окрестность трансверсальной гомоклинической точки содержит бесконечное множество периодических точек.

Задача о полном описании динамики системы в малой окрестности трансверсальной гомоклинической точки была решена Ю. И. Неймарком[88] [Не1967] и Л. П. Шильниковым[89] [Ши1967].

[87]Имеются в виду устойчивое и неустойчивое многообразия седловой гиперболической неподвижной точки.
[88]Юрий Исаакович Неймарк, р. 1920.
[89]Леонид Павлович Шильников, р. 1934

Отметим, что полное описание возможной динамики в случае нетрансверсальной гомоклинической точки скорее всего нереально.

В настоящее время существует много различных определений хаоса, порождаемого динамическими системами (в данной книге мы ограничиваемся определением, приведенным в п. 9.2). Как показано в п. 9.3, из наличия трансверсальной гомоклинической точки следует существование хаотической структуры.

Не менее известной, чем подкова, системой с хаотическим поведением траекторий явилась модель, изученная американским физиком Э. Лоренцем[90].

В 1963 г., почти одновременно с появлением подковы, Лоренц опубликовал результаты компьютерного исследования системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + 10y, \\ \dot{y} &= 28x - y - xz, \\ \dot{z} &= -8/3z + xy, \end{aligned}$$

моделирующей конвективное движение слоя жидкости между двумя параллельными пластинами [Lo1963]. Внимание Лоренца привлек тот факт, что при численном интегрировании системы с почти одинаковыми начальными данными получаются приближенные траектории, существенно расходящиеся с течением времени (на рис. изображена одна траектория системы Лоренца).

Анализ систем, динамика которых аналогична динамике системы Лоренца, привел к возникновению термина «странный аттрактор». Так стали называть предельные множества динамических систем с хаотической структурой. Странные аттракторы были обнаружены в огромном количестве моделей (в механике, гидроаэродинамике, теории лазеров, динамике популяций и т. д.). Методы исследования таких моделей опираются на технику, развитую при создании теории структурной устойчивости.

До самого последнего времени существование хаотических структур удавалось доказать не для самой системы Лоренца, а для ее геометрических моделей. Лишь недавно американский математик К.Мишайков[91] с группой сотрудников доказал, что система Лоренца действительно порождает подкову (при этом был использован метод, комбинирующий теорию индекса с результатами компьютерного моделирования и так называемой интервальной арифметикой, позволяющей оценивать ошибки вычислений и тем

[90]Edward Norton Lorenz, b. 1917.
[91]Konstantin Mischaikov, b. 1957.

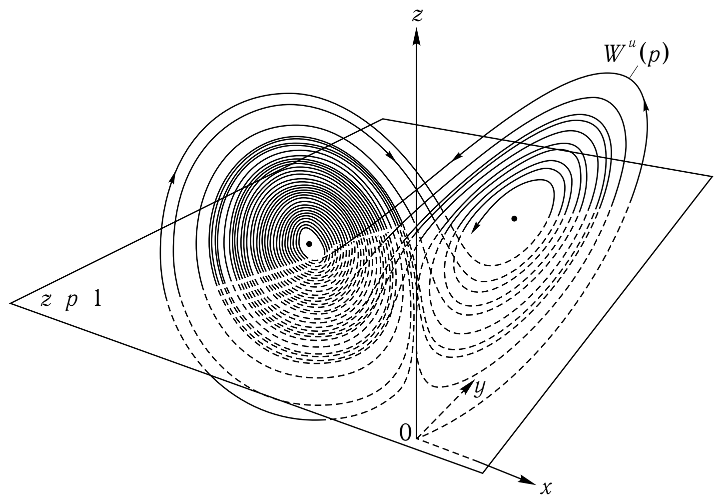

Рис. 7. Траектория системы Лоренца

самым получать достоверную информацию о геометрии образов множеств при сдвигах по траекториям).

Опишем еще два результата, относящихся к теории систем с хаотическим поведением.

Один из них получен А. Н. Шарковским[92] [Ша1964] в 1964 г. и относится к полудинамическим системам (см. п. 3.1), порождаемым непрерывными отображениями отрезка $[0,1]$ в себя.

Расположим натуральные числа в следующем порядке:

$$1 \ll 2 \ll 2^2 \ll 2^3 \ll \cdots \ll 2^2 \cdot 7 \ll 2^2 \cdot 5 \ll 2^2 \cdot 3 \ll$$

$$\ll \cdots \ll 2 \cdot 7 \ll 2 \cdot 5 \ll 2 \cdot 3 \ll \cdots \ll 9 \ll 7 \ll 5 \ll 3$$

(слева направо располагаются возрастающие степени двойки, а справа налево идут вначале нечетные числа в порядке возрастания, затем произведения нечетных чисел на 2, на 4 и т. д.) и будем считать, что отношение $\ll$ транзитивно, т. е. из $k \ll l \ll m$ следует, что $k \ll m$.

По аналогии со случаем динамической системы будем говорить что точка pЁ— периодическая точка отображения f периода m, если точки $p, f(p), \ldots, f^{m-1}(p)$ различны, а $f^m(p) = p$.

[92]Александр Николаевич Шарковский, р. 1936.

Шарковский доказал, что если у полудинамической системы, порождаемой непрерывным отображением $f\colon[0,1] \to [0,1]$, есть периодическая точка периода m и $k \ll m$, то есть и периодическая точка периода k.

Кроме того, для любого натурального m можно указать непрерывное отображение f, имеющее периодическую точку периода m и не имеющее периодических точек периодов n с $m \ll n$.

Как это нередко бывает даже в наше время, теорема Шарковского осталась незамеченной западными математиками, и только после того, как десятилетием позже она была переоткрыта в более слабом варианте [LY], порядок Шарковского стал общепризнанным в теории динамических систем.

Расскажем, наконец, о работе московского математика В.М.Алексеева[93] по ограниченной задаче трех тел, напечатанной в 1968–9 гг. [Ал1968-9].

Рассмотрим вначале вырожденную задачу трех тел в предположении, что два тела одинаковой массы двигаются периодически в плоскости по эллипсам, имеющим общий центр C (это одна из известных кеплеровских конфигураций в задаче двух тел), а третье тело, имеющее нулевую массу, двигается по прямой, перпендикулярной к указанной плоскости и проходящей через общий центр C.

Уравнение движения тела нулевой массы получается из предельного варианта (при стремлении массы третьего тела к нулю) в классической системе задачи трех тел.

Если $z(t)$ — координата положения тела нулевой массы в момент времени t (мы считаем, что начало координат находится в общем центре C эллиптических орбит массивных тел), то уравнение движения тела нулевой массы имеет вид

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{z}{\bigl(z^2 + r(t)\bigr)^{3/2}}, \tag{2.22}$$

где $r(t)$ — расстояние каждого из массивных тел до центра C. Правая часть уравнения (2.22) ω-периодична по времени, где ω — общий период движения массивных тел. Рассмотрим преобразование Пуанкаре T плоскости, порождаемое сдвигом на время ω по траекториям системы второго порядка, соответствующей уравнению (2.22).

Алексеев показал, что диффеоморфизм T порождает подкову (при этом подкова имеет очень специфическую спиральную форму); следовательно, динамика уравнения (2.22) хаотична.

Очень важен вывод Алексеева о том, что такой же динамикой обладает и невырожденный вариант ограниченной задачи трех тел (в предположении, что масса третьего тела достаточно мала по сравнению с массами первых двух тел).

[93] Владимир Михайлович Алексеев, 1932–1980.

Таким образом, хаотическая динамика возможна и в самой классической задаче теории дифференциальных уравнений, восходящей к Ньютону.

Литература

[Ал1968-9] Алексеев В.М. Квазислучайные динамические системы I, II, III. Мат. сб., 1968, т. 76, с. 72–134; 1968, т. 77, с. 545–601; 1969, т. 78, с. 3–50.

[АП1937] Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы. Докл. АН СССР, 1937, т. 14, с. 247–250.

[Ан1967] Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1967, т. 90.

[Ан1969] Аносов Д.В. Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем. Тр. 5-й межд. конф. по нелин. колеб., Киев, 1969, т. 2, с. 39–45.

[БЛ1976] Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Наука, М, 1976.

[Биб1995] Бибиков Ю.Н. Дифференциальные уравнения на гладких многообразиях. Изд-во С.-Петербургск. ун-та, С.-Петербург, 1995.

[Бир1941] Биркгоф Г.Д. Динамические системы. Гостехиздат, М. 1941 (русск. перев. [Bi1927]).

[Бр1972] Брин М.И. О включении диффеоморфизма в поток. Изв. вузов, сер. мат., 1972, т. 8.

[В1945] Вавилов С.И. Исаак Ньютон. 2-е изд., Изд-во АН СССР, М-Л, 1945.

[Д1980] Дюлак А. О предельных циклах. Наука, М, 1980 (русск. перев. [Du1923]).

[КА1977] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Наука, М, 1977.

[ЛД1957] Лаппо-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории линейных дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, М, 1957.

[Л1956] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2, М-Л, 1956, с. 7–263.

[М1949] Моисеев Н.Д.. Очерки развития теории устойчивости. ГИТТЛ, М-Л, 1949.

[Не1967] Неймарк Ю.И. О движениях, близких к двояко-асимптотическому движению. Докл. АН СССР, 1967, т. 172, с. 1021–1024.

[НС1949] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. 2-е изд., ГИТТЛ, М-Л, 1949.

[Ни1975] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. Мир, М, 1975 (русск. перев. [Ni1971]).

[Пи1988] Пилюгин С.Ю. Введение в грубые системы дифференциальных уравнений. Изд-во Ленингр. ун-та, Л, 1988.

[Пл1972a] Плисс В.А. Об одной гипотезе Смейла. Дифференц. уравн., 1972, т. 8, с. 268–282.

[Пл1972b] Плисс В.А. Анализ необходимости условий грубости Смейла и Роббина для периодических систем дифференциальных уравнений. Дифференц. уравн., 1972, т. 8, с. 972–983.

[Пл1977] Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. Наука, М-Л, 1977.

[ПГ1969] Проблемы Гильберта. Наука, М, 1969.

[Пу1947] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. ГИТТЛ, М, 1947 (русск. перев. [Po1881-6]).

[Пу1972] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. труды, т. I, II, Наука, М, 1972 (русск. перев. [Po1892-9]).

[РФ1977] Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный кур топологии. Геометрические главы. Наука, М, 1977.

[Ф1984] Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. Наука, М, 1984.

[Ша1964] Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя. Укр. мат. ж., 1964, т. 16, с. 61–71.

[Ши1967] Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа. Мат. сб., 1967, т. 74, с. 378–397.

[ШХ1981] Шноль Э.Э., Хазин Л.Г. Об устойчивости положений равновесия в критических случаях и в случаях, близких ккритическим. Прикл. мат. мех., 1981, т. 45, с. 595–604.

[AS1970] Abraham R., Smale S. Non-genericity of Ω-stability. Global Analysis, Symp. Pure Math., 1970, v. 14, Amer. Math. Soc., p. 5–8.

[ADKKP1996] Al-Nayef A., Diamond P., Kloeden P., Kozyakin V., Pokrovskii A. Bi-shadowing and delay equations. Dynamics Stab. Syst., 1996, v. 11, p. 121–134.

[Ao1992] Aoki N. The set of Axiom A diffeomorphisms with no cycle. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N. S.), 1992, v. 23, p. 21–65.

[Ba1952] De Baggis H.F. Dynamical systems with stable structure. In: Contrib. Theory Nonlin. Oscill., Princeton, 1952, p. 19–36.

[Bi1927] Birkhoff G.D. Dynamical Systems. Colloquim Publ., v. 9, Amer. Math. Soc., 1927.

[Bo1975] Bowen R. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Lect. Notes Math., v. 470, Springer, 1975.

[BS2002] Brin M., Stuck G. Introduction to Dynamical Systems. Cambridge Univ. Press, 2002.

[CP1995] Corless R.M., Pilyugin S.Yu. Approximate and real trajectories for generic dynamical systems. J. Math. Anal. Appl., 1995, v. 189, p. 409–423.

[CL1945] Cartwright M.L., Littlewood J.E. On nonlinear equations of the second order: I. The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2\dot{y})\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha), k$ large. J. London Math. Soc. 1945, v. 20, p. 180–189.

[CL1947-9] Cartwright M.L., Littlewood J.E. On nonlinear equations of the second order: II. The equation $\ddot{y} + kf(y\dot{y} + g(y, k) = p(t) = p_1(t) + kp_2(t)$. Ann. Math. 1947, v. 48, p. 474–494; 1949, v. 50, p. 504–505.

[De1989] Devaney R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley, 1989.

[Du1923] Dulac H. Sur les cycles limite. Bull. Soc. Math. France, 1923, v. 51, 45–188.

[E1749] (Euler L.) Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus, auctore L. Eulero, Petropoli, 1749.

[F1971] Franks J. Necessary conditions for stability of diffeomorphisms. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, v. 158, p. 301–308.

[GW1993] Glasner W., Weiss B. Sensitive dependence on initial conditions. Nonlinearity, 1993, v. 6, p. 1067–1075.

[GMN1980] Guckenheimer J., Moser J., Newhouse S. Dynamical Systems. Birkhäuser, 1980.

[Ha1992] Hayashi S. Diffeomorphisms in $\mathcal{F}^1(M)$ satisfy Axiom A. Ergod. Theory Dyn. Syst., 1992, v. 12, p. 233–253.

[Ha1997] Hayashi S. Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω-stability conjecture. Ann. Math., 1997, v. 145, p. 81–137.

[HPPS1970] Hirsch M, Palis J., Pugh C., Shub M. Neighborhoods of hyperbolic sets. Invent. Math., 1970, v. 9, p. 133–163.

[Hu1982] Hurley M. Attractors: persistence, and density of their basins.Trans. Amer. Math. Soc., 1982, v. 269, p. 247–271.

[I1991] Ilyashenko Yu. Finiteness Theorem for Limit Cycles. Amer. Math. Soc., 1991.

[KH1995] Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge Univ. Press, 1995.

[Le1949] Levinson N. A second order differential equation with singular solutions. Ann. Math. 1949, v. 50, p. 126–153.

[LY1975] Li T.Y., Yorke J. Period three implies chaos. Amer. Math. Monthly, 1975, v. 82, p. 985–992.

[Li1980] Liao S.T. On the stability conjecture. Chinese Ann. Math., 1980, v. 1, p. 9–30.

[Lo1963] Lorenz E.N. Deterministic non-periodic flow. J. Atmos. Sci.,1963, v. 20, p. 130–141.

[M1975] Mañé R. Expansive diffeomorphisms. Dynamical Systems – Warwick, 1974, Lect. Notes Math., v. 468, Springer, 1995, p. 162–174.

[M1982] Mañé R. An ergodic closing lemma. Ann. Math., 1982, v. 116, p. 503–540.

[M1987] Mañé R. A proof of the C^1 stability conjecture. Publ. Math. IHES, 1987, v. 66, p. 161–210.

[Ne1687] Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. 1687.

[Ni1971] Nitecki Z. Differentiable Dynamics. MIT Press, 1971.

[Pali1969] Palis J. On Morse-Smale dynamical systems. Topology, 1969, v. 8, p. 385–404.

[Pali1987] Palis J. On the C^1 Ω-stability conjecture. Publ. Math. IHES, 1987, v. 66, p. 211–215.

[PM1982] Palis J., di Melo W. Geometric Theory of Dynamical Systems. Springer, 1982.

[PaS1970] Palis J., Smale S. Structural stability theorems. Global Analysis, Symp. Pure Math., 1970, v. 14, Amer. Math. Soc., p. 223–231.

[Palm2000] Palmer K. Shadowing in Dynamical Systems. Theory and Applications. Kluwer, 2000.

[Pi1994] Pilyugin S.Yu. The Space of Dynamical Systems with the C^0 Topology. Lect. Notes Math., v. 1571, Springer, 1994.

[Pi1999] Pilyugin S.Yu. Shadowing in Dynamical Systems. Lect. Notes Math., v. 1706, Springer, 1999.

[Pi2002] Pilyugin S.Yu. Inverse shadowing by continuous methods. Discrete Cont. Dyn. Syst., 2002, v. 8, p. 29–38.

[Po1881-6] Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations differentiélles, I-IV. J. Math. Pures Appl., 3 série, 1881, v. 7, p. 375–422; 1882, v. 8, p. 251–286; 4 série, 1885, v. 1, 167–244; 1886, v. 2, p. 151–217.

[Po1892-9] Poincaré H. Les méthodés nouvelles de la mécanique céleste. Paris, 1892–1899.

[Pu1967] Pugh C. The closing lemma. Amer. J. Math., 1967, v. 89, p. 956–1009.

[PR1983] Pugh C., Robinson C. The C^1 closing lemma, including Hamiltonians. Erg. Theory Dyn. Syst., 1983, v. 3, 261–313.

[PuS1970] Pugh C., Shub M., Ω-stability theorem for vector fields. Invent. Math., 1970, v. 11, p. 150–158.

[Robb1971] Robbin J. A structural stability theorem. Ann. Math., 1971, v. 94, p. 447–493.

[Robi1971] Robinson C. C^r structural stability implies Kupka-Smale. Salvador Symp. Dyn. Syst. 1971, Univ. of Bahia, p. 443–449.

[Robi1974] Robinson C. Structural stability of vector fields. Ann. Math., 1974, v. 99, p. 154–175.

[Robi1976] Robinson C. Structural stability of C^1 diffemorphisms. J. Diff. Equat., 1976, v. 22, p. 28–73.

[Robi1995] Robinson C. Dynamical Systems. CRC Press, 1995.

[Sh1987] Shub M. Global Stability of Dynamical Systems. Springer, 1987.

[Sm1963] Smale S. Structurally stable diffeomorphisms with infinitely many periodic points. Proc. Intern. Conf. Nonl. Oscill., v. 2, Kiev, 1963, p. 365–366.

[Sm1966] Smale S. Structurally stable systems are not dense. Amer. J. Math., 1966, v. 88, p. 491–496.

[Sm1967] Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, p. 747–817.

[Sm1970] Smale S. The Ω-stability theorem. Global Analysis, Symp. Pure Math., 1970, v. 14, Amer. Math. Soc., p. 289–297.

v[Sm1998] Sm1998 Smale S. Mathematical problems for the next century. Mathematical Intelligencer, 1998, v. 20, p. 7–15.

[T1971] Takens F. On Zeeman's tolerance stability conjecture. In: Manifolds - Amsterdam, 1970. Lect. Notes Math., v. 197, Springer, 1971, p. 209–219.

[We1996] Wen L. On the C^1 stability conjecture for flows. J. Differ. Equat., 1996, v. 129, p. 334–357.

[We2002] Wen L. A uniform C^1 connecting lemma. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2002, v. 8, p. 257–265.

[Wh1971] White W. On the tolerance stability conjecture. Salvador Symp. Dyn. Syst. 1971, Univ. of Bahia, p. 663–665.

[Wi1970] Williams R. The «DA» maps of Smale and structural stability. Global Analysis, Symp. Pure Math., 1970, v. 14, Amer. Math. Soc., p. 329–334.

Предметный указатель

Сергей Юрьевич Пилюгин

Пространства динамических систем

Дизайнер ????
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерный набор и верстка А. В. Моторин
Корректор Г. Г. Тетерина

Подписано в печать 06.03.2008. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. ???. Уч. изд. л. ????.
Гарнитура ???. Бумага офсетная №1.
Тираж ???? экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295