Занятие от 19.11.
Геометрия и топология. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

20 ноября 2020 г.

Задача 30. Пусть $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ — набор нигде не плотных множеств. Это значит, что $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus A_n)) = \mathbb{R}$, а значит любое открытое множество будет пересекаться с $\mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus A_n)$. Тогда если мы рассмотрим любое непустое открытое U, то множество $U \cap \mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus A_n)$ будет открытым и непустым. Это можно перефразировать так: в любом интервале прямой найдётся подинтервал, лежащий в $\mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus A_n)$ как подмножество. Тогда это будет значить, что в любом отрезке прямой будет подотрезок, лежащий в $\mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus A_n)$ как подмножество.

Тогда рассмотрим любой отрезок $S_0 \subseteq \mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus A_0)$, затем любой его подотрезок $S_1 \subseteq \mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus A_1)$ и т.д. Таким образом получим последовательность отрезков $(S_n)_{n=0}^{\infty}$. Заметим, что множество $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ непусто. Следовательно есть точка y, лежащая в каждом из отрезков S_n, а значит и в каждом множестве A_n. Таким образом для всякого $n \geqslant 0$ имеем, что $y \in \mathbb{R} \setminus A_n$, а значит $y \notin A_n$. Таким образом $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ не содержит y, а значит не совпадает с $\mathbb{R}$.

Это буквально значит, что $\mathbb{R}$ не представляется в виде счётного набора нигде не плотных множеств.

Задача 31. Заметим, что если U открыто, то оно есть дизъюнктное объединение интервалов некоторого не более чем счётного семейства Σ. Пусть x — граничная точка U. Тогда $x \notin U$, но в каждой окрестности x находится некоторый элемент U. Тогда либо x является концом отрезка, либо во всякой окрестности x есть некоторый интервал из Σ. А тогда понятно, что $\mathrm{Fr}(U)$ есть замыкание множества концов интервалов из Σ.

Также очевидно, что $x \in \mathrm{Fr}(U)$ является концом интервала из Σ тогда и только тогда, когда в какой-то правой или левой окрестности x нет точек $\mathrm{Fr}(U)$.

Заметим ещё раз, что $\mathrm{Fr}(U)$ замкнуто, а тогда рассмотрим $F := \mathbb{R} \setminus \mathrm{Fr}(U)$. Очевидно, что $U \subseteq F$. При этом в каждой окрестности $x \in \mathrm{Fr}(U)$ есть точка из F, а значит и из F, поэтому $\mathrm{Cl}(F) = \mathbb{R}$ (поэтому в том числе $\mathrm{Fr}(F) = \mathrm{Fr}(U)$).

Рассмотрим Λ — семейство интервалов, что их дизъюнктное объединение равно F. Тогда заметим, что для всякого $(a; b) \in \Sigma$ верно, $(a; b) \subseteq F$, а $a, b \in \mathrm{Fr}(F)$, следовательно $(a; b) \in \Lambda$. Поэтому $\Sigma \subseteq \Lambda$. Значит если у некоторого семейства открытых множеств границы равны границе U, то каждое множество из этого семейства есть объединение некоторого набора интервалов из Λ. т.е. их не более континуума.

Покажем, что континуум достигается. Рассмотрим семейство Λ интервалов, которые выкидываются из отрезка $[0; 1]$ при построении канторового множества (обозначим его за C): т.е. это $(1/3; 2/3)$, $(1/9; 2/9)$, $(7/9; 8/9)$, и т.д. Рассмотрим также последовательность $(I_n)_{n=0}^{\infty} := \left((1/3^{n+1}; 2/3^{n+1})\right)_{n=0}^{\infty}$ интервалов из Λ. Также определим $\Lambda' := \Lambda \setminus \{I_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Несложно видеть, что граница $F := \bigcup_{I \in \Lambda} I$ есть C, так как это множество, которое содержит все концы интервалов из Λ', а каждая точка C является пределом этих концов: каждая точка C

есть пересечение счётного числа отрезков, каждый из которых в 3 раза меньше предыдущего, но один из концов каждого отрезка совпадает с концом некоторого интервала, следовательно каждая точка C является пределом некоторых концов интервалов Λ.

Теперь поймём, что граница $F' := \bigcup_{I\in\Lambda'} I$ есть тоже C. Если $x \in C$ является концом интервала из Λ', то оно так же лежит на границе F'. Если $x \in C$ было такой точкой, что в любой её правой (левой) проколотой окрестности были границы интервалов Λ, а $x \neq 0$, то в некоторой правой (левой) проколотой окрестности x множества U и U' (т.е. их пересечения с этой окрестностью совпадают), поэтому x является пределом концов интервалов из Λ', а значит лежит на границе U'. Заметим также, что концы каждого интервала I_n также являются пределами других концов интервалов из Λ, поэтому они также лежат на границе U'. Осталось показать, что 0 лежит на границе U'. Можно легко заметить, что для всякого $n \geqslant 0$ интервал $(7/3^{n+2}; 8/3^{n+2})$ лежит в Λ', следовательно точка $7/3^{n+2}$ является концом интервала из Λ', а значит их предел и даст 0. Таким образом $\mathrm{Fr}(U') = \mathrm{Fr}(U) = C$.

Значит, если мы возьмём любое Σ, что $\Lambda' \subseteq \Sigma \subseteq \Lambda$, то граница $V := \bigcup_{I\in\Sigma} I$ так же совпадёт с C. При этом $\Lambda \setminus \Lambda'$ счётно, поэтому таких Σ континуум, а значит и V тоже континуум.
