Листочек 1.
Дискретная теория вероятностей. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

7 мая 2021 г.

Содержание

Задача 1. Пусть f — вероятностная производящая функция ветвящегося процесса X. Тогда

$$f(s) = (1 - p - q) + qs + ps^2$$

Значит процесс будет критическим, когда $f'(1) = 1$, т.е.

$$1 = f'(1) = q + 2p$$

А вероятность вырождения является неподвижной точки f. Обозначим её за P, тогда

$$\begin{gathered} P = pP^2 + qP + 1 - p - q \\ 0 = p(P^2 - 1) + q(P - 1) - (P - 1) \\ 0 = (P - 1)(p(P + 1) + q - 1) \\ 0 = (P - 1)(P - \frac{1 - p - q}{p}) \end{gathered}$$

Таким образом, если $q + 2p \leqslant 1$, то $P = 1$, иначе $P = \frac{1-p-q}{p}$.

Задача 2. Обозначим в нашем случайном блуждании вероятности (для любых $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $k \in \mathbb{Z}$)

$$p := \mathbb{P}(S_{n+1} = k + 1 \mid S_n = k) \qquad 1 - p := \mathbb{P}(S_{n+1} = k - 1 \mid S_n = k)$$

Заметим, что Y_n принимает значения из $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Предположим, что $Y_n = d$.
Если $d > 0$, то $M_n > S_n$. Тогда независимо ни от чего $M_{n+1} = M_n$, а тогда

$$Y_{n+1} - Y_n = -(S_{n+1} - S_n)$$

Значит (независимо от значений Y_m, $m \in \{0; \ldots; n-1\}$)

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = d-1 \mid Y_n = d) = p \qquad \mathbb{P}(Y_{n+1} = d+1 \mid Y_n = d) = 1-p$$

Если же $d = 0$, то при увеличении S_n и M_n увеличится, а при уменьшении не изменится. Следовательно (независимо от значений Y_m, $m \in \{0; \ldots; n-1\}$)

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 \mid Y_n = d) = p \qquad \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = d) = 1-p$$

Таким образом $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ — цепь маркова, а матрица переходов задаётся формулой

$$P_{i,j} := \begin{cases} p & \text{если } j = \max(i-1, 0) \\ 1-p & \text{если } j = i+1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Задача 3.

1. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{n+1+r} = i \mid X_{n+r} = j \wedge \bigwedge_{m=0}^{n-1} X_{m+r} = k_{m+r}\right) \\
&= \sum_{k_0,\ldots,k_{r-1}} \mathbb{P}\left(X_{n+1+r} = i \mid X_{n+r} = j \wedge \bigwedge_{m=0}^{n-1+r} X_m = k_m\right) \\
&\qquad \mathbb{P}\left(\bigwedge_{m=0}^{r-1} X_m = k_m \mid X_{n+r} = j \wedge \bigwedge_{m=0}^{n-1} X_{m+r} = k_{m+r}\right) \\
&= \sum_{k_0,\ldots,k_{r-1}} \mathbb{P}\left(X_{n+1+r} = i \mid X_{n+r} = j\right) \\
&\qquad \mathbb{P}\left(\bigwedge_{m=0}^{r-1} X_m = k_m \mid X_{n+r} = j \wedge \bigwedge_{m=0}^{n-1} X_{m+r} = k_{m+r}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_{n+1+r} = i \mid X_{n+r} = j\right) \sum_{k_0,\ldots,k_{r-1}} \mathbb{P}\left(\bigwedge_{m=0}^{r-1} X_m = k_m \mid X_{n+r} = j \wedge \bigwedge_{m=0}^{n-1} X_{m+r} = k_{m+r}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_{n+1+r} = i \mid X_{n+r} = j\right) = P_{i,j}
\end{aligned}$$

Следовательно $(X_{n+r})_{n=0}^{\infty}$ является цепью Маркова с той же матрицей переходов.

2. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{2(n+1)} = i \mid X_{2n} = j \wedge \bigwedge_{m=0}^{n-1} X_{2m} = k_m\right) \\
&= \sum_k \mathbb{P}\left(X_{2(n+1)} = i \mid X_{2n+1} = k \wedge X_{2n} = j \wedge \bigwedge_{m=0}^{n-1} X_{2m} = k_m\right) \\
&\qquad \mathbb{P}\left(X_{2n+1} = k \mid X_{2n} = j \wedge \bigwedge_{m=0}^{n-1} X_{2m} = k_m\right) \\
&= \sum_k \mathbb{P}\left(X_{2(n+1)} = i \mid X_{2n+1} = k\right) \mathbb{P}\left(X_{2n+1} = l \mid X_{2n} = j\right) \\
&= \sum_k P_{i,k} P_{l,j} \\
&= \sum_k \mathbb{P}\left(X_{2(n+1)} = i \mid X_{2n+1} = k \wedge X_{2n} = j\right) \mathbb{P}\left(X_{2n+1} = l \mid X_{2n} = j\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_{2(n+1)} = i \mid X_{2n} = j\right)
\end{aligned}
$$

Следовательно $(X_{2n})_{n=0}^{\infty}$ является цепью Маркова с матрицей переходов равной квадрату предыдущей матрицы переходов.

3. Обозначим $Y_n := (X_n, X_{n+1})$ Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(Y_{n+1} = (i_1, i_2) \mid Y_n = (j_1, j_2) \wedge \bigwedge_{m=0}^{n-1} Y_m = (k_{m,1}, k_{m,2})\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_{n+1} = i_1 \mid Y_n = (j_1, j_2) \wedge \bigwedge_{m=0}^{n-1} Y_m = (k_{m,1}, k_{m,2})\right) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}\left(X_{n+2} = i_2 \mid X_{n+1} = i_1 \wedge Y_n = (j_1, j_2) \wedge \bigwedge_{m=0}^{n-1} Y_m = (k_{m,1}, k_{m,2})\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_{n+1} = i_1 \mid X_{n+1} = j_2 \wedge X_n = j_1 = k_{n-1,2} \wedge \bigwedge_{m=1}^{n-1} X_m = k_{m,1} = k_{m-1,2} \wedge X_0 = k_{0,1}\right) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}\left(X_{n+2} = i_2 \mid X_{n+1} = i_1 = j_2 \wedge X_n = j_1 = k_{n-1,2} \wedge \bigwedge_{m=1}^{n-1} X_m = k_{m,1} = k_{m-1,2} \wedge X_0 = k_{0,1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_{n+1} = i_1 \mid X_{n+1} = j_2 \wedge X_n = j_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_{n+2} = i_2 \mid X_{n+1} = i_1 = j_2 \wedge X_n = j_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_{n+1} = i_1 \mid Y_n = (j_1, j_2)\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_{n+2} = i_2 \mid X_{n+1} = i_1 \wedge Y_n = (j_1, j_2)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Y_{n+1} = (i_1, i_2) \mid Y_n = (j_1, j_2)\right) \\
&= [i_1 = j_2] \cdot P_{i_1, i_2}
\end{aligned}
$$

(где $[\cdot]$ обозначает скобку Айверсона). Таким образом $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ является цепью Маркова с матрицей перехода, задаваемой соотношением

$$
P_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} = \begin{cases} P_{j_1,j_2} & \text{если } i_2 = j_1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}
$$

Задача 4. Заметим, что существование инвариантного распределения равносильно существованию вектора $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, где всякое $\alpha_i \geqslant 0$, сумма $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ сходится к положительному значению, а сам вектор является собственным для матрицы переходов. Действительно, инвариантное распределение само по себе является таким вектором, а при умножении всего вектора на положительную константу он всё ещё удовлетворяет всем требованиям, значит его можно домножить на такую константу, что $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 1$. Таким образом будем проверять существование векторов такого вида.

При этом как мы только что заметили, можно проверить существует ли вектор, у которого $\alpha_0 \in \{0;1\}$ (домножением на α_0^{-1} мы получаем это требование). При этом заметим, что инвариантность по применению матрицы переходов равносильно тому, что $\alpha_{n+1} = \alpha_n p_n$. Значит любой искомый вектор, где $\alpha_0 = 0$ просто равен нулю, а значит не подходит. Значит $\alpha_0 = 1$, а тогда $\alpha_n = \prod_{k<n} p_k$. Значит искомый вектор существует, когда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} p_k = 1 + p_0 + p_0 p_1 + p_0 p_1 p_2 + \dots$$

сходится.

Задача 5. Пусть u_n — вероятность того, что через ровно n шагов мы вернёмся в стартовую точку. Тогда p возвратна тогда и только тогда, когда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$.

Заметим, что u_n равно 0, если $n \not\vdots 3$. Если же $n = 3k$, то

$$u_n = \binom{3k}{k} p^k (1-p)^{2k} \approx \sqrt{\frac{3}{4\pi k}} \left(\frac{27}{4}\right)^k (p(1-p)^2)^k = \sqrt{\frac{3}{4\pi k}} \left(\frac{27}{4} p(1-p)^2\right)^k$$

Несложно видеть, что $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{4\pi k}} \left(\frac{27}{4} p(1-p)^2\right)^k = \infty$$

Обозначим

$$\alpha := \frac{27}{4} p(1-p)^2$$

Если $\alpha > 1$, то ряд выше расходится, если $\alpha < 1$, то сходится, а если $\alpha = 1$, то ряд имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{4\pi k}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

а поэтому также рассходится. Значит теперь перед нами стоит вопрос, а когда же $\alpha \geqslant 1$.

Пусть $f(p) = \frac{27}{4} p(1-p)^2$. Несложно видеть, что корни $f'(p)$ есть $1/3$ — локальный максимум — и 1 — локальный минимум. При этом $f(1/3) = 1$. Значит $f(p) \leqslant 1$ при $p \in [0;1]$, и равенство достигается при $p = 1/3$. Поэтому ответ: при $p = 1/3$.
