Занятие от 12.11.
Геометрия и топология. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

12 ноября 2020 г.

Задача 14.

1. Покажем, что $|\mathcal{B}| \geqslant n$. Поскольку $\mathcal{B}$ конечно, обозначим его элементы как $\mathcal{B}_i$, где $i \in [1; |\mathcal{B}|]$. Теперь давайте для каждого элемента m из M определим последовательность

   $$A_m := \{[m \in \mathcal{B}_i]\}_{i=1}^{|\mathcal{B}|}$$

   т.е. для всякого i

   $$A_m(i) := \begin{cases} 1 & \text{если } m \in \mathcal{B}_i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

   Вместе с этим рассмотрим частично упорядоченное множество $\mathfrak{M}_\mathcal{B} = \langle 2^{|\mathcal{B}|}, \preccurlyeq \rangle$, где

   $$A \preccurlyeq B :\Longleftrightarrow \forall i \in [1; |\mathcal{B}|]\ A(i) \leqslant B(i)$$

   Очевидно, что для всякого $m \in M$ последовательность A_m является членом $\mathfrak{B}$.

   Пусть для некоторых $m, n \in M$ верно сравнение $A_m \succcurlyeq A_n$. Это значит, что для всякого $U \in \mathcal{B}$ верно, что $n \in U \to m \in U$. Тогда можно рассмотреть множество

   $$\Omega' := \{U \in \Omega \mid n \in U \to m \in U\}$$

   где Ω — первоначальная (дискретная) топология на M. Несложно видеть, что Ω' является топологией, и причём более слабой, чем Ω, так как, например, не содержит $\{n\}$. С другой стороны $\mathcal{B} \subseteq \Omega'$, поэтому $\mathcal{B}$ не является предбазой Ω — противоречие. Это значит, что никакие две последовательности, соответствующие элементам M, несравнимы в $\mathfrak{B}$.

   С другой стороны, если для некоторого $m \in M$ верно, что нет $n \in M$, что последовательность $A_n \succcurlyeq A_m$, можно рассмотреть

   $$S_m := \bigcap_{\substack{i \in [1; |\mathcal{B}|] \\ A_m(i) = 1}} \mathcal{B}_i$$

   Очевидно, что $m \in S_m$. При этом для всякого $n \in M$, отличного от m, будет такое $j \in [1; |\mathcal{B}|]$, что $A_m(j) > A_n(j)$, а значит $n \notin \mathcal{B}_J$, и следовательно $n \notin S$. Поэтому $S = \{m\}$, что значит, что для всякой топологии Ω', что $\mathcal{B} \subseteq \Omega'$, то Ω' содержит $\{m\}$. Поэтому если никакие две последовательности, соответствующие элементам из M, несравнимы, то всякая топология, содержащая как подмножество $\mathcal{B}$, содержит как подмножество и $\{m\}$ для всякого $m \in M$, а значит совпадает с дискретной топологией на M.

Таким образом $\mathcal{B}$ является предбазой дискретной топологией на M тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ — семейство подмножеств M и последовательности, соответствующие элементам из M, образуют антицепь в $\mathfrak{B}$. Поэтому мощность M равна размеру какой-то антицепи в $\mathfrak{B}$.

Заметим, что по теореме Дилуорса максимальный размер антицепи в $\mathfrak{B}$ равен размеру минимального разбиения на цепи $\mathfrak{B}$. Покажем, что минимальное разбиение $\mathfrak{B}$ на цепи равно

$$\binom{|\mathcal{B}|}{\left\lfloor \frac{|\mathcal{B}|}{2} \right\rfloor}.$$

Обозначим $\mathcal{B}$ наконец за N. Определим для всякого $k \in [0; N]$

$$B_k := \left\{ S \in 2^N \mid \sum_{i \in [1;N]} S(i) = k \right\}$$

Понятно, что каждое S_k является антицепью, поэтому количество цепей будет не менее $|S_k|$, т.е. не менее $\binom{N}{k}$, а значит не менее $\binom{N}{\lfloor N/2 \rfloor}$.

Также очевидно, что для всяких k и l верно, что если $k < l$, то всякий элемент из S_k меньше или несравним со всяким элементом из S_l. При этом заметим, что для всякого k у каждого элемента из S_k есть ровно k меньших элементов из S_{k-1} и $N-k$ больших элементов из S_{k+1}. Поэтому по лемме Холла для всякого $k \leqslant (N+1)/2$ есть паросочетание из S_k в S_{k-1} и паросочетание из S_{N-k} в S_{N-k+1}.

Действительно, в двудольном графе, порождённом S_k и S_{K-1} (где элементы соединены ребром только если сравнимы) степень каждой вершины доли S_k равна k, а в доли S_{k-1} — $N-k+1$. Поэтому если взять любые p вершин из S_{k-1} и смежные с ними q вершин из S_k, то будет верно

$$p \cdot (N-k+1) = \text{“количество рёбер между } p\text{-компонентой и } q\text{-компонентой”} \leqslant q \cdot k$$

следовательно

$$\frac{q}{p} \geqslant \frac{N-k+1}{k} = 1 + \frac{N+1-2k}{k} \geqslant 1$$

т.е. $q \geqslant p$, что значит, что условие леммы Холла выполнено, а тогда данные паросочетания строятся.

Построив эти паросочетания, можно посмотреть на бамбуки, которые они образуют в графе, образованном всем $\mathcal{B}$: это будут цепи, на которое распалось $\mathcal{B}$. При этом они все будут содержать по элементу из $S_{\lfloor N/2 \rfloor}$, поэтому цепей $\binom{N}{\lfloor N/2 \rfloor}$. Таким образом $S_{\lfloor N/2 \rfloor}$ — максимальная цепь.

Итого

$$|M| \leqslant \binom{|\mathcal{B}|}{\left\lfloor \frac{|\mathcal{B}|}{2} \right\rfloor}$$

При этом из решения следует, что для всяких M и N, что

$$|M| \leqslant \binom{N}{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor}$$

можно точно так же построить $\mathfrak{B}$ (оно зависит, не от $\mathcal{B}$, а от его мощности, поэтому можно вместо неё подставить N), в нём взять антицепь размера $|M|$ сопоставить их элементам M (для каждого m данную последовательность так же назовём A_m), затем определить

$$\mathcal{B}_i := \{m \in M \mid A_m(i) = 1\}$$

И тогда $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_i \mid i \in [1; N]\}$ будет предбазой в Ω.

В частности, из неравенства и следует, что

$$|M| \leqslant \binom{|\mathcal{B}|}{\left\lfloor \frac{|\mathcal{B}|}{2} \right\rfloor} \leqslant 2^{|\mathcal{B}|}$$

Поэтому $|\mathcal{B}| \geqslant n$.

2. Давайте построим интересный пример $\mathcal{B}$ на $2n$. Сопоставим каждому элементу $m \in M$ индивидуальную бинарную последовательность s_m длины n. Далее определим для всякого $i \in [1; n]$

$$A_i := \{m \in M \mid s_m(i) = 1\}$$
$$B_i := \{m \in M \mid s_m(i) = 0\}$$

Рассмотрим $\mathcal{B} := \{A_i \mid i \in [1; n]\} \cup \{B_i \mid i \in [1; n]\}$. Заметим, что для всякого $m \in M$

$$\{m\} = \left(\bigcap_{\substack{i \in [1;n] \\ s_m(i)=1}} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{\substack{i \in [1;n] \\ s_m(i)=0}} B_i\right)$$

что значит, что в любой топологии, в которой лежит как подмножество $\mathcal{B}$, лежат как элементы все $\{m\}$, где $m \in M$, а значит любая такая топология совпадает с дискретной топологией на M. Следовательно $\mathcal{B}$ — предбаза дискретной топологии на $|M|$ мощности $2n$.

Задача 18. Пусть рассматривается множество X с топологией Ω.

Лемма 1. $\mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int} \circ \mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int} = \mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int}$.

Доказательство. Пусть дано некоторое $S \subseteq X$. Тогда определим $T := \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(S))$, $I := \mathrm{Int}(T)$, $F := \mathrm{Fr}(T) = \mathrm{Cl}(T) \setminus \mathrm{Int}(T) = T \setminus I$, $J := X \setminus T$. Очевидно, что T замкнуто, следственно J открыто. Также очевидно, что I открыто. Заметим ещё, что $\mathrm{Int}(S)$ — открытое подмножество $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(S)) = T$, поэтому $\mathrm{Int}(S) \subseteq I$.

Покажем, что в любой окрестности любой точки F есть как точки I, так и точки J.

Пусть дана некоторая точка $f \in F$ и у неё окрестность U, что $U \cap I = \varnothing$. Тогда $U \cap \mathrm{Int}(S) = \varnothing$, а в таком случае $X \setminus U$ — замкнутое множество, содержащее как подмножество S. Значит $f \notin \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(S)) = T$, а следовательно $f \notin F$ — противоречие. Получаем, что $U \cap I \neq \varnothing$.

Теперь пусть также даны $f \in F$ и её окрестность U, но только $U \cap J = \varnothing$. Тогда U — открытое подмножество T, следовательно $U \subseteq \mathrm{Int}(T) = I$, а значит $f \in I$. Но в таком случае $f \notin F$ — противоречие. Получаем, что $U \cap J \neq \varnothing$.

Таким образом мы получаем, что X делится на три части:

- точки, у которых некоторая окрестность лежит полностью в I — элементы I;

- точки, у которых некоторая окрестность лежит полностью в J — элементы J;
- точки, у которых каждая окрестность непустым образом пересекается и с I, и с J — элементы F.

Тогда $\mathrm{Cl}(I) = X \setminus \mathrm{Int}(J \cup F) = X \setminus \mathrm{Int}(J) = T$. Таким образом $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(T)) = T$. А значит $(\mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int} \circ \mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int})(S) = (\mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int})(S)$. □

Следствие 1.1. $\mathrm{Int} \circ \mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int} \circ \mathrm{Cl} = \mathrm{Int} \circ \mathrm{Cl}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
X \setminus \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X \setminus S)))) &= X \setminus \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X \setminus S)) \\
X \setminus \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(X \setminus \mathrm{Cl}(S)))) &= X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \mathrm{Cl}(S)) \\
X \setminus \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(S)))) &= X \setminus (X \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(S))) \\
X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(S)))) &= \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(S)) \\
X \setminus (X \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(S))))) &= \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(S)) \\
\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(S)))) &= \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(S))
\end{aligned}$$

□

Из этих двух утверждений (и ещё нескольких с лекции) следует, что:

- Минимальная последовательность операций Cl и Int, переводящая X в Y (если какая-то существует), не содержит двое Cl или двое Int подряд. Иначе можно заменить эти две подряд идущие операции на одну, укоротив последовательность.
- Если Y получается из X конечной последовательностью операцией Cl и Int, то минимальная последовательность — чередующаяся.
- Минимальная последовательность операций Cl и Int, переводящая X в Y (если какая-то существует), не содержит подпоследовательностей $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}, \mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$ и $\mathrm{Int}, \mathrm{Cl}, \mathrm{Int}, \mathrm{Cl}$. Иначе можно заменить их на $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$, $\mathrm{Int}, \mathrm{Cl}$ соответственно, укоротив последовательность.
- Если Y получается из X конечной последовательностью операцией Cl и Int, то минимальная последовательность имеет длину не более трёх, так как иначе она (из-за чередования) начинает содержать либо $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}, \mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$, либо $\mathrm{Int}, \mathrm{Cl}, \mathrm{Int}, \mathrm{Cl}$.
- Если Y получается из X конечной последовательностью операцией Cl и Int, то получается и одной из следующих операций:

$$\mathrm{Id} \qquad \mathrm{Cl} \qquad \mathrm{Int} \qquad \mathrm{Int} \circ \mathrm{Cl} \qquad \mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int} \qquad \mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int} \circ \mathrm{Cl} \qquad \mathrm{Int} \circ \mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int}$$

Таким образом можно получить не более 7 различных множеств.

Приведём пример, когда получаются все 7. Для этого возьмём в качестве топологического пространства $\mathbb{R}$ со стандартной топологией, а в качестве X — $\{0\} \cup (\mathbb{Q} \cap (1;2)) \cup [3;4) \cup (4;5)$.

Тогда данные операции, применённые к X, выдадут следующий результат.

Id	$\{0\} \cup (\mathbb{Q} \cap (1;2)) \cup [3;4) \cup (4;5)$
Cl	$\{0\} \cup (1;2) \cup [3;5]$
Int	$(3;4) \cup (4;5)$
$\mathrm{Int} \circ \mathrm{Cl}$	$(1;2) \cup (3;5)$
$\mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int}$	$[3;5]$
$\mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int} \circ \mathrm{Cl}$	$[1;2] \cup [3;5]$
$\mathrm{Int} \circ \mathrm{Cl} \circ \mathrm{Int}$	$(3;5)$

Несложно видеть, что все множества попарно различны.

Итого, ответ — 7.

Задача 20.

Лемма 2. $Y \cap \mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}_Y(A)$.

Доказательство. Заметим, что если $U \in \Omega$ и $U \subseteq A$, то $U \cap Y \in \Omega_Y$ и $U \cap Y \subseteq A$. Следовательно

$$Y \cap \mathrm{Int}(A) = Y \cap \bigcup_{\substack{U \in \Omega \\ U \subseteq A}} U = \bigcup_{\substack{U \in \Omega \\ U \subseteq A}} U \cap Y \subseteq \bigcup_{\substack{U \in \Omega \\ U \cap Y \subseteq A}} U \cap Y = \bigcup_{\substack{U \cap Y \in \Omega_Y \\ U \cap Y \subseteq A}} U \cap Y = \bigcup_{\substack{U \in \Omega_Y \\ U \subseteq A}} U = \mathrm{Int}_Y(A)$$

т.е. $Y \cap \mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}_Y(A)$. $\square$

Несложно понять, почему в обратную сторону это утверждение не (всегда) верно. Для этого рассмотрим $X = \mathbb{R}$, $Y = A = \mathbb{Q}$. Тогда $Y \cap \mathrm{Int}(A) = \mathbb{Q} \cap \mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cap \varnothing = \varnothing$, а $\mathrm{Int}_Y(A) = \mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Очевидно, что $\mathbb{Q} \not\subseteq \varnothing$.

Лемма 3. $\mathrm{Cl}_Y(A) = Y \cap \mathrm{Cl}(A)$.

Доказательство. Немного перепишем утверждение, определив $B := X \setminus A$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_Y(A) = Y \cap \mathrm{Cl}(A) \quad &\longleftrightarrow \quad Y \setminus \mathrm{Cl}_Y(A) = Y \setminus (Y \cap \mathrm{Cl}(A)) \\
&\longleftrightarrow \quad \mathrm{Int}_Y(Y \setminus A) = Y \setminus \mathrm{Cl}(A) \\
&\longleftrightarrow \quad \mathrm{Int}_Y(Y \cap B) = Y \setminus \mathrm{Cl}(Y \setminus B) \\
&\longleftrightarrow \quad \mathrm{Int}_Y(Y \cap B) = Y \setminus (X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus (Y \setminus B))) \\
&\longleftrightarrow \quad \mathrm{Int}_Y(Y \cap B) = Y \cap \mathrm{Int}(X \setminus (Y \setminus B)) \\
&\longleftrightarrow \quad \mathrm{Int}_Y(Y \cap B) = Y \cap \mathrm{Int}((X \setminus Y) \cup B)
\end{aligned}$$

Докажем последнее утверждение для абсолютно любого $B \subseteq X$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
y \in \mathrm{Int}_Y(Y \cap B) \quad &\longleftrightarrow \quad \begin{cases} y \in Y \cap B \\ \exists\, U \in \Omega_Y :\ y \in U \wedge U \subseteq Y \cap B \end{cases} \\
&\longleftrightarrow \quad \begin{cases} y \in Y \wedge y \in B \\ \exists\, V \in \Omega :\ y \in V \wedge V \cap Y \subseteq B \end{cases}
\end{aligned}$$

а с другой стороны

$$
\begin{aligned}
y \in Y \cap \operatorname{Int}((X \setminus Y) \cup B) \qquad &\longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y \in Y \\ y \in \operatorname{Int}((X \setminus Y) \cup B) \end{cases} \\
&\longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y \in Y \\ y \in (X \setminus Y) \cup B \\ \exists U \in \Omega: \ y \in U \wedge U \subseteq (X \setminus Y) \cup B \end{cases} \\
&\longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y \in Y \wedge y \in B \\ \exists U \in \Omega: \ y \in U \wedge U \subseteq (X \setminus Y) \cup B \end{cases} \\
&\longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y \in Y \wedge y \in B \\ \exists U \in \Omega: \ y \in U \wedge U \cap Y \subseteq B \end{cases}
\end{aligned}
$$

Тем самым для абсолютно любого y

$$
y \in \operatorname{Int}_Y(Y \cap B) \qquad \longleftrightarrow \qquad y \in Y \cap \operatorname{Int}((X \setminus Y) \cup B)
$$

а следовательно

$$
\operatorname{Int}_Y(Y \cap B) = Y \cap \operatorname{Int}((X \setminus Y) \cup B)
$$

И как следствие мы получаем требование леммы:

$$
\operatorname{Cl}_Y(A) = Y \cap \operatorname{Cl}(A)
$$

□
