Индивидуальное ДЗ
Алгебра

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

20 декабря 2020 г.

Задача 1 (2.42)**.** Введём на плоскости систему комплексных координат так, что имеющаяся окружность была окружностью $|z| = 1$. Тогда точки A, B, C, D, E и F имеют координаты a, b, c, d, e и f.

Лемма 1. *Пусть в комплексных координатах заданы две точки: a и b. Тогда прямая, проходящая через них, описывается уравнением*

$$\frac{z-a}{b-a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$$

Доказательство. Заметим, что z лежит на прямой $\overline{AB}$ тогда и только тогда, когда $\angle ZAB = 0 \pmod{\pi}$, т.е. аргумент $\frac{z-a}{b-a}$ равен $0 \pmod{\pi}$, или иначе

$$\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$$

При чём для всякого комплексного числа t верно, что $t \in \mathbb{R} \leftrightarrow t = \overline{t}$. Следовательно и получаем, что

$$\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R} \leftrightarrow \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$$

$\square$

Пусть точки P, Q и R описывают координаты p, q и r. Тогда мы имеем, что

$$\frac{p-a}{b-a} = \frac{\overline{p}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} \qquad \frac{p-d}{e-d} = \frac{\overline{p}-\overline{d}}{\overline{e}-\overline{d}}$$

Заметим, что

$$\frac{\overline{p}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = \frac{(\overline{p}-\overline{a})ab}{a-b}$$

Следовательно

$$p - a + (\overline{p}-\overline{a})ab = 0 \qquad p - d + (\overline{p}-\overline{d})ed = 0$$

или же

$$p + \overline{p}ab = a + b \qquad p + \overline{p}ed = e + d$$

Таким образом $\overline{p} = \frac{a+b-d-e}{ab-de}$, а $p = \frac{bde+ade-abe-abd}{de-ab}$. Аналогично получаются

$$\overline{q} = \frac{b+c-e-f}{bc-ef} \qquad \overline{r} = \frac{c+d-f-a}{cd-af}$$

$$q = \frac{cef+bef-bcf-bce}{ef-bc} \qquad r = \frac{dfa+cfa-cda-cdf}{af-cd}$$

Теперь же осталось показать, что P, Q и R коллинеарны. Т.е. нужно доказать, что

$$\frac{p-q}{r-q} = \frac{\overline{p}-\overline{q}}{\overline{r}-\overline{q}}$$

Заметим, что

$$(p-q)(\overline{r}-\overline{q}) - (\overline{p}-\overline{q})(r-q) = (\overline{p}q + \overline{q}r + \overline{r}p) - (p\overline{q} + q\overline{r} + r\overline{p}) = \overline{(p\overline{q} + q\overline{r} + r\overline{p})} - (p\overline{q} + q\overline{r} + r\overline{p})$$

Заметим, что

$$\overline{(ab-de)(bc-ef)(cd-af)} = -\frac{(ab-de)(bc-ef)(cd-af)}{(abcdef)^2}$$

следовательно

$$\overline{\left(\frac{(ab-de)(bc-ef)(cd-af)}{abcdef}\right)} = -\frac{(ab-de)(bc-ef)(cd-af)}{abcdef}$$

Значит нужно показать, что

$$(p\overline{q} + q\overline{r} + r\overline{p})\frac{(ab-de)(bc-ef)(cd-af)}{abcdef} \in i\mathbb{R}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&p\overline{q}\frac{(ab-de)(bc-ef)(cd-af)}{abcdef}\\
=&\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{d}-\frac{1}{e}\right)(b+c-e-f)\left(\frac{a}{c}-\frac{d}{f}\right)\\
=&2\frac{a}{c}-2\frac{d}{f}+\frac{b}{c}-\frac{e}{c}-\frac{f}{c}+\frac{b}{f}+\frac{c}{f}-\frac{e}{f}+\frac{a}{b}-\frac{a}{d}-\frac{a}{e}+\frac{d}{a}+\frac{d}{b}-\frac{d}{e}\\
-&\frac{ae}{bc}-\frac{af}{bc}-\frac{ab}{cd}+\frac{ae}{cd}+\frac{af}{cd}-\frac{ab}{ce}+\frac{af}{ce}-\frac{bd}{af}-\frac{cd}{af}+\frac{ed}{af}-\frac{cd}{bf}+\frac{ed}{bf}+\frac{bd}{ef}+\frac{cd}{ef}
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
&q\overline{r}\frac{(ab-de)(bc-ef)(cd-af)}{abcdef}\\
=&-2\frac{b}{d}+2\frac{e}{a}-\frac{c}{d}+\frac{f}{d}+\frac{a}{d}-\frac{c}{a}-\frac{d}{a}+\frac{f}{a}-\frac{b}{c}+\frac{b}{e}+\frac{b}{f}-\frac{e}{b}-\frac{e}{c}+\frac{e}{f}\\
+&\frac{bf}{cd}+\frac{ba}{cd}+\frac{bc}{de}-\frac{bf}{de}-\frac{ba}{de}+\frac{bc}{df}-\frac{ba}{df}+\frac{ce}{ba}+\frac{de}{ba}-\frac{fe}{ba}+\frac{de}{ca}-\frac{fe}{ca}-\frac{ce}{fa}-\frac{de}{fa}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&r\overline{p}\frac{(ab-de)(bc-ef)(cd-af)}{abcdef}\\
=&2\frac{c}{e}-2\frac{f}{b}+\frac{d}{e}-\frac{a}{e}-\frac{b}{e}+\frac{d}{b}+\frac{e}{b}-\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{c}{f}-\frac{c}{a}+\frac{f}{c}+\frac{f}{d}-\frac{f}{a}\\
-&\frac{ca}{de}-\frac{cb}{de}-\frac{cd}{ef}+\frac{ca}{ef}+\frac{cb}{ef}-\frac{cd}{ea}+\frac{cb}{ea}-\frac{df}{cb}-\frac{ef}{cb}+\frac{af}{cb}-\frac{ef}{db}+\frac{af}{db}+\frac{df}{ab}+\frac{ef}{ab}
\end{aligned}$$

Таким образом

$$
\begin{aligned}
&(p\overline{q}+q\overline{r}+r\overline{p})\frac{(ab-de)(bc-ef)(cd-af)}{abcdef}\\
=&2\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)+2\left(\frac{c}{e}-\frac{e}{c}\right)+2\left(\frac{e}{a}-\frac{a}{e}\right)-2\left(\frac{b}{d}-\frac{d}{b}\right)-2\left(\frac{d}{f}-\frac{f}{d}\right)-2\left(\frac{f}{b}-\frac{b}{f}\right)\\
&+\left(\frac{cb}{ea}-\frac{ae}{bc}\right)+\left(\frac{ae}{cd}-\frac{cd}{ea}\right)+\left(\frac{af}{cd}-\frac{cd}{af}\right)+\left(\frac{ce}{ba}-\frac{ab}{ce}\right)+\left(\frac{af}{ce}-\frac{ce}{fa}\right)+\left(\frac{af}{db}-\frac{bd}{af}\right)\\
&+\left(\frac{bf}{cd}-\frac{cd}{bf}\right)+\left(\frac{ed}{bf}-\frac{bf}{de}\right)+\left(\frac{bd}{ef}-\frac{ef}{db}\right)+\left(\frac{de}{ba}-\frac{ba}{de}\right)+\left(\frac{bc}{df}-\frac{df}{cb}\right)+\left(\frac{df}{ab}-\frac{ba}{df}\right)\\
&+\left(\frac{de}{ca}-\frac{ca}{de}\right)+\left(\frac{ca}{ef}-\frac{fe}{ca}\right)+\left(\frac{cb}{ef}-\frac{ef}{cb}\right)
\end{aligned}
$$

В каждой скобке разность t и t^{-1}, где $|t| = 1$, т.е. $t - \overline{t} \in i\mathbb{R}$. Таким образом всё выражение чисто мнимое.ё

Задача 2 (1.71.3)**.**

Замечание. Здесь за ζ_n обозначается корень из 1 степени n с минимальным ненулевым аргументом. Т.е. $\zeta_n = \exp(\frac{2\pi}{n}i)$.

Лемма 2. *Пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ — различные (комплексные) значения, а f — некоторый полином степени $< n$. Тогда*

$$\frac{f(x)}{\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x-\alpha_i}$$

где

$$a_i := \frac{f(\alpha_i)}{\prod_{t\neq i}(\alpha_i-\alpha_t)}$$

Доказательство. Заметим, что по интерполяционной теореме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\prod_{j\neq i}\frac{x-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j} = \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j\neq i}(x-\alpha_j)$$

Следовательно

$$\frac{f(x)}{\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x-\alpha_i}$$

□

Лемма 3. *Пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ — различные (комплексные) значения. Определим*

$$P(x) := \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)$$

Тогда

$$\prod_{i\neq t}(\alpha_t-\alpha_i) = P'(\alpha_i)$$

Доказательство. Заметим, что

$$P'(x)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x-\alpha_j)$$

Следовательно

$$P'(\alpha_t)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(\alpha_t-\alpha_j)=\prod_{j\neq t}(\alpha_t-\alpha_j)$$

□

Следствие 3.1.

$$\prod_{\substack{i\in[0;n-1]\\ i\neq t}}(\zeta_n^t-\zeta_n^i)=n\zeta_n^{-t}$$

Теорема 4.

$$\frac{2n+2}{x^{2n+2}-1}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+n=\frac{x^2-1}{2x}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{x^2+1}{2x}-\cos(\frac{2\pi i}{2n+2})}$$

Доказательство.

$$\frac{2n+2}{x^{2n+2}-1}=\sum_{i=1}^{2n+2}\frac{1}{x-\zeta_{2n+2}^{i}}\cdot\frac{2n+2}{(2n+2)\zeta_{2n+2}^{-i}}=\sum_{i=1}^{2n+2}\frac{1}{\zeta_{2n+2}^{-i}x-1}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\zeta_{2n+2}^{i}x-1}+\frac{1}{\zeta_{2n+2}^{-i}x-1}=\frac{2x\cos(\frac{2\pi i}{2n+2})-2}{x^2+1-2x\cos(\frac{2\pi i}{2n+2})}=\frac{x^2-1}{x^2+1-2x\cos(\frac{2\pi i}{2n+2})}-1=\frac{\frac{x^2-1}{2x}}{\frac{x^2+1}{2x}-\cos(\frac{2\pi i}{2n+2})}-1$$

Следовательно

$$\frac{2n+2}{x^{2n+2}-1}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\zeta_{2n+2}^{i}x-1}+\frac{1}{\zeta_{2n+2}^{-i}x-1}=\frac{x^2-1}{2x}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{x^2+1}{2x}-\cos(\frac{2\pi i}{2n+2})}$$

□

Следствие 4.1.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-2\cos(\frac{\pi i}{n+1})}&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\cos(\frac{2\pi i}{2n+2})}\\ &=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2n+2}{x^{2n+2}-1}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+n}{\frac{x^2-1}{2x}}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{(2n+2)}{x^{2n+1}+x^{2n}+\cdots+1}-1+\frac{x-1}{x+1}+n(x-1)}{\frac{(x^2-1)(x-1)}{x}}\end{aligned}$$

по правилу Лопиталя диференцируем числитель и знаменатель дважды

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(2n+2)\frac{2((2n+1)x^{2n}+\cdots+1)^2-(x^{2n+1}+x^{2n}+\cdots+1)((2n+1)(2n)x^{2n-1}+\cdots+2\cdot 1)}{(x^{2n+1}+x^{2n}+\cdots+1)^3} - \dfrac{4}{(x+1)^3}}{\dfrac{2(x^3+1)}{x^3}}$$

$$= \frac{(2n+2)\dfrac{2\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}\right)^2-(2n+2)\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)}{3}}{(2n+2)^3}-\frac{4}{2^3}}{\frac{2\cdot 2}{1}}$$

$$= \frac{2\left(\frac{(2n+1)}{2}\right)^2-\frac{(2n+1)(2n)}{3}-\frac{1}{2}}{4}$$

$$= \frac{3(2n+1)^2-2(2n+1)(2n)-3}{24}$$

$$= \frac{n^2+2n}{6}$$

Задача 3 (.1)**.** Давайте упростим порождающие наборы делая линейные замены (т.е. заменяя вектор u на λu или u на $u+\lambda v$, где v лежит в породжающем наборе):

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\-4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-4\\-1\\-3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\8\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-7\\-3\\-3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-7\\-3\\-3\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-3\\-3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Заметим, что в новом порождающем множестве по первым трём координатам восстанавливается разложение на порождающие элементы, а последняя просто выводится из них. Поэтому вектор (a, b, c, x) лежит в U тогда и только тогда, когда раскладывается в линейную сумму порождающих векторов, т.е. только когда $-2a + c = x$, так как если вектор раскладывается то только как

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\x\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

и проблемы могут возникнуть только в несвободных координатах (в данном случае — только в четвёртой). Таким образом U задаётся системой уравнений

$$\left\{ -2x_1 + x_3 = x_4 \right.$$

Аналогично обработаем V:

$$V = \left\langle \begin{pmatrix}-4\\4\\-4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\4\\3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-4\\4\\-4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\4\\3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\-4\\12\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\4\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-4\\12\\10\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-3\\-5/2\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-3\\-5/2\end{pmatrix} \right\rangle$$

Точно так же V определяется системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + -3x_2 = x_3 \\ -2x_1 + -\dfrac{5}{2}x_2 = x_4 \end{cases}$$

Заметим, что вектор $(1, 0, -2, -2)$ — первый образующий вектор V — не является корнем СЛУ подпространства U, поэтому не лежит в нём, а значит если положить его в U (и взять замыкание), то получим всё $\mathbb{R}^4$. Значит $U + V = \mathbb{R}^4$, а базис $U + V$ —

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Также получим, что СЛУ, задающее $U \cap V$ — объединение СЛУ, задающих U и V:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 = x_4 \\ -2x_1 + -3x_2 = x_3 \\ -2x_1 + -\dfrac{5}{2}x_2 = x_4 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_3 = x_4 \\ -2x_1 + -3x_2 = x_3 \\ \dfrac{5}{2}x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_3 = x_4 \\ \dfrac{5}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + -3x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 - \dfrac{5}{2}x_2 = x_4 \\ \dfrac{5}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 - \dfrac{5}{2}x_2 = x_4 \\ \dfrac{5}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x_1 = x_4 \\ -10x_1 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 8x_1 = x_4 \\ 10x_1 = x_3 \\ -4x_1 = x_2 \end{cases}$$

Следовательно

$$U \cap V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-4\\10\\8\end{pmatrix} \right\rangle$$

а значит $\{(1, -4, 10, 8)\}$ и есть базис $U \cap V$.