Индивидуальное ДЗ
Алгебра

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

17 мая 2021 г.

Задача. Нам дана матрица

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 12 & -20 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 15 & -26 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 26 & -43 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Для начала найдём базис, в котором наша матрица будет верхнетреугольной.

1. Найдём собственный вектор с собственным значением -2. Для этого нам нужно найти ядро

$$M + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & -20 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 15 & -26 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 26 & -43 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Пусть искомый вектор — $(x_i)_{i=1}^6$, тогда (меняя строки на их линейные комбинации, равносильно изменяем СЛУ)

$$\begin{pmatrix} & & 12 & -20 & & \\ -3 & 5 & 15 & -26 & -1 & -1 \\ & & 4 & & & \\ & & & 4 & & \\ -7 & 1 & 26 & -43 & 3 & -1 \\ & & 1 & -3 & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -3 & 5 & 15 & -26 & -1 & -1 \\ -7 & 1 & 26 & -43 & 3 & -1 \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & 12 & -20 & & \\ & & 1 & -3 & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 15 & -26 & -1 & -1 \\ -7 & 1 & 26 & -43 & 3 & -1 \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & \\ & & & & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -3 & 5 & 15 & -26 & -1 & -1 \\ -7 & 1 & 26 & -43 & 3 & -1 \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & & & -1 & \\ -7 & 1 & & & 3 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -3 & 5 & & & -1 & \\ -1 & -9 & & & 5 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} & 32 & & & -16 & \\ -1 & -9 & & & 5 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} & 2 & & & -1 & \\ 1 & 9 & & & -5 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} & 2 & & & -1 & \\ 1 & -1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

Отсюда мы получаем, что $x_3 = x_4 = x_6 = 0$, а $(x_1, x_2, x_5) \sim (1, 1, 2)$. Следовательно искомый вектор —

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рассматривая матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ 2 & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

получаем, что

$$S^{-1} \cdot M \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & & 12 & -20 & & \\ & 3 & 3 & -6 & -1 & -1 \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ & & 1 & -3 & & 2 \end{pmatrix}$$

2. Рассматривая наше пространство по модулю e_1, получаем, что оператор $S^{-1} \cdot M \cdot S$ получает вид

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 & -1 & -1 \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ & 1 & -3 & & 2 \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что $\chi(M_1)(\lambda+2) \sim \chi(M)$, значит

$$\chi(M_1) \sim (\lambda-2)^5$$

Найдём собственные вектора M_1. Для этого нужно найти ядро

$$M_1 - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & -1 & -1 \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ & 1 & -3 & & 0 \end{pmatrix}$$

Значит нам нужно решить СЛУ; тогда (меняя строки на их линейные комбинации, равносильно изменяем СЛУ)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & -1 & -1 \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ & 1 & -3 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ & 1 & -3 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & -1 & -1 \\ & 1 & -3 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & & 3 & -1 & -1 \\ & 1 & -3 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Таким образом несложно видеть, что ядро порождается векторами

$$e_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{и} \qquad e_4 := \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Приписывая в начало к ним по нулю, получаем собственные с точностью до e_1 вектора $S^{-1} \cdot M \cdot S$, а значит и M. Дополняя $\{e_1; \ldots; e_4\}$ до базиса, получаем матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & \\ & & & 3 & & 1 \\ & & & 1 & & \\ 2 & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \end{pmatrix}$$

Следовательно получаем, что

$$S^{-1} \cdot M \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & & & 16 & & 12 \\ & 2 & & & & 1 \\ & & 2 & & 1 & 2 \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Фактически, теперь мы почти получили жорданов базис: вектора полученного базиса по применению оператора M домножаются на соответствующие им значения и увеличиваются на другие, меньшие по индексу базисные вектора.

Сначала отделим блоки векторов с разными собственными значениями. Для этого вычтем из векторов $e_2, \ldots, e_6$ (с собственным значением 2) вектор e_1 (с собственным значением -2) с правильными коэффициентами, чтобы по применению оператора M вектора $e_2, \ldots, e_6$ переходили в линейные комбинации только $e_2, \ldots, e_6$ (без e_1). Для этого определим новое значение матрицы

$$S := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & \\ & & & 3 & & 1 \\ & & & 1 & & \\ 2 & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 4 & & 3 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 4 & & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 3 & & 1 \\ & & & 1 & & \\ 2 & & 1 & 8 & & 6 \\ & 1 & & & & \end{pmatrix}$$

и получим, что

$$S^{-1} \cdot M \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & 2 & & & & 1 \\ & & 2 & & 1 & 2 \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Теперь будем исправлять блоки векторов одинаковых собственных значений.

1. Видим, что e_6 по применению M порождает кроме себя $e_2 + 2e_3$; поэтому заменим e_3 на $2e_3 + e_2$: определим новое значение матрицы

$$S := \begin{pmatrix} 1 & & & 4 & & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 3 & & 1 \\ & & & 1 & & \\ 2 & & 1 & 8 & & 6 \\ & 1 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 4 & & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 3 & & 1 \\ & & & 1 & & \\ 2 & & 2 & 8 & & 6 \\ & 1 & 1 & & & \end{pmatrix}$$

   Получаем

$$S^{-1} \cdot M \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & 2 & & & -\frac{1}{2} & \\ & & 2 & & \frac{1}{2} & 1 \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

2. Видим, что e_6 порождает только e_3; хотим чтобы никакой вектор больше не порождал e_3. Для этого вычтем e_6 из всех остальных векторов, порождающих e_3, с правильными коэффициентами: определим новое значение матрицы

$$S := \begin{pmatrix} 1 & & & 4 & & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 3 & & 1 \\ & & & 1 & & \\ 2 & & 2 & 8 & & 6 \\ & 1 & 1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 4 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ & & & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ & & & 1 & & \\ 2 & & 2 & 8 & -3 & 6 \\ & 1 & 1 & & & \end{pmatrix}$$

Получаем

$$S^{-1} \cdot M \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & 2 & & & -\frac{1}{2} & \\ & & 2 & & & 1 \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

3. Видим, что e_6 порождает только e_3, а e_3 ничто больше не порождает. Поэтому можем переставить e_3 и e_5: определим новое значение матрицы

$$S := \begin{pmatrix} 1 & & & 4 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ & & & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ & & & 1 & & \\ 2 & & 2 & 8 & -3 & 6 \\ & 1 & 1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & -\frac{3}{2} & 4 & & 3 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 3 & 3 \\ & & -\frac{1}{2} & 3 & & 1 \\ & & & 1 & & \\ 2 & & -3 & 8 & 2 & 6 \\ & 1 & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Получаем

$$S^{-1} \cdot M \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & 2 & -\frac{1}{2} & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

4. e_5 ничто не порождает — идём дальше.

5. e_4 ничто не порождает — идём дальше.

6. Видим, что e_3 порождает только e_2, а e_2 ничто больше не порождает. e_2 стоит на правильном месте, но не с тем коэффициентом, поэтому разделим его на -2: определим новое значение матрицы

$$S := \begin{pmatrix} 1 & & -\frac{3}{2} & 4 & & 3 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 3 & 3 \\ & & -\frac{1}{2} & 3 & & 1 \\ & & & 1 & & \\ 2 & & -3 & 8 & 2 & 6 \\ & 1 & & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -\frac{1}{2} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & -\frac{3}{2} & 4 & & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 3 & 3 \\ & & -\frac{1}{2} & 3 & & 1 \\ & & & 1 & & \\ 2 & & -3 & 8 & 2 & 6 \\ & -\frac{1}{2} & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Получаем

$$S^{-1} \cdot M \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Таким образом в жордановом базисе

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\3\\1\\8\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\1\\0\\6\\0\end{pmatrix} \right\}$$

матрица имеет вид жордановой матрицы

$$\begin{pmatrix}-2 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2\end{pmatrix}$$