# Основы математической логики.

Лектор — Станислав Олегович Сперанский
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

## TODOs



## Содержание



Материалы лекций: ссылка

### 0.1 Формальности про алфавиты и слова

**Определение 1.** *Алфавит* $A$ — множество элементов произвольной природы.

*$A$-слова* или *слова над алфавитом* $A$ — элементы $A^*$ (т.е. всевозможные конечные последовательности элементов из $A$).

Для всякого $w \in A^*$ *длиной слова* $w$ называется $|w|$ (что также равно $\mathrm{dom}(w)$).

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

**Определение 2.** Пусть даны слова $w_1$ и $w_2$ над $A$. Рассмотрим отображение

$$v : |w_1| + |w_2| \to A, i \mapsto \begin{cases} w_1(i) & \text{если } i < |w_1| \\ w_2(i - |w_1|) & \text{если } i \geqslant |w_1| \end{cases}$$

Понятно, что $v \in A^*$. Полученное $v$ называется конкатенацией $w_1$ и $w_2$ и обозначается $w_1 w_2$.

**Определение 3.** Пусть $w, w' \in A^*$. Тогда $w'$ называется *подсловом* $w$, если $w = v_0 w' v_1$ для некоторых $\{v_0; v_1\} \subseteq A^*$. Обозначение: $w' \preccurlyeq w$.

В этом случае $\langle w'; |v_0| \rangle$ называется *вхождением* $w'$ в $w$.

**Определение 4.** Пусть $\langle w', k \rangle$ — вхождение $w'$ в $w$, т.е. $w = v_0 w' v_1$, где $|v_0| = k$. Тогда для всякого $u \in A^*$ можно определить

$$w[w'/u, k] := v_0 u v_1,$$

т.е. результат замены данного вхождения $w'$ в $w$ на $u$.

Если никакие два различных вхождения $w'$ в $w$ не пересекаются, то можно определить $w[w'/u]$ как результат одновременной замены всех вхождений $w'$ в $w$ на $u$.

## 0.2 Язык пропозициональной классической логики (Propositional Classic Logic, PCL)

**Определение 5.** Пусть (навсегда) зафиксировано некоторое счётное множество Prop. Будем называть его элементы *пропозициональными переменными* или просто *переменными*.

Алфавит $\mathscr{L}$ пропозициональной классической логики состоит из элементов Prop, а также:

- символов связок:
  - “$\to$” — символ импликации,
  - “$\wedge$” — символ конъюнкции,
  - “$\vee$” — символ дизъюнкции,
  - “$\neg$” — символ отрицания,
- и вспомогательных символов: “(” и “)”.

Обозначим за Form наименьшее подмножество $\mathscr{L}^*$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $p \in \mathrm{Prop}$, то $p \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\varphi, \psi\} \in \mathrm{Prop}$, то $(\varphi \to \psi) \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\varphi, \psi\} \in \mathrm{Prop}$, то $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\varphi, \psi\} \in \mathrm{Prop}$, то $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{Form}$;
- если $\varphi \in \mathrm{Form}$, то $\neg\varphi \in \mathrm{Form}$.

Элементы Form называются *формулами*.

**Теорема 1.** Form *существует.*

**Доказательство.** Рассмотрим семейство $T$ всех подмножеств $\mathscr{L}^*$, удовлетворяющих порождающим правилам выше. Заметим, что $T$ не пусто, так как содержит $\mathscr{L}^*$. Тогда можно рассмотреть $F := \bigcap T$. Несложно убедиться, что оно удовлетворяет всем порождающим правилам, значит лежит в $T$. И при этом меньше по включению всех других множеств в $T$. Значит его и можно взять в качестве $\mathrm{Form}$. $\square$

**Определение 6.** Будем говорить, что $\varphi$ является *началом* $\psi$, и писать $\varphi \sqsubseteq \psi$, если $\psi = \varphi\tau$ для некоторого $v \in \mathscr{L}^*$.

**Лемма 2.** *Всякое* $\varphi \in \mathrm{Form}$ *имеет один из следующих видов:*

1. $p$ *для некоторого* $p \in \mathrm{Prop}$*;*

2. $(\theta \circ \chi)$ *для некоторых* $\{\theta; \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *и* $\circ \in \{\to; \wedge; \vee\}$*;*

3. $\neg\theta$ *для некоторого* $\theta \in \mathrm{Form}$.

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда рассмотрим $F := \mathrm{Form} \setminus \{\varphi\}$. Заметим, что $F$ удовлетворяет тем же порождающим правилам, что и $\mathrm{Form}$. Действительно:

- Если $p \in \mathrm{Prop}$, то $p \in \mathrm{Form}$. При этом $p \neq \varphi$ по условию леммы. Следовательно $p \in F$.

- Если $\{\varphi, \psi\} \in \mathrm{Prop}$, то $(\varphi \to \psi) \in \mathrm{Form}$. При этом $(\varphi \to \psi) \neq \varphi$ по условию леммы. Следовательно $(\varphi \to \psi) \in F$. Аналогично для $\wedge$ и $\vee$.

- Если $\varphi \in \mathrm{Form}$, то $\neg\varphi \in \mathrm{Form}$. При этом $\neg\varphi \neq \varphi$ по условию леммы. Следовательно $\neg\varphi \in F$.

Значит $F$ — меньшее по включение чем $\mathrm{Form}$ множество, удовлетворяющее условиям наложенным на $\mathrm{Form}$ — противоречие. $\square$

**Следствие 2.1.** *Рассмотрим последовательность множеств* $(F_n)_{n=0}^{\infty}$*, что* $F_0 = \mathrm{Prop}$*, а*

$$F_{n+1} = F_n \cup \{(\varphi \circ \chi) \mid \{\theta; \chi\} \subseteq \mathrm{Form} \wedge \circ \in \{\to; \wedge; \vee\}\} \cup \{\neg\theta \mid \theta \in \mathrm{Form}\}$$

*Тогда*

1. *всякое* $F_n \subseteq \mathrm{Form}$*;*

2. *всякое* $\varphi \in \mathrm{Form}$ *лежит в некотором* $F_n$.

**Следствие 2.2.** $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = \mathrm{Form}$.

**Лемма 3.** *Пусть* $\{\varphi; \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *таковы, что* $\psi \sqsubseteq \varphi$*. Тогда* $\psi = \varphi$.

**Доказательство.** Докажем утверждение возвратной индукцией по $|\varphi|$.

Рассмотрим случаи.

1. Если $\varphi \in \mathrm{Prop}$, то, очевидно, $\psi = \varphi$.

2. Если $\varphi = (\theta \circ \chi)$, где $\{\theta; \chi\} \in \mathrm{Form}$ и $\circ \in \{\to; \wedge; \vee\}$, то $\psi$ начинается на “(”, значит имеет вид $(\theta' \circ' \chi')$, где $\{\theta'; \chi'\} \in \mathrm{Form}$ и $\circ' \in \{\to; \wedge; \vee\}$. Следовательно либо $\theta \sqsubseteq \theta'$, либо $\theta' \sqsubseteq \theta$. Но $|\theta| < |\varphi| - 3$, и $|\theta'| < |\psi| - 3 \leqslant |\varphi| - 3$. Тогда можно применить предположение индукции и получить, что $\theta = \theta'$. Значит $\circ = \circ'$, а далее по аналогии получаем, что $\chi = \chi'$. Следовательно $\varphi = \psi$.

3. Если $\varphi = \neg\theta$, то $\psi$ начинается на "$\neg$", следовательно $\psi = \neg\theta'$. Тогда $\theta' \sqsubseteq \theta$, а тогда по предположению индукции $\theta' = \theta$, значит $\varphi = \psi$.

$\square$

**Теорема 4** (о единственности представления формул)**.** *Всякая формула в* $\mathrm{Form} \setminus \mathrm{Prop}$ *представляется единственным образом в одном из видов*

- $(\theta \to \chi)$,
- $(\theta \land \chi)$,
- $(\theta \lor \chi)$,
- $\neg\theta$,

*где* $\{\theta; \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$.

**Доказательство.** По доказанной лемме всякое $\phi$ имеет такое представление. Пусть тогда их несколько; рассмотрим случаи.

1. Если $\phi$ начинается на "(", то тогда $\phi = (\theta \circ \chi) = (\theta' \circ' \chi')$. Тогда по доказанной лемме $\theta = \theta'$, $\circ = \circ'$, $\chi = \chi'$. Значит представления совпадают.
2. Если $\phi$ начинается на "$\neg$", то $\phi = \neg\theta = \neg\theta'$. Тогда $\theta = \theta'$, а следовательно представления совпадают.

$\square$

**Определение 7.** Для всякого $\varphi \in \mathrm{Form}$ определим

$$\mathrm{Sub}(\varphi) := \{\psi \mathrm{Form} \mid \psi \preccurlyeq \varphi\}.$$

Элементы $\mathrm{Sub}(\varphi)$ называют *подформулами* $\varphi$.

**Лемма 5.** *Пусть* $\varphi \in \mathrm{Form}$. *Тогда каждое вхождение "$\neg$" или "(" в* $\varphi$ *является началом вхождения некоторой подформулы.*

**Доказательство.**

TODO (А надо ли?)

$\square$

**Теорема 6.** *Пусть* $\varphi \in \mathrm{Form}$.

1. *Если* $\varphi \in \mathrm{Prop}$, *то* $\mathrm{Sub}(\varphi) = \{\varphi\}$.
2. *Если* $\varphi = (\theta \circ \chi)$, *где* $\{\theta; \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *и* $\circ \in \{\to; \land; \lor\}$, *то*
$$\mathrm{Sub}(\varphi) = \mathrm{Sub}(\theta) \cup \mathrm{Sub}(\chi) \cup \{\varphi\}.$$
3. *Если* $\varphi = \neg\theta$, *где* $\theta \in \mathrm{Form}$, *то*
$$\mathrm{Sub}(\varphi) = \mathrm{Sub}(\theta) \cup \{\varphi\}.$$

**Доказательство.**

1. Очевидно.
2. Непонятно. TODO
3. Непонятно. TODO

□

## 0.3 Семантика пропозициональной классической логики

**Определение 8.** Под *оценкой* мы будем понимать произвольную функцию из Prop в 2 (т.е. в $\{0;1\}$). Интуитивно 0 — «ложь», а 1 — «правда».

**Теорема 7.** *Пусть дана случайная* $v : \mathrm{Prop} \to 2$. *Тогда существует единственная* $v^* : \mathrm{Form} \to 2$, *которая удовлетворяет следующим свойствам:*

1. $\forall p \in \mathrm{Prop} \qquad v^*(p) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad v(p) = 1$;
2. $\forall \{\varphi;\psi\} \subseteq \mathrm{Form} \qquad v^*(\text{“}(\varphi \to \psi)\text{”}) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad v^*(\varphi) = 0 \lor v^*(\psi) = 1$;
3. $\forall \{\varphi;\psi\} \subseteq \mathrm{Form} \qquad v^*(\text{“}(\varphi \land \psi)\text{”}) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad v^*(\varphi) = 1 \land v^*(\psi) = 1$;
4. $\forall \{\varphi;\psi\} \subseteq \mathrm{Form} \qquad v^*(\text{“}(\varphi \lor \psi)\text{”}) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad v^*(\varphi) = 1 \lor v^*(\psi) = 1$;
5. $\forall \varphi \in \mathrm{Form} \qquad v^*(\neg\varphi) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad v^*(\varphi) = 0$.

**Доказательство.**
TODO

□

**Определение 9.** Если для некоторой оценки $v$ и формулы $\varphi$ верно, что $v^*(\varphi) = 1$, то пишут $v \Vdash \varphi$.

**Определение 10.** Формулу $\varphi$ называют:

- *выполнимой*, если $v \Vdash \varphi$ для некоторой оценки $v$;
- *общезначимой* (или *тождественно истинной*, или *тавтологией*), если $v \Vdash \varphi$ для всякой оценки $v$.

*Замечание.* Очевидно, например, что

$$\varphi \text{ общезначима} \quad\Longleftrightarrow\quad \neg\varphi \text{ не выполнима.}$$

**Теорема** (Кук-Левин)**.** *Проблема выполнимости для пропозициональной классической логики* NP-*полна.*

**Определение 11.** Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ и $\varphi \in \mathrm{Form}$. Говорят, что $\varphi$ *семантически следует из* $\Gamma$, если для любой оценки $v$

$$(\forall \psi \in \Gamma \quad v \Vdash \psi) \qquad\longrightarrow\qquad v \Vdash \varphi.$$

Обозначение: $\Gamma \vDash \varphi$.

Вместо $\varnothing \vDash \varphi$ обычно пишут $\vDash \varphi$.

*Замечание.* Очевидно, например, что

$$\vDash \varphi \iff \varphi \text{ общезначима.}$$

**Определение 12.** Формулы $\varphi$ и $\psi$ называются *семантически эквивалентными*, если $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$. Обозначение: $\varphi \equiv \psi$.

*Пример* 1. Для любых $\{\varphi; \psi; \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$:

- $(\varphi \to \psi) \equiv \neg\varphi \vee \psi$;
- $(\varphi \vee \psi) \wedge \chi \equiv (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$;
- $(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \equiv (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$;
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$;
- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$;
- $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$.

**Упражнение 1.** Всякая формула семантически эквивалентна некоторой ДНФ.

## 0.4 Гильбертовское исчисление для пропозициональной классической логики

**Определение 13.** Рассмотрим следующие аксиомы:

I1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

I2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$;

C1. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$;

C2. $\varphi \wedge \psi \to \psi$;

C3. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$;

D1. $\varphi \to \varphi \vee \psi$;

D2. $\psi \to \varphi \vee \psi$;

D3. $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$;

N1. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;

N2. $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$;

N3. $\varphi \vee \neg\varphi$.

Также имеется ровно одно *правило вывода*, именуемое *“modus ponens”*:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\,(\mathrm{MP})$$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$. *Вывод из* $\Gamma$ в данном гильбертовском исчислении — конечная последовательность

$$\varphi_0, \ldots, \varphi_n$$

(где $n \in \mathbb{N}$) элементов Form, что для каждого $i \in \{0; \ldots; n\}$ верно одно из следующих условий:

- $\varphi_i$ есть аксиома;
- $\varphi_i$ является элементом $\Gamma$;
- существуют $\{j; k\} \subseteq \{0; \ldots; i-1\}$ такие, что $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$.

При этом $\varphi_n$ называется *заключением* рассматриваемого вывода, а элементы $\Gamma$ — его *гипотезами.*

Для $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$ запись $\Gamma \vdash \varphi$ означает, что существует вывод из $\Gamma$ с заключением $\varphi$. Вместо $\varnothing \vdash \varphi$ обычно пишут $\vdash \varphi$.

**Лемма 8.**

1. **Монотонность.** *Если* $\Gamma \subseteq \Delta$ *и* $\Gamma \vdash \varphi$, *то* $\Delta \vdash \varphi$.
2. **Транзитивность.** *Если для всякого* $\psi \in \Gamma$ *верно* $\Delta \vdash \psi$ *и* $\Gamma \vdash \varphi$, *то* $\Delta \vdash \varphi$.
3. **Компактность.** *Если* $\Gamma \vdash \varphi$, *то для некоторого конечного* $\Delta \subseteq \Gamma$ *верно* $\Delta \vdash \varphi$.

**Доказательство.**

1. Рассматривая вывод $\varphi$ из $\Gamma$, сиюминутно получаем вывод $\varphi$ из $\Delta$.
2. Возьмём вывод $\varphi$ из $\Gamma$. Рассмотрим все использованные утверждения $\Gamma$ в этом выводе; получим конечное множество $\Gamma'$. Далее для всякого $\psi \in \Gamma'$ рассмотрим вывод $\psi$ из $\Delta$, сотрём $\psi$ на конце этого вывода и припишем его в начало ранее рассмотренного вывода $\varphi$. Тогда несложно понять, что мы получаем вывод $\varphi$ из $\Delta$.
3. Хватает просто взять в качестве $\Delta$ множество всех формул из $\Gamma$, использованных в каком-то конкретном выводе $\varphi$ из $\Gamma$. Тогда очевидно, что $\Delta$ конечно, а рассмотренный вывод станет выводом $\varphi$ из $\Delta$.

$\square$

*Пример* 2. Покажем, что $\vdash \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(\varphi \to \psi \vee \varphi) \to ((\psi \to \psi \vee \varphi) \to (\varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi))$ | D3 |
| 2. | $\varphi \to \psi \vee \varphi$ | D2 |
| 3. | $\psi \to \psi \vee \varphi$ | D1 |
| 4. | $(\psi \to \psi \vee \varphi) \to (\varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi)$ | из 2 и 1; MP |
| 5. | $\varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$ | из 3 и 4; MP |

*Пример* 3. Покажем, что $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \wedge \varphi$:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\psi \to (\varphi \to \psi \wedge \varphi)$ | C3 |
| 2. | $\varphi \wedge \psi \to \psi$ | C2 |
| 3. | $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ | C1 |
| 4. | $\varphi \wedge \psi$ | гипотеза |
| 5. | $\psi$ | из 4 и 2; MP |
| 6. | $\varphi$ | из 4 и 3; MP |
| 7. | $\varphi \to \psi \wedge \varphi$ | из 5 и 1; MP |
| 8. | $\psi \wedge \varphi$ | из 6 и 7; MP |

**Лемма 9.** $\vdash \varphi \to \varphi$.

**Доказательство.**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ | I2 |
| 2. | $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ | I1 |
| 3. | $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ | I1 |
| 4. | $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ | из 2 и 1 |
| 5. | $\varphi \to \varphi$ | из 3 и 4 |

□

*Замечание* 1. Важно, что для доказательства были использованы только I1, I2 и MP.

**Теорема 10** (о дедукции в гильбертовском исчислении)**.** *Для любых* $\Gamma \cup \{\varphi; \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *верно, что*

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

**Доказательство.**

$\Longleftarrow$) Пусть $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\varphi_0, \ldots, \varphi_n$$

из $\Gamma$, где $\varphi_n = \varphi \to \psi$. Тогда несложно убедиться, что

$$\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \varphi, \psi$$

будет выводом $\psi$ из $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Стало быть, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

$\Longrightarrow$) Пусть $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\psi_0, \ldots, \psi_n$$

из $\Gamma \cup \{\varphi\}$, где $\psi_n = \psi$. Покажем по полной индукции по $i$, что $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$.

Рассмотрим возможные случаи.

- Пусть $\psi_i$ — аксиома или элемент $\Gamma$. Тогда

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\psi_i \to (\varphi \to \psi_i)$ | I2 |
| 2. | $\psi_i$ | гипотеза / элемент $\Gamma$ |
| 3. | $\varphi \to \psi_i$ | из 2 и 1 |

  будет выводом из $\varnothing$ или $\Gamma$ соответственно. Стало быть, $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$.

- Пусть $\psi_i = \varphi$. По лемме 9 мы имеем, что $\vdash \varphi \to \varphi$. Стало быть, $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$.

- Пусть $\psi_i$ получено из предыдущих $\psi_j$ и $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$ по MP. Тогда можно построить следующий "квазивывод" из $\Gamma$:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(\varphi \to (\psi_j \to \psi_i)) \to ((\varphi \to \psi_j) \to (\varphi \to \psi_i))$ | I2 |
| 2. | $\varphi \to (\psi_j \to \psi_i)$ | предположение индукции |
| 3. | $\varphi \to \psi_j$ | предположение индукции |
| 4. | $(\varphi \to \psi_j) \to (\varphi \to \psi_i)$ | из 2 и 1 |
| 5. | $\varphi \to \psi_i$ | из 3 и 4 |

  Стало быть, $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$.

В частности, при $i := n$ мы имеем, что $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_n$, т.е. $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

$\square$

*Замечание* 2. Важно, что для доказательства были использованы только I1, I2 и MP.

**Определение 14.** Для удобства введём обозначения

$$\top := p_\star \to p_\star \quad \text{и} \quad \bot := \neg\top,$$

где $p_\star$ — фиксированная пропозициональная константа.

**Следствие 10.1.** *Для любых* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i \to \varphi \text{ *для некоторых* } \{\psi_1; \ldots; \psi_n\} \subseteq \Gamma.$$

*(В случае* $n = 0$ *соответствующая конъюнкция отождествляется с* $\top$*.)*

**Доказательство.** Заметим, что для всяких $\{\psi_1; \ldots; \psi_n; \varphi\} \subseteq \Gamma$.

$$\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i \to \varphi \iff \left\{\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i\right\} \vdash \varphi$$

и

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \{\psi_1; \ldots; \psi_n\} \vdash \varphi \text{ для некоторых } \{\psi_1; \ldots; \psi_n\} \subseteq \Gamma.$$

Соответственно нужно лишь показать, что

$$\{\psi_1; \ldots; \psi_n\} \vdash \varphi \iff \left\{\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i\right\} \vdash \varphi$$

По C1 и C2 имеем, что $\{\bigwedge_{i=1}^n \psi_i\} \vdash \{\psi_i\}_{i=1}^n$, а по C3 — что $\{\psi_i\}_{i=1}^n \vdash \{\bigwedge_{i=1}^n \psi_i\}$. Из транзитивности $\vdash$ получаем искомый равносильный переход. $\square$

**Лемма 11.** *Всякая аксиома гильбертовского исчисления общезначима.*

**Теорема 12** (о корректности $\vDash$)**.** *Для всяких* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \vDash \varphi$$

**Доказательство.** Пусть $\Gamma \vdash \varphi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

$\varphi$ из $\Gamma$. Рассмотрим произвольную оценку $v$ такую, что $v \Vdash \psi$ для всех $\psi \in \Gamma$. Покажем по индукции по $i \in \{0; \ldots; n\}$, что $v \Vdash \varphi_i$. Для этого рассмотрим следующие случаи:

- Если $\varphi_i$ — аксиома, то $\vDash \varphi_i$, а потому $v \Vdash \varphi_i$.
- Если $\varphi_i$ — элемент $\Gamma$, то тогда, очевидно, $v \Vdash \varphi_i$.
- Если $\varphi_i$ получается из предшествующих $\varphi_j$ и $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ по MP. Ввиду предположения индукции,
$$v \Vdash \varphi_j \quad \text{и} \quad v \Vdash \varphi_j \to \varphi_i,$$
откуда немедленно следует $v \Vdash \varphi_i$.

В частности при $i := n$ мы имеем $v \Vdash \varphi_n$, т.е. $v \Vdash \varphi$.

Таким образом $\Gamma \vDash \varphi$. $\square$

**Определение 15.** $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ называется *простой теорией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- $\Gamma \neq \mathrm{Form}$;
- $\{\varphi \in \mathrm{Form} \mid \Gamma \vdash \varphi\} \subseteq \Gamma$;
- для любого $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ верно, что $\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

**Лемма 13.** *Пусть* $\Gamma$ *— простая теория. Тогда для любых* $\{\varphi; \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$*:*

$$\begin{aligned}
\neg\varphi \in \Gamma &\iff \varphi \notin \Gamma;\\
\varphi \wedge \psi \in \Gamma &\iff \varphi \in \Gamma \text{ и } \psi \in \Gamma;\\
\varphi \vee \psi \in \Gamma &\iff \varphi \in \Gamma \text{ или } \psi \in \Gamma;\\
\varphi \to \psi \in \Gamma &\iff \varphi \notin \Gamma \text{ или } \psi \in \Gamma.
\end{aligned}$$

**Доказательство.**

$\neg, \Rightarrow)$ Пусть $\neg\varphi \in \Gamma$. Предположим, что $\varphi \in \Gamma$. Рассмотрим всякое $\psi \in \mathrm{Form}$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ | N2 |
| 2. | $\neg\varphi$ | гипотеза |
| 3. | $\varphi$ | гипотеза |
| 4. | $\varphi \to \psi$ | из 2 и 1 |
| 5. | $\psi$ | из 3 и 4 |

То есть $\Gamma \vdash \psi$, а значит $\Gamma \vdash \mathrm{Form}$. Следовательно по построению $\Gamma = \mathrm{Form}$ — противоречие. Значит $\varphi \notin \Gamma$.

$\neg, \Leftarrow)$ Пусть $\varphi \notin \Gamma$. Поскольку $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$, тем более $\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi$, то $\varphi \vee \neg\varphi \in \Gamma$, откуда по построению $\neg\varphi \in \Gamma$.

$\wedge, \Rightarrow)$ Пусть $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$. Используя C1 и C2, получаем, что $\Gamma \vdash \varphi$ и $\Gamma \vdash \psi$, следовательно $\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma$.

$\wedge, \Leftarrow)$ Пусть $\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma$. Используя C3, получаем, что $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$, а следовательно $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$.

$\vee, \Rightarrow)$ Пусть $\varphi \vee \psi \in \Gamma$. Тогда по построению $\Gamma$ имеем $\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

$\vee, \Leftarrow)$ Пусть $\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$. Тогда применяя D1 или D2, получаем, что $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$, следовательно $\varphi \vee \psi \in \Gamma$.

$\to, \Rightarrow)$ Пусть $\varphi \to \psi \in \Gamma$. Следовательно если $\varphi \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash \psi$, т.е. $\psi \in \Gamma$. Таким образом $\varphi \notin \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

$\to, \Leftarrow)$ Пусть $\varphi \notin \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$. В первом случае $\neg\varphi \in \Gamma$, откуда с помощью N2 получаем $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, а значит $\varphi \to \psi \in \Gamma$. Во втором случае $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ можно получить с помощью I1.

$\square$

**Лемма 14** (о расширении, aka Линдебаума)**.** *Пусть* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *таковы, что* $\Gamma \nvdash \varphi$*. Тогда существует простая теория* $\Gamma' \supseteq \Gamma$*, что* $\Gamma' \nvdash \varphi$*.*

**Доказательство.** Ясно, что Form счётно. Поэтому его элементы можно расположить в последовательность $(\psi_n)_{n=0}^{\infty}$ (т.е. $\mathrm{Form} = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$). Теперь определим последовательность $(\Gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ подмножеств Form по рекурсии следующим образом.

- Если $n = 0$, то $\Gamma_n = \Gamma$.
- Если $n = m + 1$ и $\Gamma_m \cup \{\psi_m\} \vdash \varphi$, то $\Gamma_n := \Gamma_m$.
- Если $n = m + 1$ и $\Gamma_m \cup \{\psi_m\} \nvdash \varphi$, то $\Gamma_n := \Gamma_m \cup \{\psi_m\}$.

По построению мы имеем $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots$. Кроме того, $\Gamma_n \nvdash \varphi$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Возьмём

$$\Gamma' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

Заметим следующее.

- Безусловно $\Gamma \subseteq \Gamma'$.
- $\Gamma' \nvdash \varphi$. Действительно, иначе есть конечное $\Delta \subseteq \Gamma'$, что $\Delta \vdash \varphi$. Следовательно есть $\Gamma_n \supseteq \Delta$, т.е. $\Gamma_n \vdash \varphi$ — противоречие с определением $\Gamma_n$.
- Для всякого $\psi \in \mathrm{Form}$
$$\psi \notin \Gamma' \quad \Longrightarrow \quad \Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \varphi$$
Действительно, $\psi = \psi_n$ для некоторого $n$. Тогда из $\psi \notin \Gamma'$ следует, что $\Gamma_n \cup \{\psi\} \vdash \varphi$, и следовательно $\Gamma' \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$.

Проверим, что $\Gamma'$ — простая теория.

- Из $\Gamma' \nvdash \varphi$ следует, что $\Gamma' \neq \mathrm{Form}$.
- Пусть $\psi \notin \Gamma'$. Тогда из того, что $\Gamma' \nvdash \varphi$ и $\Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ следует, что $\Gamma' \nvdash \psi$.
- Пусть $\theta \notin \Gamma'$ и $\chi \notin \Gamma'$. Тогда $\Gamma' \cup \{\theta\} \vdash \varphi$ и $\Gamma' \cup \{\chi\} \vdash \varphi$. Следовательно $\Gamma' \vdash \theta \to \varphi$ и $\Gamma' \vdash \chi \to \varphi$. Тогда по D3 имеем, что $\Gamma' \vdash \theta \vee \chi \to \varphi$, т.е. $\Gamma' \cup \{\theta \vee \chi\} \vdash \varphi$, следовательно $\theta \vee \chi \notin \Gamma'$.

Таким образом $\Gamma'$ — простая теория, обладающая необходимыми свойствами. □

**Доказательство для любой мощности** Prop**.** Пусть $\kappa := |\mathrm{Prop}|$. Ясно, что $|\mathrm{Form}| = \kappa$. Поэтому элементы Form можно расположить в трансфинитную последовательность длины $\kappa$:

$$\langle \psi_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$$

т.е. $\mathrm{Form} = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$. Определим $\langle \Gamma_\alpha \rangle_{\alpha \in \kappa}$ по трансфинитной рекурсии следующим образом.

- Если $\alpha = 0$, то $\Gamma_\alpha := \Gamma$.
- Если $\alpha = \beta + 1$ и $\Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\} \vdash \psi$, то $\Gamma_\alpha := \Gamma_\beta$.
- Если $\alpha = \beta + 1$ и $\Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\} \nvdash \psi$, то $\Gamma_\alpha := \Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\}$.
- Если $\alpha$ — предельный ординал, то $\Gamma_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \Gamma_\beta$.

По построению мы имеем $\Gamma_\beta \subseteq \Gamma_\alpha$ для всяких $\beta \in \alpha \in \kappa$. Кроме того, $\Gamma_\alpha \nvdash \varphi$ для всех $\alpha \in \kappa$. Возьмём

$$\Gamma' := \bigcup_{\alpha \in \kappa} \Gamma_\alpha$$

Заметим следующее.

- Безусловно $\Gamma \subseteq \Gamma'$.
- $\Gamma' \nvdash \varphi$. Действительно, иначе есть конечное $\Delta \subseteq \Gamma'$, что $\Delta \vdash \varphi$. Следовательно есть $\Gamma_\alpha \supseteq \Delta$, т.е. $\Gamma_\alpha \vdash \varphi$ — противоречие с определением $\Gamma_\alpha$.
- Для всякого $\psi \in \mathrm{Form}$
$$\psi \notin \Gamma' \quad \Longrightarrow \quad \Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \varphi$$
Действительно, $\psi = \psi_\alpha$ для некоторого $n$. Тогда из $\psi \notin \Gamma'$ следует, что $\Gamma_\alpha \cup \{\psi\} \vdash \varphi$, и следовательно $\Gamma' \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$.

Проверим, что $\Gamma'$ — простая теория.

- Из $\Gamma' \nvdash \varphi$ следует, что $\Gamma' \neq \mathrm{Form}$.
- Пусть $\psi \notin \Gamma'$. Тогда из того, что $\Gamma' \nvdash \varphi$ и $\Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ следует, что $\Gamma' \nvdash \psi$.
- Пусть $\theta \notin \Gamma'$ и $\chi \notin \Gamma'$. Тогда $\Gamma' \cup \{\theta\} \vdash \varphi$ и $\Gamma' \cup \{\chi\} \vdash \varphi$. Следовательно $\Gamma' \vdash \theta \to \varphi$ и $\Gamma' \vdash \chi \to \varphi$. Тогда по D3 имеем, что $\Gamma' \vdash \theta \vee \chi \to \varphi$, т.е. $\Gamma' \cup \{\theta \vee \chi\} \vdash \varphi$, следовательно $\theta \vee \chi \notin \Gamma'$.

Таким образом $\Gamma'$ — простая теория, обладающая необходимыми свойствами. □

*Пример* 4. Пусть $v$ — оценка. Рассмотрим

$$\Gamma_v := \{\varphi \in \mathrm{Form} \mid v \Vdash \varphi\}$$

Легко убедиться, что $\Gamma_v$ — простая теория.

**Определение 16.** Для всякой простой теории $\Gamma$ определим оценку

$$v_\Gamma(p) = \begin{cases} 1 & \text{если } p \in \Gamma \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

Иначе говоря, $v_\Gamma$ — характеристическая функция для $\mathrm{Prop} \cap \Gamma$.

**Лемма 15.** *Пусть* $\Gamma$ *— простая теория. Тогда для всякой* $\varphi \in \mathrm{Form}$

$$v_\Gamma \Vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in \Gamma$$

**Доказательство.** Докажем это по полной индукции по $|\varphi|$.

**Шаг.** Рассмотрим случаи.

- $\varphi \in \mathrm{Prop}$. В таком случае доказываемое утверждение очевидно следует из определения $v_\Gamma$.
- $\varphi = (\theta \to \chi)$.

$$v_\Gamma \Vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad v_\Gamma \nVdash \theta \vee v_\Gamma \Vdash \chi \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \notin \Gamma \vee \chi \in \Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in \Gamma$$

- $\varphi = (\theta \wedge \chi)$.

$$v_\Gamma \Vdash \varphi \iff v_\Gamma \Vdash \theta \wedge v_\Gamma \Vdash \chi \iff \theta \in \Gamma \wedge \chi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$$

- $\varphi = (\theta \vee \chi)$.

$$v_\Gamma \Vdash \varphi \iff v_\Gamma \Vdash \theta \vee v_\Gamma \Vdash \chi \iff \theta \in \Gamma \vee \chi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$$

- $\varphi = \neg\theta$.

$$v_\Gamma \Vdash \varphi \iff v_\Gamma \nVdash \theta \iff \theta \notin \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$$

□

**Теорема 16** (о сильной полноте $\vdash$)**.** *Для любых* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi$$

**Доказательство.**

$\Rightarrow$) См. теорему о корректности.

$\Leftarrow$) Допустим, что $\Gamma \nvdash \varphi$. Как нам известно найдётся простая теория $\Gamma' \supseteq \Gamma$, что $\Gamma' \nvdash \varphi$. Очевидно, $\varphi \notin \Gamma'$. Следовательно $v_{\Gamma'} \Vdash \psi$ для всех $\psi \in \Gamma'$, но $v_{\Gamma'} \nVdash \varphi$. В итоге, $\Gamma' \nvDash \varphi$, и тем более $\Gamma \nvDash \varphi$.

□

**Следствие 16.1** (теорема о слабой полноте $\vdash$)**.** *Для любой* $\varphi \in \Gamma$

$$\vdash \varphi \iff \vDash \varphi$$

**Следствие 16.2** (теорема о компактности $\vDash$)**.** *Для любых* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$

$$\Gamma \vDash \varphi \iff \Delta \vDash \varphi \textit{ для некоторого конечного } \Delta \subseteq \Gamma.$$

## 0.5 Структуры

**Определение 17.** *Сигнатура* — четвёрка вида

$$\sigma = \langle \mathrm{Pred}_\sigma, \mathrm{Func}_\sigma, \mathrm{Const}_\sigma, \mathrm{arity}_\sigma \rangle$$

где $\mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{Const}_\sigma$ — попарно непересекающиеся множества, а $\mathrm{arity}_\sigma$ — функция из $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma$ в $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Элементы $\mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{Const}_\sigma$ называются соответственно *предикатными*, *функциональными* и *константными символами* $\sigma$.

Для данного символа $\varepsilon \in \mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma$ число $\mathrm{arity}(\varepsilon)$ называют *его местностью*, *арностью* или *валентностью*.

Когда из контекста понятно, о какой сигнатуре идёт речь, то индекс $\cdot_\sigma$ может опускаться.

В дальнейшем при записи сигнатур нами будет допускаться определённая свобода. Так, если

$$\mathrm{Pred}_\sigma = \{P_1; \ldots; P_i\}, \qquad \mathrm{Func}_\sigma = \{f_1; \ldots; f_j\} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Const}_\sigma = \{c_1; \ldots; c_j\},$$

то $\sigma$ удобно представить как

$$\langle P_1^{n_1}, \ldots, P_i^{n_i}; f_1^{m_1}, \ldots, f_j^{m_j}; c_1, \ldots, c_k \rangle,$$

где $n_1$, …, $n_i$ и $m_1$, …, $m_j$ суть местности соответственно $P_1$, …, $P_i$ и $f_1$, …, $f_j$.

*Пример* 5. Сигнатура (строгих) ЧУМ — $\langle <^2 \rangle$, абелевых групп — $\langle =^2; +^2; -^1; 0 \rangle$.

*Замечание.* Неформально говоря, элементы $\mathrm{Pred}_\sigma$ играют роль “отношений” (например: равенство “$=$”, упорядоченность “$<$” или “$\leqslant$”, отношение делимости “$|$” или “$\vdots$”; при этом отношения можно брать не только на парах элементов), $\mathrm{Func}_\sigma$ — роль функций и операторов (например: сложение (двухместное) “$+$”, умножение (двухместное) “$\cdot$”, унарный минус aka отрицание (унарное) “$-$”), а $\mathrm{Const}_\sigma$ — роль глобальных констант (например: нейтральные по сложению “0” и умножению “1” элементы колец, пространство векторов $V_A$ в аффинном пространстве).

Уточнить про роль константных символов.

**Определение 18.** Пусть дана сигнатура $\sigma$. *$\sigma$-структура* — пара вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_\mathfrak{A} \rangle$$

где $A$ — непустое множество, а $I_\mathfrak{A}$ — функция с областью определения $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$, что:

- для любого $n$-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ верно $I_\mathfrak{A}(P) \subseteq A^n$;
- для любого $m$-местного $f \in \mathrm{Pred}_\sigma$ верно $I_\mathfrak{A}(f) : A^m \to A$;
- для любого $c \in \mathrm{Pred}_\sigma$ верно $I_\mathfrak{A}(c) \in A$.

При этом $A$ называется *носителем* или *универсумом* $\mathfrak{A}$, а $I_\mathfrak{A}$ — *интерпретацией $\sigma$ в $\mathfrak{A}$*. Вместо $I_\mathfrak{A}(P)$, $I_\mathfrak{A}(f)$ и $I_\mathfrak{A}(c)$ часто пишут соответственно $P^\mathfrak{A}$, $f^\mathfrak{A}$ и $c^\mathfrak{A}$.

Кроме того, если $\sigma$ представляется как

$$\langle P_1^{n_1}, \dots, P_i^{n_i}; f_1^{m_1}, \dots, f_j^{m_j}; c_1, \dots, c_k \rangle,$$

то $\mathfrak{A}$ удобно представить как

$$\langle A; P_1^\mathfrak{A}, \dots, P_i^\mathfrak{A}; f_1^\mathfrak{A}, \dots, f_j^\mathfrak{A}; c_1^\mathfrak{A}, \dots, c_k^\mathfrak{A} \rangle.$$

Более того, для некоторых стандартных структур $\mathfrak{A}$ даже индекс $\cdot^\mathfrak{A}$ может опускаться, хоть это и чревато некоторой путаницей.

*Замечание.* В предыдущем семестре для ЧУМ мы использовали запись $\langle A, <_A \rangle$, но аккуратнее было бы $\mathfrak{A} = \langle A; <_\mathfrak{A} \rangle$; вместе с тем, очевидно, далеко не всякая структура в сигнатуре ЧУМ является ЧУМ.

*Пример* 6. Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma := \langle =^2; s^1, +^2, \cdot^2; 0 \rangle.$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ $\sigma$-структуру с носителем $\mathbb{N}$, что:

- $=^\mathfrak{N}$ — это отношение равенства на $\mathbb{N}$;
- $s^\mathfrak{N}$ — это функция последователя на $\mathbb{N}$;
- $+^\mathfrak{N}$ — это обычная функция сложения на $\mathbb{N}$;
- $\cdot^\mathfrak{N}$ — это обычная функция умножения на $\mathbb{N}$;
- $0^\mathfrak{N}$ — это настоящий ноль из $\mathfrak{N}$.

Эту структуру называют *стандартной моделью арифметики.*

*Пример* 7. Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma := \langle =^2; +^2, -^1, \cdot^2; 0, 1 \rangle.$$

Её называют *сигнатурой колец*, разумеется. Обозначим

$$\mathfrak{Z} := \begin{array}{c} \sigma\text{-структура с носителем } \mathbb{Z}\text{, в которой все символы} \\ \sigma \text{ интерпретируются естественным образом.} \end{array}$$

В частности, $-^{\mathfrak{Z}}$ — это функция взятия обратного по сложению над $\mathbb{Z}$. По аналогии вместо $\mathbb{Z}$ можно было бы использовать:

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ aka $\mathbb{Z}_n$, т.е. множество всех целых чисел по модулю $n$;
- $M_n(\mathbb{R})$, т.е. множество всех матриц порядка $n$ над $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{Q}[x]$, т.е. множество всех многочленов от $x$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$.

*Пример* 8. Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma := \langle =^2, \cong^4, B^3 \rangle.$$

Обозначим через $\mathfrak{G}$ $\sigma$-структуру с носителем $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, что:

- $=^{\mathfrak{G}}$ — это отношение равенства на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- $\cong^{\mathfrak{G}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \cong^{\mathfrak{G}} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{отрезки } r_1 r_2 \text{ и } r_3 r_4 \text{ равны;}$$

- $B^{\mathfrak{G}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3) \in B^{\mathfrak{G}} \quad \Longleftrightarrow \quad r_2 \text{ лежит между } r_1 \text{ и } r_3 \text{ на прямой.}$$

Её можно назвать *стандартной моделью геометрии.*

*Пример* 9. Пусть $\sigma$ — сигнатура из предыдущего примера. Возьмём

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{H}$ $\sigma$-структуру с носителем $\mathbb{H}$, что:

- $=^{\mathfrak{H}}$ — это отношение равенства на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- $\cong^{\mathfrak{H}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \cong^{\mathfrak{G}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{отрезки } r_1 r_2 \text{ и } r_3 r_4 \text{ равны} \\ \text{в смысле метрики Пуанкаре;} \end{array}$$

- $B^{\mathfrak{H}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3) \in B^{\mathfrak{G}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} r_2 \text{ лежит между } r_1 \text{ и } r_3 \text{ на полуокружности} \\ \text{(или полупрямой), ортогональной вещественной оси.} \end{array}$$

Её называют *моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского.*

**Определение 19.** Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две $\sigma$-структуры. *Гомоморфизм из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$ — такое отображение $\xi : A \to B$, что

1. для любого $n$-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ и всех $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \quad \Longrightarrow \quad (\xi(a_1), \ldots, \xi(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}};$$

2. для любого $m$-местного $f \in \mathrm{Pred}_\sigma$ и всех $(a_1, \ldots, a_m) \in A^m$

$$\xi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\xi(a_1), \ldots, \xi(a_m));$$

3. для любого $c \in \mathrm{Pred}_\sigma$

$$\xi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

**Лемма 17.** *Композиция гомоморфизмов — гомоморфизм.*

**Определение 20.** *Вложение* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$ — инъективный гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ с усиленным до равносильности условием 1, т.е.

$$\xi^{-1}[P^{\mathfrak{B}}] = P^{\mathfrak{A}} \quad \text{для каждого } P \in \mathrm{Pred}_\sigma.$$

**Лемма 18.** *Композиция вложений — вложение.*

**Определение 21.** *Изоморфизм из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$ — сюръективное вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Говорят, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны, и пишут $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, если есть хоть какой-то изоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

**Лемма 19.** *Композиция изоморфизмов — изоморфизм.*

**Лемма 20.** *Изоморфность — “отношение эквивалентности”, т.е.*

1. *для всякой структуры* $\mathfrak{A}$ *верно*

$$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A};$$

2. *для всяких структур* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *верно*

$$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A};$$

3. *для всяких структур* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{C}$ *верно*

$$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}.$$

**Лемма 21.** *Гомоморфизм* $\xi$ *из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$ *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда есть обратный к нему, т.е. гомоморфизм* $\eta$ *из* $\mathfrak{B}$ *в* $\mathfrak{A}$, *что*

$$\xi \circ \eta = \mathrm{id}_A \quad \text{и} \quad \eta \circ \xi = \mathrm{id}_B.$$

*Пример* 10. Рассмотрим нестрогие ЧУМ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что:

- $A = B = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{A}}$ — это отношение делимости на $\mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ — это обычный порядок на $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Тогда

$$\lambda : A \to B, a \mapsto a$$

будет биективным гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, но даже не вложением.

*Пример* 11. Рассмотрим нестрогие ЧУМ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что:

- $A = \mathbb{N}$ и $B = \mathbb{P}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{A}}$ — это обычный порядок на $\mathbb{N}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ — это обычный порядок на $\mathbb{P}$.

Тогда

$$\lambda : A \to B, a \mapsto \text{“}a\text{-тое простое число”}$$

будет изоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

*Пример* 12. Зафиксируем $p \in \mathbb{P}$. Рассмотрим группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что:

- $A = \mathbb{Z}$ и $B = \mathbb{Z}_p$;
- $+^{\mathfrak{A}}$ — это сложение на $\mathbb{Z}$;
- $+^{\mathfrak{B}}$ — это сложение на $\mathbb{Z}_p$.

Тогда

$$\lambda : A \to B, a \mapsto a \bmod p$$

будет сюръективным гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

*Пример* 13. Рассмотрим группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что:

- $A = \mathbb{R}$ и $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $+^{\mathfrak{A}}$ — это сложение на $\mathbb{R}$;
- $+^{\mathfrak{B}}$ — это <u>умножение</u> на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Тогда

$$\lambda : A \to B, a \mapsto 2^a$$

будет вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

**Определение 22.** *Автоморфизм* $\mathfrak{A}$ — изоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$.
Множество всех автоморфизмов $\mathfrak{A}$ обозначается за $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$.

*Замечание.* Интуитивно автоморфизмы — абстрактный аналог симметрий.
Также над $\mathrm{Aut}(A)$ можно естественным образом задать структуру группы, где роль бинарной операции играет композиция.

*Пример* 14. Пусть $\xi$ — произвольный автоморфизм стандартной модели $\mathfrak{R}$ арифметики. Тогда

$$\xi(0) = 0, \quad \xi(1) = s^{\mathfrak{R}}(\xi(0)) = 1, \quad \xi(2) = s^{\mathfrak{R}}(s^{\mathfrak{R}}(\xi(0))) = 2, \ldots$$

Значит $\xi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Стало быть, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{R}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

*Пример* 15. Обозначим через $\mathfrak{R}_<$ стандартный ЧУМ с носителем $\mathbb{N}$. Пусть $\xi$ — произвольный автоморфизм $\mathfrak{R}_<$. Нетрудно понять, что:

$$\begin{aligned}
\xi(\mathrm{least}(\mathbb{N})) &= \mathrm{least}(\mathbb{N});\\
\xi(\mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{0\})) &= \mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{\xi(0)\});\\
\xi(\mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})) &= \mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{\xi(0),\xi(1)\});\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Отсюда мы получаем:

$$\begin{aligned}
&\xi(0) = \mathrm{least}(\mathbb{N}) = 0;\\
&\xi(1) = \mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{\xi(0)\}) = 1;\\
&\xi(2) = \mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{\xi(0),\xi(1)\}) = 2;\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Значит, $\xi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Стало быть, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{R}_<) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

*Пример* 16 (со схемой решения). Обозначим через $\mathfrak{D}$ нестрогий ЧУМ с носителем $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, в котором $\leqslant$ интерпретируется как отношение делимости. Заметим, что

- всякий автоморфизм $\mathfrak{D}$ переводит элементы $\mathbb{P}$ в элементы $\mathbb{P}$;
- каждую биекцию из $\mathbb{P}$ в $\mathbb{P}$ можно единственным образом расширить до автоморфизма $\mathfrak{D}$.

Отсюда нетрудно получить, что $\mathrm{Aut}(\mathfrak{D})$ фактически состоит из перестановок $\mathbb{P}$, а точнее, из их расширений.

*Пример* 17 (в качестве дополнительного упражнения). Для стандартной модели $\mathfrak{G}$ геометрии всякий автоморфизм представим в виде композиции движения и гомотетии.

## 0.6 Язык кванторной классической логики (Quantifier Classic Logic, QCL)

**Определение 23.** Пусть (навсегда) зафиксировано некоторое счётное множество Var. Будем называть его элементы *предметными переменными* или просто *переменными*.

Пусть дана сигнатура $\sigma$. Алфавит $\mathscr{L}_\sigma$ квантовой классической логики над $\sigma$ состоит из элементов $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma \cup \mathrm{Var}$, а также:

- символов связок: “$\to$”, “$\wedge$”, “$\vee$” и “$\neg$”,
- символов кванторов: “$\forall$” и “$\exists$”,
- и вспомогательных символов: “(”, “)” и “,”.

Для каждого $x \in \mathrm{Var}$ слова “$\forall x$” и “$\exists x$” называются *кванторами по $x$*.

Обозначим за $\mathrm{Term}_\sigma$ наименьшее подмножество $\mathscr{L}_\sigma^*$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $x \in \mathrm{Var}$, то $x \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $c \in \mathrm{Const}$, то $c \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1,\ldots,t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то $f(t_1,\ldots,t_n) \in \mathrm{Term}_\sigma$.

Элементы $\mathrm{Term}_\sigma$ называются *σ-термами.*

*Пример* 18. Пусть $\sigma$ — сигнатура стандартной модели арифметики. Тогда

$$+(s(+(x,y)), \cdot(s(x),y))$$

является $\sigma$-термом, который удобнее записать как $s(x+y)+s(x)\cdot y$.

**Определение 24.** Обозначим за $\mathrm{Form}_\sigma$ наименьшее подмножество $\mathscr{L}_\sigma^*$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Form}_\sigma$;
- если $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$, то $\{(\Phi \to \Psi), (\Phi \wedge \Psi), (\Phi \vee \Psi), \neg\Phi\} \in \mathrm{Form}_\sigma$;
- если $\Phi \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$, то $\{\forall x\ \Phi, \exists x\ \Phi\} \in \mathrm{Form}_\sigma$.

Элементы $\mathrm{Form}_\sigma$ называются *σ-формулами.*

Под *атомарными σ-формулами*, или *σ-атомами*, понимают те, что не содержат ни символов связок ни символов кванторов. Множество всех $\sigma$-атомов обозначается за $\mathrm{Atom}_\sigma$.

**Определение 25.** Для любого $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ определим

$$\mathrm{sub}(t) := \{s \in \mathrm{Term}_\sigma \mid s \preccurlyeq t\}.$$

Элементы $\mathrm{sub}(t)$ называются *подтермами* $t$.

Для любого $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ определим

$$\mathrm{Sub}(\Phi) := \{\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma \mid \Psi \preccurlyeq \Phi\}.$$

Элементы $\mathrm{Sub}(\Phi)$ называются *подформулами* $\Phi$.

**Лемма 22.** *Пусть* $\{s,t\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$ *таковы, что* $t \sqsubseteq s$. *Тогда* $t = s$.

**Теорема 23** (о единственности представления термов)**.** *Всякий* $t \in \mathrm{Term}_\sigma \setminus (\mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma)$ *можно единственным образом представить в виде*

$$f(t_1, \ldots, t_n),$$

*где* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ *и* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$.

**Лемма 24.** *Пусть* $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ *и* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$. *Тогда всякое вхождение* $f$ *в* $t$ *является началом вхождения некоторого подтерма.*

**Теорема 25** (о подтермах)**.** *Пусть* $t \in \mathrm{Term}_\sigma$.

1. *Если* $t \in \mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma$, *то* $\mathrm{sub}(t) = \{t\}$.
2. *Если* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, *где* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ *и* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, *то*

$$\mathrm{sub}(t) = \mathrm{sub}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{sub}(t_n) \cup \{t\}$$

**Теорема 26** (о единственности представления атомов)**.** *Всякий* $\Phi \in \mathrm{Atom}_\sigma$ *можно единственным способом представить в виде*

$$P(t_1, \ldots, t_n),$$

*где* $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(P) = n$ *и* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$.

**Лемма 27.** *Пусть* $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ *таковы, что* $\Phi \sqsubseteq \Psi$. *Тогда* $\Phi = \Psi$.

**Теорема 28.** *Всякую* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma \setminus \mathrm{Atom}_\sigma$ *можно единственным образом представить в виде*

$$(\Theta \to \Omega), \quad (\Theta \wedge \Omega), \quad (\Theta \vee \Omega), \quad \neg\Theta, \quad \forall x\ \Theta \text{ или } \exists x\ \Theta,$$

*где* $\{\Theta; \Omega\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$.

**Лемма 29.** *Пусть* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$. *Тогда всякое вхождение "*$\neg$*", "(", "*$\forall$*" или "*$\exists$*" в* $\Phi$ *является началом вхождения некоторой подформулы.*

**Теорема 30** (о подформулах)**.** *Пусть* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$.

1. *Если* $\Phi \in \mathrm{Atom}_\sigma$, *то* $\mathrm{Sub}(\Phi) = \{\Phi\}$.

2. *Если* $\Phi = (\Theta \circ \Omega)$, *где* $\{\Theta, \Omega\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$, *то*

$$\mathrm{Sub}(\Phi) = \mathrm{Sub}(\Theta) \cup \mathrm{Sub}(\Omega) \cup \{\Phi\}.$$

3. *Если* $\Phi = \neg\Theta$, *где* $\Theta \in \mathrm{Form}_\sigma$, *то*

$$\mathrm{Sub}(\Phi) = \mathrm{Sub}(\Theta) \cup \{\Phi\}.$$

4. *Если* $\Phi = Qx\ \Theta$, *где* $x \in \mathrm{Var}$, $\Theta \in \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $Q \in \{\forall, \exists\}$, *то*

$$\mathrm{Sub}(\Phi) = \mathrm{Sub}(\Theta) \cup \{\Phi\}.$$

**Определение 26.** Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ и $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Каждое вхождение $Qx$ в $\Phi$ является началом вхождения некоторой подформулы, причём единственного. Его называют *областью действия* данного вхождения $Qx$.

Вхождение $x$ в $\Phi$ называется *связанным*, если оно входит в область действия какого-нибудь вхождения $\forall x$ или $\exists x$, и *свободными* иначе.

Далее, говорят, что $x$ является *свободной переменной в* $\Phi$, если у $x$ есть хотя бы одно свободное вхождение в $\Phi$. Множество свободных переменных $\Phi$ обозначается за $\mathrm{FV}(\Phi)$.

Интуитивно элементы $\mathrm{FV}(\Phi)$ играют роль параметров $\Phi$. Запись $\Phi(x_1, \ldots, x_l)$ указывает на то, что $\mathrm{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_l\}$.

Наконец, обозначим

$$\mathrm{Sent}_\sigma := \{\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma \mid \mathrm{FV}(\Phi) = \varnothing\}.$$

Элементы $\mathrm{Sent}_\sigma$ называют *σ-предложениями*, реже — *замкнутыми σ-формулами*. Они могут выступать в качестве нелогических аксиом.

*Пример* 19. Пусть $\sigma$ — сигнатура арифметики. Рассмотрим $\sigma$-формулу

$$\Phi := \forall x\ \exists y\ x = y + 0 \cdot u \wedge \forall y\ \exists u\ x + u = y.$$

Тогда $\mathrm{FV}(\Phi) = \{u; x\}$. Тут мы можем написать $\Phi(u, x)$ или $\Phi(x, u)$; также приемлемы "избыточные" $\Phi(u, x, y)$ или $\Phi(x, u, v)$ и т.п.

*Пример* 20. Пусть $\sigma$ — сигнатура (строгих) ЧУМ. В таком случае под *аксиомами ЧУМ* понимают следующие предложения:

1. $\forall x\ \neg(x < x)$;

2. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x < y \wedge y < z \to x < z)$.

Интуитивно $\sigma$-структура является ЧУМ, если и только если она удовлетворяет этим аксиомам.

**Определение 27.** Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ и $t \in \mathrm{Term}_\sigma$. Обозначим

$$\Phi(x/t) := \begin{array}{c}\text{результат одновременной замены всех}\\ \text{свободных вхождений } x \text{ в } \Phi \text{ на } t.\end{array}$$

*Замечание.* Применение этой операции порой приводит к весьма нежелательным последствиям. Так, $\sigma$-формулы вида

$$\forall x\ \Phi \to \Phi(x/t)$$

кажутся истинными, но при

$$\sigma := \langle <^2 \rangle, \quad \Phi := \exists y\ x < y \quad \text{и} \quad t := y$$

мы получаем

$$\forall x\ \exists y\ x < y \to \exists y\ y < y.$$

Кроме того, $\sigma$-формулы вида

$$\Phi(x/t) \to \exists x\ \Phi$$

кажутся истинными, но при

$$\sigma := \langle =^2 \rangle, \quad \Phi := \forall y\ x = y \quad \text{и} \quad t := y$$

мы получаем

$$\forall y\ y = y \to \exists x\ \forall y\ x = y.$$

Поэтому с подстановками нужно быть аккуратнее.

**Определение 28.** Мы будем говорить, что $t$ *свободен для (подстановки вместо) $x$ в $\Phi$*, если ни одно из свободных вхождений $x$ в $\Phi$ не находится в области действия квантора по переменной $t$.

*Замечание* 3. В частности, всякая переменная, не присутствующая в $\Phi$, является свободной для подстановки вместо всякой другой переменой в $\Phi$.

## 0.7 Семантика кванторной классической логики

**Определение 29.** *Означивание переменных в $\mathfrak{A}$*, или просто *означинвание в $\mathfrak{A}$* — функция из Var в $A$.

Каждое означивание $\nu$ в $\mathfrak{A}$ можно расширить до $\overline{\nu} : \mathrm{Term}_\sigma \to A$ естественным образом:

1. $\forall x \in \mathrm{Var} \qquad \overline{\nu}(x) = \nu(x)$;

2. $\forall c \in \mathrm{Const}_\sigma \qquad \overline{\nu}(c) = c^{\mathfrak{A}}$;

3. Для всякого $n$-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ и всяких $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$

$$\overline{\nu}(\text{“}f(t_1, \ldots, t_n)\text{”}) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)).$$

В дальнейшем для любых $x \in \mathrm{Var}$ и $a \in A$ через $\nu^x_a$ будет обозначаться означивание

$$\nu^x_a(y) := \begin{cases} \nu(y) & \text{если } y \neq x \\ a & \text{если } yx \end{cases}$$

**Определение 30.** Пусть дано означивание $\nu$ в $\mathfrak{A}$. Определим $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu]$ индукцией по построению $\Phi$:

1. для всякого $n$-местного предиката $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ и всяких $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$
$$\mathfrak{A} \Vdash P(t_1, \ldots, t_n)[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad (\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}};$$
2. для всяких $\{\Psi, \Theta\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$
$$\mathfrak{A} \Vdash (\Psi \to \Theta)[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \nVdash \Psi[\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \Vdash \Theta[\nu];$$
3. для всяких $\{\Psi, \Theta\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$
$$\mathfrak{A} \Vdash (\Psi \wedge \Theta)[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Psi[\nu] \text{ и } \mathfrak{A} \Vdash \Theta[\nu];$$
4. для всяких $\{\Psi, \Theta\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$
$$\mathfrak{A} \Vdash (\Psi \vee \Theta)[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Psi[\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \Vdash \Theta[\nu];$$
5. для всякого $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$
$$\mathfrak{A} \Vdash \neg\Psi[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \nVdash \Psi[\nu];$$
6. для всякого $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и всякого $x \in \mathrm{Var}$
$$\mathfrak{A} \Vdash \exists x\ \Psi[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Psi[\nu^x_a] \text{ для некоторого } a \in A;$$
7. для всякого $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и всякого $x \in \mathrm{Var}$
$$\mathfrak{A} \Vdash \forall x\ \Psi[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Psi[\nu^x_a] \text{ для всех } a \in A.$$

Когда $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu]$, мы будем говорить, что $\Phi$ *истинно в* $\mathfrak{A}$ *при* $\nu$, или $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет* $\Phi$ *при* $\nu$.

*Замечание* 4. (Не)верность $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu]$ не зависит от того, какие значения $\nu$ сопоставляет элементам $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{FV}(\Phi)$.

**Определение 31.** Если $\Phi$ имеет вид $\Phi(x_1, \ldots, x_l)$, т.е. $\mathrm{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_l\}$, то вместо $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu]$ нередко пишут
$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[x_1/\nu(x_1), \ldots, x_l/\nu(x_l)],$$
или же
$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu(x_1), \ldots, \nu(x_l)].$$
В частности, для $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$ обычно используется запись $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$.

Наконец, пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ *является моделью* $\Gamma$, и пишут $\mathfrak{A} \Vdash \Gamma$, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$ для всех $\Phi \in \Gamma$.

**Теорема 31.** *Пусть $\xi$ — изоморфизм $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.*

1. *Для любого означивания $\nu$ в $\mathfrak{A}$ $\nu \circ \xi$ является означиванием $\mathfrak{B}$.*
2. *Для каждого $\sigma$-терма $t$ и любого означивания $\nu$ в $\mathfrak{A}$*
$$\overline{\nu \circ \xi}(t) = \xi(\overline{\nu}(t)),$$
*т.е. $\overline{\nu \circ \xi} = \overline{\nu} \circ \xi$.*

3. *Для каждой $\sigma$-формулы $\Phi$ и любого означивания $\nu$ в $\mathfrak{A}$*

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi[\nu \circ \xi].$$

**Доказательство.**

TODO (А надо ли?)

1. Очевидно.

2. Очевидно получается из простой индукции по построению $t$.

3. Очевидно получается из простой индукции по построению $\Phi$.

$\square$

**Определение 32.** Для произвольного класса $\sigma$-структур $\mathcal{K}$ положим

$$\mathrm{Th}(\mathcal{K}) := \{\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ для всех } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}$$

Вместо $\mathrm{Th}(\{\mathfrak{A}\})$ обычно пишут $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *элементарно эквивалентны*, если $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

**Лемма 32.** *Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.*

**Определение 33.** Пусть дана произвольная $\sigma$-структура $\mathfrak{A}$.

$S \subseteq A^l$ *определимо в* $\mathfrak{A}$, если существует $\sigma$-формула $\Phi(x_1, \ldots, x_l)$, что

$$S = \{\overrightarrow{a} \in A^l \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\overrightarrow{a}]\};$$

в этом случае ещё говорят, что $\Phi$ определяет $S$ в $\mathfrak{A}$.

$\xi : A^l \to A$ *определима в* $\mathfrak{A}$, если определим её график. $a \in A$ *определим в* $\mathfrak{A}$, если $\{a\}$ определимо.

*Пример* 21. Отношение делиммости на $\mathbb{N}$ определимо в $\mathfrak{N}$ посредством формулы

$$\Phi(x, y) := x \neq 0 \wedge \exists u \ x \cdot u = y,$$

а обычный строгий порядок на $\mathbb{N}$ — посредством

$$\Psi(x, y) := \exists u \ (u \neq 0 \wedge x + u = y).$$

*Пример* 22. Функция последователя на $\mathbb{N}$ определима в $\mathfrak{N}_<$ посредством

$$x < y \wedge \neg \exists u \ (x < u \wedge u < y).$$

*Пример* 23. В стандартном кольце $\mathfrak{Z}$ с носителем $\mathbb{Z}$ будет определимо отношение “быть больше нуля”; тут можно использовать

$$\Phi(x) := x \neq 0 \wedge \exists u_1, u_2, u_3, u_4 \ (x = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2),$$

а потому обычный строгий порядок на $\mathbb{Z}$ определим в $\mathfrak{Z}$ посредством

$$\Psi(x, y) := \exists u \ (\Phi(u) \wedge x + u = y).$$

*Пример* 24. Обычный строгий порядок на $\mathbb{R}$ определим в стандартном кольце $\mathfrak{R}$ с носителем $\mathbb{R}$ посредством

$$\Theta(x, y) := \exists u\ (u \neq 0 \wedge x + u^2 = y).$$

*Пример* 25. Рассмотрим стандартную модель $\mathfrak{G}$ геометрии. В ней определимы отношения

- "$x$ лежит на прямой $yz$" посредством

$$\Phi(x, y, z) := B(x, y, z) \vee B(z, x, y) \vee B(y, z, x)$$

- и "прямые $xx'$ и $yy'$ параллельны" посредством

$$\Psi(x, x', y, y') := x \neq x' \wedge y \neq y' \wedge \neg\exists u\ (\Phi(u, x, x') \wedge \Phi(u, y, y')).$$

При этом аксиому о параллельности можно выразить так:

$$\mathrm{Euclid}_5 := \forall x, y, z\ (x \neq y \wedge \neg\Phi(z, x, y) \to \forall u, v\ (\Psi(z, u, x, y) \wedge \Psi(z, v, x, y) \to \Phi(z, u, v)))$$

Она будет истина в $\mathfrak{G}$, но ложна в модели $\mathfrak{H}$.

*Пример* 26 (без доказательства). Рассмотрим структуру $\langle\mathbb{N}; |; s\rangle$, где $|$ интерпретируется как отношение делимости на $\mathbb{N}$. Ноль определим в этой структуре посредством

$$\Phi(x) := \neg x \mid x,$$

а отношение равенства на $\mathbb{N}$ — посредством

$$\Psi(x, y) := (\Phi(x) \wedge \Phi(y)) \vee (x \mid y \wedge y \mid x).$$

Джулией Робинсон было доказано, что

> функции сложения и умножения на $\mathbb{N}$ определимы в $\langle\mathbb{N}; |; s\rangle$.

*Пример* 27 (без доказательства). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\mathrm{supp}(n) := \text{множество всех простых делителей } n.$$

Гипотеза Эрдёша-Вудса заключается в следующем.

> Найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$ из
>
> $$\mathrm{supp}(i + n) = \mathrm{supp}(j + n) \text{ для всех } n \in \{0, \ldots, N\}$$
>
> следует, что $i = j$.

Это известная открытая проблема.

Теперь рассмотрим $\langle\mathbb{N}; \perp; s\rangle$, где $\perp$ интерпретируется как отношение взаимной простоты на $\mathbb{N}$. Джоном Вудсом было показано, что TFAE:

- отношение равенства на $\mathbb{N}$ определимо в $\langle\mathbb{N}; \perp; s\rangle$;
- функции сложения и умножения на $\mathbb{N}$ определимы в $\langle\mathbb{N}; =, \perp; s\rangle$;
- верна гипотеза Эрдёша-Вудса.

*Пример* 28. Известно, что

- всякое (вычислимо) перечислимое множество определимо в $\mathfrak{N}$;

- всякая частичная вычислимая функция определима в $\mathfrak{N}$.

Например, $f : n \mapsto 2^n$ оказывается определима в $\mathfrak{N}$.

Этот пример связан со знаменитыми теоремами Гёделя о неполноте "достаточно богатых систем".

**Теорема 33.** *Пусть $S$ определимо в $\mathfrak{A}$. Тогда для любого $\xi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$*

$$\xi[S] \subseteq S,$$

*т.е. $S$ замкнуто относительно автоморфизмов $\mathfrak{A}$.*

**Доказательство.** Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_l)$ — формула, задающая $S$ в $\mathfrak{A}$ и $(a_1, \ldots, a_l)$ — случайный элемент $A^l$. Из теоремы 31 следует, что

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[a_1, \ldots, a_l] \iff \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\xi(a_1), \ldots, \xi(a_l)]$$

Следовательно, $(\xi(a_1), \ldots, \xi(a_l)) \in S$. Поэтому $\xi[S] \subseteq S$. □

**Следствие 33.1.** *В терминах предыдущей теоремы*

$$\xi[S] = S.$$

*Замечание* 5. Это даёт необходимое, но далеко не достаточное условие определимости. Так если $\mathrm{Form}_\sigma$ счётно, $A$ бесконечно и $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) = \{\mathrm{id}_A\}$, то:

- всякое $S \subseteq A^l$ замкнуто относительно автоморфизмов $\mathfrak{A}$;

- множество всех определимых в $\mathfrak{A}$ множеств не больше $|\mathrm{Form}_\sigma|$, т.е. не более чем счётно;

- значит, существует $2^{|A|}$ замкнутых относительно автоморфизмов $\mathfrak{A}$, но не определимых в $\mathfrak{A}$ множеств.

Конкретным примером $\mathfrak{A}$ может служить $\mathfrak{N}_<$.

*Пример* 29. В $\langle \mathbb{Z}; =; + \rangle$ неопределимо обычное отношение порядка на $\mathbb{Z}$, так как $\xi : a \mapsto -a$ является автоморфизмом данной структуры, нарушающим это отношение.

*Пример* 30. С другой стороны, в $\langle \mathbb{Z}; < \rangle$ уже не определима функция сложения на $\mathbb{Z}$, так как $\xi : a \mapsto a+1$ является автоморфизмом данной структуры, несохраняющим данное эту функцию.

*Пример* 31. В $\mathfrak{D}$ нельзя определить никакой элемент, кроме 1.

*Пример* 32 (см. упражнение 17). В $\mathfrak{G}$ нельзя определить:

- никакую конкретную фигуру за исключением $\varnothing$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

- отношение "длина отрезка $xy$ равна единице";

- отношение "вершины треугольника $xyz$ обходятся против часовой стрелки".

**Определение 34.** Пусть $=$ содержится в $\mathrm{Pred}_\sigma$, причём $\mathrm{arity}_\sigma(=) = 2$. $\sigma$-структуру $\mathfrak{A}$ называют *нормальной*, если $=$ интерпретируется в $\mathfrak{A}$ как настоящее равенство, т.е. $=^{\mathfrak{A}}$ совпадает с $\mathrm{id}_A$.

*Замечание* 6. С практической точки зрения, если мы работаем в рамках фиксированного языка, начинает стираться грань между:

- *настоящим равенством*, для разговора о котором необходимо выйти за пределы данного языка;
- *неразличимостью средствами языка.*

В математике роль отношения равенства нередко играет отношение эквивалентности специального типа.

**Определение 35.** Обозначим через $\mathrm{Eq}_\sigma$ множество, состоящее из $\sigma$-предложений

- $\forall x\ x = x$,
- $\forall x\ \forall y\ (x = y \to y = x)$,
- $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x = y \land y = z \to x = z)$,

а также всех $\sigma$-предложений видов

- $\forall x_1\ \forall y_1\ \dots \forall x_n\ \forall y_n\ (x_1 = y_1 \land \dots \land x_n = y_n \to (P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \dots, y_n)))$, где $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(P) = n$,
- $\forall x_1\ \forall y_1\ \dots \forall x_m\ \forall y_m\ (x_1 = y_1 \land \dots \land x_m = y_m \to f(x_1, \dots, x_m) = f(y_1, \dots, y_m))$, где $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = m$.

Под *аксиомами равенства для* $\sigma$ понимают элементы $\mathrm{Eq}_\sigma$.

*Замечание* 7. Разумеется, $\mathfrak{A} \Vdash \mathrm{Eq}_\sigma$ для всякой нормальной $\sigma$-структуры $\mathfrak{A}$.

**Определение 36.** Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная модель $\mathrm{Eq}_\sigma$.

Очевидно, $=^{\mathfrak{A}}$ будет отношением эквивалентности на $A$. Обозначим через $\mathfrak{A}'$ нормальную $\sigma$-структуру с носителем $A/{=_{\mathfrak{A}}}$, что:

- для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$
$$c^{\mathfrak{A}'} := [c^{\mathfrak{A}}];$$
- для любого $m$-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$
$$f^{\mathfrak{A}'}([a_1], \dots, [a_m]) := [f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m)];$$
- для любого $n$-местного $P \in \mathrm{Func}_\sigma$
$$([a_1], \dots, [a_m]) \in P^{\mathfrak{A}'} \quad :\Longleftrightarrow \quad (a_1, \dots, a_m) \in f^{\mathfrak{A}}.$$

(Здесь $[a]$ — класс эквивалентности $a$ по $=^{\mathfrak{A}}$.) Корректность данного определения обеспечивают аксиомы равенства для $\sigma$.

**Теорема 34.** *Для любых $\sigma$-формулы $\Phi$ и означивания $\nu$ в $\mathfrak{A}$*

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}' \Vdash \Phi[\nu'],$$

*где $\nu' : x \mapsto [\nu(x)]$.*

**Теорема 35.**

1. *Для любого означивания $\nu$ в $\mathfrak{A}$ $\nu'$ является означиванием в $\mathfrak{A}'$.*

2. *Для каждого $\sigma$-терма $t$ и любого означивания $\nu$ в $\mathfrak{A}$*

$$\overline{\nu'}(t) = [\overline{\nu}(t)].$$

3. *Для каждой $\sigma$-формулы $\Phi$ и любого означивания $\nu$ в $\mathfrak{A}$*

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}' \Vdash \Phi[\nu'].$$

**Доказательство.**

TODO (А надо ли?)

1. Очевидно.
2. Очевидно получается из простой индукции по построению $t$.
3. Очевидно получается из простой индукции по построению $\Phi$.

□

**Следствие 35.1.** *Для каждого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ TFAE:*

- *у $\Gamma$ есть нормальная модель;*
- *у $\Gamma \cup \mathrm{Eq}$ есть модель.*

Отныне будет предполагаться, что все рассматриваемые $\sigma$-структуры нормальны, если явным способом не оговорено обратное.

**Определение 37.** $\sigma$-формулу называют:

- *выполнимой*, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu]$ для некоторых $\mathfrak{A}$ и $\nu$;
- *общезначимой*, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu]$ для всех $\mathfrak{A}$ и $\nu$.

Здесь подразумевается, что $\mathfrak{A}$ бегает по $\sigma$-структурам, тогда как $\nu$ — по означиваниям в $\mathfrak{A}$.

*Замечание* 8. Очевидно, что

$$\Phi \text{ общезначима} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\Phi \text{ не выполнима.}$$

**Теорема 36** (Чёрча; должно быть на старших курсах)**.** *Проблема выполнимости для кванторной классической логики в сигнатуре $\langle R^2 \rangle$ алгоритмически неразрешима.*

**Определение 38.** Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, и $x_1, \ldots, x_l$ суть в точности все элементы $\mathrm{FV}(\Phi)$ в порядке появления в $\Phi$. Обозначим

$$\widetilde{\forall}\Phi := \forall x_1 \ \ldots \forall x_l \ \Phi \quad \text{ и } \quad \widetilde{\exists}\Phi := \exists x_1 \ \ldots \exists x_l \ \Phi$$

Тогда $\widetilde{\forall}\Phi$ называют *универсальным замыканием* $\Phi$, а $\widetilde{\exists}\Phi$ — *экзистенциальным замыканием* $\Phi$.

*Замечание* 9. Ясно, что для каждой $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu] \text{ для всех } \nu;$$
$$\mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\exists}\Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu] \text{ для некоторого } \nu.$$

Стало быть, имеют место следующие эквивалентности:

$$\Phi \text{ выполнима} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\exists}\Phi \text{ для некоторой } \mathfrak{A};$$
$$\Phi \text{ общезначима} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi \text{ для всех } \mathfrak{A}.$$

**Определение 39.** Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$. Говорят, что $\Phi$ *семантически следует из* $\Gamma$, и пишут $\Gamma \vDash \Phi$, если для любой $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \Vdash \Gamma \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi.$$

Вместо $\varnothing \vDash \Phi$ обычно пишут $\vDash \Phi$.

Формулы $\Phi$ и $\Psi$ называются *семантически эквивалентными*, если $\vDash \Phi \leftrightarrow \Psi$; при этом пишут $\Phi \equiv \Psi$.

*Замечание* 10. Очевидно

$$\vDash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \text{ общезначима.}$$

*Пример* 33. Для любых $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$

$$\neg\forall x\Phi \equiv \exists x\neg\Phi \quad \text{и} \quad \neg\exists x\Phi \equiv \forall x\neg\Phi.$$

**Определение 40.** $\sigma$-формула называется *бескванторной*, если $\forall \not\preccurlyeq \Phi$ и $\exists \not\preccurlyeq \Phi$.

Под *пренексными нормальными формами (ПНФ)* понимаются $\sigma$-формулы вида

$$Q_1 x_1 \ \ldots Q_l x_l \ \Psi,$$

где $\{Q_1, \ldots, Q_l\} \subseteq \{\forall, \exists\}$, $\{x_1, \ldots, x_l\} \subseteq \mathrm{Var}$ и $\Psi$ бескванторная.

**Упражнение 2.** Всякая $\sigma$-формула семантически эквивалентна некоторой ПНФ.

## 0.8 Гильбертовское исчисление для кванторной классической логики

**Определение 41.** Рассмотрим следующие аксиомы:

I1. $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$;

I2. $(\Phi \to (\Psi \to \Theta)) \to ((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta))$;

C1. $\Phi \wedge \Psi \to \Phi$;

C2. $\Phi \wedge \Psi \to \Psi$;

C3. $\Phi \to (\Psi \to \Phi \wedge \Psi)$;

D1. $\Phi \to \Phi \vee \Psi$;

D2. $\Psi \to \Phi \vee \Psi$;

D3. $(\Phi \to \Theta) \to ((\Psi \to \Theta) \to (\Phi \vee \Psi \to \Theta))$;

N1. $(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi)$;

N2. $\neg\Phi \to (\Phi \to \Psi)$;

N3. $\Phi \vee \neg\Phi$;

Q1. $\forall x\ \Phi \to \Phi(x/t)$, где $t$ свободен для $x$ в $\Phi$;

Q2. $\Phi(x/t) \to \exists x\ \Phi$, где $t$ свободен для $x$ в $\Phi$.

Кроме того, в случаях, когда $=$ содержится в $\mathrm{Pred}_\sigma$, элементы $\mathrm{Eq}_\sigma$ также будут считаться аксиомами нашего исчисления.

Помимо них у нас имеется правило “modus ponens”, т.е.

$$\frac{\Phi \qquad \Phi \to \Psi}{\Psi}\,(\mathrm{MP})$$

и добавляются два новых “кванторных” правила вывода:

$$\frac{\Phi \to \Psi}{\Phi \to \forall x\ \Psi}\ (\mathrm{BR1}) \qquad \text{и} \qquad \frac{\Phi \to \Psi}{\exists x\ \Phi \to \Psi}\ (\mathrm{BR2})$$

где $x \notin \mathrm{FV}(\Psi)$. Он традиционно называются *правилами Бернайса.*

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. *Вывод из* $\Gamma$ в данном гильбертовском исчислении — конечная последовательность

$$\Phi_0, \ldots, \Phi_n$$

(где $n \in \mathbb{N}$) элементов $\mathrm{Form}_\sigma$, что для каждого $i \in \{0; \ldots; n\}$ верно одно из следующих условий:

- $\Phi_i$ есть аксиома;
- $\Phi_i$ является элементом $\Gamma$;
- существуют $\{j; k\} \subseteq \{0; \ldots; i-1\}$ такие, что $\Phi_k = \Phi_j \to \Phi_i$;
- существует $j \in \{0; \ldots; i-1\}$ такое, что $\Phi_i$ получается из $\Phi_j$ по BR1 или по BR2.

При этом $\Phi_n$ называется *заключением* рассматриваемого вывода, а элементы $\Gamma$ — его *гипотезами.*

Для $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ запись $\Gamma \vdash \Phi$ означает, что существует вывод из $\Gamma$ с заключением $\Phi$. Вместо $\varnothing \vdash \Phi$ обычно пишут $\vdash \Phi$.

**Определение 42.** Пусть даны $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$.

- $\Phi$ *опровержима в* $\Gamma$, если $\Gamma \vdash \neg\Phi$.
- $\Phi$ *независима от* $\Gamma$, если $\Gamma \nvdash \Phi$ и $\Gamma \nvdash \neg\Phi$.

*Пример* 34. Благодаря трудам Коэна и Гёделя мы знаем, что:

- C независима от ZF, а CH— от ZFC;
- в частности, $\neg$C не опровержимо в ZF, а $\neg$CH — в ZFC.

Разумеется, тут предполагается непротиворечивость соответственно ZF и ZFC, поскольку иначе выводимо всё, что угодно.

**Лемма 37.**

1. **Монотонность.** *Если* $\Gamma \subseteq \Delta$ *и* $\Gamma \vdash \Phi$*, то* $\Delta \vdash \Phi$.
2. **Транзитивность.** *Если для всякого* $\Psi \in \Gamma$ *верно* $\Delta \vdash \Psi$ *и* $\Gamma \vdash \Phi$*, то* $\Delta \vdash \Phi$.
3. **Компактность.** *Если* $\Gamma \vdash \Phi$*, то для некоторого конечного* $\Delta \subseteq \Gamma$ *верно* $\Delta \vdash \Phi$.

*Замечание.* Однако стоит помнить, что $\Gamma$ и $\Delta$ представляют собой множества $\sigma$-предложений, т.е. у их элементов нет свободных переменных.

**Доказательство.**

1. Рассматривая вывод $\Phi$ из $\Gamma$, сиюминутно получаем вывод $\Phi$ из $\Delta$.
2. Возьмём вывод $\Phi$ из $\Gamma$. Рассмотрим все использованные утверждения $\Gamma$ в этом выводе; получим конечное множество $\Gamma'$. Далее для всякого $\Psi \in \Gamma'$ рассмотрим вывод $\Psi$ из $\Delta$, сотрём $\Psi$ на конце этого вывода и припишем его в начало ранее рассмотренного вывода $\Phi$. Тогда несложно понять, что мы получаем вывод $\Phi$ из $\Delta$.

3. Хватает просто взять в качестве $\Delta$ множество всех формул из $\Gamma$, использованных в каком-то конкретном выводе $\Phi$ из $\Gamma$. Тогда очевидно, что $\Delta$ конечно, а рассмотренный вывод станет выводом $\Phi$ из $\Delta$.

$\square$

**Определение 43.** Пусть $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$. Для всякой пропозициональной формулы $\varphi$ обозначим

$$\xi\varphi := \begin{array}{c}\text{результат замены (всех вхождений)}\\ \text{каждой } p \in \mathrm{Prop} \text{ в } \varphi \text{ на } \xi(p).\end{array}$$

Также для удобства для всякого $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ определим $\xi\Gamma := \{\xi\psi \mid \psi \in \Gamma\}$

*Замечание.* $\xi\varphi$ есть $\sigma$-формула.

**Лемма 38.** *Пусть* $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$. *Тогда*

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \xi\Gamma \vdash \xi\varphi.$$

*Замечание.* $\Gamma \vdash \varphi$ рассматривается в пропозициональном исчислении, а $\xi\Gamma \vdash \xi\varphi$ — в кванторном.

**Доказательство.** Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\varphi_0, \ldots, \varphi_n$$

$\varphi$ из $\Gamma$ (в пропозициональном исчислении), и рассмотрим последовательность

$$\xi\varphi_0, \ldots, \xi\varphi_n.$$

Покажем индукцией по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $\xi\varphi_0, \ldots, \xi\varphi_i$ является выводом из $\xi\Gamma$ (в кванторном исчислении).

Возможны следующие случаи.

- $\varphi_i$ — аксиома. Тогда $\xi\varphi_i$ — аксиома.
- $\varphi_i$ — элемент $\Gamma$. Тогда $\xi\varphi_i$ — элемент $\xi\Gamma$.
- $\varphi_i$ получается из предшествующих $\varphi_j$ и $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ по MP. Тогда $\xi\varphi_i$ получается из предшествующих $\xi\varphi_j$ и $\xi\varphi_k = \xi\varphi_j \to \xi\varphi_i$ по MP.

Стало быть, $\xi\Gamma \vdash \xi\varphi_i$ для всех $i \in \{0, \ldots, n\}$. В частности для $i = n$ мы имеем, что $\xi\Gamma \vdash \xi\varphi$. $\square$

**Следствие 38.1.** *В терминах доказанной теоремы, предполагая* $\Gamma = \varnothing$, *получаем, что*

$$\vdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \vdash \xi\varphi.$$

**Следствие 38.2.** *Пусть* $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$, $\varphi \in \mathrm{Form}$ *и* $\vDash \varphi$ *(в смысле проп. логики). Тогда* $\vdash \xi\varphi$.

*Пример* 35. Так, в нашем первопорядковом исчислении окажутся выводимы

$$\Phi \to \Phi, \quad \Phi \to \neg\neg\Phi \quad \text{и} \quad \neg\neg\Phi \to \Phi$$

для произвольной $\sigma$-формулы $\Phi$.

*Пример* 36. Пусть переменная $y$ не входит в $\sigma$-формулу $\Phi$. Тогда

$$\begin{array}{lll} 1. & \forall x\ \Phi \to \Phi(x/y) & \text{Q1} \\ 2. & \forall x\ \Phi \to \forall y\ \Phi(x/y) & \text{из 1; BR1} \end{array}$$

будет выводом из $\varnothing$. Кроме того,

$$\begin{array}{lll} 1. & \forall y\ \Phi(x/y) \to \overbrace{\Phi(x/y)(y/x)}^{\Phi} & \text{Q1} \\ 2. & \forall y\ \Phi(x/y) \to \forall x\ \Phi & \text{из 1; BR1} \end{array}$$

будет выводом из $\varnothing$. Стало быть, $\vdash \forall x\ \Phi \leftrightarrow \forall y\ \Phi(x/y)$.

*Пример* 37. Покажем, что $\vdash \exists x\ \neg\Phi \to \neg\forall x\ \Phi$:

$$\begin{array}{lll} 1. & \forall x\ \Phi \to \overbrace{\Phi(x/x)}^{\Phi} & \text{Q1} \\ 2. & (\forall x\ \Phi \to \Phi) \to (\neg\Phi \to \neg\forall x\ \Phi) & \text{тавтология} \\ 3. & \neg\Phi \to \neg\forall x\ \Phi & \text{из 1, 2; MP} \\ 4. & \exists x\ \neg\Phi \to \neg\forall x\ \Phi & \text{из 3; BR2} \end{array}$$

Заметим, что с помощью тавтологий из этого можно легко получить $\vdash \forall x\ \Phi \to \neg\exists x\ \neg\Phi$.

*Пример* 38. Пусть $\vdash \Phi \to \Psi$. Покажем, что тогда $\vdash \forall x\ \Phi \to \forall x\ \Psi$:

$$\begin{array}{lll} 1. & \forall x\ \Phi \to \Phi & \text{Q1} \\ 2. & \Phi \to \Psi & \text{предположение} \\ 3. & \forall x\ \Phi \to \Psi & \text{из 1, 2 и тавтологий; MP} \\ 4. & \forall x\ \Phi \to \forall x\ \Psi & \text{из 3; BR1} \end{array}$$

Используя C1, C2, C3, отсюда легко получить:

$$\vdash \Phi \leftrightarrow \Psi \quad \Longrightarrow \quad \vdash \forall x\ \Phi \leftrightarrow \forall x\ \Psi.$$

**Определение 44.** Для удобства введём обозначения

$$\top := \Phi_\star \to \Phi_\star \quad \text{и} \quad \bot := \neg\top,$$

где $\Phi_\star$ — фиксированное $\sigma$-предложение.

**Теорема 39.** *Для любых* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $x \in \mathrm{Var}$

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \forall x\ \Phi$$

**Доказательство.**

$\Rightarrow$) Пусть $\Gamma \vdash \Phi$.

$$\begin{array}{lll} 1. & \Phi & \text{выводится по предложению} \\ 2. & \Phi \to (\top \to \Phi) & \text{I1} \\ 3. & \top \to \Phi & \text{из 1, 2; MP} \\ 4. & \top \to \forall x\ \Phi & \text{из 3; BR1} \\ 5. & \forall x\ \Phi & \text{из 4 и тавтологий; MP} \end{array}$$

$\Leftarrow$) Пусть $\Gamma \vdash \forall x\ \Phi$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x\ \Phi$ | выводится по предложению |
| 2. | $\forall x\ \Phi \to \overbrace{\Phi(x/x)}^{\Phi}$ | Q1 |
| 3. | $\Phi$ | из 1, 2; MP |

$\square$

*Замечание* 11. Значит, мы можем дополнительно использовать *правило обобщения*:

$$\frac{\Phi}{\forall x\ \Phi}\,(\mathrm{GR})$$

Оно нередко фигурирует в альтернативных версиях гильбретовского исчисления для классической логики первого порядка.

**Следствие 39.1.** *Для любых* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \widetilde{\forall}\Phi.$$

*Замечание.* Как нетрудно убедиться, для $\vDash$ имеет место аналогичное утверждение.

**Теорема 40** (о дедукции)**.** *Для любых* $\Gamma \cup \{\Phi\} \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$*,*

$$\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi.$$

**Доказательство.**

$\Leftarrow$) Тривиально.

$\Leftarrow$) Пусть $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\Psi_0, \ldots, \Psi_n$$

$\Psi$ из $\Gamma \cup \{\Phi\}$. По индукции по $i \in \{0, \ldots, n\}$ покажем, что $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi_i$. Ввиду аналогии с пропозициальным исчислением, достаточно разобрать лишь новые случаи, относящиеся к BR1 и BR2.

- Пусть $\Psi_i = \Theta \to \forall x\ \Omega$ получается из предшествующего $\Psi_j = \Theta \to \Omega$ по BR1. Тогда можно построить такой "квазивывод" из $\Gamma$:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\Phi \to \overbrace{(\Theta \to \Omega)}^{\Psi_j}$ | предположение индукции |
| 2. | $(\Phi \to (\Theta \to \Omega)) \to (\Phi \wedge \Theta \to \Omega)$ | тавтология |
| 3. | $\Phi \wedge \Theta \to \Omega$ | из 1, 2; MP |
| 4. | $\Phi \wedge \Theta \to \forall x\ \Omega$ | из 3; BR1 |
| 5. | $(\Phi \wedge \Theta \to \forall x\ \Omega) \to (\Phi \to (\Theta \to \forall x\ \Omega))$ | тавтология |
| 6. | $\Phi \to (\Theta \to \forall x\ \Omega)$ | из 4, 5; MP |

Стало быть, $\Gamma \vdash \Phi \to (\theta \to \forall x\ \Omega)$.

- Пусть $\Psi_i = \exists x\ \Theta \to \Omega$ получается из предшествующего $\Psi_j = \Theta \to \Omega$ по BR2. Тогда можно построить такой "квазивывод" из $\Gamma$:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\Phi \to \overbrace{(\Theta \to \Omega)}^{\Psi_j}$ | предположение индукции |
| 2. | $(\Phi \to (\Theta \to \Omega)) \to (\Theta \to (\Phi \to \Omega))$ | тавтология |
| 3. | $\Theta \to (\Phi \to \Omega)$ | из 1, 2; MP |
| 4. | $\exists x\ \Theta \to (\Phi \to \Omega)$ | из 3; BR2 |
| 5. | $(\exists x\ \Theta \to (\Phi \to \Omega)) \to (\Phi \to (\exists x\ \Theta \to \Omega))$ | тавтология |
| 6. | $\Phi \to (\exists x\ \Theta \to \Omega)$ | из 4, 5; MP |

Стало быть, $\Gamma \vdash \Phi \to (\exists x\ \Theta \to \Omega)$.

В частности, при $i := n$ мы имеем $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi_n$, т.е. $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi$.

□

**Следствие 40.1.** *Для любых* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in {}_\sigma$

$$\Gamma \vdash \Phi \iff \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \Psi_i \to \Phi \text{ для некоторых } \{\Psi_1; \ldots; \Psi_n\} \subseteq \Gamma.$$

*(В случае $n = 0$ соответствующая конъюнкция отождествляется с $\top$.)*

**Лемма 41.** *Пусть* $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$, $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$. *Тогда*

$$\Gamma \vDash \varphi \implies \xi\Gamma \vDash \xi\varphi$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольные $\sigma$-структуру $\mathfrak{A}$ и означивание $\nu$ в $\mathfrak{A}$. Определим оценку

$$v(p) := \begin{cases} 1 & \text{если } \mathfrak{A} \Vdash \xi(p)[\nu] \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко видеть, что для всякой $\psi \in \mathrm{Form}$

$$v \Vdash \psi \iff \mathfrak{A} \Vdash \xi\psi[\nu];$$

это следует из простой индукции по построению $\psi$. Следовательно

$$(\forall \psi \in \Gamma \quad v \Vdash \psi) \to v \Vdash \varphi \iff (\forall \psi \in \Gamma \quad \mathfrak{A} \Vdash \xi\psi[\nu]) \to \mathfrak{A} \Vdash \xi\varphi[\nu].$$

Но по определению $\varphi$ и $\Gamma$ мы имеем, что левое утверждение выполняется всегда, а значит и правая часть выполняется всегда. Стало быть, $\xi\Gamma \vDash \xi\varphi$. □

**Лемма 42.** *Пусть $\Phi$ — аксиома кванторного исчисления. Тогда $\vDash \Phi$.*

**Доказательство.**

- Пусть $\Phi$ — пропозициональная аксиома. Тогда она имеет вид $\xi\varphi$, где $\varphi$ — аксиома пропозиционального исчисления, а $\xi$ — функция из Prop в $\mathrm{Form}_\sigma$. Тогда $\vDash \varphi$, а значит и $\vDash \Phi$ по предыдущей лемме.

- Пусть $\Phi$ — кванторная аксиома, т.е. она имеет вид

  $$\forall x\ \Psi \to \Psi(x/t) \quad \text{или} \quad \Psi(x/t) \to \exists x\ \Psi(x),$$

  где $t$ свободен для $x$ в $\Psi$. Рассмотрим произвольные $\sigma$-структуру $\mathfrak{A}$ и означение $\nu$ в $\mathfrak{A}$. Можно показать индукцией по построению $\Psi$, что

  $$\mathfrak{A} \vDash \Psi(x/t)[\nu] \iff \mathfrak{A} \vDash \Psi[\nu^{x}_{\nu(t)}].$$

  Может быть довести.

  Отсюда мы сразу получаем $\vDash \Phi$.

$\square$

**Теорема 43** (о корректности $\vdash$). *Для любых* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \vDash \Phi$$

**Доказательство.** Пусть $\Gamma \vdash \Phi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\Phi_0, \dots, \Phi_n$$

$\Phi$ из $\Gamma$. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная модель $\Gamma$. Покажем индукцией по $i \in \{0, \dots, n\}$, что $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i[\nu]$ для всякого означивания $\nu$ в $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим возможные случаи.

- Пусть $\Phi_i$ — аксиома. Тогда $\vDash \Phi_i$, а потому $\Gamma \vDash \Phi_i$.
- Пусть $\Phi_i$ — элемент $\Gamma$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i[\nu]$ для всех $\nu$.
- Пусть $\Phi_i$ получается из предшествующих $\Phi_j$ и $\Phi_k = \Phi_j \to \Phi_i$ по MP. В силу индукционной гипотезы, для вякого $\nu$
$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi_j[\nu] \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi_j \to \Phi_i[\nu],$$
откуда немедленно следует $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i[\nu]$.
- Пусть $\Phi_i = \Theta \to \forall x\ \Omega$ получается из предшествующего $\Phi_j = \Theta \to \Omega$ по BR1. Рассмотрим произвольное означивание $\nu$. Заметим, что
$$\mathfrak{A} \Vdash \Theta[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Theta[\nu^x_a] \text{ для всех } a \in A$$
(так как $x \notin \mathrm{FV}(\Theta)$). Кроме того, ввиду предположения индукции мы имеем $\mathfrak{A} \Vdash \Theta \to \Omega[\nu^x_a]$. Итак
$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash \Theta[\nu] \quad &\Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Theta[\nu^x_a] \text{ для всех } a \in A \\ &\Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Omega[\nu^x_a] \text{ для всех } a \in A \\ &\Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \forall x\ \Omega[\nu]. \end{aligned}$$
Стало быть, $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i[\nu]$.
- Случай $\mathfrak{BR}2$ по существу аналогичен случаю $\mathfrak{BR}1$.

В частности, $\mathfrak{A}\Phi[\nu]$ для всякого означивания $\nu$ в $\mathfrak{A}$. Таким образом $\Gamma \vDash \Phi$. $\square$

**Следствие 43.1.** *Для любой* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, *если* $\vdash \Phi$, *то* $\vDash \Phi$.

**Определение 45.** $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ называют *противоречивым*, если $\Gamma \vdash \Phi$ и $\Gamma \vdash \neg\Phi$ для некоторой $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, и *непротиворечивым* иначе.

**Лемма 44.** *Для* $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ *TFAE:*

- $\vdash \Psi$ *для всех* $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$*;*
- $\Gamma$ *противоречиво;*
- $\Gamma \vdash \bot$.

**Следствие 44.1.** *Пусть* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$.

- *Если у* $\Gamma$ *есть модель, то* $\Gamma \nvdash \bot$.
- *Если у* $\Gamma \cup \{\Phi\}$ *есть модель, то* $\Gamma \nvdash \neg\Phi$.
- *Если у* $\Gamma \cup \{\neg\Phi\}$ *есть модель, то* $\Gamma \nvdash \Phi$.

*Замечание.* Это, пожалуй, самый базовый метод доказательства непротиворечивости теорий независимости предложений от теории.

*Пример* 39. Пусть в качестве $\sigma$ выступает $\langle =^2; s^1; 0\rangle$, а $\Gamma$ состоит из

- $\forall x\ s(x) \neq 0$,
- $\forall x\ \forall y\ (s(x) = s(y) \to x = y)$ и
- $\forall x\ (x \neq 0 \to \exists y\ x = s(y))$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ естественные $\sigma$-структуры с носителями $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ соответственно (считая $s^{\mathfrak{B}}(\infty) = \infty$). Возьмём

$$\Phi := \forall x\ s(x) \neq x.$$

Тогда $\mathfrak{A} \Vdash \Gamma \cup \{\Phi\}$ и $\mathfrak{B} \Vdash \Gamma \cup \{\neg\Phi\}$, а значит, $\Phi$ независима от $\Gamma$.

*Пример* 40 (без деталей). Пусть $\sigma$ — это сигнатура структур $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$, т.е. $\langle =^2; \simeq^4, B^3\rangle$. $\sigma$-предложения, формализующие постулаты геометрии Евклида без постулата о единственности параллельной прямой, обычно именуют *аксиомами абсолютной геометрии*; обозначим их через Abs. Тогда

$$\mathfrak{G} \Vdash \mathrm{Abs} \cup \{\mathrm{Euclid}_5\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{H} \Vdash \mathrm{Abs} \cup \{\neg\mathrm{Euclid}_5\}.$$

Значит, $\mathrm{Euclid}_5$ (аксиома о параллельных) независима от Abs.

**Определение 46.** В дальнейшем, когда это не приводит к путанице, мы будем нередко отождествлять с $\sigma$ с $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$ (учитывая роли символов и их местности). В частности:

- запись $\varepsilon \in \sigma$ является сокращением для $\varepsilon \in \mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$;
- запись $\sigma \subseteq \sigma'$ означает, что

  $$\mathrm{Pred}_\sigma \subseteq \mathrm{Pred}_{\sigma'}, \qquad \mathrm{Func}_\sigma \subseteq \mathrm{Func}_{\sigma'} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Const}_\sigma \subseteq \mathrm{Const}_{\sigma'},$$

  причём $\mathrm{arity}_\sigma$ совпадает с сужением $\mathrm{arity}_{\sigma'}$ на $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma$;
- под $|\sigma|$ подразумевается $|\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma|$.

Пусть даны $\sigma$-структура $\mathfrak{A}$ и $\sigma'$-структура $\mathfrak{A}'$, причём $\sigma'$ включает $\sigma$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ является *$\sigma$-обеднением* $\mathfrak{A}'$, а $\mathfrak{A}'$ — *$\sigma'$-обогащением*, если $A = A'$ и $\varepsilon^{\mathfrak{A}} = \varepsilon^{\mathfrak{A}'}$ для всех $\varepsilon \in \sigma$.

**Теорема 45** (о сильной полноте $\vdash$). *Для любых* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$

$$\Gamma \vdash \Phi \iff \Gamma \vDash \Phi$$

**Идея доказательства.**

$\Rightarrow$) См. теорему о корректности.

$\Leftarrow$) Допустим, что $\Gamma \nvdash \Phi$. Хотим показать, что $\Gamma \nvDash \Phi$.

Заметим, что $\Gamma \nvdash \Phi$ равносильно $\Gamma \nvdash \widetilde{\forall}\Phi$, а $\Gamma \nvDash \Phi$ — $\Gamma \nvDash \widetilde{\forall}\Phi$. Теперь действуем по аналогии с пропозициональной логикой:

– Построим “насыщенную теорию” $\Gamma' \supseteq \Gamma$ такую, что $\Gamma' \nvdash \widetilde{\forall}\Phi$; при этом $\Gamma' \nvdash \widetilde{\forall}\Phi$ будет равносильно $\widetilde{\forall}\Phi \notin \Gamma'$.

– Далее, с помощью $\Gamma'$ построим структуру $\mathfrak{A}_{\Gamma'}$ такую, что для любого предложения $\Psi$,

$$\mathfrak{A}_{\Gamma'} \Vdash \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi \in \Gamma'.$$

Мы получим $\mathfrak{A}_{\Gamma'} \Vdash \Gamma$ и $\mathfrak{A}_{\Gamma'} \nVdash \widetilde{\forall}\Phi$. Стало быть, $\Gamma \nvDash \widetilde{\forall}\Phi$.

□

*Замечание.* Для удобства обозначим

$$\mathrm{Term}_\sigma^\circ := \{t \in \mathrm{Term}_\sigma \mid \mathrm{sub}(t) \cap \mathrm{Var} = \varnothing\}.$$

Элементы $\mathrm{Term}_\sigma^\circ$ называются *замкнутыми $\sigma$-термами.* В определении “насыщенности” в логике первого порядка используется естественный кванторный аналог дизъюнктивного свойства:

Для любого $\exists x\ \Phi \in \Gamma$ существует $t \in \mathrm{Term}_\sigma^\circ$ такой, что $\Phi(x/t) \in \Gamma$.

Однако реализовать данное свойство в исходной сигнатуре $\sigma$ порой невозможно. Так, если $\mathrm{Const}_\sigma = \varnothing$, то $\mathrm{Term}_\sigma^\circ = \varnothing$, а потому “насыщенных $\sigma$-теорий” вообще не существует. Значит, придётся обогащать $\sigma$, добавляя новые константы.

*Замечание* 12. Под *мощностью* $\mathfrak{A}$ традиционно понимают мощность носителя $\mathfrak{A}$, т.е. $|A|$. Далее мы убедимся, что теорема о сильной полноте $\vdash$ остаётся верной, если ограничиться рассмотрением $\sigma$-структур мощности $\leqslant |\mathrm{Form}_\sigma|$.

**Определение 47.** Изначально $\vdash$ определено для фиксированной структуры $\sigma$. По этой причине правильнее говорить о *выводимости над* $\sigma$, а не просто о выводимости (без указания сигнатуры), и писать $\vdash_\sigma$ вместо $\vdash$.

**Теорема 46** (о консервативности)**.** *Пусть $\sigma \subseteq \sigma'$. Тогда для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$*

$$\Gamma \vdash_\sigma \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash_{\sigma'} \Phi.$$

**Доказательство.** Как легко убедиться, $\Gamma \vDash_\sigma \Phi$ равносильно $\Gamma \vDash_{\sigma'} \Phi$, где $\vDash_\sigma$ и $\vDash_{\sigma'}$ — это семантическое следование над $\sigma$ и $\sigma'$ соответственно. Значит

$$\Gamma \vdash_\sigma \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash_\sigma \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash_{\sigma'} \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash_{\sigma'} \Phi$$

(ввиду теоремы и сильной полноте для $\vdash_\sigma$ и $\vdash_{\sigma'}$). □

*Замечание* 13. Тут хватит и слабой полноты, так как $\vdash$ компактно и монотонно.

**Теорема 47** (о слабой полноте $\vdash$)**.** *Для любой $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$*

$$\vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \vDash \Phi,$$

*т.е. выводимость из $\varnothing$ равносильна общезначимости.*

**Теорема 48** (о компактности $\vDash$, aka локальная теорема Гёделя-Мальцева)**.** *Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$*

$$\Gamma \vDash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \vDash \Phi \text{ для некоторого конечного } \Delta \subseteq \Gamma.$$

**Следствие 48.1.** *Для любого* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$

$$\Gamma \nvDash \bot \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \nvDash \bot \text{ для всех конечных } \Delta \subseteq \Gamma.$$

*Иначе говоря,* $\Gamma$ *выполнимо тогда и только тогда, когда всякое конечное подмножество* $\Gamma$ *выполнимо.*

*Замечание* 14. Всякое $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ называют *локально выполнимым*, если всякое конечное подмножество $\Gamma$ выполнимо. Стало быть

$$\Gamma \text{ выполнимо} \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \text{ локально выполнимо;}$$

отсюда "локальная" в альтернативном назывании. К слову, локальная выполнимость влечёт выполнимость влечёт непротиворечивость по теореме о корректности.

*Замечание.* С помощью теоремы о компактности для $\vDash$ можно получить немало интересных результатов. Например:

**Утверждение 49.** *Пусть у* $\Gamma$ *есть модели сколь угодно большой конечной мощности. Тогда у* $\Gamma$ *есть бесконечная модель.*

**Доказательство.** Мы будем считать, что $\mathrm{Pred}_\sigma$ содержит $=$; если его нет, можно воспользоваться неразличимостью некоторых элементов, после чего построить бесконечную модель, но тут нужно глубже вдаваться в подробности. Для каждого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ положим

$$\Phi_n := \exists x_1 \ \ldots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^{n} \neg x_i = x_j.$$

Очевидно, для любой $\sigma$-структуры $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi_n \quad \Longleftrightarrow \quad |A| \geqslant n.$$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ удовлетворяет условию утверждения. Рассмотрим

$$\Gamma' := \Gamma \cup \{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}.$$

Разумеется, $\Gamma'$ локально выполнимо. Значит оно выполнимо, т.е. у $\Gamma'$ есть модель $\mathfrak{A}$. Поскольку в $\mathfrak{A}$ выполнены все $\Phi_n$, то $A$ бесконечно. □

**Определение 48.** Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — $\sigma$-структуры. Говорят, что $\mathfrak{A}$ является *подструктурой* $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ — *расширением* $\mathfrak{A}$, и пишут $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, если $A \subseteq B$ и $\mathrm{id}_A$ является вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Итак, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда:

- $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ для каждого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$;
- $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction_{A^m}$ для каждого $m$-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$;
- $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}} \cap A^n$ для каждого $n$-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$.

Понятно, что $S \subseteq B$ является носителем (некоторой) подструктуры $\mathfrak{B}$, если и только если:

- $c^{\mathfrak{B}} \in S$ для каждого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$;
- $f^{\mathfrak{B}}[S^m] \subseteq S$ для каждого $m$-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$.

*Замечание.* В случае, когда $S \subseteq B$ удовлетворяет описанным выше условиям, соответствующая подструктура определяется однозначно; поэтому подструктуры нередко отождествляют с их носителями при условии, что объемлющая $\mathfrak{B}$ фиксирована.

*Пример* 41. Пусть $\mathfrak{A}$ — ЧУМ. Тогда все подструктуры $\mathfrak{A}$ также есть ЧУМ. Кроме того, такие свойства как линейность и фундированность будет наследоваться при переходе к подструктурам.

*Пример* 42. Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева группа в сигнатуре $\langle =; +^2, -^1; 0\rangle$. Тогда подструктуры $\mathfrak{A}$ суть в точности подгруппы $\mathfrak{A}$. Без $-$ в сигнатуре, однако, это было бы неверно, поскольку могут отсутствовать обратные.

**Определение 49.** Говорят, что $\mathfrak{A}$ является *элементарной подструктурой* $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ — *элементарным расширением* $\mathfrak{A}$, и пишут $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ и для любых $\Phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}]$$

Очевидно, $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ влечёт $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

**Теорема 50** (Лёвенгейма-Сколема, о понижении мощности)**.** *У всякой $\sigma$-структуры есть элементарная подструктура мощности $\leqslant |\mathrm{Form}_\sigma|$.*

**Доказательство.** Возьмём $\kappa := |\mathrm{Form}_\sigma|$. Не ограничивая общности, мы будем считать, что $\mathrm{Pred}_\sigma$ содержит $=$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная $\sigma$-структура. Для любых $\Phi(x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ положим

$$[\![\Phi(\vec{a}, y)]\!] := \{a \in A \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}, y/a]\}$$

Определим последовательность $\langle S_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ подмножеств $A$ следующим образом.

- Если $n = 0$, то $S_n$ — некоторое фиксированное подмножество $A$ мощности $\leqslant \kappa$.
- Если $n = m + 1$, то $S_n := S_m \cup \mathrm{range}\,\eta_m$, где $\eta_m$ — какая-нибудь функция выбора для

$$\{[\![\Phi(\vec{a}, y)]\!] \mid \vec{a} \in S_m^* \wedge \mathfrak{A} \Vdash \exists y\ \Phi[\vec{x}/\vec{a}]\}$$

По построению мы имеем $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$. Возьмём

$$S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Понятно, что для любых $\Phi(x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $(a_1, \ldots, a_k) \in S^k$

$$\mathfrak{A} \Vdash \exists y\ \Phi[\vec{x}/\vec{a}] \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}, y/a] \text{ для некоторого } a \in S. \tag{1}$$

Далее, $S$ является носителем некоторой подструктуры $\mathfrak{A}$:

- для всякого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$ верно $\mathfrak{A} \Vdash \exists y\ c = y$, откуда $c^{\mathfrak{A}} \in S$;
- для всякого $m$-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ и любого $\vec{a} \in S^m$ верно $\mathfrak{A} \Vdash \exists y\ f(\vec{x}) = y[\vec{x}/\vec{a}]$, откуда $f^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \in S$.

Обозначим через $\mathfrak{S}$ подструктуру $\mathfrak{A}$ с носителем $S$. Заметим, что

$$|S_n| \leqslant \kappa \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Это легко установить по индукции:

- очевидно, $|S_0| \leqslant \kappa$;
- если $|S_n| \leqslant \kappa$, то $|S_{n+1}| \leqslant |S_n| + |\mathrm{Form}_\sigma| \cdot |S_n^*| \leqslant \kappa + \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Отсюда $|S| = |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n| \leqslant \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa$.

Наконец, используя 1, нетрудно показать, что индукцией по построению $\Phi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Form}_\sigma$, что для любых $(a_1, \ldots, a_k) \in S^k$

$$\mathfrak{G} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}].$$

Таким образом $\mathfrak{G} \preccurlyeq \mathfrak{A}$. □

**Следствие 50.1.** *Для всякого* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$

$$\text{у } \Gamma \text{ есть модель} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{у } \Gamma \text{ есть модель мощности не более чем } |\mathrm{Form}_\sigma|.$$

**Упражнение 3.**

$$|\mathrm{Form}_\sigma| = \max\{|\mathrm{Pred}_\sigma|, |\mathrm{Func}_\sigma|, |\mathrm{Const}_\sigma|, \aleph_0\} = \max\{|\sigma|, \aleph_0\}$$