Самостоятельная работа 01.03.2021.
Алгебра. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

15 марта 2021 г.

Задача 2. Заметим, что

$$\begin{vmatrix} (x_1+y_1)^{n-1} & (x_1+y_2)^{n-1} & \cdots & (x_1+y_n)^{n-1} \\ (x_2+y_1)^{n-1} & (x_2+y_2)^{n-1} & \cdots & (x_2+y_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n+y_1)^{n-1} & (x_n+y_2)^{n-1} & \cdots & (x_n+y_n)^{n-1} \end{vmatrix} = P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

— многочлен степени $\leqslant (n-1)n$.

Но если $x_i = x_j$ $(i \neq j)$, то $P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0$, следовательно $P \vdots (x_i - x_j)$. Значит

$$P \vdots \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

Аналогично

$$P \vdots \prod_{i<j} (y_j - y_i)$$

Следовательно

$$P \vdots \prod_{i<j} (x_j - x_i)(y_j - y_i)$$

При этом

$$\deg\left(\prod_{i<j} (x_j - x_i)(y_j - y_i)\right) = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1) \geqslant \deg(P)$$

Значит

$$P = C \prod_{i<j} (x_j - x_i)(y_j - y_i)$$

для некоторой константы C.

Заметим, что в определении определителя матрицы выше всякое слагаемое имеет вид

$$\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (x_i + y_{\sigma(i)})^{n-1}$$

а всякое слагаемое в нём после раскрытия скобок и приведения подобных имеет вид

$$\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \binom{n-1}{d_i} x_i^{d_i} y_{\sigma(i)}^{n-1-d_i}$$

Тогда рассмотрим коэффициент вхождения монома $x_1^0 y_1^0 x_2^1 y_2^1 \cdots x_n^{n-1} y_n^{n-1}$. С одной стороны в

$$P = C \prod_{i<j} (x_j - x_i)(y_j - y_i)$$

оно входит с коэффициентом C, так как из всякой скобки $(x_j - x_i)$ $(j > i)$ мы должны выбрать x_j, чтобы достичь искомых степеней x_i; аналогично для y_i. С другой же стороны, чтобы войти в то или иное слагаемое определителя выше, нужно поставить в пары к x_i переменные y_i, чтобы их степени в суммах в парах давали $n-1$; это можно сделать единственным способом: $\sigma(i) = n+1-i$. Следовательно этот моном встречается единожды и (так как $d_i = i-1$) коэффициент при нём равен

$$\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(n-1)!^{n-1}}{\prod_{i=0}^{n-1} i!^2} = C$$

В конкретной задачи нас спрашивают данный определитель при $x_i = i$, $y_i = i-1$. Следовательно

$$\begin{aligned}
C \prod_{i<j} (x_j - x_i)(y_j - y_i) &= C \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (x_j - x_i)(y_j - y_i) & &= C \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (j-i)^2 \\
&= C \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} i^2 & &= C \prod_{j=2}^{n} (j-1)!^2 \\
&= C \prod_{j=1}^{n-1} j!^2 & &= \boxed{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-1)!^{n-1}}
\end{aligned}$$
