Занятие от 18.02.
Геометрия и топология. 1 курс.
Решения.

Глеб Минаев @ 102 (20.Б02-мкн)

25 февраля 2021 г.

Задача 16. Пусть на данной сетке O будет началом отсчёта, а Z имеет координаты $(z_x; z_y)$. Поставим в каждую точку $A = (a_x; a_y)$ значение равное вероятности $p(A)$, что турист дойдёт в неё из O. Заметим, что для всяких $a_x, a_y \in \mathbb{Z}$

$$p(a_x, a_y) = \begin{cases} 0 & \text{если } a_x < 0 \text{ или } a_y < 0 \\ 1 & \text{если } a_x = 0 = a_y \\ \frac{p(a_x-1, a_y) + p(a_x, a_y-1)}{2} & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда легко видеть, что $p(a_x, a_y) = \binom{a_x+a_y}{a_x} / 2^{a_x+a_y}$.

Задача 17. Было...

Задача 21. Заметим, что событие B распадается на два:

1. среди оставшихся 3 цифр одна является либо "1", либо "5", две другие является различными цифрами из набора $\{0; 2; 4; 6; 7; 8; 9\}$;
2. оставшиеся три цифры взяты из набора $\{0; 2; 4; 6; 7; 8; 9\}$, и ровно две из них совпадают.

Соответственно

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2 \cdot \binom{7}{2} \cdot 3! + \frac{7!}{5!} \cdot 3}{10^3} = \frac{7 \cdot 6^2 + 7 \cdot 6 \cdot 3}{1000} = \frac{42 \cdot 9}{1000} = 0{,}378$$

Событие C является противоположным к событию, когда все цифры различны. Следовательно

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \frac{\binom{10}{3} \cdot 3!}{10^3} = 1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = 1 - \frac{72}{10^2} = 1 - 0{,}22 = 0{,}88$$

Задача 26. Очевидно, что ответ равен

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} p^{2k} (1-p)^{n-2k} \binom{n}{2k} = \frac{((1-p)+p)^n + ((1-p)-p)^n}{2} = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}$$

Задача 30. Рассмотрим для всякого $S \subseteq \{1; \ldots; n\}$

$$B_S := \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{j \notin S} A_j$$

Очевидно, что

$$\Omega = \bigsqcup_{S \subseteq \{1;\ldots;n\}} B_S \qquad\qquad A_i = \bigsqcup_{\substack{S \subseteq \{1;\ldots;n\} \\ i \in S}} B_S$$

Таким образом

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{S \subseteq \{1;\ldots;n\} \\ i \in S}} \mathbb{P}(B_S) = \sum_{S \subseteq \{1;\ldots;n\}} \mathbb{P}(B_S) \cdot |S|$$

Предположим $\mathbb{P}(B_{\{1;\ldots;n\}}) = 0$. Тогда

$$\sum_{S \subseteq \{1;\ldots;n\}} \mathbb{P}(B_S) \cdot |S| \leqslant \sum_{S \subseteq \{1;\ldots;n\}} \mathbb{P}(B_S) \cdot (n-1) = (n-1) \sum_{S \subseteq \{1;\ldots;n\}} \mathbb{P}(B_S) = n - 1$$

Но $\sum_{i=1}^{n} A_i > n - 1$ — противоречие. Таким образом $\mathbb{P}(S_{\{1;\ldots;n\}}) > 0$.

Задача 23. 1. Рассмотрим равносильную задачу.

> В строку $n_1 + \cdots + n_N$ раз выписывают случайное число от 1 до N. С какой вероятностью n_1 раз будет написано "1", ..., n_N раз будет написано "N"?

В таком случае очевидно, что ответ

$$\frac{\binom{n_1 + \cdots + n_N}{n_1, \ldots, n_N}}{N^{n_1 + \cdots + n_N}}$$

2. Очевидно, что

$$p_k = \frac{\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}}{N^n}$$

Заметим, что

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}(N-1)} = \frac{n-k}{(k+1)(N-1)}$$

Соответственно

$$\frac{n-k}{(k+1)(N-1)} > 1 \quad \frac{n-k}{k+1} > N - 1 \quad \frac{n+1}{k+1} > N \quad \frac{n+1}{N} > k + 1 \quad \frac{n-N+1}{N} > k$$

Следовательно максимум достигается в точке $k = \lceil \frac{n-N+1}{N} \rceil$.

3. Заметим, что $N = \frac{n}{a}(1 + o(1))$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_k &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{N-1}{N}\right)^n \frac{n\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{(N-1)^k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\left(\frac{n}{N}\right)^k\\ &= \frac{1}{k!}e^{-a}\frac{1}{a^k} = \frac{1}{k!e^a a^k}\end{aligned}$$

4. Заметим, что ответ

$$\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}\frac{(N-i)^n}{N^n}$$

Действительно. Заметим, что количество исходов, когда конкретные r ячеек пусты равно $(N-r)^n$. Потом эти значения умножаются на $\binom{n}{r}$ и подставляются выше. Поэтому случаи, когда конкретные r ячеек пусты и только они, посчитаны в выражении выше

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i} = (1-1)^r = \begin{cases}1 & \text{если } r=0\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$$

раз. Таким образом и остаются только случаи, когда никакие ячейки не пусты.

5. Если рассматривать случаи, когда какие-то конкретные $n-r$ ячейки пусты, то аналогично предыдущему пункту можно получить, что кол-во вариантов, когда только они и пусты, равно

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}(r-i)^n$$

Следовательно итоговая вероятность равна

$$\frac{\binom{n}{r}}{N^n}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}(r-i)^n$$

Задача 24. Заметим, что количество искомых вариантов есть

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)!$$

Действительно, пусть фиксированы какие-то r чисел среди набора $\{1;\dots;n\}$. Тогда количество перестановок, где эти r чисел являются неподвижными точками, равно $(n-r)!$, а таких наборов из r чисел $\binom{n}{r}$. Тогда в выражении выше всякая перестановка, сохраняющая на месте ровно какие-то r чисел, посчитана

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i} = (1-1)^r = \begin{cases}1 & \text{если } r=0\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$$

раз. Т.е. останутся посчитанными только перестановки без неподвижных точек. Поэтому итоговая вероятность равна

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\frac{\binom{n}{i}(n-i)!}{n!} = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

Очевидно, что в пределе (по n) значение равно

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = \exp(-1) = \frac{1}{e}$$

Задача 25. WLOG можно считать, что игрок попросил открыть дверь № 1. Тогда у нас имеется 3 случая, где может быть приз. Если приз за дверью № 1, то менять дверь не выгодно; а в остальных двух случаях это наоборот выгодно. Поэтому в таком случае вероятность выигрыша при смене двери будет равна 2/3, а в противном случае — 1/3.

Задача 31.

1. Очевидно, $\mathbb{P}(A) = [1 \in A]$ является искомой мерой.
2. Пусть $\mathcal{P}$ — множество простых. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

   $$\mathbb{P}(n) = \mathbb{P}(A_n) \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \mathbb{P}(A_{np}))$$

   Легко видеть, что произведение сходится. При этом если оно сходится к чему-то положительному, то тогда $(\mathbb{P}(A_{np}))_{p \in \mathcal{P}} \to 0$. В таком случае

   $$\ln(\mathbb{P}(n)) = \ln(\mathbb{P}(A_n)) + \sum_{p \in \mathcal{P}} \ln(1 - \mathbb{P}(A_{np})) = \text{const} - \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(A_{np}) = \text{const} - \mathbb{P}(A_n) \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(A_p)$$

   Следовательно $\mathbb{P}(n) > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{P}(A_{np}) > 0$, ни для какого $p \in \mathcal{P}$ $\mathbb{P}(A_{np}) = 1$ и $\sum_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(A_p)$ сходится.

   Но заметим, что

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{p^d} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - 1/p}$$

   Формально говоря, префикс гармонического ряда равен произведению префиксов в геометрических суммах; поэтому из равенства $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ следует, что $\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p}) = 0$. И как мы успели понять это значит, что $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty$.

   Поэтому $\sum_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(A_p) = +\infty$; значит для всякого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ имеем, что $\mathbb{P}(n) = 0$ — противоречие.

Задача 14. TODO
