

Дискретная математика.

Тискин А. В.
alextiskin@gmail.com

Содержание:

1. Булевы функции
2. Комбинаторика
3. Теория графов

1 Булевы функции

Определение 1. $\mathbb{B} := \{0; 1\}$. Булева функция — $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$.

Множество булевых функций — P_2 .

Множество булевых функций — $P_2^{(n)}$.

Количество всех булевых функций — $|P_2^{(n)}| = 2^{2^n}$.

Определение 2. Базовые функции:

- $0, 1$ — функции-константы.
- $\neg x := 1 - x$
- \wedge и \vee — стандартные AND и OR.

Определение 3. Булева функция $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ существенно зависит от x_i , если существуют $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$, что $f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Определение 4. Пусть F — множество булевых функций. Тогда сигнатурой F или множеством формул над F называется множество итеративно заданных формул по принципу:

- формальный символ x ;
- $f(A_1, \dots, A_n)$, где $f \in F$, а A_1, \dots, A_n — уже определённые функции.

Формула реализует некоторую функцию (не обязательно из F). Формулы реализующие одну и ту же функцию называются эквивалентными.

Определение 5. Функция f выражима через F , если существует формула над F , реализующая f .

Определение 6. Замыкание F — множество $[F]$ функций, выражимых через F .

Утверждение 1.

- $F \subseteq [F]$

- $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow [F_1] \subseteq [F_2]$
- $[[F]] = [F]$

Определение 7. Множество F булевых функций называется *замкнутым*, если $F = [F]$.

Определение 8. Пусть R замкнуто, а $Q \subseteq R$.

- Q *полно* для R , если $[Q] = R$.
- R *конечно порождено*, если существует конечное полное для R множество Q , подмножество R . Минимальное по включению Q — *базис* R .

Определение 9. Функция f называется *монотонной*, если

$$\forall x_1 \leq x'_1, \dots, x_n \leq x'_n : f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x'_1, \dots, x'_n).$$

Утверждение 2. Если F — множество монотонных функций, то $[F]$ — множество монотонных функций.

Определение 10.

Литерал — это x или $\neg x$, где x — формальный символ (переменная).

Элементарная конъюнкция — $Y_1 \wedge \dots \wedge Y_k$, где Y_1, \dots, Y_k — литералы (с попарно различными элементами).

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) — $Z_1 \vee \dots \vee Z_m$, где Z_1, \dots, Z_m — (различные) элементарные конъюнкции.

Совершенная ДНФ — для любой функции f от n переменных

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n},$$

где $x^0 = x$, а $x^1 = \neg x$.

Утверждение 3. Система $\{\neg, \wedge, \vee\}$ полна (в P_2).

Следствие 0.1. Системы $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{1, \wedge, \oplus\}$, $\{\uparrow\}$ и $\{\downarrow\}$ полны.

Определение 11. Аналогично (совершенная) конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

Определение 12. Двойственная функция к f — $f^* := \neg f(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$.

Свойства:

- $f^{**} = f$

Утверждение 4 (принцип двойственности). Если f реализуема формулой Φ , то f^* реализуема формулой Φ^* , где все функции заменяются на двойственные.

Определение 13 (полином Жегалкина (над \mathbb{F}_2)). Выражение функции в базисе $\{1, \wedge, \oplus\}$.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}} a_{i_1, \dots, i_s} x_{i_1} \dots x_{i_s}$$

Теорема 1 (Жегалкин). Любая функция реализуется полиномом Жегалкина единственным образом (с точностью до пропуска членов тождественно равных 0 и перестановок слагаемых и сомножителей).

Доказательство. Всего коэффициентов $a_{i_1, \dots, i_s} — 2^n$. Тогда многочленов Жегалкина 2^{2^n} ; сколько и булевых функций. Покажем, что для каждой функций найдётся полином Жегалкина, и тогда докажем теорему.

Построение полинома аналогично рассуждению в формуле включений-исключений. Сначала рассмотрим значение f в точке $(0, \dots, 0)$: оно определяет свободный член полинома. Далее рассмотрим значение f и имеющегося полинома (пока что состоящего только из, может быть, свободного члена) в точках вида $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$: по ним определяются коэффициенты при мономах первой степени (по аналогии с формулой включений-исключений). Так далее определяются все коэффициенты. \square

Определение 14. Функция f *самодвойствена*, если $f = f^*$.

Пример 1.

- e_i и $\neg e_i$ для любого n и i самодвойственны;
- $\vee, \wedge, \oplus, \rightarrow, \leftarrow, \uparrow$ и \downarrow не самодвойственны.