Алгебра. Практика.

А. В. Щеголёв

Определение 1. Кольцо R называется *Евклидовым*, если существует $\phi : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ — *норма Евклида*, что $\forall a, b \in R\ \exists q, r \in R : a = bq + r, \phi(r) < \phi(b)$.

Упражнение 1.

1. Пусть дана какая-то норма Евклида ϕ на кольце R. Тогда эту норму можно докрутить так, что для новой нормы ϕ' верно, что $\phi'(ab) \geqslant \phi'(a)$.

2. Для ϕ' верно, что для всех обратимых элементов ϕ'-значения равны.

Определение 2. *Общим делителем* a и b называется c, что $c \mid a$ и $c \mid b$. *Наибольшим общим делителем (НОД)* a и b называется общий делитель a и b, делящийся на все другие общие делители a и b.

Теорема 1 (алгоритм Евклида)**.** *В Евклидовом кольце у любых двух чисел есть НОД.*

Доказательство. Заметим, что $(a, b) = (a + bk, b)$.

Пусть даны a и b. Предположим, что $\phi(a) \geqslant \phi(b)$, иначе поменяем их местами. Тем самым по аксиоме Евклида найдутся q и r, что $a = bq + r$, а $\phi(r) < \phi(b) \leqslant \phi(a)$, значит $\phi(a) + \phi(b) > \phi(r) + \phi(b)$. При этом $(a, b) = (r, b)$. Значит бесконечно $\phi(a) + \phi(b)$ не может бесконечнго уменьшаться, так как натурально, значит за конечное кол-во переходов мы получим, что одно из чисел делит другое, а значит НОД стал определён. $\square$

Упражнение 2. $\sigma \left(\begin{smallmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} d & \sigma \\ 0 & \end{smallmatrix}\right)$. Чему может быть равно σ_{2*}?

Упражнение 3. Докажите, что Гауссова норма — норма Евклида.

Упражнение 4. Найти $(17 + 23i, 13 - 21i)$.

Упражнение 5. Ждите позже...

Упражнение 6. Найти все решения $17x + 24y = 3$ над $\mathbb{Z}$.

1 Занятие 30.11.2020

Лемма 2. *Пусть* $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ *— различные (комплексные) значения, а* f *— некоторый полином степени* $< n$*. Тогда*

$$\frac{f(x)}{\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x-\alpha_i}$$

где

$$a_i := \frac{f(\alpha_i)}{\prod_{t\neq i}(\alpha_i-\alpha_t)}$$

Доказательство. Заметим, что по интерполяционной теореме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\prod_{j\neq i}\frac{x-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j} = \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j\neq i}(x-\alpha_j)$$

Следовательно

$$\frac{f(x)}{\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x-\alpha_i}$$

□

Лемма 3. *Пусть* $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ *— различные (комплексные) значения. Определим*

$$P(x) := \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)$$

Тогда

$$\prod_{i\neq t}(\alpha_t-\alpha_i) = P'(\alpha_i)$$

Доказательство. Заметим, что

$$P'(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{j\neq i}(x-\alpha_j)$$

Следовательно

$$P'(\alpha_t) = \sum_{i=1}^n \prod_{j\neq i}(\alpha_t-\alpha_j) = \prod_{j\neq t}(\alpha_t-\alpha_j)$$

□

Следствие 3.1.

$$\prod_{\substack{i\in[0;n-1]\\ i\neq t}} (\zeta_n^t-\zeta_n^i) = n\zeta_n^{-t}$$

Теорема 4.

$$\frac{2n+1}{x^{2n+1}-1} - \frac{1}{x-1} + n = \frac{x^2-1}{2x}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{x^2+1}{2x} - \cos(\frac{2\pi i}{2n+1})}$$

Доказательство.

$$\frac{2n+1}{x^{2n+1}-1} = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{x-\zeta_{2n+1}^i} \cdot \frac{2n+1}{(2n+1)\zeta_{2n+1}^{-i}} = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{\zeta_{2n+1}^{-i}x-1}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\zeta_{2n+1}^{i}x-1}+\frac{1}{\zeta_{2n+1}^{-i}x-1} = \frac{2x\cos(\frac{2\pi i}{2n+1})-2}{x^2+1-2x\cos(\frac{2\pi i}{2n+1})} = \frac{x^2-1}{x^2+1-2x\cos(\frac{2\pi i}{2n+1})}-1 = \frac{\frac{x^2-1}{2x}}{\frac{x^2+1}{2x}-\cos(\frac{2\pi i}{2n+1})}-1$$

Следовательно

$$\frac{2n+1}{x^{2n+1}-1} - \frac{1}{x-1} + n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\zeta_{2n+1}^{i}x-1} + \frac{1}{\zeta_{2n+1}^{-i}x-1} = \frac{x^2-1}{2x}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{x^2+1}{2x}-\cos(\frac{2\pi i}{2n+1})}$$

□

Следствие 4.1.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\cos(\frac{2\pi i}{2n+1})} = \frac{n(n+1)}{3}$$

Следствие 4.2.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\cos(\frac{2\pi i}{2n+1})} = \frac{n(n+1)}{3}$$