Основы наивной теории множеств.

Станислав Олегович Сперанский

Материалы лекций: ссылка
Литература:

- K. Hrbacek and T. Jech. Introduction to Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Marcel Dekker, Inc., 1999.

- T. Jech. Set Theory. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.

Будем рассматривать как базовые выражения “x равен (совпадает с) y” (“$x = y$”) “x лежит в y” (“$x \in y$”).

Определение 1 (Наиваная схема аксиом выделения)**.** Пусть $\Phi(x)$ — произвольное условие на объекты. Тогда существует X, что $\forall u(\Phi(u) \leftrightarrow u \in X)$. В этом случае X обозначается как $\{u \mid \Phi(u)\}$.

Утверждение 1 (парадокс Рассела)**.** *Пусть $R = \{u \mid u \notin u\}$. Тогда R не может лежать в себе и не может не лежать в себе одновременно.*

Из-за данного парадокса будем рассматривать только условия, образованные переменными и $\in, =, \neg, \wedge, \vee, \leftarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

Определение 2 (аксиомы ZFC (= ZF (аксиомы Цермело-Френкеля) + C (аксиома выбора)))**.**

Ext) “Аксиома экстенциональности”:

$$\forall X \forall Y (\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y)$$

Empty) “Аксиома пустого множества”:

$$\exists \varnothing \; \forall u \, (u \notin \varnothing)$$

Pair) “Аксиома пары”:

$$\forall X \, \forall Y \; \exists Z (\forall u \, (u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)))$$

Обозначение: $Z = \{X, Y\}$.

Sep) “Схема аксиом выделения”:

$$\forall \Phi(x) \quad \forall X \, \exists Y \; \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u)))$$

Обозначение: $Y = \{u \in X \mid \Phi(u)\}$.

Следствие. *Операторы*

$$X \cap Y := \{u \mid u \in X \land u \in Y\}$$
$$X \setminus Y := \{u \in X \mid u \notin Y\}$$
$$\bigcap X := \{u \mid \forall v \in X \quad u \in v\}$$

определены корректно.

Union) "Аксиома объединения":

$$\forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow \exists v \, (v \in X \land u \in v))$$

Обозначение: $Y = \bigcup X$.

Следствие. *Оператор*

$$X \cup Y := \bigcup \{X, Y\} = \{u \mid u \in X \land u \in Y\}$$

определён корректно.

Power) Пусть $x \subseteq y := \forall v \, \{v \in x \to v \in y\}$. "Аксиома степени":

$$\forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$$

Обозначение: $Y = \mathcal{P}(X) := \{u \mid u \subseteq X\}$. $\mathcal{P}(X)$ — "множество-степень X" или "булеан X".

Определение 3. Упорядоченная пара — это объект от некоторых X_1 и Y_1, который равен другому такому объекту от X_2 и Y_2 тогда и только тогда, когда $X_1 = X_2 \land Y_1 = Y_2$.

Определение 4. *Декартово произведение* X и Y $(X \times Y)$ — $\{(x; y) \mid x \in X \land y \in Y\}$.

Замечание 1. Можно нелсожно показать, что декартово произведение определено корректно.

Inf) Пусть $\mathrm{Ind}(X) := \varnothing \in X \land \forall u \, (u \in X \land u \cup \{u\} \in X)$. Если $\mathrm{Ind}(X)$, то X называется индуктивным. "Аксиома бесконечности": существует индуктивное множество.

Repl) "Схема аксиом подстановки":

$$\begin{aligned}
&\forall \Phi(x, y) \\
&\qquad \forall x \, \forall y_1 \, \forall y_2 \, ((\Phi(x, y_1) \land \Phi(x, y_2)) \to y_1 = y_2) \to \\
&\qquad \forall X \, \exists Y \, \forall y \, (y \in Y \leftrightarrow \exists x (x \in X \land \Phi(x, y)))
\end{aligned}$$

Reg) "Аксиома регулярности":

$$\forall X \, (X \neq \varnothing \to \exists u \, (u \in X \land X \cap u = \varnothing))$$

1 Отношения.

Определение 5. *Бинарное (или двухместное) отношение* R между X и Y — подмножество $X \times Y$. Если $Y = X$, R называется *бинарным (или двухместным) отношением* на X. Обозначение: $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$.

Определение 6.

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(R) &:= \{u \in X \mid \exists v \quad uRv\} && \text{“область определения } R\text{”} \\ \mathrm{range}(R) &:= \{v \in Y \mid \exists u \quad uRv\} && \text{“область значений } R\text{”} \\ R[U] &:= range(R \cap (U \times Y)) \\ R^{-1} &:= \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} \end{aligned}$$

Замечание 2.

$$\mathrm{range}(R) = \mathrm{dom}(R^{-1}) = R[X]$$
$$\mathrm{range}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R) = R^{-1}[Y]$$

Определение 7. Бинарные отношнения можно естественным образом комбинировать: для любых отношений R и Q между X и Y, Y и Z соответственно отношение

$$S = R \circ Q := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y : xRy \wedge yQz\}$$

называется композицией R и Q.

Определение 8. *Тождественное отображение* на X — $id_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Замечание 3. Тождественное отображение при композиции (не важно, правой или левой) с другим отношением не меняет его.

Определение 9. Отношение R между X и Y называется функциональным, если

$$\forall x \, \forall y_1 \, \forall y_2 \, ((xRy_1 \wedge xRy_2) \to y_1 = y_2).$$

Определение 10. *Функция* из X в Y — функциональное отношение R между X и Y, в котором $\mathrm{dom}(R) = X$. Обозначение: $R : X \to Y$.

Определение 11. *Ограничение* или *сужение* функции $f : X \to Y$ на $U \subseteq X$ — функция $f \restriction_U := f \cap (U \times Y)$.

Если $f : X \to Y$ и $g : U \to Y$, где $U \subseteq X$, таковы, что $f \restriction_U = g$, то f называется *расширением* g, а g — *органичением* f.

Определение 12. $Y^X := \{f : X \to Y\}$.

Определение 13. Функция $f : X \to Y$ называется

- *сюрьекцией*, если $range(f) = Y$;
- *иньекцией*, если f^{-1} функционально;
- *биекцией*, если f сюрьективно и инъективно.

C) “Аксиома выбора”:

$$\forall X(\varnothing \notin X \to \exists f(f : X \to \bigcup X \wedge \forall u \in X(f(u) \in u)))$$

2 Натуральные числа и индукция

Важным следствием Inf является

$$\exists X(\mathrm{Ind}(X) \wedge \forall Y(\mathrm{Ind}(Y) \to X \subseteq Y)) \qquad (\mathrm{Nat})$$

Nat описывает минимальное по включению индуктивное множество — $\mathbb{N}$, $\aleph_0$ или ω.

Доказательство. Пусть есть какое-то индуктивное X_0. Тогда рассмотрим

$$\mathbb{N} := \{x \in X_0 \mid \forall X(\mathrm{Ind}(X) \to x \in X)\}$$

По построению $\mathrm{Ind}(X) \to \mathbb{N} \subseteq X$. Также $\mathrm{Ind}(\mathbb{N})$. □

Определение 14. Определим *функцию последователя* $s : \mathbb{N} \to NN$ как

$$s := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \cup \{n\}\}$$

Вместо $s(n)$ часто пишут $n + 1$.

Определение 15. *(Естественный) порядок* на $\mathbb{N}$ — $<:= \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in m\}$.

Замечание 4. Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно:

1. $\neg(n < 0)$;
2. $n < m + 1 \leftrightarrow (n < m \vee n = m)$.

Теорема 1 (принцип индукции)**.** *Пусть X удовлетворяет условию*

$$0 \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}(n \in X \to n + 1 \in X).$$

Тогда $\mathbb{N} \subseteq X$.

Доказательство. Из условия на X следует, что $\mathbb{N} \cap X$ индуктивно. Тогда из определения $\mathbb{N}$ следует, что $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cap X \subseteq X$, значит $\mathbb{N} \subseteq X$. □

Замечание 5. В качестве X могут быть $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$.

Следствие 1.1. *$\forall n \in \mathbb{N}$ верно $n \subseteq \mathbb{N}$.*

Теорема 2 (возвратная индукция)**.** *Пусть дан X, что $\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n\ m \in X \to n \in X)$. Тогда $\mathbb{N} \subseteq X$.*

Доказательство. Докажем, что $\forall n \in \mathbb{N} n \subseteq X$, по индукции. База для 0 очевидна. Шаг очевиден, так как $n \subseteq X$, значит $n \in X$, значит $n + 1 \subseteq X$. □

Определение 16. $\mathrm{Min}(X) := \{x \in X \mid \neg\exists u \in X u \in x\}$.

Теорема 3 (принцип минимального элемента)**.** *Если $X \subset \mathbb{N}$ и $X \neq \varnothing$, то $\mathrm{Min}(X) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Min}(X) = \varnothing$. Возьмём $Y := \mathbb{N} \setminus X$. Заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n\ m \in Y \to n \in Y)$$

Тогда по принципу возвратной индукции $Y = \mathbb{N}$, а тогда $X = \varnothing$ — противоречие. □

Теорема 4 (о рекурсии). *Пусть есть $y_0 \in Y$ и $h : \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственная $f : \mathbb{N} \to Y$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \textit{если } n = 0 \\ h(m, f(m)) & \textit{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда будем называть функцию $f : k + 1 \to Y$ *правильной*, если условие в определении рекурсии верно для всех $n \in k + 1$. Также рассмотрим

$$S := \{k \in \mathbb{N} \mid \text{сущесвтует единственная правильная } f : k + 1 \to Y\}$$

Будем обозначать для каждого $k \in S$ через f_k соответствующую правильную функцию из $k+1$ в Y.

Докажем по индукции, что $S = \mathbb{N}$.

База. Очевидно, $\{(0, y_0)\}$ — единственная правильная функция из $0+1$ в Y. Поэтому $0 \in S$.

Шаг. Легко заметить, что сужение любой правильной функции на $k + 2$ на множество $k + 1$ правильно. Поэтому все правильные функции на $k + 2$ определены на $k + 1$ как f_k. Тогда значение в $k + 1$ определяется однозначно, значит правильная функция на $k + 2$ существует и единственна. □

Теорема 5 (о рекурсии, парамметризованная). *Пусть $g_0 \in Y^X$ и $h : X \times \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственна $f : X \times \mathbb{N} \to Y$, что $\forall x \in X, n \in \mathbb{N}$*

$$f(x, n) = \begin{cases} g_0(x) & \textit{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \textit{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим для каждого $x \in X$ функцию $h_x : \mathbb{N} \times Y \to Y, (n, y) \mapsto h(x, n, y)$. Тогда по теореме о рекурсии есть $f_x : \mathbb{N} \to Y$, что

$$f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

Тогда определим $f : X \times \mathbb{N} \to Y, (x, n) \mapsto f_x(n)$. В этом случае

$$f(x, n) = f_x(n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h_x(m, f_x(m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases} = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0 \\ h(x, m, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

□

Замечание 6. Заметим, что с помощью ткоремы о параметризованной рекурсии можно определить сложение, умножение и возведение в степень на натуральных числах.

Определение 17. Несложно заметить, что функциональные отношения $R \subseteq X \times Y$ — функции из подмножества X в Y. Поэтому будем называть их *частичными функциями* и обозначать как $R :\subseteq X \to Y$.

Теорема 6 (о рекурсии, частичной). *Пусть $y_0 \in Y$ и $h :\subseteq \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственна $f :\subseteq \mathbb{N} \to Y$, что*

- *для любого $n \in \mathrm{dom}(f)$,*

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \textit{если } n = 0 \\ h(m, f(m)) & \textit{если } n = m + 1 \end{cases}$$

- *либо* $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}$, *либо* $\mathrm{dom}(f) = k+1$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$, *что* $(k, f(k)) \notin \mathrm{dom}(h)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое ы $\notin Y$ и положим $Y' := Y \cup \{\text{ы}\}$. Теперь расширим h до $h' : \mathbb{N} \times Y' \to Y'$ следующим образом:

$$h'(n, y') := \begin{cases} h(n, y') & \text{если } (n, y') \in \mathrm{dom}(h) \\ \text{ы} & \text{иначе} \end{cases}$$

В силу теоремы о рекурсии существует и единственна $f' : \mathbb{N} \to Y'$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$f'(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0 \\ h'(m, f'(m)) & \text{если } n = m+1 \end{cases}$$

Возьмём $f := f' \cup (\mathbb{N} \times Y)$. Несложно убедиться, что f будет искомой. $\square$

Определение 18. *Конечными последовательностями элементов* X называются элементы множества $X^* := \{f \mid \exists n \in \mathbb{N}(f : n \to X)\}$.

Теорема 7 (о возвратной индукции). *Пусть* $h : \mathbb{N} \times Y^* \to Y$. *Тогда существует единственная* $f : \mathbb{N} \to Y$ *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = h(n, f\restriction_n)$.

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы о рекурсии, однако вместообычной индукции тут используется возвратная. [...] $\square$

3 Мощности

Определение 19. X и Y *равномощны*, если существует биекция $f : X \to Y$. Обозначение: $X \sim Y$.

Теорема 8. *Для всех* X, Y *и* Z *верно следующее:*

1. $X \sim X$;
2. $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$;
3. $X \sim Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

Пример 1. $\mathcal{P}(X) \sim 2^X$. Действительно, рассмотрим для каждого $Y \subseteq X$ функцию $\chi_Y : X \to 2$, что

$$\chi_Y(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x \in Y \\ 0 & \text{если } x \in X \setminus Y \end{cases}$$

Несложно заметить, что отображение, сопоставляющее Y функцию χ_Y есть биекция из $\mathcal{P}(x)$ в 2^X.

Определение 20. Множество X *по мощности менее или равно* Y ($X \preccurlyeq Y$), если существует инъекция из X в Y.

Множество X *по мощности (строго) менее* Y ($X \prec Y$), если $X \preccurlyeq Y \wedge X \nsim Y$.

Замечание 7. Тогда очевидно, что $X \preccurlyeq Y$ тогда и только тогда, когда X равномощно некоторому подмножеству Y.

Теорема 9.

1. $X \preccurlyeq X$.

2. $X \sim Y \Rightarrow X \preccurlyeq Y$.

3. $X \preccurlyeq Y \sim Z \Rightarrow X \preccurlyeq Z$.

4. $X \sim Y \preccurlyeq Z \Rightarrow X \preccurlyeq Z$.

5. $X \preccurlyeq Y \preccurlyeq Z \Rightarrow X \preccurlyeq Z$.

Теорема 10 (Кантора, обобщённая)**.** $X \prec \mathcal{P}(X)$.

Доказательство. Очевидно, что $f : X \to \mathcal{P}(X, x \mapsto \{x\}$ есть инъекция, поэтому $X \preccurlyeq \mathcal{P}(X)$. Покажем, что между ними нет биекции.

Предположим противное, т.е. есть биекция $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Рассмотрим $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Поскольку f — биекция, то $f(y) = Y$ для некоторого Y. В итоге мы получаем

$$y \in Y \qquad \iff \qquad y \notin f(Y) \qquad \iff \qquad y \notin Y$$

Получаем противоречие. □

Теорема 11 (Кантора-Шрёдера-Бернштейна)**.** *Если* $X \preccurlyeq Y$ *и* $Y \preccurlyeq X$, *то* $X \sim Y$.

Доказательство.

Лемма 12. *Если* $X \supseteq Y \supseteq X'$ *и* $X \sim X'$, *то* $X \sim Y \sim X'$.

Доказательство. Пусть $f : X \to X'$ — биекция. Определимм по рекурсии $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{Y_i\}_{i=0}^{\infty}$:

$$X_n := \begin{cases} X & \text{если } n = 0 \\ f[X_m] & \text{если } n = m + 1 \end{cases} \qquad Y_n := \begin{cases} Y & \text{если } n = 0 \\ f[Y_m] & \text{если } n = m + 1 \end{cases}$$

По условию $X_0 = X \supseteq Y = Y_0$ и $Y_0 = Y \supseteq X' = f(X) = X_1$. Тогда несложно убедиться по индукции по n, что $X_n \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1}$, так как $X_{n-1} \supseteq Y_{n-1} \supseteq X_n$, значит $f(X_{n-1}) \supseteq f(Y_{n-1}) \supseteq f(X_n)$, что буквально означает, что $X_n \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1}$.

Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим $U_n := X_n \setminus Y_n$. Пусть также $U := \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$, $Z := X \setminus U$.

Несложно видеть, что

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \cup Z \qquad\qquad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \cup Z$$

Также несложно видеть, что $f[U_n] = f[X_n \setminus Y_n] = f[X_n] \setminus f[Y_n] = X_{n+1} \setminus Y_{n+1} = U_{n+1}$, а потому $f[U] = U \setminus U_0$.

Тогда определим $g : X \to X$ по правилу

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in U \\ x & \text{если } x \in Z \end{cases}$$

Несложно видеть, что это инъекция. Действительно, g на U равна f, а значит есть бииекция из U в $U \setminus U_0$, также является биекцией из Z в себя, а поскольку U и Z дизъюнктны, то g является биекцией из $U \cup Z$ в $U \setminus U_0 \cup Z$, т.е. из X в Y. Значит $Y \sim X$. □

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — инъекции. Несложно видеть, что $g[Y] \subseteq X$, а $f[X] \subseteq Y$, значит $g[f[X]] \subseteq g[Y]$. Т.е. $X \supseteq g[Y] \supseteq g[f[X]]$. При этом $X \sim f[X] \sim g[f[X]]$, поэтому применяя лемму 12, имеем, что $X \sim g[Y] \sim Y$, значит $X \sim Y$. □