Геометрия и топология.

Лектор — Евгений Анатольевич Фоминых
Создатель конспекта — Глеб Минаев *

TODOs

Содержание

Литература:

- Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М., "Элементарная топология", М.:МЦНМО, 2012.
- James Munkres, "Topology".

1 Алгебраическая топология

1.1 Фундаментальная группа

Определение 1. *Ретракция* — непрерывное отображение $f : X \to A$, где A — подпространство X, что $f|_A = \mathrm{Id}_A$.

Если существует ретракция $f : X \to A$, то A называется *ретрактом* пространства X.

Пример 1.

1. Всякое одноточечное подмножество является ретрактом.
2. Никакое двухточечное подмножество прямой не является ретрактом.

Теорема 1. *Пусть дано подпространство A пространства X. TFAE*

1. *A — ретракт X.*
2. *всякое непрерывное отображение $g : A \to Y$ продолжается до непрерывного отображения $X \to Y$.*

---

*Оригинал конспекта расположен на GitHub. Также на GitHub доступен репозиторий с другими конспектами.

Доказательство. Пусть A — ретракт. Тогда есть ретракция $\rho : X \to A$, а значит $g \circ \rho$ — продолжение g на X.

С другой стороны, если всякое непрерывное $g : A \to Y$ продолжимо до непрерывного $X \to Y$, то ретракцию A можно получить как продолжение $\mathrm{Id}_A : A \to A$. $\square$

Лемма 2. *Пусть дано подпространство A пространства X и точка $x \in A$. Если $\rho : X \to A$ — ретракция, а $\mathrm{in} : A \to X$ — включение (тождественное отображение), то $\rho_\star : \pi_1(X, x) \to \pi_1(A, x)$ — сюръекция, а $\mathrm{in}_\star : \pi_1(A, x) \to \pi_1(X, x)$ — инъекция.*

Доказательство. $\rho \circ \mathrm{in} = \mathrm{Id}_A$. Следовательно $(\rho \circ \mathrm{in})_\star = \rho_\star \circ \mathrm{in}_\star = \mathrm{Id}_\star = \mathrm{Id}$, откуда следует, что $\rho_\star$ — сюръекция, а $\mathrm{in}_\star$ — инъекция. $\square$

Теорема 3 (Борсука)**.** *Не существует ретракции $D^n \to S^{n-1}$.*

Доказательство в размерности 2. Предположим противное. Пусть $\rho : D^2 \to S^1$ — ретракция, $x \in S^1$. Из леммы 2 следует, что $in_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(D^2)$ должно быть инъекцией. Но $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, а $\pi_1(D^2) = \{0\}$. А инъекции $\mathbb{Z} \to \{0\}$ не существует — противоречие. $\square$

Замечание 1. На самом деле рассуждение работает в любой размерности. Только вместо π_1 надо взять π_{n-1}. Там опять же окажется, что лемма верна, $\pi_{n-1}(D^n)$ тривиальна, а $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ — содержит $\mathbb{Z}$ как подгруппу.

Определение 2. Точка $a \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения $f : X \to X$, если $f(a) = a$.

Пространство X, говорят, *обладает свойством неподвижной точки*, если всякое непрерывное отображение $f : X \to X$ имеет неподвижную точку.

Пример 2. $[a; b]$ обладает свойством неподвижной точки.

Теорема 4 (Брауэра)**.** *Любое непрерывное отображение $f : D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку.*

Доказательство в размерности 2. Предположим противное, $f(x) \neq x$ для всех $x \in D^2$. Построим $g : D^2 \to S^1$ как пересечение открытого луча $(f(x); x; \infty)$ и S^1. Несложно удостовериться, что для всех точек x, что $f(x) \neq x$, функция g определена и непрерывна в некоторой окрестности x. Это противоречит теореме Борсука. $\square$

Замечание 2. В точности также это можно доказать для любой размерности, но потребуется теорема Борсука большей размерности.

Определение 3. X и Y называются *гомотопически эквивалентными* (и пишут $X \sim Y$), если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ и $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$.

Такие f и g называются *гомотопически обратными* отображениями. При этом каждое из них называется *гомотопической эквивалентностью.*

Пример 3. $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно $\{0\}$.

Определение 4. Ретракция $f : X \to A$ называется *деформационной ретракцией*, если её композиция с включением $\mathrm{in} : A \to X$ гомотопна тождественному отображению, т.е.

$$\mathrm{in} \circ f \sim \mathrm{Id}_X.$$

Если существует деформационная ретракция X на A, то A называется *деформационным ретрактом* пространства X.

Теорема 5. *Деформационная ретракция — гомотопическая эквивалентность.*

Доказательство. Действительно, если $f : X \to A$ — деформационная ретракция, а $\mathrm{in} : A \to X$ включение, то $f \circ \mathrm{in} = \mathrm{Id}_A \sim \mathrm{Id}_A$ и

$$\mathrm{in} \circ f \sim \mathrm{Id}_A$$

по опеределению деформационной ретракции. Следовательно f и in — гомтопически обратные друг другу деформационные ретракции. □

Следствие 5.1. *Деформационные ретракты гомотопически эквивалентны своим исходным пространствам.*

Пример 4.

1. S^{n-1} — деформационный ретракт $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

2. S^1 — деформационный ретракт ленты Мёбиуса и кольца ($S^1 \times [0; 1]$).

3. Букет n окружностей и окружность с n радиусами — деформационный ретракт плоскости без n точек.

4. Букет двух окружностей — деформационный ретракт тора с дыркой.

Теорема 6. *Гомотопическая эквивалентность — "отношение эквивалентности" между топологическими пространствами.*

Доказательство.

- **Рефлексивность.** Очевидна, так как Id является деформационным ретрактом $X \to X$.

- **Симметричность.** Если $X \sim Y$, то есть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, что $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ и $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$. Тогда $Y \sim X$.

- **Транзитивность.** Пусть $X \sim Y \sim Z$. Тогда имеются $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $h : Y \to Z$ и $i : Z \to Y$, что $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$, $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$, $i \circ h \sim \mathrm{Id}_Y$, $h \circ i \sim \mathrm{Id}_Z$. Следовательно

$$(g \circ i) \circ (h \circ f) = g \circ (i \circ h) \circ f \sim g \circ \mathrm{Id}_Y \circ f = g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$$

и

$$(h \circ f) \circ (g \circ i) = h \circ (f \circ g) \circ i \sim h \circ \mathrm{Id}_Y \circ i = h \circ i \sim \mathrm{Id}_Z.$$

Следовательно $(h \circ f)$ и $(g \circ i)$ — гомотопически обратные гомотопические эквивалентности. Значит $X \sim Z$.

□

Определение 5. Класс пространств, гомотопически эквивалентных данному X, называется *гомотопическим типом.* Свойства (характеристики) топологических пространств, одинаковые у гомотопически эквивалентных, — *гомотопические свойства* (*гомотопические инварианты*).

Упражнение 1. Число компонент (линейной) связности — гомотопический инвариант.

Теорема 7. *Пусть X и Y — гомотопно эквивалентные поверхности, а $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ — гомотопически обратные гомотопические эквивалентности. Пусть также фиксирована $x_0 \in X$. Тогда*

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, f(x_0)).$$

Доказательство.

Лемма 7.1. *Пусть $f, g : X \to Y$ — непрерывные отображения, а $H : X \times [0;1] \to Y$ — гомотопия между f и g. Пусть также даны $x_0 \in X$, $y_0 := f(x_0)$, $y_1 := g(x_0)$ и путь $\gamma(t) := H(x_0, t)$ из y_0 в y_1. Обозначим за T_γ — сопряжение по пути γ, т.е. $T_\gamma(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma$. Тогда*

$$f_\star = T_\gamma \circ g_\star.$$

Доказательство. Условие равенства функций $f_\star = T_\gamma \circ g_\star$ означает, что для всякого $\alpha \in \Omega(X, x_0)$

$$f_\star([\alpha]) = T_\gamma(g_\star([\alpha])).$$

Последнее значит, что

$$[f \circ \alpha] = [\gamma^{-1}(g \circ \alpha)\gamma],$$

или говоря иначе,

$$f \circ \alpha \sim \gamma^{-1}(g \circ \alpha)\gamma.$$

При этом заметим, что

$$f \circ \alpha = H(\alpha(s), 0), \qquad g \circ \alpha = H(\alpha(s), 1).$$

Рассмотрим

$$F : [0;1]^2 \to X \times [0;1], (s,t) \mapsto (\alpha(s), t).$$

Несложно видеть, что

$$F(s, 0) = (\alpha(s), 0), \qquad F(s, 1) = (\alpha(s), 1), \qquad F(0, t) = F(1, t) = (x_0, t).$$

Таким образом

$$(H \circ F)(s, 0) = f \circ \alpha, \qquad (H \circ F)(s, 1) = g \circ \alpha, \qquad (H \circ F)(0, t) = F(1, t) = \gamma.$$

Зафиксируем в $[0;1]^2$ линейные пути $\varphi : (0,0) \mapsto (1,0)$ и $\psi : (0,0) \mapsto (0,1) \mapsto (1,1) \mapsto (1,0)$. Несложно видеть, что

$$H \circ F \circ \varphi = f \circ \alpha, \qquad H \circ F \circ \psi = \gamma^{-1}(g \circ \alpha)\gamma.$$

При этом $[0;1]^2$ выпукло, значит есть гомотопия G, переводящая φ в γ. В таком случае $H \circ F \circ G$ — гомотопия, переводящая $f \circ \alpha$ в $\gamma^{-1}(g \circ \alpha)\gamma$. □

Заметим, что $g \circ f$ гомотопно Id_X. Значит в контексте x_0 и $\pi_1(X, x_0)$ есть некоторое сопряжение T_γ, что

$$T_\gamma \circ (g \circ f)_\star = (\mathrm{Id}_X)_\star = \mathrm{Id}.$$

При этом T_γ есть изоморфизм групп (биекция). Это в частности означает, что $g_\star \circ f_\star$ является биекцией. Отсюда следует, что $g_\star$ инъективно, а $f_\star$ сюръективно.

Повторяя рассуждения в обратную сторону, получаем, что $f_\star$ и $g_\star$ являются биекциями. Поэтому

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, f(x_0)).$$

□

Следствие 7.1. *$f_\star$ (кроме того, что индуцирует биекцию из множеств компонент линейной связности X и их фундаментальных групп в множества тех же у Y) индуцирует изоморфизмы фундаментальных групп компонент линейной связности X.*

Следствие 7.2. *Если X линейно связно (а тогда Y тоже), то $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$.*

Определение 6. Топологическое пространство X *стягиваемо*, если гомотопически эквивалентно точке.

Лемма 8. *TFAE*

1. *X стягиваемо.*
2. *Id_X гомотопно константному отображению.*
3. *Некоторая точка — деформационный ретракт.*
4. *Всякая точка — деформационный ретракт.*

Пример 5. Например, стягиваемы следующие пространства.

1. $\mathbb{R}^n$.
2. Выпуклые множества.
3. Звёздные множества.
4. Деревья.

Лемма 9. *Пусть $h : S^1 \to X$ — непрерывное отображение. TFAE*

1. *h гомотопно постоянному отображению.*
2. *h продолжается до непрерывного отображения $D^2 \to X$.*
3. *$h_\star$ — тривиальный гомоморфизм.*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$) Существует гомотопия H между h и константным отображением. Это значит, что $H : S^1 \times [0;1] \to X$ — непрерывно, и $H(x,1) = \mathrm{const}$. Это значит, что пространство $S^1 \times [0;1]$ можно склеить по множеству $S^1 \times \{1\}$ (так как на нём H константна) и H переопределится в некоторую функцию H'. При этом множество-прообраз H' гомеоморфно D^2. Следовательно можно считать, что $H' : D^2 \to X$. При этом H' является доопределением, так как $H'|_{S^1} = H|_{S^1 \times \{0\}} = h$.

$2 \Rightarrow 1$) Пусть h продолжена до H на D^2. Тогда определим

$$G : S^1 \times [0;1] \to X, (\alpha, r) \mapsto H(re^{\alpha i}).$$

Несложно видеть, что G — гомотопия между h и константным отображением.

$1 \Leftrightarrow 3$) Если $h_\star$ является тривиальным гомоморфизмом фундаментальных групп, то $h = h \circ \alpha \sim \mathrm{const}$, где α — один оборот по окружности, т.е. h гомотопно константному отображению.

Если h гомотопно постоянному отображению, то $\alpha \circ h = h \sim \mathrm{const}$, т.е. $f_\star([\alpha]) = e$. При этом $[\alpha]$ порождает группу $\pi_1(S^1)$. Следовательно, $h_\star$ — тривиальный гомоморфизм.

$\square$

Теорема 10 (основная теорема алгебры)**.** *Всякий многочлен из $\mathbb{C}[z]$ положительной степени имеет корень.*

Доказательство. WLOG нам дан многочлен

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 z^0.$$

Также WLOG $|a_{n-1}| + \cdots + |a_0| < 1$, так как если сделать замену $z = y/c$, то задача сведётся к многочлену

$$y^n + ca_{n-1}y^{n-1} + \cdots + c^n a_0.$$

В таком случае

$$|a_{n-1}| + \cdots + |a_0| = |c||a_{n-1}| + \cdots + |c|^n|a_0|.$$

Значит можно взять достаточно маленькое значение $|c| > 0$, и тогда полученная сумма будет меньше 1.

Предположим противное, т.е. у данного многочлена нет корней. Тогда функция

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 z^0$$

непрерывна и имеет область значений $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следовательно, поскольку f определена D^2, то $f|_{S^1}$ гомотопна постоянному отображению.

Определим функцию

$$g : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^n$$

и функцию

$$H : S^1 \times [0; 1] \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 z^0).$$

Заметим, что

$$|H(z,t)| \geqslant |z^n| - |t|(|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_0||z|^0) \geqslant 1 - (|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|) > 0,$$

т.е. $H \neq 0$. Следовательно, H является гомтопией между f и g в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Таким образом f гомотопно g и константной функции. При этом g не гомотопно константной функции, так как определяет n оборотов по окружности, что не является тривиальным гомоморфизмом $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^1)$ на себя — противоречие. $\square$

Теорема 11 (Борсука-Улама)**.** *Для любой непрерывной функции $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(-x) = f(x)$.*

Доказательство для размерности 1. Функция $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^1, x \mapsto f(x) - f(-x)$ определена на компакте, значит множество её значений есть отрезок. При этом φ нечётна, значит это отрезок с серединой в 0. Таким образом в какой-то точке φ принимает 0, т.е. в этой точке $f(x) = f(-x)$. $\square$

Доказательство для размерности 2. Предположим противное, т.е. $f(x) \neq f(-x)$ ни в какой точке. Тогда можно определить функцию

$$g : S^2 \to S^1, \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Понятно, что g нечётна и непрерывна.

Рассмотрим нативные проекции $p_1 : S^1 \to \mathbb{R}P^1$ и $p_2 : S^2 \to \mathbb{R}P^2$. Поскольку g нечётна, то $p_1 \circ g$ чётна, а значит $\varphi := p_1 \circ g \circ p_2^{-1}$ определена. При этом $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$, а $\pi_1(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$. Т.е. не существует нетривиальных гомоморфизмов $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$. Таким образом $\varphi_\star$ тривиален.

Пусть α — нетривиальная петля в $\mathbb{R}P^2$. Тогда при помощи p_2 её можно поднять в путь $\widetilde{\alpha}$. При этом из нетривиальности α следует, что концы $\widetilde{\alpha}$ не совпадают, а являются противоположными. Следовательно $g \circ \widetilde{\alpha}$ — путь с противоположными концами. Но в таком случае $p_1 \circ g \circ \widetilde{\alpha}$ является нетривиальной петлёй в $\mathbb{R}P^1$. Т.е. $\varphi_\star$ отправил не нейтральный элемент в не нейтральный. Следовательно, $\varphi_\star$ нетривиален — противоречие. $\square$

Определение 7. *Клеточное пространство* (также "*клеточный комплекс*", "*CW-комплекс*" (closure-finiteness + weak topology)) размерности n определяется по индукции следующим образом.

- Клеточное пространство размерности 0 — дискретное пространство.
- Клеточное пространство размерности $n \in N$ — топологическое пространство X, которое может быть получено (с точностью до гомеоморфизма) из клеточного пространства Y размерности $k < n$ приклеиванием набора $\{D_i^n\}_{i \in I}$ копий диска D^n по непрерывным отображениям $\varphi_i : \partial D_i^n \to Y$, где ∂D_i^n — краевая сфера D_i^n.

Клеточное разбиение (*клеточная структура*) — конкретный способ представить X в таком виде, вместе с аналогичным представлением Y и так далее до размерности 0. Клетки — внутренности приклеиваемых дисков, а также точки исходного 0-мерного пространства.

Определение 8 (другое)**.** *Клеточное разбиение* хаусдорфова пространства X — это следующая структура:

- X разбито на подмножества e_i ($i \in I$) (*клетки*). Каждой клетке приписано число из $\mathbb{N} \cup \{0\}$ (*размерность*), клетка размерности n гомеоморфна открытому шару в $\mathbb{R}^n$. В частности, 0-мерные клетки — точки. Размерность клетки часто обозначают верхним индексом: e_i^n.
- Для каждой клетки e_i^n есть приклеивающее отображение $\varphi_i : D^n \to X$ такое, что сужение φ_i^n на открытый шар — гомеоморфизм на e_i и $\varphi_i^n(\partial D^n)$ содержится в конечном объединении клеток меньшей размерности.
- Множество $A \subseteq X$ замкнуто тогда и только тогда, когда его пересечение с замыканием любой клетки замкнуто.

Определение 9. Клеточный комплекс называют

- *конечным*, если клеток конечное количество. (Равносильно компактности.)
- *локально конечным*, если клетки образуют локально конечное покрытие.
- *конечномерным*, если размерности клеток ограничены; при этом максимальная размерность клетки называется размерностью пространства.

Определение 10. Пусть X — клеточное пространство с зафиксированным клеточным разбиением. Его *k-мерный остов* — объединение всех клеток размерности не больше k. Обозначение: $\mathrm{sk}_k(X)$ или X_k.

Замечание. Остовы вложены друг в друга: $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X$.

Пример 6. Граф — 1-мерное клеточное пространство.

Замечание. Для упрощения доказательств будем в основном рассматривать только конечные или локально конечные графы (граф локально конечен, если степень каждой вершины конечна).

Теорема 12. *Пусть Γ — граф, X — топологическое пространство. Тогда отображение $f : \Gamma \to X$ непрерывно тогда и только тогда, когда его сужение на каждое (замкнутое) ребро графа непрерывно.*

Доказательство. В локально конечном графе его множество ребер — локально конечное замкнутое покрытие. А такие покрытия — фундаментальны. $\square$

Пример 7 (клеточное разбиение сферы). S^n имеет клеточное разбиение из двух клеток: одной 0-мерной и одной n-мерной. Диск D^n приклеивается к точке по единственному возможному отображению из S^{n-1} в эту точку.

Пример 8 (клеточное разбиение тора). Рассмотрим тор, склеенный из квадрата. Все вершины склеиваются в одну, это 0-мерная клетка. Стороны склеиваются в две петли, это 1-мерные клетки. Квадрат, приклеиваемый к этому букету окружностей — 2-мерная клетка.

Теорема 13. *Фундаментальная группа букета n окружностей — свободная группа с n образующими (обозначение: F_n). В качестве свободных образующих можно взять однократные обходы окружностей букета.*

Доказательство. Пусть B — букет окружностей, b_0 — его выделенная точка, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega(B, b_0)$ — петли, соответствующие окружностям букета. Построим универсальное накрытие $p : T \to B$, где T — некоторое бесконечное дерево.

Построение T: Вершины — несократимые слова из букв $x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$. (Они же — элементы свободной группы F_n с образующими $x_1, \ldots, x_n$.) Соединяем ориентированным ребром два элемента группы, если они отличаются умножением справа на x_i (или x_i^{-1}).

Построение $p : T \to B$: Все вершины отображаем в b_0. Ребро между вершинами p и q, где $q = px_i$, отображаем в α_i согласно направлению обхода.

Покажем, что p — накрытие. В силу локальной конечности T отображение p непрерывно. При этом у всякой точки отличной от b_0 есть окрестность-интервал, находящийся строго внутри петли α_i, а значит p для всякого прообраза этой точки задаёт гомеоморфизм с окрестностью выбранного прообраза. При этом у b_0 по аналогии есть окрестность-крест, которая тоже гомеоморфна по p окрестностям-крестам прообраза b_0. Это и значит, что p — накрытие.

T, как всякое дерево, стягиваемо. Следовательно, односвязно. Таким образом $\pi_1(T, e)$ тривиальна. При этом путь $\alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \alpha_{i_k}^{\varepsilon_k}$ поднимается до пути $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \alpha_{i_k}^{\varepsilon_k}$ (не зависимо от начальной точки), а значит фундаментальная группа B равна F_n. □

Определение 11. Клеточное подпространство клеточного пространства X — замкнутое множество $Y \subseteq X$, состоящее из целых клеток.

Теорема 14 (без доказательства)**.** *Пусть X — клеточное пространство, $Y \subseteq X$ — клеточное подпространство, Z — топологическое пространство, $f : X \to Z$ — непрерывное отображение, $H_0 : Y \times [0; 1] \to Z$ — гомотопия, $H_0(\cdot, 0) = f|_Y$. Тогда существует гомотопия $H : X \times [0; 1] \to Z$, продолжающая H_0 и такая, что $H(\cdot, 0) = f$.*

Лемма 15. *Пусть Γ — локально конечный граф, $T \subseteq \Gamma$ — стягиваемый подграф. Тогда существует непрерывное $h : \Gamma \to \Gamma$ такое, что*

- $h|_T = \mathrm{const}$,
- $h \sim \mathrm{Id}_\Gamma$,
- *существует гомотопия H между h и Id_Γ, что при всех $t \in [0; 1]$ верно $H(T, t) \subseteq T$.*

Доказательство. Так как T стягиваемо, существует гомотопия $H_0 : T \times [0; 1] \to T$ такая, что $H_0(\cdot, 0) = \mathrm{Id}_T$. Обозначим $M_0 = T \times [0; 1]$.

Цель: построить $H : \Gamma \times [0; 1] \to \Gamma$ такое, что $H(\cdot, 0) = \mathrm{Id}_\Gamma$ и $H(\cdot, 1)|_T = \mathrm{const}$.

Сначала продолжим H_0 до $H_1 : M_1 \to \Gamma$, где $M_1 = M_0 \cup (\Gamma \times \{0\})$ и $H_1(\cdot, 0) = \mathrm{Id}_\Gamma$.

Пусть V — множество вершин $\Gamma \backslash T$. Продолжим H_1 до $H_2 : M_2 \to \Gamma$, где $M_2 = M_1 \cup (V \times [0; 1])$ и $H_2(v, t) = H_1(v, 0) = v$ для всех $v \in V$ и $t \in [0; 1]$. Итак, мы определили отображение на множестве $M_2 = (\Gamma \times \{0\}) \cup ((T \cup V) \times [0; 1])$.

Легко видеть, что существует ретракция $\psi : \Gamma \times [0; 1] \to M_2$ (она строится отдельно на произведении каждого ребра и $[0; 1]$). Определим $H = H_2 \circ \psi$ и $h = H(\cdot, 1)$. □

Теорема 16. *Пусть Γ — локально конечный граф, а $T \subseteq \Gamma$ — стягиваемый подграф. Тогда $\Gamma/T \sim \Gamma$.*

Доказательство. Пусть $h : \Gamma \to \Gamma$ — отображение из леммы. Т.к. $h|_T = \mathrm{const}$, то h пропускается через факторпространство: т.е. существует непрерывное $f : \Gamma/T \to \Gamma$, т.ч. $h = f \circ p$, где $p : \Gamma \to \Gamma/T$ — проекция факторизации.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & \Gamma \\
& \Gamma/T \arrow[ur, dashed, "\exists! f"'] &
\end{tikzcd}$$

Покажем, что отображения p и f гомотопически обратны. По лемме существует гомотопия $H : \Gamma \times [0;1] \to \Gamma$, т.ч. $H(\cdot,0) = \mathrm{Id}_\Gamma$, $H(\cdot,1) = h$, $H(T,t) \subseteq T$ при всех t. Поэтому $f \circ p = h \sim \mathrm{Id}_\Gamma$.

Осталось показать, что $p \circ f \sim \mathrm{Id}_{\Gamma/T}$. Зададим $R : \Gamma \times [0;1] \to \Gamma/T$ так: $R(\cdot,t) = p \circ H(\cdot,t)$. Тогда R — гомотопия: $R(\cdot,0) = p \circ H(\cdot,0) = p$, $R(\cdot,1) = p \circ H(\cdot,1) = p \circ h$.

Так как $H(T,t) \subseteq T$, $R(\cdot,t)|_T = \mathrm{const}$, значит $R(\cdot,t)$ пропускается через факторизацию, т.е. есть $G : \Gamma/T \times [0;1] \to \Gamma/T$, т.ч. $R(\cdot,t) = G(\cdot,t) \circ p$.

Это и есть искомая гомотопия между $G(\cdot,0) = \mathrm{Id}_{\Gamma/T}$ и $G(\cdot,1) = p \circ f$. (Пояснение: $G(\cdot,1) \circ p = R(\cdot,1) = p \circ h = p \circ f \circ p$, т.е. $G(\cdot,1) = p \circ f$.) $\square$

Следствие 16.1. *Связный граф с n вершинами и m ребрами гомотопически эквивалентен букету $m-n+1$ окружностей (или точке, если $m-n+1=0$).*

Следствие 16.2. *Фундаментальная группа связного графа с n вершинами и m ребрами — свободная группа с $m-n+1$ образующими.*

Теорема 17. *Пусть Y — топологическое пространство, X получается приклеиванием к Y диска D^2 по непрерывному отображению $\widehat{\alpha} : S^1 \to Y$. Обозначим за $\alpha(t) := \widehat{\alpha}(e^{2\pi i t})$, а за $x_0 = \alpha(0) = \alpha(1)$. Тогда*

$$\pi_1(X,x_0) \simeq \pi_1(Y,x_0)/N([\alpha]),$$

где $N([\alpha])$ — нормальное замыкание элемента $[\alpha]$ фундаментальной группы $\pi_1(Y,x_0)$.

Доказательство. Переформулировка: Пусть $\mathrm{in} : Y \to X$ — включение и $\mathrm{in}_\star : \pi_1(Y,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ — индуцированный гомоморфизм. Докажем, что $\mathrm{in}_\star$ — сюръекция, а $\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_\star) = N([\alpha])$. Из этого будет следовать теорема.

$\widehat{\alpha}$ очевидно продолжается до непрерывного отображения $D^2 \to X$, сужение которого на внутренность диска — гомеоморфизм. Поэтому далее на $X \setminus Y$ будем смотреть как на открытый диск.

Пусть q — центр диска $X \setminus Y$. Тогда $X \setminus \{q\} \sim Y$ (деформационная ретракция) и $\pi_1(Y,x_0) = \pi_1(X \setminus \{q\}, x_0)$.

Сюръективность $\mathrm{in}_\star$ равносильна утверждению: любая петля $\beta \in \Omega(X,x_0)$ гомотопна петле, содержащейся в $X \setminus \{q\}$.

Утверждение про петлю β доказывается аналогично теореме об односвязности сфер: малым шевелением петля β переводится в гомотопную петлю, которая вблизи q состоит из отрезков. Еще одним малым шевелением сделаем, чтобы отрезки обходили q.

Покажем, что $N([\alpha]) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{in}_\star)$. Т.к. $\widehat{\alpha}$ продолжается до непрерывного отображения $D^2 \to X$, то $\widehat{\alpha}$ гомотопно постоянному отображению. Следовательно, $[\alpha] \in \mathrm{Ker}(\mathrm{in}_\star)$. Итак, $N([\alpha])$ — пересечение всех нормальных подгрупп, содержащих $[\alpha]$, а $\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_\star)$ — нормальная подгруппа.

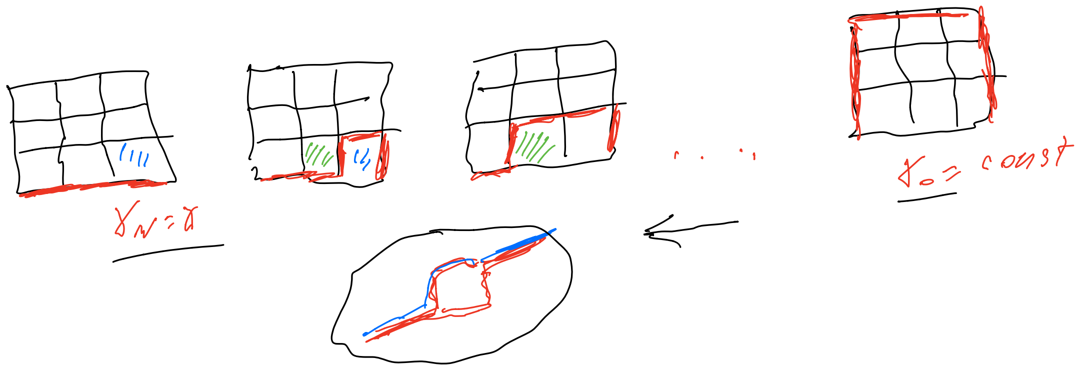
Осталось доказать $\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_\star) \subseteq N([\alpha])$. Пусть $\gamma \in \Omega(Y,x_0)$ — такая петля, что $[\gamma] \in \mathrm{Ker}(\mathrm{in}_\star)$. Построим в $X \setminus \{q\}$ такую последовательность петель $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, где $\gamma_0 = \mathrm{const}$, $\gamma_n = \gamma$, что каждый элемент $[\gamma_{i+1}]$ получается из элемента $[\gamma_i]$ умножением на элемент из $N([\alpha])$. Из этого будет следовать $[\gamma] \in N([\alpha])$, т.к. $[\gamma_0] = e$.

Т.к. $\mathrm{in}_\star([\gamma]) = [\gamma]_X = 0$, то γ стягиваема в X. Т.е. существует такая гомотопия $H : [0;1] \times [0;1] \to X$, что: $H(s,0) = \gamma(s)$, $H(0,t) = H(1,t) = H(s,1) = x_0$.

Покроем X открытыми множествами $U = X \setminus Y$ и $V = X \setminus \{q\}$ и применим лемму Лебега для отображения H. Получим такое $\delta > 0$, что H-образ любого δ-шара в $[0;1]^2$ содержится в U или V. Разобьём K на квадратики со стороной меньше $\delta/2$, будем называть сеткой объединение их сторон.

Малым шевелением H сделаем так, что образ сетки не задевает q, сохраняя свойство, что образ всякого квадратика (с границей) лежит либо в U, либо в V, и не меняя значений на границе H. Для этого сначала пошевелим H так, что q не попадает в узлы. Затем выпрямляем образы сторон сетки, лежащие в $X \setminus Y$. И на конец в каждом квадратике с поправленной стороной продолжаем отображение с границы квадрата на внутренность (лемма о продолжении отображения с окружности на диск).

Строим в $X \setminus \{q\}$ последовательность петель γ_N, γ_{N-1}, ..., $\gamma_0 = \mathrm{const}$, где каждая γ_i — H-образ ломаной на сетке (см. рисунок), отличающейся от предыдущей на один квадратик.



Докажем, что в группе $\pi_1(Y, x_0)$ элементы $[\gamma_i]$ и $[\gamma_{i+1}]$ отличаются умножением на элемент из $N([\alpha])$. Запишем пути γ_i и γ_{i+1} в виде: $\gamma_i = uv_1w$, $\gamma_{i+1} = uv_2w$, где u, v_1, v_2, w — пути, u и w — общие части γ_i и γ_{i+1}, а v_1 и v_2 — отличающиеся участки. Тогда $\gamma_{i+1} \sim uv_2v_1^{-1}u^{-1}\gamma_i$. Т.е. $[\gamma_i]$ и $[\gamma_{i+1}]$ отличаются умножением на $[uv_2v_1^{-1}u^{-1}]$. Всё классы гомотопности — в пространстве $X \setminus \{q\}$.

Осталось доказать, что $[uv_2v_1^{-1}u^{-1}] \in N([\alpha])$. Обозначим $\beta = v_2v_1^{-1}$, в новых обозначениях надо доказать, что $[u\beta u^{-1}] \in N([\alpha])$. Петля β — образ границы маленького квадратика, а значит содержится и стягиваема либо в $X \setminus Y$, либо в $X \setminus \{q\}$.

Если β стягиваема в $X \setminus \{q\}$, то $u\beta u^{-1}$ тоже. Следовательно, $[u\beta u^{-1}]$ — единица группы $\pi_1(X \setminus \{q\}, x_0)$, и тогда $[u\beta u^{-1}] \in N([\alpha])$.

Если β содержится в $X \setminus Y$, то она — часть сетки, и поэтому не проходит через q. Подкруткой в диске и радиальной проекцией β переводится в петлю $\beta_1 = \widehat{\alpha} \circ \theta$, где $\theta \in \Omega(S_1, (1,0))$. Это реализуется гомотопией, определенной на всём $X \setminus \{q\}$; при этой гомотопии u переходит в некоторую петлю $u_1 \in \Omega(Y, x_0)$. Значит петля $u\beta u^{-1}$ гомотопна произведению петель $u_1\beta_1u_1^{-1}$. Осталось доказать, что $[u_1\beta_1u_1^{-1}] \in N([\alpha])$. θ гомотопна k-кратному обходу окружности (для некоторого $k \in Z$). Следовательно, $\beta_1 \sim \alpha^k$. Тогда $[u_1\beta_1u_1^{-1}] = [u_1\alpha^ku_1^{-1}] = [u_1\alpha u_1^{-1}]^k \in N([\alpha])$. □

Следствие 17.1. *Если* $\pi_1(Y) = \langle f_1, \ldots, f_n \mid w_1(\overline{f}), \ldots, w_k(\overline{f})\rangle$, *а* $[\alpha] = w_{k+1}(\overline{f})$, *то*

$$\pi_1(X) = \langle f_1, \ldots, f_n \mid w_1(\overline{f}), \ldots, w_{k+1}(\overline{f})\rangle.$$

Пример 9. Тор — это букет из двух окружностей, на которую наклеили 2-клетку. Поэтому фундаментальная группа тора — $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle = \mathbb{Z}^2$.

Теорема 18.