№2

Введём новые обозначения:

- $P := \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$;
- C — выпуклая оболочка множества точек $\{z_j\}_{j=1}^{n}$.

Лемма. Множество корней многочлена P' есть объединение множества кратных корней P и множества корней функции

$$\varphi(z) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j}$$

Доказательство.

Заметим, что общие корни ~~функции~~ P и P' суть кратные корни P, а кратные корни P являются корнями P и P'. Тогда покажем, что остальные корни P' суть корни φ. Заметим, что алгебраически

$$P'(z) = P(z)\,\varphi(z)$$

Следовательно всякий корень P', не являющийся корнем P, будет корнем φ, а всякий корень φ будет корнем P', но не корнем P. $\square$

а) Если ξ есть кратный корень P, то утвержде-
ние очевидно; следовательно предположим
обратное. Тогда мы имеем, что

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\xi - z_j} = 0$$

Отсюда понятным образом следует, что
нет прямой, относительно которой все век-
тора из набора

$$\left\{\frac{1}{\xi - z_j}\right\}_{j=1}^{n}$$

лежат в одной (открытой!) полуплос-
кости, так как иначе ~~их~~ проекция их
суммы на нормаль будет равна сумме про-
екций с одним и тем же знаком, а значит
не равна нулю. Поэтому тем же свой-
ством обладают и вектора из набора

$$\{\xi - z_j\}_{j=1}^{n}$$

(так как их направления отражаются от-
носительно вещественной оси). Значит нет
разделяющей прямой C и точки ξ: если бы

у них была разделяющая прямая, то, параллельно перенеся её в ζ, мы получим прямую, относительно которой все вектора из

$$\{\zeta - z_j\}_{j=1}^{n}$$

лежат в одной открытой полуплоскости. Следовательно ζ не лежит в C.

б) Введём немного другие обозначения. Пусть даны комплексные α и $\beta_1, \ldots, \beta_n$. P — многочлен с корнями $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Нужно показать, что

$$|\zeta - \alpha| \geq \frac{1}{n+1} \min_i |\beta_i - \alpha|.$$

Если ζ есть кратный корень P, то утверждение очевидно: есть $\beta_j = \zeta$, а значит

$$|\zeta - \alpha| = |\beta_j - \alpha| \geq \min_i |\beta_i - \alpha| \geq \frac{1}{n+1} \min_i |\beta_i - \alpha|.$$

следовательно предположим обратное. Обозначим

$$a := \frac{1}{\zeta - \alpha} \quad \text{и} \quad b_i := \frac{1}{\zeta - \beta_i}$$

Так нам надо показать, что

$$\frac{1}{|a|} \geq \frac{1}{n+1} \min_i \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b_i}\right|$$

Вспомним, что

$$\frac{1}{\zeta - \alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\zeta - \beta_i} = 0, \text{ т. е. } a + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{n+1} \min_i \frac{|b_i - a|}{|b_i|} = \frac{1}{n+1} \min_i \frac{|b_i + \sum_{j=1}^{n} b_j|}{|b_i|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \min_i \frac{|b_i| + \sum_{j=1}^{n} |b_j|}{|b_i|} \leq \frac{1}{n+1}\left(1 + \min_i \sum_{j=1}^{n} \frac{|b_j|}{|b_i|}\right)$$

Заметим, что в последней сумме чем больше $|b_i|$, тем меньше значение суммы. Следовательно пусть

$$|b_k| = \max_i |b_i|$$

Значит

$$\frac{1}{n+1}\left(1 + \min_i \sum_{j=1}^{n} \frac{|b_j|}{|b_i|}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{|b_j|}{|b_k|}\right) \leq \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{|b_k|}{|b_k|}\right) = 1$$

Таким образом

$$\frac{1}{n+1} \min_i \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b_i}\right| = \frac{1}{n+1} \min_i \frac{|b_i - a|}{|a||b_i|} = \frac{1}{|a|} \frac{1}{n+1} \min_i \frac{|b_i - a|}{|b_i|}$$

$$\leq \frac{1}{|a|} \cdot 1 = \frac{1}{|a|}$$

№3

Обозначим $\{\overline{e}_i\}_{i=1}^d$ стандартный базис $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим

$$G(x) := F(x) - \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(0)$$

Функция G будет выпуклой и имеет нулевые частные производные в нуле. Если мы покажем, что G будет дифференцируема в нуле, то и F будет таковой.

Заметим, что для всякого $\varepsilon>0$ есть $\{\delta_i\}_{i=1}^d$ что для всякого $i\in\{1;\dots;d\}$

$$\forall x \in (-\delta_i; \delta_i) \quad |G(x\overline{e}_i)| < \varepsilon|x|$$

Следовательно для всяких $\{x_i\}_{i=1}^d$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^d$ что $x_i \in (\delta_i; \delta_i)$, $\alpha_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$, если

$$x = (\alpha_i x_i)_{i=1}^d = \sum_{i=1}^d \alpha_i (x_i \overline{e}_i), \text{ то}$$

$$G(x) \leq \sum_{i=1}^d \alpha_i G(x_i\overline{e}_i) < \varepsilon \sum_{i=1}^d \alpha_i |x_i| \leq \varepsilon\sqrt{d}\sqrt{\sum_{i=1}^d (\alpha_i x_i)^2}$$

$$\leq \varepsilon\sqrt{d}|x|$$

В таком случае множество рассмотренных точек x есть выпуклая оболочка

$\{\pm x_i \overline{e_i}\}_{i=1}^{d}$ (2d точек).

Также если зафиксировать $j \in \{1, \dots, d\}$ и

$$x = \frac{1}{\alpha_j}\left(x_j \overline{e_j} + \alpha_j x_j \overline{e_j} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \overline{e_i}\right)$$

то

$$\alpha_1 (x_1 \overline{e_1}) + \dots + \alpha_{j-1}(x_{j-1}\overline{e_{j-1}}) + \alpha_j x + \alpha_{j+1}(x_{j+1}\overline{e_{j+1}}) + \\ + \dots + \alpha_d (x_d \overline{e_d}) = x_j \overline{e_j}$$

Следовательно

$$G(x_j \overline{e_j}) \le \alpha_1 G(x_1 \overline{e_1}) + \dots + \alpha_{j-1} G(x_{j-1}\overline{e_{j-1}}) + \alpha_j G(x) + \\ + \alpha_{j+1} G(x_{j+1}\overline{e_{j+1}}) + \dots + \alpha_d G(x_d \overline{e_d})$$

$$|x| = \frac{1}{\alpha_j}\sqrt{(\alpha_1 x_1)^2 + \dots + (\alpha_{j-1}x_{j-1})^2 + x_j^2 + (\alpha_{j+1}x_{j+1})^2 + \dots + (\alpha_d x_d)^2}$$

Значит

$$G(x) \ge \frac{1}{\alpha_j}\left(G(x_j \overline{e_j}) + \alpha_j G(x_j \overline{e_j}) - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i G(x_i \overline{e_i})\right)$$

$$\ge -\varepsilon \frac{1}{\alpha_j}\left(|x_j| - \alpha_j |x_j| + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i |x_i|\right)$$

$$\ge -\varepsilon \sqrt{d}\, \frac{1}{\alpha_j}\sqrt{x_j^2 - (\alpha_j x_j)^2 + \sum_{i=1}^{d} (\alpha_i |x_i|)^2} \ge -\varepsilon \sqrt{d}\, |x|$$

В таком случае множества рассмотренных точек есть всё $\mathbb{R}^n$, так как для всякой точки $p \in \mathbb{R}^d$ проводя прямую через p, пересекающуюся с осью Ox_j очень близко к нулю и по ту же сторону, что и p относительно гиперплоскости всех остальных координат, её пересечение с гиперплоскостью остальных координат будет лежать в выпуклой, описанной выше. Таким образом, поскольку мы всё делаем близко к нулю и всё попадает в правильные оболочки, то $\{x_i\}_{i=1}^d$ будут лежать в необходимых промежутках, а так как пересечение прямой с осью Ox_j лежит между пересечение с гиперплоскостью остальных координат и p, то комбинация $\{\alpha_i\}_{i=1}^d$ будет выпуклой и $\alpha_j > 0$.

№5

а) По интегральному правилу Лейбница

$$\frac{d}{dx} f_h(x) = \frac{1}{2h} \frac{d}{dx} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{2h}\Big(f(x+h)\cdot 1 - f(x-h)\cdot 1 + \int_{x-h}^{x+h} \frac{\partial}{\partial x} f(t)\,dt\Big) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Это значит, что f_h непрерывно дифференцируема.

б) Пусть $f([x-h;x+h])\subseteq[f(x)-\varepsilon;f(x)+\varepsilon]$. Тогда

$$|f_h(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}(f(t)-f(x))\,dx\right|\le\varepsilon$$

При этом по непрерывности на компакте есть такое $\delta>0$, что для всякого $x\in C$

$$f(U_\delta(x))\subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

и следовательно для всякого $h\in(0;\delta)$

$$|f_h(x)-f(x)|\le\varepsilon$$

Это и означает равномерную сходимость $f_h\to f$ на C.

№6

$$F''_{xx}\cdot(F'_y)^2-2F''_{xy}\cdot F'_x\cdot F'_y+F''_{yy}\cdot(F'_x)^2=$$

$$=\begin{pmatrix}-F'_y & F'_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F''_{xx} & F''_{xy}\\ F''_{xy} & F''_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-F'_y\\ F'_x\end{pmatrix}$$

Векторы по бокам — вектор, перпендикулярный $grad(F)$ и той же длины, а матрица посередине — матрица

Гессе функции F. В итоге всё произведение есть изменение второго порядка функции F по направлению этого перпендикулярного вектора. Значит если мы повернём базис так, что $grad(F)$ будет сонаправлен $(0,1)$, то значение формулы выше не изменится. Поэтому повернём базис таковым образом. А также домножим F на такую константу, что $grad(F)(P_0)=(0,1)$. Тогда $F'_x(P_0)=0$, а $F'_y(P_0)=1$; значит формула выше вырождается в $F''_{xx}(P_0)$.

Пусть $P_0=(p_x,p_y)$ — точка, что в ней зануляется F, но не её градиент. Нам нужно показать, что касание прямой $\Lambda: P_0+t(1,0)$ и M имеет второй порядок тогда и только тогда, когда $F''_{xx}(P_0)=0$.

Пусть касание Λ и M имеет второй порядок. Тогда есть последовательность точек

$$(Q_n)_{n=0}^{\infty}=(P_0+(x_n,y_n))_{n=0}^{\infty}\to P_0,$$

которые являются корнями F и что

$$(y_n)_{n=0}^{\infty} = o\left((x_n^2)_{n=0}^{\infty}\right).$$

При этом по формуле Тейлора в форме Коши

$$F(x,y) = F(P_0) + F'_x(P_0)\cdot(x-p_x) + F'_y(P_0)\cdot(y-p_y) + F''_{xx}\cdot$$
$$\cdot(x-p_x)^2 + 2F''_{xy}(P_0)\cdot(x-p_x)(y-p_y) + F''_{yy}(P_0)\cdot(y-p_y)^2 +$$
$$+ o\left((x-p_x)^2 + (y-p_y)^2\right)$$

Следовательно

$$0 = F(Q_n) = y_n + F''_{xx}(P_0)\cdot x_n^2 + 2F''_{xy}(P_0)\cdot x_n y_n + F''_{yy}(P_0)\cdot$$
$$\cdot y_n^2 + o(x_n^2 + y_n^2) = o(x_n^2) + F''_{xx}(P_0)\cdot x_n^2 + o(x_n^2) + o(x_n^4) +$$
$$+ o(x_n^2) = F''_{xx}(P_0)\cdot x_n^2 + o(x_n^2)$$

Таким образом $F''_{xx}(P_0) = 0$.

Пусть теперь наоборот $F''_{xx}(P_0) = 0$. Тогда мы видим, что

$$F(P_0 + (x,y)) = y + 2F''_{xy}(P_0)\cdot xy + F''_{yy}(P_0)\cdot y^2 + o(x^2+y^2)$$
$$= y(1 + 2F''_{xy}(P_0)\cdot x + F''_{yy}(P_0)\cdot y) + o(x^2+y^2)$$

Рассмотрим манхэттенскую окрестность U точки P_0 (т.е. произведение ε-окрестности по x и ε-окрестности по y) для некоторого

$\varepsilon > 0$), где F'_y меняется не сильно, например, не более чем на α от своей абсолютной величины, где $\alpha < 1$. Тогда для всякой точки $Q = P_0 + (x, 0)$ прямой Λ из U верно, что

$$F(Q) = o(x^2),$$

а значит для всех Q некоторой подокрестности U есть точка $Q' = Q + (0, y)$, что $F(Q') = 0$, так как

$$F(Q) / F'_y(P_0) = o(x^2)$$

и следовательно

$$y = C \frac{F(Q)}{F'_y(P_0)}, \quad C \in \left[\frac{1}{1+\alpha}; \frac{1}{1-\alpha}\right]$$

Значит расстояние от всякой точки Q прямой Λ до M есть $o(|Q - P_0|^2)$.

№7

~~Предположим можно. Как мы знаем из курса топологии всякая норма на векторном пространстве равносильна некоторому векторному скалярному произведению на векторном пространстве, и наоборот. Тогда по предположению~~

№7

Предположим можно. Тогда у нас есть норма $\|\cdot\|$, порождающая в точности равномерную сходимость на компактах.

Для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определим функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(\pi x)^2 & \text{если } x \in [n; n+1] \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что для всякого набора $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательность

$$(g_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k f_k\right)_{n=0}^{\infty}$$

будет равномерно сходится на любом компакте, да и вообще поточечно сходится к некоторой функции g. Тогда мы получаем, что $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ и по норме будет сходится к g, значит в частности, будет фундаментальной!

Тогда давайте построим конкретный набор $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ следующим рекуррентным образом. Будем подразумевать, что g_{-1} есть тождественно нулевая функция. Тогда несложно видеть, что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (так как $\|f_n\| > 0$)

$$\|g_n\| \geq |a_n| \cdot \|f_n\| - \|g_{n-1}\|.$$

Значит можно взять такое a_n, что $\|g_n\| \geq \|g_{n-1}\| + 1$.

Для такой последовательности мы получаем, что для всяких $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\|g_n - g_m\| \geq \big|\|g_n\| - \|g_m\|\big| \geq |n - m|,$$

что банальным образом противоречит фундаментальности $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$.