Теоретическое домашнее задание от 17.09
Дифференциальные уравнения и динамические системы

Глеб Минаев @ 204 (20.Б04-мкн)

21 сентября 2021 г.

Задача 3. Пусть α — ω-периодический корень уравнения

$$y' = y^2 + p(x)y + q(x).$$

Пока забудем про ω-периодичность и определим вид всякого другого решения β данного уравнения. Сделаем замену $\tau := \beta - \alpha$. Тогда получим, что

$$\tau' = \beta' - \alpha' = \beta^2 + p\beta + q - \alpha^2 - p\alpha - q = (\beta - \alpha)(\beta + \alpha + p) = \tau(\tau + 2\alpha + p) = \tau^2 + (2\alpha + p)\tau.$$

Теперь сделаем замену

$$v := \frac{1}{\tau}, \qquad \Longrightarrow \qquad \tau = \frac{1}{v}, \quad \tau' = \frac{-v'}{v^2}.$$

Тогда получим, что

$$\begin{gathered} \frac{-v'}{v^2} = \frac{1}{v^2} + \frac{2\alpha + p}{v} \\ -v' = 1 + (2\alpha + p)v \\ v' + (2\alpha + p)v = -1 \end{gathered}$$

Теперь обозначим

$$\varphi(x) := e^{\int_0^x (2\alpha(t) + p(t))dt}, \quad \varphi' = (2\alpha + p)\varphi.$$

Получим, что

$$\begin{gathered} \varphi v' + \varphi(2\alpha + p)v = -\varphi \\ \varphi v' + \varphi' v = -\varphi \\ (\varphi v)' = -\varphi \\ \varphi(x)v(x) = C - \int_0^x \varphi(t)dt \\ \tau(x) = \frac{\varphi(x)}{C - \int_0^x \varphi(t)dt} \\ \beta(x) = \frac{\varphi(x)}{C - \int_0^x \varphi(t)dt} + \alpha \\ \beta(x) = \frac{e^{\int_0^x (2\alpha + p)dt}}{C - \int_0^x e^{\int_0^t (2\alpha + p)ds}dt} + \alpha \end{gathered}$$

Теперь вспомним, что нам нужна ω-периодичность β. Вспомним, что это равносильно $\beta(x) = \beta(x+\omega)$ для всех x. Тогда имеем следующую последовательность равносильных переходов.

$$\frac{e^{\int_0^x (2\alpha+p)dt}}{C - \int_0^x e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt} = \frac{e^{\int_0^{x+\omega} (2\alpha+p)dt}}{C - \int_0^{x+\omega} e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt}$$
$$\frac{e^{\int_0^x (2\alpha+p)dt}}{C - \int_0^x e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt} = \frac{e^{\int_0^{\omega} (2\alpha+p)dt + \int_\omega^{x+\omega} (2\alpha+p)dt}}{C - \int_0^{\omega} e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt - \int_\omega^{x+\omega} e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt}$$
$$\frac{e^{\int_0^x (2\alpha+p)dt}}{C - \int_0^x e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt} = \frac{e^{\int_0^{\omega} (2\alpha+p)dt} e^{\int_0^{x} (2\alpha+p)dt}}{C - \int_0^{\omega} e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt - \int_0^{x} e^{\int_0^{t+\omega} (2\alpha+p)ds}dt}$$
$$C - \int_0^{\omega} e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt - \int_0^{x} e^{\int_0^{t+\omega} (2\alpha+p)ds}dt = e^{\int_0^{\omega} (2\alpha+p)dt}\left(C - \int_0^x e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt\right)$$
$$C - \int_0^{\omega} e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt - \int_0^{x} e^{\int_0^{\omega} (2\alpha+p)ds + \int_\omega^{t+\omega} (2\alpha+p)ds}dt = e^{\int_0^{\omega} (2\alpha+p)dt}\left(C - \int_0^x e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt\right)$$
$$C - \int_0^{\omega} e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt - e^{\int_0^{\omega} (2\alpha+p)ds} \int_0^{x} e^{\int_\omega^{t+\omega} (2\alpha+p)ds}dt = e^{\int_0^{\omega} (2\alpha+p)dt}\left(C - \int_0^x e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt\right)$$
$$C - \int_0^{\omega} e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt = e^{\int_0^{\omega} (2\alpha+p)dt} C$$
$$C\left(1 - e^{\int_0^{\omega} (2\alpha+p)dt}\right) = \int_0^{\omega} e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt$$

Таким образом β является ω-периодическим корнем тогда и только тогда, когда β имеет ранее оговоренный вид и верно последнее равенство. При этом

$$e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds} > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^{\omega} e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt > 0.$$

Значит если $\int_0^\omega (2\alpha+p)dt = 0$, т.е. $e^{\int_0^\omega (2\alpha+p)dt} = 1$, то искомых C не существует; иначе искомое C единственно и находится по формуле

$$C = \frac{\int_0^{\omega} e^{\int_0^t (2\alpha+p)ds}dt}{1 - e^{\int_0^{\omega} (2\alpha+p)dt}}.$$

Таким образом искомое C единственно, а значит ω-периодических корней, отличных от α, не более одного. Следовательно, ω-периодических корней не более двух.
