Рейтинговое домашнее задание от 17.09
Дифференциальные уравнения и динамические системы

Глеб Минаев @ 204 (20.Б04-мкн)

Задача 2. Давайте временно про периодичность и просто решим дифференциальное уравнение. Сделаем заммену

$$z(x) := \frac{y(x)}{e^{kx}}, \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = z(x)e^{kx}, y'(x) = z'(x)e^{kx} + kz(x)e^{kx}.$$

Получаем уравнение

$$\begin{gathered} z'e^{kx} + kze^{kx} = kze^{kx} + f \\ z'e^{kx} = f \\ z' = \frac{f}{e^{kx}} \\ z(x) = \int_0^x e^{-kt} f(t) dt + C. \end{gathered}$$

Таким образом решение изначального уравнения имеет вид

$$y = e^{kx} \left(\int_0^x e^{-kt} f(t) dt + C \right).$$

Теперь определим, какие из данных решений являются ω-периодическими (при условии ω-периодичности f, конечно). ω-периодичность значит, что $y(x) = y(x + \omega)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Это значит, что

$$\begin{gathered} e^{kx} \left(\int_0^x e^{-kt} f(t) dt + C \right) = e^{k(x+\omega)} \left(\int_0^{x+\omega} e^{-kt} f(t) dt + C \right) \\ \int_0^x e^{-kt} f(t) dt + C = e^{k\omega} \left(\int_0^\omega e^{-kt} f(t) dt + \int_\omega^{x+\omega} e^{-kt} f(t) dt + C \right) \\ \int_0^x e^{-kt} f(t) dt + C = e^{k\omega} \left(\int_0^\omega e^{-kt} f(t) dt + \int_0^x e^{-k(t+\omega)} f(t+\omega) d(t+\omega) + C \right) \\ \int_0^x e^{-kt} f(t) dt + C = e^{k\omega} \left(\int_0^\omega e^{-kt} f(t) dt + e^{-k\omega} \int_0^x e^{-kt} f(t) dt + C \right) \\ C = e^{k\omega} \left(\int_0^\omega e^{-kt} f(t) dt + C \right) \\ C = \frac{e^{k\omega}}{1 - e^{k\omega}} \int_0^\omega e^{-kt} f(t) dt \end{gathered}$$

Заметим, что все переходы были равносильными, а значит решение ω-периодично тогда и только тогда, когда выполнено последнее равенство. При этом $k \neq 0$ и $\omega \neq 0$, поэтому $k\omega \neq$, а значит

$\frac{e^{k\omega}}{1-e^{k\omega}}$ определено. Также $e^{-kt}f(t)$ — непрерывная функция, а значит её интеграл от 0 до ω будет определён. Таким образом правая сторона равенства определена и, следовательно, решение (строго) единственно, так как получается при единственном C. Конкретнее, единственное решение —

$$e^{kx}\left(\int_0^x e^{-kt}f(t)dt + \frac{e^{k\omega}}{1-e^{k\omega}}\int_0^\omega e^{-kt}f(t)dt\right).$$
