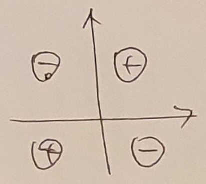
Homework #5 2016-19516 손상준

7.1 (a) $X_+ = \{(1,1), (-1,-1)\}$ $X_- = \{(1,-1), (-1,1)\}$



positive & negative example을 나눌수있는 line이 존재하지 않는다

$ax+by+c=0$ 일차식이 분리할수있다고 가정 (결론 부정)

(1) $\overset{+}{(a+b+c)}\ \overset{+}{(-a-b+c)} > 0$ (2) $\overset{-}{(a-b+c)}\ \overset{-}{(-a+b+c)} > 0$ ∴ (같은 방향에 존재)

$\cancel{|c| > |a+b|}$ $\cancel{|c| > |a-b|}$ (∵ 서로 분리)

(3) $\underset{+}{(a+b+c)}\ \underset{-}{(a-b+c)} < 0$ (4) $\underset{+}{(a+b+c)}\ \underset{-}{(-a+b+c)} < 0$

$\cancel{|c+a| < |b|}$ $\cancel{|b+c| < |a|}$

WLOG let $\overset{+}{(a+b+c)} > 0$ $\cancel{(2+4)}$ $\cancel{|a|+|c| > |a-b| + |b+c|}$

$a+b+c > 0$ $a-b+c < 0$

$-a-b+c > 0$ $-a+b+c < 0$

$c > a+b$, $b > a+c$, $a > b+c$ $\Rightarrow a+b+c > 2(a+b+c)$

$\Rightarrow a+b+c < 0$ ※

∴ not linearly separable.

(b)

$$X_+ = \{\phi(1,1), \phi(-1,-1)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$X_- = \{\phi(1,-1), \phi(-1,1)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) let $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$\min_w \|w\| \quad \text{s.t} \quad y_i(w^T x_i) \geq 1 \quad \forall i$$

$+1\ (a+b+c+d) \geq 1$

$+1\ (a-b-c+d) \geq 1$

$-1\ (a+b-c-d) \geq 1$

$-1\ (a-b+c-d) \geq 1$

양변을 모두 더하면 $d \geq 1$

$\Rightarrow$ 부등식을 만족하는 하나의 특수해

$(a,b,c,d) = (0,0,0,1)$

일반식 $w = (a,b,c,d)$ 에 대해

$\|w\|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 1$ 이므로 최소값을 만족하는

$w = (0,0,0,1)^T$ 유일하다.

∴ $\min_w \|w\| = (0,0,0,1)^T$

1.2 (a) Mahalanobis distance : dissimilarity measure between vector $x, c \in \mathbb{R}^n$

given covariance matrix : S : $n \times n$ matrix.

$$d(x,c) = \sqrt{(x-c)^T S^{-1} (x-c)}$$

$$d^2(x,c) = (x-c)^T S^{-1} (x-c) = \begin{pmatrix} \vdots \\ x_i - c_i \\ \vdots \end{pmatrix} S^{-1} \left(\cdots ; x_i - c_i ; \cdots \right)$$

(문제에서 주어진대로 $d = \sqrt{\Sigma \frac{(x_i - c_i)^2}{s_i}}$)

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - c_i)^2}{s_i^2}$$

식을 만족하기 위해서 S는 결정지을 수 있다.

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1^2} & & 0 \\ & \frac{1}{s_i^2} & \\ 0 & & \frac{1}{s_n^2} \end{pmatrix}$$

diagonal matrix $S = \begin{pmatrix} s_1^2 & & 0 \\ & s_i^2 & \\ 0 & & s_n^2 \end{pmatrix}$

Euclidean distance $d(x,c) = \sqrt{\Sigma (x_i - c_i)^2}$ 이지만 {C}축을 중심으로 상호로인 정도를 조절함으로써 거리를 측정할 수 있다. 따라서 주어진 $d(x,c)$는 결국 표준화된 상태에서 ~~Eud~~ Euclidean distance를 구하는 방식이므로 standardized (scaled) Euclidean distance라 할 수 있다

(b) X는 1차원 상의 점들의 집합이므로 $d(x,c)$를 아래와 같이 간략화할 수 있다.

scale 또한 비례계수로 생각하여 무시해도 (L1 norm 이라고 생각한 결과와 같다)

$$d(x,c) = \sqrt{\Sigma \frac{(x_i - c_i)^2}{s_i^2}} = \sqrt{\frac{(x-c)^2}{s^2}} = \frac{|x-c|}{|s|} \equiv |x-c|$$

x	0	2	4	6	18	20	
			$C_1 = 3$	$C_2 = 4$			····· initialized $C = \{3, 4\}$
$d(x, c_1 = 3)$	3	1	1	3	15	17	
$d(x, c_2 = 4)$	4	2	0	2	14	16	
							$C_1 = \frac{0+2}{2} = 1$, $C_2 = \frac{4+6+18+20}{4} = 12$ ··· 1st iteration $C = \{1, 12\}$
$d(x, c_1 = 1)$	1	1	3	5	17	19	
$d(x, c_2 = 12)$	12	10	8	6	6	8	
							$C_1 = \frac{0+2+4+6}{4} = 3$, $C_2 = \frac{18+20}{2} = 19$ ··· 2nd Iteration $C = \{3, 19\}$

(c)

x	0	2	4	6	18	20
			$C_1 = 4$			
$\min_{\{c_1\}} \lVert x-c \rVert_2$	4	2	0	2	14	16 ($C_2 = 20$)
		$C_1 = 4$	$C_2 = 20$			
$\min_{\{c_1, c_2\}} \lVert x-c \rVert_2$	4 ($C_3 = 0$)	2	0	2	2	0
		$C_1 = 4$	$C_2 = 20$	$C_3 = 0$		
$\min_{\{c_1, c_2, c_3\}} \lVert x-c \rVert_2$	0	2	0	2	2	0

$\therefore$ $C_1 = 4$
$C_2 = 20$
$C_3 = 0$