

Luis Paulo M. Lima

## **Uma Breve Introdução à Análise Modal de Vibrações**

Rondonópolis

2016

Luis Paulo M. Lima

## **Uma Breve Introdução à Análise Modal de Vibrações**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica, do Instituto de Ciências Agrárias e Tecnológicas, do Campus Universitário de Rondonópolis, da Universidade Federal de Mato Grosso, como exigência parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Agrárias e Tecnológicas  
Curso de Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Valterson Marques dos Santos  
Coorientadora: Profa. Ma. Viviane Cassol Marques

Rondonópolis  
2016

**Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.**

L732b Lima, Luis Paulo M..

Uma Breve Introdução à Análise Modal de Vibrações / Luis Paulo M. Lima. – 2016

66 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Valterson Marques dos Santos.

Coorientadora: Viviane Cassol Marques, MSc.

TCC (graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Agrárias e Tecnológicas, Rondonópolis, 2016.

Inclui bibliografia.

1. Vibração mecânica. 2. Sistema mecânico. 3. Análise Modal. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo autor.

**Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.**

Luis Paulo M. Lima

## Uma Breve Introdução à Análise Modal de Vibrações

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica, do Instituto de Ciências Agrárias e Tecnológicas, do Campus Universitário de Rondonópolis, da Universidade Federal de Mato Grosso, como exigência parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Trabalho aprovado. Rondonópolis, 03 de maio de 2016:

**Prof. Valterson Marques dos Santos**  
Orientador – EM/ICAT/CUR/UFMT

**Profa. Ma. Viviane Cassol Marques**  
Coorientadora – EM/ICAT/CUR/UFMT

**Prof. Dr. Heinsten Frederick Leal dos Santos**  
EM/ICAT/CUR/UFMT

**Prof. Dr. Aguinaldo Soares de Oliveira**  
EM/ICAT/CUR/UFMT

Rondonópolis

2016

# Uma Breve Introdução à Análise Modal de Vibrações

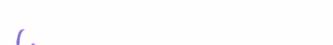
Luis Paulo M. Lima

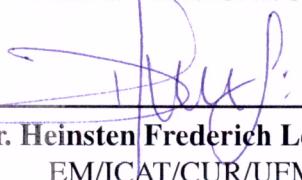
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO REQUISITO PARA OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE **GRADUADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**. APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO COLEGIADO DE CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA.

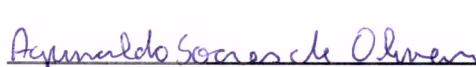
  
Prof. Dr. Heinsten Frederich Leal dos Santos  
Coordenador - EM/ICAT/CUR/UFMT

Banca examinadira:

  
Prof. Valterson Marques dos Santos  
Orientador – EM/ICAT/CUR/UFMT

  
Profa. Ma. Viviane Cassol Marques  
Coorientadora f EM/ICAT/CUR/UFMT

  
Prof. Dr. Heinsten Frederich Leal dos Santos  
EM/ICAT/CUR/UFMT

  
Prof. Dr. Aguinaldo Soares de Oliveira  
EM/ICAT/CUR/UFMT

Rondonópolis  
2016

*Aos Moraes, aos Lima e aos Xu* (徐家人)

# Agradecimentos

Este texto não é fruto de apenas três meses de trabalho, mas o resultado da colaboração de muitas pessoas ao longo de minha vida acadêmica. Em especial, agradeço: a meus pais, Diumar e Cristina, pela vida que me deram e as oportunidades que me proporcionara, sempre dispostos a me apoiar em minhas decisões; aos meus irmãos Luis Carlos e Izabela, por sempre exemplo e me inspirarem a tomar decisões que julgo corretas; a Jinchen Xu, por ter se tornado minha meta de vida; aos amigos, que não citarei nomes para evitar que me esqueça de algum, pois são muitos mas tenho certeza que ao lerem isto aqui se verão agradecidos e saberão o quanto contribuíram comigo; à banca examinadora, pois todos fizeram parte da grande experiência que foi participar da Equipe UFMT Baja SAE; ao meu orientador, que foi solícito ao me atender quando precisei; e a todos aqueles com quem convivi, pois foram importantes no meu desenvolvimento pessoal. Muito obrigado a todos.

「久旱逢甘雨、他鄉遇故知。洞房花燭夜、金榜題名時。  
『喜』，汪洙。」

*“A doce chuva que cai depois da longa seca,  
Deparar-se com um velho amigo em terras estrangeiras.  
A primeira noite de amor depois do casamento,  
Ser aprovado no Exame.”  
(“Felicidades”, de WANG Zhu.)*

# Resumo

A Análise Modal é uma das áreas mais importantes dentro do ramo de estudos de Vibrações Mecânicas. Entretanto, pouco tem sido difundido a respeito deste tema no ambiente acadêmico da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), especialmente dentro do Instituto de Ciências Agrárias e Tecnológicas (ICAT). Por isso, este texto foi escrito para ser a etapa inicial do desenvolvimento de estudos de Análise Modal na Engenharia Mecânica da UFMT. Ele apresenta sua base teórica e uma aplicação prática também teórica desta metodologia. No Capítulo 1, tem-se uma breve introdução do que é a Análise Modal, listando algumas aplicações bastante diversas. No Capítulo 2, a teoria do estudo de vibrações referente a esta ferramenta é apresentada. São introduzidos os conceitos básicos dos três modelos matemáticos usados – modelo espacial, modal e de resposta–, e de sua formulação teórica progredindo de um para outro. Também é apresentado o método da amplitude dos picos, um dos inúmeros métodos que podem ser usados para derivar modelos matemáticos a partir de testes reais. No Capítulo 3, é ilustrado o uso da Análise Modal aplicando-a a um sistema mecânico de seis graus de liberdade. São derivados seus modelos matemáticos teóricos e, a partir da redução de seu modelo de resposta, que assume a forma de um modelo experimental, novos modelos são gerados e comparados qualitativa e quantitativamente aos originais. No último capítulo ainda são sugeridos alguns trabalhos que possam dar continuidade à linha de estudos que aqui quer-se iniciar.

**Palavras-chave:** Vibração mecânica. Sistema mecânico. Análise modal.

# Abstract

Modal Analysis is one of the most important fields of study within Mechanical Vibrations. However, little have been done to spread awareness about this topic among the academy at Federal University of Mato Grosso (UFMT), specifically at the Agricultural and Technological Sciences Institute (ICAT). For that reason, this text was written to be the first step for the development of studies in Modal Analysis at the UFMT's Department of Mechanical Engineering. In Chapter One, there's a brief introduction to what is Modal Analysis, and a small list of some of its most diverse applications. In Chapter Two, the theory of vibration analysis related to this technique is presented. The basic concepts of the three mathematical models used in the study of vibrations – namely the spatial, modal and response models – are introduced, and so are their theoretical formulation, one which progress from one to another. Also, the peak amplitude method is introduced, which is one of the various methods that may be used to derivate mathematical models based on real tests. In Chapter Three, the use of Modal Analysis is exemplified by its application on a mechanical system of six degrees of freedom. Its three mathematical models are calculated, and new models are generated from the reduction of its response model which, in the end, looks like an experimental model. They are then qualitatively and quantitatively compared to the original ones. In the last chapter, some study suggestions are made so that this line of study that we just started can keep going on.

**Keywords:** Mechanical vibration. Mechanical system. Modal Analysis.

# Listas de ilustrações

Figura 1 – Ilustração da rota teórica para análise de vibrações . . . . .	16
Figura 2 – Sistemas mecânicos padrões . . . . .	17
Figura 3 – Diagrama de corpo livre para o sistema de 1GDL da Figura 2a . . . . .	18
Figura 4 – Diagrama de corpo livre para o sistema de 2GDL da Figura 2b . . . . .	19
Figura 5 – Deslocamento de um sistema de 1GDL para diferentes condições iniciais . .	21
Figura 6 – Modos de vibrar de um sistema de 2GDL . . . . .	23
Figura 7 – Diagrama de Bode para um sistema de 1GDL, com $m = 1 \text{ kg}$ e $k = 10 \text{ N/m}$	32
Figura 8 – Diagrama de Bode para um sistema de 2GDL . . . . .	33
Figura 9 – Ilustração da rota experimental para análise de vibrações . . . . .	34
Figura 10 – Exemplo gráfico de uma função de receptância . . . . .	35
Figura 11 – Sistema básico para medição de vibrações . . . . .	36
Figura 12 – Dados mínimos necessários para gerar uma matriz de resposta em frequência completa . . . . .	38
Figura 13 – Gráfico típico de uma FRF de uma máquina ou estrutura . . . . .	39
Figura 14 – Diagrama de Bode para um sistema de 2GDL com seus picos assinalados .	41
Figura 15 – Comparação das curvas de mobilidade experimental e teórica de um sistema mecânico . . . . .	42
Figura 16 – Curvas de funções de resposta em frequência sintetizadas. . . . .	43
Figura 17 – Sistema mecânico de 6GDL. . . . .	46
Figura 18 – Diagrama de Bode para $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15}$ e $\alpha_{16}$ . . . . .	50
Figura 19 – Dados disponíveis após redução do modelo de resposta . . . . .	51
Figura 20 – Gráfico da magnitude de $\alpha_{12}(\omega)$ com seus picos identificados . . . . .	51
Figura 21 – Detalhe do gráfico da magnitude de $\alpha_{16}(\omega)$ mostrando pontos de meia potência para o 4º e o 5º modo . . . . .	52
Figura 22 – Gráfico da fase de $\alpha_{13}(\omega)$ em função da frequência com a fase de seus picos assinaladas . . . . .	53
Figura 23 – Comparação entre a curva experimental de receptância $\alpha_{14}(\omega)$ e a curva regenerada $\alpha'_{14}(\omega)$ . . . . .	54

# Lista de símbolos

$[A], [A]^T, \vec{a}$	matriz, matriz transposta, matriz coluna (vetor)
$A(\omega)$	função de acelerância ( $\text{m}/\text{Ns}^2$ )
$c, c_r^*$	coeficiente de amortecimento viscoso, coeficiente de amortecimento viscoso generalizado do $r$ -ésimo modo ( $\text{Ns}/\text{m}$ )
$c_{jk}$	coeficiente de amortecimento viscoso ( $\text{Ns}/\text{m}$ )
$[C], [C^*]$	matriz de amortecimento viscoso, matriz de amortecimento viscoso generalizada ( $\text{Ns}/\text{m}$ )
$d, d_r^*$	coeficiente de amortecimento histerético, coeficiente amortecimento generalizado do $r$ -ésimo modo ( $\text{N}/\text{m}$ )
$d_{jk}$	coeficiente de amortecimento histerético ( $\text{N}/\text{m}$ )
$\text{diag}\{\}$	matriz diagonal cujos elementos são {}
e	número de Euler ( $\approx 2,71828\dots$ )
$[E]$	matriz de fatores de amortecimento modal (admens.)
$f(t)$	força oscilante em função do tempo (N)
$F(\omega), F_j(\omega)$	amplitude de $f(t)$ , amplitude de $f_j(t)$ (N)
$G(s), G(\omega)$	polinômio característico
$H(\omega), H_{jk}(\omega)$	função de resposta em frequência
$[H(\omega)]$	matriz de funções de resposta em frequências
$[H_{(R)}(\omega)]$	matriz de funções de resposta em frequência reduzida
i	unidade imaginária ( $= \sqrt{-1}$ )
$\text{Im}()$	parte imaginária de ()
$k, k_r^*$	coeficiente de rigidez, coeficiente de rigidez generalizado do $r$ -ésimo modo ( $\text{Ns}/\text{m}$ )
$k_{jk}$	coeficiente de rigidez ( $\text{N}/\text{m}$ )
$[K], [K^{*\prime}]$	matriz de rigidez, matriz de rigidez generalizada ( $\text{N}/\text{m}$ )
$[K_{(R)}]$	matriz de rigidez reduzida ( $\text{N}/\text{m}$ )
$m, m_r^*$	massa, massa generalizada do $r$ -ésimo modo (kg)
$[M], [M^{*\prime}]$	matriz de massa, matriz de massa generalizada (kg)
$[M_{(R)}]$	matriz de massa reduzida (kg)

$\max\{\}$	máximo (maior) elemento do conjunto { }
$P(\omega), P'(\omega^2)$	polinômio em $\omega$ , polinômio em $\omega^2$
$Q(\omega), Q'(\omega^2)$	polinômio em $\omega$ , polinômio em $\omega^2$
$\text{Re}()$	parte real de ()
$s$	autovalor
$t$	tempo (s)
$\omega$	frequência (rad/s)
$\omega_n, \omega_r$	frequência natural, frequência natural do $r$ -ésimo modo (rad/s)
$x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$	deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo (m, m/s, m/s <sup>2</sup> )
$X$	amplitude de $x(t)$ (m)
$X(\omega)$	amplitude de $x(t)$ em função da frequência (m)
$Y(\omega)$	função de mobilidade (m/Ns)
$[Z], [Z_{(R)}]$	matriz de impedância, matriz de impedância reduzida (N/m)
$\alpha(\omega), \alpha_{jk}(\omega)$	função de receptância (m/N)
$[\alpha(\omega)]$	matriz de funções de receptância (m/N)
$\beta$	fator de proporcionalidade de amortecimento em relação à rigidez
$\gamma$	fator de proporcionalidade de amortecimento em relação à massa
$\varepsilon$	erro (admens.)
$\zeta, \zeta_r$	fator de amortecimento viscoso, fator de amortecimento viscoso do $r$ -ésimo modo (admens.)
$\eta, \eta_r$	fator de amortecimento modal histerético, fator de amortecimento modal histerético do $r$ -ésimo modo (admens.)
$\theta$	ângulo de fase (graus)
$\lambda, \lambda_r^2$	autovalor, autovalor do $r$ -ésimo modo (rad/s, rad <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$[\Lambda^2]$	matriz de autovalores (rad <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$\vec{\phi}_r$	forma do modo de vibrar do $r$ -ésimo modo normalizado pela massa
$\phi_{jk}$	elemento da matriz $[\Phi]$
$[\Phi]$	matriz de forma dos modos de vibrar normalizada pela massa
$\vec{\psi}, \vec{\psi}_r$	autovetor, forma do modo de vibrar do $r$ -ésimo modo
$\psi_{jk}$	elemento da matriz $[\Psi]$
$[\Psi]$	matriz das formas dos modos de vibrar

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
1.1	Objetivos . . . . .	14
2	ANÁLISE MODAL . . . . .	15
2.1	Considerações inciais . . . . .	15
2.2	Estudo teórico de vibrações . . . . .	16
2.2.1	Descrição da estrutura . . . . .	17
2.2.2	Modos de vibração . . . . .	19
2.2.3	Níveis de resposta . . . . .	28
2.3	Estudo experimental de vibrações . . . . .	34
2.3.1	Propriedades de resposta . . . . .	34
2.3.2	Modelos experimentais . . . . .	36
2.3.3	Extração de parâmetros modais . . . . .	38
2.3.4	Correção de erros . . . . .	41
2.4	Considerações finais . . . . .	43
3	APLICAÇÃO PRÁTICA . . . . .	45
3.1	Descrição do sistema . . . . .	45
3.2	Metodologia . . . . .	46
3.3	Resultados . . . . .	47
3.3.1	Rota teórica . . . . .	47
3.3.2	Rota experimental . . . . .	49
3.4	Discussão dos resultados . . . . .	53
4	CONCLUSÕES . . . . .	56
	REFERÊNCIAS . . . . .	57
	APÊNDICE A – PROGRAMA EM SCILAB . . . . .	59

# 1 Introdução

Segundo o dicionário Michaelis, uma das definições de vibração é “movimento periódico das partículas de um corpo ou meio elástico”<sup>1</sup> (WEISZFLOG, 2007). A partir disso, podemos inferir que os meios ou corpos que sofrem vibração podem variar tanto quanto a causa que gera o movimento das partículas, o que não está errado, mas deve-se acrescentar que o movimento resultante pode ser também aleatório, ou aperiódico. Logo, com uma definição tão ampla, é de se esperar que muitos fenômenos naturais ou produto da tecnologia humana sejam classificados como vibratórios, tais como a fala, sendo ela o resultado da vibração das cordas vocais causadas pelo ar expelido dos pulmões; ou o desconforto sentido quando se é passageiro num carro que trafega por uma estrada irregular.

O estudo das vibrações mecânicas, de forma simples, geralmente consiste em quantificar tal movimento segundo sua frequência e amplitude. Na prática, entretanto, essa análise raramente se limita a identificar um único par amplitude-frequência, além de que a interpretação dos resultados pode revelar muitas características do objeto de estudo, como: reatividade química de uma molécula, o estado de deterioração de um elemento mecânico, ou a resistência de prédios a terremotos. Portanto, é apenas natural que este seja um dos tópicos mais importantes de um curso de Engenharia.

Uma das técnicas mais empregadas neste campo de estudo é a Análise Modal, que é um método experimental usado para “obter uma descrição matemática [do] comportamento dinâmico ou de vibração” (EWINS, 1984, p. 2, tradução nossa) de um sistema vibratório. Os dados obtidos variam bastante dependendo de seu fim, desde serem usados para identificação de propriedades mecânicas de materiais, até aplicações mais complicadas como minimizar a vibração de estruturas complexas acopladas. Nos casos citados anteriormente, a análise modal pode ser usada especificamente para:

1. Quantificar a mobilidade dos domínios de uma proteína segundo seus modos de vibrar (SKJAERVEN; HOLLUP; REUTER, 2009);
2. Inspecionar a progressão de trincas por fadiga em elementos rotativos com base nas frequências de vibração de seus apoios (RAO, 2010), e;
3. Avaliar a suscetibilidade de instalações prediais a sismos devido a seu projeto arquitetônico (SHEPHERD, 1969).

---

<sup>1</sup> É importante observar que o termo “vibração”, mesmo que às vezes ele possa ser usado como sinônimo de “oscilação”, neste texto ele terá seu uso limitado para nos referirmos apenas a “vibrações mecânicas”, ou seja, movimento oscilatório de matéria, de massa, ou de partículas, enquanto que “oscilação”, se usado, será mais abrangente, incluindo também o comportamento de ondas eletromagnéticas.

Este trabalho, por sua vez, surge da necessidade de se difundir no meio acadêmico do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Mato Grosso, a metodologia da análise modal, pois poucos trabalhos na área de Vibrações foram ou tem sido desenvolvidos de forma contínua no Campus Universitário de Rondonópolis. Deseja-se, então, prover um material acessível e que sirva de primeiro passo para aqueles que se interessarem pelo tema.

## 1.1 Objetivos

O texto apresentado a seguir tem a pretensão de ser o começo de uma linha de estudos de vibrações mecânicas. Ele, entretanto, não trata de experimentos reais, mas tem o propósito de ser suficientemente didático para que possa guiar outros (especialmente discentes de graduação) que desejarem aprender sobre análise modal. Também será apresentada uma aplicação prática teórica da análise modal usando um sistema mecânico discreto. Especificamente, o trabalho irá:

- Apresentar a base teórica de análise de vibrações usada na análise modal, principalmente a respeito dos modelos espacial, modal e de resposta;
- Derivar numericamente os modelos espacial, modal e de resposta que descrevam apropriadamente um sistema mecânico de seis graus de liberdade;
- Gerar um novo modelo de resposta a partir da redução do modelo de resposta original;
- Derivar um novo modelo modal a partir do modelo reduzido usando o método da amplitude dos picos;
- Comparar qualitativa e quantitativamente os novos modelos com os originais.

## 2 Análise Modal

Este capítulo apresenta a base teórica da análise modal. Ele apresenta as considerações matemáticas iniciais e descreve sobre os estudos teórico e experimental de vibrações de sistemas discretos. Aqui, entretanto, não será abordado o processo de simplificar sistemas mecânicos complexos em modelos de massa condensada, e também será assumido que é conhecimento comum alguns conceitos básicos, como o que são molas ou amortecedores. Caso o leitor não esteja familiarizado com tais ideias, recomenda-se os volumes 1 e 2 da obra de Resnick, Halliday e Krane (2011), para Física de nível superior, e os trabalhos de Rao (2010) e Inman (2008), para Vibrações Mecânicas.

### 2.1 Considerações iniciais

O desenvolvimento deste trabalho foi baseado na “filosofia” de testes apresentada por Ewins (1984), que refere-se aos conhecimentos necessários para que a análise modal atinja seu potencial máximo:

- a) Base teórica de vibrações.** Conhecimento claro e suficiente para estudar sistemas vibratórios complexos.
- b) Medição apropriada de vibrações.** Prática com ensaios de vibração, desde uso apropriado das instalações e instrumentos, passando pela aquisição e condicionamento de sinais, até a apresentação dos dados obtidos.
- c) Análise realista e detalhada dos dados obtidos.** Avaliação da qualidade dos resultados e bom uso destes para gerar diferentes modelos matemáticos de acordo com seus fins.

Nos concentraremos nos itens (a) e (c) acima, excluindo o item (b) pois sua apresentação por si só demandaria um esforço tão grande quanto os outros dois, além de exigir também razoável experiência prática com os instrumentos comumente usados em análise de vibrações.

Façamos também as mesmas considerações que Maia e Silva (1997) fizeram em sua obra:

1. As estruturas podem ser representadas por sistemas de equações lineares;
2. As estruturas obedecem ao teorema da reciprocidade de Maxwell, e;
3. As estruturas não variam com o tempo.

Da primeira consideração resulta que as partes elementares dos sistemas – massa, mola e amortecedor – são lineares e o princípio da superposição se aplica, isto é, o resultado conjunto de vários elementos do mesmo tipo é igual a soma de resultados individuais de cada um deles. Da terceira, cada elemento é constante no tempo, não variando sob nenhuma condição, garantindo que o sistema será o mesmo durante todo o estudo. A segunda consideração, por sua vez, garante

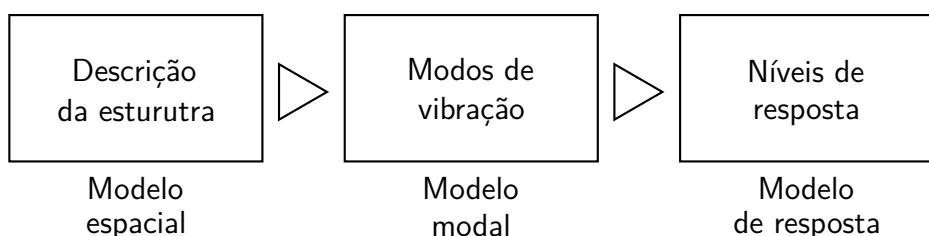
que os sistemas serão simétricos, isto é, quando uma entrada (força excitante) for aplicada ao sistema num ponto  $i$ , esta causará uma reação num ponto  $j$  de igual intensidade e frequência à reação no ponto  $i$  se a mesma entrada for aplicada no ponto  $j$ .<sup>1</sup>

Quanto à organização deste capítulo, primeiramente, apresentaremos os três modos pelos quais se pode descrever matematicamente um sistema vibratório, que são os modelos espacial, modal e de resposta, juntamente com o método para derivar um a partir do outro, seguindo a rota teórica da análise modal. A seguir, passaremos para a rota experimental, começando com um modelo de resposta experimental, do qual extrairemos os dados que compõem o modelo modal e faremos considerações a respeito do modelo espacial experimental. Já no capítulo seguinte, apresentaremos uma aplicação prática da análise modal.

## 2.2 Estudo teórico de vibrações

A chamada “rota teórica” apresenta os estágios progressivos que geralmente compõem a análise de vibração de uma estrutura (EWINS, 1984) e está ilustrada na Figura 1. A análise começa pela descrição numérica da estrutura, ou seja, os elementos simplificados que a constituem e suas relações, que são as “conexões físicas” existentes entre cada elemento. Estes dados formam o *modelo espacial* que contém informações da massa, da rigidez e o amortecimento do sistema. A partir daí, calculam-se os modos de vibrar, cujas informações componentes são as frequências naturais do sistema e os padrões de vibração das coordenadas em estudo, chamados de forma dos modos de vibrar. As propriedades modais formam o *modelo modal*, a partir do qual calculam-se os níveis de resposta do sistema. Estes níveis são a amplitude da vibração para diferentes frequências ou impulsos, e temos então o *modelo de resposta*.

Figura 1 – Ilustração da rota teórica para análise de vibrações



Fonte: Traduzida e adaptada de Ewins (1984, p. 22).

Daqui em diante, para melhor explicação dos conceitos matemáticos envolvidos na formulação de cada um dos modelos, convém definirmos três sistemas mecânicos que serão usados como exemplo para os cálculos, os quais estão apresentados na Figura 2. O primeiro deles (Figura 2a) é um sistema de um grau de liberdade<sup>2</sup> (1GDL), que contém uma única massa

<sup>1</sup> Para um tratamento mais aprofundado e rigoroso teorema de Maxwell, cf. Fung (1965, cap. 1).

<sup>2</sup> Grau de liberdade: “número de parâmetros independentes (medidas) necessários para definir uma única posição [do sistema] no espaço em qualquer instante de tempo”. (NORTON, 2010, p. 48)

$m$  ligada a uma única mola  $k$  e um único amortecedor  $c$ . O segundo (Figura 2b) é um sistema de 2GDL, do qual se pode facilmente expandir a formulação para um sistema de  $n$ -GDL (Figura 2c).

Em todos eles, as forças que as molas exercem sobre as massas têm intensidade:

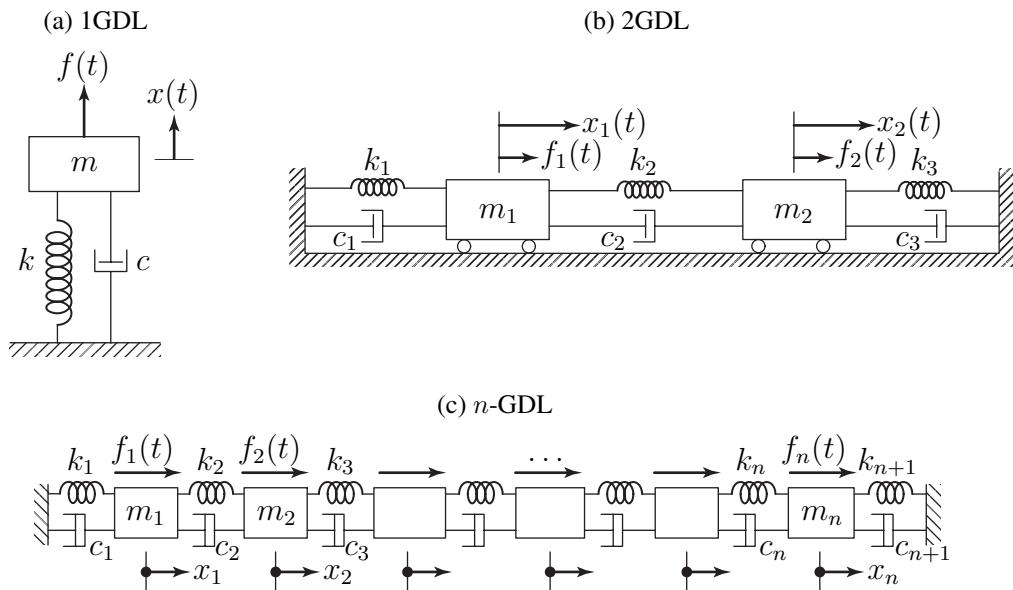
$$F_k = kx.$$

Para o amortecedor, considerando o caso mais comum de *amortecimento viscoso*,<sup>3</sup> a força fica:

$$F_c = c\dot{x}.$$

Nas duas equações,  $x$  é o deslocamento e  $\dot{x}$  é a velocidade. O amortecimento viscoso, porém, não será sempre o caso, pois, assim que convier, vamos introduzir o *amortecimento estrutural*, ou *histerético*, cuja formulação é diferente, mas que facilita o estudo dos níveis de reposta do sistema.

Figura 2 – Sistemas mecânicos padrões



Fonte: Adaptadas de Rao (2010, pp. 367, 472, 558 respectivamente).

### 2.2.1 Descrição da estrutura

Para descrever a estrutura precisamos desenvolver as equações de movimento para cada corpo do sistema (massa) usando-se diagramas de corpo livre ou algum método de energia, como equações de Lagrange ou método dos trabalhos virtuais.<sup>4</sup> Neste trabalho, para o primeiro estágio da Figura 1, optamos pelos diagramas de corpo livre, sendo que para o sistema de 1GDL da Figura 2a, temos seu diagrama apresentado na Figura 3. A força resultante do sistema,  $F_r$ , é:

$$F_r = m\ddot{x} = f(t) - kx - c\dot{x},$$

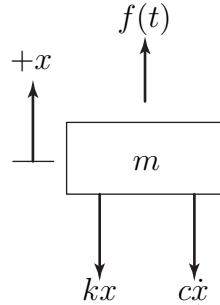
<sup>3</sup> Este “é o mecanismo de amortecimento mais usado em análise de vibrações [...] [em que a] resistência oferecida por um fluido a um corpo em movimento causa dissipação de energia”. (RAO, 2010, p. 45, tradução nossa).

<sup>4</sup> Cf. Rao (2010, seção 6.7) e Norton (2010, seção 10.15)

sendo  $\ddot{x}$  a aceleração. Ao reorganizá-la de uma forma mais apropriada, fica:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t). \quad (2.1)$$

Figura 3 – Diagrama de corpo livre para o sistema de 1GDL da Figura 2a



Fonte: O Autor.

Para descrever a estrutura com um modelo espacial não consideramos as forças que agem sobre os sistema, mas apenas as grandezas que o descrevem. Tais grandezas são organizadas na forma de matrizes de massa,  $[M]$ , amortecimento,  $[C]$ , e rigidez,  $[K]$ . Para o caso de 1GDL, todas elas são de ordem 1, ou seja,  $m$ ,  $c$  e  $k$  são o próprio modelo espacial da estrutura:

$$[M] = m, \quad [C] = c, \quad \text{e} \quad [K] = k.$$

Indo para o caso de 2GDL da Figura 2b, temos seu diagrama de corpo livre na Figura 4. As forças resultantes ficam:

$$F_{r,1} = m_1\ddot{x}_1 = k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_1\dot{x}_1 - k_1x_1 + f_1(t), \text{ e}$$

$$F_{r,2} = m_2\ddot{x}_2 = -k_3x_2 - c_3\dot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_2(t).$$

Reescrevendo-as da mesma forma que a Equação 2.1, temos o sistema:

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1(t), \quad (2.2)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2(t). \quad (2.3)$$

Nossa intenção, porém, não é resolvê-lo, mas manipulá-lo de forma apropriada para obter os modelos matemáticos. Assim, podemos reescrever as Equações 2.2 e 2.3 na forma de um sistema matricial:

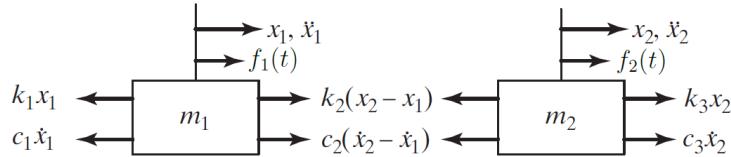
$$[M]\ddot{\vec{x}}(t) + [C]\dot{\vec{x}}(t) + [K]\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \quad (2.4)$$

sendo

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix},$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Figura 4 – Diagrama de corpo livre para o sistema de 2GDL da Figura 2b



Fonte: Adaptada de Rao (2010, p. 472).

Aqui é possível perceber a semelhança desta equação matricial com aquela do sistema de 1GDL (Equação 2.1). O que as torna diferentes é que as matrizes de massa, amortecimento e rigidez não são mais de ordem 1 (escalares). Outra diferença é que agora temos vetores de posição ( $\vec{x}$ ), velocidade ( $\dot{\vec{x}}$ ), aceleração ( $\ddot{\vec{x}}$ ) e de forças ( $\vec{f}$ ). Assim como no caso anterior, as matriz  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  compõem o modelo espacial deste sistema.

Comparando o caso mais geral de  $n$ -GDL da Figura 2c com o de 2GDL, podemos ver que o primeiro é apenas uma “extrapolação” do segundo. Assim sendo, extrapolando o diagrama de corpo livre da Figura 4, teremos as seguintes equações de movimento já organizadas de forma conveniente:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= f_1(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 &= f_2(t), \\ &\vdots \\ m_n \ddot{x}_n - c_n \dot{x}_{n-1} + (c_n + c_{n+1}) \dot{x}_n - k_n x_{n-1} + (k_n + k_{n+1})x_n &= f_n(t). \end{aligned}$$

que podem ser reduzidas ao mesmo sistema matricial da Equação 2.4, com:

$$\begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n + c_{n+1} \end{bmatrix}, \\ [K] &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De novo, as matrizes  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são o modelo espacial deste sistema.

## 2.2.2 Modos de vibração

No segundo estágio da rota teórica nos interessam as informações que descrevem a vibração livre do sistema (sem força excitadora), e que obtemos ao resolver os sistemas de

equação do movimento desenvolvidas ao longo da descrição da estrutura. Vamos, entretanto, dividir o estudo em dois casos: não amortecido e amortecido. No primeiro caso temos que  $[C] = [0]$ , ou seja, todos os termos que multiplicam  $\dot{x}_i$  são zero. No segundo,  $[C] \neq [0]$ , portanto teremos que resolver o sistema por completo.

— Caso não amortecido —

Retornando à Equação 2.1 para 1GDL, sem força externa ( $f(t) = 0$ ) e sem amortecimento ( $c = 0$ ), ela se torna:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (2.5)$$

Suponhamos, então, que a solução seja  $x(t) = Xe^{st}$ , sendo  $X$  e  $s$  constantes, e o número de Euler, e  $t$  o instante. Se a derivarmos e substituirmos em  $x$  e  $\ddot{x}$ , teremos:

$$ms^2(Xe^{st}) + k(Xe^{st}) = 0.$$

Mas, como  $Xe^{st} \neq 0$  para qualquer  $st$ , podemos simplificar mais ainda:

$$ms^2 + k = 0, \quad (2.6)$$

que é chamada de *equação característica do sistema* escrita em  $s$ . Podemos definir também o *polinômio característico do sistema* como sendo:

$$G(s) = G_1(s^2) = ms^2 + k.$$

Retornando à Equação 2.6, ao resolvê-la, obtemos:

$$s = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.7)$$

sendo  $i = \sqrt{-1}$ , a unidade imaginária, e de onde definimos:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.8)$$

que chamamos de *frequência natural* ou *fundamental* do sistema, e que também é o único dado que compõe o modelo modal de um sistema de 1GDL não amortecido. Essa frequência é aquela em que o sistema vibra naturalmente quando lhe damos apenas deslocamento e velocidade iniciais, sem imposição de força, isto é, condições iniciais diferentes de zero, como veremos a seguir.

Sabendo-se a relação de Euler,

$$e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t,$$

e substituindo a Equação 2.7 de volta no chute inicial, e este na Equação 2.5 para resolvê-la completamente, temos a solução geral:<sup>5</sup>

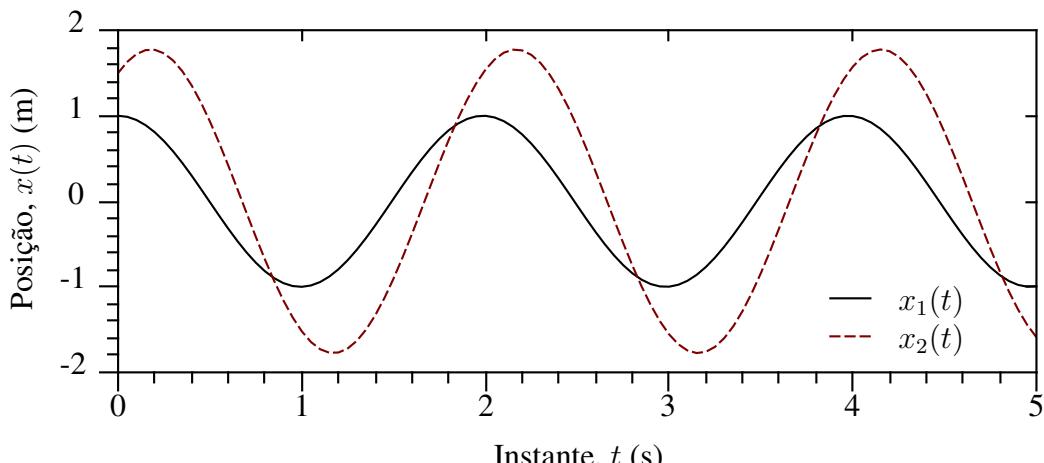
$$x(t) = A \cos(\omega_n t + \theta), \quad (2.9)$$

<sup>5</sup> Para a resolução completa da equação do movimento de um sistema massa-mola de 1GDL, cf. Boyce e DiPrima (2001, seção 3.8).

sendo  $\omega_n$  o mesmo que na Equação 2.8. A constante  $A$  é a *amplitude do movimento harmônico*, e  $\theta$  é o chamado *ângulo de fase*. Ambos são calculados segundo as condições de deslocamento e velocidade iniciais que devem ser impostas à Equação 2.5.

Podemos visualizar melhor o significado dessas constantes na Figura 5, onde há o gráfico do deslocamento para um sistema com  $m = 1 \text{ kg}$  e  $k = 10 \text{ N/m}$  e diferentes condições iniciais. Quando  $x(0) = 1 \text{ m}$  e  $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$ , temos  $A = 1 \text{ m}$  e  $\theta = 0^\circ$ , cuja função representada é  $x_1(t)$ . Para  $x(0) = 1,5 \text{ m}$  e  $\dot{x}(0) = 3 \text{ m/s}$ , ficamos com  $A = 1,77 \text{ m}$  e  $\theta = -32,3^\circ$ , que é representado pela função  $x_2(t)$ . Perceba que graficamente temos o deslocamento da segunda curva, em relação à primeira, no eixo das abscissas, que é causado pelos diferentes valores de  $\theta$ . Já a diferença de amplitude ocorre por causa dos diferentes valores de  $A$ . As frequências das duas ondas não se alteram, sendo ambas iguais à frequência natural do sistema,  $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 3,16 \text{ rad/s}$ .

Figura 5 – Deslocamento de um sistema de 1GDL para diferentes condições iniciais



Fonte: O Autor.

Para 2GDL, resolveremos o sistema na forma matricial. Como  $[C] = [0]$  e  $\vec{f}(t) = \vec{0}$ , a Equação 2.4 fica:

$$[M]\ddot{\vec{x}}(t) + [K]\vec{x}(t) = \vec{0}. \quad (2.10)$$

Assumindo que as soluções de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são da mesma forma que o caso de 1GDL, isto é,

$$x_1(t) = X_1 e^{st}, \quad \text{e} \quad x_2(t) = X_2 e^{st},$$

vamos escrever:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \cdot e^{st} = \vec{X} e^{st}. \quad (2.11)$$

Se assumirmos que  $s$  será novamente igual  $i\omega$ , e substituirmos a solução na Equação 2.10, teremos:

$$([K] - \omega^2[M]) \vec{X} e^{i\omega t} = \vec{0}. \quad (2.12)$$

Como não queremos a solução trivial, isto é, que

$$\vec{X} e^{i\omega t} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

devemos fazer com que a primeira matriz não seja inversível, ou seja:

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0, \quad (2.13)$$

que é a equação característica no caso de 2GDL. Substituindo  $[M]$  e  $[K]$  temos o determinante

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & m_2\omega^2 + (k_2 + k_3) \end{vmatrix} = 0,$$

o qual resulta na equação característica expandida:

$$(m_1 m_2) \omega^4 + [(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1]\omega^2 + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2 = 0,$$

e que é uma equação de quarto grau, mas que pode ser resolvida para  $\omega^2$  como sendo uma equação quadrática. Novamente, podemos chamar de polinômio característico a expressão  $G(\omega) = G_1(\omega^2) = \det([K] - \omega^2 [M])$ .

Na busca das raízes do polinômio  $G_1(\omega^2)$  encontraremos  $\omega_1^2$  e  $\omega_2^2$ , que são os quadrados das frequências naturais do sistema. Quando se tem mais de uma frequência natural, denomina-se por “fundamental” apenas a menor frequência. Substituindo  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , uma por vez, na Equação 2.12, teremos dois sistemas possíveis e indeterminados. É o mesmo que dizer que não há como saber os valores absolutos dos componentes de  $\vec{X}^{(1)}$  (para  $\omega = \omega_1$ ), nem de  $\vec{X}^{(2)}$  (para  $\omega = \omega_2$ ). Para encontrar a solução, basta fixar algum dos componentes de  $\vec{X}^{(r)}$  como sendo igual à unidade, e calcular o restante dos valores, com  $r = 1, 2$ .

A relação de proporcionalidade entre os componentes de  $\vec{X}^{(r)}$  é o que chamamos de *forma dos modos de vibrar*, ou *modos normais*, este é um vetor de um dos modos normais. Esta também é a segunda informação que compõe o modelo modal de um sistema vibratório. Os modos normais, que agora serão representados por  $\vec{\psi}_n$ , indicam a posição relativa entre as coordenadas do sistema para qualquer instante de tempo, ou seja, eles nos mostram a “forma” com a qual as partes se movem, e cada um está associado a uma frequência natural de vibração  $\omega_n$ . Mostraremos sua importância ao apresentarmos a solução geral do problema mais adiante.

Antes da solução, entretanto, é importante organizarmos o modelo modal do sistema na forma matricial, assim como fizemos para o modelo espacial. Os quadrados das frequências naturais são dispostos numa matriz diagonal,  $[\Omega^2]$ , em ordem crescente, enquanto que os vetores dos modos naturais serão colunas de uma matriz quadrada,  $[\Psi]$ , cujas posições estão associadas à ordem das frequências naturais na matriz  $[\Omega]$ . Enfim, o modelo modal do sistema é:

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} [\Psi] &= \begin{bmatrix} \vec{\psi}_1 & \vec{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{X}^{(1)} & \vec{X}^{(2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A solução geral será a superposição de soluções individuais da forma da Equação 2.9 para diferentes amplitudes, que são os modos normais de vibração, e diferentes frequências, que são as frequências naturais do sistema. Em forma matemática:

$$x_1(t) = A_1 \left[ X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \theta_1) + X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \theta_2) \right], \text{ e} \quad (2.14)$$

$$x_2(t) = A_2 \left[ X_2^{(1)} \cos(\omega_2 t + \theta_1) + X_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \theta_2) \right]. \quad (2.15)$$

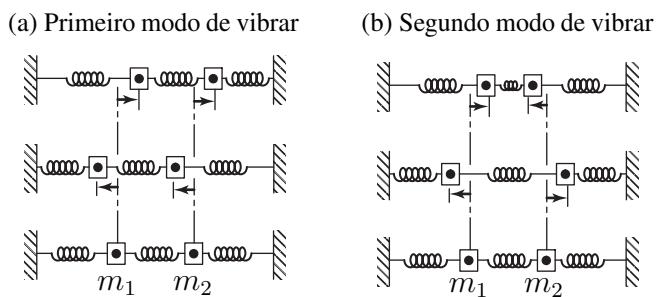
As constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são, assim como antes, determinadas em função das condições iniciais do problema das Equações 2.2 e 2.3.

Como exemplo, na Figura 2b, se resolvermos determinarmos suas propriedades modais para  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ ,  $k_1 = k_3 = 4 \times 10^5 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 8 \times 10^5 \text{ N/m}$ , e sem amortecimento, teremos (EWINS, 1984):

$$\begin{aligned} [\Omega^2] &= \text{diag}\{4 \times 10^5; 2 \times 10^6\} (\text{rad}^2/\text{s}^2), \text{ e} \\ [\Psi] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Analizando os valores de  $[\Psi]$ , temos a Figura 6 que demonstra os modos de vibrar do sistema. O primeiro modo,  $\vec{\psi}_1$ , está relacionado as primeiras parcelas das Equações 2.14 e 2.15, e seus elementos tem o mesmo sinal. Portanto, as massas  $m_1$  e  $m_2$  se movem no mesmo sentido durante toda a vibração e com frequência  $\omega_1 = \sqrt{4 \times 10^5} = 632,4 \text{ rad/s}$ , como na Figura 6a. O segundo,  $\vec{\psi}_2$ , está presente na segunda parcela das mesmas equações e possuem sinais opostos. O resultado é que elas se movem em sentidos opostos, como na Figura 6b, e a frequência de vibração é  $\omega_2 = \sqrt{2 \times 10^6} = 1414 \text{ rad/s}$ .

Figura 6 – Modos de vibrar de um sistema de 2GDL



Fonte: Adaptada de Rao (2010, pp. 479).

Para  $n$ -GDL, retornamos à Equação matricial 2.10 e, pelo mesmo procedimento, chegamos à mesma equação característica da mesma forma do caso de 2GDL, a Equação 2.13.

Não vamos, entretanto, expandir o determinante e calcular as raízes da equação resultante, porque seria impossível, para  $n > 8$ , fazê-lo de forma analítica.<sup>6</sup> Analisemos, portanto, o que a equação representa: trata-se de um “autoproblema”, ou um problema para determinar “autovetores” e “autovalores”.

Autovetores de uma transformação linear são vetores não-nulos que não mudam de direção quando sua própria transformação é aplicada a eles, mas apenas alteram seu comprimento (BOLDRINI et al., 1980), ou seja:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v},$$

sendo  $\lambda$  um escalar conhecido como autovalor. Por ser uma transformação linear, podemos fazer:

$$T(\vec{v}) = [A]\vec{v},$$

sendo  $[A]$  a matriz de transformação. Movendo os termos para o mesmo lado da equação, temos:

$$\begin{aligned} [A]\vec{v} - \lambda\vec{v} &= \vec{0}, \\ ([A] - \lambda[I])\vec{v} &= \vec{0}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

sendo  $[I]$  uma matriz identidade, tal que  $[A][A]^{-1} = [I]$ . Como  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , o primeiro fator dessa multiplicação não pode ser inversível, pois, assim como na solução do problema de 2GDL, não desejamos a solução trivial. Portanto, na solução não trivial:

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0. \tag{2.17}$$

Fica óbvio, então, a semelhança entre as Equações 2.13 e 2.17, e até mesmo a Equação 2.6 (se fizermos  $s = i\omega$ ). Comparando-as, nota-se que o quadrado das frequências naturais são autovalores, e também percebemos que um autovalor está para um autovetor da mesma forma que uma frequência natural está para um modo normal. É de se esperar, então, que os modos normais são autovetores desses autoproblemas.

Essa abstração é importante porque facilita a busca pelas frequências naturais e modos normais. Mesmo não podendo resolver uma equação característica de forma exata para mais de 8GDL, poderíamos usar métodos numéricos para encontrar suas  $2n$  raízes, selecionar aquelas que representam as frequências naturais do sistema e, a partir delas, resolver  $n$  vezes um sistema de ordem  $n$  como da Equação 2.12. É claro que todo esse procedimento seria bastante trabalhoso, mas, felizmente, ao tratarmos esse caso como um autoproblema, podemos escolher alguma ferramenta numérica, dentre inúmeras disponíveis,<sup>7</sup> para encontrar os dados que desejamos, sem necessariamente tratar o problema como sendo a resolução de equações de movimento.

<sup>6</sup> Segundo o Teorema de Abel-Ruffini, é impossível calcular as raízes de polinômios de quinta ordem ou maior em função de seus coeficientes. Como fazemos uma substituição de variáveis do tipo  $y = \omega^2$ , reduzimos a ordem da equação característica pela metade, e assim atingimos o limite estabelecido por esse teorema em 8GDL.

<sup>7</sup> Para uma revisão dos diferentes métodos de cálculo de autovalores, cf. Saad (2011) (em inglês).

Em nosso caso de estudo, as matrizes  $[M]$  e  $[K]$  são simétricas e, consequentemente, temos um autoproblema simétrico. Nessas ocasiões, a matriz de autovetores é ortogonal (EWINS, 1984), ou seja:

$$[\Psi]^T = [\Psi]^{-1}.$$

Duas importantes matrizes podem ser obtidas a partir dessa propriedade (EWINS, 1984)

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = [M^*], \quad \text{e} \quad [\Psi]^T [K] [\Psi] = [K^*], \quad (2.18)$$

sendo ambas,  $[M^*]$  e  $[K^*]$ , diagonais, e seus elementos,  $m_r^*$  e  $k_r^*$ , são conhecidos como *massa* e *rigidez generalizadas* do  $r$ -ésimo modo, respectivamente. Uma das utilidades destas matrizes é desacoplar o sistema, isto é, fazer com que cada equação de movimento que gerou o modelo espacial seja dependente de apenas uma coordenada. Assim, elas podem ser resolvidas de forma independente uma da outra, como se fossem equações de sistemas de 1GDL.

Voltando à resolução do autoproblema, é importante lembrar que diferentes algoritmos geram diferentes resultados para  $[\Psi]$ . Como dito, o que nos interessa não é o valor dos vetores ali contidos, mas a relação de proporcionalidade entre seus elementos, ou seja,  $\vec{\psi}_1 = \{1, 2, 3\}$  e  $\vec{\psi}_2 = \{2, 4, 6\}$  podem ambos ser autovetores de um mesmo sistema de 3GDL. Entretanto, o que se observa é que a relação  $k_r/m_r$  se mantém e é única, sendo igual aos autovalores do problema. Partindo dessa ideia, é costumeiro usarmos os *modos normais normalizados pela massa* (EWINS, 1984; MAIA; SILVA, 1997),  $[\Phi]$ , cuja definição é:

$$\begin{aligned} [\Phi] &= [\Psi][M^*]^{-1/2} \\ \therefore \phi_{jr} &= \psi_{jr}/m_r^* \end{aligned} \quad (2.19)$$

Uma das propriedades que resulta dessa normalização é (EWINS, 1984):

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I], \quad \text{e} \quad [\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega^2], \quad (2.20)$$

que implica em  $\omega_r^2 = k_r^*/m_r^*$ , e que usaremos quando desenvolvermos o modelo de resposta do sistema.

Há muitos ambientes de programação numérica disponíveis atualmente que podem ser usados para resolver autoproblemas. Dentre eles, vale mencionar aqui o scilab<sup>8</sup>, pois ele será usado no próximo capítulo. Ele, assim como tantos outros (MATLAB, Mathematica, Maple, Mathcad etc.), possui funções nativas para resolução de autoproblemas. Seus resultados devem ser satisfatórios para a maioria das aplicações, principalmente para os casos simples que apresentamos aqui. No fim das contas, para termos o modelo modal, isto é, as matrizes  $[\Omega^2]$  e  $[\Psi]$ , ou  $[\Omega^2]$  e  $[\Phi]$ , de um sistema de  $n$ -GDL, basta resolver numericamente de forma apropriada o autoproblema

$$([K] - \omega^2[M]) \vec{\psi} = \vec{0}.$$

<sup>8</sup> scilab é uma plataforma gratuita de código aberto para computação numérica. Para mais informações ou *downloads*, acesse: <<http://www.scilab.org>>.

— Caso amortecido —

Agora que já introduzimos algumas formalidades para a modelagem dos sistemas vibratórios, o tratamento para o caso amortecido será mais rápido. Para 1GDL, com  $c \neq 0$  e  $f(t) = 0$ , temos a seguinte equação do movimento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

Substituindo o mesmo chute que o caso não-amortecido ( $x = Xe^{st}$ ), a equação característica fica:

$$ms^2 + cs + k = 0, \quad (2.21)$$

cuja solução é:

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m},$$

ou

$$s = -\omega_0\zeta \pm i\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (2.22)$$

sendo

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{k/m}, \quad \text{e} \\ \zeta &= c/c_c = c/2\sqrt{km}. \end{aligned}$$

Perceba que  $\omega_0$  é a mesma constante que a frequência natural do caso não-amortecido, e que  $\zeta$ , chamado de *fator de amortecimento*, é adimensional, logo,  $s$  tem a mesma unidade de frequência que  $\omega_0$ . Outro fato importante que deve ser notado é que  $s$  pode ser complexo ou real dependendo do valor de  $\sqrt{c^2 - 4km}$ . O valor de  $c_c$ , chamado de *constante de amortecimento crítico*, é justamente o limite entre esses dois grupos, criando três casos de amortecimento, com três soluções distintas para a equação do movimento.<sup>9</sup> Em termos de  $\zeta$ , os casos são:

$$\begin{aligned} \zeta < 1 &\implies c < c_c, s \in \mathbb{C} \quad (\text{sistema subamortecido}) \\ &\quad x(t) = e^{\zeta\omega_0 t} \left( C_1 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0 t + C_2 \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0 t \right); \\ \zeta = 1 &\implies c = c_c, s \in \mathbb{R} \quad (\text{sistema criticamente amortecido}) \\ &\quad x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t}, \text{ e}; \\ \zeta > 1 &\implies c > c_c, s \in \mathbb{R} \quad (\text{sistema superamortecido}) \\ &\quad x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_0 t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_0 t}. \end{aligned}$$

Como 2GDL já se apresenta como um problema razoavelmente extenso, cujas expressões são bastante longas, pulemos para um caso mais geral de  $n$ -GDL. A equação característica fica:

$$\det([M]s^2 + [C]s + [K]) = 0, \quad (2.23)$$

que chamamos de autoproblema não-linear (LALLEMENT; INMAN, 1995).

<sup>9</sup> Para análise detalhada do comportamento do sistema em cada tipo de amortecimento, cf. Inman (2008, cap. 1).

Há várias maneiras de se converter a Equação 2.23 em algo com a mesma forma que um autoproblema tradicional, apresentado na Equação 2.17. Não entraremos em extensas demonstrações matemáticas,<sup>10</sup> pois nos basta fazer uma consideração para simplificar a busca pela solução. De aqui em diante, consideraremos amortecimento como sendo proporcional (EWINS, 1984), isto é:

$$[C] = \beta[K] + \gamma[M], \quad (2.24)$$

com  $\beta$  e  $\gamma$  reais e positivos. Nesses casos, os autovetores (modos normais) do sistema amortecido serão reais e iguais aos do sistema não amortecido (LALLEMENT; INMAN, 1995). Em outras palavras:

$$[\Psi]_{\text{não-amortecido}} = [\Psi]_{\text{amortecido}}. \quad (2.25)$$

Ao optar por um amortecimento não proporcional, o resultado do autoproblema entrega  $2n$  autovalores e autovetores, sendo  $n$  pares de conjugados complexos. Como cada elemento e seu conjugado representam a mesma informação (por exemplo, conjugados da Equação 2.22), basta escolher  $n$  autovalores e seus autovetores correspondentes para obtermos o modelo modal do sistema. Segundo Ewins (1984), é usual que os autovalores escolhidos sejam da forma:

$$\begin{aligned} s_r &= -\omega_r \left( \zeta_r + i\sqrt{1 - \zeta_r^2} \right), \quad \text{com} \\ \zeta_r &= \beta\omega_r/2 + \gamma/2\omega_r. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por outro lado, ao supor amortecimento proporcional, não há necessidade de fazer mudanças no sistema matricial para alcançar a forma da Equação 2.17. Considerando a propriedade da Equação 2.25, deve-se: resolver o autoproblema na forma não-amortecida, isto é, com  $[C] = 0$ ; ignorar os autovalores e manter os autovetores; buscar as raízes da equação característica; selecionar os valores que forem da forma da Equação 2.26 e ignorar os demais; relacionar cada frequência a seu respectivo autovetor encontrado no caso não-amortecido.

Mesmo que o amortecimento viscoso seja a consideração mais comum em análise de vibrações, o que se observa experimentalmente é que o amortecimento viscoso nem sempre descreve bem o comportamento de estruturas reais (MAIA; SILVA, 1997). Na realidade, o comportamento real mais se aproxima de um amortecedor cujo valor varia inversamente proporcional à frequência, ou seja,  $c = d/\omega$  (EWINS, 1984). Esse modelo de amortecimento é o que chamamos de *amortecimento estrutural ou histerético*, e está relacionado à perda de energia devido à fricção entre os planos atômicos do material durante a vibração (RAO, 2010).

Nestes casos, o autoproblema de um sistema fica igual:

$$([K] + i[D] - \lambda^2[M]) \vec{\psi} = \vec{0},$$

que tem a mesma forma daquele da Equação 2.16, tomando  $[A] = [K] + i[D]$ . Assim, temos novamente um autoproblema linear, o qual retornará  $n$  autovalores e  $n$  autovetores. Novamente,

<sup>10</sup> Para métodos de solução de autoproblemas não-lineares, cf. Lallement e Inman (1995).

os autovalores apresentam informações quanto a frequência natural e o amortecimento do  $r$ -ésimo modo de vibrar. Eles, simbolizados por  $\lambda_r^2$ , são geralmente apresentados na forma (EWINS, 1984):

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2(1 + i\eta_r),$$

sendo  $\eta_r$  chamado de *fator de amortecimento modal*, e são também organizados numa matriz diagonal  $[\Lambda^2]$ . Deve-se observar que ao assumirmos amortecimento do tipo estrutural, a matriz  $[D]$  substitui  $[C]$  no modelo espacial do sistema.

Também podemos considerar que o amortecimento histerético seja proporcional à massa e à rigidez, como na Equação 2.24, ou seja (EWINS, 1984):

$$[D] = \beta[K] + \gamma[M] \quad (2.27)$$

Quando for este o caso, a propriedade da Equação 2.25 também é válida, isto é, todos os modos de vibrar serão reais, e o fator de amortecimento modal pode ser calculado como (EWINS, 1984):

$$\eta_r = \beta + \gamma/\omega_r^2. \quad (2.28)$$

### 2.2.3 Níveis de resposta

O terceiro estágio diz respeito ao comportamento da estrutura sob excitação externa, o qual depende não apenas da estrutura em si, mas do tipo de forças aplicadas. Esta é geralmente a parte que mais interessa num estudo teórico de sistemas vibratórios, pois é aqui que identificam-se as amplitudes do movimento. Assim como Maia e Silva (1997) e Ewins (1984), durante todo o estudo consideraremos que a excitação é uma onda cossenoidal de amplitude unitária mas com frequência variável.

O modelo de resposta que desejamos obter aqui é, na verdade, um conjunto de funções de resposta em frequência (FRF), que são casos específicos de *funções de transferência*.<sup>11</sup> As FRFs relacionam a amplitude da resposta do sistema à força que age na estrutura, e são função da frequência de excitação. Porém, antes de começarmos nossa análise, é necessário estabelecer uma convenção:

$$x(t) = X \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(X e^{i\omega t}) = X e^{it}, \text{ e} \quad (2.29)$$

$$f(t) = F \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(F e^{i\omega t}) = F e^{it}. \quad (2.30)$$

Em suma, sempre que nos referirmos à posição ( $x(t)$ ) ou à força ( $f(t)$ ) por meio de funções exponenciais complexas, estamos na verdade nos referindo à sua parte real, ou seja, ao termo cosseno da relação de Euler que já estamos usando. Isso serve apenas para diminuir o número de informações nas fórmulas que apresentaremos adiante.

<sup>11</sup> Função de transferência: “uma função que relaciona algebricamente a saída de um sistema à sua entrada” (NISE, 2002, p. 36). Em análise vibratória, a saída pode ser deslocamento, velocidade ou aceleração do sistema, enquanto que a entrada geralmente é uma força.

Para 1GDL não-amortecido, se substituirmos as Equações 2.29 e 2.30 na Equação do movimento 2.5, teremos:

$$(k - \omega^2 m) X e^{i\omega t} = F e^{i\omega t},$$

e definimos a FRF como sendo:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{X e^{i\omega t}}{F e^{i\omega t}} = \frac{X}{F} \\ &= \frac{1}{k - \omega^2 m} = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para o caso amortecido, usando a Equação 2.1, teremos:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k) X e^{i\omega t} = F e^{i\omega t}.$$

E temos a nova FRF para o caso amortecido:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i\omega c} \\ &= \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega c}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Se o amortecimento for histerético,

$$H(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + id} = \frac{1/k}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + i\eta}, \quad (2.33)$$

com  $\eta = d/k$ .

O símbolo  $H(\omega)$  é usado para representar FRFs de forma geral, mesmo havendo diferentes tipos dessas funções. A que acabamos de deduzir chama-se *receptância*, e relaciona deslocamento e força, sendo comumente representada por  $\alpha(\omega)$ . Se usarmos a velocidade como parâmetro de saída do sistema, teremos a *mobilidade*:

$$Y(\omega) = \frac{V e^{i\omega t}}{F e^{i\omega t}} = \frac{V}{F}.$$

Para a aceleração, teríamos a *inertância* ou *acelerância*:

$$A(\omega) = \frac{a e^{i\omega t}}{F e^{i\omega t}} = \frac{a}{F}.$$

Sabendo-se que podemos obter velocidade e aceleração a partir do deslocamento por meio de derivação, pode-se provar que as seguintes relações existem e são válidas (MAIA; SILVA, 1997):

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= i\omega\alpha(\omega), \text{ e} \\ A(\omega) &= -\omega^2\alpha(\omega). \end{aligned}$$

Isso nos diz que uma FRF de um determinado tipo representa tão bem um sistema mecânico como qualquer outra de outro tipo, sendo elas calculáveis uma a partir de outra.

Não é possível representar graficamente  $H(\omega)$  em um único gráfico de duas dimensões de modo que nos mostre todos os parâmetros que nos interessam (magnitude, frequência e ângulo de fase), portanto, geralmente usa-se o chamado diagrama de Bode.<sup>12</sup> Trata-se de dois gráficos que representam uma grandeza complexa, neste caso  $H(\omega)$ , em duas partes: a primeira é sua magnitude,  $|H(\omega)|$ , geralmente em escala logarítmica, e a segunda é seu ângulo de fase,  $\theta$ , ambos em função da frequência  $\omega$ . Então, desses dois gráficos temos o valor de  $H(\omega)$  para qualquer ponto, calculando-o como:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{i\theta}.$$

Deve-se notar que o ângulo de fase que agora nos referimos, trata-se da diferença de fase que existe entre os vetores de força e deslocamento, como veremos a seguir.

A Figura 7 mostra os diagramas de Bode para sistemas não-amortecidos (Equação 2.31) e para diferentes valores de amortecimento (Equação 2.32). Perceba que em todos os casos há picos quando  $\omega = 3,16 \text{ rad/s}$ , que é a frequência natural do sistema. Isso é chamado de *ressonância*, e é o fenômeno em que a amplitude de vibração do sistema tende ao infinito quando a frequência de excitação é igual à frequência natural. Pelo gráfico da fase, perceba também que há um salto de  $180^\circ$  quando se cruza a  $\omega_0$ . Essa diferença, chamado de mudança de fase é em relação à força aplicada ao sistema, isto é

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &= X \cos(\omega_n t + \theta_x), \\ \text{e } f(t) &= F \cos(\omega_n t + \theta_f), \\ \text{então } \theta_f - \theta_x &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Para  $n$ -GDL, não teremos apenas uma função, mas  $n^2$  funções, ou seja,  $H(\omega)$ , de agora em diante  $\alpha(\omega)$ , será uma matriz quadrada de polinômios. Os elementos dessa matriz,  $\alpha_{ij}(\omega)$ , serão uma função de resposta do ponto  $j$  quando uma força é aplicada no ponto  $i$ . Quando o sistema é não-amortecido, temos:

$$[M]\ddot{\vec{x}}(t) + [K] = \vec{f}(t).$$

Para a mesma suposição de excitação e resposta harmônicas anteriores, fica:

$$([K] - \omega^2[M]) \vec{X} e^{i\omega t} = \vec{F} e^{i\omega t}.$$

Assim, temos a transformação linear  $\vec{X} = [\alpha(\omega)]\vec{F}$ , sendo:

$$[\alpha(\omega)]^{-1} = ([K] - \omega^2[M]). \quad (2.34)$$

<sup>12</sup> Em homenagem a Hendrik Wade Bode (1905–1982), seu criador, e trata-se de dois gráficos em escala logarítmica: um que representa a magnitude da resposta do sistema, e outro para a mudança de fase, em função da frequência de excitação.

Podemos ainda fazer algumas manipulações para expressá-la melhor. Tomando ambos os lados, pré-multiplicando por  $[\Phi]^T$ , pós-multiplicando por  $[\Phi]$ , e usando as propriedades da Equação 2.20, dá:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\Phi] &= [\Phi]^T([K] - \omega^2[M])[\Phi] \\ &= ([\Phi]^T[K][\Phi] - \omega^2[\Phi]^T[M][\Phi]) \\ &= ([\Omega^2] - \omega^2[I]). \end{aligned}$$

Logo:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi]([\Omega^2] - \omega^2)^{-1}[\Phi]^T. \quad (2.35)$$

Portanto, a matriz  $[\alpha(\omega)]$  é simétrica (EWINS, 1984), ou seja,

$$\alpha_{jk}(\omega) = \alpha_{kj}(\omega),$$

o que obedece ao teorema da reciprocidade de Maxwell, que foi uma das suposições que fizemos no início deste capítulo. Podemos também calcular os elementos de  $[\alpha(\omega)]$  individualmente como sendo (EWINS, 1984)

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^n \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{m_r^*(\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (2.36)$$

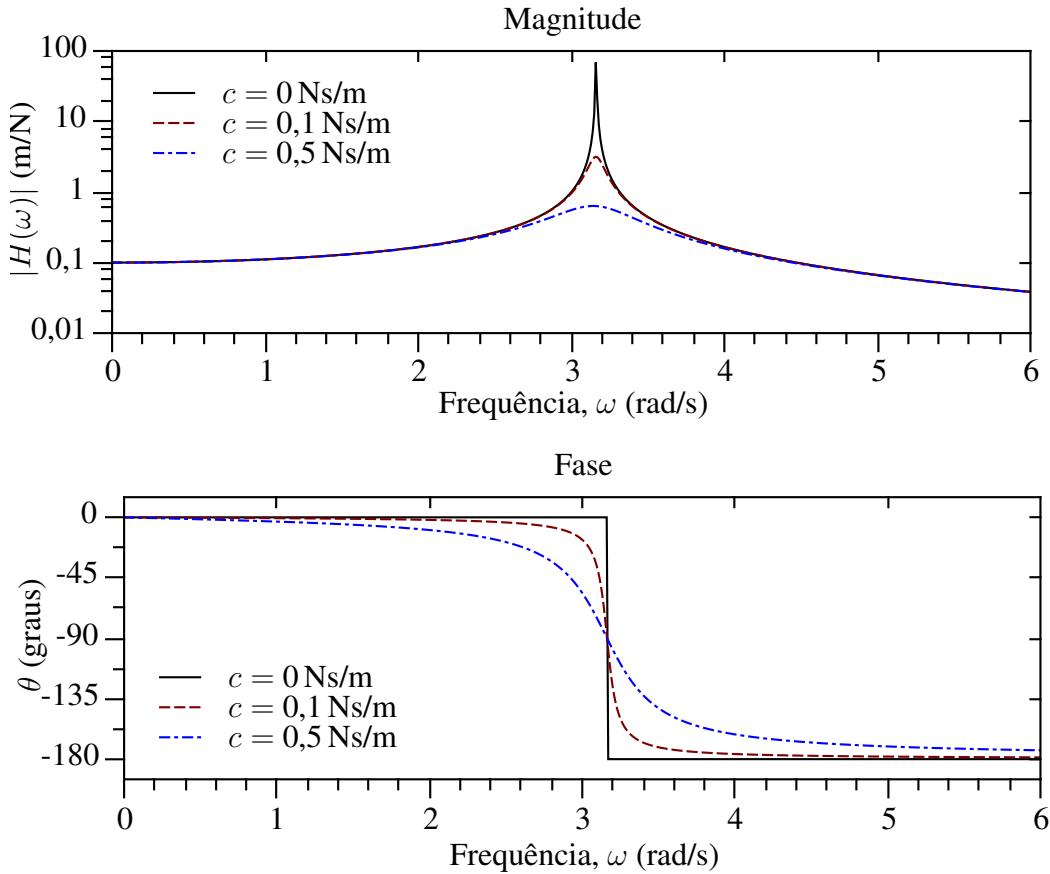
Da Equação 2.36, percebe-se que os elementos  $\alpha_{jk}$  são funções racionais em  $\omega$ , ou seja, razões de polinômios da forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \frac{P_1(\omega^2)}{Q_1(\omega^2)}. \quad (2.37)$$

Note também que sempre que  $\omega \rightarrow \omega_r$ , a  $r$ -ésima parcela do somatório da Equação 2.36 tenderá ao infinito, pois seu denominador tenderá a zero, como acontece no caso de 1GDL. Outro resultado notável é que se somarmos suas parcelas numa única fração da forma da Equação 2.37, vamos ter que  $Q_1(\omega^2)$  é, na verdade, múltiplo do polinômio característico do sistema. Ora, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, se dois polinômios possuem as mesmas raízes, eles são, na verdade, múltiplos um do outro.<sup>13</sup>

Agora considere a imagem da Figura 8. Ela mostra duas funções de receptância,  $\alpha_{12}(\omega)$  e  $\alpha_{21}(\omega)$ , de um sistema de 2GDL, com  $m_1 = 1 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 0,4 \text{ MN/m}$ ,  $k_2 = 0,8 \text{ MN/m}$  e  $k_3 = 2,4 \text{ MN/m}$ . A sobreposição das curvas nos mostra que ambas são idênticas, evidenciando a simetria de  $[\alpha(\omega)]$ . Perceba, também, que os picos se localizam sobre  $\omega_1 = 632,4 \text{ rad/s}$  e  $\omega_2 = 1414 \text{ rad/s}$ , que são as frequências naturais do sistema, e que é um resultado também já esperado. Assim, como antes, há um salto de fase  $180^\circ$  em cada ponto de ressonância.

<sup>13</sup> O Teorema Fundamental da Álgebra estipula que todo polinômio é resultado de um produto de polinômios de primeiro grau da forma  $x + a_n$ , sendo  $-a_n$  as raízes desses fatores. (COSTA, 2013) Se tomarmos  $x = -\omega^2$ , e  $-a_n = \omega_r^2$ , teremos  $Q_1(\omega^2)$  e, pelo teorema, um múltiplo do polinômio característico.

Figura 7 – Diagrama de Bode para um sistema de 1GDL, com  $m = 1 \text{ kg}$  e  $k = 10 \text{ N/m}$ 

Fonte: O Autor.

Retornando ao conceito do modelo de resposta, qualquer uma das funções de resposta em frequência pode ser usada como modelo do sistema, seja a receptância, a mobilidade ou a acelerância. É comum, entretanto, obter-se experimentalmente a acelerância ou a mobilidade do sistema, pois velocidade e aceleração são grandezas mais fáceis de se obter que a posição (MAIA; SILVA, 1997). Neste trabalho, por não trabalharmos com dados experimentais, nosso modelo de resposta será o conjunto de funções de receptância, isto é, a matriz  $[\alpha(\omega)]$ . Caso o leitor se interesse pela mobilidade ou acelerância, fica como sugestão calculá-las a partir dos dados que apresentaremos no próximo capítulo.

Por último, no caso amortecido, substituindo as Equações 2.29 e 2.30 na Equação matricial 2.4 expandida para  $n$ -GDL, e seguindo o mesmo procedimento que acabamos de apresentar, temos que:

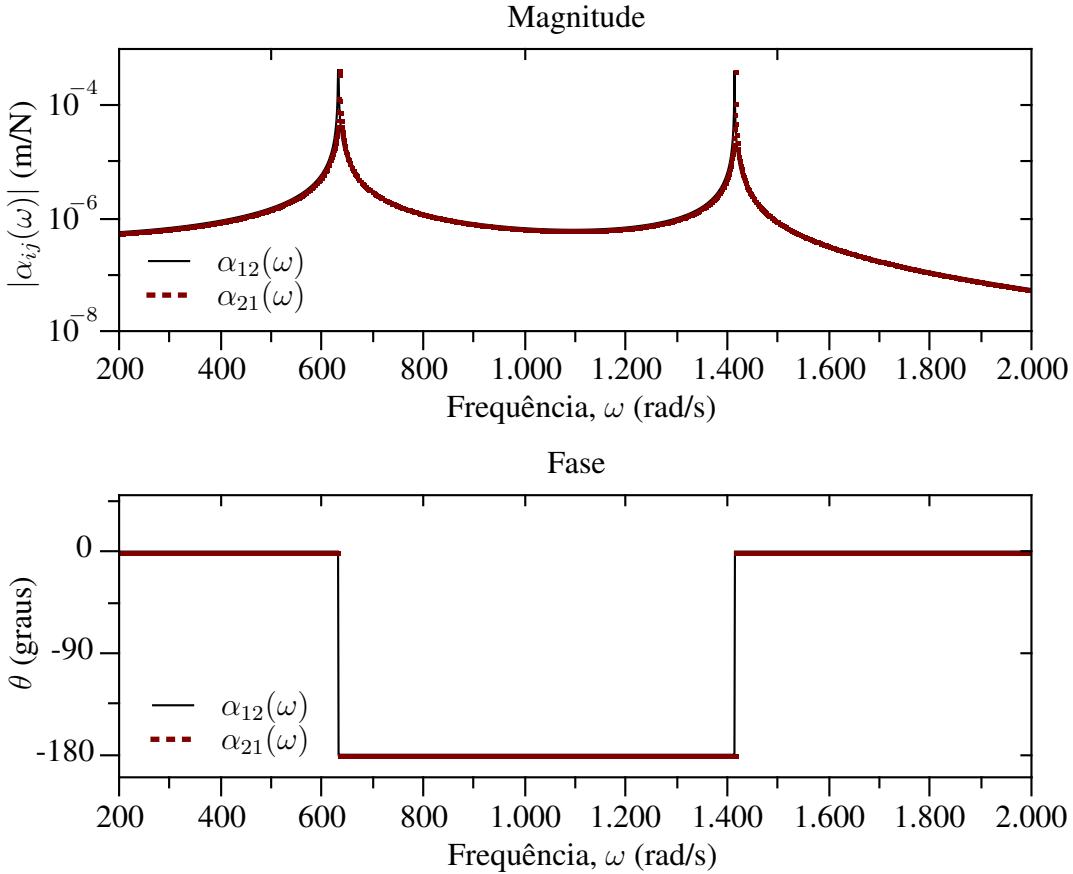
$$[\alpha(\omega)] = ([K] + i\omega[C] - \omega^2[M])^{-1}. \quad (2.38)$$

Cada elemento da matriz será (EWINS, 1984):

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{(k_r^* - \omega^2 m_r^*) + i(\omega c_r^*)}, \quad (2.39)$$

sendo que  $c_r^*$  é elemento da matriz diagonal  $[C^*] = [\Phi]^T[C][\Phi]$ , chamado de *amortecimento generalizado* do  $r$ -ésimo modo.

Figura 8 – Diagrama de Bode para um sistema de 2GDL



Fonte: O Autor.

Para amortecimento histerético, teríamos:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{(k_r^* - \omega^2 m_r^*) + i d_r^*},$$

sendo  $d_r^*$  um elemento da matriz diagonal  $[D^*] = [\Phi]^T [D] [\Phi]$ . Além disso, quando o amortecimento também é proporcional, a receptância para  $n$ -GDL pode ser reescrita como:

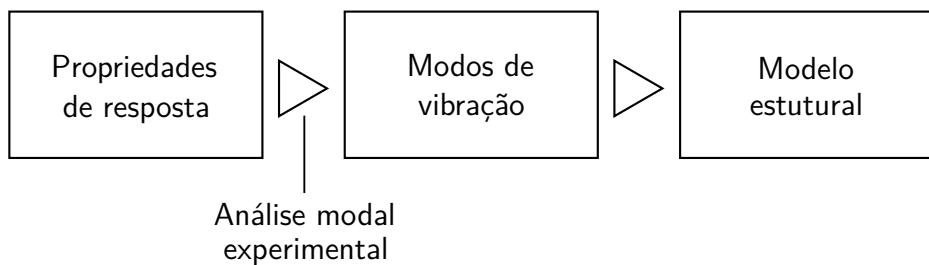
$$\begin{aligned} \alpha_{jk}(\omega) &= \sum_{r=1}^n \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{(k_r^* - \omega^2 m_r^*) + i \eta_r k_r^*} \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{m_r^* \omega_r^2 (1 + i \eta_r) - \omega^2 m_r^*} \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\lambda_r^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Essa abordagem vai ser útil na rota experimental, onde calcularemos o amortecimento justamente através do parâmetro  $\eta_r$ .

## 2.3 Estudo experimental de vibrações

Na análise de vibrações, quando não se parte de um sistema descrito analiticamente, isto é, quando se deseja fazer estudos em protótipos ou sistemas físicos reais, adota-se a “rota experimental”. A Figura 9, que descreve tal rota, mostra quase que o caminho inverso daquele da Figura 1. Uma ressalva deve ser feita porque um experimento quase nunca fornece todas as propriedades que podem ser medidas e, portanto, sempre obteremos um modelo reduzido e simplificado do problema, e por isso o caminho não é exatamente o inverso da rota teórica.

Figura 9 – Ilustração da rota experimental para análise de vibrações



Fonte: Traduzida e adaptada de Ewins (1984, p. 22).

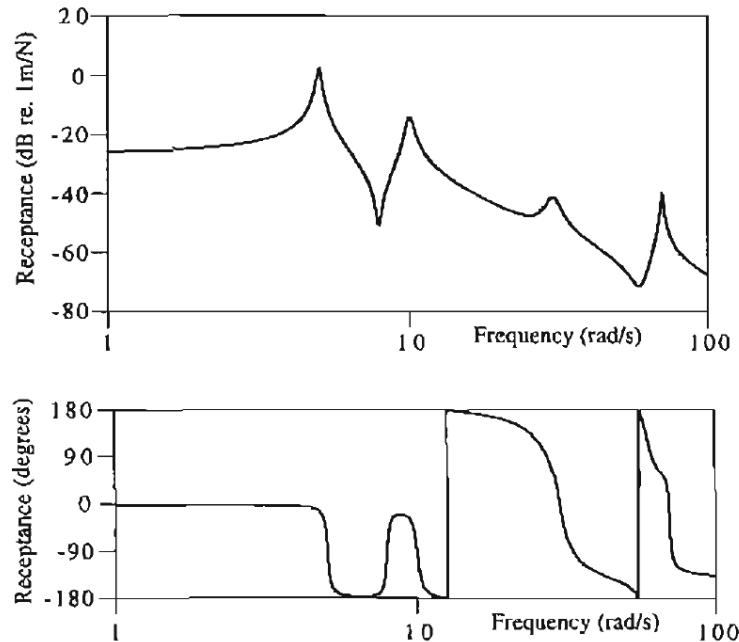
Usando os conceitos dos mesmos modelos que apresentamos (espacial, modal e de resposta), vamos primeiro avaliar graficamente o modelo de resposta experimental do sistema, pois dele resultarão os outros modelos, além de sua própria formulação matemática como na Equação 2.37. Apesar de não lidarmos com experimentos propriamente ditos, faremos também considerações de como se obter a resposta em frequência do sistema graficamente. Depois disso, partimos para a extração de propriedades modais que vão compor o modelo modal do sistema.

### 2.3.1 Propriedades de resposta

A Figura 10 apresenta uma curva de receptância de um sistema mecânico. Mais especificamente, trata-se de um sistema de 4GDL, e isso é fácil de verificar porque o gráfico possui quatro picos. Lembrando da Equação 2.37, e lembrando que  $|\alpha_{ij}(\omega)|$  tende ao infinito quando  $Q_1(\omega^2)$  tende a zero, e também que suas raízes são as frequências naturais do sistema, temos que seus picos estão localizados sobre tais frequências. Portanto, se considerarmos que não há picos fora do espectro de frequência mostrado no gráfico, pode-se dizer que há tantos modos de vibrar (ou graus de liberdade) no sistema quanto há picos na FRF. A mesma Figura 10 ainda apresenta vales, que são chamados de *antirressonâncias*. Estes, porém, não estão relacionados aos autovalores, mas às raízes do polinômio  $P_1(\omega^2)$  da Equação 2.37: quando  $P_1(\omega^2)$  for zero, temos as menores magnitudes de  $\alpha_{ij}(\omega)$ , ou seja, o oposto do que acontece nas ressonâncias. Atente também ao salto de fase que ocorre quando se cruza uma antirressonância, assim como acontece com as ressonâncias.

Num experimento, entretanto, a curva que se obtém não é contínua como a da Figura 10, mas discreta, com pontos espaçados entre si. Isso acontece devido à incapacidade dos instrumen-

Figura 10 – Exemplo gráfico de uma função de receptância



Fonte: Maia e Silva (1997, p. 77).

tos atuais de registrarem continuamente os valores que medem (INMAN, 2008), isto é, sempre é necessário um intervalo de tempo para que cálculos e registros sejam feitos, gerando uma curva descontínua. Cabe, então, ao analista gerar uma função cuja imagem se aproxime ao máximo dos pontos medidos e que ainda elimine erros de medição.

A instrumentação correta dos testes, como dissemos na Seção 2.1, exige razoável prática de laboratório e sua explanação vai muito além do escopo deste trabalho – além de que há extensos livros-textos que tratam desse assunto com grande profundidade (MAIA; SILVA, 1997; EWINS, 1984). Mas mesmo assim, é importante que um texto de introdução (como este trabalho) apresente brevemente o método para se obter FRFs. Vejamos, então, uma breve observação quanto a isso.

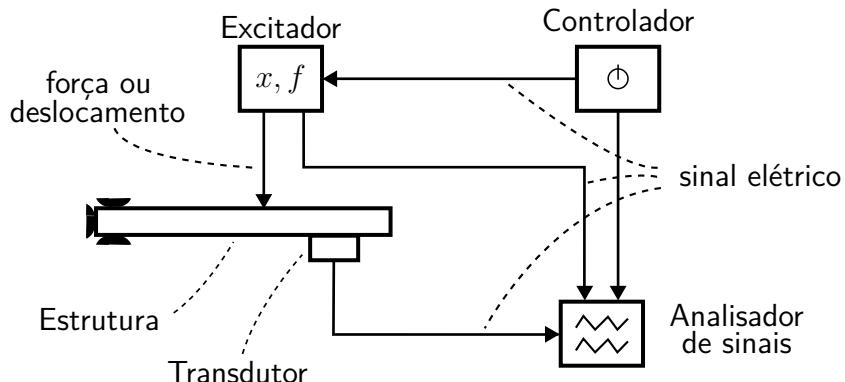
#### — Teste modal —

Ensaios de vibração, em geral, fazem uso de um mesmo sistema básico de medição: excitador, transdutor e analisador de sinais (MAIA; SILVA, 1997). O excitador é um dispositivo controlável que impõe força ou deslocamento no sistema estudado. O transdutor é um elemento que converte ondas de vibração mecânica em sinais elétricos que podem ser manipulados pelo analisador, que é o que apresenta a FRF ao analista. A Figura 11 descreve esse sistema de forma generalizada. É claro que também é necessário uma fonte de energia para que o sistema funcione, mas, por simplicidade, ela foi omitida.

O analisador é a parte que mais nos interessa. Uma FRF é função da frequência de excitação  $\omega$ , mas os dados são medidos no domínio do tempo  $t$ . Então, faz-se necessária uma

técnica que converte os dados de  $t$  para  $\omega$ . O método mais usado é chamado de Análise de Fourier, e se baseia principalmente na Transformada de Fourier.<sup>14</sup> Aplicando-se a transformada e algumas outras manipulações, obtemos os dados apropriados para gerar uma FRF, que é o trabalho que um analisador de sinais faz.

Figura 11 – Sistema básico para medição de vibrações



Fonte: O Autor.

A ideia central é que precisamos converter  $x_i(t)$  em  $X_i(\omega)$ , e  $f_j(t)$  em  $F_j(\omega)$  para que tenhamos uma relação como:

$$\alpha_{ij}(\omega) = \frac{X_i(\omega)}{F_j(\omega)}, \quad (2.41)$$

que é não é tão óbvia de se alcançar. Após a conversão de domínios por meio da Transformada de Fourier, deve-se eliminar a parte aleatória dos sinais – ou harmônica, dependendo do tipo de estudo que se deseja conduzir –, a parte transitória – ou estacionária – e obter o que se chama de densidade espectral de energia para, enfim, chegarmos a forma final desejada (RAO, 2010). Explicações mais aprofundadas que essa podem ser encontradas no capítulo 10 de Rao (2010), e no capítulo 3 de Ewins (1984), Maia e Silva (1997, cap. 2) e Inman (2008, cap. 7). Deve-se fazer saber também que o princípio é o mesmo para obter-se também a mobilidade e a acelerância do sistema.

### 2.3.2 Modelos experimentais

Na subseção anterior, ao identificarmos a quantidade de modos de vibrar usando uma FRF, já começamos o procedimento de modelar um sistema mecânico. Esta deve sempre ser a tarefa inicial na rota experimental de estudo de vibrações, isto é, definir quais graus de liberdade, ou coordenadas, nos interessam, porque nem sempre será possível identificar todas devido às limitações dos instrumentos de medição. Na verdade, sistemas contínuos possuem virtualmente

<sup>14</sup> A Transformada de Fourier foi criada por Jean-Baptiste Fourier (1768–1830) a partir de uma técnica que ele mesmo desenvolveu: descrever uma função qualquer como soma de funções harmônicas (senos e cossenos). A Análise de Fourier é o nome que se dá ao estudo dessa decomposição. Usa-se especialmente o algoritmo de “transformada rápida de Fourier”, pois ele computa os valores transformados extremamente rápido, tornando viável o tratamento de sinais em tempo real. (RAO, 2010 apud RANDALL; UPTON, 1985)

infinitos modos de vibrar,<sup>15</sup> e as medições são feitas para os primeiros  $N$ -GDL, pois são os de maior amplitude – perceba a diminuição dos picos na Figura 10 a partir da frequência fundamental.

Determinar os  $N$  primeiros modos estudados, seja pelo limite de frequência máxima lida pelo instrumento, ou seja por desinteresse nos restante dos modos, é o primeiro exemplo da limitação dos modelos vibratórios, tanto espacial, quanto modal ou de resposta – o que não é o mesmo que dizer que seus resultados não são confiáveis ou que suas aplicações e precisão são reduzidas. A redução do número de informações, entretanto, não é o mesmo que dizer que tais modos não existem, é apenas abrir mão de nossa capacidade de descrevê-los todos (EWINS, 1984). Os modelos de resposta e modal obtidos são, portanto, *modelos incompletos* e que quase nunca resultam em modelos espaciais condizentes com a realidade.

Para ilustrar esse fato, considere um sistema mecânico qualquer de  $N$ -GDL não-amortecido, e seja  $[Z]$ , chamada de *matriz de impedância*, definida como (EWINS, 1984):

$$[Z] = [H(\omega)]^{-1} = ([K] - \omega^2[M]). \quad (2.42)$$

As matrizes  $[Z]$  e  $[H(\omega)]$  estão completas e são quadradas de ordem  $N$ . Designamos então o modelo reduzido de  $n$ -GDL para esse sistema. Isso é o mesmo que definirmos uma nova matriz  $[H_{(R)}(\omega)]_{n \times n}$  cujos elementos pertencem a  $[H(\omega)]$ . Temos então uma nova matriz de impedância  $[Z_{(R)}]$  tal que (EWINS, 1984):

$$[Z_{(R)}] = [H_{(R)}(\omega)]^{-1},$$

e que também é de ordem  $n$ . Aqui já deve ser claro que os elementos  $Z_{(R)ij}$  não pertencem à  $[Z]$  e, portanto, as matrizes  $[M_{(R)}]$  e  $[K_{(R)}]$  que poderíamos calcular para o modelo espacial reduzido, também não são formadas por elementos pertencentes às matrizes  $[M]$  e  $[K]$  do sistema original (EWINS, 1984).

Ao reduzirmos o modelo de resposta do sistema, não estamos exatamente simplificando de forma compreensível sua estrutura física. As matrizes  $[M_{(R)}]$  e  $[K_{(R)}]$  são realmente menores e mais fáceis de serem manipuladas matematicamente, mas elas já não representam as ligações físicas presentes no sistema real que se deseja modelar. O que se gera é um outro sistema mecânico cujas propriedades modais e resposta em frequência são coincidentes com o modelo reduzido do caso original. É possível, também, que tal sistema nem exista, pois o modelo espacial reduzido pode não ser simétrico. Teríamos, então, apenas matrizes que, quando manipuladas matematicamente seguindo a metodologia que estamos apresentando, produzem resultados que se parecem com aqueles de um sistema mecânico, ou seja, seria apenas coincidência numérica.

Em ensaios reais, porém, não se trabalha com modelos incompletos somente por necessidade, mas também por escolha. Ainda com  $N$ -GDL, a matriz de FRFs possuirá  $N^2$  elementos,

<sup>15</sup> Se modelarmos estruturas contínuas numa escala atômica, elas deixam de ser contínuas e tornam-se discretas com número de modos de vibrar igual à quantidade de átomos que as compõem, o que por si só já é um número muito grande para sistemas macroscópicos.

ou seja, ela estará completa ao fazermos  $N^2$  medições no sistema. Mas sabemos também que ela é simétrica e, portanto, bastariam  $(N^2 + N)/2$  elementos para obtermos toda a matriz. Só que o mínimo que se exige é que sejam medidas todas as FRFs de uma única coluna ou de uma única linha como na Figura 12. Na prática, relembrando a Equação 2.41, isso é o mesmo que fazer medidas em todos os pontos de interesse variando-se o ponto de resposta  $i$  e fixando-se o ponto de excitação  $j$ , ou vice-versa. O método para extração das propriedades modais do sistema, que apresentaremos na próxima subseção, justifica e torna viável essa escolha. Deve-se ressaltar, também, que a boa prática de experimento recomenda medir o mínimo necessário para que possam servir como verificação de resultados (EWINS, 1984).

Figura 12 – Dados mínimos necessários para gerar uma matriz de resposta em frequência completa

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccccc} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1i} & \dots & H_{1j} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2i} & \dots & H_{2j} & \dots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{i1} & H_{i2} & \dots & H_{ii} & \dots & H_{ij} & \dots & H_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\ \hline H_{j1} & H_{j2} & \dots & H_{ji} & \dots & H_{jj} & \dots & H_{jN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{Ni} & \dots & H_{Nj} & \dots & H_{NN} \end{array} \right]$$

Fonte: Adaptada de Ewins (1984, p. 229).

### 2.3.3 Extração de parâmetros modais

Agora que já fizemos algumas considerações sobre os modelos experimentais, vamos extrair os parâmetros modais a partir das FRFs medidas e modelar o sistema completando  $[H(\omega)]$ . O método mais simples é conhecido como *método da amplitude dos picos*, mas deve ser empregado apenas para os casos em que os modos de vibrar são reais, ou seja, com amortecimento proporcional ou sem amortecimento (EWINS, 1984; MAIA; SILVA, 1997). Primeiramente, considerando amortecimento estrutural, o método exige que usemos funções de receptância. Vamos agora assumir que cada pico da FRF tem influência de apenas uma parcela do somatório da Equação 2.40, ou seja (EWINS, 1984):

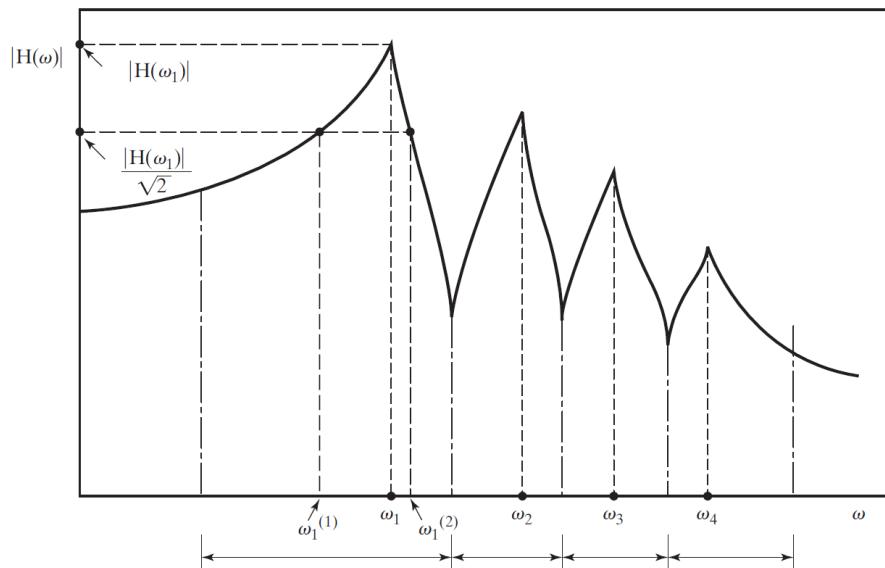
$$|\alpha_{jk}(\omega_r)| = \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\lambda_r^2 - \omega_r^2} \quad (2.43)$$

Essa suposição, chamada de *modo único*, é razoável para sistemas com baixo amortecimento, pois nesses casos  $\lambda_r^2$  tende à  $\omega_r^2$ , e  $|\alpha_{jk}(\omega)|$  tende ao infinito e o restante do somatório torna-se desprezível. A Equação 2.43 nos mostra ainda que para determinarmos os elementos da matriz  $[\Phi]$ , precisamos primeiro determinar  $[\Lambda^2]$ .

Como vimos logo no começo da subseção anterior, podemos identificar as frequências naturais do sistema buscando os picos da função de resposta em frequência, como mostrado na

Figura 13. Cada um dos quatro picos indica uma frequência  $\omega_i$ , com  $i = 1, 2, 3, 4$ . Mas também é importante que tenhamos cautela na busca por esses valores, pois em caso de alto amortecimento, um ou mais picos podem desaparecer em algumas FRF, mas estarem presentes em outras. Isso acontece porque, na Equação 2.43, quando o fator de amortecimento  $\eta_r$ , em  $\lambda_r^2 = \omega_r^2(1 + \eta_r)$ , não for pequeno, o denominador não é próximo de zero e, portanto, o valor absoluto de  $\lambda_r$  não é tão próximo de  $\omega_r$ .

Figura 13 – Gráfico típico de uma FRF de uma máquina ou estrutura



Fonte: Adaptada de Rao (2010, p. 908).

Os valores de  $\eta_r$  são calculados pelo *método da meia-potência* (EWINS, 1984). Observe que no eixo das abscissas da Figura 13 há duas frequências identificadas como  $\omega_1^{(1)}$  e  $\omega_1^{(2)}$  cujas imagens são o mesmo valor ( $|H(\omega_1)|/\sqrt{2}$ ) e que está identificado no eixo das ordenadas. Esses são os chamados *pontos de meia-potência* e calcula-se o valor de  $\eta_1$  em função dessas frequências pela equação (RAO, 2010):

$$\eta_1 = \frac{\left(\omega_1^{(2)}\right)^2 - \left(\omega_1^{(1)}\right)^2}{2\omega_1}. \quad (2.44)$$

O mesmo procedimento é usado para qualquer outro pico  $r$ , bastando identificar os valores de  $|H(\omega_r)|$ , buscar as frequências em torno desse valor cujas imagens sejam  $|H(\omega_r)|/\sqrt{2}$  e usar a mesma Equação 2.44.

Caso se considere amortecimento viscoso, a suposição de modo único também é válida (EWINS, 1984). As frequências naturais também são identificadas pelos picos, mas o amortecimento é medido por  $\zeta_r$ . Para isso, usa-se o mesmo método da meia potência, mas os pontos devem ser determinados no gráfico da mobilidade, em vez da receptância que usamos

no caso histerético. A equação para  $\zeta_r$  é

$$\zeta_r = \frac{\omega_r^{(2)} - \omega_r^{(1)}}{2\omega_r},$$

e, com o valor da frequência  $\omega_r$ , tem-se o autovalor pela Equação 2.26.

De posse dos valores de  $\omega_r$  e  $\eta_r$ , podemos agora formar a matriz  $[\Lambda^2]$  e, com isso, calcular os elementos de  $[\Phi]$ . Voltando à Equação 2.43 e substituindo  $\lambda_r^2 = \omega_r^2(1 + i\eta_r)$ , temos:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{r,j,k} &= |\alpha_{jk}(\omega_r)| \\ &= \left| \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{i\eta_r\omega_r} \right| \\ &= \frac{|\phi_{jr}||\phi_{kr}|}{\eta_r\omega_r}.\end{aligned}$$

Supondo que já temos as FRFs correspondentes à coluna  $k$  de  $[\alpha(\omega)]$ , quando  $j = k$ , temos:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{r,k,k} &= \frac{|\phi_{kr}|^2}{\eta_r\omega_r}, \\ \therefore |\phi_{kr}| &= \sqrt{\hat{\alpha}_{r,k,k} \cdot \eta_r \cdot \omega_r}.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Com isso, preenchemos a linha  $k$  de  $[\Phi]$ . Para os demais valores, quando  $j \neq k$ , fica:

$$|\phi_{jr}| = \frac{\hat{\alpha}_{r,j,k} \cdot \eta_r \cdot \omega_r}{|\phi_{kr}|}. \quad (2.46)$$

Assim teremos os valores absolutos dos elementos de  $[\Phi]$ .

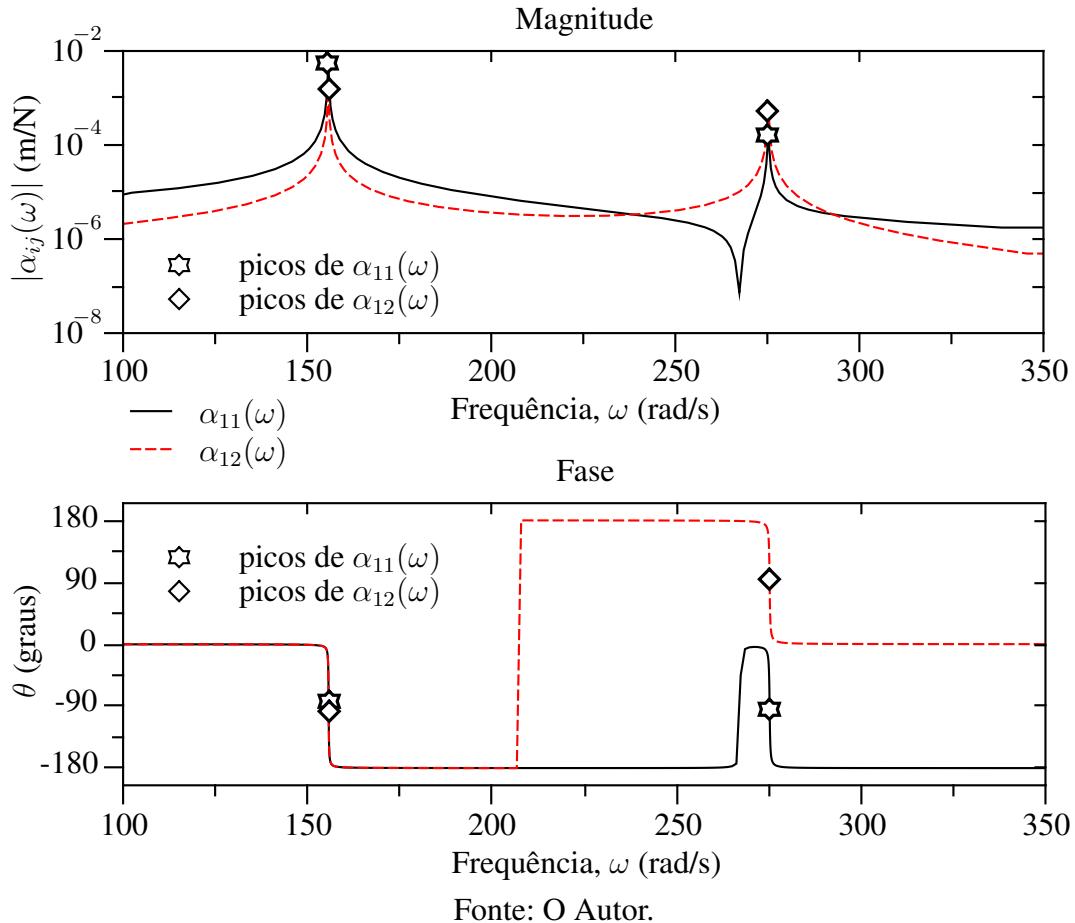
O sinal de  $\phi_{kr}$  é determinado segundo o gráfico da fase de  $\alpha_{kr}(\omega)$ . Para demonstrar isso, considere o sistema de 2GDL com  $m_1 = m_2 = 7$  kg,  $k_1 = k_2 = 7 \times 10^5$  N/m,  $k_3 = 4 \times 10^5$  N/m, e  $d_i = 10^{-3}k_i$ , do qual estamos extraíndo parâmetros modais a partir da primeira coluna de  $[\alpha(\omega)]$ , isto é,  $\alpha_{11}(\omega)$  e  $\alpha_{12}(\omega)$ . Suponha que já calculamos os valores absolutos de  $[\Phi]$  e nos resta saber seus sinais. Neste caso, temos o diagrama de Bode para ambas as funções mostrado na Figura 14, em que os picos da magnitude estão identificados e suas respectivas fases também estão assinaladas.

Como já discutimos, o que realmente importa num autovetor é a proporção entre cada elemento, e isso inclui seu sinal. O gráfico da fase na Figura 14 mostra que o ângulo de fase de um pico pode ser tanto positivo quanto negativo, e é justamente esse o sinal de  $\phi_{kr}$ . Vamos também convencionar que o primeiro elemento do autovetor é sempre positivo e, por isso, devemos inverter todos os sinais da  $r$ -ésima coluna caso  $\phi_{1r}$  seja negativo. Portanto, já assumindo a convenção, obtemos a seguinte matriz dos modos normalizados pela massa:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} |\phi_{11}| & |\phi_{22}| \\ |\phi_{21}| & -|\phi_{22}|\end{bmatrix}.$$

Ewins (1984) ainda diz que o mesmo método da amplitude dos picos pode ser seguido para amortecimento viscoso, mas deve-se usar funções de mobilidade em vez de receptância.

Figura 14 – Diagrama de Bode para um sistema de 2GDL com seus picos assinalados



Fonte: O Autor.

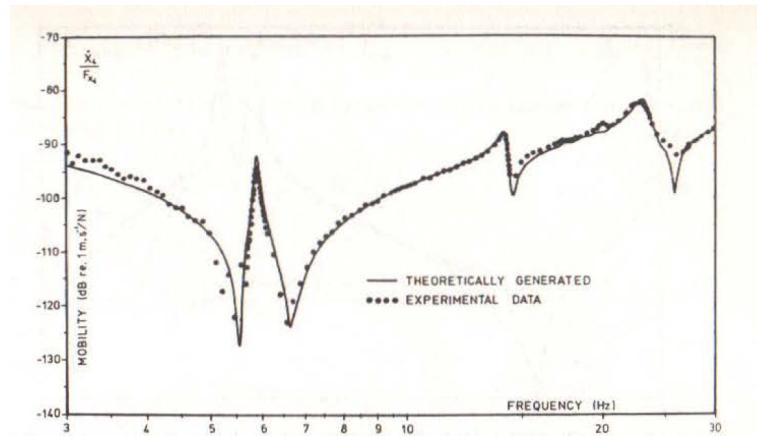
Agora que já temos  $[\Lambda^2]$  e  $[\Phi]$ , obtidos de forma experimental, podemos recriar a matriz  $[\alpha(\omega)]$  calculando cada um de seus elementos pela Equação 2.40. Quando medimos alguma função de resposta e a recriamos, a curva é chamada de *curva regenerada*. Já quando não a medimos mas a obtemos ao calcular  $[\alpha(\omega)]$ , temos uma *curva sintetizada*. Os resultados, então, podem ser comparados qualitativamente num gráfico que apresente FRFs medidas discretamente e curvas regeneradas do novo modelo de resposta, como na Figura 15.

### 2.3.4 Correção de erros

Em alguns casos, o modelo que se obtém pelo método da amplitude dos picos não é compatível com os dados experimentais, como na Figura 16a. Quando isso acontecer podem ser feitas correções por meio do acréscimo de resíduos complexos ao modelo modal, como (MAIA; SILVA, 1997):

$$\begin{aligned} [H(\omega)] &= [\Phi]([\Lambda^2] - \omega^2)^{-1}[\Phi]^T + [R], \quad \text{ou} \\ H_{jk}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} + R_{jk}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Figura 15 – Comparação das curvas de mobilidade experimental e teórica de um sistema mecânico



Fonte: Ewins (1984, p. 279).

A matriz  $[R]$  representa a influência que realmente existe de um modo de vibrar sobre outro, ao contrário do que diz nossa suposição inicial, a de que cada modo independe completamente de outro. A Figura 16b mostra uma curva teórica resultado da adição de resíduos apropriados.

Quantificar os elementos de  $R_{jk}$ , entretanto, não é uma tarefa trivial. Segundo Ewins (1984), calcular  $[R]$  de forma precisa geralmente envolve medir todos os elementos de  $[H(\omega)]$  na fase experimental, ou pelo menos mais da metade deles. Outra possibilidade seria expandir a faixa de frequência para além dos modos de interesse, o que diminuiria a quantidade de informação não estudada e, consequentemente, reduziria a influência de  $[R]$  no resultado final.

Ewins (1984) apresenta ainda, no capítulo 4 de sua obra, outros métodos de correção para casos mais específicos. Em caso de estruturas cujas frequências naturais não estão bem espaçadas, por exemplo, os fatores de correção são também função da frequência de excitação. Em casos de sistemas levemente amortecidos, o problema se encontra na determinação correta das frequências naturais, pois os picos das FRFs não ficam bem representados devido à resolução dos instrumentos.

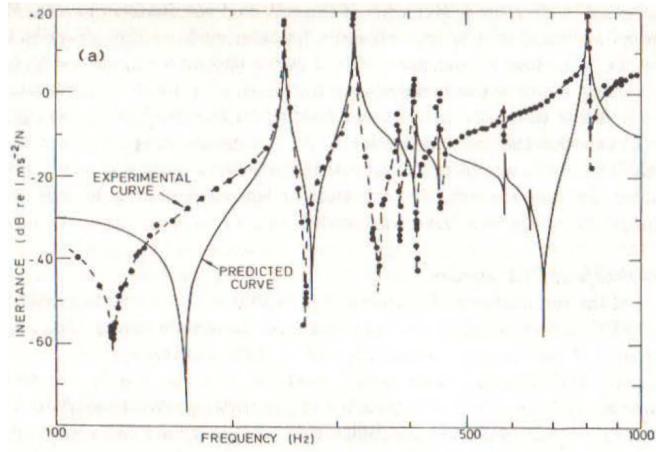
Pode ser também que os parâmetros modais obtidos possuam erro muito alto. Uma possível solução é modelar o sistema de forma iterativa (EWINS, 1984), isto é, remodelá-lo continuamente, atualizando seus parâmetros modais para que o erro seja reduzido gradativamente até que um limite aceitável seja atingido. Neste tipo de procedimento, para aumentar a precisão da extração de parâmetros, usam-se diagramas de Nyquist<sup>16</sup> (que não apresentamos aqui) para interpolar os valores das FRFs e obter uma melhor aproximação para  $\omega_r$  e  $\eta_r$ .

Há também outras metodologias para identificação de parâmetros modais bem diferentes dessa que acabamos de discorrer aqui. Maia e Silva (1997) apresenta métodos no domínio do tempo – perceba que até agora trabalhamos apenas no domínio da frequência –, e também

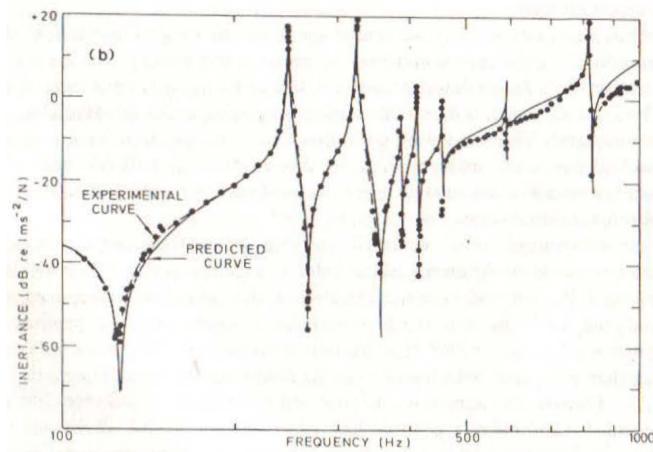
<sup>16</sup> Desenvolvido por Harry Nyquist (1889-1976), é representação polar de uma função resposta em frequência num gráfico em que as abscissas são a parte real do valor, e as ordenadas são a parte imaginária.

Figura 16 – Curvas de funções de resposta em frequência sintetizadas.

(a) Usando apenas as medições.



(b) Incluindo os termos residuais.



Fonte:Ewins (1984, p. 236).

trabalha mais minuciosamente o erro induzido pelos instrumentos usados no teste, além de também discorrer sobre como corrigir os modelos experimentais. No fim das contas, o fator mais importante para escolher qual o melhor método de modelagem, ou quando usar um ou outro tipo de correção, é a experiência do analista.

## 2.4 Considerações finais

Deve ter ficado evidente que não usamos amortecimento estrutural durante a análise de vibração livre do sistema, especificamente quando desenvolvemos o modelo espacial. Isso se deu porque, como Ewins (1984) sugere, o amortecimento histerético cria certa dificuldade nesta etapa da modelagem. Por isso fazemos o equacionamento da estrutura para amortecimento viscoso e o substituímos apenas quando já temos as matrizes de massa e de rigidez. Com essas duas, mais

a matriz de amortecimento histerético, tem-se o modelo espacial para o caso histerético, e que pode ser usado normalmente para obter-se os modelos modal e de resposta.

Quando usamos essa abordagem, o sistema pode ser descrito estruturalmente como idêntico ao original, apenas substituindo-se os amortecedores viscosos por estruturais, mas mantendo as mesmas ligações físicas. As equações de movimento, entretanto, já não serão da mesma forma que as Equações 2.2 e 2.3. Rao (2010) apresenta a análise de vibração livre para amortecimento histerético, a qual envolve análise da energia dissipada em cada ciclo de vibração.

Em casos de estudos de vibração em elementos individuais, o amortecimento estrutural é bastante razoável, mas ao testarmos estruturas formadas por vários componentes, talvez o amortecimento viscoso seja realmente a melhor opção. Isso, porque componentes mecânicos geralmente são elementos levemente amortecidos, enquanto que numa estrutura montada, o amortecimento global provém principalmente das juntas que unem as partes (MAIA; SILVA, 1997). Apenas a inspeção prévia da resposta do sistema e conhecimento dos tipos de juntas poderão ajudar na escolha do tipo de amortecimento apropriado.

# 3 Aplicação prática

Neste capítulo será demonstrado o uso da análise modal aplicando-a a um sistema de 6GDL, com amortecimento estrutural e excitado harmonicamente. As duas rotas de estudo de vibração serão seguidas para o mesmo sistema:

1. Descrever a estrutura usando um modelo espacial;
2. Calcular suas propriedades modais;
3. Obter sua resposta em frequência calculando sua receptância;
4. Reduzir as informações de resposta simulando um experimento e recalcular as propriedades modais do sistema, e;
5. Regenerar a matriz de FRFs usando o modelo modal experimental.

Ao fim, tem-se uma breve discussão quanto ao erro gerado durante a extração de parâmetros modais.

## 3.1 Descrição do sistema

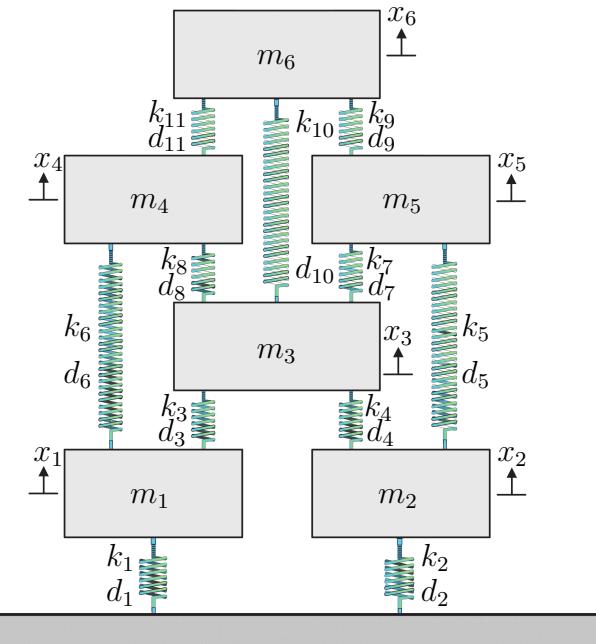
O sistema mecânico que estudaremos se encontra na Figura 17, sendo que cada mola representa simultaneamente ela mesma e um amortecedor estrutural. Consideramos amortecimento proporcional da forma da Equação 2.24, com  $\beta = 10^{-3}$  e  $\gamma = 0\text{rad/s}$ . Então, temos os valores de massa, rigidez e amortecimento para cada elemento como na descrito na Tabela 1.

Tabela 1 – Características do sistema da Figura 13.

$i$	$m_i (\text{kg})$	$k_i (10^5 \text{ N/m})$	$d_i = \beta k_i (10^2 \text{ N/m})$
1	7	1,0	1,0
2	7	1,0	1,0
3	4	4,0	4,0
4	3	5,0	5,0
5	6	7,0	7,0
6	8	2,0	2,0
7	–	8,0	8,0
8	–	3,0	3,0
9	–	6,0	6,0
10	–	3,0	3,0
11	–	5,0	5,0

Fonte: Adaptada de Beltran-Carbajal (2011, p. 201).

Figura 17 – Sistema mecânico de 6GDL.



Fonte: Adaptada de Beltran-Carbajal (2011, p. 201).

## 3.2 Metodologia

Como delineado no início do capítulo, primeiramente vamos seguir a rota teórica de análise de vibrações e desenvolver o modelo espacial ( $[M]$  e  $[K]$ ) do sistema a partir das equações de movimento de cada massa, como nas Equações 2.2 e 2.3. Da mesma forma que foi descrito no final do capítulo anterior, vamos equacionar o movimento do sistema para amortecimento viscoso, com amortecedores  $c_i$ , e substituiremos a matriz de amortecimento  $[C]$  por  $[D]$ , para o caso histerético, no modelo espacial. A seguir, obtemos o modelo modal, ( $[\Lambda^2]$ ,  $[\Psi]$  e  $[\Phi]$ ) resolvendo o autoproblema da Equação 2.23. E finalizaremos calculando a receptância ( $[\alpha(\omega)]$ ) por meio do somatório da Equação 2.40.

Já na rota experimental, vamos reduzir os resultados de resposta do sistema para apenas a linha 1 da matriz  $[\alpha(\omega)]$ . Isso é o mesmo que dizer que fizemos experimentos fixando-se o transdutor da Figura 11 na massa  $m_1$  e aplicamos excitação a todas as outras, mas a própria  $m_1$ . Buscaremos, então, as frequências naturais do sistema,  $\omega'_r$ , identificando os picos dos gráficos das FRFs, como na Figura 13, e medindo também os fatores de amortecimento modal,  $\eta'_r$ , pelo método da meia-potência da Equação 2.44, a fim de termos a matriz experimental  $[\Lambda'^2]$  pela relação:

$$\lambda'^2_r = \omega'^2_r (1 + i\eta'_r).$$

Os modos normais experimentais normalizados pela massa,  $\vec{\phi}'_r$ , serão calculados pelas

Equações 2.45 e 2.46, e, a partir deles, podemos calcular  $[\Psi']$  e gerar um modelo espacial de matrizes generalizadas,  $[M'^*]$  e  $[K'^*]$  manipulando as propriedades apresentadas nas Equações 2.18, 2.19 e 2.20, isto é:

$$\begin{aligned}[M'^*] &= ([\Psi']^{-1}[\Phi'])^{-2}, \text{ e} \\ [K'^*] &= \operatorname{Re}([\Lambda'^2]) \cdot [M'^*].\end{aligned}$$

Finalizamos ao obter uma matriz  $[\alpha'(\omega)]$  pela Equação 2.40 usando os parâmetros experimentais obtidos, e comparando graficamente a mesma linha 1 de  $[\alpha(\omega)]$  com a linha correspondente de  $[\alpha'(\omega)]$ .

Todo esse método foi implementado num *script* para o scilab. A lista completa do programa encontra-se no Apêndice A.

### 3.3 Resultados

#### 3.3.1 Rota teórica

— *Modelo espacial* —

Usando-se diagramas de corpo livre, como fizemos anteriormente, as forças resultantes para cada massa do sistema com amortecimento viscoso ficam:

$$\begin{aligned}(\text{para } m_1) \quad F_{r,1} &= -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 + k_3(x_3 - x_1) + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + \\ &\quad + k_6(x_4 - x_1) + c_6(\dot{x}_4 - \dot{x}_1) + f_1(t) = m_1\ddot{x}_1 ; \\ (\text{para } m_2 : \quad F_{r,2} &= -k_2x_2 + c_2\dot{x}_2 + k_4(x_3 - x_2) + c_4(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + \\ &\quad + k_5(x_5 - x_2) + c_5(\dot{x}_5 - \dot{x}_2) + f_2(t) = m_2\ddot{x}_2 ; \\ (\text{para } m_3) \quad F_{r,3} &= k_3(x_1 - x_3) + c_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + k_4(x_2 - x_3) + c_4(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + \\ &\quad + k_8(x_4 - x_3) + c_8(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + k_7(x_5 - x_3) + c_7(\dot{x}_5 - \dot{x}_3) + \\ &\quad + k_9(x_6 - x_3) + c_9(\dot{x}_6 - \dot{x}_3) + f_3(t) = m_3\ddot{x}_3 ; \\ (\text{para } m_4) \quad F_{r,4} &= k_6(x_1 - x_4) + c_6(\dot{x}_1 - \dot{x}_4) + k_8(x_3 - x_4) + c_8(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + \\ &\quad + k_{11}(x_6 - x_4) + c_{11}(\dot{x}_6 - \dot{x}_4) + f_4(t) = m_4\ddot{x}_4 ; \\ (\text{para } m_5) \quad F_{r,5} &= k_5(x_2 - x_5) + c_5(\dot{x}_2 - \dot{x}_5) + k_7(x_3 - x_5) + c_7(\dot{x}_3 - \dot{x}_5) + \\ &\quad + k_{10}(x_6 - x_5) + c_{10}(\dot{x}_6 - \dot{x}_5) + f_5(t) = m_5\ddot{x}_5 ; \\ (\text{para } m_6) \quad F_{r,6} &= k_9(x_3 - x_6) + c_9(\dot{x}_3 - \dot{x}_6) + k_{11}(x_4 - x_6) + c_{11}(\dot{x}_4 - \dot{x}_6) + \\ &\quad + k_{10}(x_5 - x_6) + c_{10}(\dot{x}_5 - \dot{x}_6) + f_6(t) = m_6\ddot{x}_6 .\end{aligned}$$

Reorganizando-as num sistema matricial, teremos:

$$[M]\ddot{\vec{x}}(t) + [C]\dot{\vec{x}}(t) + [K]\vec{x}(t) = \vec{f}(t).$$

Substituindo os valores de massa e rigidez da Tabela 1, resulta:

$$[M] = \operatorname{diag}\{7; 7; 4; 3; 6; 8\} \text{ (kg)},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 & 0 & -7 & 0 \\ -4 & -5 & 26 & -3 & -8 & -6 \\ -2 & 0 & -3 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & -7 & -8 & 0 & 18 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -3 & 14 \end{bmatrix} \quad (10^5 \text{ N/m}), \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix}.$$

Para o amortecimento, se escrevêssemos a matriz  $[C]$ , ela teria a mesma forma que  $[K]$ , mas como assumimos amortecimento do tipo histerético e proporcional, e usando o método que discutimos no final do capítulo anterior para o modelo espacial, nos basta fazer:

$$[D] = \beta[K] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 & 0 & -7 & 0 \\ -4 & -5 & 26 & -3 & -8 & -6 \\ -2 & 0 & -3 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & -7 & -8 & 0 & 18 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -3 & 14 \end{bmatrix} \quad (10^2 \text{ N/m}).$$

As matrizes  $[M]$ ,  $[D]$  e  $[K]$  são, então, o modelo espacial do sistema.

#### — Modelo modal —

Para obter o modelo modal, usamos o scilab para resolver o seguinte autoproblema para amortecimento histerético:

$$([M]\lambda^2 + i[D] + [K])\vec{\psi} = \vec{0}.$$

O resultado foi  $[\Lambda^2]$ , os autovalores, e  $[\Psi]$ , os autovetores. Para melhor apresentação dos resultados, vamos usar a relação  $\lambda_r = \omega_r^2(1 + i\eta_r)$  e definir:

$$[\Lambda^2] = [\Omega^2](1 + i[E]).$$

Assim, temos o modelo modal formado pelos quadrados das frequências naturais em  $[\Omega^2]$ , pelos fatores de amortecimento modal em  $[E]$ , e pelos modos normais de  $[\Psi]$ , cujos valores são:

$$[\Omega^2]^{1/2} = \text{diag}\{73,566; 315,78; 379,99; 595,42; 625,11; 865,59\} \text{ (rad/s)},$$

$$[E] = \text{diag}\{0,001; 0,001; 0,001; 0,001; 0,001; 0,001\}, \quad \text{e}$$

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 & 1,000 & 1,000 & 1,000 & 1,000 \\ 1,047 & -0,4938 & 1,960 & -18,96 & 1,191 & 0,9994 \\ 1,096 & -0,0767 & 0,05386 & 5,580 & -0,9961 & -12,56 \\ 1,118 & 0,1634 & -1,661 & -20,07 & -8,184 & 2,393 \\ 1,105 & -0,3699 & 0,7713 & 28,02 & -1,729 & 3,338 \\ 1,141 & -0,1250 & -2,316 & -1,197 & 3,018 & 1,162 \end{bmatrix}.$$

Perceba a matriz  $[\Psi]$  foi normalizada pelo primeiro elemento de cada vetor, ou seja, dividimos cada coluna pelo valor do elemento da primeira linha. Aproveitamos também para já obter, pela Equação 2.18 as matrizes de massa, rigidez e amortecimentos generalizados, sendo elas, respectivamente:

$$\begin{aligned} [M^*] &= [\Psi]^T[M][\Psi] = \text{diag}\{40, 97; 9, 756; 88, 65; 8577; 312, 6; 739, 7\} \text{ (kg),} \\ [K^*] &= [\Psi]^T[K][\Psi] = \text{diag}\{2, 2171; 9, 7282; 128, 00; 30407; 1221, 6; \\ &\quad 5542, 4\} (10^5 \text{ N/m}), \text{ e} \\ [D^*] &= [\Psi]^T[D][\Psi] = \text{diag}\{2, 2171; 9, 7282; 128, 00; 30407; 1221, 6; \\ &\quad 5542, 4\} (10^2 \text{ N/m}). \end{aligned}$$

E também a forma dos modos de vibração normalizados pela massa:

$$[\Phi] = [\Psi][M^*]^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1,562 & 3,202 & 1,062 & 0,1080 & 0,5656 & 0,3677 \\ 1,636 & -1,580 & 2,081 & -2,047 & 0,6732 & 0,3674 \\ 1,713 & -0,2455 & 0,05720 & 0,6026 & -0,5633 & -4,618 \\ 1,746 & 0,5230 & -1,765 & -2,167 & -4,629 & 0,8801 \\ 1,726 & -1,184 & 0,8191 & 3,025 & -0,9780 & 1,228 \\ 1,783 & -0,4002 & -2,460 & -0,129 & 1,707 & 0,4271 \end{bmatrix} \times 10^{-1}.$$

#### — Modelo de resposta —

Por se tratar de um sistema amortecido estruturalmente, a função de resposta em frequência que desenvolveremos será a receptância, pois é ela que usamos para medir graficamente este tipo de amortecimento. Usando a Equação 2.40, isto é,

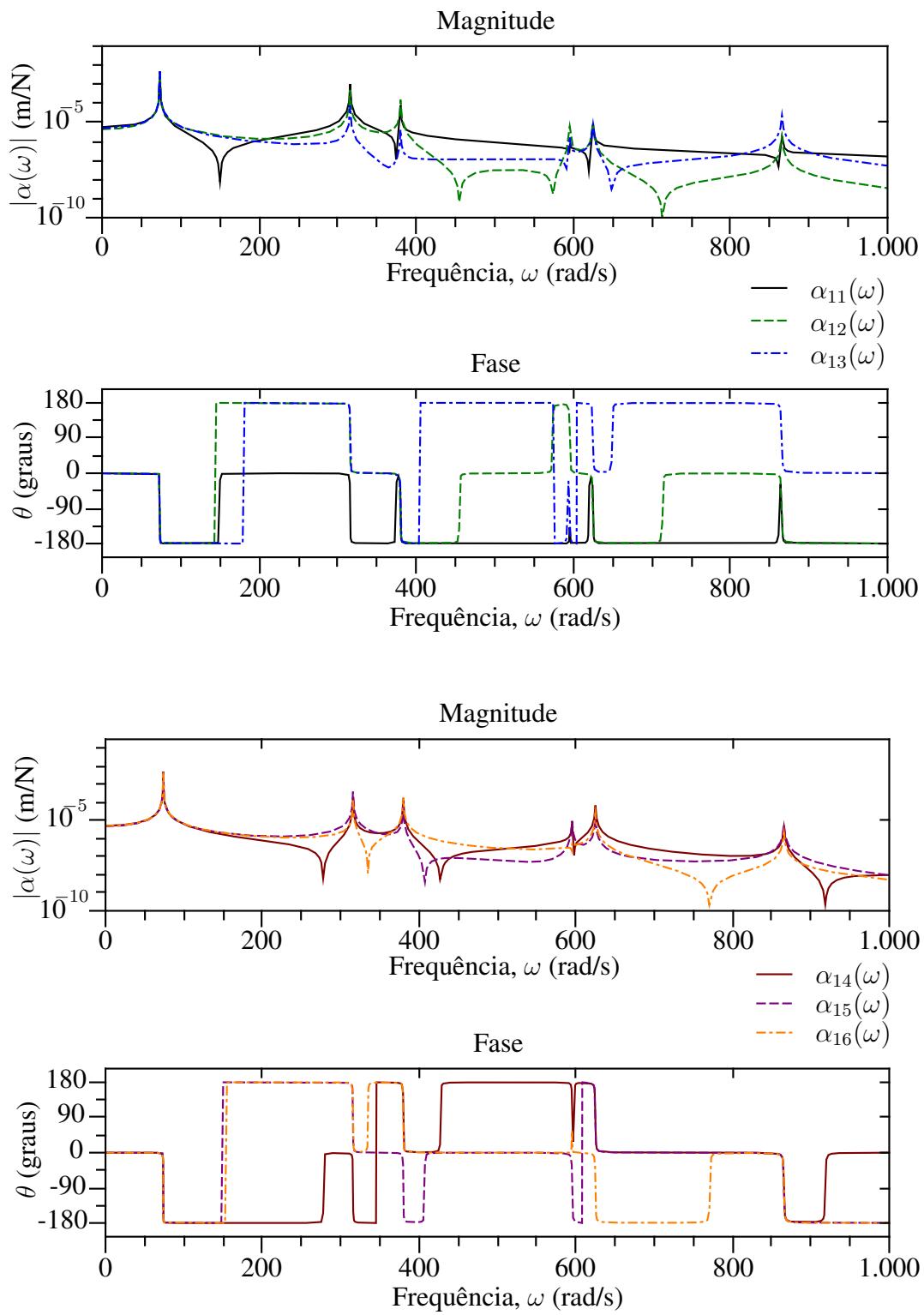
$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^6 \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\lambda_r^2 - \omega^2},$$

obtemos  $[\alpha(\omega)]$ , com  $j$  e  $k$  indo de 1 a 6. Por ser uma matriz cujos elementos são expressões polinomiais muito extensas, vamos nos abster de escrevê-las aqui. Em vez disso, os diagramas de Bode das funções de sua primeira coluna são apresentados na Figuras 18. Determinamos arbitrariamente uma faixa de frequência de 0 a 1000 rad/s, sendo possível ver os picos de todos os modos.

### 3.3.2 Rota experimental

#### — Redução do modelo de resposta —

De posse da matriz  $[\alpha(\omega)]$ , suponhamos que fizemos um experimento em que forças foram aplicadas em todas as massas  $m_i$  do sistema, uma de cada vez, e a receptância foi medida a partir de  $m_1$ . Disso resulta que temos todos os dados da linha 1 de  $[\alpha(\omega)]$ , como mostrado na Figura 19. Esta será, portanto, toda informação disponível para que remodelemos o sistema, sendo que tais FRFs já foram mostradas na Figura 18.

Figura 18 – Diagrama de Bode para  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{13}$ ,  $\alpha_{14}$ ,  $\alpha_{15}$  e  $\alpha_{16}$ 

Fonte: O Autor.

Figura 19 – Dados disponíveis após redução do modelo de resposta

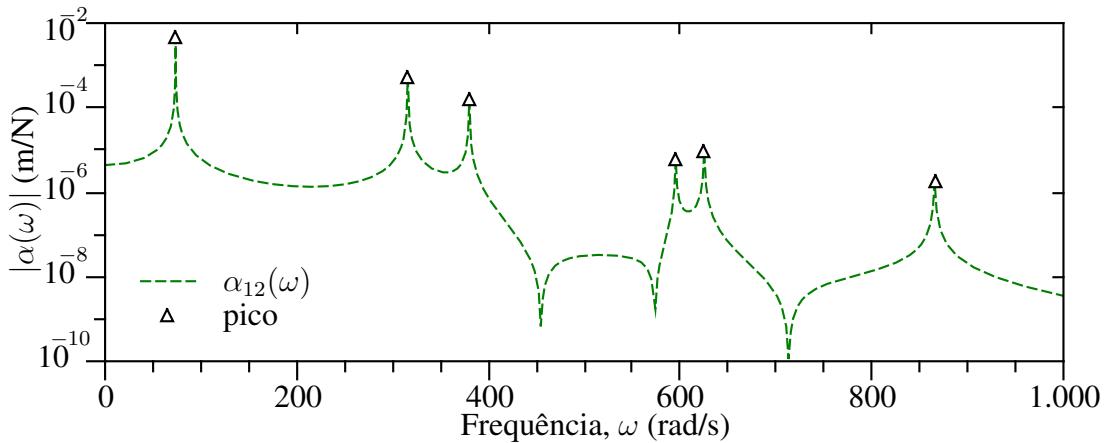
$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{bmatrix}$$

Fonte: O Autor.

## — Extração de parâmetros —

Para identificar os elementos de  $[\Omega'^2]$  basta identificar os picos das FRFs do modelo reduzido. Isso nos retorna 6 medidas para cada frequência. A média desses valores nos dará os valores de  $\omega'_r$ . A Figura 20 mostra os picos identificados no gráfico da magnitude de  $\alpha_{12}(\omega)$ . Temos, então, os valores das frequências naturais medidas:

$$[\Omega'^2]^{1/2} = \text{diag} \{73, 569; 315, 77; 379, 99; 595, 49; 625, 10; 865, 59\} \text{ (rad/s).}$$

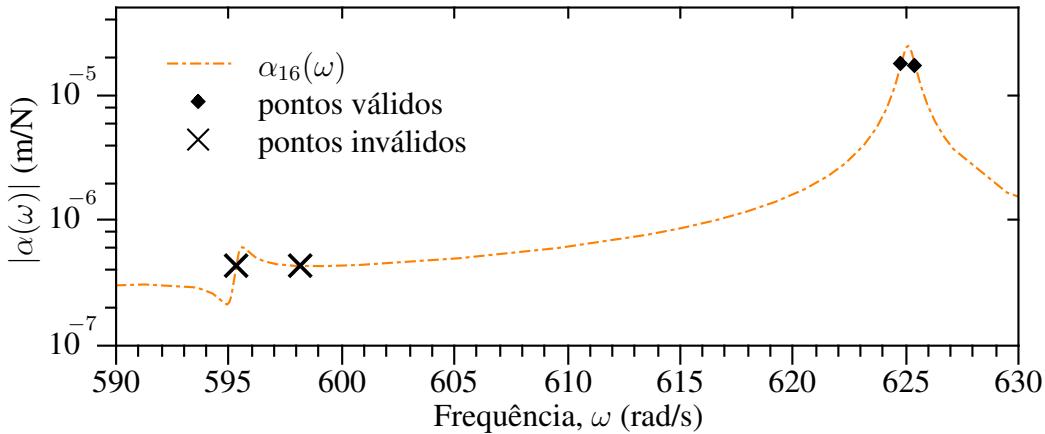
Figura 20 – Gráfico da magnitude de  $\alpha_{12}(\omega)$  com seus picos identificados

Fonte: O Autor.

Para o amortecimento, o procedimento é similar, mas merece maior cuidado. Ao identificar os pontos de meia-potência para cada modo, pode ser que eles não estejam na região de pico da função. Por isso, para diminuir o erro, o valor de  $\eta'_r$  ali medido deve ser ignorado. Os outros valores válidos são então usados para calcular a média aritmética. A Figura 21 exibe pontos de meia-potência válidos e inválidos para a função  $\alpha_{16}(\omega)$ . Nela, o pico do quarto modo (595, 49 rad/s) não é tão bem definido como o do quinto (625, 10 rad/s), e isso faz com que o ponto de meia-potência à sua direita não esteja próximo o suficiente do pico, o que induz erro na medição. Ignoramos também o valor medido de  $\eta'_4$  avaliado em  $\alpha_{11}(\omega)$ , onde o mesmo fenômeno acontece. Como resultado final, temos:

$$[E'] = \text{diag} \{0, 001027; 0, 001015; 0, 001025; 0, 001032; 0, 001015; 0, 001016\}.$$

Figura 21 – Detalhe do gráfico da magnitude de  $\alpha_{16}(\omega)$  mostrando pontos de meia potência para o 4º e o 5º modo



Fonte: O Autor.

Não encontramos dificuldades para calcular o módulo de  $[\Phi']$  pelas Equações 2.45 e 2.46. Usando o gráfico das fases de  $\alpha_{1k}(\omega)$  para obter os sinais de  $\phi'_{jk}$ , temos que:

$$[\Phi'] = \begin{bmatrix} 1,5272 & 3,2191 & 1,0737 & 0,089742 & 0,56966 & 0,36823 \\ 1,5990 & -1,5895 & 2,1038 & -2,5398 & 0,67789 & 0,37276 \\ 1,6745 & -0,2468 & 0,057813 & 0,74058 & -0,56732 & -4,6842 \\ 1,7068 & 0,5259 & -1,7837 & -2,6681 & -4,6614 & 0,89281 \\ 1,6869 & -1,1906 & 0,82801 & 3,7534 & -0,98477 & 1,2452 \\ 1,7426 & -0,4024 & -2,4863 & -0,11258 & 1,7187 & 0,43330 \end{bmatrix} \times 10^{-1}.$$

A Figura 22 mostra o gráfico de fase de  $\alpha_{13}(\omega)$  no qual estão assinaladas as fases de seus picos. Nota-se que todos os sinais foram invertidos ao serem atribuídos aos elementos de  $[\Phi']$ . Isso aconteceu porque, segundo a convenção que adotamos, foi necessário inverter o sinal de todas as colunas para que os elementos da primeira linha fossem positivos.

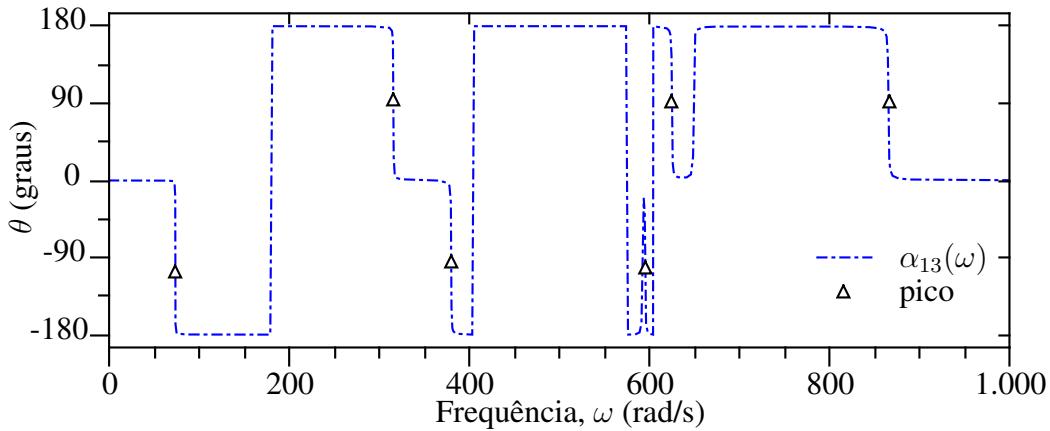
A partir de  $[\Phi']$  podemos calcular o modelo espacial generalizado, isto é, as matrizes  $[M'^*]$ ,  $[K'^*]$  e  $[D'^*]$ , mas precisamos da matriz  $[\Psi']$  para tal. Podemos obtê-la simplesmente normalizando os modos de vibrar  $\vec{\phi}'_r$  em função de seu primeiro elemento. Feito isso, temos:

$$\begin{aligned} [M'^*] &= ([\Psi']^{-1} [\Phi'])^{-2} \\ &= \text{diag}\{42,874; 9,6504; 86,750; 12417; 308,26; 737,50\} (\text{kg}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K'^*] &= \text{Re}([\Lambda'^2]) [M'^*] = [\Omega'^2] [M'^*] \\ &= \text{diag}\{2,32055; 9,6225; 125,261; 44030,5; 1204,55; 5525,73\} (10^5 \text{N/m}). \end{aligned}$$

Já no caso de  $[D'^*]$ , lembremo-nos de que o amortecimento é proporcional, e que, pela Equação 2.28,  $\eta'_r = \beta'$ . Logo, podemos calcular a matriz de amortecimento generalizada em função de  $\beta'$ , e

Figura 22 – Gráfico da fase de  $\alpha_{13}(\omega)$  em função da frequência com a fase de seus picos assinaladas



Fonte: O Autor.

este fator pode ser obtido pela média aritmética dos valores de  $\eta'_r$ . O resultado fica:

$$\beta' = 1,022 \times 10^{-3}.$$

Portanto, temos que  $[D'^*] = \beta'[K'^*] = (1,022 \times 10^{-3})[K'^*]$ .

— Regenerando a resposta do sistema —

Depois de extrair os parâmetros modais, podemos regenerar as funções de receptância do modelo reduzido e sintetizar as demais para obter  $[\alpha(\omega)]$ . A equação

$$\alpha'_{jk} = \frac{\phi'_{jr}\phi'_{kr}}{\lambda_r'^2 - \omega^2},$$

que usa os dados do modelo modal experimental, nos retorna o novo modelo de resposta. A Figura 23 mostra uma comparação qualitativa entre  $\alpha_{14}(\omega)$ , original, e sua versão regenerada,  $\alpha'_{14}(\omega)$ .

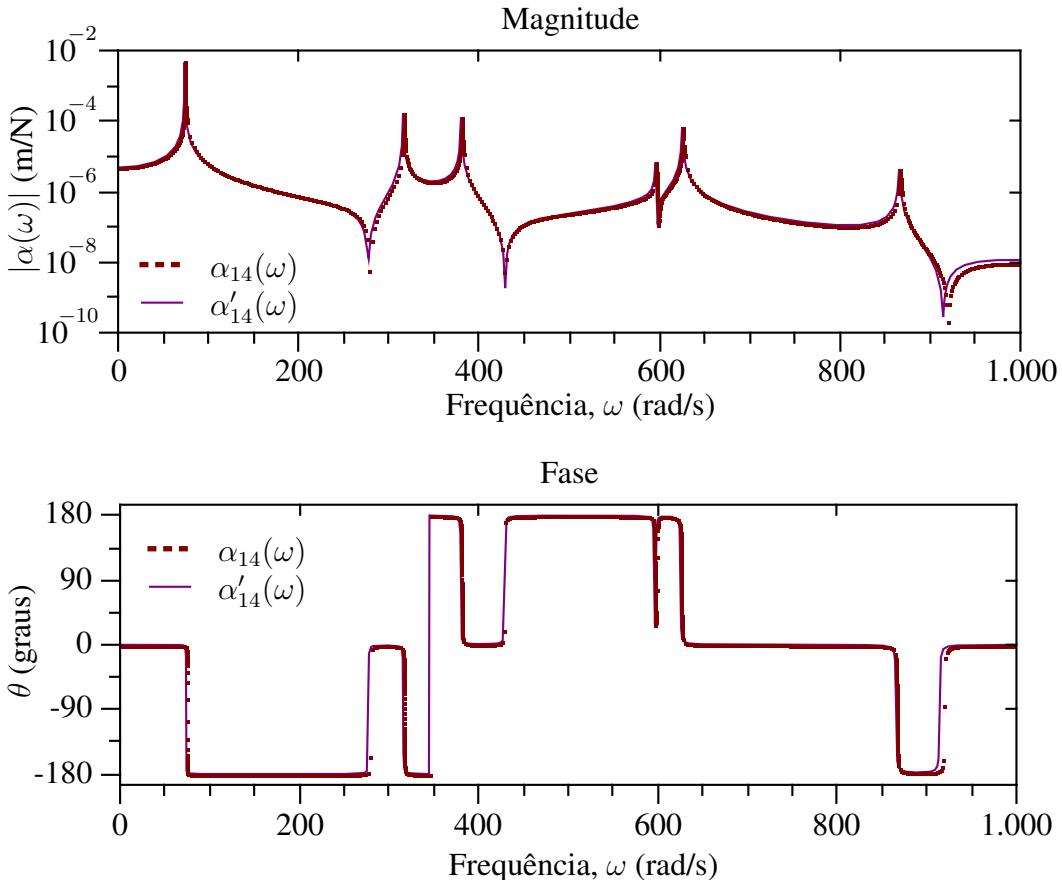
### 3.4 Discussão dos resultados

Ao compararmos os modelos espacial original e regenerado, especialmente em sua forma generalizada, pode-se facilmente observar o erro que é gerado no processo de extração dos parâmetros modais. Isso acontece porque a matriz  $[\Phi']$  não é ortogonal e nem  $[\Lambda'^2]$  representa os autovetores de forma exata. Além disso, ao gerar o modelo espacial, estamos usando todos os parâmetros modais extraídos e, portanto, seus erros se acumulam nas matrizes generalizadas.

Podemos medir alguns erros relativos para algumas matrizes. Por exemplo, para a massa generalizada:

$$\varepsilon_m = \max \left| \frac{m_r'^* - m_r^*}{m_r^*} \right| = 44,8\%.$$

Figura 23 – Comparação entre a curva experimental de receptância  $\alpha_{14}(\omega)$  e a curva regenerada  $\alpha'_{14}(\omega)$



Fonte: O Autor.

De modo similar, temos o erro da rigidez generalizada,

$$\varepsilon_k = 44,8\%;$$

e, respectivamente, dos fatores de amortecimento modal e amortecimento generalizado,

$$\varepsilon_\eta = 3,18\%, \text{ e } \varepsilon_d = 47,9\%.$$

Para os parâmetros extraídos, o erro das frequências naturais é

$$\varepsilon_\omega = 0,0118\%,$$

e o maior erro da matriz da forma dos modos normalizada é

$$\varepsilon_\phi = 24,1\%.$$

A maior parte do erro parece se propagar principalmente de  $[\Phi']$ , por ser o parâmetro extraído que mais se desvia do original. Para Ewins (1984), erros da ordem 1% a 4% são aceitáveis e, segundo sua obra, para alcançar tal precisão, usam-se métodos de interpolação iterativos: num diagrama de Nyquist, tenta-se ajustar uma curva a valores medidos no teste modal, depois extrai-se os parâmetros modais dessa

curva aproximada. Maia e Silva (1997) apresentam também métodos que aproximam toda a curva de uma FRF, em vez de se basear apenas nos valores dos picos.

Quanto a resposta do sistema, a Figura 23 nos mostra que a curva regenerada desvia da original principalmente nas antiressonâncias, enquanto que as ressonâncias são bastante próximas. Isso quer dizer que o erro é maior no polinômio do numerador de  $\alpha'_{14}(\omega)$  que, segundo a Equação 2.40, tem maior influência dos modos normais do que em o polinômio do denominador, pois este depende unicamente do amortecimento e das frequências naturais. Pode-se, porém, usar um método de cálculo de resíduos da forma da Equação 2.47 para diminuir o erro a um nível que satisfaça as demandas do teste modal.

## 4 Conclusões

O estudo de vibrações mecânica sempre foi de grande interesse à humanidade, mas a partir do momento em que foi possível processar grandes quantidades de dados a baixo custo financeiro e de tempo – principalmente devido à rápida evolução do poder de processamento dos computadores –, a área de análise modal tornou-se muito relevante. Uma das aplicações mais comuns é usar seus resultados para refinar modelos de elementos finitos (MAIA; SILVA, 1997). Aliás, mesmo que este tema venha se desenvolvendo desde a década de 1970 (HURTY; COLLINS; HART, 1971), ainda há muito a ser feito.

Outra aplicação bastante comum é o estudo de sistemas acoplados (CRAIG, 2000). Pode-se, com base em modelos modais individuais, prever o comportamento vibracional de uma estrutura complexa. A área de acoplagem também é bastante vasta (MAIA; SILVA, 1997) e de grande interesse, pois são mitos os tipos de acoplamento e sempre há a busca por técnicas que produzam resultados mais realistas e que consumam menor tempo de computação.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, desde a escolha do tema até sua finalização, foi possível perceber a importância do tema para a comunidade acadêmica, destacando-se a grande quantidade de publicações e conferências que já foram e são realizadas anualmente acerca de análise modal. Neste âmbito, para que este trabalho seja continuado na UFMT, e para que nosso meio acadêmico possa integrar esse grupo de estudos mundial, sugere-se como trabalhos futuros:

- Produzir um script numa plataforma de programação numérica para extração de parâmetros modais por ajuste curvas no diagrama Nyquist;
- Testar estruturas reais simples, como uma viga em balanço, e comparar os resultados modelos obtidos computacionalmente pelo método dos elementos finitos, e também com resultados analíticos exatos (caso existam);
- Refinar um modelo de elementos finitos a partir dos resultados de um teste modal;
- Extrair modelos modais de estruturas metálicas grandes excitadas por fenômenos naturais (vento, sismos, chuva etc.) ou de equipamentos em que haja fenômenos de autoexcitação;
- Validar e otimizar projetos de estruturas metálicas pelo estudo de seus modos de vibrar.

# Referências

- BELTRAN-CARBAJAL, F. (Ed.). *Vibration Analysis and Control: New trends and developments*. Intech, 2011. Disponível em: <<http://www.intechopen.com/books/vibration-analysis-and-control-new-trends-and-developments>>. Acesso em: 12 mar. 2016.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra linear*. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- BOYCE, W. E.; DiPRIMA, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 7. ed. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- COSTA, E. T. da. *O Teorema Fundamental da Álgebra e o software TFA: atividades investigativas no ensino/aprendizagem pelas TICs*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, ago. 2013.
- CRAIG, J. R. R. A brief tutorial on substructure analysis and testing. In: *Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference*. [S.l.]: Society for Experimental Mechanics, 2000. p. 899–908.
- EWINS, D. J. *Modal Testing: Theory and practice*. Taunton: Research Studies Press Ltd., 1984.
- FUNG, Y. C. (Ed.). *Foundations of Solid Mechanics*. Englewood: Prentice-Hall International, 1965.
- HURTY, W. C.; COLLINS, J. D.; HART, G. C. Dynamic analysis of large structures by modal synthesis techniques. *Computer & Structures*, Pergamon Press, v. 1, p. 535–563, 1971.
- INMAN, D. J. *Engineering vibration*. 2. ed. Upper Saddle River: Pearson, 2008.
- LALLEMENT, G.; INMAN, D. J. A tutorial on complex eigenvalues. In: *Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference*. [S.l.]: Society for Experimental Mechanics, 1995. p. 490–495.
- MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. e (Ed.). *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Tauton: Research Studies Press Ltd., 1997.
- NISE, N. S. *Engenharia de Sistemas de Controle*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- NORTON, R. L. *Cinemática e dinâmica dos mecanismos*. Tradução Alessandro P. Medeiros ... [et al.]. Porto Alegre: AMGH, 2010. 812 p.
- RANDALL, R. B.; UPTON, R. Digital filters and fft technique in real-time analysis. *Digital Signal Analysis Using Digital Filters and FFT Techniques*, p. 45–67, 1985.
- RAO, S. S. *Mechanical vibrations*. 5. ed. Upper Saddle River: Pearson, 2010.
- RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. *Física*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- SAAD, Y. *Numerical methods for large eigenvalue problems*. 2. ed. 2011. Disponível em: <[http://www-users.cs.umn.edu/~saad/eig\\_book\\_2ndEd.pdf](http://www-users.cs.umn.edu/~saad/eig_book_2ndEd.pdf)>. Acesso em: 8 mar. 2016.
- SHEPHERD, R. Some limitations of modal analysis in seismic design. *NZSEE Quarterly Bulletin*, v. 2, n. 3, p. 284–288, 1969.
- SKJAERVEN, L.; HOLLUP, S. M.; REUTER, N. Normal mode analysis for proteins. *Journal of Molecular Structure: THEOCHEM*, v. 898, n. 1-3, p. 42–48, mar. 2009.
- Vibração. In: WEISZFLOG, W. (Ed.). *Michaelis: Moderno Dicionário da Língua Portuguesa*. São Paulo: Melhoramentos, 2007.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Programa em scilab

A Lista A.1 apresenta o código fonte do programa `anmod.sce` desenvolvido no scilab para resolução do problema proposto do Capítulo 3.

**Lista A.1 – `anmod.sce`**

```

1 //=====
2 //
3 // DISTRIBUTED UNDER GPLv3
4 //
5 //=====
6 //
7 // Luis Paulo LIMA      mar/2016
8 // Engenharia Mecânica
9 // Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil
10 // <luispauloml[arroba]gmail.com>
11 //
12 // Disponível em: <http://pastebin.com/TUmmg18U>
13 //
14 //=====
15 // Análise modal de sistemas vibratórios com amortecimento histerético
16 // proporcional com estudo teórico e experimental, usando o método da
17 // amplitude dos picos para extração de parâmetros modais.
18 //
19 // [Entrada:]
20 // - Modelo espacial:
21 //   < Rota teórica >
22 //   -- N       número de graus de liberdade
23 //   -- M       matriz de massa
24 //   -- K       matriz de rigidez
25 //   -- betah   proporção de amortecimento relativo à rigidez
26 //   < Rota experimental >
27 //   -- n       índice da linha para qual se reduz a
28 //               resposta do sistema
29 //
30 // [Saída:]
31 //   < Rota teórica >
32 // - Amortecimento e modelo espacial generalizado:
33 //   -- D       matriz de amortecimento
34 //   -- m_r_diag matriz de massa generalizada
35 //   -- k_r_diag matriz de rigidez generalizada
36 //   -- d_r_diag matriz de amortecimento generalizado
37 // - Modelo modal:
38 //   -- w_n     vetor de frequências naturais
39 //   -- etah_n   vetor de fatores de amortecimento modal
40 //   -- PSI     forma dos modos normais
41 //   -- PHI     forma dos modos normais normalizados pela massa
42 // - Modelo de resposta
43 //   -- w       vetor de frequências para cálculo da resposta
44 //   -- alfal   matriz de expressões simbólicas das funções
45 //               receptânicas
46 //   -- H       hipermatriz com valores das receptâncias para
47 //               cada frequência
48 //               < H(j,:,k) é o vetor que contem os valores
49 //               calculados de alfal(j,k) >
50 //
51 //   < Rota experimental >
52 // - Modelo modal experimental
53 //   -- w_n_med  vetor das frequências naturais medidas
54 //               graficamente
55 //   -- etah_n_med vetor dos fatores de amortecimento modal
56 //               medidos graficamente
57 //   -- psi_graf  forma dos modos normais experimentais
58 //   -- phi_graf  forma dos modos normais normalizados pela
59 //               massa experimentais
60 // - Modelo espacial experimental

```

```

61 //      -- M_exp      matriz de massa experimental
62 //      -- K_exp      matriz de rigidez experimental
63 //      -- betah_exp   proporção de amortecimento experimental
64 //      -- D_exp      matriz de amortecimento experimental
65 //      -- m_r_exp    matriz de massa generalizada experimental
66 //      -- k_r_exp    matriz de rigidez generalizada experimental
67 //      -- d_r_exp    matriz de amortecimento generalizado
68 //                  experimental
69 // - Modelo de resposta
70 //      -- alfa2      matriz de expressões simbólicas das funções
71 //                      receptânicas
72 //      -- H2         hipermatriz com valores das receptâncias para
73 //                      cada frequência
74 //                     < H2(j,:,:) é o vetor que contem os valores
75 //                     calculados de alfa2(j,k) >
76 //
77 //      < Gráficos >
78 //      -- Janela 10   diagramas de Bode para alfa1(1,1) a alfa1(1,3)
79 //                      picos destacados
80 //      -- Janela 20   pontos de meia potência destacados
81 //      -- Janela 11   diagramas de Bode para alfa1(1,3) a alfa1(1,6)
82 //                      picos destacados
83 //      -- Janela 30   pontos de meia potência destacados
84 //      -- Janela 11   diagrama de Nyquist para alfa1(1,1) a alfa1(1,3)
85 //      -- Janela 30   comparação da curva original alfa1(1,4) e sua
86 //                      versão regenerada alfa2(1,4)
87 //=====FIM=====

88

91 //===== [ R O T A      T E Ó R I C A ] =====
92
93 //1. DADOS INICIAIS
94 N=6;           //número de graus de liberdade [admens.]
95 massas=[7 7 4 3 6 8]; //massas [kg]
96
97 k1=1.0d5; k2=1.0d5; k3=4.0d5; k4=5.0d5;
98 k5=7.0d5; k6=2.0d5; k7=8.0d5; k8=3.0d5;
99 k9=6.0d5; k10=3.0d5; k11=5.0d5;
100
101 molas=[k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10 k11] //matriz das molas [N/m]
102
103 betah=1.0d-3;          //proporção de amortecimento relativo
                           //à rigidez [admens.]
104
105 //2. MODELO ESPACIAL ANALÍTICO
106 M=[]; //Matriz de massas [kg]
107 K=[]; //matriz de rigidez [N/m]
108 D=[]; //matriz de amortecimento [N/m]
109
110
111 M=diag(massas(1:N)); //matriz de massas
112
113 K=...; //matriz de rigidez
114 [k1+k3+k6 0 -k3 -k6 0 0;...
115   0 k2+k4+k5 -k4 0 -k5 0;...
116   -k3 -k4 k3+k4+k7+k8+k9 -k8 -k7 -k9;...
117   -k6 0 -k8 k6+k8+k11 0 -k11;...
118   0 -k5 -k7 0 k5+k7+k10 -k10;...
119   0 0 -k9 -k11 -k10 k9+k10+k11];
120
121 D=betah*K; //matriz de amortecimento
122
123 //3. MODELO MODAL ANALÍTICO
124 //3.1 Autoproblema
125 PSI=[]; //Modos de vibração [m]
126 w_n=[]; //Frequências naturais [rad/s]
127 etah_n=[]; //Fatores de amortecimento [admens.]
128 lambda_n2=[]; //Matriz de autovalores ao quadrado
                  // [lambda2=w_n2(1+i*etah)]
129
130
131 [al,be,Q]=spec(K+%i*D,M); //Resolver autoproblema
132 autov=al./be; //Autovalores desordenados

```

```

135 clear al be
137 //3.1.1 Ordenar autovetores e autovalores
138 ReAutov=real(autov);
139 [ReAutov,ind]=gsort(ReAutov,"g","i");
140 lambda_n2=autov(ind); //Autovalores
141 w_n=sqrt(ReAutov); w_n=real(w_n); //Frequências naturais
142 etah_n=imag(lambda_n2)./ReAutov; //Fatores de amortecimento
143
144 Q1=zeros(Q); //Autovetores sem partes imaginárias
145 tol=1.0d-3; //Tolerância da parte imaginária
146 for r=1:size(Q, "r") //Eliminando partes imaginárias da matriz
147 //de autovetores
148 for c=1:size(Q, "c")
149 if (imag(Q(r,c))/real(Q(r,c))<tol)|...
150 (abs(imag(Q(r,c))/real(Q(r,c))-betah)<tol) then
151 Q1(r,c)=real(Q(r,c));
152 else
153 Q1(r,c)=Q(r,c);
154 print(%io(2),[r c])
155 end
156 end
157 end
158
159 PSI=Q1(:,ind); //Modos de vibrar ordenados em
160 //relação às frequências naturais
161
162 for c=1:size(PSI, "c") //Normalização em relação a coordenada 1
163 PSI(:,c)=PSI(:,c)./real(PSI(1,c));
164 end
165
166 clear ind r c tol
167
168 //3.2 Normalizar pela massa
169 m_r_diag=[]; //matriz massa diagonalizada [kg]
170 k_r_diag=[]; //matriz rigidez diagonalizada [N/m]
171 d_r_diag=[]; //matriz de amortecimento diagonalizada [Nm/s]
172 PHI=[]; //autovetores normalizados pela massa
173
174 m_r_diag=PSI'*M*PSI; //massa diagonalizada
175 k_r_diag=PSI'*K*PSI; //rigidez diagonalizada
176 d_r_diag=PSI'*D*PSI; //amortecimento diagonalizado
177
178 for i=1:size(m_r_diag, "r")
179 m_r(i)=m_r_diag(i,i); //eliminando elementos não-zero
180 ////(muito pequenos)...
181 k_r(i)=k_r_diag(i,i); //garantindo autovetores normalizados
182 //reais
183 d_r(i)=d_r_diag(i,i);
184 end
185
186 m_r_diag=diag(m_r);
187 k_r_diag=diag(k_r);
188 d_r_diag=diag(d_r);
189
190 PHI=PSI*sqrt(inv(m_r_diag)); //autovetores normalizados pela massa
191
192 clear i
193
194 //4. MODELO DE RESPOSTA ANALÍTICO
195 //4.1 Funções de resposta em frequência (FRF)
196 alfa1=[]; //matriz de FRF (receptância)
197
198 alfa1=zeros(N,N);
199
200 for j=1:N
201   for k=1:N
202     for r=1:N
203       alfa1(j,k) = alfa1(j,k) + PHI(j,r)*PHI(k,r) ./ ...
204       (w_n(r)^2 - %z^2 + %i*etah_n(r)*w_n(r)^2 );
205     end
206   end
207 end

```

```

207     end
208 end
209
//6. CALCULANDO AS FRFs
210 w=[];           //Matriz de frequências
211 H=[];           //Matriz de receptância
212
213 min_w=min(w_n)-50;
214 if min_w<0 then
215     min_w=0.001;
216 end
217
218 max_w=max(w_n)+100;
219
220 w=linspace(min_w,-2+w_n(1),100);
221 for i=1:N-1
222     w=[w(1:length(w)-1) linspace(-2+w_n(i),2+w_n(i),200)];
223     w=[w(1:length(w)-1) linspace(w(length(w)),-2+w_n(i+1),100)];
224 end
225 w=[w(1:length(w)-1) linspace(-2+w_n(N),2+w_n(N),200)];
226 w=[w(1:length(w)-1) linspace(2+w_n(N),max_w,100)];
227
228 H=zeros(N,length(w),N);
229
230
231 for j=1:N
232     for k=1:N
233         H(j,:,k)=horner(alfa1(j,k),w);
234     end
235 end
236
237 clear A j k
238
//X. EXIBIÇÃO DOS MODELOS
239 disp('[ROTA TEÓRICA]');
240 disp('Modelo espacial');
241 print(%io(2),D,K,M);
242
243 disp(' ')
244 disp('Modelo modal');
245 print(%io(2),PHI,PSI,etah_n',w_n');
246
247 disp(' ')
248 disp('Modelo de resposta (alfa_11)');
249 disp(alfa1(1,1));
250
251
//X.1 Gráficos
252 scf(10); clf();
253 xname("FRF %d");
254 subplot(211);
255 plot2d('nl', w', abs([H(1,:,:1)' H(1,:,:2)' H(1,:,:3)' ]),...
256 [2,3,5],leg="H11@H12@H13");
257 subplot(212);
258 plot2d(w', [phasemag([H(1,:,:1); H(1,:,:2); H(1,:,:3)],'m')]',[2,3,5]);
259
260 scf(20); clf();
261 xname("FRF %d");
262 subplot(211);
263 plot2d('nl', w', abs([H(1,:,:4)' H(1,:,:5)' H(1,:,:6)' ]),...
264 [2,3,5],leg="H14@H15@H16");
265 subplot(212);
266 plot2d(w', [phasemag([H(1,:,:4); H(1,:,:5); H(1,:,:6)],'m')]',[2,3,5]);
267
268 scf(11); clf();
269 xname("FRF Nyquist %d");
270 plot2d4(real([H(1,:,:1)' H(1,:,:2)' H(1,:,:2)' ]),...
271 imag(-[H(1,:,:1)' H(1,:,:2)' H(1,:,:2)' ]));
272 eixo=gca();
273 eixo.isoview="on";
274
275
276
277 //===== [ R O T A      E X P E R I M E N T A L ] =====
278
279 //=====

```

```

281 function peaks=peak_detect(signal,threshold)
// Disponível em: <https://fileexchange.scilab.org/toolboxes/209000>
283 //
284 // This function detect the peaks of a signal :
285 // -----
286 // For an input row vector "signal" , the function return
287 // the position of the peaks of the signal.
288 //
289 // The ouput "peaks" is a row vector (size = number of peaks),
290 // "peaks" =[] if no peak is found.
291 //
292 // Optional argument "threshold" eliminates the peaks under
293 // the threshold value (noise floor).
294 //
295 // Clipped peaks (more than 2 samples of the signal at the same value)
296 // are not detected.
297 // -----
298 // Jean-Luc GOUDIER      11-2011
299 // -----
300
301 [nargout,nargin] = argn(0);
302 if nargin==2 then ts=threshold;
303 end;
304 if nargin==1 then ts=min(signal);
305 end;
306
307 [r c]=size(signal);
308 Ct=getlanguage();
309 if Ct=="fr_FR" then
310     Msg="Erreur : le signal n''est pas un vecteur colonne";
311 else
312     Msg="Error : signal is not a row vector";
313 end
314 if r>1 then
315     error(Msg);
316 end;
317
318 Lg=c-1;
319 d_s=diff(signal);
320 dd_s=[d_s(1),d_s(1,:)];                                // diff first shift
321 d_s=[d_s(1,:),d_s(Lg)];                                // diff size correction
322 ddd_s=[dd_s(1),dd_s(1,1:Lg)];                          // diff second shift
323 Z=d_s.*dd_s;                                         // diff zeros
324
325 peaks=find(((Z<0 & d_s<0) | (Z==0 & d_s<0 & ddd_s>0)) & signal>ts);
326
327 endfunction
328
329 //7. EXTRAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS
330 n=1;          //Ponto de resposta para modelo reduzido
331 w_n_graf=[]; //Frequências naturais extraídas
332 w_n_med=[];  //Valor médio das frequências naturais
333 etah_graf=[]; //Fator de amortecimento para cada modo
334 etah_med=[];  //Valor médio do amortecimento modal
335 lim=[];       //Límite inferior para busca de picos
336 lambda_n2_med=[]; //Autovalores médios
337
338 lim=5.0d-7;    //segundo inspeção gráfica
339
340 //7.1 Frequências naturais
341 w_n_ind=zeros(N,N);        //índice dos picos para FRF H(n,n)
342 Hnn_nat=[];                //amplitude dos picos da FRF H(n,n)
343
344 for j=1:N
345     w_n_ind(j,:)=peak_detect(abs(H(n,:,j)),lim);    //amplitude
346     w_n_graf(j,:)=w(w_n_ind(j,:));                   //freq natural
347
348     Hnn_nat(j,:)=H(n,w_n_ind(j,:),j);
349 end
350
351 //7.2 Amortecimento
352 w_meia_ind=zeros(N,N,2);    //hipermatriz com índices das freqs

```

```

353                                     //da banda de meia potência
355     w_meia_ind(:,:,1)=w_n_ind;
356     w_meia_ind(:,:,2)=w_n_ind;
357
358     for i=1:N                         //busca pelos pontos de meia potência
359         for j=1:N
360             achou_esquerda=%F;
361             achou_direita=%F;
362
363             H_pico=H(n,w_n_ind(j,i),j);
364             H_meia_pot=abs(H_pico)/sqrt(2);
365             val=[];
366
367             while ~achou_esquerda
368                 w_meia_ind(j,i,1)=w_meia_ind(j,i,1)-1;
369
370                 valor_1=abs(H(n,w_meia_ind(j,i,1)-1,j));
371                 valor_2=abs(H(n,w_meia_ind(j,i,1),j));
372
373                 if (valor_1 < H_meia_pot & valor_2 > H_meia_pot) then
374                     achou_esquerda=%T;
375                 end
376             end
377
378             valor_1=[];
379             valor_2=[];
380
381             while ~achou_direita
382                 w_meia_ind(j,i,2)=w_meia_ind(j,i,2)+1;
383
384                 valor_1=abs(H(n,w_meia_ind(j,i,2)-1,j));
385                 valor_2=abs(H(n,w_meia_ind(j,i,2),j));
386
387                 if (valor_1 > H_meia_pot & valor_2 < H_meia_pot) then
388                     achou_direita=%T;
389                 end
390             end
391         end
392
393         for i=1:N
394             for j=1:N
395                 etah_graf(i,j) = (w(w_meia_ind(j,i,2))^2 -...
396                                     w(w_meia_ind(j,i,1))^2) / 2 / w_n_graf(j,i).^2;
397             end
398         end
399
400
401         w_n_med=sum(w_n_graf,'r')/N;
402         w_n_med=w_n_med';
403
404         etah_val=ones(N,N);           //valores válidos para o amortecimento
405                                     //segundo o gráfico
406
407         if N==6 then
408             etah_val(4,1)=0;          //valores a serem desconsiderados
409             etah_val(4,6)=0;
410         end
411
412         //cálculo da média aritmética dos valores extraídos
413         etah_med=sum(etah_graf.*etah_val,'r')./sum(etah_val,'r');
414         etah_med=etah_med';
415
416         //matriz de autovalores experimental
417         lambda_n2_med=(w_n_med.^2).*(1+1i.*etah_med);
418
419 //7.3 Modos de vibrar
420 phi_graf=[];           //Autovetores normalizados pela massa
421 psi_graf=[];           //Autovalores normalizados segundo la linha
422
423 theta=[];              //fase das ressonâncias
424
425 for a=1:N               //elementos da linha 'n' de phi_graf

```

```

427     for r=1:N
428         A_r_jk(n,r)=imag(Hnn_nat(n,r));
429         theta(n,r)=phasemag(Hnn_nat(n,r));
430
431         den=%i*etah_med(r)*w_n_graf(n,r)^2/%i;
432
433         phi_graf(n,r)=sqrt(A_r_jk(n,r)*den);
434         phi_graf(n,r)=abs(imag(phi_graf(n,r)));
435
436         phi_graf(n,r)=-theta(n,r)/abs(theta(n,r))*phi_graf(n,r);
437     end
438
439     ind=[1:n-1,n+1:N]
440     for a=ind //restante dos elementos de phi_graf
441         for r=1:N
442             A_r_jk(a,r)=imag(Hnn_nat(a,r));
443             theta(a,r)=phasemag(Hnn_nat(a,r));
444
445             den=%i*etah_med(r)*w_n_graf(n,r)^2/%i;
446
447             phi_graf(a,r)=A_r_jk(a,r)*den/phi_graf(n,r);
448             phi_graf(a,r)=abs(phi_graf(a,r));
449
450             phi_graf(a,r)=-theta(a,r)/abs(theta(a,r))*phi_graf(a,r);
451         end
452     end
453
454
455     for i=1:N
456         psi_graf(:,i)=phi_graf(:,i)./phi_graf(1,i);
457     end
458
459
460 //8. MODELO ESPACIAL EXPERIMENTAL
461 M_exp=[]; //Matriz de massa experimental
462 m_r_exp=[]; //Matriz de massa generalizada experimental
463 K_exp=[]; //Matriz de rigidez experimental
464 k_r_exp=[]; //Matriz de rigidez generalizada experimental
465 D_r_exp=[]; //Matriz de amortecimento experimental
466 d_r_exp=[]; //Matriz de amortecimento generalizada
467 betah_exp=[]; //Constante de proporção de amortecimento
468 //experimental
469
470 m_r_exp=(inv(psi_graf)*phi_graf)^(-2); m_r_exp=real(m_r_exp);
471 k_r_exp=(diag(w_n_med)^2.0)*m_r_exp;; k_r_exp=real(k_r_exp);
472
473 //eliminando elementos fora da diagnoal (muito pequenos)
474 A=[];
475 A=abs(m_r_exp)<(max(m_r_exp)*10^(-8));
476 A=~A; A=A*1;
477 m_r_exp=m_r_exp.*A;
478
479 A=[];
480 A=abs(k_r_exp)<(max(k_r_exp)*10^(-8));
481 A=~A; A=A*1;
482 k_r_exp=k_r_exp.*A;
483
484 betah_exp=sum(etah_med)/N;
485 d_r_exp=betah_exp*k_r_exp;
486
487 M_exp=inv(psi_graf')*m_r_exp*inv(psi_graf);
488 K_exp=inv(psi_graf')*k_r_exp*inv(psi_graf);
489 D_exp=inv(psi_graf')*d_r_exp*inv(psi_graf);
490
491 clear A
492
493 //9. MODELO DE RESPOSTA EXPERIMENTAL
494 alfa2=[]; //matriz de FRF (receptância)
495 alfa2=zeros(N,N);

```

```

499
501     for j=1:N
502         for k=1:N
503             for r=1:N
504                 alfa2(j,k) = alfa2(j,k)+phi_graf(j,r)*phi_graf(k,r)./
505                               ( w_n_med(r)^2 - %z^2 + %i*etah_med(r)*w_n_med(r)^2 )
506             end
507         end
508
509     H2=zeros(N,length(w),N);
510
511     for j=1:N
512         for k=1:N
513             H2(j,:,k)=horner(alfa2(j,k),w);
514         end
515     end
516
517 //X. EXIBIÇÃO DOS MODELOS EXPERIMENTAIS
518
519     disp(' ')
520     disp('[ROTA EXPERIMENTAL]');
521     disp('Modelo espacial experimental');
522     print(%io(2),D_exp,K_exp,M_exp);
523
524     disp(' ')
525     disp('Modelo modal experimental');
526     print(%io(2),phi_graf,psi_graf,etah_med',w_n_med');
527
528     disp(' ')
529     disp('Modelo de resposta experimental (alfa_11)');
530     disp(alfa2(1,1))
531
532 //X.1 Gráficos
533     for j=1:N
534         if (j>=1&j<=3) then
535             scf(10)
536         else
537             scf(20);
538         end
539         subplot(211)
540         plot2d('nl',w_n_graf(j,:),abs(Hnn_nat(j,:)), -7+j);
541         plot2d('nl',w(w_meia_ind(j,:,1)),...
542             abs(H(n,w_meia_ind(j,:,1),j)), -2);
543         plot2d('nl',w(w_meia_ind(j,:,2)),...
544             abs(H(n,w_meia_ind(j,:,2),j)), -2);
545
546         subplot(212)
547         plot2d(w_n_graf(j,:),phasemag(Hnn_nat(j,:),'m'), -N-1+j);
548     end
549
550     scf(30);clf();xname("FRF comparacao %d");
551     subplot(211)
552     plot2d('nl',w',abs([H(1,:,4)' H2(1,:,4)' ]), [2,3],...
553             leg="H14 Original@H14 Experimental");
554     subplot(212)
555     plot2d(w',[phasemag([H(1,:,4); H2(1,:,4)])]', [2,3]);
556
557 //END OF FILE

```