计算方法 B

Homework #8

2020.5.15

PB17000297 罗晏宸

Question 1

给定函数 $f(x)$ 离散值如下：分别用复化梯形和复化 Simpson 公式计算 $\int_{1.0}^{1.8} f(x)\,\mathrm{d}x$。

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$f(x)$	3.2	3.5	5.0	5.2	4.8

题设给定了 5 个数据点，将区间 $[1.0, 1.8]$ 等距分割为 4 等分，设 $a = 1.0,\ b = 1.8, h = 0.2$，则

$$x_i = a + ih, \quad i = 0,\, 1,\, \cdots,\, 4$$

复化梯形积分为

$$\begin{aligned} T(h) &= T(0.2) = T_4(f) \\ &= h\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{3} f(a+ih) + \frac{1}{2}f(b)\right] \\ &= 0.2 \times \left[\frac{1}{2} \times 3.2 + (3.5 + 5.0 + 5.2) + \frac{1}{2} \times 4.8\right] \\ &= 3.54 \end{aligned}$$

复化 Simpson 积分为

$$\begin{aligned} S_4(f) &= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{1} f(x_{2i}) + f(b)\right] \\ &= \frac{0.2}{3} \times [3.2 + 4 \times (3.5 + 5.2) + 2 \times 5.0 + 4.8] \\ &= 3.52 \end{aligned}$$

Question 2

构造积分 $\bar{I}(f) = \int_{-h}^{2h} f(x)\,\mathrm{d}x$ **的数值积分公式**

$$I(f) = a_{-1}f(-h) + a_0 f(0) + a_1 f(2h) \quad (h > 0)$$

使其具有尽可能高的代数精度，该公式的代数精度是多少？

取 $f(x) = x^k$ 时，令

$$\bar{I}(f) = \int_{-h}^{2h} x^0\,\mathrm{d}x = (2h - (-h)) = a_{-1} + a_0 + a_1 = I(f)$$

$$\begin{aligned}\bar{I}(f) &= \int_{-h}^{2h} x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}\left((2h)^{k+1} - (-h)^{k+1}\right) \\ &= a_{-1}(-h)^k + a_1(2h)^k = I(f), \quad k = 1, \cdots, m\end{aligned}$$

这是关于 a_{-1}, a_0, a_1 的线性方程组，理论上由 $m = 2$ 时的 3 个方程即可解得确定值

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 3h \\ -a_{-1} + 2a_1 = \dfrac{3}{2}h \\ a_{-1} + 4a_1 = 3h \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{-1} = 0 \\ a_0 = \dfrac{9}{4}h \\ a_1 = \dfrac{3}{4}h \end{cases}$$

代入 $k = 3$ 时的方程

$$\bar{I}(f) = \int_{-h}^{2h} x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left((2h)^4 - (-h)^4\right) = \frac{15}{4}h^4 \neq 12h^4 = a_{-1}(-h)^3 + a_1(2h)^3 = I(f)$$

因此积分 $\bar{I}(f) = \displaystyle\int_{-h}^{2h} f(x) \,\mathrm{d}x$ 的数值积分公式

$$I(f) = h\left[\frac{9}{4}f(0) + \frac{3}{4}f(2h)\right] \quad (h > 0)$$

具有最高的 2 阶代数精度。

Question 3

记 $I(f) = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x) \,\mathrm{d}x$，设 $S\left(f(x)\right)$ 为其数值积分公式，其中，$I(f) \approx S\left(f(x)\right) = Af(-\alpha) + Bf(0) + Cf(\alpha)$。

(1) 试确定参数 A, B, C, α，使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并求该公式的代数精度（需给出求解过程）

取 $f(x) = x^k$ 时，令

$$I(f) = \int_{-2}^{2} x^0 \,\mathrm{d}x = (2 - (-2)) = A + B + C = S\left(f(x)\right)$$

$$I(f) = \int_{-2}^{2} x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}\left(2^{k+1} - (-2)^{k+1}\right)$$

Question 3 continued on next page. . .

$$= A(-\alpha)^k + C\alpha^k = S\left(f(x)\right), \quad k = 1, \cdots, m$$

这是关于 A, B, C, α 的非线性方程组，当 $m = 4$ 时方程组由如下 5 个方程组成

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ -\alpha A + \alpha C = 0 \\ \alpha^2 A + \alpha^2 C = \dfrac{16}{3} \\ -\alpha^3 A + \alpha^3 C = 0 \\ \alpha^4 A + \alpha^4 C = \dfrac{64}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{10}{9} \\ B = \dfrac{16}{9} \\ C = \dfrac{10}{9} \\ \alpha^2 = \dfrac{12}{5} \end{cases}$$

由数值积分公式形式的对称性，不妨设 $\alpha > 0$，即 $\alpha = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}$。代入 $k = 5$ 及 $k = 6$ 时的方程

$$I(f) = \int_{-2}^{2} x^5 \,\mathrm{d}x = 0 = 0 = \alpha^6(-A + C) = S\left(f(x)\right)$$
$$I(f) = \int_{-2}^{2} x^6 \,\mathrm{d}x = \frac{256}{7} \neq \frac{1728}{125} = A(-\alpha)^6 + C\alpha^6 = S\left(f(x)\right)$$

因此 $I(f) = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x) \,\mathrm{d}x$ 的数值积分公式

$$S\left(f(x)\right) = \frac{10}{9} f\left(-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{16}{9} f(0) + \frac{10}{9} f\left(\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$$

具有最高的 5 阶代数精度。

(2) **设 $f(x)$ 足够光滑（可微），求该数值积分公式的误差**

对于给定的被积函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的点列 $\left\{-\dfrac{2\sqrt{15}}{5}, 0, \dfrac{2\sqrt{15}}{5}\right\}$，作 Lagrange 插值多项式 $L_2(x)$，由数值积分公式有 5 阶代数精度，其误差就是对插值误差函数的积分

$$E_2(f) = \int_{-2}^{2} R_2(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \int_{-2}^{2} f'''(\xi) \left(x + \frac{2\sqrt{15}}{5}\right) x \left(x - \frac{2\sqrt{15}}{5}\right) \mathrm{d}x$$

Question 3 continued on next page. . .

注意到这里 $\xi = \xi(x) \in [-2, 2]$ 是 x 的函数，由积分第一中值定理

$$
\begin{aligned}
E_2(f) &= \frac{1}{6}\left(\int_{-2}^{-\frac{2\sqrt{15}}{5}} + \int_{-\frac{2\sqrt{15}}{5}}^{0} + \int_{0}^{\frac{2\sqrt{15}}{5}} + \int_{\frac{2\sqrt{15}}{5}}^{2}\right)\left[f'''(\xi)\left(x+\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)x\left(x-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{f'''(\eta_1)}{6}\int_{-2}^{-\frac{2\sqrt{15}}{5}}\left[\left(x+\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)x\left(x-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)\mathrm{d}x\right] \\
&\qquad + \frac{\eta_2 f'''(\eta_2)}{6}\int_{-\frac{2\sqrt{15}}{5}}^{\frac{2\sqrt{15}}{5}}\left[\left(x+\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)\left(x-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)\mathrm{d}x\right] \\
&\qquad + \frac{f'''(\eta_3)}{6}\int_{\frac{2\sqrt{15}}{5}}^{2}\left[\left(x+\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)x\left(x-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{f'''(\eta_1)}{6}\times\left(-\frac{16}{25}\right) + \frac{\eta_2 f'''(\eta_2)}{6}\times\left(-\frac{32\sqrt{15}}{25}\right) + \frac{f'''(\eta_3)}{6}\times\frac{16}{25} \\
&= \frac{8}{75}\left(-f'''(\eta_1) - 2\sqrt{15}\eta_2 f'''(\eta_2) + f'''(\eta_3)\right), \quad \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in [-2, 2]
\end{aligned}
$$