计算方法 B

Programming Assignment #2

2020.4.6

PB17000297 罗晏宸

Lagrange 插值

1 问题描述

对函数 $f(x)=\dfrac{1}{2+2x+x^2}$，$x\in[-5,5]$，构造其 N 次 Lagrange 插值函数，取

$$\max_{-5\leqslant x\leqslant 5}\|f(x)-p(x)\|\approx\max_i|f(y_i)-p(y_i)|,\ y_i=\frac{i}{50}-5,\ i=0,\cdots,500$$

为近似误差。其中，插值结点（设有 $N+1$ 个）取为：

(1) $x_i=-5+\dfrac{10}{N}i,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ N$

(2) $x_i=-5\cos\left(\dfrac{2i+1}{2N+2}\pi\right),\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ N$

对 $N=4,\ 8,\ 16$ 比较以上两组结点的插值结果。

2 计算结果

由 C++ 计算得到结果按格式输出如图1所示，

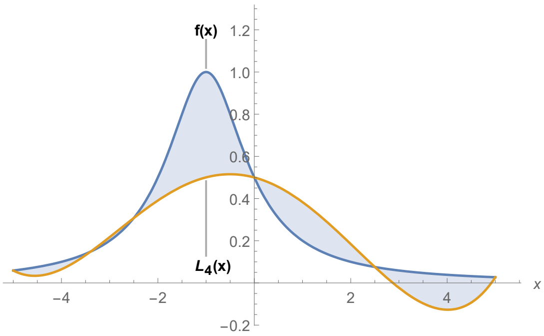
```
第1组结点，误差为:
n =  4 , 5.003328739308E-001
n =  8 , 9.330226091782E-001
n = 16 , 4.036628088374E+000
第2组结点，误差为:
n =  4 , 5.184755856153E-001
n =  8 , 3.023029262570E-001
n = 16 , 3.683369183311E-002
```

图 1: C++ 程序的运行结果

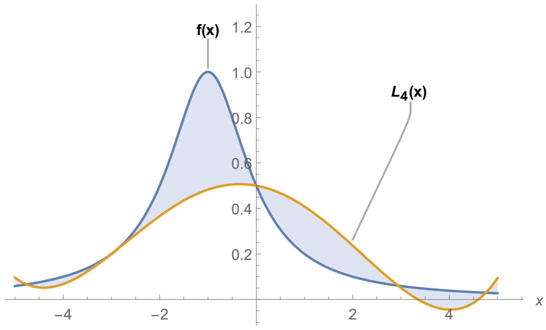
其中数据可列如表1。使用 Mathematica 统计数据并绘图，列如图2。

近似误差　插值结点 结点数	均匀等距选取	Chebyshev 多项式零点
$N = 4$	5.003328739308E−001	5.184755856153E−001
$N = 8$	9.330226091782E−001	3.023029262570E−001
$N = 16$	4.036628088374E+000	3.683369183311E−002

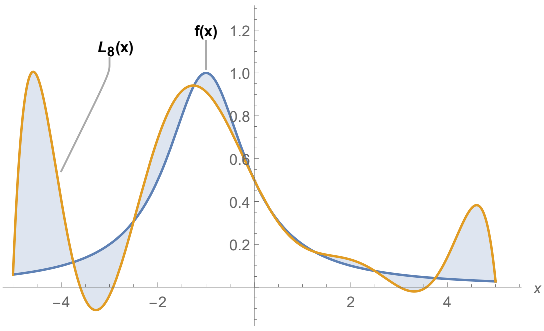
表 1: $N = 4$, 8, 16 时两组插值结点的近似误差



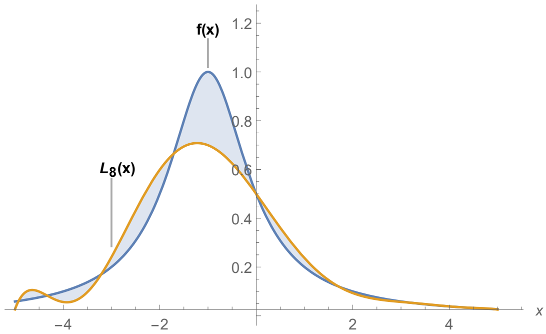
(a) $N = 4$ 时均匀插值结点构造的插值函数图像



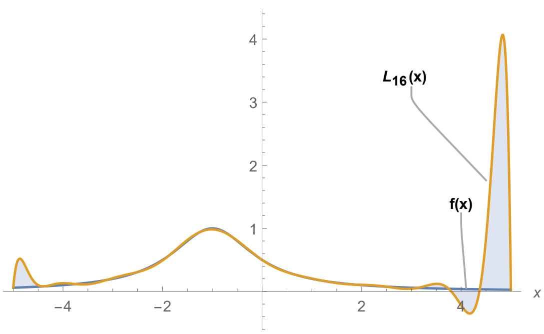
(b) $N = 4$ 时 Chebyshev 插值结点构造的插值函数图像



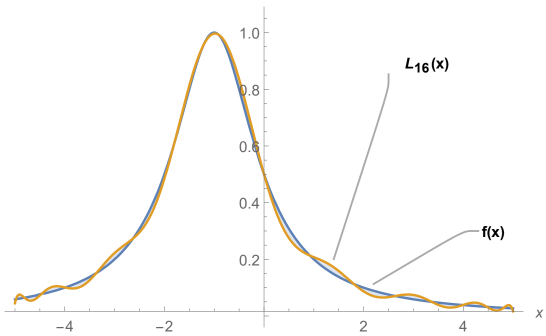
(c) $N = 8$ 时均匀插值结点构造的插值函数图像



(d) $N = 8$ 时 Chebyshev 插值结点构造的插值函数图像



(e) $N = 16$ 时均匀插值结点构造的插值函数图像



(f) $N = 16$ 时 Chebyshev 插值结点构造的插值函数图像

图 2: $N = 4$, 8, 16 时两组插值函数与 $f(x)$ 的图像

3 结果分析

从近似误差的结果来看，随着结点数（插值多项式次数）增加，均匀选取结点构造的插值多项式函数反而出现了误差增加的现象，同时使用相同数量的 Chebyshev 多项式零点构造的插值多项式误差相比均匀选取较小，并且误差随结点数增加而减少。

从 N 取不同值时两组插值结点构造的函数图像来看，整体上，在区间 $[-4,4]$ 上，插值结点越多，两组插值函数的拟合效果都越好。对于均匀选取的插值结点构造的插值函数，当 $N=16$ 时，区间 $[-4,4]$ 上函数图像偏差很小，可以较好地逼近 $f(x)$，但在边界 $x=-5$ 或 $x=5$ 附近，插值函数和 $f(x)$ 的图像偏差很大，插值多项式函数出现了剧烈的振荡。对于使用 Chebyshev 多项式零点构造的插值函数，在包括边界的整个区间上，图像偏差都很小。

以上均匀选取插值结点构造的多项式函数产生的现象说明了高次多项式的插值效果不一定优于低次多项式，同时等距插值不能保证较好的插值效果，是典型的 Runge 现象。

Lagrange 插值多项式的截断误差由下式给出：

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),\quad \xi\in[a,b]$$

其中 $[a,b]$ 在这里是 $[-5,5]$，使用 Chebyshev 多项式零点构造插值函数，即当

$$x_i=-5\cos\left(\frac{2i+1}{2N+2}\pi\right),\, i=0,\,1,\,\cdots,\,N$$

时有：

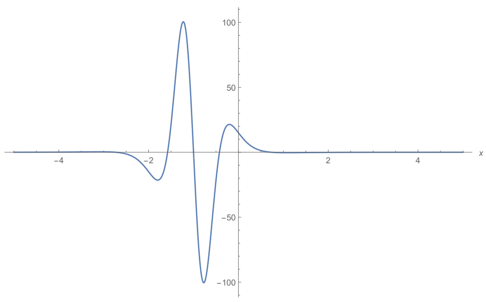
$$\begin{aligned}
\max_{-5\leqslant x\leqslant 5}\|f(x)-p(x)\| &= \max_{-5\leqslant x\leqslant 5}\left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_N)\right| \\
&= \left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\right|\max_{-5\leqslant x\leqslant 5}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_N)| \\
&\leqslant \left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\right|\frac{5^{N+1}}{2^N} \\
&= \frac{5^{N+1}}{2^N(N+1)!}\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|,\qquad \xi\in[-5,5] \\
&\leqslant \frac{5^{N+1}}{2^N(N+1)!}\max_{\xi\in[-5,5]}\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|
\end{aligned}$$

因此能够限制插值函数误差的上界。

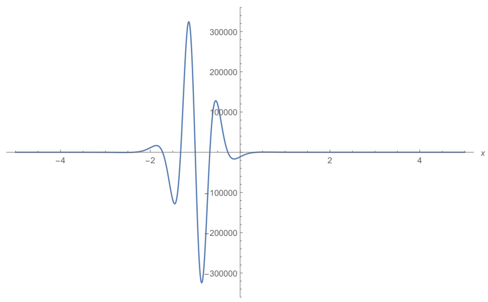
由 Mathematica 计算得到当 $N=4,\ 8,\ 16$ 时，误差的数值上界可列为表2。可以看到，此前使用 Chebyshev 多项式零点构造插值函数产生的误差明显小于表2第三列给出的上界，事实上这个上界很大，同时注意到第二列指出的系数是很小的，

插值结点数	$\dfrac{5^{N+1}}{2^N(N+1)!}$	$\dfrac{5^{N+1}}{2^N(N+1)!}\max\limits_{\xi\in[-5,5]}\left\lvert f^{(N+1)}(\xi)\right\rvert$
$N=4$	1.627604166667E+000	1.635074592041E+002
$N=8$	2.102456605834E−002	6.817348655088E+003
$N=16$	3.272967010673E−008	1.090883874366E+007

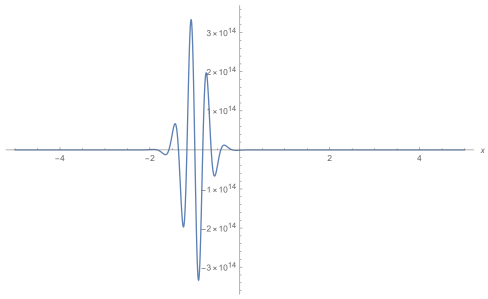
表 2: $N=4$, 8, 16 时使用 Chebyshev 多项式零点构造插值函数的误差上界



(a) $f^{(5)}(x)$ 的函数图像



(b) $f^{(9)}(x)$ 的函数图像



(c) $f^{(17)}(x)$ 的函数图像

图 3: $f(x)$ 的各阶导函数图像

结合图3可知，以此法估计的上界较大以至于失去参考价值，主要是因为 $f(x)$ 的各阶导函数在区间 $[-2,0]$ 上有较大的振荡，其在 $[-5,-2)\cap(0,5]$ 上的函数值是较小的。

4 算法分析

在本实验的 C++ 程序实现中，采用 Lagrange 基函数构造插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\prod_{0\leqslant j\leqslant n,j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}f(x_i)$$

随着插值多项式次数的增加，其中基函数 $l_i(x)=\prod\limits_{0\leqslant j\leqslant n,j\neq i}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$ 在程序中的浮点数连乘计算会产生舍入误差的放大，这是高次插值多项式的另一个缺陷。

5 实验结论

本次实验是体现 Runge 现象的另一个例子，展示了插值多项式在插值区间内发生剧烈振荡的现象，指出了高次插值多项式的缺陷：插值效果并不一定随多项式次数增加而优化，等距的选取插值结点也往往不能保证插值效果。

使用 Chebyshev 多项式零点构造插值函数能够有效遏制 Runge 现象，避免插值函数的剧烈振荡，其理论基础是限制了插值多项式截断误差的上界，使其取得最小值。