# 计算方法 B

**Homework #5**

2020.4.19

PB17000297 罗晏宸

## Question 1

**给定 $n > 1$ 给出用牛顿法计算 $\sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$ 时的迭代公式，并用此公式来计算 $\sqrt[5]{9}$，取初值 $x_0 = 2$, 迭代 3 次，求 $x_3$。**

计算 $\sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$ 的非线性方程可以写成

$$f(x) = x^n - a = 0$$

迭代公式如下

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}}$$

令 $n = 5$, $a = 9$，有

$$\begin{aligned}
x_1 = x_0 - \frac{x_0^5 - 9}{5 \times x_0^4} &= & 2 - \frac{2^5 - 9}{5 \times 2^4} && \approx 1.7125 \\
x_2 = x_1 - \frac{x_1^5 - 9}{5 \times x_1^4} &= & 1.7125 - \frac{1.7125^5 - 9}{5 \times 1.7125^4} && \approx 1.5793 \\
x_3 = x_2 - \frac{x_2^5 - 9}{5 \times x_2^4} &= & 1.5793 - \frac{1.5793^5 - 9}{5 \times 1.5793^4} && \approx 1.5528
\end{aligned}$$

## Question 2

**写出对方程 $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ 求根时的 Newton 迭代公式 $x_n = \varphi(x_{n-1})$。取初值 $x_0 = 0$，判断极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 是否存在，请给出你的理由或证明。**

迭代公式如下

$$\begin{aligned}
x_n &= \varphi(x_{n-1}) \\
&= x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 4x_{n-1}^2 + 5x_{n-1} - 2}{3x_{n-1}^2 - 8x_{n-1} + 5}
\end{aligned}$$

由代数方法得到方程 $f(x) = 0$ 有 2 重根 $x = 1$ 和单根 $x = 2$，$f(x) < 0$ 在 $x \in [0, 1)$ 上恒成立。并且

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = (x - 1)(3x - 5) > 0$$

在 $x \in [0, 1)$ 上恒成立。同时在 $x \in [0, 1]$ 上对 $\varphi(x)$ 求导得到

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)(6x - 8)}{(3x^2 - 8x + 5)^2} \\
&= \frac{6x^4 - 32x^3 + 62x^2 - 52x + 16}{9x^4 - 48x^3 + 94x^2 - 80x + 25}
\end{aligned}$$

Question 2 continued on next page. . .

记 $P(x) = 6x^4 - 32x^3 + 62x^2 - 52x + 16$，$Q(x) = 9x^4 - 48x^3 + 94x^2 - 80x + 25$，易知 $P(x) \geqslant 0$ 恒成立。并令

$$g(x) = Q(x) - P(x) = 3x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 28x + 9$$

由 $g''(x) = (6x-8)^2 \geqslant 0$ 可知，$g'(x)$ 在 $x \in [0,1]$ 上单调递增，当 $x \in [0,1]$ 时 $g'(x) \leqslant g'(1) = 0$，因此 $g(x)$ 在 $x \in [0,1]$ 上单调递减，当 $x \in [0,1]$ 时 $g(x) \geqslant g'(1) = 0$，即有

$$Q(x) \geqslant P(x) \geqslant 0$$

因此 $|\varphi'(x)| = \dfrac{P(x)}{Q(x)} < 1$ 在 $x \in [0,1)$ 上恒成立。代入初始值有

$$\left|\varphi'(x_0)\right| = \frac{16}{25} < 1$$

同时可知 $\varphi(x)$ 在 $x \in [0,1)$ 上单调递增，有

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &\geqslant \varphi(0) = 0 \\
\varphi(x) &\leqslant \varphi(1-0) \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{-2x^2 + 2x + 2}{5 - 3x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

因此迭代是收敛的，极限 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 存在且为 1。