

计算方法 B

Homework #5

2020.4.19

PB17000297 罗晏宸

## Question 1

给定  $n > 1$  给出用牛顿法计算  $\sqrt[n]{a}$  ( $a > 0$ ) 时的迭代公式, 并用此公式来计算  $\sqrt[5]{9}$ , 取初值  $x_0 = 2$ , 迭代 3 次, 求  $x_3$ 。

计算  $\sqrt[n]{a}$  ( $a > 0$ ) 的非线性方程可以写成

$$f(x) = x^n - a = 0$$

迭代公式如下

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}}$$

令  $n = 5$ ,  $a = 9$ , 有

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{x_0^5 - 9}{5 \times x_0^4} = 2 - \frac{2^5 - 9}{5 \times 2^4} \approx 1.7125 \\ x_2 &= x_1 - \frac{x_1^5 - 9}{5 \times x_1^4} = 1.7125 - \frac{1.7125^5 - 9}{5 \times 1.7125^4} \approx 1.5793 \\ x_3 &= x_2 - \frac{x_2^5 - 9}{5 \times x_2^4} = 1.5793 - \frac{1.5793^5 - 9}{5 \times 1.5793^4} \approx 1.5528 \end{aligned}$$

## Question 2

写出对方程  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$  求根时的 Newton 迭代公式  $x_n = \varphi(x_{n-1})$ 。取初值  $x_0 = 0$ , 判断极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  是否存在, 请给出你的理由或证明。

迭代公式如下

$$\begin{aligned} x_n &= \varphi(x_{n-1}) \\ &= x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 4x_{n-1}^2 + 5x_{n-1} - 2}{3x_{n-1}^2 - 8x_{n-1} + 5} \end{aligned}$$

对  $\varphi(x)$  求导得到

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)(6x - 8)}{(3x^2 - 8x + 5)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 20x + 16}{9x^2 - 30x + 25} \end{aligned}$$

代入初始值有

$$|\varphi'(x_0)| = \frac{16}{25} < 1$$

因此迭代是收敛的, 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在。