计算方法 B

Homework #12

2020.6.15

PB17000297 罗晏宸

Question 1

用幂法估算下面矩阵的按模最大的特征值和相应的特征向量（取初始向量 $(1, 1)^\top$，迭代 5 次即可）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，则有

$$X^{(1)} = A \cdot X^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)} = A \cdot X^{(1)} = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)} = A \cdot X^{(2)} = \begin{pmatrix} 51 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$X^{(4)} = A \cdot X^{(3)} = \begin{pmatrix} 231 \\ 306 \end{pmatrix}$$

$$X^{(5)} = A \cdot X^{(4)} = \begin{pmatrix} 843 \\ 1386 \end{pmatrix}$$

在下表中列出迭代序列 $X^{(0)}, X^{(1)}, \cdots, X^{(5)}$ 以及 $x_1^{(k)} \big/ x_1^{(k-1)}$ 和 $x_2^{(k)} \big/ x_2^{(k-1)}$ 的值

k	$X^{(k)}$		$x_1^{(k)} \big/ x_1^{(k-1)}$	$x_2^{(k)} \big/ x_2^{(k-1)}$
0	1	1		
1	3	6	3.0000	6.0000
2	15	18	5.0000	3.0000
3	51	90	3.4000	5.0000
4	231	306	4.5294	3.4000
5	843	1386	3.6494	4.5294

则得到矩阵 A 粗略估计的按模最大特征值 $\lambda = 3.6494$，相应的特征向量近似地为 $X^{(5)} = (843, 1386)^\top$.

Question 2

设 n 阶实方阵 A 有相异的特征根 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$. 对给定的实数 $\alpha \neq \lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，利用幂法或反幂法，设计一个能计算离 α 距离最近的矩阵 A 的特征根的迭代格式（注：不容许对矩阵求逆）

采取带原点位移的反幂法规范迭代计算公式

$$\begin{cases} Y^{(k)} = X^{(k)} \Big/ \|X^{(k)}\|_\infty \\ (A - \alpha \mathbf{I}) X^{(k+1)} = Y^{(k)} \end{cases} \qquad k = 0,\ 1,\ \cdots$$

计算得到矩阵 $(A - \alpha \mathbf{I})$ 按模最小的特征值的倒数 μ ，则所求离 α 距离最近的矩阵 A 的特征值为

$$\lambda_i = \alpha + \frac{1}{\mu}$$

Question 3

考虑用 Jacobi 方法计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值。求对 A 作一次 Givens 相似变换时的 Givens （旋转）变换矩阵 Q （要求相应的计算效率最高）

记 $A^{(0)} = A$ ，计算效率最高选取 $p = 1,\ q = 3$ ，有 $a_{pq}^{(0)} = a_{13}^{(0)} = 2$ 是模最大的非对角元素，于是有

$$s = \frac{a_{33}^{(0)} - a_{11}^{(0)}}{2a_{13}^{(0)}} = \frac{3 - 7}{2 \times 2} = -1$$

t 取为 $t^2 + 2st - 1 = 0$ 的按模较小根，故 $t = 1 - \sqrt{2} \approx -0.414$. 进而得到：

$$\cos\theta = \left(1 + t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 0.92388$$
$$\sin\theta = t\cos\theta = -0.382683$$

此即为 Givens 变换矩阵所需元素.

$$Q_1 = Q(1, 3, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.92388 & 0 & -0.382683 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.382683 & 0 & 0.92388 \end{pmatrix}$$

Question 3 continued on next page. . .

故有

$$A^{(1)} = Q_1^\top A^{(0)} Q_1 = \begin{pmatrix} 7.82843 & 0.92388 & -4.44089 \times 10^{-16} \\ 0.92388 & 4.00000 & -0.382683 \\ -4.44089 \times 10^{-16} & -0.382683 & 2.17157 \end{pmatrix}$$