

计算方法 B

Homework #4

2020.4.17

PB17000297 罗晏宸

## Question 1

给出下列数据，用最小二乘法求形如  $y = ae^{bx}$  的经验公式。

$x_i$	-0.60	-0.50	0.25	0.75
$y_i$	1.00	1.25	2.50	4.25

$Q(a, b) = \sum_{i=1}^4 (ae^{bx_i} - y_i)^2$  的最值点不容易求得。为此，我们首先对数据作预处理，令  $\hat{y}_i = \ln y_i$ ，然后对  $(x_i, \hat{y}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  作形如  $\ln \varphi(x) = \ln a + bx$  的线性拟合。即求  $c_0 = \ln a$ ,  $c_1 = b$  使得  $\hat{Q}(c_0, c_1) = \sum_{i=1}^4 (c_0 + c_1 x_i - \hat{y}_i)^2$  达到最小值。

$x_i$	-0.60	-0.50	0.25	0.75
$y_i$	1.00	1.25	2.50	4.25
$\hat{y}_i$	0.000	0.223	0.916	1.447

相应的法方程为

$$\begin{pmatrix} 4 & -0.10 \\ -0.10 & 1.235 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.586 \\ 1.203 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.672 \\ 1.028 \end{pmatrix}$$

$$a = e^{c_0} = 1.959,$$

$$b = c_1 = 1.028$$

得到形如  $y = ae^{bx}$  的经验公式

$$y = \varphi(x) = 1.959 \times e^{1.028x}$$

误差平方和

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^4 (0.672 + 1.028x_i - \hat{y}_i)^2 \approx 0.007467$$

$$Q = \sum_{i=1}^4 (1.959 \times e^{1.028x_i} - y_i)^2 \approx 0.010715$$

## Question 2

在最小二乘法原理下求下列矛盾方程组：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ x_1 + 6x_2 = 14 \\ 3x_1 + x_2 = 7.5 \\ x_1 + x_2 = 4.5 \end{cases}$$

将矛盾方程组写成矩阵相乘的形式

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 6 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 7.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

记

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 6 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 7.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

由定理可知，矛盾方程组  $AX = Y$  的最小二乘解  $X$  使得  $\|AX - Y\|_2$  取最小值，同时满足

$$A^T AX = A^T Y$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 6 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 7.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45.0 \\ 88.0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.695 \\ 1.582 \end{pmatrix}$$

因此题设矛盾方程组有最小二乘解

$$\begin{cases} x_1 = 2.695 \\ x_2 = 1.582 \end{cases}$$

误差平方和

$$Q(X) = \|AX - Y\|_2^2 \approx 28.0045$$

## Question 3

用最小二乘法构造二次多项式  $y = p(x)$  去拟合下列数据（这里  $x$  代表年份， $y$  为人数），并计算  $y(2015)$ ，结果精确到小数点后一位。

$x$	2010	2011	2012	2013	2014
$y$	134091	134735	135404	136072	136782

设  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ，题设数据二次多项式拟合的法方程为

$$\begin{pmatrix} 5 & 10060 & 20240730 \\ 10060 & 20240730 & 40724389000 \\ 20240730 & 40724389000 & 81937592112354 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 677084 \\ 1362299727 \\ 2740961923651 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36662597 \\ -\frac{2588687}{70} \\ \frac{131}{14} \end{pmatrix}$$

$$p(x) \approx 36662597.000 - 36981.243x + 9.357x^2$$

$$p(2015) = 36662597.000 - 36981.243 \times 2015 + 9.357 \times 2015^2 \approx 137498.0$$

误差平方和

$$Q = \sum_{i=1}^5 (36662597.000 - 36981.243x_i + 9.357x_i^2 - y_i)^2 \approx 96.9143$$