计算方法 B

Homework #7

2020.5.6

PB17000297 罗晏宸

Question 1

设有线性代数方程组 $Ax=b$，其中，

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) 求 Jacobi 迭代的迭代矩阵及相应的迭代格式；

令

$$D=\mathrm{diag}\{a_{11},a_{22},a_{33},a_{44}\}=\mathrm{diag}\{2,2,2,2\}$$

D 可逆，由 $Ax=(D+A-D)x=b$ 得到等价方程组 $Dx=(D-A)x+b$，迭代格式的矩阵形式为

$$x^{(k+1)}=Rx^{(k)}+g$$

其中 R 是迭代矩阵

$$R=\mathbf{I}-D^{-1}A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad g=D^{-1}b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0.5x_2^{(k)}+1 \\ x_2^{(k+1)}=0.5x_1^{(k)}+0.5x_3^{(k)}+1 \\ x_3^{(k+1)}=0.5x_2^{(k)}+0.5x_4^{(k)}+1 \\ x_4^{(k+1)}=0.5x_3^{(k)}+1 \end{cases}$$

(2) 讨论此时 Jacobi 迭代（方法）的收敛性。

题设系数矩阵 A 满足

$$|a_{11}|=2>\sum_{j\neq 1}|a_{1j}|=1$$

$$|a_{22}| = 2 = \sum_{j\neq 2} |a_{2j}| = 2$$
$$|a_{33}| = 2 = \sum_{j\neq 3} |a_{3j}| = 2$$
$$|a_{44}| = 2 > \sum_{j\neq 4} |a_{4j}| = 1$$

可知 A 是行对角优但不是严格行对角优的。同时注意到 $A^{\mathbf{T}} = A$，即 A 是对称矩阵，可知 A 是列对角优但不是严格列对角优的，因此 A 不是严格对角优的，无法直接判断 Jacobi 迭代的收敛性。

下面计算迭代矩阵 R 的谱半径 $\rho(R)$，设 λ 为 R 的特征值，则有

$$\begin{aligned}
& \det(R - \lambda\mathbf{I}) = 0 \\
\Rightarrow\quad & \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
\Rightarrow\quad & \lambda^4 - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16} = 0
\end{aligned}$$

解得

$$\lambda_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \lambda_3 = -\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \lambda_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

进而有 R 的谱半径

$$\begin{aligned}
\rho(R) &= \max_i |\lambda_i| \\
&= \max\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1
\end{aligned}$$

因此迭代是收敛的。

Question 2 continued on next page. . .

Question 2

设有线性代数方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代的分量形式；

将第 i 行的变量 x_i 留在方程左边，并除以系数 a_{ii}，系数矩阵的下三角元素冠以 $k+1$ 得到迭代格式的分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{3}{5}x_2^{(k)} - \frac{2}{5}x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = \frac{3}{5}x_1^{(k+1)} - \frac{2}{5}x_2^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{2}{7}x_1^{(k+1)} - \frac{2}{7}x_2^{(k+1)} + 1 \end{cases}$$

(2) 求 Gauss-Seidel 迭代的分裂矩阵 (splitting matrix) 及迭代矩阵 (iteration matrix)；

设原方程组的矩阵形式 $Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

分解系数矩阵

$$\begin{aligned} A &= D + L + U \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

写成等价矩阵表达式

$$(D + L)x = -Ux + b$$

记分裂矩阵

$$Q = D + L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Question 2 continued on next page. . .

构造迭代形式
$$Qx^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b$$
记 Gauss-Seidel 迭代的矩阵形式为
$$x^{(k+1)} = Sx^{(k)} + f$$
其中 S 是迭代矩阵
$$S = -(D+L)^{-1}U = \mathbf{I} - Q^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{9}{25} & -\frac{16}{25} \\ 0 & -\frac{48}{175} & \frac{52}{175} \end{pmatrix}, \quad f = Q^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{9}{35} \end{pmatrix}$$

(3) **讨论** Gauss-Seidel **迭代的收敛性（请给出理由或证明）。**

观察原方程的系数矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$
其满足
$$|a_{11}| = 5 = \sum_{j\neq 1} |a_{1j}| = 5$$
$$|a_{22}| = 5 = \sum_{j\neq 2} |a_{2j}| = 5$$
$$|a_{33}| = 7 > \sum_{j\neq 3} |a_{3j}| = 4$$
可知 A 是行对角优但不是严格行对角优的。同时注意到 $A^{\mathbf{T}} = A$，即 A 是对称矩阵，可知 A 是列对角优但不是严格列对角优的，因此 A 不是严格对角优的，无法说明迭代的收敛性。

下面证明 A 是正定的，A 的各阶顺序主子式为
$$[A]_{\{1\},\{1\}} = \begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix} = 5$$
$$[A]_{\{1,2\},\{1,2\}} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \times 5 - (-3) \times (-3) = 16$$
$$[A]_{\{1,2,3\},\{1,2,3\}} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Question 2 continued on next page…

$$
\begin{aligned}
&= 5 \times \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - (-3) \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 5 \times 31 - (-3) \times (-25) + 2 \times (-16) \\
&= 48
\end{aligned}
$$

A 的各阶顺序主子式均为正，因此 A 是正定的，所以 Gauss-Seidel 迭代收敛。