计算方法 B

Programming Assignment #5

2020.5.19

PB17000297 罗晏宸

复化积分

1 问题描述

分别编写用复化 Simpson 积分公式和复化梯形积分公式计算积分的通用程序。

用如上程序计算积分 $I(f)=\int_0^8 \sin(x)\,\mathrm{d}x$。取等距节点，记节点 $\{x_i,\ i=0,\cdots,N\}$，其中 N 为 $\left\{2^k,\ k=0,1,\cdots,10\right\}$，并计算误差（用科学计数形式），同时给出误差阶（用浮点形式，比如 1.8789）。比较并分析两种方法的优劣。

误差阶　记步长为 h 时的误差为 $\widetilde{e}$，步长为 h/n 时的误差为 $\widetilde{e}_n$（这里 $n=2$），则相应的误差阶为：

$$d=-\frac{\ln\left(\frac{\widetilde{e}_n}{\widetilde{e}}\right)}{\ln(n)}$$

2 计算结果

由 C++ 计算得到结果按格式输出并列表如下，

	误差	误差阶
$k=0$	$e_0=2.811932952685\text{E}{+}000$	
$k=1$	$e_1=2.193993521794\text{E}{+}000$	$d_1=0.358003$
$k=2$	$e_2=4.099829205476\text{E}{-}001$	$d_2=2.419924$
$k=3$	$e_3=9.708816025468\text{E}{-}002$	$d_3=2.078197$
$k=4$	$e_4=2.396461540682\text{E}{-}002$	$d_4=2.018390$
$k=5$	$e_5=5.972370007437\text{E}{-}003$	$d_5=2.004530$
$k=6$	$e_6=1.491925067877\text{E}{-}003$	$d_6=2.001128$
$k=7$	$e_7=3.729084041566\text{E}{-}004$	$d_7=2.000282$
$k=8$	$e_8=9.322254870159\text{E}{-}005$	$d_8=2.000070$
$k=9$	$e_9=2.330535267947\text{E}{-}005$	$d_9=2.000018$
$k=10$	$e_{10}=5.826320388591\text{E}{-}006$	$d_{10}=2.000004$

图 1: 复化梯形积分误差及误差阶

	误差	误差阶
$k=\ \ 0$	$e_0\ \ = 1.492788623854\text{E}{+}000$	
$k=\ \ 1$	$e_1\ \ = 3.862635679953\text{E}{+}000$	$d_1\ \ = -1.371576$
$k=\ \ 2$	$e_2\ \ = 1.846872798678\text{E}{-}001$	$d_2\ \ = \ \ \ 4.386429$
$k=\ \ 3$	$e_3\ \ = 7.210093176285\text{E}{-}003$	$d_3\ \ = \ \ \ 4.678923$
$k=\ \ 4$	$e_4\ \ = 4.098995424706\text{E}{-}004$	$d_4\ \ = \ \ \ 4.136676$
$k=\ \ 5$	$e_5\ \ = 2.504512568935\text{E}{-}005$	$d_5\ \ = \ \ \ 4.032669$
$k=\ \ 6$	$e_6\ \ = 1.556578642870\text{E}{-}006$	$d_6\ \ = \ \ \ 4.008079$
$k=\ \ 7$	$e_7\ \ = 9.715041615621\text{E}{-}008$	$d_7\ \ = \ \ \ 4.002014$
$k=\ \ 8$	$e_8\ \ = 6.069783342610\text{E}{-}009$	$d_8\ \ = \ \ \ 4.000503$
$k=\ \ 9$	$e_9\ \ = 3.793281244668\text{E}{-}010$	$d_9\ \ = \ \ \ 4.000127$
$k=10$	$e_{10} = 2.370814655706\text{E}{-}011$	$d_{10} = \ \ \ 3.999992$

图 2: 复化 Simpson 积分误差及误差阶

3 结果分析

从误差结果来看，随着积分区间节点数的增加，两种复化积分的误差都逐渐减小，但复化 Simpson 积分的误差随着节点数的增加明显小于复化梯形积分的误差；从误差阶结果来看，两种复化积分的误差阶分别趋近于常数 2 和 4，由定义

$$d = -\frac{\ln\left(\dfrac{\widetilde{e}_n}{\widetilde{e}}\right)}{\ln(n)} = \log_n\left(\frac{\widetilde{e}}{\widetilde{e}_n}\right)$$

误差阶实际上指出了数值积分的误差下降速度对区间数 n 的对数，计算结果表明复化梯形积分的误差下降速度大致为 n^{-2}，而复化 Simpson 积分的误差下降速度大致为 n^{-4}。

4 算法分析

对于复化梯形数值积分，截断误差由

$$E_n(f) = I(f) - T_n(f) = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

给出，因为 $\sin x \in C^2[0,8]$，所以存在 $\xi \in [0,8]$，有

$$
\begin{aligned}
E_n(\sin) &= -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1}\sin''(\xi_i) \\
&= \frac{h^3}{12} n \sin(\xi) \\
&= \frac{h^2}{12}(8-0)\sin(\xi) \\
&= \frac{2h^2}{3}\sin(\xi) \\
&= \frac{128}{3n^2}\sin(\xi)
\end{aligned}
$$

由此可见复化梯形积分误差的截断误差按 h^2（或 $\dfrac{1}{n^2}$）的下降速度下降。

对于复化 Simpson 数值积分，设 $n=2m$，所以存在 $\zeta \in [0,8]$，有

$$
\begin{aligned}
E_n(f) &= I(f) - S_n(f) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,\mathrm{d}x - S_n(f) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\left\{\frac{2h}{6}\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right] - \frac{(2h)^5}{2880}f^{(4)}(\zeta_i)\right\} - S_n(f) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\left\{-\frac{(2h)^5}{2880}f^{(4)}(\zeta_i)\right\} \\
&= -\frac{(2h)^5}{2880}\sum_{i=0}^{m-1}f^{(4)}(\zeta_i) \\
&= -\frac{(2h)^5}{2880} m \sin(\zeta) \\
&= -\frac{2h^4}{45}\sin(\zeta) \\
&= -\frac{8192}{45n^4}\sin(\zeta)
\end{aligned}
$$

由此可见复化 Simpson 积分误差的截断误差按 h^4（或 $\dfrac{1}{n^4}$）的下降速度下降。

结合计算结果，两组数据的误差阶都与理论值符合地较好。

5 实验结论

实验通过对同一区间上正弦函数的数值积分计算，比较了复化梯形积分和复化 Simpson 积分两种方法的计算结果、数值误差及其误差阶。通常情况下，数值积分公式的代数精度越高，计算精度也越高，复化 Simpson 积分的误差较复化梯形积分小，近似效果较好。