计算方法 B

Homework #11

2020.6.1

PB17000297 罗晏宸

Question 1

试推导如下 Runge-Kutta 公式的局部截断误差和精度。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(3k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + 2h, y_n + 2hk_1) \end{cases}$$

将 k_1 与 k_2 代入 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(3k_1 + k_2)$，得到

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}\left[3f(x_n, y_n) + f(x_n + 2h, y_n + 2hf(x_n, y_n))\right] \\ &= y_n + h\left[\frac{3}{4}f(x_n, y_n) + \frac{1}{4}f(x_n + 2h, y_n + 2hf(x_n, y_n))\right] \end{aligned}$$

将此式在 x_n 处做 Taylor 展开，得到

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\left[\frac{3}{4}f(x_n, y_n) + \frac{1}{4}f(x_n + 2h, y_n + 2hf(x_n, y_n))\right] \\ &= y_n + h\left\{\frac{3}{4}f(x_n, y_n) + \frac{1}{4}\left[f(x_n, y_n)\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + 2hf'_x(x_n, y_n) + 2hf(x_n, y_n)f'_y(x_n, y_n) + O(h^2)\right]\right\} \end{aligned}$$

而依微分方程

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

$y(x_{n+1})$ 在 x_n 处的展开式为

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3) \\ &= y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}\left[f'_x(x_n, y_n) + f'_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)\right] + O(h^3) \end{aligned}$$

所以局部截断误差

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}\left[f'_x(x_n, y_n) + f'_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)\right] + O(h^3) \\ &\quad - h\left\{\frac{3}{4}f(x_n, y_n) + \frac{1}{4}\left[f(x_n, y_n)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + 2hf'_x(x_n, y_n) + 2hf(x_n, y_n)f'_y(x_n, y_n) + O(h^2)\right]\right\} \\ &= \left(1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)hf(x_n, y_n) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4} \times 2\right)h^2 f'_x(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Question 1 continued on next page. . .

$$
\begin{aligned}
&+ h^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4}\times 2\right) f(x_n, y_n) f'_y(x_n, y_n) + \left[O(h^3) - \frac{h}{4}O(h^2)\right] \\
&= O(h^3)
\end{aligned}
$$

所以题设公式是 2 阶的，即具有 2 阶精度。
事实上由题设公式可知，公式主体部分有如下的形式

$$c_1 f(x_n, y_n) + c_2 f(x_n + ah, y_n + bhf(x_n, y_n))$$

其中 $c_1 = \frac{3}{4}$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $a = 2$, $b = 2$，满足

$$
\begin{cases}
c_1 + c_2 = 1 \\
2c_2 a = 1 \\
2c_2 b = 1
\end{cases}
$$

因此题设公式是二阶 Runge-Kutta 公式

Question 2

讨论梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(y_{n+1}, y_{n+1})]$ 的绝对稳定性（$h > 0$）。

计算典型微分方程

$$
\begin{cases}
y'(x) = \lambda y \\
y(a) = y_0
\end{cases}
\qquad a \leqslant x \leqslant b, \quad \lambda\text{是复数}, \quad \operatorname{Re}\lambda < 0.
$$

的题设梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(\lambda y_n + \lambda y_{n+1})$$

若 y_n 有误差 ρ_n ，记 $y_n^* = y_n + \rho_n$，则

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}^* &= \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y_n^* + \frac{\lambda h}{2} y_{n+1}^* \\
\Rightarrow y_{n+1}^* &= \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} y_n^*
\end{aligned}
$$

y_{n+1} 有误差 $\rho_{n+1} = y_{n+1}^* - y_{n+1}$，误差满足关系式

$$\rho_{n+1} = \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\rho_n$$

或

$$\frac{|\rho_{n+1}|}{|\rho_n|} = \left|\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right|$$

Question 2 continued on next page. . .

由于 $\operatorname{Re}\lambda < 0$ 且 $h > 0$，有

$$
\begin{aligned}
\frac{|\rho_{n+1}|}{|\rho_n|} &= \left|\frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}\right| \\
&= \frac{|2+\lambda h|}{|2-\lambda h|} \\
&= \frac{(2+h\operatorname{Re}\lambda)^2+(h\operatorname{Im}\lambda)^2}{(2-h\operatorname{Re}\lambda)^2+(h\operatorname{Im}\lambda)^2} \\
&< 1
\end{aligned}
$$

恒成立，即对任意 h，恒有 $\dfrac{|\rho_{n+1}|}{|\rho_n|} = \left|\dfrac{2+\lambda h}{2-\lambda h}\right| < 1$，误差逐次衰减，此格式的绝对稳定区域是整个左半复平面，因此是无条件绝对稳定（A 稳定）的。