计算方法 B

Homework #9

2020.5.23

PB17000297 罗晏宸

Question 1

给定函数 $f(x)$ 的离散值表，分别用向前、向后及中心差商公式计算 $f'(0.02)$，$f'(0.04)$。

x	0.00	0.02	0.04	0.06
$f(x)$	6.0	4.0	2.0	8.0

由一阶向前差商公式

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

可得

$$\begin{aligned} f'(0.02) &\approx \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.04 - 0.02} \\ &= \frac{2.0 - 4.0}{0.02} \\ &= -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0.04) &\approx \frac{f(0.06) - f(0.04)}{0.06 - 0.04} \\ &= \frac{8.0 - 2.0}{0.02} \\ &= 300 \end{aligned}$$

由一阶向后差商公式

$$f'(x_{n+1}) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

可得

$$\begin{aligned} f'(0.02) &\approx \frac{f(0.02) - f(0.00)}{0.02 - 0.00} \\ &= \frac{4.0 - 6.0}{0.02} \\ &= -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0.04) &\approx \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.04 - 0.02} \\ &= \frac{2.0 - 4.0}{0.02} \\ &= -100 \end{aligned}$$

由一阶中心差商公式

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})}{x_{n+1} - x_{n-1}}$$

Question 1 continued on next page. . .

可得

$$
\begin{aligned}
f'(0.02) &\approx \frac{f(0.04) - f(0.00)}{0.04 - 0.00} \\
&= \frac{2.0 - 6.0}{0.04} \\
&= -100
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(0.04) &\approx \frac{f(0.06) - f(0.02)}{0.06 - 0.02} \\
&= \frac{8.0 - 4.0}{0.04} \\
&= 100
\end{aligned}
$$

Question 2

求积分 $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 2 点 Gauss 积分公式，这里 x^2 为权重函数。

利用 Gram-Schmidt 正交化

$$
\begin{cases}
p_0(x) = f_0(x) \\
p_1(x) = f_1(x) - \dfrac{(f_1(x),\, p_0(x))}{(p_0(x),\, p_0(x))} p_0(x) \\
p_2(x) = f_2(x) - \dfrac{(f_2(x),\, p_0(x))}{(p_0(x),\, p_0(x))} p_0(x) - \dfrac{(f_2(x),\, p_1(x))}{(p_1(x),\, p_1(x))} p_1(x)
\end{cases}
$$

可由 $\mathbb{P}_n$ 的一组基 $\{1,\, x,\, \cdots,\, x^n\}$ 依次求出正交多项式序列：

$$
\begin{cases}
p_0(x) = 1 \\
p_1(x) = x - \dfrac{\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot x \cdot 1\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot 1\,\mathrm{d}x} \cdot 1 = x - \dfrac{3}{4} \\
\begin{aligned}
p_2(x) &= x^2 - \dfrac{\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot x^2 \cdot 1\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot 1\,\mathrm{d}x} \cdot 1 - \dfrac{\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot x^2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)\,\mathrm{d}x} \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) \\
&= x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{5}
\end{aligned}
\end{cases}
$$

Question 2 continued on next page...

$p_2(x)$ 的两个零点为 $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{10}}{15}$, $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{10}}{15}$，积分系数为

$$\alpha_1 = \int_0^1 x^2 I_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \frac{x-x_2}{x_1-x_2}\,\mathrm{d}x = \frac{8-\sqrt{10}}{48}$$
$$\alpha_2 = \int_0^1 x^2 I_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,\mathrm{d}x = \frac{8+\sqrt{10}}{48}$$

因此两点 Gauss 公式为

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \approx & G_2(f) \\ =& \sum_{i=1}^{2} \alpha_i f(x_i) \\ =& \frac{8-\sqrt{10}}{48} f\left(\frac{10-\sqrt{10}}{15}\right) + \frac{8+\sqrt{10}}{48} f\left(\frac{10+\sqrt{10}}{15}\right)\end{aligned}$$

Question 3

设有常微分初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x), & (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

假设求解区间 $[0,1]$ **被** n **等分（**n **充分大），令** $h = \dfrac{1}{n}$, $x_k = \dfrac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$

(1) **分别写出用向前** Euler **公式，向后** Euler **公式，梯形格式以及改进的** Euler **公式求上述微分方程数值解时的差分格式（即分别写出此四种方法/公式下，**y_{k+1} **与** y_k **之间的递推关系式）**

向前 Euler 公式

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k - \frac{1}{n} y_k = \frac{n-1}{n} y_k$$

向后 Euler 公式

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}) = y_k - \frac{1}{n} y_{k+1} \\ \Rightarrow y_{k+1} &= \frac{n}{n+1} y_k \end{aligned}$$

梯形公式

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right) = y_k - \frac{1}{2n}(y_k + y_{k+1}) \\ \Rightarrow y_{k+1} &= \frac{2n-1}{2n+1} y_k \end{aligned}$$

Question 3 continued on next page...

改进的 Euler 公式

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\right) = y_k - \frac{1}{2n}\left(y_k + \frac{n+1}{n}y_k\right)$$
$$\Rightarrow y_{k+1} = \frac{2n^2-2n-1}{2n^2}y_k$$

(2) 设 $y_0 = y(0)$，分别求此四种公式（方法）下的近似 y_n 的表达式（注：这里的 y_n 即是 $y(x_n) \equiv y(1)$ 的近似值）

由 $y_0 = y(0) = 1$，由向前 Euler 公式下递推式可得

$$y_n = \frac{n-1}{n}y_{n-1} = \cdots = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n y_0 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

同理对于向后 Euler 公式

$$y_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

梯形公式

$$y_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$$

改进的 Euler 公式

$$y_n = \left(\frac{2n^2-2n-1}{2n^2}\right)^n$$

(3) 当 n 充分大（即区间长度 $h \to 0$）时，分别判断四种方法下的近似值 y_n 是否收敛到原问题的真解 $y(x)$ 在 $x = 1$ 处的值（i.e. $y(1)$）

可由

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -y(x) \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y \\
\Rightarrow \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= -\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int -\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \ln y &= -x + C' \\
\Rightarrow y &= e^{-x} + C
\end{aligned}$$

代入 $y(0)=1$ 可得 $C=0$，即原问题

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x), & (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的解为

$$y(x) = e^{-x}$$

其在 $x=1$ 处的值 $y(1)=e^{-1}$。当 n 充分大（即区间长度 $h \to 0$）时，有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e} \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right)^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e} \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-2n-1}{2n^2}\right)^n &= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

其中最后一个极限可由 $\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^n \leqslant \left(\frac{2n^2-2n-1}{2n^2}\right)^n \leqslant \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$，进而由夹逼定理得到。因此四种方法都收敛到真解在 $x=1$ 处的值