

计算方法 B

Homework #9

2020.5.23

PB17000297 罗晏宸

Question 1

给定函数 $f(x)$ 的离散值表，分别用向前、向后及中心差商公式计算 $f'(0.02)$, $f'(0.04)$ 。

x	0.00	0.02	0.04	0.06
$f(x)$	6.0	4.0	2.0	8.0

由一阶向前差商公式

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

可得

$$\begin{aligned} f'(0.02) &\approx \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.04 - 0.02} \\ &= \frac{2.0 - 4.0}{0.02} \\ &= -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0.04) &\approx \frac{f(0.06) - f(0.04)}{0.06 - 0.04} \\ &= \frac{8.0 - 2.0}{0.02} \\ &= 300 \end{aligned}$$

由一阶向后差商公式

$$f'(x_{n+1}) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

可得

$$\begin{aligned} f'(0.02) &\approx \frac{f(0.02) - f(0.00)}{0.02 - 0.00} \\ &= \frac{4.0 - 6.0}{0.02} \\ &= -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0.04) &\approx \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.04 - 0.02} \\ &= \frac{2.0 - 4.0}{0.02} \\ &= -100 \end{aligned}$$

由一阶中心差商公式

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}))}{x_{n+1} - x_{n-1}}$$

可得

$$\begin{aligned} f'(0.02) &\approx \frac{f(0.04) - f(0.00)}{0.04 - 0.00} \\ &= \frac{2.0 - 6.0}{0.04} \\ &= -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0.04) &\approx \frac{f(0.06) - f(0.02)}{0.06 - 0.02} \\ &= \frac{8.0 - 4.0}{0.04} \\ &= 100 \end{aligned}$$

Question 2

求积分 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$ 的 2 点 Gauss 积分公式, 这里 x^2 为权重函数。

利用 Gram-Schmidt 正交化

$$\begin{cases} p_0(x) = f_0(x) \\ p_1(x) = f_1(x) - \frac{(f_1(x), p_0(x))}{(p_0(x), p_0(x))} p_0(x) \\ p_2(x) = f_2(x) - \frac{(f_2(x), p_0(x))}{(p_0(x), p_0(x))} p_0(x) - \frac{(f_2(x), p_1(x))}{(p_1(x), p_1(x))} p_1(x) \end{cases}$$

可由 \mathbb{P}_n 的一组基 $\{1, x, \dots, x^n\}$ 依次求出正交多项式序列:

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = x - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot x \cdot 1 dx}{\int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 = x - \frac{3}{4} \\ p_2(x) = x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot x^2 \cdot 1 dx}{\int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot x^2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) dx}{\int_0^1 x^2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) dx} \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) \\ = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$p_2(x)$ 的两个零点为 $x_1 = \frac{10 - \sqrt{10}}{15}$, $x_2 = \frac{10 + \sqrt{10}}{15}$, 积分系数为

$$\alpha_1 = \int_0^1 x^2 I_1(x) dx = \int_0^1 x^2 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx = \frac{8 - \sqrt{10}}{48}$$

$$\alpha_2 = \int_0^1 x^2 I_2(x) dx = \int_0^1 x^2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx = \frac{8 + \sqrt{10}}{48}$$

因此两点 Gauss 公式为

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 f(x) dx &\approx G_2(f) \\ &= \sum_{i=1}^2 \alpha_i f(x_i) \\ &= \frac{8 - \sqrt{10}}{48} f\left(\frac{10 - \sqrt{10}}{15}\right) + \frac{8 + \sqrt{10}}{48} f\left(\frac{10 + \sqrt{10}}{15}\right) \end{aligned}$$

Question 3

设有常微分初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x), & (0 \leq x \leq 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

假设求解区间 $[0, 1]$ 被 n 等分 (n 充分大), 令 $h = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$)

(1) 分别写出用向前 Euler 公式, 向后 Euler 公式, 梯形格式以及改进的 Euler 公式求上述微分方程数值解时的差分格式 (即分别写出此四种方法/公式下, y_{k+1} 与 y_k 之间的递推关系式)

向前 Euler 公式

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k - \frac{1}{n}y_k = \frac{n-1}{n}y_k$$

向后 Euler 公式

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}) = y_k - \frac{1}{n}y_{k+1} \\ \Rightarrow y_{k+1} &= \frac{n}{n+1}y_k \end{aligned}$$

梯形公式

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})) = y_k - \frac{1}{2n}(y_k + y_{k+1}) \\ \Rightarrow y_{k+1} &= \frac{2n-1}{2n+1}y_k \end{aligned}$$

改进的 Euler 公式

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))) = y_k - \frac{1}{2n} \left(y_k + \frac{n+1}{n} y_k \right)$$

$$\Rightarrow y_{k+1} = \frac{2n^2 - 2n - 1}{2n^2} y_k$$

(2) 设 $y_0 = y(0)$, 分别求此四种公式 (方法) 下的近似 y_n 的表达式 (注: 这里的 y_n 即是 $y(x_n) \equiv y(1)$ 的近似值)

由 $y_0 = y(0) = 1$, 由向前 Euler 公式下递推式可得

$$y_n = \frac{n-1}{n} y_{n-1} = \cdots = \left(\frac{n-1}{n} \right)^n y_0 = \left(\frac{n-1}{n} \right)^n$$

同理对于向后 Euler 公式

$$y_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

梯形公式

$$y_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^n$$

改进的 Euler 公式

$$y_n = \left(\frac{2n^2 - 2n - 1}{2n^2} \right)^n$$

(3) 当 n 充分大 (即区间长度 $h \rightarrow 0$) 时, 分别判断四种方法下的近似值 y_n 是否收敛到原问题的真解 $y(x)$ 在 $x = 1$ 处的值 (i.e. $y(1)$)

可由

$$\begin{aligned} y'(x) &= -y(x) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -y \\ \Rightarrow \frac{1}{y} dy &= -dx \\ \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy &= \int -dx \\ \Rightarrow \ln y &= -x + C' \\ \Rightarrow y &= e^{-x} + C \end{aligned}$$

代入 $y(0) = 1$ 可得 $C = 0$ ，即原问题

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x), & (0 \leq x \leq 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的解为

$$y(x) = e^{-x}$$

其在 $x = 1$ 处的值 $y(1) = e^{-1}$ 。当 n 充分大（即区间长度 $h \rightarrow 0$ ）时，有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}} = \frac{1}{e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \right)^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - 2n - 1}{2n^2} \right)^n &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

其中最后一个极限可由 $\left(\frac{n-2}{n-1} \right)^n \leq \left(\frac{2n^2 - 2n - 1}{2n^2} \right)^n \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^n$ ，进而由夹逼定理得到因此四种方法都收敛到真解在 $x = 1$ 处的值