

计算方法 B

Homework #7

2020.5.6

PB17000297 罗晏宸

## Question 1

设有线性代数方程组  $Ax = b$ , 其中,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) 求 Jacobi 迭代的迭代矩阵及相应的迭代格式;

令

$$D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}\} = \text{diag}\{2, 2, 2, 2\}$$

$D$  可逆, 由  $Ax = (D + A - D)x = b$  得到等价方程组  $Dx = (D - A)x + b$ , 迭代格式的矩阵形式为

$$x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + g$$

其中  $R$  是迭代矩阵

$$R = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad g = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = 0.5x_1^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} + 0.5x_4^{(k)} + 1 \\ x_4^{(k+1)} = 0.5x_3^{(k)} + 1 \end{cases}$$

(2) 讨论此时 Jacobi 迭代 (方法) 的收敛性。

题设系数矩阵  $A$  满足

$$|a_{11}| = 2 > \sum_{j \neq 1} |a_{1j}| = 1$$

$$|a_{22}| = 2 = \sum_{j \neq 2} |a_{2j}| = 2$$

$$|a_{33}| = 2 = \sum_{j \neq 3} |a_{3j}| = 2$$

$$|a_{44}| = 2 > \sum_{j \neq 4} |a_{4j}| = 1$$

可知  $A$  是行对角优但不是严格行对角优的。同时注意到  $A^T = A$ , 即  $A$  是对称矩阵, 可知  $A$  是列对角优但不是严格列对角优的, 因此  $A$  不是严格对角优的, 无法直接判断 Jacobi 迭代的收敛性。

下面计算迭代矩阵  $R$  的谱半径  $\rho(R)$ , 设  $\lambda$  为  $R$  的特征值, 则有

$$\begin{aligned} \det(R - \lambda I) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^4 - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16} &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$\lambda_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \lambda_3 = -\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \lambda_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

进而有  $R$  的谱半径

$$\begin{aligned} \rho(R) &= \max_i |\lambda_i| \\ &= \max \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right\} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1 \end{aligned}$$

因此迭代是收敛的。

## Question 2

设有线性代数方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代的分量形式;

将第  $i$  行的变量  $x_i$  留在方程左边, 并除以系数  $a_{ii}$ , 系数矩阵的下三角元素冠以  $k+1$  得到迭代格式的分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{3}{5}x_2^{(k)} - \frac{2}{5}x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = \frac{3}{5}x_1^{(k+1)} - \frac{2}{5}x_3^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{2}{7}x_1^{(k+1)} - \frac{2}{7}x_2^{(k+1)} + 1 \end{cases}$$

(2) 求 Gauss-Seidel 迭代的分裂矩阵 (splitting matrix) 及迭代矩阵 (iteration matrix);

设原方程组的矩阵形式  $Ax = b$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

分解系数矩阵

$$\begin{aligned} A &= D + L + U \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

写成等价矩阵表达式

$$(D + L)x = -Ux + b$$

记  $Q = U + L$ , 构造迭代形式

$$Qx^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b$$

记 Gauss-Seidel 迭代的矩阵形式为

$$x^{(k+1)} = Sx^{(k)} + f$$

其中  $S$  是迭代矩阵

$$S = -(D + L)^{-1}U = \mathbf{I} - Q^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{9}{25} & -\frac{16}{25} \\ 0 & -\frac{48}{175} & \frac{52}{175} \end{pmatrix}, \quad f = Q^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{9}{35} \end{pmatrix}$$

(3) 讨论 Gauss-Seidel 迭代的收敛性 (请给出理由或证明)。

观察原方程的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

其满足

$$|a_{11}| = 5 = \sum_{j \neq 1} |a_{1j}| = 5$$

$$|a_{22}| = 5 = \sum_{j \neq 2} |a_{2j}| = 5$$

$$|a_{33}| = 7 > \sum_{j \neq 3} |a_{3j}| = 4$$

可知  $A$  是行对角优但不是严格行对角优的。同时注意到  $A^T = A$ , 即  $A$  是对称矩阵, 可知  $A$  是列对角优但不是严格列对角优的, 因此  $A$  不是严格对角优的, 无法说明迭代的收敛性。

下面证明  $A$  是正定的,  $A$  的各阶顺序主子式为

$$\begin{aligned} [A]_{\{1\},\{1\}} &= \begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix} = 5 \\ [A]_{\{1,2\},\{1,2\}} &= \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \times 5 - (-3) \times (-3) = 16 \\ [A]_{\{1,2,3\},\{1,2,3\}} &= \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 5 \times \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - (-3) \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 5 \times 31 - (-3) \times (-25) + 2 \times (-16) \end{aligned}$$

$$= 48$$

$A$  的各阶顺序主子式均为正，因此  $A$  是正定的，所以 Gauss-Seidel 迭代收敛。