

计算方法 B

Homework #9

2020.5.23

PB17000297 罗晏宸

## Question 1

给定函数  $f(x)$  的离散值表，分别用向前、向后及中心差商公式计算  $f'(0.02)$ ,  $f'(0.04)$ 。

$x$	0.00	0.02	0.04	0.06
$f(x)$	6.0	4.0	2.0	8.0

由一阶向前差商公式

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

可得

$$\begin{aligned} f'(0.02) &\approx \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.04 - 0.02} \\ &= \frac{2.0 - 4.0}{0.02} \\ &= -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0.04) &\approx \frac{f(0.06) - f(0.04)}{0.06 - 0.04} \\ &= \frac{8.0 - 2.0}{0.02} \\ &= 300 \end{aligned}$$

由一阶向后差商公式

$$f'(x_{n+1}) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

可得

$$\begin{aligned} f'(0.02) &\approx \frac{f(0.02) - f(0.00)}{0.02 - 0.00} \\ &= \frac{4.0 - 6.0}{0.02} \\ &= -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0.04) &\approx \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.04 - 0.02} \\ &= \frac{2.0 - 4.0}{0.02} \\ &= -100 \end{aligned}$$

由一阶中心差商公式

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}))}{x_{n+1} - x_{n-1}}$$

可得

$$\begin{aligned} f'(0.02) &\approx \frac{f(0.04) - f(0.00)}{0.04 - 0.00} \\ &= \frac{2.0 - 6.0}{0.04} \\ &= -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0.04) &\approx \frac{f(0.06) - f(0.02)}{0.06 - 0.02} \\ &= \frac{8.0 - 4.0}{0.04} \\ &= 100 \end{aligned}$$

## Question 2

求积分  $\int_0^1 x^2 f(x) dx$  的 2 点 Gauss 积分公式, 这里  $x^2$  为权重函数。

利用 Gram-Schmidt 正交化

$$\begin{cases} p_0(x) = f_0(x) \\ p_1(x) = f_1(x) - \frac{(f_1(x), p_0(x))}{(p_0(x), p_0(x))} p_0(x) \\ p_2(x) = f_2(x) - \frac{(f_2(x), p_0(x))}{(p_0(x), p_0(x))} p_0(x) - \frac{(f_2(x), p_1(x))}{(p_1(x), p_1(x))} p_1(x) \end{cases}$$

可由  $\mathbb{P}_n$  的一组基  $\{1, x, \dots, x^n\}$  依次求出正交多项式序列:

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = x - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot x \cdot 1 dx}{\int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 = x - \frac{3}{4} \\ p_2(x) = x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot x^2 \cdot 1 dx}{\int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot x^2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) dx}{\int_0^1 x^2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) dx} \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) \\ = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$p_2(x)$  的两个零点为  $x_1 = \frac{10 - \sqrt{10}}{15}$ ,  $x_2 = \frac{10 + \sqrt{10}}{15}$ , 积分系数为

$$\alpha_1 = \int_0^1 x^2 I_1(x) dx = \int_0^1 x^2 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx = \frac{8 - \sqrt{10}}{48}$$

$$\alpha_2 = \int_0^1 x^2 I_2(x) dx = \int_0^1 x^2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx = \frac{8 + \sqrt{10}}{48}$$

因此两点 Gauss 公式为

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 f(x) dx &\approx G_2(f) \\ &= \sum_{i=1}^2 \alpha_i f(x_i) \\ &= \frac{8 - \sqrt{10}}{48} f\left(\frac{10 - \sqrt{10}}{15}\right) + \frac{8 + \sqrt{10}}{48} f\left(\frac{10 + \sqrt{10}}{15}\right) \end{aligned}$$

### Question 3

设有常微分初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x), & (0 \leq x \leq 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

假设求解区间  $[0, 1]$  被  $n$  等分 ( $n$  充分大), 令  $h = \frac{1}{n}$ ,  $x_k = \frac{k}{n}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ )

(1) 分别写出用向前 Euler 公式, 向后 Euler 公式, 梯形格式以及改进的 Euler 公式求上述微分方程数值解时的差分格式 (即分别写出此四种方法/公式下,  $y_{k+1}$  与  $y_k$  之间的递推关系式)

向前 Euler 公式

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k - \frac{1}{n}y_k = \frac{n-1}{n}y_k$$

向后 Euler 公式

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}) = y_k - \frac{1}{n}y_{k+1} \\ \Rightarrow y_{k+1} &= \frac{n}{n+1}y_k \end{aligned}$$

梯形公式

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})) = y_k - \frac{1}{2n}(y_k + y_{k+1}) \\ \Rightarrow y_{k+1} &= \frac{2n-1}{2n+1}y_k \end{aligned}$$

改进的 Euler 公式

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))) = y_k - \frac{1}{2n} \left( y_k + \frac{n+1}{n} y_k \right)$$

$$\Rightarrow y_{k+1} = \frac{2n^2 - 2n - 1}{2n^2} y_k$$

(2) 设  $y_0 = y(0)$ , 分别求此四种公式 (方法) 下的近似  $y_n$  的表达式 (注: 这里的  $y_n$  即是  $y(x_n) \equiv y(1)$  的近似值)

由  $y_0 = y(0) = 1$ , 由向前 Euler 公式下递推式可得

$$y_n = \frac{n-1}{n} y_{n-1} = \cdots = \left( \frac{n-1}{n} \right)^n y_0 = \left( \frac{n-1}{n} \right)^n$$

同理对于向后 Euler 公式

$$y_n = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

梯形公式

$$y_n = \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right)^n$$

改进的 Euler 公式

$$y_n = \left( \frac{2n^2 - 2n - 1}{2n^2} \right)^n$$

(3) 当  $n$  充分大 (即区间长度  $h \rightarrow 0$ ) 时, 分别判断四种方法下的近似值  $y_n$  是否收敛到原问题的真解  $y(x)$  在  $x = 1$  处的值 (i.e.  $y(1)$ )

可由

$$\begin{aligned} y'(x) &= -y(x) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -y \\ \Rightarrow \frac{1}{y} dy &= -dx \\ \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy &= \int -dx \\ \Rightarrow \ln y &= -x + C' \\ \Rightarrow y &= e^{-x} + C \end{aligned}$$

代入  $y(0) = 1$  可得  $C = 0$ ，即原问题

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x), & (0 \leq x \leq 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的解为

$$y(x) = e^{-x}$$

其在  $x = 1$  处的值  $y(1) = e^{-1}$ 。当  $n$  充分大（即区间长度  $h \rightarrow 0$ ）时，有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}} = \frac{1}{e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \right)^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - 2n - 1}{2n^2} \right)^n &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

因此四种方法都收敛到真解在  $x = 1$  处的值