计算方法 B

Homework #1

2020.3.27

PB17000297 罗晏宸

Question 1

阅读绪论并给出计算如下函数的可靠数值计算方法，使其尽量达到更好的精度。

其中，(1)、(2) 中 x 很靠近 0 且 $a > 0$；(3) 中 $x \gg a$

(1) $f(x) = (a+x)^n - a^n$

$$\begin{aligned}
f(x) &= (a+x)^n - a^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} x^i - a^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} x^i \\
&= \underbrace{(\cdots(}_{n\text{个}(} x+a)x + a^2)x + \cdots + a^{n-1})x
\end{aligned}$$

(2) $f(x) = \cos(a+x) - \cos a$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(a+x) - \cos a \\
&= -2\sin\frac{(a+x)+a}{2}\sin\frac{(a+x)-a}{2} \\
&= -2\sin(a+\frac{x}{2})\sin\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

(3) $f(x) = x - \sqrt{x^2+a}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x - \sqrt{x^2+a} \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2+a})(x-\sqrt{x^2+a})}{x+\sqrt{x^2+a}} \\
&= -\frac{a}{x+\sqrt{x^2+a}}
\end{aligned}$$

Question 2

设有精确值 $x^* = 0.0202005$，则其近似值 $x = 0.020200$ 有几位有效数字？近似值 x 的绝对误差是多少？

Question 2 continued on next page. . .

近似值有 5 位有效数字，绝对误差为：

$$x^* - x = 0.0202005 - 0.020200 = 0.0000005$$

Question 3

设有插值节点 $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$ 证明与这些节点相应的 Lagrange 插值基函数

$$\{l_i(x), \quad i = 0, 1, \cdots, n\}$$

是线性无关的。

假设存在 n 个数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 使得

$$\sum_{i=0}^{n} c_i l_i(x) \equiv 0$$

成立，则对于 $x = x_0$，有：

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n} c_i l_i(x_0) = 0 \\
\Rightarrow \quad & c_0 l_0(x_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i l_i(x_0) = 0 \\
\Rightarrow \quad & c_0 \times 1 + \sum_{i=1}^{n} c_i \times 0 = 0 \\
\Rightarrow \quad & c_0 = 0
\end{aligned}$$

事实上，对于任意的 $x = x_j, \quad 0 \leqslant j \leqslant n$，都有：

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n} c_i l_i(x_0) = 0 \\
\Rightarrow \quad & c_j l_j(x_j) + \sum_{i=0, i \neq j}^{n} c_i l_i(x_0) = 0 \\
\Rightarrow \quad & c_j \times 1 + \sum_{i=0, i \neq j}^{n} c_i \times 0 = 0 \\
\Rightarrow \quad & c_j = 0
\end{aligned}$$

即 $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$，因此 $\{l_i(x), \quad i = 0, 1, \cdots, n\}$ 是线性无关的。

Question 4 continued on next page. . .

Question 4

利用插值数据 $(-1.0, 0.0),\ (1.0, 1.0),\ (4.0, 2.0),\ (5.0, 4.0)$**，构造出三次** Lagrange **插值多项式** $L_3(x)$**，并计算** $L_3(2.0), L_3(4.0)$**。**

设 $L_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$，代入插值数据，得到

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ 64a + 16b + 4c + d = 2 \\ 125a + 25b + 5c + d = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{40} \\ b = -\dfrac{1}{3} \\ c = \dfrac{17}{40} \\ d = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

即

$$L_3(x) = \frac{3}{40}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{17}{40}x + \frac{5}{6}$$

进而

$$L_3(2.0) = \frac{19}{20}$$
$$L_3(4.0) = 2$$