Dyskretny model logistyczny

Modelowanie deterministyczne

Prowadzący kurs: prof. dr hab. Grzegorz Karch, mgr Łukasz Paszkowski

inż. Sylwia Majchrowska

7 maja 2018

1 Opis modelu

Dyskretne równanie logistyczne jest rozwinięciem modelu Malthusa, w którym dodatkowo wykładniczy rozwój populacji hamowany jest poprzez pojemność środowiska (zasoby są ograniczone, to też występuje konkurencja między osobnikami, a liczebność populacji nie może przekroczyć pewnej wartości K). Jednocześnie szybkość wzrostu liczebności populacji następuje w krokach dyskretnych (lub dyskretyzacja związana jest z dokonanym pomiarem), to znaczy zmienia się co $\Delta t = 1$ jednostek. Dyskretna wersja modelu logistycznego przedstawiana jest za pomocą wzoru

$$N_{t+1} = (1+r)N_t - \frac{r}{K}N_t^2 = aN_t\left(1 - \frac{N_t}{K_1}\right) \tag{1}$$

lub dla $x_t = \frac{N_t}{K_1}$ dla $t \in \mathbb{N}$, co reprezentuje zagęszczenie populacji w stosunku do pojemności środowiska K_1,

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t), \tag{2}$$

gdzie

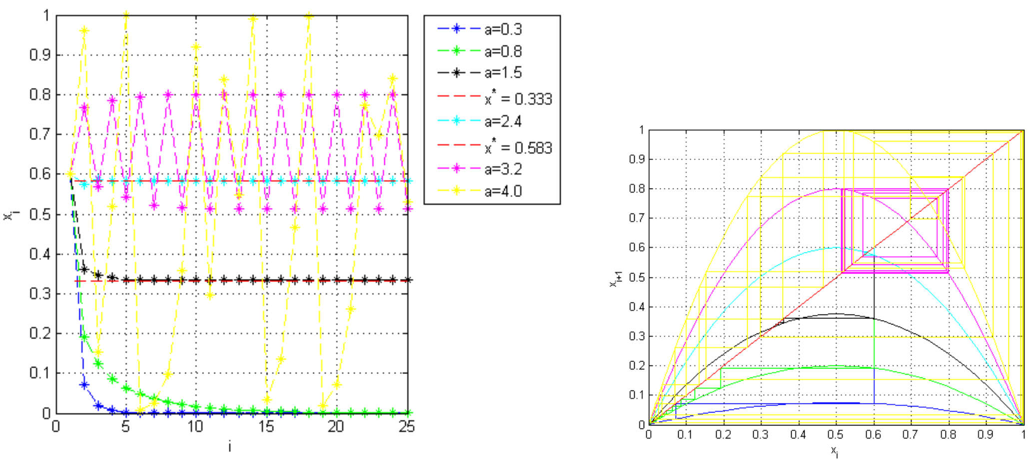
- $r > 0$ - współczynnik rozrodczości,
- $K > 0$ - parametr reprezentujący pojemność środowiska, odmienny dla różnego rodzaju populacji,
- $K_1 = \frac{1+r}{r}K$ - zmodyfikowany parametr reprezentujący pojemność środowiska,
- $a = 1+r$ - zmodyfikowany współczynnik rozrodczości - aby zapewnić warunek $x_n \in [0,1]$, parametr a musi być liczbą z przedziału od 0 do 4.

2 Ilustracja zachowania się rozwiązań

Jeśli ciąg $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ ma granicę równa się ona któremuś ze stanów stacjonarnych równania 2, czyli

$$\overline{x} = a\overline{x}(1-\overline{x}) \Rightarrow \overline{x}_1 = 0 \vee \overline{x}_2 = \frac{a-1}{a}. \tag{3}$$

- Jeśli $a \in [0,1]$ to stan stacjonarny $\overline{x} = 0$ jest wyznaczony jednoznacznie i jest globalnie stabilny na tym zbiorze.
- Dla $a \in (1,3)$ rozwiązania zbiegają do $\overline{x}_2$.
- Dla $a > 3$ rozwiązania stacjonarne stają się niestabilne, ale zyskują charakter stabilnego cyklu granicznego o okresie 2, potem 4 itd. Wraz z rosnącym a wyczerpują się okresy 2^n i pojawiają się rozwiązania o innych okresach ($a > 3{,}569$), ale dla $a = 4$ rozwiązania stają się chaotyczne.



Rysunek 1: Przykładowe rozwiązania równania 2 dla różnych wartości parametru a i $x_0 = 0.6$. Po prawej pokazano wykresy pajęczynowe dla zilustrowanych przypadków.