University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN·LEER

Fachbereich Technik
Abteilung Elektrotechnik und Informatik

ARM WHITEPAPER

CACHE SPECULATION SIDE-CHANNELS

PROJEKTARBEIT

Vorgelegt von
Xingjian Chen
Studiengang Informatik
7007806

Emden, 27. April 2018

Betreut von
Prof. Dr.-Ing. Gerd von Cölln

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Kurzfassung

text

text

2 Auswahl der Algorithmen

Es gibt vier unterschiedlichen Algorithmen auszuwählen.

1. Linear Least Square
2. Least Median Square
3. Residual Weighting Algorithm
4. Non-Linear Least Square

In dieser Projektarbeit werden Linear Least Square und Least Median Square verwendet. Mittels Linear Least Square kann die gesuchte Position gerechnet werden, aber die Tatsache ist es, dass die fehlerbehaftete Distanzmessungen wegen Non Line of Sight (NLOS)-Verbindung immer vorhanden sind. Deswegen haben berechnete Ergebnisse keine Genauigkeit. Um die optimierte Position zu finden, muss die fehlerbehaftete Distanzmessungen gefiltert werden. Dafür spielt Medien Least Square wichtige Rolle.

Um die beide Algorithmen besser zu verstehen, wird die Lokalisierung eines Sensors unter mathematischen Aspekten betrachtet. Im dreidimensionalen Raum befinden sich N Referenzpunkte (bekannte Sensoren) und ein gesuchter Punkt (unbekannter Sensor). P_1 bis P_N sind die Referenzpunkte mit den Koordinaten (X_1, Y_1, Z_1) bis (X_N, Y_N, Z_N). P_{lat} ist der gesuchte Punkt (X, Y, Z) und R_i ist die gemessene Distanz von P_{lat} zum Referenzpunkt P_i. In mathematischen Aspekt ist P_{lat} tatsächlich ein Schnittpunkt, in dem sich verschiedene Kugeln mit unterschiedlichen Radien im dreidimensionalen Raum überschneiden (vgl. Abb.1).

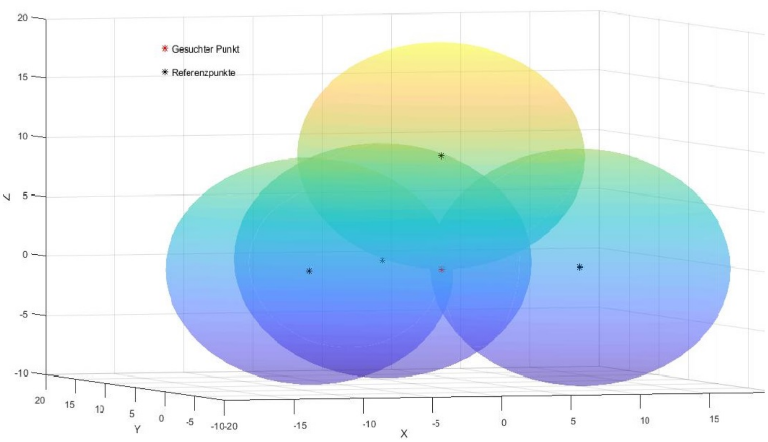

Abbildung 1: Schnittpunkt verschiedenen Kugeln in einer 3D-Umgebung

3 Mathematische Ausführung

3.1 Aufbau Lineares Gleichungssystems

Der Aufbau eines linearen Gleichungssystem ist die Voraussetzung, um die gesuchte Position mittels Linear Least Square und Least Median Square zu bestimmen. Die geometrischen Zusammenhänge werden in ein lineares Gleichungssystem wie folgt ausgeführt.

$$\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

Im dreidimensionalen Raum wird die Beziehung zwischen der gesuchte Position $\mathrm{P_{lat}}$ und $\mathrm{P_i}$ wie folgt aufgebaut.

$$R_i^2 = (Xi - X)^2 + (Yi - Y)^2 + (Zi - Z)^2, \quad i \in \mathbb{N} \quad i \geq 4 \tag{2}$$

Gleichung (2) wird wie folgt umgeformt.

$$R_i^2 - X_i^2 - Y_i^2 - Z_i^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2) - 2 \cdot Xi \cdot X - 2 \cdot Yi \cdot Y - 2 \cdot Zi \cdot Z$$

Hier sind fünf Referenzpunkte gegeben. Die Gleichungen können wie folgt aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
R_1^2 - X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2 &= (X^2 + Y^2 + Z^2) - 2 \cdot X_1 \cdot X - 2 \cdot Y_1 \cdot Y - 2 \cdot Z_1 \cdot Z \\
R_2^2 - X_2^2 - Y_2^2 - Z_2^2 &= (X^2 + Y^2 + Z^2) - 2 \cdot X_2 \cdot X - 2 \cdot Y_2 \cdot Y - 2 \cdot Z_2 \cdot Z \\
R_3^2 - X_3^2 - Y_3^2 - Z_3^2 &= (X^2 + Y^2 + Z^2) - 2 \cdot X_3 \cdot X - 2 \cdot Y_3 \cdot Y - 2 \cdot Z_3 \cdot Z \\
R_4^2 - X_4^2 - Y_4^2 - Z_4^2 &= (X^2 + Y^2 + Z^2) - 2 \cdot X_4 \cdot X - 2 \cdot Y_4 \cdot Y - 2 \cdot Z_4 \cdot Z \\
R_5^2 - X_5^2 - Y_5^2 - Z_5^2 &= (X^2 + Y^2 + Z^2) - 2 \cdot X_5 \cdot X - 2 \cdot Y_5 \cdot Y - 2 \cdot Z_5 \cdot Z
\end{aligned}$$

Nun kann die erste Zeile von einer anderen subtrahiert werden, um nicht lineare Anteile zu beseitigen.

$$(R_1^2 - R_2^2 - X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2 + X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2) \cdot \tfrac{1}{2} =$$
$$(X_2 - X_1) \cdot X + (Y_2 - Y_1) \cdot Y + (Z_2 - Z_1) \cdot Z$$

$$(R_1^2 - R_3^2 - X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2 + X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2) \cdot \tfrac{1}{2} =$$

$$(X_3 - X_1) \cdot X + (Y_3 - Y_1) \cdot Y + (Z_3 - Z_1) \cdot Z$$

$$(R_1^2 - R_4^2 - X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2 + X_4^2 + Y_4^2 + Z_4^2) \cdot \tfrac{1}{2} =$$

$$(X_4 - X_1) \cdot X + (Y_4 - Y_1) \cdot Y + (Z_4 - Z_1) \cdot Z$$

$$(R_1^2 - R_5^2 - X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2 + X_5^2 + Y_5^2 + Z_5^2) \cdot \tfrac{1}{2} =$$

$$(X_5 - X_1) \cdot X + (Y_5 - Y_1) \cdot Y + (Z_5 - Z_1) \cdot Z$$

Anschließend kann das lineare Gleichungssystem nach Gleichung (1) mittels Matrix erstellt werden.

$$\begin{aligned}
\underline{A} &= \begin{pmatrix} (X_2 - X_1) & (Y_2 - Y_1) & (Z_2 - Z_1) \\ (X_3 - X_1) & (Y_3 - Y_1) & (Z_3 - Z_1) \\ (X_4 - X_1) & (Y_4 - Y_1) & (Z_4 - Z_1) \\ (X_5 - X_1) & (Y_5 - Y_1) & (Z_5 - Z_1) \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\
\vec{b} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} R_1^2 - R_2^2 - X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2 + X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 \\ R_1^2 - R_3^2 - X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2 + X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2 \\ R_1^2 - R_4^2 - X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2 + X_4^2 + Y_4^2 + Z_4^2 \\ R_1^2 - R_5^2 - X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2 + X_5^2 + Y_5^2 + Z_5^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3}$$

Bisher wird das lineares Gleichungssystem fertig gebaut.

3.2 Mathematische Ausführung von Linear Least Square

Der Algorithmus Linear Least Square (Deutsch: Methode der kleinsten Quadrate, Abk.: LLS) ist das mathematische Standardverfahren zur Ausgleichungsrechnung. Es ist eine Wolke aus Datenpunkten gegeben, die physikalische Messwerte repräsentieren kann. In diese Punktwolke soll eine möglichst genau passende parameterabhängige Modellkurve gelegt werden. Dazu bestimmt man die Parameter dieser Kurve numerisch, indem die Summe der quadratischen Abweichungen der Kurve von den beobachteten Punkten minimiert wird.

Um der LLS-Verfahren zu verstehen, ist ein kleines Beispiel gegeben(vgl. Abb.2). Die rote Punkte sind Messwerte, die im Vergleich zu praktischen Werten kleine Abweichungen besitzen. Die Modellkurve ist eine optimierte

Kurve, damit die Messwerte auf der Modellkurve wie möglich approximieren. Die Idee von LLS ist es, dass die Fehlerquadratsumme $\sum \vec{d}_i^2$ bei den Messungen minimiert sein soll. Der Fehler $\vec{d}$ und das Minimum $F(x_i)$ ist wie folgt definiert:

$$\vec{d} = \underline{A} \cdot \vec{x} - \vec{b}, \quad F(x_i) = \sum \vec{d}_i^2 \rightarrow Minimum \tag{4}$$

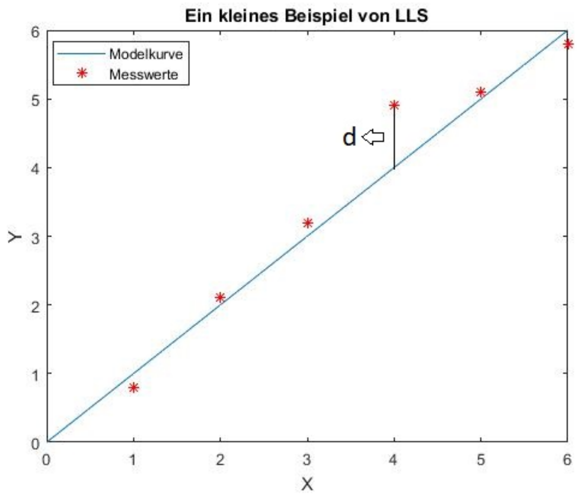

Abbildung 2: Ein kleines Beispiel von Linear Least Square

Das Minimum $F(x_i)$ kann nur erreicht werden, wenn alle partiellen Ableitungen von F nach x null ergeben. Hier ist es zu beachten, dass Backslash-Operator rechtes Division bedeutet.

$$\frac{\delta F}{\delta \vec{x}} = 2 \cdot \underline{A}^T \cdot A \cdot \vec{x} - 2 \cdot \underline{A}^T \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \underline{A}^T \cdot A \backslash \underline{A}^T \cdot \vec{b} \tag{5}$$

3.3 Mathematische Ausführung von Least Median Square

Der Algorithmus Least Median Square (Abk. LMS) basiert auf Median und LLS. Der Median (auch Zentralwert genannt) ist der Wert in der Mitte einer der Größe nach geordneten Datenreihe. Das heißt, mindestens 50% der Daten sind kleiner als der Median oder gleich dem Median und mindestens 50% der Daten sind größer als der Median oder gleich dem Median(vgl. Abb.4). Bei einer ungeraden Anzahl an Datenwerten ist der Median der Wert in der Mitte. Bei einer geraden Anzahl an Datenwerten entspricht der

Median dem Durchschnitt der beiden mittleren Werte. Im Vergleich zum Mittelwert ist der Median unempfindlich gegenüber Extremwerten.

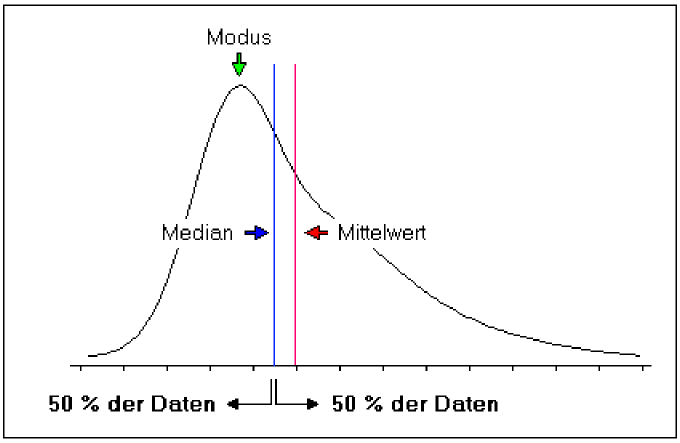

Abbildung 3: Unterschied zwischen Median und Mittelwert

LMS ist für das Problem wirksam, wenn fehlerbehaftete Distanzmessungen bei mehr als vier Referenzpunkte vorhanden sind. Zunächst werden alle Kombinationen mit vier zugehörigen Referenzpunkten herstellt. Wenn es beispielsweise 6 Referenzpunkte P_1 bis P_6 mit den Distanzmessungen R_1 bis R_6 gibt, dann entstehen insgesamt $\binom{6}{4} = 15$ mögliche Subsets. Andere Möglichkeiten $\binom{6}{5}$ und $\binom{6}{6}$ werden hier nicht berücksichtigt, weil es für die gesucht Position $\mathrm{P}_{\mathrm{lat}}$ mit 15 Subsets reicht. Danach wird $\mathrm{P}_{\mathrm{lat}}$ einer Kombination jeweils mit LLS-Verfahren berechnet. Hier werden insgesamt 15 berechnete Positionen mit $\mathrm{P}_{\mathrm{lat}(1)}$ bis $\mathrm{P}_{\mathrm{lat}(15)}$ hervorgebracht. Jede Position $\mathrm{P}_{\mathrm{lat}(\mathrm{k})}$ hat eigene Medianwert $\mathrm{med}(\vec{v})_{\mathrm{k}}$. $\vec{v}$ kann mit der Abstandformel bestimmt werden.

$$\vec{v}_j = |\sqrt{(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2} - R_i|, \quad j \in [1,4]\, i \in [1,n] \quad (6)$$

X_i, Y_i, Z_i = Koordinaten von vier Referenzpunkte einer Kombination
X, Y, Z = Koordinaten der mittels LLS berechneten $\mathrm{P}_{\mathrm{lat}(\mathrm{k})}$
R_i = Distanzmessung zum entsprechenden Referenzpunkt

Der Medianwert $\mathrm{med}(\vec{v})_{\mathrm{k}}$ von $\mathrm{P}_{\mathrm{lat}(\mathrm{k})}$ einer Kombination kann wie folgt ausgeführt werden:

$$med(\vec{v})_k = median\{\vec{v}_1^2,\, \vec{v}_2^2,\, \vec{v}_3^2,\, \vec{v}_4^2\}, \quad k \in [1, \tbinom{n}{4}] \quad (7)$$

4 Ausführung in Matlab

4.1 LLS-Realisierung in MATLAB

P_1 bis P_5 sind die Referenzpunkte mit den Koordinaten (X_1, Y_1, Z_1) bis (X_5, Y_5, Z_5) und R_1 bis R_5 die gemessene Distanzen. Folgende Referenzpunkte und Distanzmessungen sind gegeben (Einheit: Meter):

P_1 = (10, 0, 0), R_1 = 10.02;
P_2 = (0, 10, 0), R_2 = 10.05;
P_3 = (0, 0, 10), R_3 = 9.98;
P_4 = (-10, 0, 0), R_4 = 10.07;
P_5 = (0, -10, 0), R_5 = 9.99;

In MATLAB werden zuerst obige Koordinaten und Distanzen eingegeben und das lineare Gleichungssystem (3) erstellt. Danach wird die gesuchte Position P_{lat} mit den Formeln (4) und (5) bestimmt. Das errechnetes Ergebnis lautet X = 0.0168, Y = -0.0301 und Z = 0.0568. Die Wahre Position ist P_{wahr} = (0.00, 0.00, 0.00). Das Ergebnis ist sehr zufriedenstellend, obwohl es kleine Abweichungen bei praktischen Distanzmessungen gibt. Vorher wurde bereits angesprochen, dass das Ergebnis schlecht berechnet werden kann wenn eine Distanzmessung stark von der wahren Distanz abweicht. Die Distanz von R_1 = 15.02 ist aufgrund von NLOS-Messung, so ist die gesuchte Position P_{lat} = (-4.16, -0.03, 2.14) (vgl. Abb.3). Das Ergebnis weicht stark von P_{wahr} = (0.00, 0.00, 0.00) ab. Um solche fehlerbehaftete Distanzmessungen zu filtern, ist Least Median Square sinnvoll.

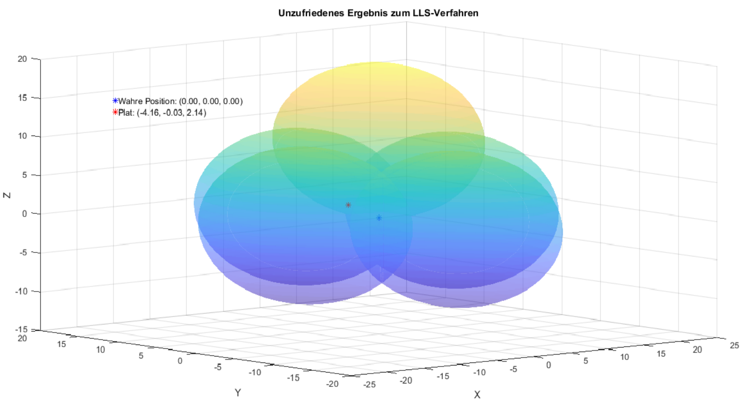

Abbildung 4: Unzufriedenes Ergebnis zum LLS-Verfahren

4.2 LMS-Realisierung in MATLAB

Mit den Formeln (6) und (7) kann die gesucht Position gefunden werden, die geringsten Medianwert hat. Damit können die fehlerbehaftete Distanzmessungen wegen NLOS-Messungen gefiltert werden. Jetzt ist ein Beispiel mit 6 Referenzpunkte gegeben. Alle Daten sind wie folgt dargestellt (Einheit: Meter):

P_1 = (10.00, 0.01, -0.01), R_1 = 10.20;
P_2 = (0.02, 9.98, 0.01), R_2 = 9.88;
P_3 = (0.01, 0.02, 9.56), R_3 = 9.54;
P_4 = (-9.97, 0.02, 0.01), R_4 = 9.96;
P_5 = (0.01, -10.01, 0.02), R_5 = 10.01;
P_6 = (0.01, 0.03, -10.01), R_6 = 12.10;

Es ist offensichtlich, dass die Distanzmessung R_6 zum Referenzpunkt P_6 durch NLOS-Messung von der wahren Distanz stark abgewichen ist und andere Distanzmessungen sehr gut sind. Hier ist die Wahre Position wieder P_{wahr} = (0.00, 0.00, 0.00).

In MATLAB werden zunächst die $\binom{6}{4} = 15$ mögliche Kombinationen (*Subsets*) verteilt, die von (P_1, P_2, P_3, P_4) bis (P_3, P_4, P_5, P_6) sind. Anschließend Position $P_{\mathrm{lat(k)}}$ für jede Kombination mittels LLS-Verfahren ermittelt wird. Die gesuchte Postionen $P_{\mathrm{lat(1)}}$ bis $P_{\mathrm{lat(15)}}$ werden in MATLAB wie folgt ermittelt (Einheit: Meter):

$P_{\mathrm{lat(1)}}$: (-0.1059, 0.1959, 0.1202);
$P_{\mathrm{lat(2)}}$: (-0.2522, 0.0498, -0.0323);
$P_{\mathrm{lat(3)}}$: (0.9208, 1.2216, 1.1910);
$P_{\mathrm{lat(4)}}$: (-0.0086, 0.0984, 97.3134);
$P_{\mathrm{lat(5)}}$: (-0.1038, 0.1938, 2.2126);
$P_{\mathrm{lat(6)}}$: (-0.2463, 0.0510, 2.3456);
$P_{\mathrm{lat(7)}}$: (-0.1061, -0.0955, 0.1024);
$P_{\mathrm{lat(8)}}$: (-0.6238, -1035.1, 0.6615);
$P_{\mathrm{lat(9)}}$: (0.9176, -1.1126, 1.1898);
$P_{\mathrm{lat(10)}}$: (-0.1040,-0.0913, 2.2121);
$P_{\mathrm{lat(11)}}$: (0.0399, 0.0496, -0.0322);
$P_{\mathrm{lat(12)}}$: (-1.1305, 1.2236, 1.1910);
$P_{\mathrm{lat(13)}}$: (2324.7, -1.1126, 1.1898);

$P_{lat(14)}$: (0.0387, 0.0508, 2.3544);
$P_{lat(15)}$: (-1.1294,-1,.1126 1.1898);

Mittels Formel (6) & (7) können die Medianwerte von $\text{med}(\vec{v})_1$ bis $\text{med}(\vec{v})_{15}$ für jede Position $P_{lat(k)}$ ermittelt werden. In MATLAB ergeben sich folgende Medianwerte:

$\text{med}(\vec{v})_1 = 0{,}0088\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_2 = 0{,}0028\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_3 = 0{,}9591\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_4 = 7714{,}0\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_5 = 0{,}0221\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_6 = 0{,}1015\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_7 = 0{,}0089\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_8 = 105077\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_9 = 0{,}9607\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_{10} = 0{,}0217\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_{11} = 0{,}0025\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_{12} = 0{,}9321\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_{13} = 535792\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_{14} = 0{,}1017\ m^2$
$\text{med}(\vec{v})_{15} = 0{,}9345\ m^2$

Um bessere Visualisierung zu erreichen, werden die Medianwerte in Balkendiagramm dargestellt.

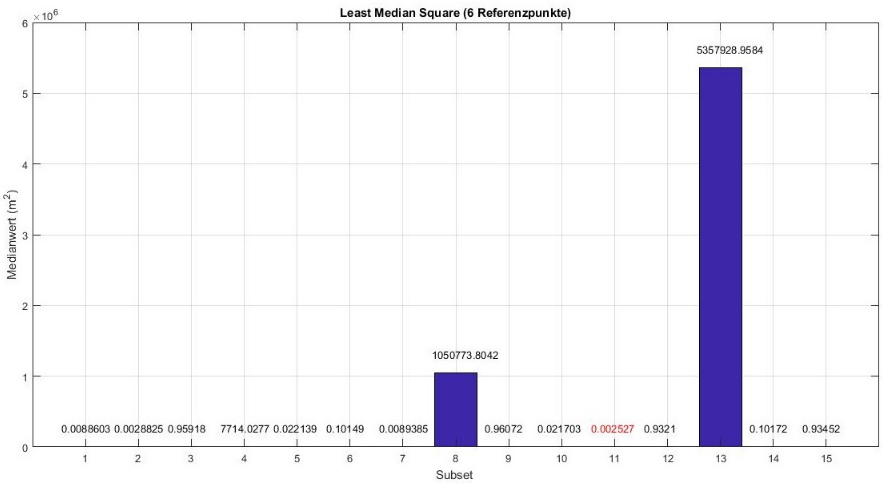

Abbildung 5: Medianwert $\text{med}(\vec{v})_k$ bei LMS-Verfahren

Mit diesem Balkendiagramm ist es offensichtlich zu sehen, dass $\text{med}(\vec{v})_{11}$ den geringsten Medianwert bekommt. Die Kombination(*Subset*) der optimierten Referenzpunkte sind P_2, P_3, P_4 und P_5. P_6 mit offensichtlicher NLOS-Messung R_6 und P_1 mit kleinem Messfehler R_1 werden erfolgreich gefiltert. Die gesuchte Postion ist $P_{lat(11)}$ = (0.0399, 0.0496, -0.0322). Die gesuchte Position und optimierte Referenzpunkte werden im 3D-Umgebung angezeigt.

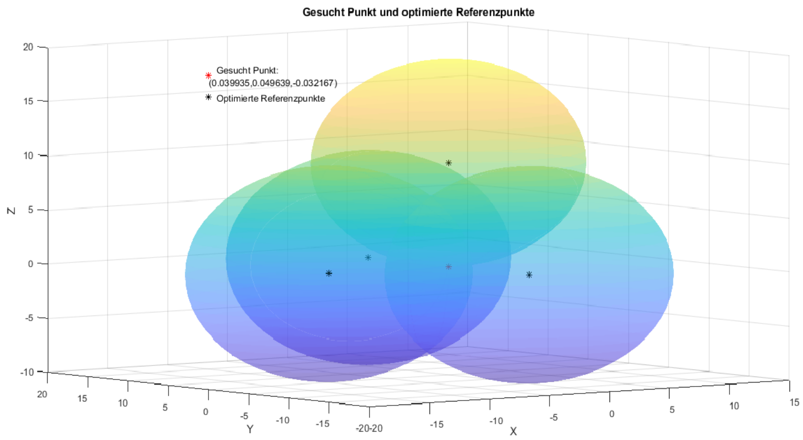

Abbildung 6: Die gesucht $P_{lat(11)}$ und optimierte Referenzpunkte

5 Zusammenfassung und Ausblick

Wenn keine Messfehler vorhanden sind, ist Least Linear Square ein direktester Algorithmus zur Lokalisierung einer Position. LLS unterstützt selbst nicht, um die berechnete Ergebnisse zu vergleichen und die Messfehler zu filtern. Im Vergleich zur LLS kann Least Median Square das optimiertes Ergebnisses mit dem Medianwert finden, um die Genauigkeit einer Position zu erhöhen.
Der Kern von LMS ist die Verwendung des Medianwertes, aber der Medianwerte spielt leid nicht immer beste Rolle in allen Fällen. Der Medianwert funktioniert gut, wenn es nur ein paar offensichtliche Messfehler vorhanden gibt. Falls alle Messungen genau oder wenig abwicht, spiele der Mittelwert theoretisch besser als Medianwert. Nach vielen Testen von MATLAB zeigt Mittelwert aber gar keinen Vorteil. Solche Testdaten entsprechen aber nicht der Theorie. Es ist notwendig, um das Problem weiter zu löschen, aber in diese Projektarbeit wird es nicht mehr geforscht.

6 MATLAB Code

MATLAB Code besteht aus 2 Teile. Der erste Teil realisiert die Funktion von das Least Median Square, die LMS-Algorithmus ausführt. Der zweite Teil ist Script von Least Median Square, die durch den Aufruf der LMS-Funktion notwendige Ergebnisse erhalten kann, damit werden alle Medianwerte $\mathrm{med}(\vec{v})_1$ bis $\mathrm{med}(\vec{v})_\mathrm{n}$ mit dem Balkendiagramm und gesuchte Position $\mathrm{P}_{\mathrm{lat(i)}}$ & optimierte Referenzpunkte mit dem 3D-Diagramm darstellt.

6.1 Funktion von Least Median Square

```
% Funktion von Least Median Square
function [RG, Plat_Gruppe, med_v, OR, Gesuchtpunkt] = ...
            LMS2_Funk(X, Y, Z, R, Referenzpunkte)

Referenzpunkte_Anzahl = size(R,1);
% C (n 4)
Referenzpunkte_Gruppe_Anzahl = nchoosek(Referenzpunkte_Anzahl,4);
% RG = Referenzpunkte_Gruppe(z.B.(P1,P2,P3,P4))
% Alle moegliche Kombinationen mit 4 Referenzpunkte
RG = nchoosek(1:Referenzpunkte_Anzahl,4);
% Anhand LLS-Verfahren werden alle Kombinationen(Subsets) gerechnet und
% auf Plat_Gruppe gespeichert.
Plat_Gruppe = [];
% Alle Medianwerte von alle mit LLS gerechnet Position Plat
med_v = [];
% OR = OpitimierungsReferenzpunkte
OR = [];
% Die gesuchte Position Plat(i)
Gesuchtpunkt = [];

% LLS-Verfahren
for i = 1 : Referenzpunkte_Gruppe_Anzahl
    % Lineares Gleichungssystem (3)
    A = [X(RG(i,2))-X(RG(i,1)) Y(RG(i,2))-Y(RG(i,1)) Z(RG(i,2))-Z(RG(i,1));...
         X(RG(i,3))-X(RG(i,1)) Y(RG(i,3))-Y(RG(i,1)) Z(RG(i,3))-Z(RG(i,1));...
         X(RG(i,4))-X(RG(i,1)) Y(RG(i,4))-Y(RG(i,1)) Z(RG(i,4))-Z(RG(i,1))];
    b = 0.5 * [...
```

```
            R(RG(i,1))^2-R(RG(i,2))^2-X(RG(i,1))^2-Y(RG(i,1))^2-Z(RG(i,1))^2+...
            X(RG(i,2))^2+Y(RG(i,2))^2+Z(RG(i,2))^2;   ...
            R(RG(i,1))^2-R(RG(i,3))^2-X(RG(i,1))^2-Y(RG(i,1))^2-Z(RG(i,1))^2+...
            X(RG(i,3))^2+Y(RG(i,3))^2+Z(RG(i,3))^2;   ...
            R(RG(i,1))^2-R(RG(i,4))^2-X(RG(i,1))^2-Y(RG(i,1))^2-Z(RG(i,1))^2+...
            X(RG(i,4))^2+Y(RG(i,4))^2+Z(RG(i,4))^2];
    AT = A.';
    % Formel (5)
    Plat_Gruppe = [Plat_Gruppe;((AT * A)\(AT * b)).'];
end

% LMS-Verfahren
for i = 1:Referenzpunkte_Gruppe_Anzahl
    % Formel (6) und (7)
    Medianwerte = median(sort([...
            abs(sqrt((X(RG(i,1)) - Plat_Gruppe(i,1))^2 + (Y(RG(i,1)) - ...
            Plat_Gruppe(i,2))^2 + (Z(RG(i,1))-Plat_Gruppe(i,3))^2) - R(RG(i,1)))...
            abs(sqrt((X(RG(i,2)) - Plat_Gruppe(i,1))^2 + (Y(RG(i,2)) - ...
            Plat_Gruppe(i,2))^2 + (Z(RG(i,2))-Plat_Gruppe(i,3))^2) - R(RG(i,2)))...
            abs(sqrt((X(RG(i,3)) - Plat_Gruppe(i,1))^2 + (Y(RG(i,3)) - ...
            Plat_Gruppe(i,2))^2 + (Z(RG(i,3))-Plat_Gruppe(i,3))^2) - R(RG(i,3)))...
            abs(sqrt((X(RG(i,4)) - Plat_Gruppe(i,1))^2 + (Y(RG(i,4)) - ...
            Plat_Gruppe(i,2))^2 + (Z(RG(i,4))-Plat_Gruppe(i,3))^2) - R(RG(i,4)))].^2));
    med_v = [med_v; Medianwerte];
end

% Die gesuchte Position Plat(i) wird ermittelt,
% die mit greingste Medianwert ist.
min_med_v = min(med_v);
min_med_v_position = find(med_v==min_med_v);
RealReferenzPunkt = RG(min_med_v_position,:);

for i = 1:4
```

```
    OR = [OR; Referenzpunkte(RealReferenzPunkt(i),:) R(RealReferenzPunkt(i))];
end

Gesuchtpunkt = Plat_Gruppe(min_med_v_position,:);
end
```

6.2 Script von Least Median Square

```
% Script von Least Median Square
% Referenzpunkt: Pi = {Xi,Yi,Zi};
% Gesuchte Position: Plat = {X,Y,Z}
% Distanzmessungen: Ri
% Alle Referenzpunkten und Distanzmessungen wird in Punkte.txt gespeichert.

% Textdatei 'Punkte.txt' wird gelesen und auf [X,Y,Z,R] gespeichert.
[X,Y,Z,R]=textread('Punkte.txt','%f%f%f%f','headerlines',1);
Referenzpunkte = [X,Y,Z];
% Funktion von Least Median Square aufrufen
[RG, Plat_Gruppe,med_v,OR,Gesuchtpunkt] = LMS2_Funk(X,Y,Z,R,Referenzpunkte)

% Bar Diagram wird erstellt, um Medianwerte zu anzeigen
figure(1);
b = bar(med_v);
grid on;
title('Least Median Square (6 Referenzpunkte)');
xlabel('Subset ');
ylabel('Medianwert (m^2)');

% Alle Medianwerte werden notiert.
min_med_position = find(med_v == min(med_v));
max_med = max(med_v);
for i = 1:length(med_v)
    if i == min_med_position
        text(i-0.45,med_v(i) + max_med/20, num2str(med_v(i)),'Color','red');
    else
        text(i-0.45,med_v(i) + max_med/20, num2str(med_v(i)));
    end
end
```

```

% In 3D werden die gesucht Plat(i) und optimierte Referenzpunkte
    angezeigt.
figure(2);
% Vier transparente Kugeln werden gemalt.
for i = 1:4
    [x,y,z] = sphere(30);
    A = x*OR(i,4) + OR(i,1);
    B = y*OR(i,4) + OR(i,2);
    C = z*OR(i,4) + OR(i,3);
    surf(A,B,C);
    alpha(0.3)          %Transprenz von Kugeln
    shading flat
    hold on
end

% Optimierte Referenzpunktt und gesuchte Punkt malen
plot3(OR(:,1), OR(:,2),OR(:,3), '*k');
plot3(Gesuchtpunkt(1), Gesuchtpunkt(2),Gesuchtpunkt(3), '*r');

% Informationen der Punkten werden dargestellt.
plot3(-20,-0,19, '*r');
text(-20,-0,19,['   Gesucht Punkt:',char(10),'(',num2str(
    Gesuchtpunkt(1)),...
    ',',num2str(Gesuchtpunkt(2)),',',num2str(Gesuchtpunkt(3)),'
        )']);
plot3(-20,-0,17, '*k');
text(-20,-0,17, '   Optimierte Referenzpunkte')
plot3(OR(:,1), OR(:,2),OR(:,3), '*k');
title('Gesucht Punkt und optimierte Referenzpunkte')
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
```