Práctico 8 - Derivaciones

Ejercicio 1

- $f.xs = \langle \forall_i : 0 < i < \#xs : xs.i = xs.0 \rangle$

  Casos base:
  $f.[]$
  $= \{\text{Especificación}\}$
  $\langle \forall_i : 0 < i < \#[] : xs.[] = xs.0 \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\}$
  $\langle \forall_i : 0 < i < 0 : xs.[] = xs.0 \rangle$
  $= \{\text{Rango vacío}\}$
  $True$

  $f.[x]$
  $= \{\text{Especificación}\}$
  $\langle \forall_i : 0 < i < \#[x] : xs.[x] = xs.0 \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\}$
  $\langle \forall_i : 0 < i < 1 : xs.[x] = xs.0 \rangle$
  $= \{\text{Rango vacío}\}$
  $True$

  Caso inductivo:
  $f.(x \triangleright xs)$
  $= \{\text{Especificación}\}$
  $\langle \forall_i : 0 < i < \#(x \triangleright xs) : (x \triangleright xs).i = (x \triangleright xs).0 \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\}$
  $\langle \forall_i : 0 < i < 1 + \#xs : (x \triangleright xs).i = (x \triangleright xs).0 \rangle$
  $= \{\text{Separación de un término}\}$
  $(x \triangleright xs).(0+1) = (x \triangleright xs).0 \wedge \langle \forall_i : 0 < i < \#xs : (x \triangleright xs).(i+1) = (x \triangleright xs).0 \rangle$
  $= \{\text{Propiedad de .}\}$
  $xs.0 = x \wedge \langle \forall_i : 0 < i < \#xs : xs.i = x \rangle$
  $= \{\text{Leibnitz}\}$
  $xs.0 = x \wedge \langle \forall_i : 0 < i < \#xs : xs.i = xs.0 \rangle$
  $= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
  $xs.0 = x \wedge f.xs$

- $f.xs.x = \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = x \rangle$

  Caso base:
  $f.[].x$
  $= \{\text{Especificación}\}$
  $\langle \exists_i : 0 \leq i < \#[] : [].i = x \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\}$
  $\langle \exists_i : 0 \leq i < 0 : [].i = x \rangle$
  $= \{\text{Rango vacío}\}$
  $False$

Caso inductivo:
$f.(y \triangleright xs).x$
$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \exists_i : 0 \leq i < \#(y \triangleright xs) : (y \triangleright xs).i = x \rangle$
$= \{\text{Definición de } \#\}$
$\langle \exists_i : 0 \leq i < 1 + \#xs : (y \triangleright xs).i = x \rangle$
$= \{\text{Separación de un término}\}$
$(y \triangleright xs).0 = x \vee \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : (y \triangleright xs).(i+1) = x \rangle$
$= \{\text{Propiedad de .}\}$
$y = x \vee \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = x \rangle$
$= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
$y = x \vee f.xs.x$

- $f.xs.x = \langle \forall_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = x \rangle$

Caso base:
$f.[].x$
$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \forall_i : 0 \leq i < \#[] : [].i = x \rangle$
$= \{\text{Definición de } \#\}$
$\langle \forall_i : 0 \leq i < 0 : [].i = x \rangle$
$= \{\text{Rango vacío}\}$
$True$

Caso inductivo:
$f.(y \triangleright xs).x$
$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \forall_i : 0 \leq i < \#(y \triangleright xs) : (y \triangleright xs).i = x \rangle$
$= \{\text{Definición de } \#\}$
$\langle \forall_i : 0 \leq i < 1 + \#xs : (y \triangleright xs).i = x \rangle$
$= \{\text{Separación de un término}\}$
$(y \triangleright xs).0 = x \wedge \langle \forall_i : 0 \leq i < \#xs : (y \triangleright xs).(i+1) = x \rangle$
$= \{\text{Propiedad de .}\}$
$y = x \wedge \langle \forall_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = x \rangle$
$= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
$y = x \wedge f.xs.x$

- $f.xs.ys = \langle \forall_i : 0 \leq i < \#xs \vee 0 \leq i < \#ys : \#xs = \#ys \wedge xs.i = ys.i \rangle$

Caso $(xs = [], ys = [])$:
$f.[].[]$
$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \forall_i : 0 \leq i < \#[] \vee 0 \leq i < \#[] : \#[] = \#[] \wedge [].i = [].i \rangle = \{\text{Definición de } \#\}$
$\langle \forall_i : 0 \leq i < 0 \vee 0 \leq i < 0 : 0 = 0 \wedge [].i = [].i \rangle = \{\text{Rango vacío}\}$
$True$

Caso $(xs = [], ys = (y \triangleright ys))$:
$f.[].(y \triangleright ys)$

$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \forall_i : 0 \leq i < \#[] \vee 0 \leq i < \#(y \triangleright ys) : \#[] = \#(y \triangleright ys) \wedge [].i = (y \triangleright ys).i \rangle$
$= \{\#[] \neq \#(y \triangleright ys)\}$
$\langle \forall_i : 0 \leq i < \#[] \vee 0 \leq i < \#(y \triangleright ys) : False \wedge [].i = (y \triangleright ys).i \rangle$
$= \{\text{Lógica}\}$
$\langle \forall_i : 0 \leq i < \#[] \vee 0 \leq i < \#(y \triangleright ys) : False \rangle$
$= \{\text{Término constante}\}$
$False$

Análogamente se resuelve $f.(x \triangleright xs).[]$

Caso inductivo:
$f.(x \triangleright xs).(y \triangleright ys)$
$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \forall_i : 0 \leq i < \#(x \triangleright xs) \vee 0 \leq i < \#(y \triangleright ys) : \#(x \triangleright xs) = \#(y \triangleright ys) \wedge (x \triangleright xs).i = (y \triangleright ys).i \rangle$
$= \{\text{Definición de } \#\}$
$\langle \forall_i : 0 \leq i < 1 + \#xs \vee 0 \leq i < 1 + \#ys : 1 + \#xs = 1 + \#ys \wedge (x \triangleright xs).i = (y \triangleright ys).i \rangle$
$= \{\text{Separación de un término, aritmética}\}$
$\#xs = \#ys \wedge (x \triangleright xs).0 = (y \triangleright ys).0 \wedge \langle \forall_i : 0 \leq i < \#xs \vee 0 \leq i < \#ys : \#xs = \#ys \wedge (x \triangleright xs).(i+1) = (y \triangleright ys).(i+1) \rangle$
$= \{\text{Propiedad de .}\}$
$\#xs = \#ys \wedge x = y \wedge \langle \forall_i : 0 \leq i < \#xs \vee 0 \leq i < \#ys : \#xs = \#ys \wedge xs.i = ys.i \rangle$
$= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
$\#xs = \#ys \wedge x = y \wedge f.xs.ys$

Ejercicio 2

- $f.xs = \langle \forall_i : 0 \leq i < \#xs - 1 : xs.i < xs.(i+1) \rangle$

  Caso base:
  $f.[]$
  $= \{\text{Especificación}\}$
  $\langle \forall_i : 0 \leq i < \#[] - 1 : [].i < [].(i+1) \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\text{, aritmética}\}$
  $\langle \forall_i : 0 \leq i < -1 : [].i < [].(i+1) \rangle$
  $= \{\text{Rango vacío}\}$
  $True$

  Caso inductivo:
  $f.(x \triangleright xs)$
  $= \{\text{Especificación}\}$
  $\langle \forall_i : 0 \leq i < \#(x \triangleright xs) - 1 : (x \triangleright xs).i < (x \triangleright xs).(i+1) \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\text{, aritmética}\}$
  $\langle \forall_i : 0 \leq i < \#xs : (x \triangleright xs).i < (x \triangleright xs).(i+1) \rangle$
  $= \{\text{Separación de un término}\}$
  $(x \triangleright xs).0 < (x \triangleright xs).(0+1) \wedge \langle \forall_i : 0 \leq i < \#xs : (x \triangleright xs).(i+1) < (x \triangleright xs).(i+2) \rangle$
  $= \{\text{Propiedad de .}\}$
  $x < xs.0 \wedge \langle \forall_i : 0 \leq i < \#xs - 1 : xs.i < xs.(i+1) \rangle$
  $= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
  $x < xs.0 \wedge f.xs$

Ejercicio 3

- $m.xs = \langle Min_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i \rangle$

  Caso base:
  $m.[]$
  $= \{\text{Especificación}\}$
  $\langle Min_i : 0 \leq i < \#[] : [].i \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\}$
  $\langle Min_i : 0 \leq i < 0 : [].i \rangle$
  $= \{\text{Rango vacío}\}$
  ∞

  Caso inductivo:
  $m.(x \triangleright xs)$
  $= \{\text{Especificación}\}$
  $\langle Min_i : 0 \leq i < \#(x \triangleright xs) : (x \triangleright xs).i \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\}$
  $\langle Min_i : 0 \leq i < 1 + \#xs : (x \triangleright xs).i \rangle$
  $= \{\text{Separación de un término}\}$
  $(x \triangleright xs).0 `Min` \langle Min_i : 0 \leq i < 1 + \#xs : (x \triangleright xs).(i+1) \rangle$
  $= \{\text{Propiedad de .}\}$
  $x\ Min\ \langle Min_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i \rangle$
  $= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
  $x\ Min\ m.xs$

Ejercicio 4

- $f.xs = \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = sum(xs) - xs.i \rangle$

  Caso base:
  $f.[]$
  $= \{\text{Especificación}\}$
  $\langle \exists_i : 0 \leq i < \#[] : [].i = sum([]) - [].i \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\}$
  $\langle \exists_i : 0 \leq i < 0 : [].i = sum([]) - [].i \rangle$
  $= \{\text{Rango vacío}\}$
  $False$

  Caso inductivo:
  $f.(x \triangleright xs)$
  $= \{\text{Especificación}\}$
  $\langle \exists_i : 0 \leq i < \#(x \triangleright xs) : (x \triangleright xs).i = sum((x \triangleright xs)) - (x \triangleright xs).i \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\}$
  $\langle \exists_i : 0 \leq i < 1 + \#xs : (x \triangleright xs).i = sum((x \triangleright xs)) - (x \triangleright xs).i \rangle$
  $= \{\text{Separación de un término}\}$
  $(x \triangleright xs).0 = sum((x \triangleright xs)) - (x \triangleright xs).0 \vee \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : (x \triangleright xs).(i+1) = sum((x \triangleright xs)) - (x \triangleright xs).(i+1) \rangle$
  $= \{\text{Propiedad de .}\}$
  $x = sum((x \triangleright xs)) - x \vee \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = sum((x \triangleright xs)) - xs.i \rangle$
  $= \{\text{Propiedad de sum, aritmética}\}$
  $x = sum(xs) \vee \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = x + sum(xs) - xs.i \rangle$

No se puede aplicar la hipótesis inductiva, hay que generalizar.

- $g.xs.n = \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = n + sum(xs) - xs.i \rangle$

  Caso base:
  $g.[].n = \{\text{Especificación}\}$
  $\langle \exists_i : 0 \leq i < \#[] : [].i = n + sum([]) - [].i \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\}$
  $\langle \exists_i : 0 \leq i < 0 : [].i = n + sum([]) - [].i \rangle$
  $= \{\text{Rango vacío}\}$
  $False$

  Caso inductivo:
  $f.(x \triangleright xs).n = \{\text{Especificación}\}$
  $\langle \exists_i : 0 \leq i < \#(x \triangleright xs) : (x \triangleright xs).i = n + sum((x \triangleright xs)) - (x \triangleright xs).i \rangle$
  $= \{\text{Definición de } \#\}$
  $\langle \exists_i : 0 \leq i < 1 + \#xs : (x \triangleright xs).i = n + sum((x \triangleright xs)) - (x \triangleright xs).i \rangle$
  $= \{\text{Separación de un término}\}$
  $(x \triangleright xs).0 = n + sum((x \triangleright xs)) - (x \triangleright xs).0 \vee \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : (x \triangleright xs).(i+1) = n + sum((x \triangleright xs)) - (x \triangleright xs).(i+1) \rangle$
  $= \{\text{Propiedad de .}\}$
  $x = n + sum((x \triangleright xs)) - x \vee \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = n + sum((x \triangleright xs)) - xs.i \rangle$
  $= \{\text{Propiedad de sum, aritmética}\}$
  $x = n + sum(xs) \vee \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = x + n + sum(xs) - xs.i \rangle$
  $= \{\text{Asociatividad de } +\}$
  $x = n + sum(xs) \vee \langle \exists_i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = (x + n) + sum(xs) - xs.i \rangle$
  $= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
  $x = n + sum(xs) \vee g.xs.(x + n)$

  El resultado completo de esta derivación es:

  $$\begin{array}{l} f : [\text{Num}] \mapsto \text{Bool} \\ g : \text{Num} \mapsto [\text{Num}] \mapsto \text{Bool} \\ \hline \end{array}$$
  $$\begin{aligned} f.xs &\doteq g.xs.0 \\ g.[].n &\doteq False \\ g.(x \triangleright xs).n &\doteq n + sum(xs) \vee g.xs.(x+n) \end{aligned}$$

Ejercicio 5

- $P.xs.ys = \langle \exists_{as,bs} :: ys = as +\!\!+ xs +\!\!+ bs \rangle$

  Caso $(xs = [])$:
  $P.[].ys = \{\text{Especificación}\}$
  $\langle \exists_{as,bs} :: ys = as +\!\!+ [] +\!\!+ bs \rangle$
  $= \{\text{Definición de } +\!\!+\}$
  $\langle \exists_{as,bs} :: ys = as +\!\!+ bs \rangle$
  $= \{\text{Partición de rango } (as = [] \vee as \neq [])\}$
  $\langle \exists_{as,bs} : as = [] : ys = [] +\!\!+ bs \rangle \vee \langle \exists_{as,bs} : as \neq [] : ys = as +\!\!+ bs \rangle$
  $= \{\text{Anidado, rango unitario}\}$
  $\langle \exists_{bs} :: ys = [] +\!\!+ bs \rangle \vee \langle \exists_{as,bs} : as \neq [] : ys = as +\!\!+ bs \rangle$

$= \{\text{Definición de } +\!\!+\}$
$\langle \exists_{bs} :: ys = bs \rangle \vee \langle \exists_{as,bs} : as \neq [] : ys = as +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Intercambio}\}$
$\langle \exists_{bs} : ys = bs : True \rangle \vee \langle \exists_{as,bs} : as \neq [] : ys = as +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Rango unitario}\}$
$True \vee \langle \exists_{as,bs} : as \neq [] : ys = as +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Absorción para el } \vee\}$
$True$

Caso $(x \triangleright xs, ys = [])$:
$P.(x \triangleright xs).[]$
$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \exists_{as,bs} :: [] = as +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Igualdad de listas}\}$
$\langle \exists_{as,bs} :: [] = as \wedge [] = (x \triangleright xs) \wedge [] = bs \rangle$
$= \{\text{Igualdad de listas}\}$
$\langle \exists_{as,bs} :: [] = as \wedge False \wedge [] = bs \rangle$
$= \{\text{Rango vacío}\}$
$False$

Caso $(x \triangleright xs, y \triangleright ys)$:
$P.(x \triangleright xs).(y \triangleright ys)$
$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \exists_{as,bs} :: (y \triangleright ys) = as +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Partición de rango } (as = [] \vee as \neq [])\}$
$\langle \exists_{as,bs} : as = [] : (y \triangleright ys) = as +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle \vee \langle \exists_{as,bs} : as \neq [] : (y \triangleright ys) = as +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Anidado, rango unitario}\}$
$\langle \exists_{bs} :: (y \triangleright ys) = [] +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle \vee \langle \exists_{as,bs} : as \neq [] : (y \triangleright ys) = as +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Reemplazo de } as \leftarrow a \triangleright as \text{ (válido por } as \neq [])\}$
$\langle \exists_{bs} :: (y \triangleright ys) = [] +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle \vee \langle \exists_{a,as,bs} : (a \triangleright as) \neq [] : (y \triangleright ys) = (a \triangleright as) +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Definición de } +\!\!+\text{, igualdad de listas } (a \triangleright as \neq [] \equiv True)\}$
$\langle \exists_{bs} :: (y \triangleright ys) = (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle \vee \langle \exists_{a,as,bs} :: (y \triangleright ys) = (a \triangleright as) +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Igualdad de listas}\}$
$\langle \exists_{bs} :: y = x \wedge ys = xs +\!\!+ bs \rangle \vee \langle \exists_{a,as,bs} :: y = a \wedge ys = as +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Distributiva del } \wedge \text{ con respecto a } \exists\}$
$y = x \wedge \langle \exists_{bs} :: ys = xs +\!\!+ bs \rangle \vee \langle \exists_{a,as,bs} :: y = a \wedge ys = as +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Intercambio}\}$
$y = x \wedge \langle \exists_{bs} :: ys = xs +\!\!+ bs \rangle \vee \langle \exists_{a,as,bs} : y = a : ys = as +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Anidado, rango unitario}\}$
$y = x \wedge \langle \exists_{bs} :: ys = xs +\!\!+ bs \rangle \vee \langle \exists_{as,bs} :: ys = as +\!\!+ (x \triangleright xs) +\!\!+ bs \rangle$
$= \{\text{Modularización, hipótesis inductiva}\}$
$(y = x \wedge Q.xs.ys) \vee P.(x \triangleright xs).ys$

Donde Q queda especificado por:

$Q.xs.ys = \langle \exists_{bs} :: ys = xs +\!\!+ bs \rangle$

Caso $(xs = [])$:
$Q.[].ys$

$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \exists_{bs} :: ys = [] +\!\!+\, bs \rangle$
$= \{\text{Definición de } +\!\!+\}$
$\langle \exists_{bs} :: ys = bs \rangle$
$= \{\text{Intercambio}\}$
$\langle \exists_{bs} : ys = bs \rangle : True$
$= \{\text{Término constante}\}$
$True$

Caso $(x \triangleright xs, ys = [])$:
$Q.(x \triangleright xs).[]$
$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \exists_{bs} :: [] = (x \triangleright xs) +\!\!+\, bs \rangle$
$= \{\text{Igualdad de listas}\}$
$\langle \exists_{bs} :: [] = (x \triangleright xs) \wedge [] = bs \rangle$
$= \{\text{Igualdad de listas}\}$
$\langle \exists_{bs} :: False \wedge [] = bs \rangle$
$= \{\text{Intercambio, rango vacío}\}$
$False$

Caso $(x \triangleright xs, y \triangleright ys)$
$Q.(x \triangleright xs).(y \triangleright ys)$
$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \exists_{bs} :: (y \triangleright ys) = (x \triangleright xs) +\!\!+\, bs \rangle$
$= \{\text{Definición de } +\!\!+\}$
$\langle \exists_{bs} :: (y \triangleright ys) = x \triangleright (xs +\!\!+\, bs) \rangle$
$= \{\text{Igualdad de listas}\}$
$\langle \exists_{bs} :: y = x \wedge ys = xs +\!\!+\, bs \rangle$
$= \{\text{Distributiva de } \wedge \text{ con el } \exists\}$
$y = x \wedge \langle \exists_{bs} :: ys = xs +\!\!+\, bs \rangle$
$= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
$y = x \wedge Q.xs.ys$

El programa completo queda entonces:

$$
\begin{array}{|l}
P \;:\; [\mathrm{A}] \mapsto [\mathrm{A}] \mapsto \mathrm{Bool} \\
Q \;:\; [\mathrm{A}] \mapsto [\mathrm{A}] \mapsto \mathrm{Bool} \\
\hline
\begin{array}{rcl}
P.[].ys & \doteq & True \\
P.(x \triangleright xs).[] & \doteq & False \\
P.(x \triangleright xs).(y \triangleright ys) & \doteq & (y = x \wedge Q.xs.ys) \vee P.(x \triangleright xs).ys \\
Q.[].ys & \doteq & True \\
Q.(x \triangleright xs).[] & \doteq & False \\
Q.(x \triangleright xs).(y \triangleright ys) & \doteq & y = x \wedge Q.xs.ys
\end{array}
\end{array}
$$

Ejercicio 6

- $P.xs = \langle \exists_{as,bs} : xs = as +\!\!+\, bs : sum.as = sum.bs \rangle$

Caso ($xs = []$):
$P.[]$
$= \{$Especificación$\}$
$\langle \exists_{as,bs} : [] = as \mathbin{+\!\!+} bs : sum.as = sum.bs \rangle$
$= \{$Propiedad de $\mathbin{+\!\!+}\}$
$\langle \exists_{as,bs} : [] = as \mathbin{+\!\!+} bs \wedge as = [] \wedge bs = [] : sum.as = sum.bs \rangle$
$= \{$Anidado, rango vacío, término constante$\}$
$sum.[] = sum.[]$
$= \{$Reflexividad de $=\}$
$True$

Caso ($x \triangleright xs$):
$P.(x \triangleright xs)$
$= \{$Especificación$\}$
$\langle \exists_{as,bs} : (x \triangleright xs) = as \mathbin{+\!\!+} bs : sum.as = sum.bs \rangle$
$= \{$Partición de rango $(as = [] \vee as \neq [])\}$
$\langle \exists_{as,bs} : (x \triangleright xs) = as \mathbin{+\!\!+} bs \wedge as = [] : sum.as = sum.bs \rangle \vee \langle \exists_{as,bs} : (x \triangleright xs) = as \mathbin{+\!\!+} bs : sum.as = sum.bs \rangle$
$= \{$Anidado, rango unitario en el primer término.
Reemplazo de $as \leftarrow a \triangleright as$ en el segundo término (válido por $as \neq []$)$\}$
$\langle \exists_{bs} : (x \triangleright xs) = [] \mathbin{+\!\!+} bs : sum.[] = sum.bs \rangle \vee \langle \exists_{a,as,bs} : (x \triangleright xs) = (a \triangleright as) \mathbin{+\!\!+} bs : sum.(a \triangleright as) = sum.bs \rangle$
$= \{$Propiedad de $\mathbin{+\!\!+}$, propiedad de sum, igualdad de listas$\}$
$\langle \exists_{bs} : (x \triangleright xs) = bs : 0 = sum.bs \rangle \vee \langle \exists_{a,as,bs} : x = a \wedge xs = as \mathbin{+\!\!+} bs : sum.(a \triangleright as) = sum.bs \rangle$
$= \{$Rango unitario, propiedad de sum en el primer término.
Anidado en el segundo término$\}$
$x + sum.xs = 0 \vee \langle \exists_{a} : x = a : \langle \exists_{as,bs} : xs = as \mathbin{+\!\!+} bs : sum.(a \triangleright as) = sum.bs \rangle \rangle$
$= \{$Rango unitario, propiedad de $sum\}$
$x + sum.xs = 0 \vee \langle \exists_{as,bs} : xs = as \mathbin{+\!\!+} bs : x + sum.as = sum.bs \rangle$

No se puede aplicar la hipótesis inductiva, hay que generalizar.

- $Q.n.xs = \langle \exists_{as,bs} : xs = as \mathbin{+\!\!+} bs : n + sum.as = sum.bs \rangle$

Caso ($xs = []$):
$Q.n.[]$
$= \{$Especificación$\}$
$\langle \exists_{as,bs} : [] = as \mathbin{+\!\!+} bs : n + sum.as = sum.bs \rangle$
$= \{$Propiedad de $\mathbin{+\!\!+}\}$
$\langle \exists_{as,bs} : [] = as \mathbin{+\!\!+} bs \wedge as = [] \wedge bs = [] : n + sum.as = sum.bs \rangle$
$= \{$Anidado, rango vacío, término constante$\}$
$n + sum.[] = sum.[]$
$= \{$Definición de sum, aritmética$\}$
$n = 0$

Caso ($x \triangleright xs$):
$Q.n.(x \triangleright xs)$

$= \{\text{Especificación}\}$
$\langle \exists_{as,bs} : (x \triangleright xs) = as +\!\!+ bs : n + sum.as = sum.bs\rangle$
$= \{\text{Partición de rango } (as = [] \lor as \neq [])\}$
$\langle \exists_{as,bs} : (x \triangleright xs) = as +\!\!+ bs \land as = [] : n + sum.as = sum.bs\rangle \lor \langle \exists_{as,bs} : (x \triangleright xs) = as +\!\!+ bs : n + sum.as = sum.bs\rangle$
$= \{$Anidado, rango unitario en el primer término.
Reemplazo de $as \leftarrow a \triangleright as$ en el segundo término (válido por $as \neq []$)$\}$
$\langle \exists_{bs} : (x \triangleright xs) = [] +\!\!+ bs : n + sum.[] = sum.bs\rangle \lor \langle \exists_{a,as,bs} : (x \triangleright xs) = (a \triangleright as) +\!\!+ bs : n + sum.(a \triangleright as) = sum.bs\rangle$
$= \{$Propiedad de $+\!\!+$, propiedad de sum, aritmética, igualdad de listas$\}$
$\langle \exists_{bs} : (x \triangleright xs) = bs : n = sum.bs\rangle \lor \langle \exists_{a,as,bs} : x = a \land xs = as +\!\!+ bs : n + sum.(a \triangleright as) = sum.bs\rangle$
$= \{$Rango unitario, propiedad de sum en el primer término.
Anidado en el segundo término$\}$
$x + sum.xs = n \lor \langle \exists_a : x = a : \langle \exists_{as,bs} : xs = as +\!\!+ bs : n + sum.(a \triangleright as) = sum.bs\rangle\rangle$
$= \{$Rango unitario, propiedad de $sum\}$
$x + sum.xs = n \lor \langle \exists_{as,bs} : xs = as +\!\!+ bs : n + x + sum.as = sum.bs\rangle$
$= \{$Asociatividad de $+\}$
$x + sum.xs = n \lor \langle \exists_{as,bs} : xs = as +\!\!+ bs : (n + x) + sum.as = sum.bs\rangle$
$= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
$x + sum.xs = n \lor Q.(n + x).xs$

El resultado completo de esta derivación es:

$$
\begin{array}{l}
P : [\text{Num}] \mapsto \text{Bool} \\
Q : \text{Num} \mapsto [\text{Num}] \mapsto \text{Bool} \\
\hline
\qquad P.xs \doteq Q.0.xs \\
\qquad Q.n.xs \doteq n = 0 \\
\qquad Q.n.(x \triangleright xs) \doteq x + sum.xs = n \lor Q.(x + n).xs
\end{array}
$$

Ejercicio 7

- $P.xs.ys = \langle Min_{i,j} : 0 \leq i < \#xs \land 0 \leq j < \#ys : |xs.i - ys.j|\rangle$

  Caso ($xs = []$):
  $P.[].ys$
  $= \{\text{Especificación}\}$
  $\langle Min_{i,j} : 0 \leq i < \#[] \land 0 \leq j < \#ys : |[].i - ys.j|\rangle$
  $= \{\text{Anidado}\}$
  $\langle Min_i : 0 \leq i < \#[] : \langle Min_j : 0 \leq j < \#ys : |[].i - ys.j|\rangle\rangle$
  $= \{$Definición de $\#\}$
  $\langle Min_i : 0 \leq i < 0 : \langle Min_j : 0 \leq j < \#ys : |[].i - ys.j|\rangle\rangle$
  $= \{\text{Rango vacío}\}$
  $+\infty$
  Análogamente se resuelve $P.xs.[]$

  Caso ($x \triangleright xs, y \triangleright ys$):
  $P.(x \triangleright xs).(y \triangleright ys)$
  $= \{\text{Especificación}\}$

$\langle Min_{i,j} : 0 \leq i < \#(x \triangleright xs) \wedge 0 \leq j < \#(y \triangleright ys) : |(x \triangleright xs).i - (y \triangleright ys).j|\rangle$
$= \{$Definición de $\#\}$
$\langle Min_{i,j} : 0 \leq i < 1 + \#xs \wedge 0 \leq j < 1 + \#ys : |(x \triangleright xs).i - (y \triangleright ys).j|\rangle$
$= \{$Separación de un término, cambio de variable$\}$
$|(x \triangleright xs).0 - (y \triangleright ys).0|$ ‘Min‘ $\langle Min_{i,j} : 0 \leq i < \#xs \wedge 0 \leq j < \#ys : |(x \triangleright xs).(i+1) - (y \triangleright ys).(j+1)|\rangle$
$= \{$Propiedad de $.\}$
$|x - y|$ ‘Min‘ $\langle Min_{i,j} : 0 \leq i < \#xs \wedge 0 \leq j < \#ys : |xs.i - ys.j|\rangle$
$= \{$Hipótesis inductiva$\}$
$|x - y|$ ‘Min‘ $P.xs.ys$

Ejercicio 8

- $pares.xs = \langle N_i : 0 \leq i < \#xs : par.(xs.i)\rangle$

  Caso base:
  $pares.[]$
  $= \{$Especificación$\}$
  $\langle N_i : 0 \leq i < \#[] : par.([].i)\rangle$
  $= \{$Definición de $\#$, rango vacío$\}$
  0

  Caso inductivo:
  $pares.(x \triangleright xs)$
  $= \{$Especificación$\}$
  $\langle N_i : 0 \leq i < \#(x \triangleright xs) : par.((x \triangleright xs).i)\rangle$
  $= \{$Definición de $\#\}$
  $\langle N_i : 0 \leq i < 1 + \#xs : par.((x \triangleright xs).i)\rangle$
  $= \{$Separación de un término, cambio de variable$\}$
  $\langle N :: par.((x \triangleright xs).0)\rangle + \langle N_i : 0 \leq i < \#xs : par.((x \triangleright xs).(i+1))\rangle$
  $= \{$Propiedad de $.\}$
  $\langle N :: par.(x)\rangle + \langle N_i : 0 \leq i < \#xs : par.(xs.i)\rangle$
  $= \{$Hipótesis inductiva$\}$
  $\langle N :: par.(x)\rangle + pares.xs$

  El primer término es 1 o 0 dependiendo si x es par o no, es decir, tenemos:

  $$\begin{array}{|rcl} pares & : & [\text{Num}] \mapsto \text{Num} \\ \hline pares.[] & \doteq & 0 \\ pares.((2n) \triangleright xs) & \doteq & 1 + pares.xs \\ pares.((2n+1) \triangleright xs) & \doteq & pares.xs \end{array}$$

  Análogamente podemos derivar $impares.xs = \langle N_i : 0 \leq i < \#xs : impar.(xs.i)\rangle$

  Como queremos recorrer la lista una sola vez, necesitamos usar tuplas.

- $f.xs = (pares.xs, impares.xs)$

Caso $(xs = [])$:
$f.[]$
$=$ {Especificación}
$(pares.[], impares.[])$
$=$ {Definición de *pares* e *impares*}
$(0, 0)$

Caso $(2n \triangleright xs)$:
$f.(2n \triangleright xs)$
$=$ {Especificación}
$(pares.(2n \triangleright xs), impares.(2n \triangleright xs))$
$=$ {Definición de *pares* e *impares*}
$(1 + pares.xs, impares.xs)$
$=$ {Introducción de a y b como definiciones locales}
$(1 + a, b)$
$[\![a = pares.xs, b = impares.xs]\!]$
$=$ {Igualdad de pares}
$(1 + a, b)$
$[\![(a, b) = (pares.xs, impares.xs)]\!]$
$=$ {Hipótesis inductiva}
$(1 + a, b)$
$[\![(a, b) = f.xs]\!]$

El caso $(2n + 1) \triangleright xs$ se resuelve de la misma manera.

Así, la función f queda:

$$
\begin{array}{|l}
f \ : \ [\text{Num}] \mapsto (\text{Num, Num}) \\
\hline
\begin{array}{rcl}
f.[] & \doteq & (0, 0) \\
f.((2n) \triangleright xs) & \doteq & (1 + a, b) \\
f.((2n + 1) \triangleright xs) & \doteq & (a, 1 + b) \\
 & & [\![(a, b) = f.xs]\!]
\end{array}
\end{array}
$$