Práctico 10 - Programación imperativa

Ejercicio 1

- (a)
$exp(x, y) = ($
$\quad y = 0 \rightarrow 1$
$\quad [] \ y \neq 0 \rightarrow x * exp(x, y - 1)$
$)$
$\{R : x = X \wedge y = Y \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$
$\{P : y \geq 0 \wedge r * x^y = X^Y\}$
$\{Q : r = X^Y\}$
$\{B : y \neq 0\}$

  Como r no está definida, debemos derivar un programa S' para inicializar dicha variable:
$wp.(r \coloneqq E).(y \geq 0 \wedge r * x^y = X^Y)$
$= \{$Definición de $wp\}$
$y \geq 0 \wedge E * x^y = X^Y$
$= \{$Precondición, lógica$\}$
$E * X^Y = X^Y$
$= \{$Aritmética$\}$
$E \coloneqq 1$

  Luego procedemos a derivar el ciclo:
$P \wedge y \neq 0$
$= \{$Reemplazando P$\}$
$y \geq 0 \wedge r * x^y = X^Y \wedge y \neq 0$
$= \{$Definición de $exp\}$
$y \geq 0 \wedge r * x * x^{y-1} = X^Y \wedge y \neq 0$
$= \{$Sustitución en predicado$\}$
$P(r, y \coloneqq r * x, y - 1)$

  El programa queda de la siguiente forma:
$[\![$
$var\ x, y, r : Int$
$con\ X, Y : Int$
$\{R : x = X \wedge y = Y \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$
$r \coloneqq 1$
$\{P : y \geq 0 \wedge r * x^y = X^Y\}$
do $y \neq 0 \rightarrow r, y \coloneqq r * x, y - 1$
od
$\{Q : r = X^Y\}$
$]\!]$

- (b)
$\quad (y = 0 \rightarrow 1$
$[] \ y \neq 0 \rightarrow ($
$\qquad y\ mod\ 2 = 0 \rightarrow exp(x * x, y\ div\ 2)$

$[]\ y\ mod\ 2 = 1 \rightarrow x * exp(x, y-1)$
)
)
$\{R : x = X \wedge y = Y \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$
$\{P : y \geq 0 \wedge r * x^y = X^Y\}$
$\{Q : r = X^Y\}$
$\{B : y \neq 0\}$

Como r no está definida, necesitamos derivar un programa S' para inicializar dicha variable. Usaremos el programa que derivamos en el caso anterior.

Procedemos a derivar el ciclo:
$P \wedge y \neq 0 \wedge y\ mod\ 2 = 0$
$= \{$Reemplazando P$\}$
$y \geq 0 \wedge r * x^y = X^Y \wedge y \neq 0 \wedge y\ mod\ 2 = 0$
$= \{$Definición de $exp\}$
$y \geq 0 \wedge r * (x * x)^{y\ div\ 2} = X^Y \wedge y \neq 0 \wedge y\ mod\ 2 = 0$
$= \{$Sustitución de predicado$\}$
$P(x, y := x * x, y\ div\ 2)$

$P \wedge y \neq 0 \wedge y\ mod\ 2 = 1$
$= \{$Reemplazando P$\}$
$y \geq 0 \wedge r * x^y = X^Y \wedge y \neq 0 \wedge y\ mod\ 2 = 1$
$= \{$Definición de $exp\}$
$y \geq 0 \wedge r * x * x^{y-1} = X^Y \wedge y \neq 0 \wedge y\ mod\ 2 = 1$
$= \{$Sustitución en predicado$\}$
$P(r, y := r * x, y - 1)$

El programa queda de la siguiente forma:
$[\![$
$var\ x, y, r : Int$
$con\ X, Y : Int$
$\{R : x = X \wedge y = Y \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$
$r := 1$
$\{P : y \geq 0 \wedge r * x^y = X^Y\}$
$\underline{\textbf{do}}\ y \neq 0 \rightarrow ($
$\quad \underline{\textbf{if}}\ y\ mod\ 2 = 0 \rightarrow r, y := r * x, y - 1$
$\quad []\ y\ mod\ 2 = 1 \rightarrow r, y := x * x, y\ div\ 2$
$\quad \underline{\textbf{fi}}$
)
$\underline{\textbf{od}}$
$\{Q : r = X^Y\}$
$]\!]$

Ejercicio 2

- $\{R : n > 0\}$
  $\{Q : 0 < k \leq n \wedge n < 2 * k \wedge \langle \exists_j : 0 \leq j : k = 2^j \rangle\}$
  $\{P : 0 < k \leq n \wedge \langle \exists_j : 0 \leq j : k = 2^j \rangle\}$

$\{B : n \geq 2 * k\}$