Introducción a Programación Funcional

Programación Avanzada
UNRC
Pablo Castro

Un Lenguaje Funcional Simple

Definiremos un lenguaje funcional que tiene:

- Tipos básicos
- Expresiones (aritméticas, booleanas, etc)
- Definiciones de funciones.

Este lenguaje nos permite expresar **programas funcionales**.

Tipos y Expresiones

Para la definición de programas funcionales utilizamos diferentes tipos básicos:

- Booleanos: $true, false$
- Numéricos: $0, 1, 1.111, 3.1415$
- Caracteres: $'a', 'b', 'c', \ldots$

Y las expresiones correspondientes:

$p \wedge q$ $\qquad \neg p$ $\qquad x + 15 * 5$

Buscar más ejemplos

Funciones

Para definir una función se necesitan dos cosas

- Su perfil, diciendo que parámetros toma y que devuelve,
- Su definición por medio de expresiones

Formalmente:

Nombre de la función

$$f : A \to B$$

Perfil

$$f.x \doteq E$$

Parámetro formal

Expresión que define la función

Ejemplo

$$dup : Num \to Num$$
$$dup\ x \doteq x + x$$

Funciones Recursivas

Las funciones recursivas nos permiten hacer cómputos complejos

> Una función f se dice **recursiva** si en su definición aparece f

Veamos un ejemplo:

$$pow : Num \to Num$$

$$pow.x \doteq \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } 2 * pow.(x - 1)$$

Caso Base

Caso Recursivo

Evaluación

Para evaluar cualquier función utilizamos sustituciones:

$$
\begin{aligned}
& pow.3 \\
& = [\text{Def. } pow] \\
& 2 * (pow.2) \\
& = [\text{Def. } pow] \\
& 2 * (2 * (pow.1)) \\
& = [\text{Def. } pow] \\
& 2 * (2 * (2 * (pow.0))) \\
& = [\text{Def. } pow] \\
& 2 * (2 * (2 * (1))) \\
& = [\text{Arit.}] \\
& 8
\end{aligned}
$$

Si no tuviera caso base la función no estaría definida!

Caso Base

Pattern Matching

Podemos definir las funciones por casos según la forma de sus argumentos:

Si el parámetro es 0

$$pow : Num \rightarrow Num$$

$$pow.0 = 1$$

$$pow.(n+1) = n * pow.n$$

El pattern matching hace transparente cómo los diferentes casos depende de la forma de los parámetros

Si el parámetro **tiene la forma** n+1

Programas Funcionales

Un **programa funcional** es un conjunto definiciones de funciones

Dado un programa funcional podemos evaluar expresiones siguiendo las definiciones dadas:

$$fact : Num \times Num \to Num$$

$$fact(x, y) \doteq \text{if } x = 0 \text{ then } y \text{ else } fact.(n-1, x*y)$$

Otra definición posible de factorial

$$factorial : Num \to Num$$
$$factorial.n \doteq fact(n, 1)$$

Evaluar fact.3

Listas

Las listas son una secuencia lineal de elementos del mismo tipo:

Lista con n elementos

$$[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

Si $x_0, x_1, x_2, \ldots$ son de tipo A, entonces la lista tiene tipo $[\mathrm{A}]$.

$$[1+1, 2*3+100, 3/10]$$

Tiene tipo [Num]

$$[true, false, true \wedge false]$$

Tiene tipo [Bool]

$$[[], [1,2], [3+4, 15*100]]$$

Tiene tipo [[Num]]

Construyendo Listas

Las listas se definen inductivamente mediante dos operaciones:

$[]$ La lista vacía, es una lista sin elementos

$\triangleright : A \to [A] \to [A]$ Concatena un elemento a la cabeza de una lista

Toda lista se puede definir con estos constructores.

$[1, 2, 3]$ Se escribe: $1 \triangleright 2 \triangleright 3 \triangleright []$

$[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ Se escribe: $x_0 \triangleright x_1 \triangleright x_2 \cdots \triangleright x_n \triangleright []$

Tuplas

Dados tipos A y B,

$$A \times B$$

El conjunto de todos los pares *(a,b)* en donde $\mathbf{a}$ tiene tipo A y $\mathbf{b}$ tiene tipo B

A diferencia de las listas sus elementos no tienen que tener el mismo tipo

$(1,2)$ tiene tipo: $Num \times Num$

$('a',1)$ tiene tipo: $Char \times Num$

Para acceder a los elementos de una tupla usamos las proyecciones:

$$\langle \forall i : 1 \leq i \leq n : \langle a_1, \ldots, a_n \rangle.i = a_i \rangle$$

Funciones como Tipo de Datos

Las funciones se consideran otro tipo de datos más.

función g

función f

el resultado

Función que toma como parámetros funciones y devuelve una función

$$\circ : (B \to C) \to (A \to B) \to (A \to C)$$

$$\circ . g . f . x$$

Función de **alto orden**

Las funciones no son diferentes de cualquier otro tipo en funcional.

Currificación

Toda función:

$$f : A_0 \times \cdots \times A_n \to B$$

Se puede reescribir como:

$$f : A_0 \to (A_1 \to \ldots (A_n \to B))$$

Este proceso se llama **currificación.**

En honor a Haskell Curry

Podemos definir una función *curry* para hacer esto:

$$curry : (A \times B \to C) \to (A \to (B \to C))$$
$$curry\ f\ x\ y \doteq f(x, y)$$

Sistema de Tipos

Cada expresión bien formada es de algún tipo:

- Tipo básicos: *Num*, *Bool*, *Char*,
- Tipos Estructurados, Listas (*[A]*), Tuplas (*AxB*) o Funciones ($A \to B$).

Cuando una expresión *E* es de tipo *T* escribimos:

La expresiones que no pueden asignarsele un tipo son erróneas

$$E : T$$

Extensionalidad

Es una de las propiedades más importantes de funciones:

$$\langle \forall f, g :: \langle \forall x :: f.x = g.x \rangle \Rightarrow f = g \rangle$$

Dos funciones son iguales, si retornan lo mismo para iguales parámetros

Permite demostrar igualdad de funciones:

$$((h \circ g) \circ f).x$$
$$\equiv [\text{Def. } \circ]$$
$$(h \circ g).(f.x)$$
$$\equiv [\text{Def. } \circ]$$
$$h.(g.(f.x))$$
$$\equiv [\text{Def. } \circ]$$
$$h.((g \circ f).x)$$
$$\equiv [\text{Def. } \circ]$$
$$(h \circ (g \circ f)).x$$

Lo cual implica: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Definición por Casos

Podemos definir funciones por casos:

$$
\begin{array}{l}
f : A \to B \\
f.x \doteq \; B_0 \to E_0 \\
\qquad \Box B_1 \to E_1 \\
\qquad \vdots \\
\qquad \Box B_n \to E_n
\end{array}
$$

Es una función definida con n casos diferentes

Un ejemplo:

$$
\begin{array}{l}
max : Num \to Num \to Num \to Num \\
max.x.y.z \doteq x \leq y \wedge z \leq y \to y \\
\qquad\qquad\quad \Box \; y \leq x \wedge z \leq x \to x \\
\qquad\qquad\quad \Box \; x \leq z \wedge y \leq z \to z
\end{array}
$$

Definiciones Locales

Podemos introducir definiciones locales para evitar redundancia y mejorar la legibilidad:

$$raiz1 : Num \to Num \to Num \to Num$$
$$raiz1.x \doteq (-b - sqrt.disc)/(2 * a)$$
$$[\![disc = b^2 - 4 * a * c]\!]$$

No es una variable como en imperativo, no puede cambiarse su valor

La Importancia de las Expresiones

En funcional, la forma de computar consiste en evaluar expresiones:

- Intuitivamente, “5+10” debe evaluar a “15”,
- Debemos decidir como evaluar expresiones como: [2+3, pow.2]

Para resolver esto necesitamos las nociones de:

- Expresiones canónicas,
- Formal normal.

Expresiones Canónicas

Muchas expresiones denotan el mismo valor:

$$9, pow.3, 3 * 3, 10 - 1, \ldots$$

De cada conjunto de valores que denotan el mismo valor, se elige uno que es llamado la **expresión canónica** para ese valor

Ejemplos:

$9, pow.3, 3 * 3, 10 - 1, \ldots$ expresión canónica: 9

$[1] +\!\!+ [], [1], 1 \triangleright [], \ldots$ expresión canónica: $[1]$

Expresiones Canónicas

Definamos las expresiones canónicas para cada tipo:

- Booleanas: $true, false$
- Números: $0, 1, 2, 3, -1, 3.1415, \ldots$ es decir su representación decimal.
- Pares: (E_0, E_1) en donde E_0 y E_1 son expresiones canónicas.
- Listas: $[E_0, E_1, \ldots, E_n]$ donde E_i son expresiones canónicas.

Formal Normal

Dada una expresión, su **forma normal** es la expresión canónica la cual representa el mismo valor

Hay expresiones que no tienen formal normal:

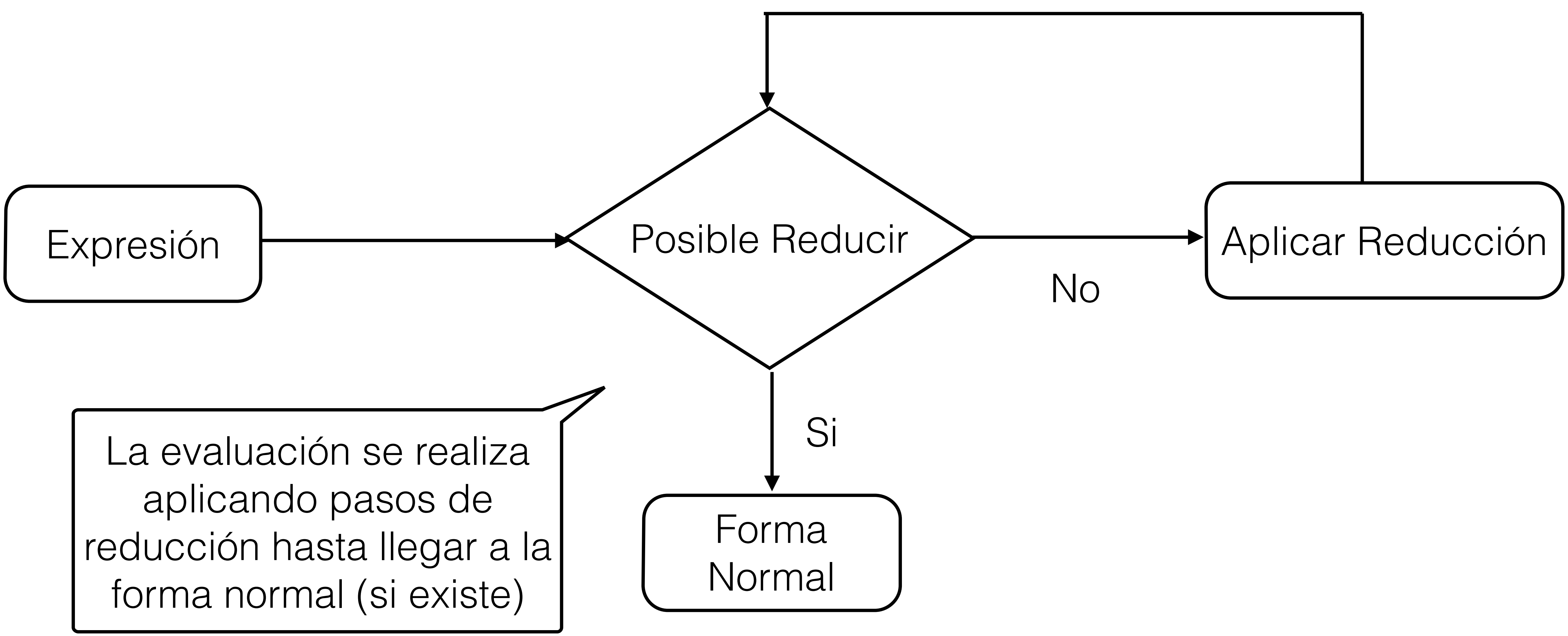
$$inf : Num$$
$$inf \doteq inf + 1$$

$$err : Num$$
$$err \doteq \frac{1}{0}$$

No tienen formal normal

Evaluación de Expresiones

La **evaluación de una expresión**, dado un programa funcional, es el procesos de encontrar la forma normal de la expresión usando las definiciones dadas.



Formas de Evaluación

Veamos un ejemplo de evaluación:

$$cuad : Num \to Num$$
$$cuad.x \doteq x * x$$

$$cuad.(3*5)$$
$$= [\text{Aritmética}]$$
$$cuad.15$$

Primero evaluamos el parámetro y después la función

$$= [\text{Def. } pow]$$
$$15 * 15$$
$$= [\text{Aritmética}]$$
$$225$$

Formas de Evaluación

Podríamos evaluar la expresión de otra forma:

$$
\begin{aligned}
& cuad.(3*5) \\
& = [\text{Def. } pow] \\
& (3*5)*(3*5) \\
& = [\text{Aritmética}] \\
& 15*(3*5) \\
& = [\text{Aritmética}] \\
& 15*15 \\
& = [\text{Aritmética}] \\
& 225
\end{aligned}
$$

Primero la función y
después los parámetros

Evaluaciones Aplicativa y Normal

Orden Aplicativo: se reduce siempre la expresión más adentro y más a la izquierda

Orden Normal: se reduce siempre la expresión más afuera y más a la izquierda

Propiedad: Si hay una forma normal el orden normal siempre la encuentra

Aplicativa vs Normal

Veamos la siguiente función:

$$K.x.y \doteq x$$

Evaluación Aplicativa:

$k.3.inf$
$= [\text{Def. } inf]$
$k.3.(inf + 1)$
$= [\text{Def. } inf]$
$k.3.((inf + 1) + 1)$
$= [\text{Def. } inf]$
$k.3.(((inf + 1) + 1) + 1)$
$\vdots$

No termina

Evaluación Normal:

$k.3.inf$
$= [\text{Def. } k]$
3

Devuelve la forma normal

Evaluación Lazy

Evaluación Lazy: Se evalúa el término más afuera de izquierda a derecha, en donde la misma expresión no es evaluada dos veces

$$
\begin{aligned}
& cuad.cuad.3 \\
= & \ [\text{Def. cuad}] \\
& x * x \\
= & \ [\text{Def. cuad}] \\
& x * x \\
& [\![x = 3 * 3]\!] \\
= & \ [\text{Aritmética}] \\
& x * x \\
& [\![x = 9]\!] \\
= & \ [\text{Reemplazo}] \\
& 9 * 9 \\
= & \ [\text{Aritmética}] \\
& 81
\end{aligned}
$$

La expresiones son evaluadas una sola vez

A lo sumo usa tantos pasos como la evaluación aplicativa

Siempre encuentra la formal normal, cuando existe

Utiliza más memoria que la forma aplicativa