Práctico 9 - Lógica de Hoare

Ejercicio 1

- (a) $\{wp\}\ x \coloneqq (x-y)*(x+y)\ \{(x+y^2=0)\}$

  $wp.x = x+y^2 = 0\ (x \coloneqq (x-y)*(x+y))$
  $= \{$Definición de $wp\}$
  $(x-y)*(x+y)+y^2=0$
  $= \{$Aritmética$\}$
  $x^2+xy-yx-y^2+y^2=0$
  $= \{$Aritmética$\}$
  $x=0 \rightarrow$ precondición más débil

- (b) $\{wp\}\ q,r \coloneqq q+1, r-y\ \{q*y+r=x\}$

  $wp.x = q*y+r = x\ (q,r \coloneqq q+1, r-y)$
  $= \{$Definición de $wp\}$
  $(q+1)*y+(r-y)=x$
  $= \{$Aritmética$\}$
  $qy+y+(r-y)=x$
  $= \{$Aritmética$\}$
  $x=qy+r$

- (c)
  $\{wp\}$
  $a \coloneqq a \equiv b;$
  $b \coloneqq a \equiv b;$
  $a \coloneqq a \equiv b;$
  $\{(a \equiv B) \wedge (b \equiv A)\}$

  $wp.a = (a \equiv b).(wp.b = (a \equiv b).(wp.a = (a \equiv b)((a \equiv B) \wedge (b \equiv A))))$
  $= \{$Definición de $wp\}$
  $wp.a = (a \equiv b).(wp.b = (a \equiv b).((a \equiv b \equiv B) \wedge (b \equiv A)))$
  $= \{$Definición de $wp\}$
  $wp.a = (a \equiv b).((a \equiv a \equiv b \equiv B) \wedge (a \equiv b \equiv A))$
  $= \{$Definición de $wp\}$
  $(a \equiv b \equiv a \equiv b \equiv b \equiv B) \wedge (a \equiv b \equiv b \equiv A)$
  $= \{$Lógica$\}$
  $(b \equiv B) \wedge (a \equiv A)$

Ejercicio 2

- $\{A = q*B+r\}\ q \coloneqq E; r \coloneqq r-B\ \{A = q*B+r\}$

  $wp.(q \coloneqq E).(wp.(r \coloneqq r-B).(A = q*B+r))$
  $= \{$Definición de $wp\}$
  $wp.(q \coloneqq E).(A = q*B+r-B)$
  $= \{$Definición de $wp\}$
  $A = E*B+r-B$
  $= \{$Antecedente$\}$

$q * B + r = E * B + r - B$
$= \{\text{Aritmética}\}$
$E = \frac{q*B+B}{B}$
$= \{\text{Aritmética}\}$
$E = \frac{q*B}{B} + \frac{B}{B}$
$= \{\text{Aritmética}\}$
$E = q + 1$

- $\{x * y + p * q = N\}\ x \coloneqq x - p; q \coloneqq E\ \{x * y + p * q = N\}$

  $wp.(x \coloneqq x - p).(wp.(q \coloneqq E).(x * y + p * q = N))$
  $= \{\text{Definición de } wp\}$
  $wp.(x \coloneqq x - p).(x * y + p * E = N)$
  $= \{\text{Definición de } wp\}$
  $(x - p) * y + p * E = N$
  $= \{\text{Antecedente}\}$
  $(x - p) * y + p * E = x * y + p * q$
  $= \{\text{Aritmética}\}$
  $E = \frac{x*y+p*q-x*y+p*y}{p}$
  $= \{\text{Aritmética}\}$
  $E = \frac{p*q+p*y}{p}$
  $= \{\text{Aritmética}\}$
  $E = q + y$

  Verificación:
  $x * y + p * q = N \Rightarrow wp.(x \coloneqq x - p).(wp.(q \coloneqq q + y).(x * y + p * q = N))$
  $= \{\text{Definición de } wp\}$
  $x * y + p * q = N \Rightarrow wp.(x \coloneqq x - p).(x * y + p * (q + y) = N)$
  $= \{\text{Definición de } wp\}$
  $x * y + p * q = N \Rightarrow (x - p) * y + p * (q + y) = N$
  $= \{\text{Aritmética}\}$
  $x * y + p * q = N \Rightarrow x * y - p * y + p * q + p * y = N$
  $= \{\text{Aritmética}\}$
  $x * y + p * q = N \Rightarrow x * y + p * q = N$
  $= \{\text{Lógica}\}$
  $True$

Ejercicio 3

- $\{x = A \wedge y = B\}$
  $\quad x \coloneqq x - y;$
  $\quad y \coloneqq x + y;$
  $\quad x \coloneqq y - x;$
  $\{x = B \wedge y = A\}$

  $x = A \wedge y = B \Rightarrow wp.(x \coloneqq x - y).(wp.(y \coloneqq x + y).(wp.(x \coloneqq y - x).(x = B \wedge y = A)))$
  $= \{\text{Definición de } wp\}$
  $x = A \wedge y = B \Rightarrow wp.(x \coloneqq x - y).(wp.(y \coloneqq x + y).(y - x = B \wedge y = A))$
  $= \{\text{Definición de } wp\}$
  $x = A \wedge y = B \Rightarrow wp.(x \coloneqq x - y).((x + y) - x = B \wedge x + y = A)$

$= \{$Definición de $wp\}$
$x = A \wedge y = B \Rightarrow ((x-y)+y)-(x-y) = B \wedge (x-y)+y = A$
$= \{$Aritmética$\}$
$x = A \wedge y = B \Rightarrow y = B \wedge x = A$
$= \{$Lógica$\}$
$True$

Ejercicio 4

- (a)
  $\{True\}$
  $if\ x \geq y \to skip$
  $[]\ x \leq y \to x, y \coloneqq y, x$
  fi
  $\{x \geq y\}$

  (1)
  $True \Rightarrow x \geq y \vee x \leq y$
  $= \{$Tricotomía, lógica$\}$
  $True$

  (2)
  $True \wedge x \geq y \Rightarrow wp.(skip).(x \geq y)$
  $= \{$Absorción para el $\wedge$, definición de $wp\}$
  $x \geq y \Rightarrow x \geq y$
  $= \{$Lógica$\}$
  $True$

  $True \wedge x \leq y \Rightarrow wp.(x, y \coloneqq y, x).(x \geq y)$
  $= \{$Absorción para el $\wedge$, definición de $wp\}$
  $x \leq y \Rightarrow y \geq x$
  $= \{$Lógica$\}$
  $True$

- (b)
  $\{True\}$
  $x, y \coloneqq y * y, x * x;$
  $if\ x \geq y \to x \coloneqq x + 1$
  $[]\ x \leq y \to y \coloneqq y - x$
  fi
  $\{x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$

  $wp.if.(x \geq 0 \wedge y \geq 0)$
  $= \{$Definición de $wp\}$
  $(x \geq y \vee x \leq y) \wedge (x \geq y \Rightarrow wp.(x \coloneqq x+1).(x \geq 0 \wedge y \geq 0)) \wedge (x \leq y \Rightarrow wp.(y \coloneqq y - x).(x \geq 0 \wedge y \geq 0))$
  $= \{$Definición de wp, aritmética$\}$
  $(x \geq y \vee x \leq y) \wedge (x \geq y \Rightarrow x \geq -1 \wedge y \geq 0) \wedge (x \leq y \Rightarrow x \geq 0 \wedge y \geq x)$

$True \Rightarrow wp.(x, y := y * y, x * x).(wp.if.(x \geq 0 \wedge y \geq 0))$
$= \{$Definición de $wp\}$
$True \Rightarrow wp.(x, y := y * y, x * x)((x \geq y \vee x \leq y) \wedge (x \geq y \Rightarrow x \geq -1 \wedge y \geq 0) \wedge (x \leq y \Rightarrow x \geq 0 \wedge y \geq x))$
$= \{$Lógica, definición de wp, aritmética$\}$
$(y^2 \geq x^2 \vee y^2 \leq x^2) \wedge (y^2 \geq x^2 \Rightarrow y^2 \geq -1 \wedge x^2 \geq 0) \wedge (y^2 \leq x^2 \Rightarrow y^2 \geq 0 \wedge x^2 \geq y^2)$
$= \{$Tricotomía, $(\forall_n :: n^2 \geq 0)$, lógica$\}$
$True \wedge (y^2 \geq x^2 \Rightarrow True) \wedge (y^2 \leq x^2 \Rightarrow x^2 \geq y^2)$
$= \{$Lógica$\}$
$True$

- (c)
  $\{True\}$
  $if\ \neg a \vee b \rightarrow a := \neg a$
  $[]\ a \vee \neg b \rightarrow b := \neg b$
  fi
  $\{a \vee b\}$

  (1)
  $True \Rightarrow (\neg a \vee b) \vee (a \vee \neg b)$
  $= \{$Lógica$\}$
  $True$

  (2)
  $\neg a \vee b \Rightarrow wp.(a := \neg a).(a \vee b)$
  $= \{$Definición de $wp\}$
  $\neg a \vee b \Rightarrow \neg a \vee b$
  $= \{$Lógica$\}$
  $True$

  $a \vee \neg b \Rightarrow wp.(b := \neg b).(a \vee b)$
  $= \{$Definición de $wp\}$
  $a \vee \neg b \Rightarrow a \vee \neg b$
  $= \{$Lógica$\}$
  $True$