Введение в Численные Методы
Аналитический отчёт по практическому заданию

Выполнила студентка 208 группы ВМК МГУ
Мазур Анастасия Вадимовна

Математическая постановка задачи

Функция $f(x)$ задана таблично на отрезке [0, a] в точках x_i, $x_i = ih$,
$i = 0, 1, ..., n, h = a/n$

- Построить интерполяционный многочлен по точкам x.
- Приблизить функцию по методу наименьших квадратов полиномом заданной степени n, $n < 9$. Оценить погрешность.
- Результаты сравнить.

Отрезок $[0, 2]$
Таблица значений функции в точках:

i	x	$f(x)$
0	0	0
1	0.2	0.006732
2	0.4	0.058195
3	0.6	0.030482
4	0.8	0.387483
5	1	0.958924
6	1.2	0.48283
7	1.4	1.802771
8	1.6	4.052411
9	1.8	2.403475
10	2	4.352169

Используемые алгоритмы, формулы и условия применимости

Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа

Чтобы интерполировать функцию построим полином в форме Лагранжа. Искомый полином $P_n(x)$ будет иметь следующий вид:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) Q_{n,i}(x),$$

где $Q_{n,i}(x)$ - полиномы степени n, "ориентированные"на точки x_i
в том смысле, что

$$Q_{n,i}(x) = \begin{cases} 0, x = x_j, & \forall j \neq i \\ 1, x = x_i \end{cases}$$

Полиномы имеют вид:

$$Q_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{j=n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

или в нашем случае, когда $x_i = ih$, то есть известны значения в точках, расстояние между которыми фиксировано, то выражение можно упростить до следующей записи:

$$Q_{n,i}(x) = h^{-n} \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-jh)}{(i-j)}$$

Учитывая, что полином в форме Лагранжа $P_n(x)$ представляет собой линейную комбинацию алгебраических уравнений $f(x_i)Q_{n,i}(x), Q_{n,i}(x)$ - полиному степени n, можно утверждать, что $P_n(x)$ будет иметь степень не более n.

Данные формулы будут далее использоваться в программной реализации.

Приближение функции методом наименьших квадратов

В методе наименьших квадратов аппроксимирующая функция $y(x)$ ищется в виде следующей суммы:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x), \quad m < n$$

В каждой точке сетки x_i можно подсчитать погрешность:

$$\delta_i = y_i - F(x_i) = y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Сумма квадратов этих величин называется суммарной квадратичной погрешностью

$$J = \sum_{i=0}^{n} \delta_i^n = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x_i) \right)^2$$

Главной задачей является подобрать такие коэффициенты a_k, чтобы суммарная квадратичная погрешность была минимальной.

Таким образом, построение наилучшего приближения сводится к классической задаче математического анализа об экстремуме функции нескольких переменных. Необходимым условием экстремума является равенство нулю в экстремальной точке всех первых частных производных функции.

$$\frac{\partial J}{\partial a_e} = -2\sum_{i=0}^{n}\left(y_i \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k\left(x_i\right)\right)\varphi_L\left(y_i\right) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, m.$$

Оставим члены, содержащие a_k, слева и поменяем в них порядок суммирования по индексам i и k. Члены, содержащие y_i, перенесем направо. В результате уравнения примут вид:

$$\sum_{k=0}^{m} \gamma_{lk} a_k = b_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m,$$

где

$$\gamma_{lk} = \sum_{i=0}^{n} \varphi_l\left(x_i\right)\varphi_k\left(x_i\right)$$

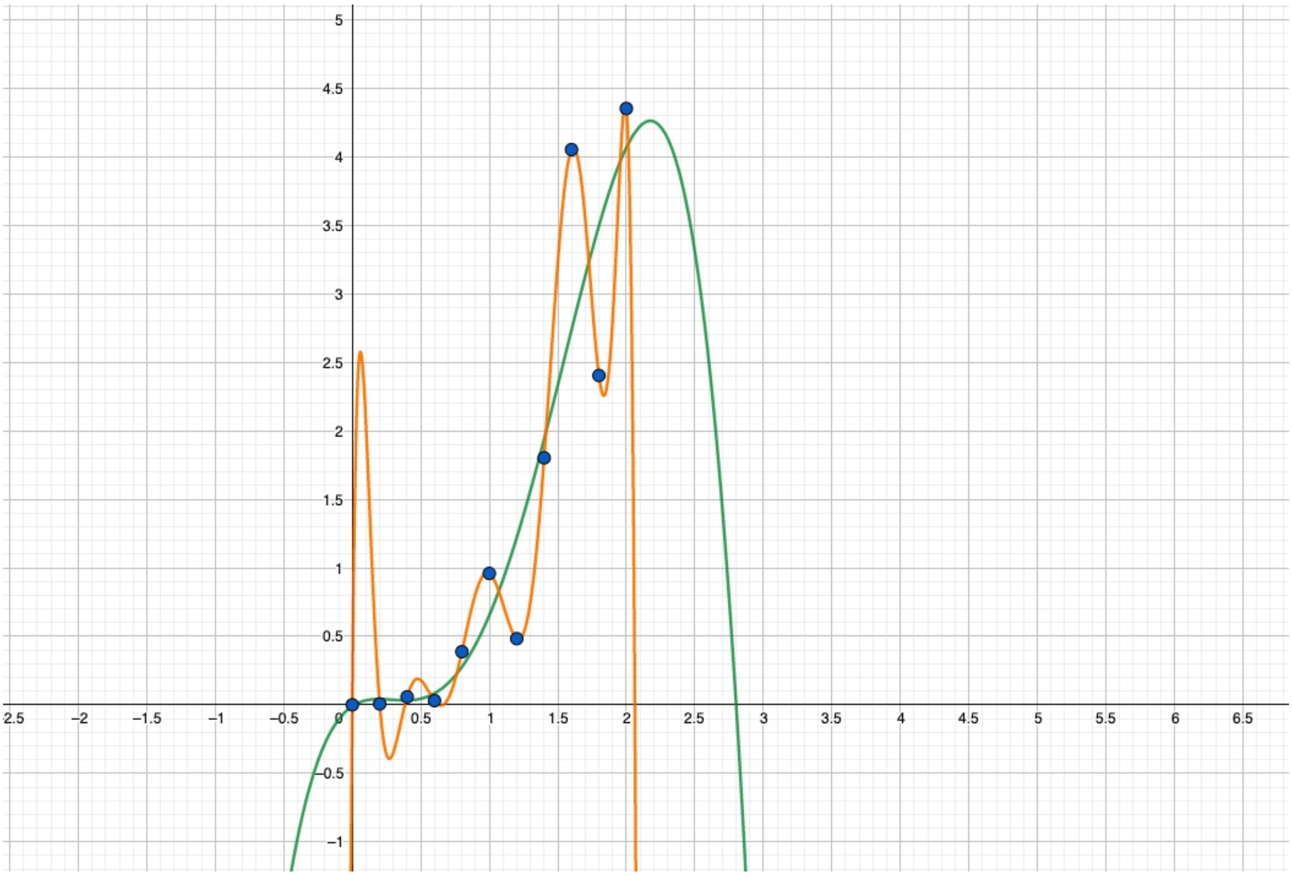
$$b_l = \sum_{i=0}^{n} \varphi_l(x_i) y_i$$

Мы получили систему линейных алгебраических уравнений, в которой роль неизвестных играют искомые коэффициенты разложения $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Используя найденные коэффициенты разложения, мы сможем построить наилучшее приближении сеточной функции по методу наименьших квадратов.

Данные формулы будут далее использоваться в программной реализации.

Цифровое представление результатов

Графическое представление результатов



Синие точки - точки, известные из условия
Оранжевая кривая - кривая интерполирующего многочлена в форме Лагранжа
Зелёная кривая - кривая, построенная по методу наименьших квадратов

Анализ результатов

Ключевым отличием двух рассматриваемых методов является то, что полином Лагранжа интерполирует функцию $f(x)$, точки которой нам известны, а метод наименьших квадратов эту функцию аппроксимирует.

То есть для полинома Лагранжа важно, чтобы полученная интерполяционная функция строго проходила через известные узлы, однако вне известных точек функция сильно "скачет". Такой разброс значений приводит к тому, что полученная интерполяционная кривая плохо характеризует поведение исходной функции $f(x)$ в целом. Это усложняет прогнозирование значений и дальнейшую работу с функцией, затрудняет визуальное восприятие графика.

Метод наименьших квадратов, напротив, на выходе даёт нам такую функцию, которая лишь приближает $f(x)$, то есть может совпадать с рассматриваемой функцией на очень маленьком наборе точек, но зато полученная кривая довольно удобна и наглядна.

Источники и ресурсы

Вводные лекции по численным методам (Д.П. Костомаров, А.П. Фаворский)
Для построения графика использовался ресурс *www.geogebra.com*