

Computació Numèrica

Laboratori 6

Sistemes d'equacions lineals

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

22 de març de 2018

drets d'autor

“Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives”

Índex

1 Sessió 6

- Matlab
- Mètodes directes
 - Mètodes directes
- Mètodes iteratius
 - Mètodes iteratius

2 Referències

MATLAB

Conceptes generals

Matlab treballa essencialment només amb un tipus d'objecte, una matriu rectangular de nombres reals o complexes.

En particular, per matrius d'una fila o columna parlarem de vectors.

Matrius

Una matriu s'obté entrant la llista explícita dels seus elements, separats per blancs o comes, fent servir punt i coma per acabar una fila, i entre claudàtors.

```
>> A = [1 1; 2 2]
```

Podem fer referència als elements de la matriu,

```
>> A(2,2) ens retorna 2,  
i modificar el seu valor si així convé >> A(2,2)=5.
```

Les matrius no s'han de dimensionar, això permet d'afegir files (

```
>> A=[A;3 3]
```

) o treure-les-en (

```
>> A=A(1:2,:)
```

) i retornem a la matriu A inicial.

Com definir una matriu?

- a) Per la llista explícita dels seus elements.
- b) Fent ús de funcions predefinides en Matlab:
`rand`, `randn`, `zeros`, `eye`, `ones`, `magic`,
`hilbert`, `diag`.
- c) Llegint dades des d'un fitxer extern.
- d) Executant un script definit per nosaltres.

Exercici

Exercici 1 Genereu una matriu quadrada aleatòria d'ordre la suma dels dígit del DNI. Per aquesta matriu:

- a) Obteniu la seva inversa, la seva transposada i la seva diagonal.
- b) Esborreu les columnes 2 i 4
- c) Eleveu totes les dades al cub.
- d) Obteniu l'arrel quadrada de les dades de la matriu. (sqrt)
- e) Calculeu el vector de mitjes per files (mean). Calculeu el vector de desviacions estàndar per files (std).

Exercici

Exercici 2 Definiu la matriu $U = (u_{ij})_{15 \times 15}$ i el vector $b = (b_i)_{15 \times 1}$ com

$$u_{ij} = \begin{cases} \cos(ij) & i \leq j, \\ 0 & i > j, \end{cases} \quad \text{i} \quad b_i = \tan(i).$$

Exercici 3 Definiu la matriu $L = (l_{ij})_{20 \times 20}$ i el vector $b = (b_i)_{20 \times 1}$ com

$$l_{ij} = \begin{cases} i + j & i \geq j, \\ 0 & i < j, \end{cases} \quad \text{i} \quad b_i = i.$$

Funcions matricials

- a) La trasposada d'una matriu A , s'obté per A' .
- b) La inversa d'una matriu A , s'obté per $\text{inv}(A)$.
- c) La diagonal d'una matriu A , s'obté per $\text{diag}(A)$.
- d) El determinant d'una matriu A , s'obté per $\text{det}(A)$.
- f) $\text{eig}(A)$ són els valors propis d'una matriu A .
- g) $\text{triu}(A)$, $\text{tril}(A)$.

Operacions aritmètiques

- a) Per a la divisió de matrius, tenim $/$ i \backslash
Si A és una matriu no singular, la solució al sistema $A * X = B$, la calcularem com $X = A \backslash B$;
en canvi per $X = B / A$ denotarem la solució del sistema $X * A = B$.
- b) Si A és una matriu quadrada, i p un escalar, A^p , és la potència p de la matriu A .

Funcions predefinides

- a) $A \setminus b$, solució del sistema $Ax = b$.
- b) $[L,U,P]=lu(A)$, factorització $PA = LU$.
- c) $L=chol(A)$, factorització $A = LL'$.
- d) $[Q,R]=qr(A)$, factorització $A = QR$.
- e) $[V,D]=eig(A)$, vectors i valors propis.
- f) $[S,V,D]=svd(A)$, descomposició en valors singulars.

Autoavaluació

Exercici Per a les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comproveu les igualtats següents:

- a) $(AB)C = A(BC),$
- b) $A(B + C) = AB + AC,$
- c) $(AB)^t = B^t A^t.$
- d) $(A + B)C = AC + BC.$

Sistemes d'equacions lineals

Mètodes directes

Sistemes TRIANGULARS

Exercici 4 Escriviu un script de Matlab per trobar la solució d'un sistema lineal triangular superior (inferior) $AX = B$ pel mètode de substitució enrera (endavant). Feu jocs de proves.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y + z - t = 8 \\ 4y - z + 2t = -3 \\ 2z + 3t = 11 \\ 5t = 15 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x = -10 \\ x + 3y = 4 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ -x + 3y - 6z - t = 5 \end{cases}$$

Mètode de Gauss

Exercici 5 Resoleu per eliminació gaussiana el sistema lineal $Ax = b$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exercici 6 Resoleu el sistema

$$\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ -2.998x + 6.001y = 2 \end{cases}$$

per qualsevol mètode que conegueu. Compareu la solució amb la del sistema obtingut substituint la segona equació per $-2.998x + 6y = 2$. Com són les dues solucions? És un problema estable?

Factorització Txoleski

Exercici 7 Trobeu la descomposició de Txoleski i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següent:

$$a) \quad \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

En Matlab la factorització $R'R = A$ s'obté per $[R]=\text{chol}(A)$.

Tota matriu simètrica i definida positiva té factorització $R'R = A$.

Factorització QR

Exercici 8 Trobeu la descomposició QR i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següents:

$$\begin{cases} 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.06x_3 + 0.05x_4 = 0.23 \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 + 0.08x_3 + 0.07x_4 = 0.32 \\ 0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.10x_3 + 0.09x_4 = 0.33 \\ 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.10x_4 = 0.31 \end{cases}$$

En Matlab la factorització $A = QR$ s'obté per $[Q,R]=\text{qr}(A)$.

Vector residu

Com a criteri de comparació entre la solució exacta \mathbf{x} , i la solució calculada $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$, del sistema lineal $A\mathbf{x} = b$ definim el vector residu $r(\mathbf{x}^*)$ per:

$$r(\mathbf{x}^*) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}^* = b - A\mathbf{x}^*,$$

llavors es verifica:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \mathcal{K}(A) \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \mathcal{K}(A) \frac{\|r(\mathbf{x}^*)\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (1)$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|} \leq \mathcal{K}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad (2)$$

Nombre de condició

Es diu que el sistema $Ax = B$ està mal condicionat si A té un nombre de condició gran.

Matlab

- ✓ `cond(A,p)` Mesura el mal condicionament
`cond(eye)=1`
`cond(matsingular)= ∞`
- ✓ `rcond(A,p)` Mesura el bon condicionament
`rcond(eye)=1`
`rcond(matsingular)=0`

Exercici 9

Resoleu sistema $Ax = b$ si

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array} \right)$$

Comproveu, després, que $(6, -7.2, 2.9, -0.1)^t$ i $(1.50, 0.18, 1.19, 0.89)^t$ donen residus molt petits.

Estimeu el nombre de condició de la matriu.

Sabeu donar una explicació del que s'observa?

Exercici 10

Feu una predicció de com petits canvis en A afecten a la solució x del sistema d'equacions $Ax = b$. Poseu a prova la vostra predicció per a $b = (100, 1)^t$ i les matrius següents

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Sabeu donar una explicació del que s'observa?

Sistemes d'equacions lineals

Mètodes iteratius

Mètodes iteratius

Matlab

- ✓ `D=diag(diag(A));` Diagonal de la matriu A .
- ✓ `d=diag(1 ./diag(A))` Inversa de la diagonal de A .
- ✓ `L=tril(A,-1)` Part triangular inferior de la matriu A .
- ✓ `U=triu(A,1)` Part triangular superior de la matriu A .

Mètode de Jacobi

$$Ax = b \iff x^{k+1} = B_J x^k + c_J, \quad \forall k \geq 0.$$

✓ $B_J = -D^{-1}(L + U)$

✓ $c_J = D^{-1}b$

✓ $\rho(B_J) < 1$

✓ $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$

Matriu d'iteració del mètode.

Vector d'iteració del mètode.

Convergència a priori.

Convergència a posteriori.

Mètode de Gauss-Seidel

$$Ax = b \iff x^{k+1} = B_{GS} x^k + c_{GS}, \quad \forall k \geq 0.$$

✓ $C = (L + D)^{-1}$

Matriu auxiliar del mètode.

✓ $B_{GS} = -C U$

Matriu d'iteració del mètode.

✓ $c_{GS} = C b$

Vector d'iteració del mètode.

✓ $\rho(B_{GS}) < 1$

Convergència a priori.

✓ $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$

Convergència a posteriori.

Autoavaluació

Exercici 11 Escriviu un programa que implementi els algorismes de Jacobi i Gauss - Seidel. Proveu-lo per:

$$\text{a) } (A|b) = \left(\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

Autoavaluació

Exercici 11-continuació Introduiu un test de convergència per als algoritmes de Jacobi i Gauss - Seidel. Proveu-lo per

$$\text{a) } (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & -7 & 0 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\text{b) } (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & -8 & 4 & 10 & -10 \\ 3 & -13 & 3 & 3 & -39 \\ -6 & 4 & 2 & -18 & -16 \end{array} \right).$$

Autoavaluació

Exercici 12 Resoleu pel mètode de Jacobi i de Gauss-Seidel els sistemes $Ax = b$ donat per

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

prenent $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$ i una tolerància $0.5 \cdot 10^{-12}$.
Quantes iteracions calen?

Autoavaluació

Exercici 3 Feu servir $(0.33116, 0.70000)^t$ com a punt inicial per resoldre pel mètode de Gauss-Seidel el sistema $Ax = b$. Què passa?

$$A = \begin{pmatrix} 0.96326 & 0.81321 \\ 0.81321 & 0.68654 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.88824 \\ 0.74988 \end{pmatrix}.$$

Guies de MATLAB



MathWorks Documentation Center,
Matlab Users's Guide online



MathWorks Documentation Center,
Matlab Functions's Guide online



MathWorks Documentation Center,
Matlab Users's Guide in pdf



MathWorks Documentation Center,
Tutorials