

Computació Numèrica

Laboratori 12. Integració numèrica amb Matlab

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

15 de maig de 2018

drets d'autor

“Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives”

Índex

1 Fórmules de Newton-Côtes

2 Mètode de Romberg

3 Referències

Fórmula del Rectangle o punt mig.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \underbrace{h \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{R(f,h)} + \overbrace{\frac{(b-a)}{24} h^2 f''(\xi)}^{E\{f\}},$$

$$h = b - a, \quad a < \xi < b.$$

Fórmula del trapezi.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \underbrace{\frac{h}{2} \cdot (f(a) + f(b))}_{T(f,h)} - \underbrace{\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)}_{E\{f\}},$$

$$h = b - a, \quad a < \xi < b.$$

Fórmula de Simpson.

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\frac{h}{3} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)}_{S(f,h)} - \underbrace{\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{iv}(\xi)}_{E\{f\}},$$

$$h = \frac{b-a}{2}, \quad a < \xi < b.$$

Exercici 1

Comproveu que:

$$\text{a) } S(f, h) = \frac{2}{3}R(f, h) + \frac{1}{3}T(f, h)$$

$$\text{b) } S(f, h) = \frac{4}{3}T\left(f, \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}T(f, h)$$

Exercici 2

Trobeu la distància que ha recorregut un mòbil a partir de les dades de la següent taula:

$t \text{ min}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$v \text{ m/s}$	1	8	4	3.5	5	1	0

- a) Representa gràficament les dades de la taula.
- b) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode del punt mig.
- c) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode dels trapezis.
- d) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode de Simpson.

Exercici 3

- R(f,h)** Escriviu un script per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta del rectangle.
- T(f,h)** Escriviu un script per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta dels trapezis. Consulteu l'ajuda de Matlab per la comanda trap.
- S(f,h)** Escriviu un script per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta de Simpson.

Les dades han d'ésser a , b , i n , així com una function que avaluï $f(x)$ per a qualsavol $x \in [a, b]$ i el resultat un valor aproximat de

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Joc de proves

Joc de proves per als programes d'integració numèrica.

$$\text{a) } I = \int_1^2 \ln(x) dx, \quad \int \ln(x) dx = x \ln(x) - x.$$

$$\text{b) } I = \int_0^{\pi/4} \cos^2(x) dx, \quad \int \cos^2(x) dx = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}.$$

Mètode de Romberg

Per $h = (b - a)/n$, $x_k = a + kh$ i $k = 0 \div n$ calculem

$$T(h), \quad T\left(\frac{h}{2}\right), \quad T\left(\frac{h}{4}\right), \quad \dots, \quad T\left(\frac{h}{2^p}\right)$$

llavors, l'esquema d'extrapolació de Richardson per $L \geq 1$, és:

$$T_{L+1}(h) = T_L(h) + \frac{T_L(h) - T_L(2h)}{4^L - 1}$$

$$T_1(h) = T(h).$$

Taula d'extrapolació

$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h^4)$	$\mathcal{O}(h^6)$	$\mathcal{O}(h^8)$
1: $T_1(h)$			
2: $T_1(h/2)$	3: $T_2(h/2)$		
4: $T_1(h/4)$	5: $T_2(h/4)$	6: $T_3(h/4)$	
7: $T_1(h/8)$	8: $T_2(h/8)$	9: $T_3(h/8)$	10: $T_4(h/8)$
\vdots	\dots	\dots	\dots

Taula : Mètode de Romberg

Exemple

$$\int_0^{0.8} \frac{\sin t}{t} dt \approx 0.772095 \pm 0.0000005$$

h	T_1	T_2	T_3
0.8	0.758680		
0.4	0.768760	0.772120	
0.2	0.771262	0.772096	0.772095
0.1	0.771887	0.772095	0.772095

Taula : Mètode de Romberg

Guies de MATLAB



MathWorks Documentation Center,
Matlab Users's Guide online



MathWorks Documentation Center,
Matlab Functions's Guide online



MathWorks Documentation Center,
Matlab Users's Guide in pdf



MathWorks Documentation Center,
Tutorials