

Enunciat - B

2.1 Representació de nombres

Les dues expressions següents:

$$f(x) = 1.01e^{4x} - 4.62e^{3x} - 3.11e^{2x} + 12.2e^x - 1.99,$$

$$F(x) = (((1.01z - 4.62)z - 3.11)z + 12.2)z - 1.99, \quad z = e^x.$$

són dues fórmules diferents per a calcular la mateixa funció.

1. Cerca documentació sobre l'ús de la regla de Horner per avaluar polinomis. Escriu un breu resum del que has entès (màxim 1/2 full).
Dóna les teves fonts bibliogràfiques.
2. Fent ús de l'aritmètica de **tres xifres** arrodonint calculeu el valor de les dues expressions per a $x = 1.53$. Per què donen diferent $f(1.53)$ i $F(1.53)$? **(No matlab)**
3. Fent ús de l'aritmètica de **quatre xifres** arrodonint calculeu el valor de les tres expressions per a $x = 0.925$. Per què donen diferent $f(0.925)$ i $F(0.925)$? **(No matlab)**
4. Calculeu en cada cas l'error relatiu percentual. Quina expressió dona una millor aproximació?

2.2 Algoritmes

Considereu el següent algoritme per calcular el nombre π : "Genereu n parelles de nombres aleatoris $\{(x_k, y_k)\}_{k=1 \div n}$ de l'interval $[0, 1]$. Compteu el nombre m dels que es troben dins del primer quadrant del cercle unitat. Resulta que π és el límit de la successió $\pi_n = \frac{4m}{n}$."

1. Construiu un programa en **Matlab** per calcular el terme de la successió π_n .
2. Feu un joc de proves per a valors de $n = 7^k$, per exemple $1 \leq k \leq 12$. El resultat ha d'ésser una taula de la forma:

| n | Valor π_n | Error abs. | Error rel. |
|-----|---------------|------------|------------|
|-----|---------------|------------|------------|

3. A partir dels valors de la taula, l'exactitud creix o decreix en funció de n ? Quants decimals iguals obteniu? Quantes xifres significatives obteniu? Els resultats del teu càlcul es corresponen amb el concepte *límit d'una successió*? Raona totes les teves respostes.

2.3 Expressions recurrents

Calcular valors aproximats del nombre irracional ϕ , conegut com a nombre d'or o proporció àuria, el valor del qual és $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Llegiu l'apartat [1.1 The Golden Ratio](#) del llibre de Cleve Moler ([4]) fundador i principal promotor de Matlab.

En aquest apartat Moler proposa dos mètodes per a calcular ϕ :

Primer La fracció contínua; $\phi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$

Segon El límit del quocient de termes consecutius de la successió de Fibonacci;

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}},$$

on F_n es tal que $F_{-1} = F_0 = 1$ i la recurrència $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, si $n \in \mathbb{N}$.

Es demana:

1. Cerca documentació sobre els conceptes *nombre d'or*, *fracció contínua*, *successió recurrent*, *successió de Fibonacci*. Escribe un breu resum del que has entès (màxim 1 full). Dóna les teves fonts bibliogràfiques.
2. Escriure dues funcions en Matlab, (**Orfract** i **Orfib**) per avaluar l'exactitud dels dos mètodes d'aproximació citats fent ús de n termes en la fracció contínua i n termes de la successió de Fibonacci respectivament.
3. Feu un joc de proves per a valors de n , per exemple $1 \leq n \leq 1000$. Comenta els resultats obtinguts. El resultat ha d'ésser una taula de la forma

| n | Valor Orfract | Error abs. | Error rel. | Valor Orfib | Error abs. | Error rel. |
|-----|---------------|------------|------------|-------------|------------|------------|
|-----|---------------|------------|------------|-------------|------------|------------|

4. A partir dels valors de la taula, l'exactitud creix o decreix en funció de n ? Quants decimals iguals obteniu? Quantes xifres significatives obteniu? Els resultats del teu càlcul es corresponen amb el concepte *límit d'una successió*? Raona totes les teves respostes.

2.4 Solucions d'equacions no lineals

Calcular valors aproximats de l'arrel positiva de l'equació

$$(5 - x)e^x = 5.$$

Es demana:

1. Quantes solucions diferents de $x = 0$ té l'equació $(5 - x)e^x = 5$? Doneu intervals que separin les arrels. Justifica les teves respostes.
2. Calculeu la **arrel positiva no nul·la** (mínim 6 decimals correctes) per cadascun dels següents mètodes:
 - (a) Mètode de la bisecció. Presenteu els resultats en una taula.
 - (b) Mètode de la secant. Presenteu els resultats en una taula.
 - (c) Mètode de Newton. Presenteu els resultats en una taula.

Per cada mètode, doneu els punts inicials i el criteri d'aturada.

3. Considereu els mètodes iteratius següents:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad x_{n+1} &= 5 - \frac{5}{e^{x_n}}, \\ \text{ii)} \quad x_{n+1} &= \ln\left(\frac{5}{5 - x_n}\right), \end{aligned}$$

- (a) Demostreu la convergència dels mètodes a l'arrel no nul·la de $(5 - x)e^x = 5$ fent ús del teorema de convergència (sense calcular les iteracions en **Matlab**). Doneu un interval que asseguri la convergència dels mètodes de la iteració simple. (**"a priori"**)
 - (b) Obteniu el punt fix amb la mateixa tolerància prèvia. Doneu el punt inicial i el criteri d'aturada (fins a 6 decimals correctes). Presenteu els resultats en una taula.
4. Representeu en un gràfic **els logaritmes dels valors absoluts** dels errors relatius aproximats:

$$r^{n+1} = \frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n+1}}.$$

Cada mètode un color diferent. A partir de les gràfiques realitzades, quin seria el millor procediment per obtenir la solució positiva de l'equació $(5 - x)e^x = 5$. Raona les teves respostes.

Formats taules resultats mètodes iteratius

Taula I Per als mètodes iteratius d'interval encaixats o que necessiten dos punts per començar heu de tabular almenys la següent informació:

| | |
|-----------------|------------------------------------|
| n | nombre iteracions |
| a_n | extrem inferior interval |
| b_n | extrem superior interval |
| x_n | nou iterat calculat |
| $f(x_n)$ | valor de la funció en x_n |
| $(b_n - a_n)/2$ | cota superior error (per bisecció) |

Taula II Per als mètodes iteratius d'un punt per començar heu de tabular almenys la següent informació:

| | |
|-----------------|-----------------------------|
| n | nombre iteracions |
| x_n | nou iterat calculat |
| $f(x_n)$ | valor de la funció en x_n |
| $x_n - x_{n-1}$ | diferència d'ordenades |