Computació Numèrica

Laboratori 9
SVD

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

24 d'abril de 2018

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Índex

Sistemes d'equacions lineals

Mínims quadrats

Equacions normals

$Ax = b\,,$ m files i n incògnites amb rang(A)=n :

- ✓ $A'AX = A'b$ Equacions normals.
- ✓ $RX = Q'b$ Solució per factorització.
- ✓ $\|b - AX\|_2$ Residu mínim.
- ✓ $||Y - \hat{Y}||_2$ Estimació error.
- ✓ $X = A^+ b$ Solució per pseudoinversa.

Exercici 1

Determineu la solució d'error quadràtic mínim per al sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & 2 \\ x & & & + & z & + & 2t & = & 3 \\ x & + & y & & & + & t & = & 4 \\ & - & y & + & 2z & & & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \end{array}\right.$$

1. Escriviu el sistema lineal de la forma $Ax = b$. Escriviu les equacions normals en forma matricial $Bx = c$.
2. Doneu la solució de les equacions normals. Expliqueu quin mètode de resolució feu servir per al sistema de les equacions normals.
3. Calculeu el vector residu en la solució. Comproveu que $(0, -1, 2, -1)^t$ té residu més gran.

Exercici 2

Els pesos atòmics de loxigen i del nitrogen són aproximadament $O = 16$ i $N = 14$; utilitzeu els pesos moleculars dels sis òxids de nitrogen donats a continuació per tal d'ajustar els pesos atòmics per mínims quadrats

Compost	NO	N_2O	NO_2	N_2O_3	N_2O_5	N_2O_4
Pes molecular	30.006	44.013	46.006	76.012	108.010	92.011

1. Plantejeu el problema com un sistema lineal. Escriviu el sistema lineal de la forma $Ax = b$. Estudieu si té solució.
2. Escriviu les equacions normals associades a la resolució per mínims quadrats, en forma matricial $Bx = c$. Determineu la solució de les equacions normals.
3. Calculeu el vector residu en la solució. Comproveu que $O = 16$ i $N = 14$ t residu més gran.

Exercici 3

La taula següent ens dóna el nombre de bacteris per unitat de volum en funció del temps transcorregut:

Hores x	0	1	2	3	4	5	6
Bacteris y	32	47	65	92	132	190	275

Calculeu una corba del tipus $y = ab^x$ que aproximi aquest núvol de punts. Feu una predicció del nombre de bacteris al cap de 7 hores. Cal que feu us de la rutina `svd` del `Matlab` que dóna la descompossició en valors singulars.

Exercici 4

X	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
Y	0.40	0.50	0.90	1.28	1.60	1.66	2.02

Empreu una tècnica de mínims quadrats per ajustar la taula de dades a funcions del tipus:

1. $y = a_0 + a_1 x$. Determineu a_0 i a_1, doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
2. $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$. Determineu a_0, a_1, a_2, a_3 i a_4, doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
3. $y = a x^{\alpha}$. Determineu a i α, doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
4. Quin dels tipus sembla el més adient. Per què?

Valors i vectors propis

Valors singulars

Mètode de les potències

Calculeu, amb quatre xifres significatives, el valor propi dominant de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x^0_{max} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^0_{min} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Valor propi de mòdul màxim

1.- $x^0 = (\; , \; , \dots , \;)^t$

2.- $z^k = Ax^k$

3.- $m_{k+1} = \|z^k\|_\infty$

4.- $x^{k+1} = \dfrac{1}{m_{k+1}} z^k$

5.- **criteri de parada** $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty < \epsilon$

L'aproximació del valor propi és m_{k+1}
i la del vector propi és x_{k+1}.

Exercici 5

Calculeu els valor propis de mòdul màxim i mínim, així com els vectors propis corresponents de la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 12 & 3 & 5 \\ 3 & 13 & 0 & 7 \\ 2 & 11 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 6

Afegiu el criteri del quocient de Rayleigh per a matrius simètriques als vostres scripts del mètode de la potència. Calculeu els valor propis de mòdul màxim i mínim, així com els vectors propis corresponents de les matrius següents:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 12 & 16 & -15 \\ 12 & 388 & 309 & 185 \\ 16 & 309 & 312 & 80 \\ -15 & 185 & 80 & -600 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercici 7

Determineu els valors propis de les matrius seguents pel mètode **QR**.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 12 & 16 & -15 \\ 12 & 388 & 309 & 185 \\ 16 & 309 & 312 & 80 \\ -15 & 185 & 80 & -600 \end{pmatrix}$$

Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center,
  Tutorials