Sistemes d'equacions lineals (I)

1 Sistemes d'equacions lineals. Mètodes directes.

1 Resoleu per eliminació gaussiana el sistema lineal $Ax = b$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2 Trobeu la descomposició LU i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següents:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & -8 & 4 & 10 & -10 \\ 3 & -13 & 3 & 3 & -39 \\ -6 & 4 & 2 & -18 & -16 \end{array}\right),$$

3 Trobeu la descomposició QR i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següents:

$$a)\ \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 7 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -2 \end{array} \right. ;$$

$$b)\ \left\{ \begin{array}{rcl} 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.06x_3 + 0.05x_4 & = & 0.23 \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 + 0.08x_3 + 0.07x_4 & = & 0.32 \\ 0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.10x_3 + 0.09x_4 & = & 0.33 \\ 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.10x_4 & = & 0.31 \end{array} \right. .$$

2 Nombre de condició d'una matriu.

4 Resoleu sistema $Ax = b$ si

$$(A|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right)$$

Comproveu, després, que $(6\,, -7.2\,, 2.9\,, -0.1)^t$ i $(1.50\,, 0.18\,, 1.19\,, 0.89)^t$ donen residus molt petits. Estimeu el nombre de condició de la matriu.

5 Fent ús de les normes $||\ ||_1$,$||\ ||_2$, i $||\ ||_\infty$, calculeu $||x - x^*||$ i $||Ax^* - b||$ en el cas següent:

$$(A|\,b) = \begin{pmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 & | & 15913 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 & | & 28.544 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 & | & 8.4254 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{pmatrix}.$$

6 Feu una predicció de com petits canvis en el terme independent b afecten a la solució x del sistema d'equacions $Ax = b$. Poseu a prova la vostra predicció per a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.01 \end{pmatrix}$$

i per als casos $b = (4,4)^t$ i $b = (3,5)^t$.

7 Feu una predicció de com petits canvis en A afecten a la solució x del sistema d'equacions $Ax = b$. Poseu a prova la vostra predicció per a $b = (100,1)^t$ i les matrius següents

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Sabeu donar una explicació del que s'observa?

8 Calculeu els nombres de condició de les matrius següents fent servir les normes $||A||_1$,$||A||_2$, i $||A||_\infty$:

$$(a) \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (c) \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9 Demostreu per als nombres de condició de dues matrius A i B: $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$.

10 Demostreu que el nombre de condició d'una matriu A verifica: $\kappa(\lambda A) = \kappa(A) \quad (\lambda \neq 0)$.

3 Sistemes d'equacions no lineals.

11 Apliqueu el mètode de Newton per resoldre el sistema no lineal

$$\begin{cases} x = \sin(x+y)\,, \\ y = \cos(x-y)\,, \end{cases}$$

prop de $(1,1)$ amb una precisió tal que $||z^{(k+1)} - z^{(k)}|| \leq 10^{-6}$.

12 Resoleu el sistema d'equacions següent mitjançant un mètode iteratiu

$$\begin{cases} 42.25x^2 + 27.885x - 0.749y^2 - 2.54y - 2.466 = 0\,, \\ -0.52x - 0.0192 + 0.00359y^2 + 0.00356y = 0\,, \end{cases}$$

a) Amb condicions inicials $x_0 = -0.01\,, y_0 = 0.01$. Feu 15 iteracions.

b) Idem però amb les condicions inicials $x_0 = 0.3\,, y_0 = 0.25$.

c) Què s'observa?

13 Determineu les solucions del sistema d'equacions no lineals

$$\begin{cases} x^2 - y - 1 = 0\,, \\ (x-2)^2 + (y-0.5)^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

amb una precisió tal que $||z^{(k+1)} - z^{(k)}|| \leq 10^{-6}$.