GRAU en Informàtica. UB-UPC

COMPUTACIÓ NUMÈRICA

Pràctiques 1A, 1B, 1C - QP1718

Departament de Matemàtiques. Secció FIB-FNB.
Jordi Girona 1-3, Omega, 08034 Barcelona, Spain.
Universitat Politècnica de Catalunya. BarcelonaTech.

15 de març de 2018

Instruccions

Normes

Sobre les vostres entregues (si no es diu el contrari a classe):

- Escriviu un breu informe que contingui, per cada exercici/apartat:
    1. Enunciat.
    2. Estratègies emprades: precisió, criteri, iteracions, etc.
    3. Resultats (taula, gràfic, etc)
    4. Conclusions i comentaris.
    5. Annex amb el codi de Matlab emprat per l'exercici.
- En cas de no acabar, cal descriure els problemes tinguts.
- En cas de còpia l'entrega es qualificarà amb 0 i no podreu fer ús del mètode d'avaluació contínua.

Dates

Data límit d'entrega: 6 d'abril de 2018 a les 9h. del matí

Abans del dia i hora indicats heu de penjar a la intranet de l'assignatura un fitxer que contingui tots els fitxers de Matlab necessaris per a resoldre la pràctica i un document de texte amb les explicacions segons les normes publicades.
El nom del fitxer ha d'èsser **DNI_prac_A.zip**, o **DNI_prac_B.zip** o **DNI_prac_C.zip** segons correspongui.

No s'accepten pràctiques amb retard.

No s'accepten pràctiques SENSE els fitxers d'instruccions de Matlab.

M. Àngela Grau Gotés
Professora responsable Computació Numèrica

Enunciat - A

1.1 Algoritmes

Considereu el següent algoritme per calcular el nombre $\boldsymbol{\pi}$: *"Genereu n parelles de nombres al·leatoris* $\{(x_k,\, y_k)\}_{k=1\div n}$ *de l'interval* $[0,\,1]$. *Compteu el nombre m dels que es troben dins del primer quadrant del cercle unitat. Resulta que $\boldsymbol{\pi}$ és el límit de la successió* $\pi_n = \dfrac{4m}{n}$*."*

1. Construïu un programa en `Matlab` per calcular el termes la successió π_n.
2. Feu un joc de proves per a valors de $n = 5^k$, per exemple $1 \leq k \leq 15$. El resultat ha d'èsser una taula de la forma:

n	Valor π_n	Error abs.	Error rel.

3. A partir dels valors de la taula, l'exactitud creix o decreix en funció de n? Quants decimals iguals obteniu? Quantes xifres significatives obteniu? Els resultats del teu càlcul es corresponen amb el concepte *límit d'una successió*? Raona totes les teves respostes.

1.2 Errors de cancel·lació

Es demana:

1. Cerca documentació sobre l'ús de la regla de Horner per avaluar polinomis. Escriu un breu resum del que has entès (màxim 1/2 full). Dóna les teves fonts bibliogràfiques.
2. Escriure una funció de Matlab que avalui el polinomi

$$p(x) = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$$

   per a valors equiespaiats a l'interval $[0.988, 1.012]$, prenent $\Delta x = 0.00005$. Representa gràficament el polinomi.

3. Escriure una funció de Matlab que avalui el polinomi $p(x)$ fent ús de la regla de Horner. Per a valors equiespaiats a l'interval $[0.988, 1.012]$, prenent $\Delta x = 0.00005$ representa gràficament els volors obtinguts.
4. Compareu les gràfiques obtingudes en els dos apartats anteriors amb la gràfica del polinomi $(x-1)^7$ en el mateix domini. Quines semblances i quines diferències observeu? Raona totes les teves respostes.

1.3 Error de truncament

El nombre π és la suma de la sèrie:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} 16^{-n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) . \tag{1.1}$$

En aquest cas es pot calcular una aproximació de π sumand fins al terme N-èssim, per a un n prou gran.

Es demana:

1. Escriure una *function* `MATLAB` per a calcular les sumes parcials finites

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 16^{-n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) . \tag{1.2}$$

2. Realitzeu un joc de proves que mostri $\pi = \lim_{N\to\infty} S_N$. Tabuleu els resultats obtinguts.

3. Per a quin valor de N s'obté el valor de π amb la precisió de `MATLAB`.

1.4 Solucions d'equacions no lineals

Calcular valors aproximats de l'arrel real de l'equació $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.

Es demana:

1. Digueu quantes arrels reals té $f(x) = 0$ per $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ i justifiqueu-ho. Utilitzeu el teorema de Bolzano per a determinar intervals que separin les arrels.

2. Calculeu la arrel real com a (mínim 6 decimals correctes) per cadascun dels següents mètodes:

   (a) Mètode de la bisecció. Presenteu els resultats en una taula.

   (b) Mètode de la secant. Presenteu els resultats en una taula.

   (c) Mètode de Newton. Presenteu els resultats en una taula.

   Per cada mètode, doneu els punts inicials i el criteri d'aturada. Veure els formats de les taules de resultats al final del document.

3. Considereu els mètodes iteratius següents:

$$\text{i)} \quad x_{n+1} = x_n - {x_n}^3 - 4{x_n}^2 + 10\,,$$

$$\text{ii)} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - {x_n}^3}\,, \qquad \text{iii)} \quad x_{n+1} = x_n - \left(\frac{{x_n}^3 + 4{x_n}^2 - 10}{3{x_n}^2 + 8x_n}\right).$$

   (a) Per cada un dels mètodes, *i)*, *ii)*, i *iii)*, demostreu la seva convergència/divergència del mètode a **l'arrel positiva** de l'equació $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$. Busqueu un interval que asseguri la convergència del metode analitzat. **("a priori")**

   (b) Per cada mètode convergent, obteniu el punt fix amb el punt inicial del mètode de Newton. Doneu els punts inicials i el criteri d'aturada (fins a 15 decimals correctes).

   (c) Per al mètode $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - {x_n}^3}$, apliqueu el mètode d'acceleració d'Aitken a la successió $\{x_n\}$ i obteniu el punt fix prenent el mateix x_0. (fins a 15 decimals correctes) Quantes iteracions calen?

   (d) Per al mètode $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - {x_n}^3}$, apliqueu el mètode d'Steffensen i obteniu el punt fix prenent el mateix x_0. (fins a 15 decimals correctes) Quantes iteracions calen?

4. Representeu en un gràfic els **logaritmes dels valors absoluts** dels errors relatius aproximats:

$$r^{n+1} = \frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n+1}}$$

   per als mètodes convergents. Cada mètode un color diferent. A partir dels valors de les taules i les gràfiques dels errors, quin seria el millor procediment per obtenir l'arrel real de $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ Raona les teves respostes.

Formats taules resultats mètodes iteratius

Taula I Per als mètodes iteratius d'intervals encaixats o que necessiten dos punts per començar heu de tabular almenys la següent informació:

n	nombre iteracions
a_n	extrem inferior interval
b_n	extrem superior interval
x_n	nou iterat calculat
$f(x_n)$	valor de la funció en x_n
$(b_n - a_n)/2$	cota superior error (per bisecció)

Taula II Per als mètodes iteratius d'un punt per començar heu de tabular almenys la següent informació:

n	nombre iteracions
x_n	nou iterat calculat
$f(x_n)$	valor de la funció en x_n
$x_n - x_{n-1}$	diferència d'ordenades

Enunciat - B

2.1 Representació de nombres

Les dues expressions següents:

$$f(x) = 1.01e^{4x} - 4.62e^{3x} - 3.11e^{2x} + 12.2e^{x} - 1.99\,,$$

$$F(x) = (((1.01z - 4.62)z - 3.11)z + 12.2)z - 1.99\,, \quad z = e^{x}\,.$$

són duess fórmules diferents per a calcular la mateixa funció.

1. Cerca documentació sobre l'ús de la regla de Horner per avaluar polinomis. Escriu un breu resum del que has entès (màxim 1/2 full).

   Dóna les teves fonts bibliogràfiques.

2. Fent ús de l'aritmètica de **tres xifres** arrodonint calculeu el valor de les dues expressions per a $x = 1.53$. Per què donen diferent $f(1.53)$ i $F(1.53)$? (**No matlab**)

3. Fent ús de l'aritmètica de **quatre xifres** arrodonint calculeu el valor de les tres expressions per a $x = 0.925$. Per què donen diferent $f(0.925)$ i $F(0.925)$? (**No matlab**)

4. Calculeu en cada cas l'error relatiu percentual. Quina expressió dona una millor aproximació?

2.2 Algoritmes

Considereu el següent algoritme per calcular el nombre $\boldsymbol{\pi}$: *"Genereu n parelles de nombres al·leatoris $\{(x_k,\, y_k)\}_{k=1\div n}$ de l'interval $[0,\,1]$. Compteu el nombre m dels que es troben dins del primer quadrant del cercle unitat. Resulta que $\boldsymbol{\pi}$ és el límit de la successió $\pi_n = \dfrac{4m}{n}$."*

1. Construïu un programa en `Matlab` per calcular el termes la successió π_n.

2. Feu un joc de proves per a valors de $n = 7^k$, per exemple $1 \leq k \leq 12$. El resultat ha d'èsser una taula de la forma:

n	Valor π_n	Error abs.	Error rel.

3. A partir dels valors de la taula, l'exactitud creix o decreix en funció de n? Quants decimals iguals obteniu? Quantes xifres significatives obteniu? Els resultats del teu càlcul es corresponen amb el concepte *límit d'una successió*? Raona totes les teves respostes.

2.3 Expressions recurrents

Calcular valors aproximats del nombre iracional ϕ, conegut com a nombre d'or o proporció àuria, el valor del qual és $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Llegiu l'apartat 1.1 The Golden Ratio del llibre de Cleve Moler ([4]) fundador i principal promotor de Matlab.

En aquest apartat Moler proposa dos mètodes per a calcular ϕ:

Primer La fracció contínua; $\phi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$

Segon El límit del quocient de termes consecutius de la successió de Fibonacci;

$$\phi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}\,,$$

on F_n es tal que $F_{-1} = F_0 = 1$ i la recurrència $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, si $n \in \mathbb{N}$.

Es demana:

1. Cerca documentació sobre els conceptes *nombre d'or, fracció contínua, sucessió recurrent, successió de Fibonacci.* Escriu un breu resum del que has entès (màxim 1 full). Dóna les teves fonts bibliogràfiques.

2. Escriure dues funcions en Matlab, (`Orfract` i `Orfib`) per avaluar l'exactitud dels dos mètodes d'aproximació citats fent ús de n termes en la fracció contínua i n termes de la successió de Fibonnaci respectivament.

3. Feu un joc de proves per a valors de n, per exemple $1 \leq n \leq 1000$. Comenta els resultats obtinguts. El resultat ha d'èsser una taula de la forma

n	Valor Orfract	Error abs.	Error rel.	Valor Orfib	Error abs.	Error rel.

4. A partir dels valors de la taula, l'exactitud creix o decreix en funció de n? Quants decimals iguals obteniu? Quantes xifres significatives obteniu? Els resultats del teu càlcul es corresponen amb el concepte *límit d'una successió*? Raona totes les teves respostes.

2.4 Solucions d'equacions no lineals

Calcular valors aproximats de l'arrel positiva de l'equació

$$(5-x)e^x = 5.$$

Es demana:

1. Quantes solucions diferents de $x = 0$ té l'equació $(5-x)e^x = 5$? Doneu intervals que separin les arrels. Justifica les teves respostes.

2. Calculeu la **arrel positiva no nul·la** (mínim 6 decimals correctes) per cadascun dels següents mètodes:

   (a) Mètode de la bisecció. Presenteu els resultats en una taula.

   (b) Mètode de la secant. Presenteu els resultats en una taula.

   (c) Mètode de Newton. Presenteu els resultats en una taula.

   Per cada mètode, doneu els punts inicials i el criteri d'aturada.

3. Considereu els mètodes iteratius següents:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad x_{n+1} &= 5 - \frac{5}{e^{x_n}}, \\ \text{ii)} \quad x_{n+1} &= \ln\left(\frac{5}{5-x_n}\right), \end{aligned}$$

   (a) Demostreu la convergència dels mètodes a l'arrel no nul·la de $(5-x)e^x = 5$ fent ús del teorema de convergència ()sense calcular les iteracions en `Matlab`). Doneu un interval que asseguri la convergència dels mètodes de la iteració simple. **("a priori")**

   (b) Obteniu el punt fix amb la mateixa tolerància prèvia. Doneu el punt inicial i el criteri d'aturada (fins a 6 decimals correctes). Presenteu els resultats en una taula.

4. Representeu en un gràfic **els logaritmes dels valors absoluts** dels errors relatius aproximats:

$$r^{n+1} = \frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n+1}}.$$

   Cada mètode un color diferent. A partir de les gràfiques realitzades, quin seria el millor procediment per obtenir la solució positiva de l'equació $(5-x)e^x = 5$. Raona les teves respostes.

Formats taules resultats mètodes iteratius

Taula I Per als mètodes iteratius d'intervals encaixats o que necessiten dos punts per començar heu de tabular almenys la següent informació:

n	nombre iteracions
a_n	extrem inferior interval
b_n	extrem superior interval
x_n	nou iterat calculat
$f(x_n)$	valor de la funció en x_n
$(b_n - a_n)/2$	cota superior error (per bisecció)

Taula II Per als mètodes iteratius d'un punt per començar heu de tabular almenys la següent informació:

n	nombre iteracions
x_n	nou iterat calculat
$f(x_n)$	valor de la funció en x_n
$x_n - x_{n-1}$	diferència d'ordenades

Enunciat - C

3.1 Representació de nombres

Les tres expressions P, Q i R són tres fórmules diferents per a calcular el mateix polinomi.

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1\,, \quad Q(x) = ((x-3)x+3)x - 1\,, \quad R(x) = (x-1)^3\,.$$

1. Cerca documentació sobre l'ús de la regla de Horner per avaluar polinomis. Escriu un breu resum del que has entès (màxim 1/2 full). Dóna les teves fonts bibliogràfiques.

2. Fent ús de l'aritmètica de **quatre xifres** arrodonint calculeu el valor de les tres expressions per a $x = 2.72$. Calculeu l'error relatiu percentual. Quina expressió dona una millor aproximació? Per què donen diferent P, Q i R?

3. Fent ús de l'aritmètica de **quatre xifres** arrodonint calculeu el valor de les tres expressions per a $x = 0.975$. Calculeu l'error relatiu percentual. Quina expressió dona una millor aproximació?

3.2 Algoritmes

Considereu el següent algoritme per calcular el nombre $\boldsymbol{\pi}$: *"Genereu n parelles de nombres al·leatoris $\{(x_k,\, y_k)\}_{k=1\div n}$ de l'interval $[0,\,1]$. Compteu el nombre m dels que es troben dins del primer quadrant del cercle unitat. Resulta que $\boldsymbol{\pi}$ és el límit de la successió $\pi_n = \dfrac{4m}{n}$."*

1. Construïu un programa en `Matlab` per calcular el termes la successió π_n.

2. Feu un joc de proves per a valors de $n = 10^k$, per exemple $1 \le k \le 10$. El resultat ha d'èsser una taula de la forma:

n	Valor π_n	Error abs.	Error rel.

3. A partir dels valors de la taula, l'exactitud creix o decreix en funció de n? Quants decimals iguals obteniu? Quantes xifres significatives obteniu? Els resultats del teu càlcul es corresponen amb el concepte *límit d'una successió*? Raona totes les teves respostes.

3.3 Propagació de l'error

1. Comproveu que la successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1/3^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és solució de les recurrències definides per les equacions (3.1), (3.2) i (3.3) si les operacions es realitzen de forma exacte.

$$r_0 = 1, \quad r_1 = \frac{1}{3}, \quad \text{i} \quad r_n = \frac{1}{3} r_{n-1}, \quad n > 1,\ n \in \mathbb{N}; \tag{3.1}$$

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{3}, \quad \text{i} \quad p_n = \frac{4}{3} p_{n-1} - \frac{1}{3} p_{n-2}, \quad n > 1,\ n \in \mathbb{N}; \tag{3.2}$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = \frac{1}{3}, \quad \text{i} \quad q_n = \frac{10}{3} q_{n-1} - q_{n-2}, \quad n > 1,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

2. Fent ús de `Matlab`, obteniu els 20 primers termes de les successions x_n, r_n, p_n i q_n. Presenteu els resultats obtinguts seguint el model:

n	x_n	r_n	p_n	q_n
0	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000
1	0.3333333333	0.3333333333	0.3333333333	0.3333333333
$\vdots$				

3. Obteniu aproximacions a la successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ prenent $r_0 = 0.99996$ com aproximació de 1 a (3.1), $p_1 = 0.33332$ a (3.2) i $q_1 = 0.33332$ a (3.3) com aproximacions de $1/3$. Tabuleu els resultats obtinguts.

n	x_n	r_n	p_n	q_n
0	1.0000000000	0.9999600000	1.0000000000	1.0000000000
1	0.3333333333	0.3333200000	0.3333200000	0.3333200000
$\vdots$				

4. Obteniu les successions d'errors

$$\{x_n - r_n\}_{n=2,\ldots,20}\,, \ \{x_n - p_n\}_{n=2,\ldots,20}\,, \ \{x_n - q_n\}_{n=2,\ldots,20}\,.$$

Tabuleu els resultats obtinguts. Feu gràfiques comparatives d'errors. Quants decimals correctes obteniu en els càlculs aproximats? Quantes xifres significatives obteniu en els càlculs aproximats?

5. Una successió d'errors és estable i decreix exponencialment, una altre és estable, i una tercera és inestable i creix amb velocitats exponencial. Identifiqueu aquestes successions. Quin mètode no seria vàlid per obtenir els termes de la successió $\{x_n\} = \{1/3^n\}$?

3.4 Solucions d'equacions no lineals

Calcular valors aproximats de l'arrel real de l'equació $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.

Es demana:

1. Digueu quantes arrels té $f(x) = 0$ per $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ i justifiqueu-ho. Utilitzeu el teorema de Bolzano per a determinar intervals que separin les arrels.

2. Calculeu la arrel real com a (mínim 6 decimals correctes) per cadascun dels següents mètodes:

   (a) Mètode de la bisecció. Presenteu els resultats en una taula.

   (b) Mètode de la secant. Presenteu els resultats en una taula.

   (c) Mètode de Newton. Presenteu els resultats en una taula.

   Per cada mètode, doneu els punts inicials i el criteri d'aturada. Veure els formats de les taules de resultats al final del document.

3. Considereu els mètodes iteratius següents:

$$\text{i)} \quad x_{n+1} = \left(\frac{10}{x_n} - 4x_n\right)^{1/2}, \qquad \text{ii)} \quad x_{n+1} = \left(\frac{10}{4 + x_n}\right)^{1/2},$$

$$\text{iii)} \quad x_{n+1} = x_n - \left(\frac{{x_n}^3 + 4{x_n}^2 - 10}{3{x_n}^2 + 8x_n}\right).$$

   (a) Per cada un dels mètodes, *i)*, *ii)*, i *iii)*, demostreu la seva convergència/divergència del mètode a **l'arrel positiva** de l'equació $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$. Busqueu un interval que asseguri la convergència del metode analitzat. **(No matlab)**

   (b) Per cada mètode convergent, obteniu el punt fix amb el punt inicial del mètode de Newton. Doneu els punts inicials i el criteri d'aturada (fins a 6 decimals correctes).

   (c) Per al mètode $x_{n+1} = \left(\frac{10}{4 + x_n}\right)^{1/2}$, apliqueu el mètode d'acceleració d'Aitken a la successió $\{x_n\}$ i obteniu el punt fix prenent el mateix x_0. (fins a 15 decimals correctes) Quantes iteracions calen?

   (d) Per al mètode $x_{n+1} = \left(\frac{10}{4 + x_n}\right)^{1/2}$, apliqueu el mètode d'Steffensen i obteniu el punt fix prenent el mateix x_0. (fins a 15 decimals correctes) Quantes iteracions calen?

4. Representeu en un gràfic els **logaritmes dels valors absoluts** dels errors relatius aproximats:
$$r^{n+1} = \frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n+1}}$$
per als mètodes convergents. Cada mètode un color diferent. A partir dels valors de les taules i les gràfiques dels errors, quin seria el millor procediment per obtenir cada una de les solucions de l'equació $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ Raona les teves respostes.

Formats taules resultats mètodes iteratius

Taula I Per als mètodes iteratius d'intervals encaixats o que necessiten dos punts per començar heu de tabular almenys la següent informació:

n	nombre iteracions
a_n	extrem inferior interval
b_n	extrem superior interval
x_n	nou iterat calculat
$f(x_n)$	valor de la funció en x_n
$(b_n - a_n)/2$	cota superior error (per bisecció)

Taula II Per als mètodes iteratius d'un punt per començar heu de tabular almenys la següent informació:

n	nombre iteracions
x_n	nou iterat calculat
$f(x_n)$	valor de la funció en x_n
$x_n - x_{n-1}$	diferència d'ordenades

Bibliografia

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I.A. *Hanbook of Mathematical Functions*. Ed. Dover.

[2] Grau, Miquel i Noguera, Miquel. *Càlcul Numèric*. Edicions U.P.C. 1993

[3] Forshythe, G.E.; Malcom, M.A.; Moler, C. B. : *Computer Methods for Mathematical Computations*. Prentice Hall. 1977

[4] Moler, Cleve, *Numerical Computing with MATLAB*. Electronic edition: The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2004.
`http://www.mathworks.es/moler/chapters.html`

[5] Help online de `Matlab`.