

GRAU en Informàtica. UB-UPC

## COMPUTACIÓ NUMÈRICA

Pràctiques 2A, 2B, 2C - QP1718

©M. Àngela Grau Gotés

*Departament de Matemàtiques. Secció FIB-FNB.  
Jordi Girona 1-3, Omega, 08034 Barcelona, Spain.  
Universitat Politècnica de Catalunya. BarcelonaTech.*

10 de maig de 2018



# Instruccions

---

## Normes

Sobre les vostres entregues (si no es diu el contrari a classe):

- Escriviu un breu informe que contingui, per cada exercici/apartat:
  1. Enunciat.
  2. Estratègies emprades: precisió, criteri, iteracions, etc.
  3. Resultats (taula, gràfic, etc)
  4. Conclusions i comentaris.
  5. Annex amb el codi de Matlab emprat per l'exercici.
- En cas de no acabar, cal descriure els problemes tinguts.
- En cas de còpia l'entrega es qualificarà amb 0 i no podreu fer ús del mètode d'avaluació contínua.

## Dates

**Data límit d'entrega: 8 de juny de 2018 a les 9h. del matí**

Abans del dia i hora indicats heu de penjar a la intranet de l'assignatura un fitxer que contingui tots els fitxers de Matlab necessaris per a resoldre la pràctica i un document de text amb les explicacions segons les normes publicades.

El nom del fitxer ha d'ésser **DNI\_prac\_A.zip**, o **DNI\_prac\_B.zip** o **DNI\_prac\_C.zip** segons correspongui.

*No s'accepten pràctiques amb retard.*

*No s'accepten pràctiques SENSE els fitxers d'instruccions de Matlab.*

**M. Àngela Grau Gotés**  
**Professora responsable Computació Numèrica**

---



# Enunciat - A

---

## 1.1 Àlgebra lineal numèrica: mètodes iteratius

Sigui  $A$  la matriu i  $b$  el vector definits per:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & . & . & . & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Per a tots els ordres  $N$  tals que  $3 \leq N \leq 20$  es demana:

- (a) Calculeu el determinant i el nombre de condició de les matrius  $A$ .
- (b) Demostreu que  $X = (1, 1, \dots, 1)^t$  és solució exacte per a qualsevol  $N$ . (**No Matlab**)
- (c) Estudieu la convergència dels mètodes de Jacobi i Gauss-Seidel per a la resolució del sistema d'equacions lineals. Abans de calcular res, feu un gràfic d'evolució del radi espectral de la matriu d'iteració de cadascun dels mètodes estudiats en funció de  $N$ .
- (d) Trobeu la solució  $X$  del sistema  $Ax = b$  per ambdós mètodes amb com a mínim 8 decimals correctes. Quantes iteracions calen en cada pas? Expliqueu els avantatges i inconvenients dels mètodes per aquest cas concret, expliqueu les desviacions de la solució que s'obtenen.

## 1.2 Àlgebra lineal numèrica: valors propis

Fent ús del mètode de la potència calculeu el valor propi de mòdul més gran i el valor propi de mòdul més petit de la matriu  $A$  definida per:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Cerca documentació sobre *les matrius de Wilkinson*. Escribeu un breu resum del que heu entès (màxim 1/2 full). Dóna les teves fonts bibliogràfiques.
- (b) Apliqueu el mètode de la potència per trobar el valor propi de mòdul més gran de la matriu  $A$ , fent ús de l'aritmètica de coma flotant de **Matlab** amb  $tol_{min} = 10^{-8}$ .
- (c) Apliqueu el mètode de la potència per trobar el valor propi de mòdul més petit de la matriu  $A$ , fent ús de l'aritmètica de coma flotant de **Matlab** amb  $tol_{min} = 10^{-8}$ .

## 1.3 Integració numèrica: Àrea dins una regió tancada

Doneu una aproximació de l'àrea de la regió delimitada per la vostra ma.

Referència: <http://www.mathworks.es/moler/chapters.html>

- (a) Obteniu una imatge de la vostra ma. Seguiu les indicacions de l'exercici 3.4 de la pàgina 20 del capítol “Interpolation” de Cleve Moler.
- (b) Obteniu per interpolació la corba que delimita la imatge de la ma seguint els indicacions de l'exercici 3.4 i l'exercici 3.5 de les pàgines 20 – 21 – 22. Responen les preguntes que us formulen en els dos exercicis.
- (c) Què tan gran és la teva mà? Calcula l'àrea que ocupa la teva mà. Segueix les indicacions i respon les preguntes de l'exercici 6.23 de les pàgines 19 – 20 del capítol “Quadrature” de Cleve Moler.

## 1.4 Aproximació de dades

Les dades de la taula següent estan relacionats amb l'esperança de vida al néixer dels ciutadants de dos països

<i>any</i>	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
<i>Grècia</i>	72.3	73.6	75.1	77.0	77.6	77.9	79.2	80.4
<i>República Centreafricana</i>	45.9	48.9	49.8	48.7	46.2	43.9	44.4	47.5

Es demana:

- (a) Useu el polinomi interpolador de grau 7 per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007 per cada país. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada país, que són:

<i>any</i>	1970	1992	2007	2015
<i>Grècia</i>	70.9	77.4	79.4	81.6
<i>República Centreafricana</i>	41.9	47.8	45.5	51.4

- (b) Busqueu un polinomi del grau escaient per mínims quadrats. Justifiqueu l'elecció mostrant una cota de l'error d'aquest i de la resta amb els que heu provat. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada país.
- (c) Extrapoleu un valor per l'any 2015 pels dos models obtinguts per cada país. Recordant les dades oficials, i els resultats obtinguts els models estudiats són vàlids per estimar amb precisió l'esperança de vida per l'any 2015?
- (d) Feu una gràfica on apareguin les dades (representats per una rodona) i les totes solucions trobades per país.

**Comentari:** Numèricament és millor que considereu la taula inicial amb abscisses  $0, 1, \dots, 7$ .





# Enunciat - B

---

## 2.1 Àlgebra lineal numèrica: mètodes iteratius

Siguin  $A(N) = (a_{ij})_{N \times N}$  i  $B(N) = (b_{i1})_{N \times 1}$  la matriu i el vector d'ordre  $N$  definits per

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & |i - j| \leq 2, \\ 5 & i = j, \\ 0 & |i - j| > 2, \end{cases} \quad \text{i} \quad b_{i1} = \begin{cases} 3 & i = 1, N, \\ 2 & i = 2, N - 1, \\ 1 & i \neq 1, 2, N - 1, N, \end{cases}$$

per a  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Per a tots els ordres  $N$  tals que  $6 \leq N \leq 30$  es demana:

- (a) Calculeu el determinant i el nombre de condició de les matrius  $A$ .
- (b) Demostreu que  $X = (1, 1, \dots, 1)^t$  és solució exacte per a qualsevol  $N$ . (**No Matlab**)
- (c) Estudieu la convergència dels mètodes de Jacobi i Gauss-Seidel per a la resolució del sistema d'equacions lineals. Abans de calcular res, feu un gràfic d'evolució del radi espectral de la matriu d'iteració de cadascun dels mètodes estudiats en funció de  $N$ .
- (d) Trobeu la solució  $X$  del sistema  $Ax = b$  per ambdós mètodes amb com a mínim 8 decimals correctes. Quantes iteracions calen en cada pas? Expliqueu els avantatges i inconvenients dels mètodes per aquest cas concret, expliqueu les desviacions de la solució que s'obtenen.

## 2.2 Àlgebra lineal numèrica: valors propis

Fent ús del mètode de la potència calculeu el valor propi de mòdul més gran i el valor propi de mòdul més petit de la matriu  $A$  definida per:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Cerca documentació sobre *les matrius de Wilkinson*. Escriu un breu resum del que has entès (màxim 1/2 full). Dóna les teves fonts bibliogràfiques.
- (b) Apliqueu el mètode de la potència per trobar el valor propi de mòdul més gran de la matriu  $A$ , fent ús de l'aritmètica de coma flotant de **Matlab** amb  $tol_{min} = 10^{-8}$ .
- (c) Apliqueu el mètode de la potència per trobar el valor propi de mòdul més petit de la matriu  $A$ , fent ús de l'aritmètica de coma flotant de **Matlab** amb  $tol_{min} = 10^{-8}$ .

## 2.3 Integració numèrica: Àrea dins una regió tancada

Doneu una aproximació de l'àrea de la regió delimitada per la vostra ma.

Referència: <http://www.mathworks.es/moler/chapters.html>

- (a) Obteniu una imatge de la vostra ma. Seguiu les indicacions de l'exercici 3.4 de la pàgina 20 del capítol “Interpolation” de Cleve Moler.
- (b) Obteniu per interpolació la corba que delimita la imatge de la ma seguint els indicacions de l'exercici 3.4 i l'exercici 3.5 de les pàgines 20 – 21 – 22. Responen les preguntes que us formulen en els dos exercicis.
- (c) Què tan gran és la teva mà? Calcula l'àrea que ocupa la teva mà. Segueix les indicacions i respon les preguntes de l'exercici 6.23 de les pàgines 19 – 20 del capítol “Quadrature” de Cleve Moler.

## 2.4 Aproximació de dades

Les dades de la taula següent estan relacionats amb l'esperança de vida al néixer dels ciutadants de dos països

<i>any</i>	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
<i>Belize</i>	67.7	69.6	71.1	69.6	68.4	69.0	69.8	70.3
<i>Espanya</i>	73.3	75.3	76.2	76.8	78.0	79.0	80.2	81.6

Es demana:

- (a) Useu el polinomi interpolador de grau 7 per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007 per cada país. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada país, que són:

<i>any</i>	1970	1992	2007	2015
<i>Belize</i>	65.5	70.7	69.5	70.3
<i>Espanya</i>	72.0	77.4	80.9	83.4

- (b) Busqueu un polinomi del grau escaient per mínims quadrats. Justifiqueu l'elecció mostrant una cota de l'error d'aquest i de la resta amb els que heu provat. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada país.
- (c) Extrapoleu un valor per l'any 2015 pels dos models obtinguts per cada país. Recordant les dades oficials, i els resultats obtinguts els models estudiats són vàlids per estimar amb precisió l'esperança de vida per l'any 2015?
- (d) Feu una gràfica on apareguin les dades (representats per una rodona) i les totes solucions trobades per país.

**Comentari:** Numèricament és millor que considereu la taula inicial amb abscisses  $0, 1, \dots, 7$ .



# Enunciat - C

---

## 3.1 Sistemes lineals: mètodes iteratius

Siguin  $A(N) = (a_{ij})_{N \times N}$  i  $B(N) = (b_{i1})_{N \times 1}$  la matriu i el vector d'ordre  $N$  definits per

$$a_{ij} = \begin{cases} ij & |i - j| \leq 3, \\ 2 & i = j, \\ 0 & |i - j| > 3, \end{cases} \quad \text{i} \quad b_{i1} = \begin{cases} 1 & i = 1, \\ 0 & i \neq 1, \end{cases}$$

per a  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Es demana:

- (a) Calculeu el determinant i el nombre de condició de les matrius  $A(N)$ . Comproveu la simetria d'aquestes matrius. Preneu a  $\mathbf{N} = \mathbf{3}, \dots, \mathbf{30}$ .
- (b) Estudieu la convergència dels mètodes de Jacobi i Gauss-Seidel per a la resolució del sistema d'equacions lineals. Abans de calcular res, feu un gràfic d'evolució del radi spectral de la matriu d'iteració de cadascun dels mètodes estudiats en funció de  $\mathbf{N}$ .
- (c) Trobeu la solució  $X$  del sistema  $Ax = b$  per ambdós mètodes amb com a mínim 8 decimals correctes. Quantes iteracions calen en cada pas? Expliqueu els avantatges i inconvenients dels mètodes per aquest cas concret, expliqueu les desviacions de la solució que s'obtenen.

## 3.2 Àlgebra lineal numèrica: valors propis

Fent ús del mètode de la potència calculeu el valor propi de mòdul més gran i el valor propi de mòdul més petit de la matriu  $A$  definida per:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Cerca documentació sobre *les matrius de Wilkinson*. Escribeu un breu resum del que heu entès (màxim 1/2 full). Dóna les teves fonts bibliogràfiques.
- (b) Apliqueu el mètode de la potència per trobar el valor propi de mòdul més gran de la matriu  $A$ , fent ús de l'aritmètica de coma flotant de **Matlab** amb  $tol_{min} = 10^{-8}$ .
- (c) Apliqueu el mètode de la potència per trobar el valor propi de mòdul més petit de la matriu  $A$ , fent ús de l'aritmètica de coma flotant de **Matlab** amb  $tol_{min} = 10^{-8}$ .

## 3.3 Integració numèrica: Àrea dins una regió tancada

Doneu una aproximació de l'àrea de la regió delimitada per la vostra ma.

Referència: <http://www.mathworks.es/moler/chapters.html>

- (a) Obteniu una imatge de la vostra ma. Seguiu les indicacions de l'exercici 3.4 de la pàgina 20 del capítol "Interpolation" de Cleve Moler.
- (b) Obteniu per interpolació la corba que delimita la imatge de la ma seguint els indicacions de l'exercici 3.4 i l'exercici 3.5 de les pàgines 20 – 21 – 22. Responen les preguntes que us formulen en els dos exercicis.
- (c) Què tan gran és la teva mà? Calcula l'àrea que ocupa la teva mà. Segueix les indicacions i respon les preguntes de l'exercici 6.23 de les pàgines 19 – 20 del capítol "Quadrature" de Cleve Moler.

### 3.4 Aproximació de dades

Les dades de la taula següent estan relacionats amb l'esperança de vida al nèixer dels ciutadants de dos països

<i>any</i>	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
<i>Grecia</i>	72.3	73.6	75.1	77.0	77.6	77.9	79.2	80.4
<i>Espanya</i>	73.3	75.3	76.2	76.8	78.0	79.0	80.2	81.6

Es demana:

- (a) Useu el polinomi interpolador de grau 7 per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007 per cada país. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada país, que són:

<i>any</i>	1970	1992	2007	2015
<i>Grècia</i>	70.9	77.4	79.4	81.6
<i>Espanya</i>	72.0	77.4	80.9	83.4

- (b) Busqueu un polinomi del grau escaient per mínims quadrats. Justifiqueu l'elecció mostrant una cota de l'error d'aquest i de la resta amb els que heu provat. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada país.
- (c) Extrapoleu un valor per l'any 2015 pels dos models obtinguts per cada país. Recordant les dades oficials, i els resultats obtinguts els models estudiats són vàlids per estimar amb precisió l'esperança de vida per l'any 2015?
- (d) Feu una gràfica on apareguin les dades (representats per una rodona) i les totes solucions trobades per país.

**Comentari:** Numèricament és millor que considereu la taula inicial amb abscisses  $0, 1, \dots, 7$ .

# Bibliografia

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I.A. *Hanbook of Mathematical Functions*. Ed. Dover.
- [2] Grau, Miquel i Noguera, Miquel. *Càlcul Numèric*. Edicions U.P.C. 1993
- [3] Forsythe, G.E.; Malcom, M.A.; Moler, C. B. : *Computer Methods for Mathematical Computations*. Prentice Hall. 1977
- [4] Moler, Cleve, *Numerical Computing with MATLAB*. Electronic edition: The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2004.  
<http://www.mathworks.es/moler/chapters.html>
- [5] Help online de Matlab.
- [6] Banco Mundial *Esperanza de vida al nacer, total (años)*  
<https://datos.bancomundial.org/>  
<https://datos.bancomundial.org/indicador/SP.DYN.LE00.IN>