

EQUACIONS NO LINEALS (II)

2 Mètodes del punt fix.

1 L'equació $x^3 + 2x - 2 = 0$ es pot escriure com

$$\text{a) } x = 1 - \frac{1}{2}x^3, \quad \text{b) } x = 2(x^2 + 2)^{-1}, \quad \text{c) } x = (2 - 2x)^{1/3}.$$

Estudieu quines de les expressions anteriors donen lloc a un mètode convergent.

2 a) Comproveu que l'equació

$$x^6 = x + 1, \tag{1}$$

té una solució a l'interval $[0, 2]$ i doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de **Matlab**.

b) Feu 3 o més iteracions del mètode de bisecció fins que $l < 1/4$.

c) Calculeu 5 iterats dels mètodes iteratius

$$x_{n+1} = x_n^6 - 1, \quad x_{n+1} = \sqrt[6]{x_n + 1},$$

prenent x_0 l'aproximació del mètode de la bisecció.

d) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Feu ús del teorema de convergència pels dos mètodes. Comenta les diferències trobades.

3 Raoneu per a cadascuna de les expressions següents si és o no adequada per a calcular aproximacions de $\sqrt[3]{2}$ utilitzant el mètode del punt fix a l'interval $[1, 2]$.

$$\text{a) } x_{n+1} = \frac{2}{x_n^2}, \quad \text{b) } x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2}, \quad \text{c) } x_{n+1} = \frac{x_n^3}{60} - \frac{1}{30x_n^2}, \quad \text{d) } x_{n+1} = x_n^3 + x_n - 2.$$

Quants iterats caldria fer amb la més adequada per obtenir $\sqrt[3]{2}$ amb tres decimals exactes?. Calculeu els tres primers iterats.

4 Es vol resoldre l'equació $x + \ln(x) = 0$, se sap que una arrel és al voltant de 0.5. Quina d'entre les fórmules següents escollirieu? Sabrieu donar una fórmula millor?

$$\text{a) } x_{n+1} = -\ln(x_n), \quad \text{b) } x_{n+1} = e^{-x_n}, \quad \text{c) } x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2},$$

5 Demostreu que $x = 4$ és solució de les tres equacions següents:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}(8x_n - x_n^2), \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 - 4), \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}.$$

Tots són convergents a la solució $x = 4$? Quin convergeix més ràpidament? Calculeu 6 iteracions de cada un dels mètodes, escollint x_0 adient.

6 Es vol determinar el mínim de la funció $y = e^{-x} + \frac{x^3}{3}$

a) Feu una gràfica aproximada de la funció i doneu un interval de longitud 1 que contingui el mínim.

b) Determineu dues possibles maneres d'aplicar el mètode del punt fix, indicant si són convergents i quina és la millor.

c) Feu tres iterats. Quants en caldria fer per aconseguir 5 decimals correctes?

7 Trobeu pel mètode de la iteració simple, i després accelerant la convergència mitjançant el mètode d'Aitken, les arrels de les equacions

a) $x^2 - 1 = \sin x$, b) $e^x = 5x + 10$, c) $10^x = 6x + 30$,

d) $5 \sin x - 3x \cos x = 0$, e) $xe^x = 1$, f) $\ln x = 1 + \frac{1}{x}$.