Computació Numèrica

Laboratori 6 i 8
Sistemes d'equacions lineals

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

17 d'abril de 2018

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Índex

MATLAB

Exercicis

Exercici 1 Genereu una matriu quadrada aleatòria d'ordre la suma dels dígits del DNI. Per aquesta matriu:

a) Obteniu la seva inversa, la seva transposada i la seva diagonal.

b) Esborreu les columnes 2 i 4

c) Eleveu totes les dades al cub.

d) Obteniu l'arrel quadrada de les dades de la matriu. (sqrt)

e) Calculeu el vector de mitjes per files (mean). Calculeu el vector de desviacions estàndar per files (std).

Exercicis

Exercici 2 Definiu la matriu $U = (u_{ij})_{15\times 15}$ i el vector $b = (b_i)_{15\times 1}$ com

$$u_{ij} = \begin{cases} \cos(ij) & i \leq j\,, \\ 0 & i > j\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad b_i = \tan(i)\,.$$

Exercici 3 Definiu la matriu $L = (u_{ij})_{20\times 20}$ i el vector $b = (b_i)_{20\times 1}$ com

$$l_{ij} = \begin{cases} i + j & i \geq j\,, \\ 0 & i < j\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad b_i = i\,.$$

Funcions matricials

a) La trasposada d'una matriu `A`, s'obté per `A'`.
b) La inversa d'una matriu `A`, s'obté per `inv(A)`.
c) La diagonal d'una matriu `A`, s'obté per `diag(A)`.
d) El determinant d'una matriu `A`, s'obté per `det(A)`.
f) `eig(A)` són els valors propis d'una matriu `A`.
g) `triu(A)`, `tril(A)`.

Operacions aritmètiques

a) Per a la <u>divisio</u> de matrius, tenim / i \
Si `A` és una matriu no singular, la solució al sistema `A*X=B`, la calcularem com `X=A\B`;
en canvi per `X=B/A` denotarem la solució del sistema `X*A=B`.

b) Si `A` és una matriu quadrada, i `p` un escalar, `A^p`, és la <u>potència</u> `p` de la matriu `A`.

Funcions predefinides

a) `A\b` , solució del sistema $Ax = b$.
b) `[L,U,P]=lu(A)` , factorització $PA = LU$.
c) `L=chol(A)` , factorització $A = LL'$.
d) `[Q,R]=qr(A)` , factorització $A = QR$.
e) `[V,D]=eig(A)` , vectors i valors propis.
f) `[S,V,D]=svd(A)` , descompossició en valors singulars.

Pràctica

Per a les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comproveu les igualtats següents:

a) $(AB)C = A(BC)$,

b) $A(B + C) = AB + AC$,

c) $(AB)^t = B^t A^t$.

d) $(A + B)C = AC + BC$.

Sistemes d'equacions lineals

Mètodes directes

Sistemes TRIANGULARS

Exercici 4

4.a) Escriviu el codi necessari per a definir la matriu $A = (a_{ij})_{20\times 20}$ i el vector $b = (b_i)_{20\times 1}$ com

$$a_{ij} = \begin{cases} \max(i,j) & i < j\,, \\ -1 & i = j\,, \\ 0 & i > j\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad b_i = 2^{-i}\,.$$

4.b) Trobar la solució d'un sistema lineal $AX = b$ pel mètode de substitució enrera. Representa gràficament la solució trobada $(i, x_i)\,,\ 1 \leq i \leq 20$.

Sistemes TRIANGULARS

Exercici 4 Escriviu un script de `Matlab` per trobar la solució d'un sistema lineal triangular superior (inferior) $AX = B$ pel mètode de substitució enrera (endavant). Feu jocs de proves.

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcr} 3x - 2y + z - t & = & 8 \\ 4y - z + 2t & = & -3 \\ 2z + 3t & = & 11 \\ 5t & = & 15 \end{array}\right.$$

$$b)\ \left\{\begin{array}{lcr} 5x & = & -10 \\ x + 3y & = & 4 \\ 3x + 4y + 2z & = & 2 \\ -x + 3y - 6z - t & = & 5 \end{array}\right.$$

Mètode de Gauss

Exercici 5 Resoleu per eliminació gaussiana el sistema lineal $Ax = b$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exercici 6 Resoleu el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & 4y & = & 1 \\ -2.998x & + & 6.001y & = & 2 \end{array} \right.$$

per qualsevol mètode que conegeu. Compareu la solució amb la del sistema obtingut substituin la segona equació per $-2.998x + 6y = 2$. Com són les dues solucions? És un problema estable?

Factorització Txoleski

Exercici 7 Trobeu la descomposició de Txoleski i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següent:

$$
a) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr}
6x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\
2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 7 \\
-x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & -1 \\
-x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -2
\end{array} \right.
$$

En Matlab la factorització $R'R = A$ s'obté per [R]=chol(A).

Tota matriu simètrica i definida positiva té factorització $R'R = A$.

Factorització QR

Exercici 8 Trobeu la descomposició QR i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següents:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.06x_3 + 0.05x_4 & = & 0.23 \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 + 0.08x_3 + 0.07x_4 & = & 0.32 \\ 0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.10x_3 + 0.09x_4 & = & 0.33 \\ 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.10x_4 & = & 0.31 \end{array} \right.$$

En Matlab la factorització $A = QR$ s'obté per [Q,R]=qr(A).

Nombre de condició

Es diu que el sistema $Ax = B$ està mal condicionat si A té un nombre de condició gran.

`Matlab`

- ✓ `cond(A,p)` Mesura el mal condicionament

  `cond(eye)=1`

  `cond(matsingular)=`∞

- ✓ `rcond(A,p)` Mesura el bon condicionament

  `rcond(eye)=1`

  `rcond(matsingular)=0`

Exercici 9

Resoleu sistema $Ax = b$ si

$$(A|\, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right)$$

Comproveu, després, que $(6\,,-7.2\,,2.9\,,-0.1)^t$ i $(1.50\,,0.18\,,1.19\,,0.89)^t$ donen residus molt petits. Estimeu el nombre de condició de la matriu. Sabeu donar una explicació del que s'observa?

Exercici 10

Feu una predicció de com petits canvis en A afecten a la solució x del sistema d'equacions $Ax = b$. Poseu a prova la vostra predicció per a $b = (100, 1)^t$ i les matrius següents

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Sabeu donar una explicació del que s'observa?

Sistemes d'equacions lineals

Mètodes iteratius

Mètodes iteratius

`Matlab`

- ✓ `D=diag(diag(A));` Diagonal de la matriu A.
- ✓ `d=diag(1 ./diag(A))` Inversa de la diagonal de A.
- ✓ `L=tril(A,-1)` Part triangular inferior de la matriu A.
- ✓ `U=triu(A,1)` Part triangular superior de la matriu A.

Mètode de Jacobi

$$Ax = b \Longleftrightarrow x^{k+1} = B_J\, x^k + c_J\,, \quad \forall\ k \geq 0\,.$$

- ✓ $B_J = -D^{-1}(L+U)$ Matriu d'iteració del mètode.
- ✓ $c_J = D^{-1}b$ Vector d'iteració del mètode.
- ✓ $\rho(B_J) < 1$ Convergència a priori.
- ✓ $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ Convergència a posteriori.

Mètode de Gauss-Seidel

$$Ax = b \Longleftrightarrow x^{k+1} = B_{GS}\, x^k + c_{GS}\,, \quad \forall\ k \geq 0\,.$$

- ✓ $C = (L + D)^{-1}$ — Matriu auxiliar del mètode.
- ✓ $B_{GS} = -C\ U$ — Matriu d'iteració del mètode.
- ✓ $c_{GS} = C\ b$ — Vector d'iteració del mètode.
- ✓ $\rho(B_{GS}) < 1$ — Convergència a priori.
- ✓ $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ — Convergència a posteriori.

Mètodes de relaxació - variant JACOBI

Són una generalització dels dos mètodes estudiats; sumem i restem x_i^k en l'expressió del mètode de Jacobi,

$$x_{Ji}^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^k\right) k \geq 0\,.$$

$$x_i^{k+1} = \omega x_{Ji}^{k+1} + (1-\omega)x_i^k \quad k \geq 0\,.$$

- ✓ $C = D^{-1}$ Matriu auxiliar.
- ✓ $B_{sor} = C\left((1-\omega)D - \omega(L+U)\right)$ Matriu d'iteració.
- ✓ $c_{sor} = \omega\ C\ b$ Vector d'iteració.

Mètodes de relaxació - variant SEIDEL

Són una generalització dels dos mètodes estudiats; sumem i restem x_i^k en l'expressió del mètode de Jacobi,

$$x_{Si}^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^k \right) k \geq 0\,.$$

$$x_i^{k+1} = \omega x_{Si}^k + (1-\omega) x_i^k \quad k \geq 0\,.$$

✓ $C = (D + \omega L)^{-1}$ Matriu auxiliar.

✓ $B_{sor} = C\left((1-\omega)D - \omega U\right)$ Matriu d'iteració.

✓ $c_{sor} = \omega\ C\ b$ Vector d'iteració.

Exercicis

Exercici 11 Escriviu un programa que implementi els esquemes iteratius dels mètodes presentats.

$$\text{a) } (A \,|\, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

"Si el mètode de Jacobi és convergent, el mètode de Gauss-Seidel també, i més ràpid"

Exemples

Exercici 12 Introduiu un test de convergència per als algoritmes de Jacobi i Gauss - Seidel.

$$\text{b) } (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 10 & -7 & 0 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\text{c) } (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 6 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & -8 & 4 & 10 & -10 \\ 3 & -13 & 3 & 3 & -39 \\ -6 & 4 & 2 & -18 & -16 \end{array}\right).$$

Exercicis

Exercici 13 Determineu el factor w òptim per a resoldre

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & 2 \\ x & & & + & z & + & 2t & = & 3 \\ x & + & y & & & + & t & = & 4 \\ -x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \end{array}\right.$$

fent ús dels mètode de sobrerelaxació variants de Jacobi i de Gauss-Seidel. Feu un estudi per $0 < \omega < 2$.
Presenteu els resultats en una taula.

Exercicis

Exercici 14 Resoleu pel mètodes de classe el sistema $Ax = b$ donat per

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 0 & -5 \\ -5 & 12 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3.45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 0.14 \\ 0.95 \\ 0.37 \\ 0.16 \end{pmatrix}$$

prenent $x^{(0)} = (0\,,0\,,0\,,0)^\top$ i una tolerància $0.5 \cdot 10^{-12}$. Quantes iteracions calen?

Calculeu els errors $e^k = ||x^k - x^*||$, $\delta^k = ||x^k - x^{k-1}||$.
Estudieu e^k/e^{k-1} i δ^k/δ^{k-1}.

Autoavaluació

Exercici Feu servir $(0.33116, 0.70000)^t$ com a punt inicial per resoldre pel mètode de Gauss-Seidel el sistema $Ax = b$. Què passa?

$$A = \begin{pmatrix} 0.96326 & 0.81321 \\ 0.81321 & 0.68654 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.88824 \\ 0.74988 \end{pmatrix}.$$

Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center, Tutorials