EQUACIONS NO LINEALS

1 Mètodes d'intervals encaixats, de la secant i de Newton.

1 Estudieu la funció $y = e^x + \ln x - 1$ i decidiu si té arrels reals.

2 Resoleu pel mètode de la bisecció les equacions

$$\text{a) } x^2 - e^x = 0\,, \quad \text{b) } \sin x + \cos x = 0\,.$$

3 Resoleu pel mètode de la secant les equacions

$$\text{c) } x^x = 10\,, \quad \text{d) } x \ln x = 1\,, \quad \text{e) } \tan x - \frac{1}{1+x^2} = 0\,.$$

4 Resoleu pel mètode de Newton les equacions

$$\text{f) } x - \cos(x) = 0\,, \quad \text{g) } x + \frac{1}{x} = e^x\,, \quad \text{h) } 3\sin x = x + \frac{1}{x}\,.$$

5 Resoleu pel mètode de la Regula Falsi l'equació $x^2 - 2 = 0$, amb $x_0 = 2$, i $x_1 = 0$. Què s'observa?

6 a) Comproveu que l'equació

$$x^6 = x + 1\,, \tag{1}$$

té una solució a l'interval $[0, 2]$ i doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

b) Calculeu 5 iterats del mètode de Newton per l'equació (5).

c) Calculeu 5 iterats del mètode de la secant per l'equació (5).

d) Calculeu 5 iterats pel mètode de bisecció per l'equació (5).

e) Quin mètode dona una millor aproximació? Quin pitjor? Comenta les diferències trobades.

7 a) L'equació

$$x^3 - x + 1 = 0\,, \tag{2}$$

té una solució real. Representeu gràficament la funció i doneu un interval on es trobi la solució. Doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

b) Aproximeu la solució de (5) pel mètode de bisecció. ($\eta = 0.001$).

c) Apliqueu el mètode de la regula falsi amb una precisió de quatre decimals correctes.

d) Apliqueu el mètode de Newton ($\eta = 0.00005$).

e) Apliqueu el mètode de la secant amb una precisió de quatre decimals correctes.

f) Quin mètode dona una millor aproximació? Quin pitjor? Comenta les diferències trobades.

8 a) Comproveu que l'equació

$$e^x = 2 - x\,, \tag{3}$$

té una única solució i doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

b) Aproximeu la solució de (5) amb 3 decimals exactes pel mètode de Newton.

c) Aproximeu la solució de (5) amb 3 decimals exactes pel el mètode de la secant.

d) Aproximeu la solució de (5) amb 3 decimals exactes pel mètode de bisecció.

e) Quin mètode necessita més iteracions? Quin menys? Comenta les diferències trobades.

2 Mètodes del punt fix.

9 a) Determineu l'arrel real de

$$x = \cos x\,, \tag{4}$$

té una solució real. Representeu gràficament la funció i doneu un interval on es trobi la solució. Doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

- Representeu gràficament la funció. Doneu un interval on es trobi un zero de la funció.
- Prenent $x_0 = 0$, calculeu 15 iterats dels mètodes iteratius

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \cos(x_n)}{2}\,, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + \cos(x_n)}{3}\,.$$

- Prenent $x_0 = 1$, calculeu 15 iterats dels mètodes iteratius

$$x_{n+1} = \cos(x_n)\,, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n \cos(x_n)}\,.$$

- Quin mètode és convergent? Quin és divergent?

10 a) Comproveu que l'equació

$$x^6 = x + 1\,, \tag{5}$$

té una solució a l'interval $[0, 2]$ i doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

b) Feu 3 o més iteracions del mètode de bisecció fins que $l < 1/4$.

c) Calculeu 5 iterats dels mètodes iteratius

$$x_{n+1} = x_n^6 - 1\,, \quad x_{n+1} = \sqrt[6]{x_n + 1}\,,$$

prenent x_0 l'aproximació del mètode de la bisecció.

d) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Feu ús del teorema de convergència pels dos mètodes. Comenta les diferències trobades.

11 Raoneu per a cadascuna de les expressions següents si és o no adequada per a calcular aproximacions de $\sqrt[3]{2}$ utilitzant el mètode del punt fix a l'interval $[1, 2]$.

a) $x_{n+1} = \dfrac{2}{x_n^2}$, b) $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2}$,

c) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3}{60} - \dfrac{1}{30x_n^2}$, d) $x_{n+1} = x_n^3 + x_n - 2$.

Quants iterats caldria fer amb la més adequada per obtenir $\sqrt[3]{2}$ amb tres decimals exactes?. Calculeu els tres primers iterats.

12 L'equació $x^3 + 2x - 2 = 0$ es pot escriure com

$$\text{a)}\quad x = 1 - \frac{1}{2}x^3\,, \quad \text{b)}\quad x = 2(x^2+2)^{-1}\,, \quad \text{c)}\quad x = (2-2x)^{1/3}\,.$$

Estudieu quines de les expressions anteriors donen lloc a un mètode convergent.

13 Es vol resoldre l'equació $x + \ln(x) = 0$, se sap que una arrel és al voltant de 0.5. Quina d'entre les fórmules següents escollirieu? Sabrieu donar una fórmula millor?

$$\text{a)}\ x_{n+1} = -\ln(x_n)\,, \quad \text{b)}\ x_{n+1} = e^{-x_n}\,, \quad \text{c)}\ x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}\,,$$

14 Demostreu que $x = 4$ és solució de les tres equacions següents:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}(8x_n - x_n^2)\,, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 - 4)\,, \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}\,. \tag{6}$$

Tots són convergents a la solució $x = 4$? Quin convergeix més ràpidament? Calculeu 6 iteracions de cada un dels mètodes, escollint x_0 adient.

15 Comproveu que l'equació

$$x + \ln x = 0\,, \tag{7}$$

té una solució prop de 0.5. Doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

b) Aproximeu la solució de (7) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = -\ln x_n$.

c) Aproximeu la solució de (7) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = \exp(-x_n)$.

d) Aproximeu la solució de (7) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$.

e) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Feu ús del teorema de convergència pels tres mètodes. Comenta les diferències trobades.

16 Es vol determinar el mínim de la funció $y = e^{-x} + \dfrac{x^3}{3}$

a) Feu una gràfica aproximada de la funció i doneu un interval de longitud 1 que contingui el mínim.

b) Determineu dues possibles maneres d'aplicar el mètode del punt fix, indicant si són convergents i quina és la millor.

c) Feu tres iterats. Quants en caldria fer per aconseguir 5 decimals correctes?

17 Trobeu pel mètode de la iteració simple, i després accelerant la convergència mitjançant el mètode d'Aitken, les arrels de les equacions

$$\text{a) } x^2 - 1 = \sin x\,, \quad \text{b) } e^x = 5x + 10\,, \quad \text{c) } 10^x = 6x + 30\,,$$

$$\text{d) } 5\sin x - 3x\cos x = 0\,, \quad \text{e) } xe^x = 1\,, \quad \text{f) } \ln x = 1 + \frac{1}{x}\,.$$