Computació Numèrica

Laboratori 3. Zeros d'Equacions
Algorismes

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

6 de març de 2018

drets d'autor

Índex

1. Sessió 3.
   - Matlab
     - Funcions
     - Fzero
   - Mètodes de resolució
     - Mètode de la bisecció
     - Mètode del punt fix
     - Mètode de la tangent
     - Mètode de la secant
   - Exercicis

El manual de referència és
http://www.mathworks.es/es/help/matlab/

Matlab

Bucles FOR

Permeten de repetir una sentència, o un grup de sentències un nombre fix de vegades. La seva expressió general és:

```
for i=n1:n2:n3
    instruccions;
    ...
end
```

on `n1, n2, n3` són el valor inicial, l'increment i el valor final de l'índex del bucle. Si les instruccions de l'interior del bucle s'acaben amb ";"els pasos intermitjos no es veuen en pantalla.

Bucles WHILE

Permeten de repetir una sentència fins que es compleix una condició lògica. La seva expressió general és:

```
while condició
  instruccions;
end
```

Sentència IF

Permet bifurcar el flux del programa.

`if` condició

  instruccions si es

  verifica la condició

`else`

  altrament

`end`

Funcions

També podem definir funcions en un fitxer, vegeu
http://www.mathworks.es/es/help/matlab/ref/function

$$function\ [output_args] = untitled2(input_args)$$
$$\%\ UNTITLED2\ Summary\ of\ this\ function\ goes\ here$$
$$\%\ Detailed\ explanation\ goes\ here$$
...
...
...
...
...
$$end$$

Funcions de Matlab

Funcions definides en la finestra de comandes.

$$>> x = [-1 : 0.01 : 1];$$
$$>> f = @(x)x.^2 - 0.25;$$

$$>> plot(x, f(x))$$

$$>> zero = fzero(f, 1)$$

Per ajuda des de Matlab feu *doc fzero*.

Mètodes iteratius

Mètodes iteratius

Algorismes: Criteri d'aturada

Determinar les solucions de l'equació $f(x) = 0$.

Paràmetres de control de convergència

$$tol_x = |x_{n+1} - x_n|$$

$$tol_f = |f(x_{n+1})|$$

Criteri d'aturada principal:
Donats $\eta_x > 0$ i $\eta_f > 0$ $\quad tol_x < \eta_x \quad$ i $\quad tol_f < \eta_f$
Criteri d'aturada secundari:
Donats $\eta_x > 0$ i $\eta_f > 0$ $\quad tol_x < \eta_x \quad$ o $\quad tol_f < \eta_f$

Mètode de la bisecció

Algorisme

1 $a_0 = a,\ b_0 = b,$

2 Per a $n = 0, 1, \ldots,$ fer: $\alpha_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ i

Si $f(a_n)f(\alpha_{n+1}) < 0$, pendre $a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = \alpha_{n+1}$, altrament, pendre $a_{n+1} = \alpha_{n+1},\ b_{n+1} = b_n$.

Anàlisi de l'error: Donat $\eta > 0$

$$|\alpha_{n+1} - \alpha| \leq |b_{n+1} - a_{n+1}| < \frac{|b-a|}{2^{n+1}} < \eta$$

Mètode del punt fix

Mètode de la iteració simple

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = g(x)$$

Algorisme

Començant amb el valor x_1 es construeix una successió de punts definits per

$$x_{n+1} = g(x_n)\,,\;\; n \geq 1\,,$$

mentre que n no superi el nombre màxim d'iteracions o fins que es compleixi el criteri d'aturada:

Mètode de Newton

Mètode de Newton-Raphson o mètode de la tangent

Algorisme

1 $x_0 = a$,

2 Per a $n = 0, 1, \ldots,$ fer:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \,.$$

mentre que n no superi el nombre màxim d'iteracions o fins que es compleixi el criteri d'aturada:

Mètode de la secant

Algorisme

1 $x_1 = a$, $x_2 = b$,

2 Per a $n = 2, 3, \ldots,$ fer:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

o equivalent

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

mentre que n no superi el nombre màxim d'iteracions o fins que es compleixi el criteri d'aturada:

Exercicis

Exercici 1

Comproveu que l'equació

$$x^6 = x + 1\,, \tag{1}$$

té una solució a l'interval $[0, 2]$ i doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

a) Calculeu 5 iterats del mètode de Newton per l'equació (1).

b) Calculeu 5 iterats del mètode de la secant per l'equació (1).

c) Calculeu 5 iterats pel mètode de bisecció per l'equació (1).

d) Quin mètode dona una millor aproximació? Quin pitjor? Comenta les diferències trobades.

Exercici 2

Comproveu que l'equació

$$x^6 = x + 1\,, \tag{2}$$

té una solució a l'interval $[0, 2]$ i doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

b) Feu 3 o més iteracions del mètode de bisecció fins que $l < 1/4$.

c) Calculeu 5 iterats dels mètodes iteratius

$$x_{n+1} = x_n^6 - 1\,, \quad x_{n+1} = \sqrt[6]{x_n + 1}\,,$$

prenent x_0 l'aproximació del mètode de la bisecció.

d) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Feu ús del teorema de convergència pels dos mètodes. Comenta les diferències trobades.

Exercici 2

Solució

n	$x_{n+1} = x_n^6 - 1$	$\lvert f(x_{n+1}) \rvert$	$x_{n+1} = \sqrt[6]{x_n + 1}$	$\lvert f(x_{n+1}) \rvert$
0				
1				
2				
3				
4				
5				

Exercici 3

Comproveu que l'equació

$$e^x = 2 - x\,, \tag{3}$$

té una única solució i doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

b) Aproximeu la solució de (3) amb 3 decimals exactes pel mètode de Newton.

c) Aproximeu la solució de (3) amb 3 decimals exactes pel el mètode de la secant.

d) Aproximeu la solució de (3) amb 3 decimals exactes pel mètode de bisecció.

e) Quin mètode necessita més iteracions? Quin menys? Comenta les diferències trobades.

Exercici 4

Comproveu que l'equació

$$x + \ln x = 0\,, \tag{4}$$

té una solució prop de 0.5. Doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

b) Aproximeu la solució de (4) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = -\ln x_n$.

c) Aproximeu la solució de (4) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = \exp(-x_n)$.

d) Aproximeu la solució de (4) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$.

e) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Feu ús del teorema de convergència pels tres mètodes. Comenta les diferències trobades.

Exercici 4

Solució

n	$x_{n+1} = -\ln x_n$	$x_{n+1} = \exp(-x_n)$	$x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$
0			
1			
2			
3			
4			
$\vdots$			