Computació Numèrica

Laboratori 4. Zeros d'Equacions Algorismes

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

13 de març de 2018

drets d'autor

Índex

El manual de referència és
http://www.mathworks.es/es/help/matlab/

Matlab

Bucles FOR

Permeten de repetir una sentència, o un grup de sentències un nombre fix de vegades. La seva expressió general és:

```
for i=n1:n2:n3
    instruccions;
    ...
end
```

on `n1, n2, n3` són el valor inicial, l'increment i el valor final de l'índex del bucle. Si les instruccions de l'interior del bucle s'acaben amb ";"els pasos intermitjos no es veuen en pantalla.

Bucles WHILE

Permeten de repetir una sentència fins que es compleix una condició lògica. La seva expressió general és:

```
while condició
  instruccions;
end
```

Sentència IF

Permet bifurcar el flux del programa.

```
if condició
  instruccions si es
  verifica la condició
else
  altrament
end
```

Funcions

Tres tipus de funcions, inline, anonymous o funcions en un fitxer, vegeu
http://www.mathworks.es/es/help/matlab/ref/function

$$function\ [output_args] = untitled2(input_args)$$
$$\%\ UNTITLED2\ Summary\ of\ this\ function\ goes\ here$$
$$\%\ Detailed\ explanation\ goes\ here$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$end$$

Funcions de Matlab

Funcions definides en la finestra de comandes.

$$>> x = [-1 : 0.01 : 1];$$
$$>> f = @(x)x.^2 - 0.25;$$

$$>> plot(x, f(x))$$

$$>> zero = fzero(f, 1)$$

Per ajuda des de Matlab feu *doc fzero*.

Mètodes iteratius

(convergència)

Mètodes iteratius

Algorismes: Criteri d'aturada

Determinar les solucions de l'equació $f(x) = 0$.

Paràmetres de control de convergència

$$tol_x = |x_{n+1} - x_n|$$

$$tol_f = |f(x_{n+1})|$$

Criteri d'aturada principal:

Donats $\eta_x > 0$ i $\eta_f > 0$ $\quad tol_x < \eta_x \quad \text{i} \quad tol_f < \eta_f$

Criteri d'aturada secundari:

Donats $\eta_x > 0$ i $\eta_f > 0$ $\quad tol_x < \eta_x \quad \text{o} \quad tol_f < \eta_f$

Mètode del punt fix

Mètode de la iteració simple

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = g(x)$$

Algorisme

Començant amb el valor x_1 es construeix una successió de punts definits per

$$x_{n+1} = g(x_n)\,,\;\; n \geq 1\,,$$

mentre que n no superi el nombre màxim d'iteracions o fins que es compleixi el criteri d'aturada sempre i quan es verifiqui les condicions del teorema de convergència.

Acceleració de la convergència

Mètode Δ^2 d'Aitken

$$x'_{n+2} = \frac{x_{n+2}x_n - {x_{n+1}}^2}{x_{n2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_{n+2} - \frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n}$$

Llavors $x'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ més ràpidament, en el sentit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x'_n - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = 0\,.$$

Mètode de Steffensen

A partir d'un procés $x_{k+1} = g(x_k)$ de primer ordre, i unes iteracions, x_0, x_1 i x_2, calculem x'_2, i continuem $x_3 = g(x'_2)$ i $x_4 = g(x_3)$ i tornem a aplicar el procés a la terna x'_2, x_3 i x_4.

Exercicis

Exercici 3

Comproveu que l'equació

$$x^6 = x + 1\,,$$

té una solució a l'interval $[0, 2]$ i doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

b) Feu 3 o més iteracions del mètode de bisecció fins que $l < 1/4$.

c) Calculeu 5 iterats dels mètodes iteratius

$$x_{n+1} = x_n^6 - 1\,, \quad x_{n+1} = \sqrt[6]{x_n + 1}\,,$$

prenent x_0 l'aproximació del mètode de la bisecció.

d) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Feu ús del teorema de convergència pels dos mètodes. Comenta les diferències trobades.

Exercici 3

Solució

n	$x_{n+1} = x_n^6 - 1$	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$x_{n+1} = \sqrt[6]{x_n + 1}$	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$
0				
1				
2				
3				
4				
5				

Exercici 4

Comproveu que l'equació

$$x + \ln x = 0\,, \tag{1}$$

té una solució prop de 0.5. Doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

b) Aproximeu la solució de (1) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = -\ln x_n$.

c) Aproximeu la solució de (1) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = \exp(-x_n)$.

d) Aproximeu la solució de (1) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$.

e) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Feu ús del teorema de convergència pels tres mètodes. Comenta les diferències trobades.

Exercici 4

Solució

n	$x_{n+1} = -\ln x_n$	$x_{n+1} = \exp(-x_n)$	$x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$
0			
1			
2			
3			
4			
$\vdots$			