Computació Numèrica

Laboratori 5
Sistemes d'equacions lineals

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

20 de març de 2018

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Índex

MATLAB

Conceptes generals

`Matlab` treballa essencialment només amb un tipus d'objecte, una matriu rectangular de nombres reals o complexes.

En particular, per matrius d'una fila o columna parlarem de vectors.

Matrius

Una matriu s'obté entrant la llista explícita dels seus elements, separats per blancs o comes, fent servir punt i coma per acabar una fila, i entre claudàtors.

$\gg$ `A = [1 1; 2 2]`
Podem fer referència als elements de la matriu,
$\gg$ A(2,2) ens retorna 2,
i modificar el seu valor si així convé $\gg$ A(2,2)=5.

Les matrius no s'han de dimensionar, això permet d'afegir files ($\gg$ `A=[A;3 3]`) o treure-les-en ($\gg$ `A=A(1:2,:)`) i retornem a la matriu `A` inicial.

Com definir una matriu?

a) Per la llista explícita dels seus elements.
b) Fent ús de funcions predefinides en `Matlab`:

   `rand` , `randn` , `zeros` , `eye` , `ones` , `magic` , `hilbert` , `diag`.
c) Llegint dades des d'un fitxer extern.
d) Executant un `script` definit per nosaltres.

Exercici

Exercici 1 Genereu una matriu quadrada aleatòria d'ordre la suma dels dígits del DNI. Per aquesta matriu:

a) Obteniu la seva inversa, la seva transposada i la seva diagonal.

b) Esborreu les columnes 2 i 4

c) Eleveu totes les dades al cub.

d) Obteniu l'arrel quadrada de les dades de la matriu. (sqrt)

e) Calculeu el vector de mitjes per files (mean). Calculeu el vector de desviacions estàndar per files (std).

Exercici

Exercici 2 Definiu la matriu $U = (u_{ij})_{15\times 15}$ i el vector $b = (b_i)_{15\times 1}$ com

$$u_{ij} = \begin{cases} \cos(ij) & i \leq j\,, \\ 0 & i > j\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad b_i = \tan(i)\,.$$

Exercici 3 Definiu la matriu $L = (u_{ij})_{20\times 20}$ i el vector $b = (b_i)_{20\times 1}$ com

$$l_{ij} = \begin{cases} i+j & i \geq j\,, \\ 0 & i < j\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad b_i = i\,.$$

Funcions matricials

a) La <u>trasposada</u> d'una matriu `A`, s'obté per `A'`.
b) La <u>inversa</u> d'una matriu `A`, s'obté per `inv(A)`.
c) La <u>diagonal</u> d'una matriu `A`, s'obté per `diag(A)`.
d) El <u>determinant</u> d'una matriu `A`, s'obté per `det(A)`.
f) `eig(A)` són els <u>valors propis</u> d'una matriu `A`.
g) `triu(A)`, `tril(A)`.

Operacions aritmètiques

a) Per a la divisio de matrius, tenim / i \
Si `A` és una matriu no singular, la solució al sistema `A*X=B`, la calcularem com `X=A\B`;
en canvi per `X=B/A` denotarem la solució del sistema `X*A=B`.

b) Si `A` és una matriu quadrada, i `p` un escalar, `A^p`, és la potència `p` de la matriu `A`.

Funcions predefinides

a) `A\b`, solució del sistema $Ax = b$.
b) `[L,U,P]=lu(A)`, factorització $PA = LU$.
c) `L=chol(A)`, factorització $A = LL'$.
d) `[Q,R]=qr(A)`, factorització $A = QR$.
e) `[V,D]=eig(A)`, vectors i valors propis.
f) `[S,V,D]=svd(A)`, descompossició en valors singulars.

Autoavaluació

Exercici Per a les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comproveu les igualtats següents:

a) $(AB)C = A(BC)\,,$

b) $A(B + C) = AB + AC\,,$

c) $(AB)^t = B^t A^t\,.$

d) $(A + B)C = AC + BC.$

Sistemes d'equacions lineals

Sistemes TRIANGULARS

Exercici 4 Escriviu un script de `Matlab` per trobar la solució d'un sistema lineal triangular superior (inferior) $AX = B$ pel mètode de substitució enrera (endavant). Feu jocs de proves.

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{rcr} 3x - 2y + z - t & = & 8 \\ 4y - z + 2t & = & -3 \\ 2z + 3t & = & 11 \\ 5t & = & 15 \end{array} \right.$$

$$\text{b)} \left\{ \begin{array}{lcr} 5x & = & -10 \\ x + 3y & = & 4 \\ 3x + 4y + 2z & = & 2 \\ -x + 3y - 6z - t & = & 5 \end{array} \right.$$

Mètode de Gauss

Exercici 5 Resoleu per eliminació gaussiana el sistema lineal $Ax = b$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exercici 6 Resoleu el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & 4y & = & 1 \\ -2.998x & + & 6.001y & = & 2 \end{array} \right.$$

per qualsevol mètode que conegeu. Compareu la solució amb la del sistema obtingut substituin la segona equació per $-2.998x + 6y = 2$. Com són les dues solucions? És un problema estable?

Factorització Txoleski

Exercici 7 Trobeu la descomposició de Txoleski i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següent:

$$a)\quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 7 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -2 \end{array} \right.$$

En Matlab la factorització $R'R = A$ s'obté per [R]=chol(A).

Tota matriu simètrica i definida positiva té factorització $R'R = A$.

Factorització QR

Exercici 8 Trobeu la descomposició QR i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següents:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.06x_3 + 0.05x_4 & = & 0.23 \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 + 0.08x_3 + 0.07x_4 & = & 0.32 \\ 0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.10x_3 + 0.09x_4 & = & 0.33 \\ 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.10x_4 & = & 0.31 \end{array} \right.$$

En Matlab la factorització $A = QR$ s'obté per [Q,R]=qr(A).

Vector residu

Com a criteri de comparació entre la solució exacta $\mathbf{x}$, i la solució calculada $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$, del sistema lineal $A\mathbf{x} = b$ definim el vector residu $r(\mathbf{x}^*)$ per:

$$r(\mathbf{x}^*) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}^* = b - A\mathbf{x}^*\,,$$

llavors es verifica:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \mathcal{K}(A)\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \mathcal{K}(A)\frac{\|r(\mathbf{x}^*)\|}{\|\mathbf{b}\|} \tag{1}$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|} \leq \mathcal{K}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \tag{2}$$

Nombre de condició

Es diu que el sistema $Ax = B$ està mal condicionat si A té un nombre de condició gran.

`Matlab`

- ✓ `cond(A,p)` Mesura el mal condicionament

  `cond(eye)=1`

  `cond(matsingular)=`∞
- ✓ `rcond(A,p)` Mesura el bon condicionament

  `rcond(eye)=1`

  `rcond(matsingular)=0`

Exercici 9

Resoleu sistema $Ax = b$ si

$$(A|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right)$$

Comproveu, després, que $(6\,,-7.2\,,2.9\,,-0.1)^t$ i $(1.50\,,0.18\,,1.19\,,0.89)^t$ donen residus molt petits.
Estimeu el nombre de condició de la matriu.
Sabeu donar una explicació del que s'observa?

Exercici 10

Feu una predicció de com petits canvis en A afecten a la solució x del sistema d'equacions $Ax = b$. Poseu a prova la vostra predicció per a $b = (100, 1)^t$ i les matrius següents

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Sabeu donar una explicació del que s'observa?

Sistemes d'equacions NO lineals

Sistemes d'equacions no lineals

La funció $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de diverses variables dóna lloc al sistema d'equacions no lineals

$$F(x) = 0\,,$$

que també es pot escriure com

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ F_n(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{array} \right. \tag{3}$$

El mètode de Newton

Si F és diferenciable amb contiuïtat, el mètode és

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (DF(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1} \cdot F(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{4}$$

per $\mathbf{x}^{(k)}$ indiquem el vector d'iteració k-èssim.

Algorisme computacional

Donats x^0 i $\eta > 0$ l'algorisme és:

$$\begin{cases} (DF(\mathbf{x}^{(k)})) \cdot \mathbf{y}^{(k)} = & -F(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = & \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{y}^{(k)} \end{cases} \tag{5}$$

fins que

$$||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}|| < \eta \quad \text{i} \quad ||F(\mathbf{x}^{(k+1)})|| < \eta$$

Exercici 11

Apliqueu el mètode de Newton per resoldre el sistema no lineal

$$\begin{aligned} x &= \sin(x+y)\,, \\ y &= \cos(x-y)\,, \end{aligned}$$

prop de $(1,1)^t$ amb una precisió tal que

$$||\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)}|| \leq 10^{-6} \quad \text{i} \quad ||F(\mathbf{z}^{(k+1)})|| < 10^{-6}\,.$$

si $\mathbf{z} = (x,y)^t$.

El mètode de la iteració simple

Transformen $F(x) = 0$ com $x = G(x)$, el mètode és

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = G(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{6}$$

per $\mathbf{x}^{(k)}$ indiquem el vector d'iteració k-èssim.

Algorisme computacional

Donats x^0 i $\eta > 0$ l'algorisme és:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = G(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{7}$$

fins que

$$||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}|| < \eta \quad \text{i} \quad ||F(\mathbf{x}^{(k+1)})|| < \eta$$

La convergència depèn si $||DG(\alpha)|| < 1$.

Exercici 12

Apliqueu el mètode de la iteració simple per resoldre el sistema no lineal

$$
\begin{aligned}
x &= \sin(x+y)\,, \\
y &= \cos(x-y)\,,
\end{aligned}
$$

prop de $(1,1)^t$ amb una precisió tal que

$$||\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)}|| \leq 10^{-6} \quad \text{i} \quad ||F(\mathbf{z}^{(k+1)})|| < 10^{-6}\,.$$

si $\mathbf{z} = (x,y)^t$.

Exercici 13

Determineu les solucions del sistema d'equacions no lineals

$$\begin{aligned} x^2 - y - 1 &= 0\,, \\ (x-2)^2 + (y-0.5)^2 - 1 &= 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

a) Comproveu que l'equació (8) té una solució.

b) Calculeu 5 iterats pel mètode de Newton prenent x_0 adient.

c) Calculeu 5 iterats pel mètode de la iteració simple prenent x_0 adient.

d) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Feu ús del teorema de convergència pels dos mètodes. Comenta les diferències trobades. Quants decimals correctes s'obtenen?

Solució

Solució, $\mathbf{z^k} = (x^k, y^k)^t$,

n	x^k	y^k	$\|\|\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{z}^{(k-1)}\|\|$	$\|\|F(\mathbf{z}^{(k)})\|\|$
0				
1				
2				
3				
4				
5				

Exercici 14

Determineu les solucions del sistema d'equacions no lineals

$$\begin{aligned} \cos(x) &= e^y\,, \\ \sin(xy) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

amb una precisió tal que $||z^{(k+1)} - z^{(k)}|| \leq 10^{-6}$.

a) Comproveu que l'equació (9) té una solució.

b) Fent ús del mètode de Newton prenent x_0 adient.

c) Fent ús del mètode de la iteració simple prenent x_0 adient.

d) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Feu ús del teorema de convergència pels dos mètodes. Comenta les diferències trobades. Quants decimals correctes s'obtenen?

Solució

Solució, $\mathbf{z^k} = (x^k, y^k)^t$,

n	x^k	y^k	$\|\|\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{z}^{(k-1)}\|\|$	$\|\|F(\mathbf{z}^{(k)})\|\|$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
$\vdots$				

Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center,
  Tutorials