Conceptes Bàsics

1 Propagació de l'error

1 Per a calcular el punt mig de dos punts a i b a la recta real, podem utilitzar les dues expressions següents:

$$0.5(a+b) \quad \text{i} \quad a+0.5(b-a)$$

Calculeu les dues quan $a = 0.982$ i $b = 0.987$, amb una aritmètica de tres xifres bo i tallant. Repetiu els càlculs ara arrodonint. Comenteu els resultats obtinguts.

2 Calculeu: $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{3^k}$ i $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{3^{(7-k)}}$

a) Fent ús de l'aritmètica de tres xifres arrodonint.

b) Fent ús de l'aritmètica de quatre xifres arrodonint.

c) Per què donen diferent? Calculeu en cada cas l'error relatiu percentual.

3 Calculeu $\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}+2\right)^4}$ tenint accés al valor aproximat de 1.7321 per $\sqrt{3}$. Calculeu l'error comès si es fa el càlcul directe o avaluant l'expressió $97 - 56\sqrt{3}$.

4 Determineu l'error màxim en el càlcul de $y = \dfrac{x_1 x_2^2}{\sqrt{x_3}}$ amb $x_1 = 2.0 \pm 0.1$, $x_2 = 3.0 \pm 0.2$ i $x_3 = 1.0 \pm 0.1$. Quina de les dades contribueix més a l'error en y? Per què?

2 Algorismes

5 Avalueu les funcions

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1\,, \quad g(x) = x^2/\sqrt{x^2+1} + 1$$

per a la successió de valors de $x_n = 8^{-n}$, $n \geq 1$. Encara que $f(x) = g(x)$, l'ordinador dóna resultats diferents. Quins resultats són de fiar i quins no? Per què? Justifiqueu la vostra resposta.

6 Sigui $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)...(x-10)$, el polinomi amb arrels els deu primers nombres naturals, definim el polinomi $q(x) = p(x) + \dfrac{1}{2^{13}}\,x^9$, modificant lleugerament el coeficient de x^9 respecte de $p(x)$. Com haurien de ser les arrels del polinomi $q(x)$? Calculeu-les. Com són en realitat?

7 Resoleu el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & 4y & = & 1 \\ -2.998x & + & 6.001y & = & 2 \end{array} \right.$$

per qualsevol mètode que conegeu. Compareu la solució amb la del sistema obtingut substituin la segona equació per $-2.998x + 6y = 2$. Com són les dues solucions? És un problema estable?

8 Per calcular les integrals $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{x-1} dx\,, \quad n \geq\ 1\,,$ dispossem de dos mètodes iteratius diferents:

$$\text{a)}\quad I_{n-1} \quad = \frac{1-I_n}{n}, \qquad n \geq 2 \qquad \text{on } I_{50} = 0\,,$$

$$\text{b)}\quad I_n \qquad = 1 - nI_{n-1}, \quad n \geq 2 \qquad \text{on } I_1 = 1/e\,.$$

Discutiu la estabilitat de la recurrència.

9 Definim el nombre e com $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Per calcular-ne una aproximació considerem el mètode iteratiu definit per

$$x_k = x_{k-1} + \frac{1}{k!}\,, \quad k \geq 1\,, \quad x_0 = 1$$

Calculeu els 20 primers termes de la recurrència, compareu els vostres resultats amb el valor $exp(1)$ retornat per `Matlab`.

10 Escriviu una `function` que calculi e^x per a tot x a partir de la sèrie de Taylor en $x = 0$ de la funció exponencial,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Feu un joc de proves per a diferents valors de n i de x; compareu el vostre resultat amb el resultat que retorna la funció `exp` de Matlab. (Feu un joc de proves).

11 Escriviu un `script` que calculi $e^{-5.5}$ amb almenys 12 decimals correctes (feu ús de la funció anterior).

12 Per calcular $\sin(x)$ a partir del seu desenvolupament en sèrie es considera la succesió de sumes parcials

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}\,,$$

Feu una taula per $k = 5\,, 15\,, 25\,, \ldots\,, 85$ i $x = 0\,, \pi\,, 2\pi\,, 8\pi$ i calculeu $S_k(x)$ (Joc de proves).

13 Escriviu un script per a resoldre les equacions de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$, on $a,\ b,\ c$ són nombres reals. Cal distingir els casos trivials i els casos $a = 0$, $b^2 - 4ac < 0$ i $b^2 - 4ac > 0$. Feu un joc de proves. Especialment ompliu la taula següent:

a	1	0	0	1	1	1	1	1	1	10^{-30}	10^{-25}
b	4	4	0	2	2	1	0	0	4	10^{30}	10^{32}
c	2	2.3	2.3	2.3	1	0	-1	1	3.99999999	10^{30}	10^{30}
x_1											
x_2											