Àlgebra Lineal Numèrica (I)

1 Sistemes d'equacions lineals. Mètodes directes.

1 Resoleu per eliminació gaussiana el sistema lineal $Ax = b$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2 Trobeu la descomposició LU i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següents:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & -8 & 4 & 10 & -10 \\ 3 & -13 & 3 & 3 & -39 \\ -6 & 4 & 2 & -18 & -16 \end{array}\right),$$

3 Trobeu la descomposició QR i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següents:

$$a) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 7 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -2 \end{array} \right. ;$$

$$b) \left\{ \begin{array}{rcl} 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.06x_3 + 0.05x_4 & = & 0.23 \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 + 0.08x_3 + 0.07x_4 & = & 0.32 \\ 0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.10x_3 + 0.09x_4 & = & 0.33 \\ 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.10x_4 & = & 0.31 \end{array} \right. .$$

2 Nombre de condició d'una matriu.

4 Fent ús de les normes $||\ ||_1$,$||\ ||_2$, i $||\ ||_\infty$, calculeu $||x - x^*||$ i $||Ax^* - b||$ en el cas següent:

$$(A|\,b) = \begin{pmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 & | & 15913 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 & | & 28.544 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 & | & 8.4254 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{pmatrix}.$$

5 Feu una predicció de com petits canvis en A afecten a la solució x del sistema d'equacions $Ax = b$. Poseu a prova la vostra predicció per a $b = (100, 1)^t$ i les matrius següents

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Sabeu donar una explicació del que s'observa?

6 Calculeu els nombres de condició de les matrius següents fent servir les normes $||A||_1$,$||A||_2$, i $||A||_\infty$:

$$(a)\begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix} \qquad (b)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (c)\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7 Demostreu per als nombres de condició de dues matrius A i B: $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$.

8 Demostreu que el nombre de condició d'una matriu A verifica: $\kappa(\lambda A) = \kappa(A) \quad (\lambda \neq 0)$.

3 Sistemes lineals. Mètodes iteratius.

9 Escriviu un programa que implementi els algoritmes de Jacobi i Gauss - Seidel. Introduiu un test de convergència. Proveu-lo per a diferents sistemes.

10 Demostreu que, pel sistema següent:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{cases}$$

el mètode de Jacobi convergeix i, en canvi el de Gauss-Seidel no convergeix.

11 Resoleu pel mètode de Jacobi i de Gauss-Seidel els sistemes $Ax = b$ donat per

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

prenent $x^{(0)} = (0\,,0\,,0\,,0)^\top$ i una tolerància $0.5 \cdot 10^{-12}$. Quantes iteracions calen?

12 Feu servir $(0.33116, 0.70000)^t$ com a punt inicial per resoldre pel mètode de Gauss-Seidel el sistema $Ax = b$. Què passa?

$$A = \begin{pmatrix} 0.96326 & 0.81321 \\ 0.81321 & 0.68654 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.88824 \\ 0.74988 \end{pmatrix}.$$

13 Estudieu la convergència dels mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel per a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \qquad |\rho| < 1.$$

14 Considereu el sistema $Ax = b$ on $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per a quins valors de a convergeix el mètode de Jacobi?

15 Resoleu per algun mètode iteratiu els sistemes següents:

$$\begin{cases} 8x - 3y - 2y &= 20 \\ 4x + 11y - z &= 33 \\ 6x + 3y + 12z &= 36 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 4x_1 - x_2 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 6 \\ -x_2 + 4x_3 &= 2\,. \end{cases}$$