

Índice general

I	La clase Sistema y sus subclases BlockV, Vector, BlockM y Matrix	2
1.	La clase Sistema	4
1.1.	Implementación de los sistemas (o listas ordenadas) en la clase Sistema	5
1.1.1.	Texto de ayuda	5
1.1.2.	Método de inicialización	5
1.1.3.	Métodos similares a los de una list	6
1.1.4.	Concatenación de Sistemas	7
1.1.5.	Sustitución y simplificación de expresiones simbólicas en un Sistema	8
1.1.6.	Otros métodos de la clase Sistema	9
1.1.7.	Métodos que devuelven SubEspacios	12
1.1.8.	Método de resolución de sistema de Ecuaciones lineales	12
1.2.	Operaciones algebraicas sobre Sistemas	12
1.2.1.	Implementación del operador selector por la derecha para la clase Sistema	12
1.2.2.	Implementación del operador selector por la izquierda para la clase Sistema	14
1.2.3.	Suma y diferencia de Sistemas	14
1.2.4.	Producto de un Sistema por un escalar a su izquierda	16
1.2.5.	Producto de un Sistema por escalar, Vector o Matrix a su derecha	17
1.3.	Transformaciones elementales de un Sistema	19
1.3.1.	Texto de ayuda transformaciones elementales por la derecha	19
1.3.2.	Implementación de las transformaciones elementales por la derecha	19
1.3.3.	Implementación de las transformaciones elementales por la izquierda	20
1.4.	Eliminación	20
1.4.1.	Reducción por eliminación mediante transformaciones elementales	20
1.4.2.	Representación de los procesos de eliminación Gaussiana	22
1.5.	Representación de la clase Sistema	24
1.5.1.	Ejemplo de representación de un Sistema	26
1.5.2.	Ejemplo de representación con un Sistema más complejo	26
1.6.	La clase Sistema completa	28
2.	La subclase BlockV	29
2.1.	Implementación	29
2.1.1.	Texto de ayuda	29
2.1.2.	Método de inicialización:	30
2.2.	Métodos de la subclase BlockV	31
2.3.	Representación de la subclase BlockV	31
2.3.1.	Ejemplo de representación de un BlockV	31

2.4. La clase BlockV completa	32
3. La subclase Vector	33
3.1. Implementación de los vectores de \mathbb{R}^n en la subclase Vector	33
3.1.1. Texto de ayuda	33
3.1.2. Método de inicialización:	34
3.2. Métodos específicos de la subclase Vector	34
3.3. Representación de la clase Vector	35
3.4. La clase Vector completa	35
4. Las subclases V0 y V1	36
5. La subclase BlockM	37
5.1. Implementación	37
5.1.1. Texto de ayuda	37
5.1.2. Método de inicialización:	38
5.2. Métodos de la clase BlockM	38
5.2.1. Transposición de un BlockM	38
5.2.2. Comprobación de que las filas o columnas son de composición homogénea	39
5.2.3. Apilado de BlockMs	39
5.2.4. Operador selector por la izquierda	39
5.3. Otros métodos de la clase BlockM	40
5.3.1. Extiende una BlockM a lo largo de la diagonal con una lista de BlockMs	40
5.4. Transformaciones elementales de las filas de un BlockM	40
5.4.1. Texto de ayuda	40
5.4.2. Implementación de las transformaciones elementales de las filas	40
5.5. Representación de la clase BlockM	41
5.6. La clase BlockM completa	42
6. La subclase Matrix	43
6.1. Implementación de las matrices en la subclase Matrix	43
6.1.1. Texto de ayuda	43
6.1.2. Método de inicialización:	44
6.2. Métodos específicos de la subclase Matrix	44
6.2.1. Disposición de los elementos de una Matrix	44
6.2.2. Creación de un Vector a partir de la diagonal de una Matrix	45
6.2.3. Traza de una Matrix	45
6.2.4. Normalizado de las columnas (o filas) de una matriz	45
6.2.5. Potencias de una Matrix cuadrada	45
6.2.6. Determinante mediante la expansión de Laplace	45
6.2.7. Método de Gram-Schmidt	46
6.2.8. Otros métodos específicos de las matrices cuadradas que usan eliminación	46
6.2.9. Diagonalización ortogonal de una matriz simétrica	49
6.3. Representación de la clase Matrix	50
6.4. La clase Matrix completa	51
7. Las subclases M0, M1 e I	52
8. Las subclases de sistemas simbólicos	53

9. Sistemas obtenidos tras algunos procedimientos específicos de eliminación	55
9.1. Subclases de Sistema: Elim, ElimG, ElimGJ, ElimGF y ElimGJF	55
9.2. Subclases de Matrix: InvMat, InvMatF e InvMatFC	56
9.3. Subclases de Matrix: DiagonalizaS, Diagonaliza0 y DiagonalizaC	57
 II La clase T (transformación elemental)	 59
10.La clase T	60
10.1. Introducción	60
10.2. Implementación de las transformaciones elementales	62
10.2.1. Texto de ayuda	62
10.2.2. Método de inicialización	64
10.3. Composición de Transformaciones o transformación de un Sistema por la izquierda .	64
10.3.1. Texto de ayuda	64
10.3.2. Implementación	65
10.4. Transposición de transformaciones elementales	65
10.5. Potencias e inversa de transformaciones elementales	66
10.6. Transformaciones elementales “espejo”	66
10.7. Sustitución de variables simbólicas	67
10.8. Métodos similares a los de una list	67
10.8.1. T es iterable	67
10.8.2. Igualdad entre transformaciones elementales	68
10.9. Representación de la clase T	68
10.9.1. Secuencias de transformaciones	69
10.10La clase T completa	70
 III Las clases SubEspacio y EAfin	 71
11.La clase SubEspacio (de \mathbb{R}^m)	72
11.1. La clase SubEspacio (de \mathbb{R}^m)	72
11.2. Implementación de SubEspacio	73
11.3. Métodos de la clase SubEspacio	74
11.4. Métodos de representación de la clase SubEspacio	76
11.5. La clase SubEspacio completa	76
12.La clase EAfin (de \mathbb{R}^m)	77
12.1. Implementación de EAfin	77
12.2. Métodos de la clase EAfin	78
12.3. Métodos de representación de la clase EAfin	79
12.4. La clase EAfin completa	80
 IV Las clases Homogenea y SEL	 81
13.Resolución de sistemas de ecuaciones homogéneos. La clase Homogenea	82
13.1. Implementación de la clase Homogenea	82
13.2. Métodos de representación de la clase Homogenea	83

14.Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. La clase SEL	84
14.1. Implementación	84
14.1.1. Texto de ayuda	84
14.2. Métodos de representación de la clase SEL	85
 V La clase Determinante. Cálculo del determinante por eliminación	86
14.2.1. Método de inicialización	87
 VI La clase FuncionLineal	88
14.3. Implementación de las funciones afines en la clase FuncionLineal	89
14.3.1. Método de inicialización	89
14.4. Métodos la clase FuncionLineal	89
14.5. Métodos de representación de la clase FuncionLineal	90
 VII Librería completa	92
 15.Métodos generales	95
15.1. Números	95
15.2. Números racionales	95
15.3. Ristras	95
15.4. Métodos de representación para el entorno Jupyter	96
15.5. Métodos CreaLista y CreaSistema	97
15.6. Métodos primer_no_nulo y ultimo_no_nulo de un Sistema	97
15.7. Otros métodos auxiliares	97
15.8. Cribado de secuencias de transformaciones	98
15.9. Simplificación de expresiones simbólicas	98

Notación Asociativa para un Curso de Álgebra Lineal (NAcAL)

Versión: 0.2.1

Marcos Bujosa

21 de mayo de 2024

Introducción

Declaración de intenciones

Uno de los objetivos que me he propuesto para el curso Matemáticas II (Álgebra Lineal) es mostrar que escribir matemáticas y usar un lenguaje de programación son prácticamente la misma cosa. Este modo de proceder debería ser un ejercicio muy didáctico ya que:

Un PC es muy torpe y se limita a ejecutar literalmente lo que se le indica (un PC no interpreta interpolando para intentar dar sentido a lo que se le dice... eso lo hacemos las personas, pero no los ordenadores).

Consecuentemente este ejercicio impone una disciplina a la que en general el alumno no está acostumbrado: *el ordenador hará lo que queremos solo si las expresiones tienen sentido e indican correctamente lo que queremos*. Si el ordenador no hace lo que queremos, será porque que no hemos escrito las ordenes de manera correcta (lo que supone que también hemos escrito incorrectamente las expresiones matemáticas).

Con esta idea en mente:

1. La notación del [Curso de Álgebra Lineal](#) pretende ser operativa; es decir, su uso debe ser directamente traducible a operaciones a realizar por un ordenador. Para lograr una mayor simplificación, la notación explota de manera intensiva la asociatividad.
2. Muchas de las demostraciones del [libro](#) son algorítmicas. En particular aquellas las relacionadas con la eliminación. De esta manera las demostraciones describen literalmente la programación de los correspondientes algoritmos.

Un módulo específico para el curso de Álgebra Lineal

Aunque Python dispone de módulos para operar con vectores y matrices, he decidido escribir mi propio módulo. De este modo logro que la notación del [libro](#) y las expresiones empleadas con este módulo para Python se parezcan lo más posible. Este documento describe tanto el uso del módulo [NAcAL](#) como su código.

TENGA EN CUENTA QUE ESTO NO ES UN [TUTORIAL](#) DE PYTHON.

Mi labor es enseñar Álgebra Lineal (no Python). Afortunadamente usted dispone de muchos cursos y material en la web para aprender Python. No obstante, he escrito unos Notebooks de Jupyter que ofrecen unas breves nociones de programación en Python (aunque muy incompletas).

Antes de seguir, repase el Notebook “[Listas y tuplas](#)” en la carpeta “[TutorialPython](#)” en <https://github.com/mbujosab/nacallib/tree/master/doc/Notebooks/TutorialPython>

Y recuerde que

¡hacer matemáticas y programar son prácticamente la misma cosa!

Parte I

**La clase Sistema y sus subclases
BlockV, Vector, BlockM y Matrix**

El primer capítulo presenta una *clase* para las *listas ordenadas de objetos* denominada **Sistema**.

Los capítulos siguientes definen ciertas subclases (y subclases de subclases) de la clase **Sistema**:

- **BlockV** es una subclase que puede mostrarse verticalmente en su representación L^AT_EX.
- **Vector** es un **BlockV** formado exclusivamente por números (implementa los vectores de \mathbb{R}^n).
 - **V0** y **V1** son **Vectores** que de ceros y de unos respectivamente.
- **BlockM** es una subclase de **Sistema** cuyos elementos son **BlockVs** con el mismo número de elementos. Permite trabajar con arreglos rectangulares de objetos. Por ser arreglos rectangulares podremos definir su transposición y con ello generar **BlockM** cuyas componentes están formadas por los **BlockVs** que contienen las primeras componentes, luego las segundas, etc.
- **Matrix** es un **BlockM** formado exclusivamente por **Vectores** (matrices de $\mathbb{R}^{n \times m}$) .
 - **M0** y **M1** son **Matrices** de ceros y de unos respectivamente. La subclase **I** permite definir fácilmente matrices identidad.
- Por último se definen ciertas subclases de **Sistemas** (en algunos casos son específicamente **Matrices**) que resultan tras la aplicación de algún proceso específico de eliminación. Estos **Sistemas** poseen algunos atributos adicionales tales como los **pasos** de eliminación que se han dado hasta llegar a su obtención.

Capítulo 1

La clase Sistema

En el [libro](#) del curso se dice que

Un *sistema* es una lista ordenada de objetos.

Aunque Python posee de manera nativa las `list` (listas), `NAcAL` define una clase específica denominada `Sistema`. De esta manera `NAcAL` puede implementar tanto los métodos específicos descritos en el curso como la notación empleada en el [libro](#), donde los sistemas genéricos se muestran entre *corchetes* y con los elementos de la lista *seguidos de* “;”.¹ No solo eso, cada uno de los elementos de un `Sistema` se muestra con su propia representación *latex* (si la tiene). Por ejemplo, el `Sistema`

1 `Sistema([Vector([1,2,3]), I(2), T({1,2})])`

contiene un vector de \mathbb{R}^3 , la matriz identidad 2 por 2 y una transformación intercambio entre las componentes 1 y 2 de un sistema. En un Notebook de Jupyter veremos dicho `Sistema` así

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \tau_{[1 \rightleftharpoons 2]} \right]$$

(es decir, con la misma notación descrita en el curso de Álgebra Lineal).

Aunque los `Sistemas` y las `listas` de Python se diferencian en su representación y en algunos de sus métodos, otros métodos que comunes. De hecho, en algunos aspectos un `Sistema` se comporta exactamente igual que una `list` (por ejemplo, un `Sistema` también es iterable). La mayoría de métodos definidos en `NAcAL` son específicos de los `Sistemas`, y otros métodos se han modificado para reservar los símbolos de algunos *métodos mágicos* de Python para ciertas operaciones algebraicas. Por ejemplo, las `listas` de Python se concatenan con “+”, pero los `Sistemas` se concatenan con el método `concatena()`. Así `NAcAL` reserva el símbolo “+” para sumar `Sistemas` componente a componente como se hace en Álgebra Lineal. Con ello se logra que lo que veamos y escribamos en un Notebook de Jupyter sea lo más parecido posible a lo que vemos y escribimos en un [curso de Álgebra Lineal](#).

¹`NAcAL` también replica la notación de otros sistemas particulares tales como los vectores de \mathbb{R}^n y las matrices.

1.1. Implementación de los sistemas (o listas ordenadas) en la clase Sistema

1.1.1. Texto de ayuda

El texto de ayuda de la clase `Sistema` es auto-explicativo y Python lo muestra al teclear `help(Sistema)`:

```
1  

---

      Texto de ayuda de la clase Sistema 

---


2  """Clase para listas ordenadas con representaci3n latex
3
4  Un Sistema es una lista ordenada de objetos. Los Sistemas se instancian
5  con una lista, tupla u otro Sistema.
6
7  Parámetros:
8      arg (list, tuple, Sistema): lista, tupla o Sistema de objetos.
9
10 Atributos:
11     lista      (list): lista de objetos.
12     n          (int): número de elementos del sistema.
13     corteSistema (set): índices de los elementos tras los que mostrar
14                        una separación en la representaci3n LaTeX
15 Ejemplos:
16 >>> # Crea un nuevo Sistema a partir de una lista, tupla o Sistema
17 >>> Sistema( [ 10, 'hola', T({1,2}) ] )      # con lista
18 >>> Sistema( ( 10, 'hola', T({1,2}) ) )      # con tupla
19 >>> Sistema( Sistema( [ 10, 'hola', T({1,2}) ] ) ) # con Sistema
20
21 [10; 'hola'; T({1, 2});]
22 """
```

1.1.2. Método de inicializaci3n

La clase se inicia con el método: `def __init__(self, ...)`.

- Un `Sistema` se instancia con el argumento `arg` (que es una *ristra* de objetos —Sección 15.3).
- Añadimos un breve texto de ayuda que Python mostrará con: `help Sistema.__init__`
- Cuando `arg` es una lista, tupla o `Sistema`, el atributo `self.lista` guarda una lista en forma de `list` (lista de Python) con los elementos contenidos en `arg`.
- Cuando `arg` no es una lista, tupla, o `Sistema` se devuelve un mensaje de error.
- El atributo `.n` contiene el número de elementos del `Sistema`.
- El atributo `.corteSistema` tiene que ver con una modificaci3n de la [Representaci3n de la clase Sistema](#) para *visualmente* cortar el `Sistema` en sublistas con unas líneas verticales en las posiciones indicadas en este atributo (Véase la Sección 1.5).

```
1  

---

      Inicializaci3n de la clase Sistema 

---


2  def __init__(self, arg):
3      """Inicializa un Sistema con una lista, tupla o Sistema"""
4      if es_ristra(arg):
5          self.lista = list(arg)
6      else:
7          raise ValueError('El argumento debe ser una lista, tupla, o Sistema.')
8
9      self.n = len(self)
10     self.corteSistema = set()
```

En las siguientes secciones se definen los métodos de la clase **Sistema**, empezando por aquellos que fuerzan a que un **Sistema** se comporte como una **list** de Python en ciertos aspectos.

1.1.3. Métodos similares a los de una **list**

Los siguientes métodos replican en la clase **Sistema** algunos aspectos de la clase **list** de Python.

Para que un **Sistema** sea iterable necesitamos los métodos “mágicos” `__getitem__` (para seleccionar componentes) y `__setitem__` (para modificar componentes). Así, con `A[0]` obtendremos el primer elemento del sistema **A** y con `A[2] = 0` sustituiremos su tercer elemento por cero.²

```
1 def __getitem__(self, i):
2     """Devuelve el i-ésimo coeficiente del Sistema"""
3     return self.lista[i]
4
5 def __setitem__(self, i, nuevo_valor):
6     """Modifica el i-ésimo coeficiente del Sistema"""
7     self.lista[i] = nuevo_valor
```

Con `len(A)` contamos el número de elementos del **Sistema**.

```
1 def __len__(self):
2     """Número de elementos del Sistema """
3     return len(self.lista)
```

Con `copy` podemos hacer una copia, por ejemplo `B = A.copy()` hace una copia del sistema **A** generando un nuevo sistema del mismo *tipo* (de la misma clase o subclase) y con una **lista** de elementos igual que la de **A**.

```
1 def copy(self):
2     """ Genera un Sistema copiando la lista de otro """
3     return type(self)(self.lista)
```

Así, si `A = Vector([1,2,3])` entonces `B = A.copy()` es un nuevo **Vector** con idéntica **lista** de elementos que **A**. Sin embargo, `B = Sistema(A)` devuelve un el sistema genérico **Sistema**([1,2,3]).

Además, al disponer del método `__getitem__`, también podemos generar un sistema con la misma **lista** de elementos que otro del sistema haciendo “*slicing*”: `B = Sistema(A[:])`, pues `A[:]` nos devuelve la **lista** de **A**.

Más adelante se implementa otro [Método para copiar un Sistema y sus atributos](#) (`fullcopy()`) que no aparece aquí porque no es un método de las **lists** de Python.

Comprobamos si **A** y **B** son iguales con `A==B` y si son distintos con `A!=B`.

```
1 def __eq__(self, other):
2     """Indica si es cierto que dos Sistemas son iguales"""
3     return self.lista == other.lista
4
5 def __ne__(self, other):
6     """Indica si es cierto que dos Sistemas son distintos"""
7     return self.lista != other.lista
```

²Recuerde que en Python los índices comienzan en 0! Aunque **NacAL** incorpora este “pythonesco” modo de indexar **Sistemas**, posteriormente (Sección 1.2.1) se añade otro método adicional que implementa el operador selector “`|`” y que, tal como se hace en el [libro](#), emplea el 1 como primer índice.

Con `A.reverse()` invertimos el orden de los elementos de `A` (por tanto cambiamos el sistema `A`). Con `reversed(A)` obtenemos un nuevo `Sistema` con los elementos de `A` en el orden inverso a como aparecen en `A`.

```

1 def reverse(self):
2     """Da la vuelta al orden de la lista del sistema"""
3     self.corteSistema = {len(self)-i for i in self.corteSistema}
4     self.lista.reverse()
5
6 def __reversed__(self):
7     """Reversed(S) devuelve una copia de S con la lista en orden inverso"""
8     copia = self.fullcopy()
9     copia.corteSistema = {len(self)-i for i in self.corteSistema}
10    copia.lista = list(reversed(self.lista))
11    return copia

```

1.1.4. Concatenación de Sistemas

Concatenamos dos `Sistemas` con el método `concatena()`.

(Primero definimos un método auxiliar que se usa cuando `divisionesVisuales` es `True`).

Cuando intentamos concatenar un `Sistema` con algo que no lo es obtenemos un mensaje de error.

Cuando el `Sistema` no es vacío el procedimiento arranca con una copia completa de dicho sistema (es decir, una copia que también incluye valor del atributo `.corteSistema`). Pero si el `Sistema` es vacío obtenemos una copia completa del segundo sistema (y con dicha copia el método termina).

`A.concatena(B)` es un nuevo `Sistema` cuya `lista` es la concatenación de la `lista` del sistema `A` seguida de la `lista` del sistema `B`; por tanto, el número `n` de elementos del `Sistema` resultante es la suma del número de elementos de `A` más el de `B`.

Si queremos visualizar cortes o divisiones que separen sublistas del `Sistema`, a las divisiones visuales pre-existentes en ambos `Sistemas`, se añade otra en la posición que separa los sistemas originales. El método `nuevoConjuntoMarcas()` devuelve el conjunto de índices donde representar dichos cortes.

Si los elementos de la `lista` resultante no tienen la misma longitud (por ejemplo, si concatenamos dos matrices con distinto número de filas), entonces el sistema no puede ser representado como un arreglo rectangular de objetos porque no tiene dicha estructura. En tal caso el tipo de objeto resultante será un `Sistema` genérico.

```

1 def concatena(self, other, marcasVisuales=False):
2     """Concatena dos Sistemas"""
3
4     def nuevoConjuntoMarcas(Sistema_A, Sistema_B):
5         return Sistema_A.corteSistema.union(
6             {len(Sistema_A)},
7             {len(Sistema_A)+indice for indice in Sistema_B.corteSistema}
8         )
9
10    if not isinstance(other, Sistema):
11        raise ValueError('Un Sistema solo se puede concatenar a otro Sistema')
12
13    if self:
14        sistemaAmpliado = self.fullcopy()
15    else:
16        return other.fullcopy()
17
18    sistemaAmpliado.lista = self.lista + other.lista

```

```

19     sistemaAmpliado.n = len(self) + len(other)
20
21     if marcasVisuales:
22         sistemaAmpliado.corteSistema = nuevoConjuntoMarcas(self, other)
23
24
25     return sistemaAmpliado if self.es_arreglo_rectangular() else Sistema(sistemaAmpliado)

```

El método `junta()` crea el Sistema resultante de concatenar una lista de sistemas. Por ejemplo `A.junta([B,C,D])` devuelve el sistema cuya lista es la concatenación de las listas de los sistemas A, B, C y D. Si `marcas` es `True` se muestran los cortes entre los distintos subsistemas.

```

_____ Método que junta una lista de Sistemas en un único Sistema _____
1 def junta(self, lista, marcas=False):
2     """Junta una lista o tupla de Sistemas en uno solo concatenando las
3     correspondientes listas de los distintos Sistemas
4
5     """
6     reune = lambda lista,marcas: lista[0] if len(lista)==1 else lista[0].concatena(reune(lista[1:],marcas), marcas)
7     return reune([self] + [sistema for sistema in lista], marcas)
_____

_____ Método que amplía la lista de un Sistema con nuevos elementos _____
1 def amplia(self, args, marcas=False):
2     """Añade más elementos al final de la lista de un Sistema"""
3     A = self.fullcopy()
4     return A.concatena(Sistema(CreaLista(args)), marcas)
_____

_____ Método que vectoriza un Sistema _____
1 def vec(self):
2
3     def vectoriza(sist):
4         lista = []
5         for item in sist:
6             if isinstance(item, Sistema):
7                 lista += vectoriza(item)
8             else:
9                 lista += [item]
10        return lista
11
12    return BlockV(vectoriza(self))
_____

```

1.1.5. Sustitución y simplificación de expresiones simbólicas en un Sistema

Sustitución de variables simbólicas.

```

_____ Sustitución de variables simbólicas _____
1 def subs(self, reglasDeSustitucion=[]):
2     """ Sustitución de variables simbólicas """
3
4     def sustitucion(elemento, regla_de_sustitucion):
5         if es_numero(elemento):
6             return sympy.S(elemento).subs(CreaLista(regla_de_sustitucion))
7         else:
8             return elemento.subs(CreaLista(regla_de_sustitucion))
9
10    reglas = CreaLista(reglasDeSustitucion)
11    NuevoSistema = self.fullcopy()
12    NuevoSistema.lista = [sustitucion(elemento, reglasDeSustitucion) for elemento in NuevoSistema]
13    return NuevoSistema
_____

```

El argumento es una lista de **reglas de sustitución** formadas por pares (símbolo, valor); por ejemplo `[(a,2), (b,0), (c,a)]`.

```

1 A = Sistema([ a, b, c ])
2 A.subs([(a,222), (b,sympy.sqrt(5)), (c,a)])

```

$$\left[222; \sqrt{5}; a; \right]$$

Cuando hay una única regla de sustitución, basta escribir como argumento el correspondiente par. Por ejemplo: `A.subs((a,0))`.

Métodos para **simplificar** expresiones simbólicas

Simplificación de las expresiones simbólicas contenidas en la lista de un Sistema

```

1 def simplify(self): Simplificación de expresiones simbólicas en la lista de un Sistema
2     """ Simplificación de expresiones simbólicas """
3     self.lista = [simplify(elemento) for elemento in self.lista]
4
5 def factor(self):
6     """ Factorización de expresiones simbólicas """
7     self.lista = [factor(elemento) for elemento in self.lista]
8
9 def expand(self):
10    """ Factorización de expresiones simbólicas """
11    self.lista = [expand(elemento) for elemento in self.lista]

```

```

1 x, y, z = sympy.symbols('x y z')
2 A = Sistema([(x**3 + x**2 - x - 1)/(x**2 + 2*x + 1), x**2*z + 4*x*y*z + 4*y**2*z])

```

$$\left[\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+2x+1}; x^2z + 4xyz + 4y^2z; \right]$$

```

1 A.simplify()

```

$$\left[x - 1; z(x^2 + 4xy + 4y^2); \right]$$

1.1.6. Otros métodos de la clase Sistema

Método para copiar un Sistema con todos sus atributos

```

1 def fullcopy(self):
2     """ Copia la lista de otro Sistema y sus atributos """
3     new_instance = self.copy()
4     new_instance.__dict__.update(self.__dict__)
5     return new_instance

```

Método para recuperar el Sistema genérico de cualquier subclase de Sistema

Con el método `sis` obtendremos el Sistema correspondiente a cualquier Sistema o subclase de Sistema. Así, si A es una Matrix, con `A.sis()` obtenemos el Sistema de Vectores (columnas) asociado.

```
1 def sis(self):
2     """Devuelve el Sistema en su forma genérica"""
3     return Sistema(self.lista)
```

Comprobación de que un Sistema es nulo

```
1 def es_nulo(self, sust=[]):
2     """Indica si es cierto que el Sistema es nulo"""
3     return self.subs(sust) == self*0
4
5 def no_es_nulo(self, sust=[]):
6     """Indica si es cierto que el Sistema no es nulo"""
7     return self.subs(sust) != self*0
```

Comprobación de que un Sistema tiene estructura de arreglo rectangular

Un Sistema es un arreglo rectangular de objetos si es un Sistema de Sistemas con idéntica longitud (como en el caso de una matriz, pues todas sus columnas tienen el mismo número de elementos).

```
1 def es_arreglo_rectangular(self):
2     """Indica si el Sistema tiene estructura de arreglo rectangular"""
3
4     def solo_contiene_sistemas(sis):
5         return all([isinstance(elemento, Sistema) for elemento in sis])
6
7     def elementos_con_la_misma_logitud(sis):
8         primerElemento = sis[1]
9         return all([len(primerElemento)==len(elemento) for elemento in sis])
10
11     if solo_contiene_sistemas(self) and elementos_con_la_misma_logitud(self):
12         return True
13     else:
14         return False
15
16 def no_es_arreglo_rectangular(self):
17     """Indica si el Sistema no tiene estructura de arreglo rectangular"""
18     return not self.es_arreglo_rectangular()
```

Comprobación de que todos los elementos de un Sistema son del mismo tipo

```
1 def es_de_composicion_uniforme(self):
2     """Indica si es cierto que todos los elementos son del mismo tipo"""
3     if all([es_numero(c) for c in self]):
4         return True
5     else:
6         return all(type(elemento)==type(self[1]) for elemento in self)
```

Comprobación de que todos los elementos de un Sistema son del mismo tipo y tienen la misma longitud

```
1 def es_de_composicion_y_longitud_uniforme(self):
2     """Indica si es cierto que todos los elementos son del mismo tipo y longitud"""
3
4     """
5
6     if self.es_de_composicion_uniforme() and es_numero(self[1]):
7         return True
```

```

8     elif self.es_de_composicion_uniforme() and not es_numero(self|1):
9         return all(len(elemento)==len(self|1) for elemento in self)
10    else:
11        return False

```

Búsqueda del primer, o del último, elemento no nulo del Sistema

```

1  def primer_no_nulo(self, reglasDeSustitucion=[]):
2      """Devuelve una lista con la posición del primer no nulo o vacía si
3          todos los elementos son nulos
4
5          """
6      sistema = self.subs(reglasDeSustitucion)
7      return next( ([indice] for indice, elemento in enumerate(sistema, 1) if CreaSistema(elemento).no_es_nulo()), [])
8
9  def ultimo_no_nulo(self, reglasDeSustitucion=[]):
10     """Devuelve una lista con la posición del primer no nulo o vacía si
11         todos los elementos son nulos
12
13         """
14     sistema = reversed(self.copy()).subs(reglasDeSustitucion)
15     return next( ([len(self)-indice] for indice, elemento in enumerate(sistema) if CreaSistema(elemento).no_es_nulo()), [])
16
17 elementoPivote      = lambda self: self.extractor(self.primer_no_nulo()) if self.primer_no_nulo() else False
18
19 elementoAntiPivote = lambda self: self.extractor(self.ultimo_no_nulo()) if self.ultimo_no_nulo() else False

```

Extractor de un elemento dada una lista de índices (coordenadas)

```

1  def extractor(self, listaDeIndices=[]):
2      """Selección consecutiva por la derecha del sistema A empleando la
3          lista de enteros de c. Ej.: si c = [5,1,2] devuelve A/5/1/2
4
5          """
6      objeto = self
7      for indice in listaDeIndices:
8          objeto = objeto|indice
9      return objeto if listaDeIndices else []

```

Reordena un Sistema para generar un BlockM

```

1  def reshape(self, orden=[]):
2      """Reordena los elementos de un Sistema para generar un BlockM
3          if not orden or isinstance(orden, int):
4              return self
5          elif orden[0]*orden[1] == self.n:
6              return ~BlockM(list(zip(*(iter(self.lista),)*orden[0])))
7          else:
8              raise ValueError('Orden incompatible con el número de elementos')
9              return None


```

Estructura de componentes de un Sistema

```

1  def estructura(self):
2      """Devuelve la estructura de los componentes de un Sistema"""
3      if isinstance(self, Vector):
4          return [(type(self), (self.n,))]
5      elif isinstance(self, Matrix):
6          return [(type(self), (self.n, self.m))]

```

```

7         else:
8             return [type(self), [estructura(item) for item in self]]

```

1.1.7. Métodos que devuelven SubEspacios

Espacio generado los los elementos del Sistema

```

1 def span(self, sust=[], Rn=[]):
2     return SubEspacio(self.sis(), sust, Rn)

```

Espacio Nulo de un Sistema de composición y longitud uniforme

```

1 def espacio_nulo(self, sust=[], Rn=[]):
2     if self: Rn = self.n
3     K = self.elim(0, False, sust)
4     E = I(self.n) & T(K.pasos[1])
5     lista = [v for j,v in enumerate(E,1) if (K[j].es_nulo())]
6     return SubEspacio(Sistema(lista)) if lista else SubEspacio(Sistema([]), Rn=Rn)

```

1.1.8. Método de resolución de sistema de Ecuaciones lineales

```

1 def sel(self, v, rep=False, sust=[]):
2     """Devuelve el conjunto solución con las soluciones x de sistema*x=v"""
3
4     """
5     A = self.copy().amplia(-v,1)
6     operaciones = A.elim(0,False,sust).pasos[1]
7     testigo = 0 | (I(A.n) & T(operaciones)) | 0
8     Normaliza = T([]) if testigo==1 else T([(fracc(1,testigo), A.n)])
9     pasos = operaciones+[Normaliza] if Normaliza else operaciones
10    K = A & T(pasos)
11
12    if rep:
13        try:
14            MA = Matrix(self.copy().amplia(-v)).subs(sust).csis({self.n}).apila(I(self.n+1),1)
15            MA.corteElementos.update({self.n+A.m})
16        except:
17            MA = BlockM([self.copy().amplia(-v)]).subs(sust).csis({self.n}).apila(I(self.n+1),1)
18            MA.corteElementos.update({self.n+A.m})
19
20    dispElim(MA, [[],pasos], [], sust)
21
22    if (K|0).no_es_nulo():
23        return Sistema([])
24    else:
25        solP = factor(I(self.n).amplia(V0(self.n)) & T(pasos))|0
26        return EAfin(self.espacio_nulo().sgen, solP, 1)

```

1.2. Operaciones algebraicas sobre Sistemas

1.2.1. Implementación del operador selector por la derecha para la clase Sistema

Esta sección muestra la implementación del operador selector tal como se describe en el curso, es decir, la selección de elementos de un Sistema con el operador `|` actuando por la derecha. El siguiente texto de ayuda es auto-explicativo y Python lo muestra al teclear `help(Sistema.__or__)`.

```

1  """Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase Sistema
2  tuple de elementos indicados (los índices comienzan por el número 1)
3
4  Parámetros:
5      j (int, list, tuple, slice): Índice (o lista de índices) del
6      elementos (o elementos) a seleccionar
7
8  Resultado:
9      ?: Si j es int, devuelve el elemento j-ésimo del Sistema.
10     Sistema: Si j es list, tuple o slice devuelve el Sistema formado por
11     los elementos indicados en la lista, tuple o slice de índices.
12
13 Ejemplos:
14 >>> # Extrae el j-ésimo elemento del Sistema
15 >>> Sistema([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | 2
16
17 Vector([0, 2])
18
19 >>> # Sistema formado por los elementos indicados en la lista (o tuple)
20 >>> Sistema([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | [2,1]
21 >>> Sistema([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | (2,1)
22
23 [Vector([0, 2]); Vector([1, 0])]
24
25 >>> # Sistema formado por los elementos indicados en el slice
26 >>> Sistema([Vector([1,0]), Vector([0,2]), Vector([3,0])]) | slice(1,3,2)
27
28 [Vector([1, 0]), Vector([3, 0])]
29
30 """

```

Cuando el argumento `j` es un número entero (`int`), se selecciona el `j`-ésimo elemento del sistema (recuerde que en Python los índices de objetos iterables comienzan en cero; consecuentemente, al seleccionar el `j`-ésimo elemento del sistema `A` con el operador selector (`A|j`), lo que realmente estamos ejecutando es la operación `A.lista[j-1]`).

Se emplea el método (`self|indice`) (siendo `indice` un `int`) para definir el operador selector cuando `j` es una lista o tuple de índices y generar así un sistema con las componentes indicadas. El sistema obtenido será del mismo tipo que `self`, es decir, o un `Sistema` genérico, o un `BlockV`, o un `Vector`, o una `BlockM`, o una `Matrix` dependiendo de a qué objeto se aplica el selector.

Cuando el argumento `j` es de tipo `slice(start,stop,step)`, se crea un `Sistema` con la selección de ciertos componentes; comenzando por aquél cuyo índice es `start`, y seleccionando de `step` en `step` componentes hasta llegar al de índice `stop`. Dicho sistema será del mismo tipo que `self`. Si el primer argumento de `slice` es `None` se seleccionan los componentes empezando por el primero. Si el segundo argumento de `slice` es `None` se recorren todos los índices hasta llegar al último componente. Si se omite el tercer argumento de `slice` (o si el tercer argumento es `None`) entonces `step` es igual a uno. Así, `slice(None,None)` selecciona todos los componentes; `slice(2,None,2)` selecciona los componentes pares hasta el final; y `slice(4,11,3)` selecciona un componente de cada tres comenzando por el cuarto y hasta llegar al undécimo (es decir, los índices 4, 7 y 10).

```

1  Operador selector por la derecha para la clase Sistema
2  def __or__(self,j):
3      <<Texto de ayuda para el operador selector por la derecha para la clase Sistema>>
4      if isinstance(j, int):
5          return self[j-1]
6
7      elif isinstance(j, (list,tuple) ):
8          return type(self) ([ self|indice for indice in j ])
9
10     elif isinstance(j, slice):

```

```

10     start = None if j.start is None else j.start-1
11     stop  = None if j.stop  is None else (j.stop if j.stop>0 else j.stop-1)
12     step  = j.step  or 1
13     return type(self) (self[slice(start,stop,step)])

```

El operador selector por la derecha funciona de la misma manera tanto para la clase **Sistema** como para cualquiera de sus subclases.

1.2.2. Implementación del operador selector por la izquierda para la clase **Sistema**

En el curso de Álgebra Lineal admitimos la selección de elementos por la izquierda, ${}_i\mathbf{v} = \mathbf{v}_{|i}$.

La implementación de esta operación es inmediata... si el selector por la izquierda hace lo mismo que el selector por la derecha, basta con llamar al selector por la derecha: `self|i`.

```

1 def __ror__(self,i):
2     """Hace exactamente lo mismo que el método __or__ por la derecha."""
3     return self | i

```

(Tenga en cuenta que este método cambia en las subclases *BlockM* y *Matrix*, pues lo usaremos para seleccionar las filas de dichos arreglos rectangulares de objetos.)

1.2.3. Suma y diferencia de Sistemas

Con la definición de la clase **Sistema** y el operador selector `|` por la derecha, ya podemos definir las operaciones de suma de dos sistemas y de producto de un sistema por un escalar. Fíjese que las definiciones de las operaciones en Python (usando el operador `|`) son idénticas a las empleadas en el [curso](#), donde hemos definido la suma de dos vectores de \mathbb{R}^n como el vector tal que

$$\boxed{(\mathbf{a} + \mathbf{b})_{|i} = \mathbf{a}_{|i} + \mathbf{b}_{|i}} \quad \text{para } i = 1 : n$$

y la [suma de matrices](#) como la matriz tal que

$$\boxed{(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}} \quad \text{para } i = 1 : n.$$

Ambas son casos particulares de sumas elemento a elemento entre dos sistemas de n elementos:

$$\boxed{(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{|i} = \mathbf{A}_{|i} + \mathbf{B}_{|i}} \quad \text{para } i = 1 : n.$$

Usando el operador selector podemos “literalmente” transcribir esta definición

```

1 Sistema ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,len(self)+1) ])

```

donde `self` es el sistema \mathbf{A} , `other` es \mathbf{B} , y `range(1,self.n+1)` es el rango de valores: $1 : n$.

Hay que tener en cuenta que cuando el **Sistema** es un **Vector** el resultado es un **Vector** y cuando el **Sistema** es una **Matrix** el resultado es una **Matrix**. Es decir, el código debe devolver un objeto del mismo tipo que `self`. Esto lo logramos sustituyendo `Sistema` por `type(self)` en el código anterior. Así, la implementación final es:

```

1 type(self) ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,len(self)+1) ])

```

Por último, nótese que para que la implementación funcione es necesario que los elementos A_i y B_i sean sumables, es decir, es necesario que la operación

```
1 (self|i) + (other|i)
```

esté definida para cada i . (De manera análoga definimos diferencia entre **Sistemas**).

Python muestra el texto de ayuda para la suma tecleando `help(Sistema.__add__)`.

```
1 """Devuelve el Sistema resultante de sumar dos Sistemas"""
2
3 Parámetros:
4     other (Sistema): Otro sistema del mismo tipo y misma longitud
5
6 Ejemplos:
7 >>> Sistema([10, 20, 30]) + Sistema([-1, 1, 1])
8
9 Sistema([9, 21, 31])
10 >>> Vector([10, 20, 30]) + Vector([-1, 1, 1])
11
12 Vector([9, 21, 31])
13 >>> Matriz([[1,5],[5,1]]) + Matriz([[1,0],[0,1]])
14
15 Matriz([Vector([2, 5]); Vector([5, 2])]) """
```

Python muestra el texto de ayuda para la diferencia tecleando `help(Sistema.__sub__)`.

```
1 """Devuelve el Sistema resultante de restar dos Sistemas"""
2
3 Parámetros:
4     other (Sistema): Otro sistema del mismo tipo y misma longitud
5
6 Ejemplos:
7 >>> Sistema([10, 20, 30]) - Sistema([1, 1, -1])
8
9 Sistema([9, 19, 31])
10 >>> Vector([10, 20, 30]) - Vector([1, 1, -1])
11
12 Vector([9, 19, 31])
13 >>> Matriz([[1,5],[5,1]]) - Matriz([[1,0],[0,1]])
14
15 Matriz([Vector([0, 5]); Vector([5, 0])])
16 """
```

```
1 Suma y diferencia de Sistemas
2
3 def __add__(self, other):
4     <<Texto de ayuda para el operador suma en la clase Sistema>>
5     if not type(self)==type(other) or not len(self)==len(other):
6         raise ValueError ('Solo se suman Sistemas del mismo tipo y misma longitud')
7     suma = self.fullcopy()
8     suma.lista = [ (self|i) + (other|i) for i in range(1,len(self)+1) ]
9     suma.corteSistema.update(other.corteSistema)
10    return factor(suma)
11
12 def __sub__(self, other):
13     <<Texto de ayuda para el operador diferencia en la clase Sistema>>
14     if not type(self)==type(other) or not len(self)==len(other):
15         raise ValueError ('Solo se restan Sistemas del mismo tipo y misma longitud')
16     diferencia = self.fullcopy()
17     diferencia.lista = [ (self|i) - (other|i) for i in range(1,len(self)+1) ]
18     diferencia.corteSistema.update(other.corteSistema)
19    return factor(diferencia)
```

1.2.4. Producto de un Sistema por un escalar a su izquierda

El producto de un sistema A por un escalar x a su izquierda es el *sistema*

$$\left(xA \right)_i = x \left(A_i \right) \quad \text{para } i = 1 : n.$$

cuya transcripción literal es

```
Sistema ( [ x*(self[i] for i in range(1,len(self)+1) ] )
```

donde x es un número (`int`, `float` o un objeto del módulo [SymPy sympy.Basic](#)) y `self` es A .

Casos particulares son el producto de un *vector* a por un escalar x a su izquierda, que es el *vector*:

$$\left(xa \right)_i = x \left(a_i \right) \quad \text{para } i = 1 : n.$$

Y el producto de una *matriz* A por un escalar x a su izquierda, que es la *matriz*:

$$\left(xA \right)_j = x \left(A_j \right) \quad \text{para } i = 1 : n.$$

Como en los casos particulares se obtienen *sistemas* de tipos particulares (*vectores* en el primer caso y *matrices* en el segundo), debemos sustituir `Sistema` por `type(self)` para obtener sistemas del mismo tipo que `self`:

```
type(self) ( [ x*(self[i] for i in range(1,len(self)+1) ] )
```

Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda en la clase `Sistema`

```
1  """Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda de un Sistema"""
2
3  Parámetros:
4      x (int, float o sympy.Basic): Escalar por el que se multiplica
5  Resultado:
6      Sistema resultante de multiplicar cada componente por x
7  Ejemplo:
8  >>> 3 * Sistema([10, 20, 30])
9
10 Sistema([30, 60, 90])
11 """
```

```
1  """Producto de un Sistema por un escalar a su izquierda"""
2
3  def __rmul__(self, x):
4      <<Texto de ayuda para el operador producto por la izquierda de un Sistema>>
5      if es_numero(x):
6          multiplo = self.fullcopy()
7          multiplo.lista = [ x*(self[i] for i in range(1,len(self)+1) ]
8          return factor(multiplo)
```

También nos viene bien manejar el opuesto de un `Sistema`: $-A = -1 \cdot A$.

```
1  """Opuesto de un Sistema"""
2
3  def __neg__(self):
4      """Devuelve el opuesto de un Sistema"""
5      return -1*self
```

1.2.5. Producto de un Sistema por escalar, Vector o Matrix a su derecha

En el curso se acepta que el producto de un Sistema por un escalar es conmutativo. Por tanto,

$$Ax = xA$$

por tanto también debemos implementar el producto

`self * x`

donde `self` es el Sistema y `x` es un número (`int`, `float`, `sympy.Basic`).

El producto de A , de n componentes, por un vector x de \mathbb{R}^n a su derecha se define como

$$Ax = (A_{|1})x_1 + \cdots + (A_{|n})x_n = \sum_{j=1}^n (A_{|j})x_j \quad \text{para } j = 1 : n.$$

cuya transcripción será

```
sum([ (self|j)*(x|j) for j in range(1,x.n+1) ])
```

donde `self` es un Sistema y `x` es un (`Vector`).

Fíjese que el *producto punto* (o producto escalar usual en \mathbb{R}^n) de dos vectores a y x en \mathbb{R}^n es un caso particular en el que el sistema A es un vector a .

El producto del sistema A de p componentes por una matriz X de \mathbb{R}^n a su derecha se define como el sistema tal que

$$(AX)_{|j} = A(X_{|j}) \quad \text{para } j = 1 : n.$$

cuya transcripción será

```
type(self) ( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1)] )
```

donde `self` es el Sistema y `x` es una `Matrix`.

Fíjese que el *producto de matrices* es un caso particular en el que el sistema A es una matriz A .

Además, sabemos por las notas de la asignatura que en el caso particular de que el sistema A sea un vector, el resultado es una combinación lineal de las filas de la matriz X (es decir, el resultado es un vector). Para recordar que el vector resultante es una combinación lineal de las filas, lo representaremos en forma de fila.

Python muestra el siguiente texto de ayuda al teclear `help(Sistema.__mul__)`.

```
1  _____ Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase Sistema _____
2  """Multiplica un Sistema por un número, Vector o una Matrix a su derecha
3
4  Parámetros:
5      x (int, float o sympy.Basic): Escalar por el que se multiplica
6      (Vector): con tantos componentes como el Sistema
7      (Matrix): con tantas filas como componentes tiene el Sistema
8
9  Resultado:
10     Sistema del mismo tipo: Si x es int, float o sympy.Basic, devuelve
11     el Sistema que resulta de multiplicar cada componente por x
12     Objeto del mismo tipo de los componentes del Sistema: Si x es Vector,
13     devuelve una combinación lineal de los componentes del Sistema,
14     donde los componentes de x son los coeficientes de la combinación.
15     Sistema del mismo tipo: Si x es Matrix, devuelve un Sistema cuyas
```

```

15         componentes son combinación lineal de las componentes originales.
16
17 Ejemplos:
18 >>> # Producto por un número
19 >>> Vector([10, 20, 30]) * 3
20
21 Vector([30, 60, 90])
22 >>> Matrix([[1,2],[3,4]]) * 10
23
24 Matrix([[10,20],[30,40]])
25 >>> # Producto por un Vector
26 >>> Vector([10, 20, 30]) * Vector([1, 1, 1])
27
28 60
29 >>> Matrix([Vector([1, 3]), Vector([2, 4])]) * Vector([1, 1])
30
31 Vector([3, 7])
32 >>> # Producto por una Matrix
33 >>> Vector([1,1,1])*Matrix( ( [1,1,1], [2,4,8], [3,-1,0] ) )
34
35 Vector([6, 4, 9])
36 >>> Matrix([Vector([1, 3]), Vector([2, 4])]) * Matrix([Vector([1,1])])
37
38 Matrix([Vector([3, 7])])
39
40 """

```

Para implementar la operación **Sistema** por número se llama a la operación número por **Sistema**.

Para implementar **Sistema** por **Vector** se usa la función **sum**; que tiene dos argumentos: el primero es la lista de objetos a sumar, y el segundo es un primer objeto al que se suman los de la lista (por defecto es el número “0”). Como la suma de 0 y un elemento del **Sistema** puede no tener sentido, se emplea el siguiente truco: ese primer objeto es el primer elemento de la lista multiplicado por 0.

Para implementar **Sistema** por **Matrix** se usa la operación **Sistema** por **Vector** para generar cada uno de los elementos del sistema resultante. Cuando el **Sistema** es un **Vector**, la operación **Sistema** por **Matrix** calcula el producto de un **Vector** por una **Matrix**. Para recordar que el sistema resultante es una combinación lineal de las filas de la matriz, la representación del resultado sera en forma horizontal (**rpr='h'**) si se emplea la representación **latex**.

```

1 def __mul__(self,x):
2     <<Texto de ayuda para el operador producto por la derecha en la clase Sistema>>
3     if es_numero(x):
4         return x*self
5
6     elif isinstance(x, Vector):
7         if len(self) != x.n:
8             raise ValueError('Sistema y Vector incompatibles')
9         if self.es_arreglo_rectangular():
10             if not all([f.es_de_composicion_y_longitud_uniforme() for f in ~BlockM([BlockV([i]) for i in self])]):
11                 raise ValueError('El sistema de la derecha debe tener elementos de composicion y longitud uniforme')
12             elif not self.es_de_composicion_y_longitud_uniforme():
13                 raise ValueError('El sistema de la derecha debe tener elementos de composicion y longitud uniforme')
14
15             return factor(sum([(self[j]*(x[j] for j in range(1,len(self)+1)], 0*self[1])
16
17     elif isinstance(x, Matrix):
18         if len(self) != x.m:
19             raise ValueError('Sistema y Matrix incompatibles')
20         if isinstance(self, BlockV):
21             return factor(BlockV( [ self*(x[j] for j in range(1,(x.n)+1)]), rpr='h' ))
22         elif isinstance(self, BlockM):
23             return factor(BlockM ( [ self*(x[j] for j in range(1,(x.n)+1)] ))

```

```

24         else:
25             return factor(type(self) ( [ self*(x|j) for j in range(1,(x.n)+1)] ))

```

1.3. Transformaciones elementales de un Sistema

En el [libro](#) del curso se definen las transformaciones elementales de **Sistemas** de vectores como una generalización a las transformaciones elementales de las columnas de una **Matrix**. Puesto que cada **Matrix** es un **Sistema** de **Vectores**, implementamos de manera general las transformaciones elementales sobre **Sistemas** genéricos.

Como el método no verifica si las operaciones son lícitas, podría obtener un error si el sistema contiene objetos incompatibles con dichas operaciones; por ejemplo, si el **Sistema** contiene una cadena de caracteres y un número, al intentar sumar un múltiplo de uno de los elementos al otro obtendremos un error (aunque esto no pasará con los intercambios).

1.3.1. Texto de ayuda transformaciones elementales por la derecha

```

1  _____ Texto de ayuda de las transformaciones elementales de un Sistema _____
2  """Transforma los elementos de un Sistema
3
4  T(abreviaturas): transformaciones a aplicar sobre un Sistema S
5  Ejemplos:
6  >>> S & T({1,3})           # Intercambia los elementos 1º y 3º
7  >>> S & T((5,1))           # Multiplica por 5 el primer elemento
8  >>> S & T((5,2,1))         # Suma 5 veces el 2º elem al 1º
9  >>> S & T([1,3],(5,1),(5,2,1])# Aplica la secuencia de transformac.
10     # sobre los elementos de S y en el orden de la lista
11 """

```

1.3.2. Implementación de las transformaciones elementales por la derecha

(aunque sea una composición de transformaciones elementales, también se incluye el intercambio.)

```

1  _____ Transformaciones elementales de los elementos de un Sistema _____
2  def __and__(self,operaciones):
3      <<Texto de ayuda de las transformaciones elementales de un Sistema>>
4      def transformacionDelSistema(abrv):
5          if isinstance(abrv,set):
6              self.lista = [ (self|max(abrv)) if k==min(abrv) else \
7                             (self|min(abrv)) if k==max(abrv) else \
8                             (self|k)                               for k in range(1,len(self)+1)].copy()
9
10         elif isinstance(abrv,tuple) and (len(abrv) == 2):
11             self.lista = [ (abrv[0])*(self|k) if k==abrv[1] else (self|k) \
12                             for k in range(1,len(self)+1)].copy()
13
14         elif isinstance(abrv,tuple) and (len(abrv) == 3):
15             colPivote = abrv[1]-1
16             self.lista = [ (abrv[0])*(self.lista[colPivote]) + (self|k) if k==abrv[2] else (self|k)
17                             for k in range(1,len(self)+1)].copy()
18
19         for abrv in operaciones.abreviaturas:
20             transformacionDelSistema(abrv)
21
22     return factor(self)

```

Nótese que al actuar sobre `self.lista`, las transformaciones elementales no crean nuevos **Sistemas** sino que modifican el **Sistema** sobre el que actúan.

1.3.3. Implementación de las transformaciones elementales por la izquierda

Hacen lo mismo que por la derecha (como ocurre con el operador selector)

```
1 def __rand__(self, operaciones):
2     """Hace exactamente lo mismo que el método __and__ por la derecha."""
3     return self & operaciones
```

1.4. Eliminación

1.4.1. Reducción por eliminación mediante transformaciones elementales

```
1 def analisis_opcion_elegida(tipo):
2     'Análisis de las opciones de eliminación elegidas'
3     lista = [100,20,10,4,2,1]
4     opcion = set()
5     for t in lista:
6         if (tipo - (tipo % t)) in lista:
7             opcion.add(tipo - (tipo % t))
8             tipo = tipo % t
9     return opcion
```

```
1 def metodos_auxiliares_de_la(variante):
2     """Define los métodos auxiliares y el modo de actuación sobre el sistema
3     en función de la variante de eliminación elegida.
4
5     'variante' es la suma de los siguientes números:
6
7     +1 reduccion rápida (solo transformaciones tipo I)
8     +2 doble reducción
9     +4 por filas
10    +10 normalización de los pivotes
11    +20 escalonamiento
12    +100 de atrás hacia delante
13
14    Por defecto arg = 0 (reducción simple hacia delante, por
15    columnas y evitando fracciones)
16
17    """
18    if 100 in analisis_opcion_elegida(variante): # reducción hacia delante
19        componentesAmodificar = lambda sistema: filter(lambda x: x < indiceXP, range(1,len(sistema)+1))
20        recorrido = lambda sistema: reversed(list(enumerate(CreaSistema(sistema),1)))
21        XPivote = lambda componente: elementoAntiPivote(componente)
22        posicionXPivote = lambda componente: ultimo_no_nulo(componente)
23
24    else: # reducción hacia atrás
25        componentesAmodificar = lambda sistema: filter(lambda x: x > indiceXP, range(1,len(sistema)+1))
26        recorrido = lambda sistema: enumerate(CreaSistema(sistema),1)
27        XPivote = lambda componente: elementoPivote(componente)
28        posicionXPivote = lambda componente: primer_no_nulo(componente)
29
30    if 4 in analisis_opcion_elegida(variante): # reducción de los componentes en arreglos rectangulares
31        if (not self.es_arreglo_rectangular()) or (not all([item.es_de_composicion_uniforme() for item in self]])):
32            raise ValueError('El sistema debe ser un arreglo rectangular con componentes de composición uniforme')
33        sistema = ~self.fullcopy().subs(sust);
34    else:
35        sistema = self.fullcopy().subs(sust);
36
37    if 2 in analisis_opcion_elegida(variante): # doble reducción (reducción posiciones anteriores y posteriores al pivote)
38        componentesAmodificar = lambda sistema: filter(lambda x: x != indiceXP, range(1,len(sistema)+1))
39
40    return sistema, recorrido, XPivote, posicionXPivote, componentesAmodificar
```

```

42
43 def Reduccion(sistema):
44     if 1 in analisis_opcion_elegida(variante): # reducción rápida (solo transformaciones tipo I)
45         operaciones = [ (-fracc(ValorAEliminar(indiceVAE), pivote), indiceXP, indiceVAE) \
46                         for indiceVAE in componentesAmodificar(sistema)]
47     else:
48         # reducción lenta (evitando fracciones)
49         operaciones = [[(denom(ValorAEliminar(indiceVAE), pivote), indiceVAE), \
50                         (-numer(ValorAEliminar(indiceVAE), pivote), indiceXP, indiceVAE)] \
51                         for indiceVAE in componentesAmodificar(sistema)]
52     return filtradopasos(T(operaciones))
53
54 def Normalizacion(sistema):
55     return filtradopasos(T([ (fracc(1, XPivote(sistema|indiceXP)), indiceXP)
56                             for indiceXP, _ in recorrido(sistema) if XPivote(sistema|indiceXP)]))
57
58 def Escalonamiento(sistema):
59     M = sistema.copy()
60     if 100 in analisis_opcion_elegida(variante): # con reducción hacia atrás
61         destino = lambda : (M.n)-r+1
62         resto = lambda r: slice(None, max(M.n-r,1))
63         columnaAMover = lambda i, r: posicionXPivote(i|M|resto(r))[0] if posicionXPivote(i|M|resto(r)) and i==posicionXPivote(M|resto(r)) else None
64     else: # con reducción hacia delante
65         destino = lambda : r
66         resto = lambda r: slice(r+1, None)
67         columnaAMover = lambda i, r: posicionXPivote(i|M|resto(r))[0]+r if posicionXPivote(i|M|resto(r)) and i==posicionXPivote(M|resto(r)) else None
68
69     r = 0
70     intercambios = []
71     for i, _ in recorrido(M|1):
72         indiceColumnaPivote = columnaAMover(i,r)
73         if indiceColumnaPivote:
74             r += 1
75             intercambio = T( {destino(): indiceColumnaPivote} )
76             M & intercambio
77             intercambios.append(intercambio)
78
79     return filtradopasos(T(intercambios))
80
81 def transformacionYPasos(sistema, operacion, pasosPrevios):
82     pasoDado = operacion(sistema)
83     if 4 in analisis_opcion_elegida(variante): # reducción de los componentes en arreglos rectangulares
84         pasosAcumulados = [-pasoDado] + pasosPrevios if pasoDado else pasosPrevios
85     else:
86         pasosAcumulados = pasosPrevios + [pasoDado] if pasoDado else pasosPrevios
87     sistema & T(pasoDado)
88     return factor(sistema.subs(sust)), pasosAcumulados
89
90
91 def sistemaFinalYPasosDchaIzda(sistema,transformaciones):
92     if 4 in analisis_opcion_elegida(variante): # reducción de los componentes en arreglos rectangulares
93         TransformacionesPorLaIzquierda = filtradopasos(transformaciones)
94         TransformacionesPorLaDerecha = []
95         if self.es_arreglo_rectangular():
96             sistema = ~sistema
97     else:
98         TransformacionesPorLaDerecha = filtradopasos(transformaciones)
99         TransformacionesPorLaIzquierda = []
100
101     SistemaFinal = sistema.subs(sust)
102     pasos = [TransformacionesPorLaIzquierda, TransformacionesPorLaDerecha]
103     SistemaFinal.tex, SistemaFinal.pasos = texYpasos(self, pasos, rep, sust, repsust)
104     SistemaFinal.TrF = T(SistemaFinal.pasos[0])
105     SistemaFinal.TrC = T(SistemaFinal.pasos[1])
106     return factor(SistemaFinal)

```

Eliminación

```

1 def elim(self, variante=0, rep=False, sust=[], repsust=False):

```

```

2      """Versión pre-escalada de un sistema por eliminacion Derecha-Izquierda"""
3      <<Método que define los atributos .tex y .pasos y representa los pasos si se pide>>
4      <<Variantes de eliminación>>
5      <<Análisis de las opciones de eliminación elegidas>>
6
7      if not self:
8          return sistemaFinalYPasosDchaIzda(Sistema([]), [T([])] )
9
10     if not self.es_de_composicion_y_longitud_uniforme():
11         raise ValueError('Los elementos del sistema deben ser del mismo tipo y longitud')
12
13     ValorAEliminar = lambda indiceVAE: sistema.extractor([indiceVAE]+posicionXPivote(sistema|indiceXP))
14     sistema, recorrido, XPivote, posicionXPivote, componentesAmodificar = metodos_auxiliares_de_la(variante)
15
16     pasosAcumulados = []
17     for indiceXP, _ in recorrido(sistema):
18         pivote = XPivote(sistema|indiceXP)
19         if pivote:
20             # reducción
21             sistema, pasosAcumulados = transformacionYPasos(sistema, Reduccion, pasosAcumulados)
22
23     if 10 in analisis_opcion_elegida(variante): # normalización de pivotes
24         sistema, pasosAcumulados = transformacionYPasos(sistema, Normalizacion, pasosAcumulados)
25
26     if 20 in analisis_opcion_elegida(variante): # escalonamiento
27         sistema, pasosAcumulados = transformacionYPasos(sistema, Escalonamiento, pasosAcumulados)
28
29     return sistemaFinalYPasosDchaIzda(sistema, pasosAcumulados)

```

```

1      formas escalonadas
2      def K(self,rep=0, sust=[], repsust=0):
3          """Una forma pre-escalada por columnas (K) de una Matriz"""
4          return self.elim(0, rep, sust, repsust)
5
6      def L(self,rep=0, sust=[], repsust=0):
7          """Una forma escalonada por columnas (L) de una Matriz"""
8          return self.elim(20, rep, sust, repsust)
9
10     def R(self,rep=0, sust=[], repsust=0):
11         """Forma escalonada reducida por columnas (R) de una Matriz"""
12         return self.elim(32, rep, sust, repsust)
13
14     def U(self,rep=0, sust=[], repsust=0):
15         """Una forma escalonada por filas (U) de una Matriz"""
16         return self.elim(24, rep, sust, repsust)
17
18     def UR(self,rep=0, sust=[], repsust=0):
19         """Una forma escalonada reducida por filas (U) de una Matriz"""
20         return self.elim(36, rep, sust, repsust)

```

1.4.2. Representación de los procesos de eliminación Gaussiana

Cuando hemos encadenado varios procedimientos de eliminación, deberíamos poder ver los pasos desde el principio hasta el final. Para ello comprobamos si `data` fue obtenido mediante un proceso previo de eliminación. El modo de saberlo es comprobar si `data` posee el atributo `pasos`. El atributo `tex` guarda el código \LaTeX que muestra el proceso completo, y se construye aplicando el método `PasosYEscritura`. El atributo `pasos` guarda las listas de abreviaturas de las transformaciones elementales empleadas. Por comodidad añadimos dos atributos más: `TrF` es la `Ttransformación` aplicada a las filas y `TrC` es la `Transformación` aplicada a las columnas.

```

1      Método que define los atributos .tex y .pasos y representa los pasos si se pide
2      def texYPasos(data, pasos, rep=0, sust=[], repsust=0):
3          pasosPrevios = data.pasos if hasattr(data, 'pasos') and data.pasos else [], []
4          TexPasosPrev = data.tex if hasattr(data, 'tex') and data.tex else []
5          if repsust:

```

```

5         tex = rprElim(data, pasos, TexPasosPrev, sust)
6     else:
7         tex = rprElim(data, pasos, TexPasosPrev)
8     pasos[0] = pasos[0] + pasosPrevios[0]
9     pasos[1] = pasosPrevios[1] + pasos[1]
10
11     if rep:
12         display(Math(tex))
13
14     return tex, pasos

```

Cuando mostramos los pasos, es más legible mostrar únicamente los que modifican la matriz (omitiendo sustituciones de una columna por ella misma, productos de una columna por 1, o sumas de un vector nulo a una columna).

El atributo `tex` guardará el código $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ que muestra el proceso completo. Si ha habido transformaciones previas, la cadena de $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ que permite su representación en el entorno Jupyter estará guardada en la variable (`TexPasosPrev`), y a dicha cadena hay que añadir la correspondiente cadena de $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ que permita representar los nuevos `pasos` dados como argumento de este método. Si `TexPasosPrev` es vacío, la escritura comienza con la representación de `data`. A la hora de representar los pasos hay que tener en cuenta si se dan sobre las filas (`l==0`) o sobre las columnas (`l==1`).

```

1  def rprElim(data, pasos, TexPasosPrev=[], sust=[], metodo=factor):
2      """Escribe en LaTeX los pasos efectivos y los sucesivos sistemas"""
3      A = data.fullcopy().subs(sust)
4      tex = latex(A) if not TexPasosPrev else TexPasosPrev
5
6      simplifica = lambda metodo,expresion: metodo(expresion)
7
8      # transformaciones por la izquierda
9      for _,pasoDeEliminacion in enumerate(pasos[0][::-1]):
10         if data.es_arreglo_rectangular(): # entonces transforman las filas
11             tex += '\\xrightarrow[' + latex( pasoDeEliminacion.subs(sust) ) + ']{ }'
12             tex += latex( simplifica(metodo, ((pasoDeEliminacion & A).subs(sust)) ) )
13         else: # hacen lo mismo que por la derecha
14             tex += '\\xrightarrow{' + latex( pasoDeEliminacion.subs(sust) ) + '}'
15             tex += latex( simplifica(metodo, ((A & pasoDeEliminacion).subs(sust)) ) )
16
17         # transformaciones por la derecha
18         for _,pasoDeEliminacion in enumerate(pasos[1]):
19             tex += '\\xrightarrow{' + latex( pasoDeEliminacion.subs(sust) ) + '}'
20             tex += latex( simplifica(metodo, ((A & pasoDeEliminacion).subs(sust)) ) )
21
22     return tex

```

```

1  def rprElimCF(data, pasos, TexPasosPrev=[], sust=[], metodo=factor):
2      """Escribe en LaTeX los pasos efectivos y los sucesivos arreglos rectangulares"""
3      if not data.es_arreglo_rectangular():
4          raise ValueError('El sistema tiene que ser un arreglo rectangular')
5      if len(pasos[0])!=len(pasos[1]):
6          raise ValueError('Esta representación requiere el mismo número de pasos por la izquierda y la derecha')
7
8      A = data.fullcopy().subs(sust)
9      tex = latex(data) if not TexPasosPrev else TexPasosPrev
10
11     simplifica = lambda metodo,expresion: metodo(expresion)
12
13     for i,pasoDeEliminacionFilas in enumerate(pasos[0][::-1]):
14         tex += '\\xrightarrow{' + latex( (pasos[1][i]).subs(sust) ) + '}'
15         tex += latex( simplifica(metodo, ((A & pasos[1][i]).subs(sust)) ) )
16         tex += '\\xrightarrow[' + latex( (pasoDeEliminacionFilas).subs(sust) ) + ']{ }'

```

```

17         tex += latex( simplifica(metodo, ((pasoDeEliminacionFilas & A).subs(sust))) )
18
19     return tex

```

Representación de un proceso de eliminación rprElimFyC

```

1 def rprElimFyC(data, pasos, TexPasosPrev=[], sust=[], metodo=factor):
2     """Escribe en LaTeX los pasos efectivos y los sucesivos arreglos rectangulares"""
3     if not data.es_arreglo_rectangular():
4         raise ValueError('El sistema tiene que ser un arreglo rectangular.')
5     if len(pasos[0])!=len(pasos[1]):
6         raise ValueError('Esta representación requiere el mismo número de pasos por la izquierda y la derecha')
7
8     A = data.fullcopy().subs(sust)
9     tex = latex(data) if not TexPasosPrev else TexPasosPrev
10
11     simplifica = lambda metodo,expresion: metodo(expresion)
12
13     for i,pasoDeEliminacionFilas in enumerate(pasos[0][:-1]):
14         tex += '\\xrightarrow{ ' \
15             + '[' + latex( filtradopasos(pasoDeEliminacionFilas).subs(sust) ) + ']' \
16             + '{ ' + latex( pasos[1][i].subs(sust) ) + '}' \
17         tex += latex( simplifica(metodo, (( pasoDeEliminacionFilas & A & pasos[1][i] ).subs(sust)) )
18
19     return tex

```

Estos procedimientos son para “mostrar” en los Jupyter notebooks los pasos de eliminación.

Representación de un proceso de eliminación dispElim

```

1 def dispElim(self, pasos, TexPasosPrev=[], sust=[], metodo=factor):
2     display(Math(rprElim(self, pasos, TexPasosPrev, sust, metodo)))
3
4 def dispElimFyC(self, pasos, TexPasosPrev=[], sust=[], metodo=factor):
5     display(Math(rprElimFyC(self, pasos, TexPasosPrev, sust, metodo)))
6
7 def dispElimCF(self, pasos, TexPasosPrev=[], sust=[], metodo=factor):
8     display(Math(rprElimCF(self, pasos, TexPasosPrev, sust, metodo)))

```

1.5. Representación de la clase Sistema

Necesitamos indicar a Python cómo representar los objetos de tipo **Sistema**. Los sistemas, son secuencias finitas de objetos que representaremos con corchetes, separando los elementos por “;”

$$\mathbf{v} = [v_1; \dots; v_n;]$$

Si la lista es vacía, entonces se pintan unos corchetes [] sin “;” (por no haber elementos).

Definimos varios tipos de representación.

- La primera se muestra con la función `print()` o la función `str()` y está formada por caracteres ASCII. Es la que se ve en la línea de comandos. Entre corchetes muestra todos los elementos de `self.lista` separados por “puntos y comas” (;):

Si, por ejemplo, el atributo `.corteSistema` (“*corta Sistema*”) indica que se separen las dos primeras componentes del sistema respecto de la última, esta representación pinta una barra vertical detrás de la segunda componente (véase la Sección 1.5.1).

```

1 def __str__(self):
2     """ Muestra un Sistema en su representación python """
3     pc = ';' if len(self.lista) else ''
4     ln = [len(n) for n in particion(self.corteSistema,self.n)]
5     return '[' + \

```

```

6         ';\'.join(['; ' + '\'.join([str(c) for c in s]) \
7         for s in [ self[i] for i in particion(self.corteSistema, self.n)] ]) + pc + ']'

```

- La segunda forma de representación se muestra con la función `repr()` y también está formada por caracteres ASCII. Se parece a la anterior, pero indica explícitamente que el objeto es un `Sistema` y no muestra ninguna barra vertical que separe el sistema en sublistas.

```

1 def __repr__(self):
2     """ Muestra un Sistema en su representación python """
3     pc = ';' if len(self.lista) else ''
4     return 'Sistema([' + ';' + '\'.join( repr (e) for e in self ) + pc + ']'

```

- La representación `latex` (L^AT_EX) es similar a la primera representación (`str`), pues también muestra barras verticales que separan la lista de elementos en sub-listas si el atributo `.corteSistema` así lo indica. La única diferencia es que los elementos aparecen con su representación `latex` (cuando la tienen).

Es la representación que los Notebooks de Jupyter emplean por defecto (y también es usada por Emacs (Scimax) mediante los dos últimos métodos que aparecen más abajo).

Llamamos a la representación `latex` con los métodos `display()` y `pinta()`.

```

1 def latex(self):
2     """ Construye el comando LaTeX para representar un Sistema """
3     if not self:
4         return r'\left[ \right]'
5     else:
6         pc = ';' if len(self) else r'\ '
7         ln = [len(i) for i in particion(self.corteSistema, len(self))]
8         return \
9             r'\left[ \begin{array}{l} ' + ';\'.join([n*'c' for n in ln]) + '}' + \
10             r';& \'.join([latex(e) for e in self]) + pc + \
11             r'\end{array} \right]'

```

- Jupyter llama al método `__repr_html__` (que a su vez llama al método general `html` (véase 15.4) para mostrar la representación `latex` de los objetos en el navegador.

```

1 def _repr_html_(self):
2     """ Construye la representación para el entorno jupyter notebook """
3     return html(self.latex())

```

- Es posible trabajar con los Jupyter Notebooks dentro de Emacs con la configuración Scimax. Para poder visualizar la representación L^AT_EX dentro del editor, es necesario generar las imágenes en ficheros auxiliares `png`. Para ello, definimos un par de representaciones adicionales usadas en los Notebooks con Emacs.

```

1 def _repr_latex_(self):
2     """ Representación para el entorno jupyter en Emacs """
3     return '$'+self.latex()+'$'
4
5 def _repr_png_(self):
6     """ Representación png para el entorno jupyter en Emacs """
7     try:
8         expr = '$'+self.latex()+'$'
9         workdir = tempfile.mkdtemp()
10        with open(join(workdir, 'borrame.png'), 'wb') as outputfile:
11            sympy.preview(expr, viewer='BytesIO', outputbuffer=outputfile)
12        return open(join(workdir, 'borrame.png'), 'rb').read()

```

```

13     except:
14         return '$'+self.latex()+'$'

```

Método para establecer los índices donde poner marcas de corte de un Sistema

Para separar visualmente distintas partes de un sistema es necesario indicar los índices de los componentes tras lo que se mostrará una barra vertical. Para especificar dichos índices se llama al método `csis()` (que usaremos para visualmente *cortar un sistema*, por ejemplo para separar visualmente las columnas de una matriz).

```

1 def csis(self, conjuntoIndices={}):
2     """Modifica el atributo corteSistema para insertar lineas entre
3     determinados elementos del sistema
4
5     """
6     self.corteSistema = set(conjuntoIndices) if conjuntoIndices else {}
7     return self

```

1.5.1. Ejemplo de representación de un Sistema

Veamos la representación `str` de un sistema `A` con tres elementos:

```

1 A = Sistema([ 2, fracc(a,b), sympy.sqrt(5), ])
2 print( A )

```

`[2; a/b; sqrt(5);]`

Si incluimos una separación visual detrás de la segunda componente de `A` su representación `str` es:

```

1 A.csis({2})
2 print( A )

```

`[2; a/b; |sqrt(5);]`

Sin embargo, la representación `repr` no muestra la barra vertical de separación:

```

1 repr( A )

```

`Sistema([2; a/b; sqrt(5);])`

La barra vertical de separación visual sí se muestra en la representación `latex` (es la representación empleada por defecto en los Notebooks de Jupyter y en el material del curso de Álgebra Lineal):

```

1 pinta(A)

```

$\left[\begin{array}{c|c} 2; & \frac{a}{b}; \end{array} \sqrt{5}; \right]$

1.5.2. Ejemplo de representación con un Sistema más complejo

Únicamente cuando un `Sistema` tiene una estructura muy sencilla las tres formas de representación de `Sistemas` son prácticas. Por ejemplo, la representación `str` se ve mal cuando el sistema contiene objetos que son complicados de representar (por ejemplo matrices dentro de otros sistemas). Por otra parte, aunque la representación `repr` indica claramente cuál es el tipo de cada objeto, es difícil

ver qué contiene cada uno de los objetos. La representación `latex` es, con diferencia, la más fácil de interpretar de un simple vistazo.

En el siguiente ejemplo, con `.csis({1})` indicamos que el primer elemento del sistema debe estar visualmente separado del resto.

```

1 a,b,c = sympy.symbols('a b c')
2 vv = Vector([1,2,3])
3 Z = Sistema( [ Vector([6,8,10],rpr='h').csis({2}), vv , 1492] )
4 ZZ = Sistema([ Z, 'Hola', Matrix([Vector([0,sympy.pi,fracc(a,2)]),Vector([0,0,0]]) )]).csis({1})
5 print(ZZ)
6 repr(ZZ)
7 ZZ

```

```
[[ (6, 8, 10), (1, 2, 3), 1492], 'Hola', Matrix([Vector([0, pi, a/2]), Vector([0, 0, 0])])]
```

```
Sistema([Sistema([Vector([6, 8, 10]), Vector([1, 2, 3]), 1492]), 'Hola', Matrix([Vector([0, pi, a/2]), Vector([0, 0, 0])])])
```

$$\left[\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; 1492; \right]; \text{Hola}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pi & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 \end{bmatrix}; \right]$$

1.6. La clase Sistema completa

```
1 class Sistema:
2     <<Texto de ayuda de la clase Sistema>>
3     <<Inicialización de la clase Sistema>>
4     <<Métodos de la clase Sistema para que actúe como si fuera una list de Python>>
5     <<Método de la clase Sistema para concatenar dos sistemas>>
6     <<Método que junta una lista de Sistemas en un único Sistema>>
7     <<Método que amplía la lista de un Sistema con nuevos elementos>>
8     <<Método que vectoriza un Sistema>>
9     <<Sustitución de variables simbólicas>>
10    <<Simplificación de expresiones simbólicas en la lista de un Sistema>>
11    <<Sustitución de un símbolo por otro símbolo o valor en un Sistema>>
12    <<Otros métodos de la clase Sistema>>
13    <<Métodos que devuelven SubEspacios>>
14    <<Método de resolución de sistema de Ecuaciones lineales>>
15    <<Operador selector por la derecha para la clase Sistema>>
16    <<Operador selector por la izquierda para la clase Sistema>>
17    <<Suma y diferencia de Sistemas>>
18    <<Producto de un Sistema por un escalar a su izquierda>>
19    <<Opuesto de un Sistema>>
20    <<Producto de un Sistema por un escalar un Vector o una Matrix a su derecha>>
21    <<Transformaciones elementales de los elementos de un Sistema>>
22    <<Transformaciones elementales por la izquierda de un Sistema>>
23    <<Reducción por eliminación>>
24    <<Eliminación>>
25    <<formas escalonadas>>
26    <<Métodos de representación de la clase Sistema>>
```

Capítulo 2

La subclase BlockV

En el curso de Álgebra Lineal empleamos arreglos rectangulares de objetos (principalmente las matrices). En NAcAL, la clase de los arreglos rectangulares de objetos son los **BlockM** (“Block Matrix”). Son **Sistemas** formados por una lista de **Sistemas** de la misma longitud y que representamos verticalmente para formar las columnas del arreglo rectangular.

En consecuencia, los elementos de un **BlockM** son *sistemas con una representación vertical*. Así pues, en este capítulo se define una primera subclase de la clase **Sistema** cuya representación difiere de la de los **Sistemas** genéricos. A estos subsistemas los denominamos **BlockV**.

Por defecto, los **BlockV** tienen representación **latex** vertical (opcionalmente podremos representarlos horizontalmente). Para distinguirlos de los **Sistemas** genéricos, su lista de componentes está encerrada entre paréntesis (en lugar de corchetes); y si se representan horizontalmente, tras de cada elemento aparece una *coma* (,) en lugar de un *punto y coma* (;). Así que para instanciar un **BlockV**, además del argumento con la lista de elementos del sistema, disponemos de un segundo argumento opcional (**rpr**) que indica si queremos una representación vertical (por defecto es la que se usará si no se indica nada) u horizontal. En todo lo demás, un **BlockV** es como un **Sistema** genérico.

2.1. Implementación

2.1.1. Texto de ayuda

```
1      Texto de ayuda de la subclase BlockV
2      """BlockV es un Sistema que se puede representar verticalmente.
3
4      Se puede instanciar con una lista, tupla o otro Sistema. Si al
5      instanciar un BlockV la lista, tupla o sistema solo contiene números
6      el objeto obtenido es un Vector (subclase de BlockV).
7
8      El atributo 'rpr' indica si la representación latex debe mostrar el
9      sistema en disposición vertical (por defecto) u horizontal.
10
11     Parámetros:
12         sis      (list, tuple, Sistema): Lista, tupla o Sistema de objetos.
13         rpr      (str): Para su representación latex (en vertical por defecto).
14                     Si rpr='h' se representa en forma horizontal.
15
16     Atributos de la subclase:
17         rpr      (str): modo de representación en Jupyter.
18
19     Atributos heredados de la clase Sistema:
```

```

19 lista          (list): list con los elementos.
20 n              (int) : número de elementos de la lista.
21 corteSistema (set) : Conjunto de índices donde pintar
22                     separaciones visuales
23
24 Ejemplos:
25 >>> # Instanciación a partir de una lista, tupla o Sistema de números
26 >>> BlockV( [1,'abc',(2,)] )           # con una lista
27 >>> BlockV( (1,'abc',(2,)) )           # con una tupla
28 >>> BlockV( Sistema( [1,'abc',(2,)] ) ) # con un Sistema
29 >>> BlockV( BlockV ( [1,'abc',(2,)] ) ) # a partir de otro BlockV
30
31 BlockV( [1,'abc',(2,)] )
32
33 >>> BlockV( [1,2,3] )                  # con una lista de números
34
35 Vector( [1,2,3] )
36 """

```

2.1.2. Método de inicialización:

BlockV es una subclase Sistema. Se inicia con el método: `def __init__(self, arg, rpr='columna')`.

- La clase BlockV se instancia con dos argumentos.
 1. `arg` es obligatorio y debe ser una lista, tupla o Sistema.
 2. `rpr` es opcional e indica si queremos que la representación `latex` sea en forma horizontal o en vertical. Por defecto la representación es vertical. Para una disposición horizontal `rpr` de ser la cadena de caracteres `h`, es decir, `rpr='h'`.
- Con `super().__init__(arg)` la subclase BlockV hereda los métodos y atributos de la clase Sistema. En consecuencia BlockV tendrá los atributos `lista`, `n` y `corteSistema` así como todos los métodos definidos para la clase Sistema.
- El atributo `rpr` tomará el valor indicado al instanciar la clase (`'columna'` por defecto). Y el atributo `n` será igual al número de elementos del sistema (su longitud).
- Por último, un BlockV cuya lista tan solo contiene números es un vector de \mathbb{R}^n .

Consecuentemente, cuando todos los elementos de `arg` son [números](#) (Véase la Sección [15.1](#)) el objeto que se crea es un `Vector` (una subclase de BlockV que solo contiene números).

```

1 def __init__(self, arg, rpr='columna'):
2     """Inicializa un BlockV con una lista, tupla o Sistema"""
3     super().__init__(arg)
4     self.rpr = rpr
5     self.n = len(self)
6
7     if all([es_numero(e) for e in arg]):
8         self.__class__ = Vector
9     #if all([isinstance(e, Vector) for e in arg]) and self.es_arreglo_rectangular():
10    #    self.__class__ = Matriz
11    #    try:
12    #        self.m = (self/1).n
13    #    except:
14    #        self.m = 0
15    #    self.corteElementos = set()

```

2.2. Métodos de la subclase BlockV

```
1 def repre(self, rpr='h'):
2     """ Devuelve el BlockV con la representación indicada """
3     v = self.fullcopy()
4     v.rpr = rpr
5     return v
```

2.3. Representación de la subclase BlockV

Un BlockV es una secuencia finita de objetos; es decir, un Sistema. La única diferencia respecto de un Sistema genérico es su representación. Por tanto solo necesitamos redefinir las representaciones str, repr y latex de esta subclase particular de Sistema.

```
1 def __repr__(self):
2     """ Muestra el BlockV en su representación Python """
3     return 'BlockV(' + repr(self.lista) + ')'
4
5 def __str__(self):
6     """ Muestra el BlockV en su representación Python """
7     pc = ',' if len(self.lista) else ''
8     ln = [len(n) for n in particion(self.corteSistema, self.n)]
9     return '(' + \
10         ','.join(['', '.join([str(c) for c in s]) \
11                     for s in [ self|i for i in particion(self.corteSistema, self.n)]]]) + \
12         pc + ')'
13
14 def latex(self):
15     """ Construye el comando LaTeX para representar un BlockV """
16     if bool(self.corteSistema):
17         pc = ',' if len(self) else r'\ '
18         ln = [len(n) for n in particion(self.corteSistema, self.n)]
19         if self.rpr == 'h' or self.n==1:
20             return \
21                 r'\left( \begin{array}{c} ' + '|'.join([n*'c' for n in ln]) + '}' + \
22                 r',& '.join([latex(e) for e in self]) + pc + \
23                 r'\\ \end{array} \right)'
24         else:
25             return \
26                 r'\left( \begin{array}{c} ' + \
27                 r'\\ \hline '.join([r'\\'.join([latex(c) for c in e]) \
28                                     for e in [ self|i for i in particion(self.corteSistema, self.n)]]]) + \
29                 r'\\ \end{array} \right)'
30     else:
31         if not self:
32             return r'\left( \right)'
33
34         if self.rpr == 'h' or self.n==1:
35             return r'\begin{pmatrix} ' + \
36                 ',& '.join([latex(e) for e in self]) + \
37                 r',\end{pmatrix}'
38         else:
39             return r'\begin{pmatrix} ' + \
40                 r'\\ '.join([latex(e) for e in self]) + \
41                 r'\end{pmatrix}'
```

2.3.1. Ejemplo de representación de un BlockV

Veamos la representación de un BlockM cuya lista contiene una matriz dos por tres y tres números.

```
1 BV = BlockV(Matrix([[1,2,3],[4,5,6]]), 1,0,0)
```

La representación `str` no es práctica en este caso, pues su elemento `Matrix` necesita de un salto de línea, por lo que la visualización algo deficiente: `([1 2 3|\n|4 5 6|, 1, 0, 0,)`

La representación `repr` es mejor, pero resulta difícil leer qué objetos son elementos de otros: `BlockV([Matrix([Vector([1, 4]), Vector([2, 5]), Vector([3, 6])]), 1, 0, 0])`

La representación `latex` es la mejor:
$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

y también la podemos usar en horizontal:
$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, 1, 0, 0, \right)$$

2.4. La clase `BlockV` completa

```
1 class BlockV(Sistema):
2     <<Texto de ayuda de la subclase BlockV>>
3     <<Inicialización de la subclase BlockV>>
4     <<Métodos de la subclase BlockV>>
5     <<Métodos de representación de la subclase BlockV>>
```

Capítulo 3

La subclase Vector

El [curso](#) de Álgebra Lineal define un vector de \mathbb{R}^n del siguiente modo

Un *vector* de \mathbb{R}^n es un *sistema* de n números reales;

y se indica que los vectores se representan entre paréntesis tanto horizontal como verticalmente. Por tanto hay que redefinir la representación de la clase **Vector** para que los **Vectores** no sean representados como **Sistemas** genéricos, sino a la manera de los vectores.

Pero esto ya se hace en el capítulo anterior con los **BlockV**. Como un **Vector** es un **BlockV** que solo contiene números, lo más sencillo es definir la clase **Vector** como una subclase **BlockV** que solo contiene números. Así solo necesitamos redefinir la representación **repr** para que indique específicamente que se trata de un **Vector**, ya que la subclase **Vector** hereda el resto de métodos y atributos de la clase **Sistema** y la subclase **BlockV**.

3.1. Implementación de los vectores de \mathbb{R}^n en la subclase Vector

3.1.1. Texto de ayuda

```
1  """Clase para los Sistemas de números.
2
3  Sólo se puede instanciar con una lista, tupla o Sistema de objetos
4  int, float o sympy.Basic. Si se instancia con un Vector se crea una
5  copia del mismo.
6
7  El atributo 'rpr' indica si, en la representación latex, el vector
8  debe ser escrito en vertical (por defecto) o en horizontal.
9
10 Parámetros:
11     sis (list, tuple, Sistema): Lista, tupla o Sistema de objetos
12     de tipo int, float o sympy.Basic.
13     rpr (str): Para su representación latex (en vertical por defecto).
14     Si rpr='h' el vector se representa en horizontal.
15
16 Atributos heredados de la subclase BlockV::
17     rpr (str) : modo de representación en Jupyter.
18
19 Atributos heredados de la clase Sistema:
20     lista (list): list con los elementos.
21     n (int) : número de elementos de la lista.
22     corteSistema (set) : Conjunto de índices donde pintar
23     separaciones visuales
```

```

24
25 Ejemplos:
26 >>> # Instanciación a partir de una lista, tupla o Sistema de números
27 >>> Vector( [1,2,3] )           # con lista
28 >>> Vector( (1,2,3) )           # con tupla
29 >>> Vector( Sistema( [1,2,3] ) )# con Sistema
30 >>> Vector( Vector ( [1,2,3] ) )# a partir de otro Vector
31
32 Vector([1,2,3])
33 """

```

3.1.2. Método de inicialización:

La clase se inicia con el método: `def __init__(self, arg, rpr='columna')`.

- La clase `Vector` emplea dos argumentos. El primero (`arg`) es una lista, tupla o `Sistema` de objetos tipo `int`, `float` o `sympy.Basic`. Cuando `arg` es un `Vector` se obtiene una copia. El segundo argumento (`rpr`) es opcional e indica si queremos que la representación `latex` sea en forma horizontal o en vertical (Véase la subclase `BlockV`).
- Python mostrará el texto de ayuda sobre el método `__init__` con: `help Vector.__init__`
- Se verifica que `arg` es una secuencia de números (Sección 15.3). Si no lo es obtenemos un error.
- Con `super().__init__(arg)` la subclase `Vector` hereda los métodos y atributos de la clase `BlockV` (por tanto, `Vector` tendrá un atributo `lista`, así como el resto de atributos y todos los métodos definidos para la clase `Sistema` y la subclase `BlockV`).

```

1 Inicialización de la subclase Vector
2 def __init__(self, arg, rpr='columna'):
3     """Inicializa Vector con una lista, tupla o Sistema de números"""
4     if not es_ristra_de_numeros(arg):
5         raise ValueError('no todos los elementos son números o parámetros!')
6
7     super().__init__(arg, rpr)

```

3.2. Métodos específicos de la subclase Vector

Aquí se definen algunos métodos específicos de la subclase `Vector`. El primero calcula la norma euclídea de un `Vector` de \mathbb{R}^n , es decir, la raíz cuadrada del producto punto del vector por si mismo.

El segundo usa dicha norma para devolver un múltiplo con norma uno de cualquier un vector no nulo.

```

1 Normalización de un Vector
2 def norma(self):
3     """Devuelve la norma de un vector"""
4     return sympy.sqrt(self*self)
5
6 def normalizado(self):
7     """Devuelve un múltiplo de norma uno si el vector no es nulo"""
8     if self.es_nulo(): raise ValueError('Un vector nulo no se puede normalizar')
9     return self * fracc(1,self.norma())

```

El tercer método devuelve una `Matrix` diagonal cuya diagonal principal es igual a `Vector`.

```

1 Creación de una Matrix diagonal a partir de un Vector
2 def diag(self):
3     """Crea una Matrix diagonal cuya diagonal es self"""

```

```
3     return Matrix([a*(I(self.n)|j) for j,a in enumerate(self, 1)])
```

3.3. Representación de la clase Vector

Necesitamos indicar a Python cómo representar los objetos de tipo **Vector**.

Los vectores, son secuencias finitas de números que escribimos entre paréntesis en horizontal

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

o en vertical

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Esta forma de representación ya se ha establecido para la subclase **BlockV**, por lo que no es necesario volver a programarla. Tan solo re-especificamos la representación de tipo **repr** para que explícitamente indique que el objeto es un **Vector**.

```
1 def __repr__(self):
2     """ Muestra el vector en su representación Python repr """
3     return 'Vector(' + repr(self.lista) + ')'
```

3.4. La clase Vector completa

```
1 class Vector(BlockV):
2     <<Texto de ayuda de la subclase Vector>>
3     <<Inicialización de la subclase Vector>>
4     <<Normalización de un Vector>>
5     <<Creación de una Matrix diagonal a partir de un Vector>>
6     <<Métodos de representación de la subclase Vector>>
```

Capítulo 4

Las subclases V0 y V1

La clase V0 corresponde a vectores nulos. La clase V1 corresponde a vectores constantes cuyas componentes son todas iguales a 1. En ambos casos se instancian con un parámetro que indica el número de componentes y, opcionalmente, el parámetro `rpr` para indicar si la representación `latex` es en forma horizontal (`'h'`) o vertical.

Definición de las subclases V0 y V1

```
1 class V0(Vector):
2     """Clase para los Vectores nulos"""
3     def __init__(self, n, rpr = 'columna'):
4         """Inicializa un vector nulo de n componentes
5
6         V0 se inicializa con
7
8         1) un entero que indica el número de componentes nulas
9
10        2) la cadena de texto rpr. Si rpr = 'h' la representación
11        es horizontal (en otro caso es vertical)
12
13        """
14        super().__init__([0]*n, rpr)
15        self.__class__ = Vector
16
17 class V1(Vector):
18     """Clase para los Vectores constantes 1"""
19     def __init__(self, n, rpr = 'columna'):
20         """Inicializa un vector uno de n componentes
21
22        V1 se inicializa con
23
24        1) un entero que indica el número de componentes nulas
25
26        2) la cadena de texto rpr. Si rpr = 'h' la representación
27        es horizontal (en otro caso es vertical)
28
29        """
30        super().__init__([1]*n, rpr)
31        self.__class__ = Vector
```

Capítulo 5

La subclase BlockM

Un BlockM es un sistema de BlockVs de la misma longitud, es decir, es un arreglo rectangular de objetos. A sus elementos los llamaremos *columnas* del BlockM.

5.1. Implementación

5.1.1. Texto de ayuda

```
1  """Clase para arreglos rectangulares de objetos.
2
3  Sistema formado por BlockVs con el mismo número de componentes. Se
4  instancia con: 1) una lista, tupla o Sistema de BlockVs (serán sus
5  columnas); 2) una lista, tupla o Sistema de listas, tuplas o Sistemas
6  con la misma longitud (serán sus filas); 3) otro BlockM (se obtendrá
7  una copia).
8
9  Parámetros:
10     arg (list, tuple, Sistema): Lista, tupla o Sistema de BlockVs
11     (con identica longitud); o de listas, tuplas o Sistemas (con
12     identica longitud).
13
14  Atributos:
15     m (int) : número de filas
16     corteElementos (set) : Conjunto de índices donde pintar
17     separaciones visuales entre filas
18
19  Atributos heredados de la clase Sistema:
20     lista (list): list con los elementos.
21     n (int) : número de elementos de la lista.
22     corteSistema (set) : Conjunto de índices donde pintar
23     separaciones visuales
24
25  Ejemplos:
26  >>> # Crear un BlockM a partir de una lista de Vectores o BlockVs:
27  >>> a = BlockV( ['Hola',2,3] ); b = Vector( [1,2,5] ); c = Vector( [1,2,7] )
28  >>> BlockM( [a,b,c] )
29
30  BlockM([BlockV(['Hola', 2, 3]), Vector([1, 2, 5]), Vector([1, 2, 7])])
31  >>> # Crear una BlockM a partir de una lista de listas, tuplas o Sistemas
32  >>> A = BlockM([('Hola',1,1),[2,2,2],Vector([3,5,7])])
33
34  BlockM([BlockV(['Hola', 2, 3]), Vector([1, 2, 5]), Vector([1, 2, 7])])
35
36  """
```

5.1.2. Método de inicialización:

```
1 def __init__(self, arg):
2     """Inicializa un BlockM con una
3
4     1) lista, tupla o Sistema de BlockVs con el mismo número de
5     elementos,
6
7     2) tupla, lista o Sistema de tuplas, listas o Sistemas con el
8     mismo número de elementos,
9
10    3) con otra BlockM.
11
12    """
13    listaInicial = Sistema(arg).lista.copy()
14
15    if isinstance(arg, BlockM):
16        lista = arg.copy().lista
17
18    elif all([(isinstance(elemento, BlockV) and len(elemento)==len(listaInicial[0])) for elemento in listaInicial]):
19        lista = listaInicial.copy()
20
21    elif listaInicial and not listaInicial[0]:
22        lista = [BlockV([])]
23
24    elif all([(es_ristra(elemento) and len(elemento)==len(listaInicial[0])) for elemento in listaInicial]):
25        lista = (~BlockM([BlockV(i) for i in arg])).lista
26
27    else:
28        raise ValueError("""El argumento debe ser una lista de
29        BlockVs o una lista, tupla o Sistema de listas, tuplas o
30        sistemas con el mismo número de elementos!""")
31
32    listaFinal = [BlockV( elemento, rpr = 'columna' ) for elemento in lista]
33
34    super().__init__(listaFinal)
35
36    try:
37        self.m = (self|1).n
38    except:
39        self.m = 0
40
41    self.corteElementos = set()
42
43    if all( [isinstance(e, Vector) for e in self] ): self.__class__ = Matrix
```

5.2. Métodos de la clase BlockM

5.2.1. Transposición de un BlockM

```
1 def __invert__(self):
2     """
3     Devuelve la traspuesta de un BlockM.
4
5     Ejemplo:
6     >>> ~BlockM([ [1,2,3], [2,4,6] ])
7
8     Matrix([ Vector([1, 2, 3]), Vector([2, 4, 6]) ])
9     """
10    M = BlockM([ BlockV([v|f for v in self]) for f in range(1,self.m+1)])
11    M.corteElementos, M.corteSistema = self.corteSistema, self.corteElementos
12    return M
```

5.2.2. Comprobación de que las filas o columnas son de composición homogénea

Si queremos aplicar transformaciones elementales a las columnas o a las filas de un BlockM es necesario que las operaciones entre componentes tengan sentido. Los siguientes dos métodos nos indican si es posible realizar dichas operaciones por columnas (si éstas son homogéneas) o por filas.

```
1  def columnas_homogeneas(self):
2      """Indica si las columnas contienen objetos del mismo tipo y longitud"""
3      return self.es_de_composicion_y_longitud_uniforme()
4
5  def filas_homogeneas(self):
6      """Indica si las filas contienen objetos del mismo tipo y longitud"""
7      return (~self).es_de_composicion_y_longitud_uniforme()
```

5.2.3. Apilado de BlockMs

Creamos un BlockM apilando BlockMs uno encima de otro si tienen el mismo número de elementos.

```
1  def apila(self, lista, marcasVisuales = False):
2      """Apila una lista o tupla de BlockMs con el mismo número de elementos
3      (columnas) en un BlockM concatenando los respectivos elementos
4
5      """
6      apila_dos = lambda x, other, marcasVisuales=False: ~((~x).concatena(~other, marcasVisuales))
7      apila = lambda x: x[0] if len(x)==1 else apila_dos( apila(x[0:-1]), x[-1], marcasVisuales)
8      BlockM_apilado = apila([self] + [s for s in CreaLista(lista)])
9      return BlockM_apilado.cele(BlockM_apilado.corteElementos)
```

5.2.4. Operador selector por la izquierda

```
1  """Extrae la j-ésima fila de un BlockM en forma de BlockV; o crea un
2  BlockM cuyas filas corresponden a las filas indicadas en una tupla o
3  lista de índices (los índices comienzan por el número 1)
4
5  Parámetros:
6      j (int, list, tuple, slice): Índice (o lista de índices) del
7      elementos (o elementos) a seleccionar
8
9  Resultado:
10     ?: Si j es int, devuelve la j-ésima fila del BlockM.
11     Sistema: Si j es list, tuple o slice devuelve el BlockM cuyas
12     filas son las filas indicadas en la lista, tupla o slice de
13     índices.
14
15  Ejemplos:
16  >>> # Extrae la j-ésima fila del BlockM
17  >>> 1 | BlockM(['Hola', 2, 3], [1, 2, 5], [1, 2, 7])
18
19  BlockV(['Hola', 2, 3])
20  >>> # Sistema formado por los elementos indicados en la lista (o tupla)
21  >>> [2,1] | BlockM(['Hola', 2, 3], [1, 2, 5], [1, 2, 7])
22  >>> (2,1) | BlockM(['Hola', 2, 3], [1, 2, 5], [1, 2, 7])
23
24  BlockM([BlockV([1, 'Hola']), Vector([2, 2]), Vector([5, 3])])
25
26  >>> # Sistema formado por los elementos indicados en el slice
27  >>> slice(1,3,2) | BlockM(['Hola', 2, 3], [1, 2, 5], [1, 2, 7])
28
29  BlockM([BlockV(['Hola', 1]), Vector([2, 2]), Vector([3, 7])])
30
31  """
```

```

1  def __ror__(self,i):
2      <<Texto de ayuda para el operador selector por la izquierda para la clase BlockM>>
3      if isinstance(i,int):
4          return BlockV( (~self)|i , rpr='h' )
5
6      elif isinstance(i, (list,tuple,slice)):
7          return ~BlockM( (~self)|i )

```

5.3. Otros métodos de la clase BlockM

5.3.1. Extiende una BlockM a lo largo de la diagonal con una lista de BlockMs

```

1  def extDiag(self, lista, c=False):
2      "Extiende una BlockM a lo largo de la diagonal con una lista de BlockMs"
3      lista = CreaLista(lista)
4      if not all(isinstance(elemento, BlockM) for elemento in lista):
5          return ValueError('No es una lista de BlockMs')
6      Ext_dos = lambda x, y: x.apila(M0(y.m,x.n),c).concatena(M0(x.m,y.n).apila(y,c),c)
7      ExtDiag = lambda x: x[0] if len(x)==1 else Ext_dos( ExtDiag(x[0:-1]), x[-1] )
8      return ExtDiag([self]+lista)

```

5.4. Transformaciones elementales de las filas de un BlockM

5.4.1. Texto de ayuda

```

1  """Transforma las filas de un BlockM
2
3  Atributos:
4      operaciones (T): transformaciones a aplicar sobre las filas
5                          de un BlockM A
6
7  Ejemplos:
8  >>> T({1,3}) & A          # Intercambia las filas 1 y 3
9  >>> T((5,1)) & A          # Multiplica por 5 la fila 1
10 >>> T((5,2,1)) & A        # Suma 5 veces la fila 2 a la fila 1
11 >>> T([(5,2,1),(5,1),{1,3}]) & A # Aplica la secuencia de transformac.
12                               # sobre las filas de A y en el orden inverso al de la lista
13 """

```

5.4.2. Implementación de las transformaciones elementales de las filas

Para implementar las transformaciones elementales de las filas usamos el truco de aplicar las operaciones sobre las columnas de la transpuesta y de nuevo transponer el resultado: $\sim(\sim\text{self} \& \text{t})$. Pero hay que recordar que las transformaciones más próximas a la matriz se ejecutan antes y que

$$\tau_1 \cdots \tau_k \mathbf{A} = \left((\tau_1 \cdots \tau_k \mathbf{A})^\top \right)^\top = \left((\mathbf{A}^\top)_{(\tau_1 \cdots \tau_k)^\top} \right)^\top = \left((\mathbf{A}^\top)_{\tau_k \cdots \tau_1} \right)^\top.$$

```

1  def __rand__(self, operaciones):
2      <<Texto de ayuda de las transformaciones elementales de un BlockM>>
3      for item in reversed(operaciones.abreviaturas):
4          if isinstance(item, (set, tuple)):
5              self.lista = (~self & T(item)).lista.copy()
6
7          elif isinstance(item, list):
8              for k in item:
9                  ~T(k) & self
10
11      return self

```

5.5. Representación de la clase BlockM

```
1  def __repr__(self):
2      """ Muestra un BlockM en su representación Python repr """
3      return 'BlockM(' + repr(self.lista) + ')'

1  def __str__(self):
2      """ Muestra un BlockM en su representación Python str """
3      ln = [len(n) for n in particion(self.corteSistema, self.n)]
4      car = max([len(str(e)) for c in self for e in c])

5
6      def escribeFila(f,d=0):
7          parte = lambda f,d=0: str(' '.join([str(e).rjust(d) for e in f]))
8          s = '|'+ '|'.join([parte([e for e in c],d) for c in [p[f for p in particion(self.corteSistema, self.n)] ]])+ '|'
9          return s

10
11      num_guiones = len(escribeFila(1|self, car))
12      s = ('\n'+ '-'*(num_guiones) + '\n').join(['\n'.join([escribeFila(f,car) for f in ~s]) \
13                                                  for s in [i|self for i in particion(self.corteElementos, self.m)]]])
14      return s

15
16 def latex(self):
17     """ Construye el comando LaTeX para representar una BlockM """
18     if not self.m:
19         return self.sis().latex()
20
21     ln = [len(n) for n in particion(self.corteSistema, self.n)]
22     return \
23         '\\left[ \\begin{array}{'+ '|'.join([n*'c' for n in ln]) + '}' + \
24         '\\\\ \\hline '.join(['\\\\'.join(['&'.join([latex(e) for e in f.lista]) \
25                                         for f in (~M).lista]) \
26                               for M in [ i|self for i in particion(self.corteElementos, self.m)]]]) + \
27         '\\\\ \\end{array} \\right]'
```

Método para definir por puntos de corte en los elementos un BlockM (sus “filas”)

Para separar visualmente los elementos de los componentes (de los BlockV o columnas) de un BlockM es necesario indicar los índices de los puntos de corte de sus elementos (tras los que se mostrará una línea horizontal). Para especificar dichos índices se llama al método `cele()` (pues lo usaremos para visualmente separar algunos elementos en todos los componentes (es decir, en todos los BlockV o columnas) del BlockM (por ejemplo para *cortar por filas* una matriz).

```
1  def cele(self, conjuntoIndices={}):
2      """Modifica el atributo .corteElementos para insertar lineas
3      horizontales entre las filas del BlockM
4
5      """
6      self.corteElementos = set(conjuntoIndices) if conjuntoIndices else {}
7      self.lista = [v.csis(self.corteElementos) for v in self.lista]
8      return self
```

5.6. La clase BlockM completa

```
1  class BlockM(Sistema):
2      <<Texto de ayuda de la clase BlockM>>
3      <<Inicialización de la subclase BlockM>>
4      <<Operador transposición>>
5      <<Comprobación de que las filas o columnas son de composición homogénea>>
6      <<Apila una lista de Sistemas con el mismo número de elementos un BlockM>>
7      <<Operador selector por la izquierda para la clase BlockM>>
8      <<Transformaciones elementales de las filas de un BlockM>>
9      <<Método para definir por puntos de corte en los elementos un BlockM>>
10     <<Extiende una BlockM a lo largo de la diagonal con una lista de BlockMs>>
11     <<Método de representación repr de la subclase BlockM>>
12     <<Métodos de representación str y LaTeX de las subclases Matrix y BlockM>>
```

Capítulo 6

La subclase Matrix

6.1. Implementación de las matrices en la subclase Matrix

6.1.1. Texto de ayuda

```
1  """Matrix un Sistema de Vectores con el mismo número de componentes.
2
3  Una Matrix se puede instanciar con:
4
5  1. una lista, tupla o Sistema de Vectores con el mismo número de
6  componentes o longitud (serán las columnas).
7  2. una lista, tupla o Sistema de listas, tuplas o Sistemas de núemros
8  con la misma longitud (serán las filas de la matriz).
9
10 Parámetros:
11     arg (list, tuple, Sistema): Lista, tupla o Sistema de Vectores con
12     mismo núm. de componentes (sus columnas); o de listas, tuplas
13     o Sistemas de números de misma longitud (sus filas).
14
15 Atributos heredados de la clase Sistema:
16     lista          (list): list con los elementos.
17     n              (int) : número de elementos de la lista.
18     corteSistema (set) : Conjunto de índices donde pintar
19     separaciones visuales
20
21 Atributos heredados de la subclase BlockM:
22     m              (int) : número de filas
23     corteElementos (set) : Conjunto de índices donde pintar
24     separaciones visuales entre filas
25
26 Ejemplos:
27 >>> # Crear una Matrix a partir de una lista de Vectores:
28 >>> a = Vector( [1,2] ); b = Vector( [1,0] ); c = Vector( [9,2] )
29 >>> Matrix( [a,b,c] )
30
31 Matrix([ Vector([1, 2]); Vector([1, 0]); Vector([9, 2]) ])
32 >>> # Crear una Matrix a partir de una lista de listas de números
33 >>> A = Matrix( [ [1,1,9], [2,0,2] ] )
34
35 Matrix([ Vector([1, 2]); Vector([1, 0]); Vector([9, 2]) ])
36 >>> # Crea una Matrix a partir de otra Matrix
37 >>> Matrix( A )
38
39 Matrix([ Vector([1, 2]); Vector([1, 0]); Vector([9, 2]) ])
40
41 """
```

6.1.2. Método de inicialización:

```
1 def __init__(self, data):
2     """Inicializa una Matrix con una
3
4     1) lista, tupla o Sistema de Vectores con el mismo número de
5     elementos,
6
7     2) tupla, lista o Sistema de tuplas, listas o Sistemas de números
8     con el mismo número de elementos,
9
10    3) con otra Matrix.
11
12    """
13
14    super().__init__(data)
15
16    lista = Sistema(data).lista
17
18    if all([(isinstance(elemento, Vector) and len(elemento)==len(lista[0])) for elemento in lista]):
19        self.lista = lista.copy()
20
21    elif lista and not lista[0]:
22        lista = [Vector([])]
23
24    elif Sistema(lista).es_de_composicion_y_longitud_uniforme() and es_ristra(lista[0]) and es_numero(lista[0][0]):
25        self.lista = Matrix([ Vector([elemento[i] for elemento in lista]) for i in range(len(lista[0])) ]).lista
26
27    elif isinstance(data, Matrix):
28        self.lista = data.lista.copy()
29
30    else:
31        raise ValueError("""El argumento debe ser una lista de Vectores o una lista de listas o
32        tuplas con el mismo número de elementos!""")
33
34    super().__init__(data)
35
36    for v in self.lista:
37        v.rpr='columna'
```

6.2. Métodos específicos de la subclase Matrix

6.2.1. Disposición de los elementos de una Matrix

```
1 def es_cuadrada(self):
2     """Indica si es cierto que la Matrix es cuadrada"""
3     return self.m==self.n
4
5 def es_simetrica(self):
6     """Indica si es cierto que la Matrix es simétrica"""
7     return self == ~self
8
9 def es_triangularSup(self):
10    """Indica si es cierto que la Matrix es triangular superior"""
11    return not any(sum([i|self[j] for i in range(j+1,self.m+1)] \
12                      for j in range(1 ,self.n+1)], []))
13
14 def es_triangularInf(self):
15    """Indica si es cierto que la Matrix es triangular inferior"""
16    return (~self).es_triangularSup()
17
18 def es_triangular(self):
19    """Indica si es cierto que la Matrix es triangular inferior"""
20    return self.es_triangularSup() | self.es_triangularInf()
```

```

21
22 def es_diagonal(self):
23     """Indica si es cierto que la Matrix es diagonal"""
24     return self.es_triangularSup() & self.es_triangularInf()

```

6.2.2. Creación de un Vector a partir de la diagonal de una Matrix

Creación de un Vector a partir de la diagonal de una Matrix

```

1 def diag(self):
2     """Crea un Vector a partir de la diagonal de la Matrix"""
3     return Vector([(j|self|j) for j in range(1,min(self.m,self.n)+1)])

```

6.2.3. Traza de una Matrix

Cálculo de la traza

```

1 def traza(self):
2     """Devuelve la traza de la Matrix"""
3     return sum(self.diag())

```

6.2.4. Normalizado de las columnas (o filas) de una matriz

Normalizado de las columnas o filas de una matriz

```

1 def normalizada(self, opcion='Columnas'):
2     if opcion == 'Columnas':
3         if any( vector.es_nulo() for vector in self):
4             raise ValueError('algún vector es nulo')
5         return Matrix([ vector.normalizado() for vector in self])
6     else:
7         return ~(~self.normalizada())

```

6.2.5. Potencias de una Matrix cuadrada

Ahora podemos calcular la n -ésima potencia de una Matrix. Cuando n es un entero positivo; basta multiplicar la Matrix por si misma n veces.

Si n es un entero negativo, entonces necesitamos calcular la inversa de la n -ésima potencia; para ello usará el método de eliminación Gaussiano que se describirá en el Capítulo~??.

Potencia de una Matrix

```

1 def __pow__(self,n):
2     """Calcula la n-ésima potencia de una Matrix"""
3     if not isinstance(n,int): raise ValueError('La potencia no es un entero')
4     if not self.es_cuadrada: raise ValueError('Matrix no es cuadrada')
5
6     M = self if n else I(self.n)
7     for i in range(1,abs(n)):
8         M = M * self
9
10    return M.inversa() if n < 0 else M

```

6.2.6. Determinante mediante la expansión de Laplace

Determinante mediante la expansión de Laplace

```

1 def det(self, sust=[]):
2     """Calculo del determinate mediante la expansión de Laplace"""
3     if not self.es_cuadrada(): raise ValueError('Matrix no cuadrada')
4
5     def cof(self,f,c):
6         """Cofactor de la fila f y columna c"""
7         excl = lambda k: tuple(i for i in range(1,self.m+1) if i!=k)
8         return (-1)**(f+c)*(excl(f)|self|excl(c)).det()

```

```

9
10     if self.m == 1:
11         return 1|self|1
12
13     A = Matrix(self.subs(sust))
14     # expansión por la 1ª columna
15     return sympy.simplify(sum([(f|A|1)*cof(A,f,1)].subs(sust) for f in range(1,A.m+1))))

```

6.2.7. Método de Gram-Schmidt

Método Gram-Schmidt para ortogonalizar un sistema de Vectores de R_n

```

1 def GS(self):
2     """Devuelve una Matrix equivalente cuyas columnas son ortogonales
3
4     Emplea el método de Gram-Schmidt"""
5     A = Matrix(self)
6     for n in range(2,A.n+1):
7         A & T([(-frac((A|n)*(A|j),(A|j)*(A|j)), j, n) \
8             for j in range(1,n) if (A|j).no_es_nulo() ]])
9     return A

```

6.2.8. Otros métodos específicos de las matrices cuadradas que usan eliminación

Rango de una Matrix

Rango de una Matrix

```

1 def rango(self):
2     """Rango de una Matrix"""
3     return [v.no_es_nulo() for v in self.K()].count(True)

```

Comprobación de que una Matrix es singular o de que es invertible

Comprobación de que una Matrix es singular o de que es invertible

```

1 def es_singular(self):
2     if not self.es_cuadrada():
3         raise ValueError('La matriz no es cuadrada')
4     return self.rango()<self.n
5
6 def es_invertible(self):
7     if not self.es_cuadrada():
8         raise ValueError('La matriz no es cuadrada')
9     return self.rango()==self.n

```

Cálculo de la matriz inversa

En la representación se muestra primero la reducción adelante y atrás, luego se escalona y finalmente se normaliza.

Cálculo de la matriz inversa

```

1 def inversa(self, rep=0):
2     """Inversa de Matrix"""
3     if not self.es_cuadrada():
4         raise ValueError('Matrix no cuadrada')
5
6     pasos = self.elim(2).elim(20).elim(10).pasos
7     TrF = pasos[0]
8     TrC = pasos[1]
9     tex = rprElim(self.apila(I(self.n),1),pasos)
10
11     if rep:
12         display(Math(tex))
13

```

```

14     if self.es_singular():
15         raise ValueError('Matrix es singular')
16
17     InvMat = I(self.n) & T(TrC)
18     InvMat.pasos = pasos
19     InvMat.TrF   = TrF
20     InvMat.TrC   = TrC
21     InvMat.tex   = tex
22     return InvMat

```

Cálculo del determinante

```

_____ Cálculo del determinante por eliminación _____
1 def determinante(self, rep = False, sust = []):
2     """Calculo del determinate mediante eliminación"""
3     if not self.es_cuadrada(): raise ValueError('Matrix no cuadrada')
4
5     return Determinante(self.subs(sust),rep).valor

```

Diagonalización por Semejanza

```

_____ Diagonalizando por Semejanza en una matriz por bloques triangulares _____
1 def diagonalizaS(self, espectro, rep=False, sust=[]):
2     <<Texto de ayuda para la clase DiagonalizaS>>
3     D = Matrix(self).copy().subs(sust)
4     <<Comprobaciones previas a la diagonalización>>
5     espectro = [sympy.S(1).subs(sust) for l in espectro]
6     S = I(D.n)
7     Tex = latex( D.apila(S,1) )
8     pasosPrevios = [[],[]]
9     selecc = list(range(1, D.n+1))
10
11     for landa in espectro:
12         m = selecc.pop()
13         <<Restamos lambda*I>>
14         # eliminamos elementos superiores de la columna con elim de izda a dcha
15         TrCol = filtradopasos((slice(None,m)|D|slice(None,m)).elim(20).pasos[1])
16         <<Aplicación de las transformaciones y sus inversas espejo>>
17
18         if m < D.n: # eliminamos elementos inferiores de la columna con los pivotes de la diagonal
19             for i, _ in enumerate(slice(m+1,None)|D|m, m+1):
20                 TrCol = filtradopasos([ T([(-frac(i|D|m, i|D|i), i, m))] )] if i|D|i else [T([])])
21                 <<Aplicación de las transformaciones y sus inversas espejo>>
22             <<Sumamos lambda*I>>
23
24         if rep: display(Math(Tex))
25         D.espectro = espectro[:-1]
26         D.tex = Tex
27         D.S = S
28         D.TrC = pasosPrevios[1]
29         D.TrF = [op.Tinversa().espejo() for op in D.TrC[:-1]]
30         D.pasos = [D.TrF, D.TrC]
31     return D

```

```

_____ Texto de ayuda para la clase DiagonalizaS _____
1 """Diagonaliza por bloques triangulares una Matrix cuadrada
2
3 Encuentra una matriz diagonal semejante mediante trasformaciones de
4 sus columnas y las correspondientes transformaciones inversas espejo
5 de las filas. Requiere una lista de autovalores (espectro), que deben
6 aparecer en dicha lista tantas veces como sus respectivas
7 multiplicidades algebraicas. Los autovalores aparecen en la diagonal
8 principal de la matriz diagonal. El atributo S de dicha matriz
9 diagonal es una matriz cuyas columnas son autovectores de los
10 correspondientes autovalores. """

```

Comprobaciones previas a la diagonalización

```

1 def no_son_autovalores(A, L):
2     no_son=[l for i,l in enumerate(L) if (D-l*I(D.n)).es_invertible()]
3     if no_son:
4         print('los valores de la siguiente lista no son autovalores de la matriz:', no_son)
5         return True
6     else:
7         False
8
9 def espectro_correcto(A, L):
10    x = sympy.symbols('x')
11    monomio = lambda l,x: 1-x
12    p = (A-x*I(A.n)).det()
13    for l in L:
14        p, r = sympy.div(p, monomio(l,x), domain='QQ')
15    return False if p!=1 or r!=0 else True
16
17 if not D.es_cuadrada:
18     raise ValueError('Matrix no es cuadrada')
19
20 if not isinstance(espectro, list):
21     raise ValueError('espectro no es una lista')
22
23 if no_son_autovalores(D, espectro):
24     raise ValueError('quite de la lista los valores que no son autovalores')
25
26 if not len(espectro)==D.n:
27     raise ValueError('el espectro proporcionado tiene un número inadecuado de autovalores')
28
29 if not espectro_correcto(D, espectro):
30     raise ValueError('introduzca una lista correcta de autovalores')

```

Restamos λI

```

1 D = (D-(landa*I(D.n))).subs(sust)
2 Tex += r'\xrightarrow[\boxed{'} + latex(landa) + r'\mathbf{I}]{(-)}' + latex((D.apila(S,1)).subs(sust))

```

Sumamos λI

```

1 D = (D+(landa*I(D.n))).subs(sust)
2 Tex += r'\xrightarrow[\boxed{'} + latex(landa) + r'\mathbf{I}]{(+)}' + latex((D.apila(S,1)).subs(sust))

```

Aplicación de las transformaciones y sus inversas espejo

```

1 if T(TrCol):
2     Tex = rprElim( D.apila(S,1), [[], TrCol], Tex, sust) if TrCol else Tex
3     D = (D & T(TrCol)).subs(sust)
4     S = (S & T(TrCol)).subs(sust)
5     pasosPrevios[1] = pasosPrevios[1] + TrCol
6
7     TrFilas = [ T( [op.Tinversa().espejo() for op in TrCol[::-1]] ) ]
8
9     Tex = rprElim( D.apila(S,1), [TrFilas, []], Tex, sust) if TrCol else Tex
10    D = (T(TrFilas) & D).subs(sust)
11    pasosPrevios[0] = TrFilas + pasosPrevios[0]

```

Diagonalización por Congruencia

Texto de ayuda para la clase DiagonalizaC

```

1 """Diagonaliza por congruencia una Matrix simétrica (evitando dividir)
2
3 Encuentra una matriz diagonal por congruencia empleando una matriz B
4 invertible (evitando fracciones por defecto, si variante=1 entonces no
5 evita las fracciones) por la derecha y su transpuesta por la
6 izquierda. No emplea los autovalores. En general los elementos en la
7 diagonal principal no son autovalores, pero hay tantos elementos
8 positivos en la diagonal como autovalores positivos, tantos negativos
9 como autovalores negativos, y tantos ceros como autovalores nulos.
10

```

```

11  """
12
13  _____ Diagonalizando por Congruencia una matriz simétrica _____
14  1 def diagonalizaC(self, rep=False, sust=[], variante=0):
15      <<Texto de ayuda para la clase DiagonalizaC>>
16      <<Definición del método auxiliar BuscaPrimerNoNuloEnLaDiagonal>>
17      if not variante in {0,1}:
18          raise ValueError('La variante debe ser 0 ó 1')
19
20      D = Matrix(self).copy().subs(sust)
21
22      if not D.es_simetrica():
23          raise ValueError('La matriz no es simétrica')
24
25      pasosPrevios = [ [], [] ]
26
27      for i in range(1, D.n):
28          p = BuscaPrimerNoNuloEnLaDiagonal(D, i)
29          j = [k for k,col in enumerate(D[slice(i,None)],i) if (i|col and not k|col)]
30
31          if not (i|D|i):
32              if p:
33                  Tr = T( {i, p} )
34                  p = i
35                  <<Aplicación de las transformaciones a las columnas y a las filas>>
36              elif j:
37                  Tr = T( (1, j[0], i) )
38                  p = i
39                  <<Aplicación de las transformaciones a las columnas y a las filas>>
40              if p:
41                  Tr = T(((i)|D).elim(variante).pasos[1])
42                  <<Aplicación de las transformaciones a las columnas y a las filas>>
43
44      D.pasos = pasosPrevios
45      D.tex = rprElimCF(Matrix(self).subs(sust), D.pasos, [], sust)
46      D.TrF = filtradopasos(T(D.pasos[0]))
47      D.TrC = filtradopasos(T(D.pasos[1]))
48      D.B = I(self.n) & D.TrC
49
50      if rep:
51          display(Math(D.tex))
52
53      return D

```

```

1  _____ Definición del método auxiliar BuscaPrimerNoNuloEnLaDiagonal _____
2  1 def BuscaPrimerNoNuloEnLaDiagonal(self, i=1):
3      """Indica el índice de la primera componente no nula de a diagonal
4      desde de la posición i en adelante. Si son todas nulas devuelve 0
5
6      """
7
8      d = (slice(i,None)|self|slice(i,None)).diag().sis()
9      return next((pos for pos, x in enumerate(d) if x), -i) + i

```

```

1  _____ Aplicación de las transformaciones a las columnas y a las filas _____
2  1 pasos = [ filtradopasos([-Tr]), filtradopasos([Tr]) ]
3  2 pasosPrevios[0] = pasos[0] + pasosPrevios[0]
4  3 pasosPrevios[1] = pasosPrevios[1] + pasos[1]
5  4 D = (T(pasos[0]) & D & T(pasos[1])).subs(sust)

```

6.2.9. Diagonalización ortogonal de una matriz simétrica

```

1  _____ Diagonalizando Ortogonalmente una matriz simétrica _____
2  1 def diagonalizaO(self, espectro, sust=[]):
3      <<Texto de ayuda para la clase DiagonalizaO>>
4      D = Matrix(self).copy().subs(sust)

```

```

4
5     if not D.es_simetrica():
6         raise ValueError('La matriz no es simétrica')
7
8     <<Comprobaciones previas a la diagonalización>>
9     <<Método auxiliar para creación de una base ortonormal donde \Vect{q} es el último vector>>
10
11     espectro      = [sympy.S(l).subs(sust) for l in espectro]
12     S              = I(D.n)
13     Tex            = latex( D.apila(S,1) )
14     pasosPrevios   = [[],[]]
15     selecc         = list(range(1,D.n+1))
16
17     for l in espectro:
18         D          = (D - l*I(D.n)).subs(sust)
19         k           = len(selecc)
20         nmenosk     = (D.n)-k
21         m           = selecc.pop()
22         TrCol       = filtradopasos((slice(None,m)|D|slice(None,m)).elim(20, False, sust).pasos[1])
23         D            = (D + l*I(D.n)).subs(sust)
24
25
26         q = ( (I(k) & T(TrCol)).subs(sust) )|0
27         q = (sympy.sqrt(q*q)) * q
28
29         Q = BaseOrtNor(q).concatena(M0(k,nmenosk)).apila( \
30             M0(nmenosk,k).concatena(I(nmenosk))) if nmenosk else BaseOrtNor(q)
31
32         S = (S*Q).subs(sust)
33         D = (~Q*D*Q).subs(sust)
34
35     D.Q = S
36     D.espectro = espectro[:-1]
37     return D

```

____ Texto de ayuda para la clase Diagonaliza0 ____

```

1  """Diagonaliza ortogonalmente una Matriz simétrica
2
3  Encuentra una matriz diagonal por semejanza empleando una matriz
4  ortogonal Q a la derecha y su inversa (transpuesta) por la izquierda.
5  Requiere una lista de autovalores (espectro), que deben aparecer
6  tantas veces como sus respectivas multiplicidades algebraicas. Los
7  autovalores aparecen en la diagonal principal de la matriz
8  diagonal. El atributo Q de la matriz diagonal es la matriz ortogonal
9  cuyas columnas son autovectores de los correspondientes autovalores.
10
11  """

```

____ Método auxiliar para creación de una base ortonormal donde q es el último vector ____

```

1  def BaseOrtNor(q):
2      "Crea una base ortonormal cuyo último vector es 'q'"
3      if not isinstance(q,Vector): raise ValueError('El argumento debe ser un Vector')
4      M = Matrix([q]).concatena(I(q.n)).GS()
5      l = [ j for j, v in enumerate(M, 1) if v.no_es_nulo() ]
6      l = l[1:len(l)]+[1[0]]
7      return (M[l]).normalizada()

```

6.3. Representación de la clase Matrix

____ Método de representación repr de la subclase Matrix ____

```

1  def __repr__(self):
2      """ Muestra una Matriz en su representación Python repr """
3      return 'Matrix(' + repr(self.lista) + ')'

```

6.4. La clase Matrix completa

```
1  class Matrix(BlockM):
2      <<Texto de ayuda de la clase Matrix>>
3      <<Inicialización de la subclase Matrix>>
4      <<Información sobre la disposición de los elementos de una Matrix>>
5      <<Creación de un Vector a partir de la diagonal de una Matrix>>
6      <<Cálculo de la traza>>
7      <<Normalizado de las columnas o filas de una matriz>>
8      <<Potencia de una Matrix>>
9      <<Determinante mediante la expansión de Laplace>>
10     <<Método Gram-Schmidt para ortogonalizar un sistema de Vectores de Rn>>
11     <<Rango de una Matrix>>
12     <<Comprobación de que una Matrix es singular o de que es invertible>>
13     <<Cálculo de la matriz inversa>>
14     <<Cálculo del determinante por eliminación>>
15     <<Diagonalizando por Semejanza en una matriz por bloques triangulares>>
16     <<Diagonalizando por Congruencia una matriz simétrica>>
17     <<Diagonalizando Ortogonalmente una matriz simétrica>>
18     <<Método de representación repr de la subclase Matrix>>
```

Capítulo 7

Las subclases M0, M1 e I

Definición de las subclases M0

```
1 class M0(Matrix):
2     def __init__(self, m, n=None):
3         """ Inicializa una matriz nula de orden m por n """
4         n = m if n is None else n
5
6         super().__init__( [V0(m)]*n )
7         self.__class__ = Matrix
8
9 class M1(Matrix):
10     def __init__(self, m, n=None):
11         """ Inicializa una matriz nula de orden m por n """
12         n = m if n is None else n
13
14         super().__init__( [V1(m)]*n )
15         self.__class__ = Matrix
16
17 class I(Matrix):
18     def __init__(self, n):
19         """ Inicializa la matriz identidad de tamaño n """
20         super().__init__( [[(i==j)*1 for i in range(n)] for j in range(n)] )
21         self.__class__ = Matrix
```

Capítulo 8

Las subclases de sistemas simbólicos

```
1  class SistemaSimbol(BlockV):
2      def __init__(self, arg, char=' ', rpr='columna'):
3          """Inicializa un Sistema Simbólico con una lista, tupla o Sistema"""
4          self.sistema = arg if isinstance(arg, Sistema) else Sistema(CreaLista(arg))
5          letra, simbolo = self.simbolos(char)
6          self.lista = [self.sistema, simbolo, letra]
7
8          self.n = len(self.sistema)
9          self.corteSistema = set()
10         self.rpr = rpr
11
12     def simbolos(self, char):
13         letra = sympy.Symbol('0', zero=True) if self.es_nulo() else sympy.Symbol(char.upper())
14         simbolo_latex = sympy.Symbol(r'\mathsf{0}', zero=True) if self.es_nulo() else sympy.Symbol(r'\mathsf{' + str(letra) + '}')
15         return letra, simbolo_latex
16
17     def es_nulo(self):
18         return self.sistema.es_nulo()
19
20     def copy(self):
21         """ Genera una copia de un SistemaSimbol """
22         return type(self)(self.lista[0], str(self.lista[2]))
23
24     def __str__(self):
25         """ Muestra un SistemaSimbol en su representación python """
26         return str(self.lista[2])
27
28     def __repr__(self):
29         """ Muestra un SistemaSimbol en su representación python """
30         return 'SistemaSimbol(' + repr(self.lista[0]) + ', ' + repr(self.lista[2]) + ')'
31
32     def latex(self):
33         """ Construye el comando LaTeX para representar un SistemaSimbol """
34         return latex(self.lista[1])
35
36     def _repr_latex_(self):
37         """ Representación para el entorno jupyter en Emacs """
38         return '$'+self.latex()+'$'
39
40     def _repr_html_(self):
41         """ Construye la representación para el entorno jupyter notebook """
42         return html(self.latex())
43
44     def elim(self, variante=0, rep=False, sust=[], repsust=False):
45         return self.sistema.elim(variante, rep, sust, repsust)
46
```

```

47 class MatrixSimbol(SistemaSimbol):
48     def __init__(self, arg, char=' ', rpr='columna'):
49         self.sistema = arg if isinstance(arg, Matrix) else BlockM(CreaLista(arg))
50         letra, simbolo = self.simbolos(char)
51         self.lista = [self.sistema, simbolo, letra]
52
53         self.n = len(self.sistema)
54         self.corteSistema = set()
55         self.rpr = rpr
56
57     def simbolos(self, char):
58         letra = sympy.Symbol('0', zero=True) if self.es_nulo() else sympy.Symbol(char.upper())
59         simbolo_latex = sympy.Symbol(r'\boldsymbol{\mathsf{0}}', zero=True) if self.es_nulo() else sympy.Symbol(r'\boldsymbol{'
60         return letra, simbolo_latex
61
62     def __repr__(self):
63         """ Muestra un MatrixSimbol en su representación python """
64         return 'MatrixSimbol(' + repr(self.lista[0]) + ', ' + repr(self.lista[2]) + ')"'
65
66     def latex(self):
67         """ Construye el comando LaTeX para representar un MatrixSimbol """
68         return latex(self.lista[1])
69
70 class VectorSimbol(SistemaSimbol):
71     def __init__(self, arg, char=' ', rpr='columna'):
72         self.sistema = arg if isinstance(arg, Vector) else BlockV(CreaLista(arg))
73         letra, simbolo = self.simbolos(char)
74         self.lista = [self.sistema, simbolo, letra]
75
76         self.n = len(self.sistema)
77         self.corteSistema = set()
78         self.rpr = rpr
79
80     def simbolos(self, char):
81         letra = sympy.Symbol('0', zero=True) if self.es_nulo() else sympy.Symbol(char.lower())
82         simbolo_latex = sympy.Symbol(r'\boldsymbol{0}', zero=True) if self.es_nulo() else sympy.Symbol(r'\boldsymbol{' + str(letra)
83         return letra, simbolo_latex
84
85     def __repr__(self):
86         """ Muestra un VectorSimbol en su representación python """
87         return 'VectorSimbol(' + repr(self.lista[0]) + ', ' + repr(self.lista[2]) + ')"'
88
89     def latex(self):
90         """ Construye el comando LaTeX para representar un VectorSimbol """
91         return latex(self.lista[1])

```

Capítulo 9

Sistemas obtenidos tras algunos procedimientos específicos de eliminación

Por comodidad y compatibilidad con la versión anterior de NAcAL creamos las siguientes subclases de Sistema que resultan tras aplicar ciertos pasos de eliminación.

9.1. Subclases de Sistema: Elim, ElimG, ElimGJ, ElimGF y ElimGJF

Son una forma alternativa de llamar a los métodos `.K()`, `.L()`, `.R()`, `.U()` y `.UR()`. Los dos últimos, `.U()` y `.UR()` (es decir, `ElimGF` y `ElimGJF`) solo tienen sentido si el Sistema es un arreglo rectangular y cada uno de sus componentes es de composición uniforme, es decir, es necesario que las operaciones de eliminación estén definidas entre los elementos de cada componente del sistema. Es el método correspondiente a la eliminación por filas en matrices.

```
1 class Elim(Sistema):
2     def __init__(self, sistema, rep=0, sust=[], repsust=0):
3         """Devuelve una forma pre-escalada de un sistema
4
5         operando con sus elementos (y evitando operar con
6         fracciones). Si rep es no nulo, se muestran en Jupyter los
7         pasos dados
8
9         """
10        self.__dict__.update(sistema.K(rep, sust, repsust).__dict__)
11        self.__class__ = type(sistema)
```

```
1 class ElimG(Sistema):
2     def __init__(self, sistema, rep=0, sust=[], repsust=0):
3         """Devuelve una forma escalada de un sistema
4
5         operando con sus elementos (y evitando operar con
6         fracciones). Si rep es no nulo, se muestran en Jupyter los
7         pasos dados
8
9         """
10        self.__dict__.update(sistema.L(rep, sust, repsust).__dict__)
11        self.__class__ = type(sistema)
```

```

1 class ElimGJ(Sistema):
2     def __init__(self, sistema, rep=0, sust=[], repsust=0):
3         """Devuelve la forma escalonada reducida de un sistema
4
5         operando con sus elementos (y evitando operar con
6         fracciones). Si rep es no nulo, se muestran en Jupyter los
7         pasos dados
8
9         """
10        self.__dict__.update(sistema.R(rep, sust, repsust).__dict__)
11        self.__class__ = type(sistema)

```

```

1 class ElimF(Sistema):
2     def __init__(self, sistema, rep=0, sust=[], repsust=0):
3         """Devuelve la forma escalonada por filas (si es posible)
4
5         y evitando operar con fracciones. Si rep es no nulo, se
6         muestran en Jupyter los pasos dados
7
8         """
9        self.__dict__.update(sistema.elim(4, rep, sust, repsust).__dict__)
10        self.__class__ = type(sistema)

```

```

1 class ElimGF(Sistema):
2     def __init__(self, sistema, rep=0, sust=[], repsust=0):
3         """Devuelve la forma escalonada por filas (si es posible)
4
5         y evitando operar con fracciones. Si rep es no nulo, se
6         muestran en Jupyter los pasos dados
7
8         """
9        self.__dict__.update(sistema.U(rep, sust, repsust).__dict__)
10        self.__class__ = type(sistema)

```

```

1 class ElimGJF(Sistema):
2     def __init__(self, sistema, rep=0, sust=[], repsust=0):
3         """Devuelve la forma escalonada reducida por filas (si es posible)
4
5         y evitando operar con fracciones. Si rep es no nulo, se
6         muestran en Jupyter los pasos dados
7
8         """
9        self.__dict__.update(sistema.UR(rep, sust, repsust).__dict__)
10        self.__class__ = type(sistema)

```

9.2. Subclases de Matrix: InvMat, InvMatF e InvMatFC

Son una forma alternativa de llamar al método `.inversa()`,

```

1 class InvMat(Sistema):
2     def __init__(self, sistema, rep=0, sust=[], repsust=0):
3         """Devuelve la matriz inversa y los pasos dados sobre las columnas
4
5         y evitando operar con fracciones. Si rep es no nulo, se
6         muestran en Jupyter los pasos dados
7
8         """
9        <<Método que define los atributos .tex y .pasos y representa los pasos si se pide>>
10        A = sistema.subs(sust).inversa()
11        A.tex, A.pasos = texYpasos(sistema.apila(I(sistema.n),1), A.pasos, rep, sust, repsust)

```

```

12     A.TrF = A.pasos[0]
13     A.TrC = A.pasos[1]
14     self.__dict__.update(A.__dict__)
15     self.__class__ = type(sistema)

```

```

1 class InvMatF(Sistema):
2     def __init__(self, sistema, rep=0, sust=[], repsust=0):
3         """Devuelve la matriz inversa y los pasos dados sobre las filas
4
5             y evitando operar con fracciones. Si rep es no nulo, se
6             muestran en Jupyter los pasos dados
7
8             """
9         <<Método que define los atributos .tex y .pasos y representa los pasos si se pide>>
10
11         if not sistema.es_cuadrada():
12             raise ValueError('Matrix no cuadrada')
13
14         pasos = sistema.elim(26).elim(26).elim(14).pasos
15         A = T(pasos[0]) & I(sistema.n)
16         A.tex, A.pasos = texYpasos(sistema.concatena(I(sistema.n),1), pasos, rep, sust, repsust)
17         A.TrF = A.pasos[0]
18         A.TrC = A.pasos[1]
19         self.__dict__.update(A.__dict__)
20         self.__class__ = type(sistema)

```

```

1 class InvMatFC(Sistema):
2     def __init__(self, sistema, rep=0, sust=[], repsust=0):
3         """Devuelve la matriz inversa y los pasos dados sobre las filas y columnas
4
5             y evitando operar con fracciones. Si rep es no nulo, se
6             muestran en Jupyter los pasos dados
7
8             """
9         <<Método que define los atributos .tex y .pasos y representa los pasos si se pide>>
10
11         if not sistema.es_cuadrada():
12             raise ValueError('Matrix no cuadrada')
13
14         pasos = sistema.elim(24).elim(10).pasos
15         A = sistema.copy()
16         nan = sympy.symbols('\ ' )
17         dummyMatrix = M1(A.n)*nan
18         A.tex, A.pasos = texYpasos(A.concatena(I(A.n),1).apila(I(A.n).concatena(dummyMatrix,1),1), pasos, rep, sust, repsust)
19         A.TrF = A.pasos[0]
20         A.TrC = A.pasos[1]
21         A.F = T(A.TrF) & I(A.n)
22         A.C = I(A.n) & T(A.TrC)
23         A.lista = (A.C*A.F).lista
24         self.__dict__.update(A.__dict__)
25         self.__class__ = type(sistema)

```

9.3. Subclases de Matrix: DiagonalizaS, Diagonaliza0 y DiagonalizaC

Es una forma alternativa de llamar al método .diagonalizaS(),

```

1 class DiagonalizaS(Matrix):
2     def __init__(self, sistema, espectro, rep=0, repType=0):
3         <<Texto de ayuda para la clase DiagonalizaS>>
4         <<Método que define los atributos .tex y .pasos y representa los pasos si se pide>>
5         A = Matrix(sistema)
6         D = A.diagonalizaS(espectro)

```

```

7
8     if rep:
9         nan = sympy.symbols('\ ' )
10        dummyMatrix = M1(A.n)*nan
11        if repType==1:
12            nan = sympy.symbols('\ ' )
13            D.tex = rprElimCF(A.apila(I(A.n),1), D.pasos)
14        elif repType==2:
15            nan = sympy.symbols('\ ' )
16            D.tex = rprElimCF(A.apila(I(A.n),1).concatena(I(A.m).apila(dummyMatrix,1),1), D.pasos)
17        elif repType==3:
18            nan = sympy.symbols('\ ' )
19            D.tex = rprElimFyC(A.apila(I(A.n),1), D.pasos)
20        elif repType==4:
21            nan = sympy.symbols('\ ' )
22            D.tex = rprElimFyC(A.apila(I(A.n),1).concatena(I(A.m).apila(dummyMatrix,1),1), D.pasos)
23
24        display(Math(D.tex))
25
26    self.__dict__.update(D.__dict__)
27    self.__class__ = type(sistema)

```

Es una forma alternativa de llamar al método `.diagonaliza0()`,

```

1 class Diagonaliza0(Matrix):
2     def __init__(self, sistema, espectro):
3         <<Texto de ayuda para la clase Diagonaliza0>>
4         A = Matrix(sistema)
5         D = A.diagonaliza0(espectro)
6
7         self.__dict__.update(D.__dict__)
8         self.__class__ = type(sistema)

```

Es una forma alternativa de llamar al método `.diagonalizaC()`,

```

1 class DiagonalizaC(Matrix):
2     def __init__(self, sistema, rep=False, sust=[], variante=0):
3         <<Texto de ayuda para la clase DiagonalizaC>>
4         A = Matrix(sistema)
5         D = A.diagonalizaC(rep, sust, variante)
6
7         self.__dict__.update(D.__dict__)
8         self.__class__ = type(sistema)

```

Parte II

La clase T (transformación elemental)

Capítulo 10

La clase T

10.1. Introducción

Vamos a implementar las transformaciones de un sistema \mathbf{A} mediante secuencias de *transformaciones elementales de Tipo I y II e intercambios*. Para que funcionen las *transformaciones elementales* debe estar definida tanto la suma de los elementos del sistema como el producto de los elementos por un escalar:

Tipo I: $\mathbf{A}_{\tau_{[(\lambda)i+j]}}$ suma λ veces el elemento i al elemento j ($i \neq j$);

Tipo II: $\mathbf{A}_{\tau_{[(\lambda)i]}}$ multiplica el elemento i por $\lambda \neq 0$.

Intercambio: $\mathbf{A}_{\tau_{[i \rightleftharpoons j]}}$ intercambia los elementos i y j .

Comentario sobre la notación.

Cualquier transformación elemental de un sistema se puede lograr con el producto del sistema por una matriz elemental, y la notación empleada busca parecerse a la notación del producto matricial (por ello, para ilustrar lo que sigue usaremos como ejemplo de sistema una matriz \mathbf{A}):

Al poner la *abreviatura* “ τ ” de la transformación elemental a derecha es como si multiplicáramos la matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ por la derecha por la correspondiente matriz elemental

$$\mathbf{A}_{\tau} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau}) \quad \text{donde la matriz } \mathbf{I} \text{ es de orden } n.$$

De manera similar, al poner la *abreviatura* “ τ ” de la transformación elemental a izquierda, es como si multiplicáramos la matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ por la izquierda por la correspondiente matriz elemental

$${}_{\tau}\mathbf{A} = ({}_{\tau}\mathbf{I})\mathbf{A} \quad \text{donde la matriz } \mathbf{I} \text{ es de orden } m.$$

Con ello se gana, entre otras cosas, que la notación sea asociativa. Pero si se puede hacer con matrices elementales. . . ¿qué ventaja tiene introducir en el discurso las transformaciones elementales en lugar de utilizar simplemente matrices elementales?

Fíjese que una matriz cuadrada es un objeto muy “pesado”... una matriz de orden n posee n^2 coeficientes. Afortunadamente una matriz elemental es casi una matriz identidad salvo por el cambio de uno de sus elementos. Por tanto, para describir completamente una matriz elemental es necesario indicar su orden n y qué componente ha cambiado.¹ Por este motivo...

La ventaja de las transformaciones elementales es que omiten el orden n .

pues solo necesitan indicar el índice de los elementos que intervienen en la transformación.

Traducción de las transformaciones elementales a Python

Vamos a definir la siguiente traducción de esta notación a Python:

Curso	Python	Curso	Python
$\tau_{[i \Leftarrow j]} \mathbf{A}$	$T(\{i, j\}) \& \mathbf{A}$	$\mathbf{A} \tau_{[i \Leftarrow j]}$	$\mathbf{A} \& T(\{i, j\})$
$\tau_{[(a)j]} \mathbf{A}$	$T(a, j) \& \mathbf{A}$	$\mathbf{A} \tau_{[(a)j]}$	$\mathbf{A} \& T(a, j)$
$\tau_{[(a)i+j]} \mathbf{A}$	$T(a, i, j) \& \mathbf{A}$	$\mathbf{A} \tau_{[(a)i+j]}$	$\mathbf{A} \& T(a, i, j)$

El código Python de la columna izquierda, donde la transformación se aplica por la izquierda, solo será aplicable a los **BlockM** (solo ellos tienen “filas”). El código Python de la columna derecha será aplicable a los **Sistemas**, pues opera con son elementos.

Vemos que:

1. Representar el intercambio con un conjunto, permite admitir la repetición del índice, pues $\{i, i\} = \{i\}$, denotando un caso especial en el que la matriz no cambia (esto simplificará el método de Gauss).
2. Tanto para los pares (a, i) como para las ternas (a, i, j) :
 - La columna (fila) que cambia es la del índice que aparece en última posición.
 - El escalar de la primera posición multiplica a la columna (fila) correspondiente al índice que le sigue.

Empleando listas de abreviaturas extendemos la notación para expresar secuencias de transformaciones elementales, es decir, $\tau_1 \cdots \tau_k$. Así logramos la siguiente equivalencia entre expresiones

$$T(t_1) \& T(t_2) \& \cdots \& T(t_k) = T([t_1, t_2, \dots, t_k])$$

De esta manera

$$\mathbf{A}_{\tau_1 \cdots \tau_k} : \quad \mathbf{A} \& T(t_1) \& T(t_2) \& \cdots \& T(t_k) = \mathbf{A} \& T([t_1, t_2, \dots, t_k])$$

$$\tau_1 \cdots \tau_k \mathbf{A} : \quad T(t_1) \& T(t_2) \& \cdots \& T(t_k) \& \mathbf{A} = T([t_1, t_2, \dots, t_k]) \& \mathbf{A}.$$

¹Fíjese que la notación usada en el libro del curso de Álgebra Lineal para las matrices elementales no las describe completamente; se deja al lector la deducción de cuál es el orden de la matriz elemental necesario para poder realizar el producto $\mathbf{A}(\mathbf{I}_\tau)$ o el producto $(\tau \mathbf{I})\mathbf{A}$.

Así, usando abreviaturas y si \mathbf{A} es de orden $m \times n$, el primer caso es equivalente a escribir el producto de matrices

$$\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1})(\mathbf{I}_{\tau_2}) \cdots (\mathbf{I}_{\tau_k}) \quad \text{donde } \mathbf{I} \text{ es de orden } n;$$

y el segundo caso es equivalente a escribir el producto de matrices

$${}_{\tau_1 \dots \tau_k} \mathbf{A} = ({}_{\tau_1} \mathbf{I})({}_{\tau_2} \mathbf{I}) \cdots ({}_{\tau_k} \mathbf{I}) \mathbf{A} \quad \text{donde } \mathbf{I} \text{ es de orden } m...$$

¡Pero gracias a las abreviaturas de las transformaciones elementales no es necesario indicar el orden (el número de filas y columnas) de las matrices elementales en ningún momento!

Necesidad de creación de una nueva clase

Python ejecuta las órdenes de izquierda a derecha. Fijámonos en la expresión

$$\mathbf{A} \ \& \ T(t_1) \ \& \ T(t_2) \ \& \cdots \ \& \ T(t_k)$$

podríamos pensar que podemos implementar la transformación elemental como un método de la clase **Sistema**. Así, al definir el método `__and__` por la derecha del **Sistema** podemos indicar que $\mathbf{A} \ \& \ T(t_1)$ es una nueva matriz con las columnas modificadas. Python no tiene problema en ejecutar $\mathbf{A} \ \& \ T(t_1) \ \& \ T(t_2) \ \& \cdots \ \& \ T(t_k)$ pues ejecutar de izquierda a derecha, es lo mismo que ejecutar $\left[\left[\left[\mathbf{A} \ \& \ T(t_1) \right] \ \& \ T(t_2) \right] \ \& \cdots \right] \ \& \ T(t_k)$ donde la expresión dentro de cada corchete es una **Matrix**, por lo que las operaciones están bien definidas. La dificultad aparece con

$$T(t_1) \ \& \ T(t_2) \ \& \cdots \ \& \ T(t_k) \ \& \ \mathbf{A}$$

Lo primero que Python tratara de ejecutar es $T(t_1) \ \& \ T(t_2)$, pero ni $T(t_1)$ ni $T(t_2)$ son matrices, por lo que esto no puede ser programado como un método de la subclase **BlockM** (recuerde que al actuar por la izquierda se opera con las filas, y solo los **BlockMs** tiene definidas las filas).

Así pues, definiremos una nueva clase que almacene las *abreviaturas* t_i (“ τ_i ”) de las operaciones elementales, de manera que podamos definir $T(t_i) \ \& \ T(t_j)$, como un método que “compone” dos transformaciones elementales (“ $\tau_i \tau_j$ ”) para formar una secuencia de abreviaturas (que en última instancia será una secuencia de operaciones a ejecutar sobre un **Sistema**).

El nuevo objeto, **T** (“transformación elemental”), nos permitirá encadenar transformaciones elementales (es decir, almacenar una lista de abreviaturas). El siguiente código inicializa la clase. El atributo `t` almacenará la abreviatura (o lista de abreviaturas) dada al instanciar **T** o bien creará la lista de abreviaturas a partir de otra **T** (o lista de objetos **T**) empleada para instanciar.

10.2. Implementación de las transformaciones elementales

10.2.1. Texto de ayuda

```

1  """Clase para las transformaciones elementales
2
3  T ("Transformación elemental") guarda en su atributo 'abreviaturas'
4  una abreviatura (o una secuencia de abreviaturas) de transformaciones
5  elementales. El método __and__ actúa sobre otra T para crear una T que
6  es composición de transformaciones elementales (una la lista de

```

```

7  abreviaturas), o bien actúa sobre una BlockM (para transformar sus
8  filas).
9
10 Una T (transformación elemental) se puede instanciar indicando las
11 operaciones mediante un número arbitrario de
12
13 1. abreviaturas(set): {índice, índice}. Abrev. de un intercambio de
14     entre los elementos correspondientes a dichos
15     índices
16
17     (tuple): (escalar, índice). Abrev. transf. Tipo II que
18     multiplica el elemento correspondiente al
19     índice por el escalar
20
21     (escalar, índice1, índice2). Abrev.
22     transformación Tipo I que suma al elemento
23     correspondiente al índice2 el elemento
24     correspondiente al índice1 multiplicado por
25     el escalar
26
27 2. transf. Elems.(T): Genera otra T cuyo atributo .abreviaturas es
28     una copia del atributo .abreviaturas de la
29     transformación dada
30
31 3.     listas(list): Con cualesquiera de los anteriores objetos o
32     con sublistas formadas con los anteriores
33     objetos. Genera una T cuyo atributo
34     .abreviaturas es una concatenación de todas las
35     abreviaturas
36
37
38 Atributos:
39
40     abreviaturas (set): lista con las abreviaturas de todas las
41     transformaciones
42
43     rpr (str): Si rpr='v' (valor por defecto) se muestra la
44     lista de breviaturas en vertical. Con cualquier
45     otro valor se muestran en horizontal.
46
47 Ejemplos:
48 >>> # Intercambio entre elementos
49 >>> T( {1,2} )
50
51 >>> # Transformación Tipo II (multiplica por 5 el segundo elemento)
52 >>> T( (5,2) )
53
54 >>> # Transformación Tipo I (resta el tercer elemento al primero)
55 >>> T( (-1,3,1) )
56
57 >>> # Secuencia de las tres transformaciones anteriores
58 >>> T( [{1,2}, (5,2), (-1,3,1)] )
59
60 >>> # T de una T
61 >>> T( T( (5,2) ) )
62
63 T( (5,2) )
64
65 >>> # T de una lista de T's
66 >>> T( [T([(-8, 2), (2, 1, 2)]), T([(-8, 3), (3, 1, 3)]) ] )
67
68 T( [(-8, 2), (2, 1, 2), (-8, 3), (3, 1, 3)] )
69
70 """

```

10.2.2. Método de inicialización

```
1 def __init__(self, *args, rpr='v'):
```

```
2     """Inicializa una transformación elemental"""
```

```
3     <<Verificación de que las .abreviaturas corresponden a transformaciones elementales o intercambios>>
```

```
4     <<Simplificacion de expresiones simbólicas en las abreviaturas>>
```

```
5     def CreaListaAbreviaturas(arg):
```

```
6         if isinstance(arg, (tuple, set)):
```

```
7             verificacion(arg)
```

```
8             arg = simplificacionSimbolica(arg)
```

```
9             return [arg]
```

```
10        if isinstance(arg, list):
```

```
11            return [abrv for item in arg for abrv in CreaListaAbreviaturas(item)]
```

```
12        if isinstance(arg, T):
```

```
13            return CreaListaAbreviaturas(arg.abreviaturas)
```

```
14
```

```
15    def concatenaTodasLasAbreviaturasDeLos(args):
```

```
16        return [abrv for item in args for abrv in CreaListaAbreviaturas(item)]
```

```
17
```

```
18    self.abreviaturas = concatenaTodasLasAbreviaturasDeLos(args)
```

```
19    self.rpr = rpr
```

Verificación de que las abreviaturas corresponden a transformaciones elementales o intercambios

Un transformación elemental no puede multiplicar ningún elemento por cero, ni sumar a un elemento un múltiplo de si mismo. Además, un intercambio solo tiene sentido a lo sumo entre dos elementos.

```
1 def verificacion(abrv):
```

```
2     if isinstance(abrv,tuple) and (len(abrv) == 2) and abrv[0]==0:
```

```
3         raise ValueError('T( (0, i) ) no es una transformación elemental')
```

```
4     if isinstance(abrv,tuple) and (len(abrv) == 3) and (abrv[1] == abrv[2]):
```

```
5         raise ValueError('T( (a, i, i) ) no es una transformación elemental')
```

```
6     if isinstance(abrv,set) and len(abrv)>2:
```

```
7         raise ValueError ('El conjunto debe tener uno o dos índices para ser un intercambio')
```

Simplificacion de expresiones simbólicas en las abreviaturas

```
1 def simplificacionSimbolica(arg):
```

```
2     if isinstance(arg,tuple) and (len(arg) == 2):
```

```
3         return (sympy.factor(arg[0]), arg[1],)
```

```
4     elif isinstance(arg,tuple) and (len(arg) == 3):
```

```
5         return (sympy.factor(arg[0]), arg[1], arg[2],)
```

```
6     else:
```

```
7         return arg
```

10.3. Composición de Transformaciones o transformación de un Sistema por la izquierda

10.3.1. Texto de ayuda

```
1 """Texto de ayuda para la composición de Transformaciones Elementales
```

```
2 """Composición de transformaciones elementales (o transformación filas)
```

```
3
```

```
4 Crea una T con una lista de abreviaturas de transformaciones elementales
```

```
5 (o llama al método que modifica las filas de una Matriz)
```

```
6
```

```
7 Parámetros:
```

```

7      (T): Crea la abreviatura de la composición de transformaciones, es
8          decir, una lista de abreviaturas
9      (Matrix): Llama al método de la clase Matrix que modifica sus filas
10
11  Ejemplos:
12  >>> # Composición de dos Transformaciones elementales
13  >>> T( {1, 2} ) & T( (2, 4) )
14
15  T( [{1,2}, (2,4)] )
16
17  >>> # Composición de dos Transformaciones elementales
18  >>> T( {1, 2} ) & T( [(2, 4), (2, 1), {3, 1}] )
19
20  T( [{1, 2}, (2, 4), (2, 1), {3, 1}] )
21
22  >>> # Transformación de las filas de una Matrix
23  >>> T( [{1,2}, (4,2)] ) & A # multiplica por 4 la segunda fila de A y
24                              # luego intercambia las dos primeras filas
25  """

```

10.3.2. Implementación

Describimos la composición de transformaciones $T(t_1) \& T(t_2)$ creando una lista de abreviaturas $[\tau_1, \tau_2]$ (mediante la concatenación de listas)². Si `other` es un `BlockV` o una `BlockM`, se llama al método `__rand__` de la clase `other` (que transformará los elementos del vector en el primer caso, y las filas de la matriz en el segundo; y que veremos más adelante).

```

1  _____ Composición de Transformaciones Elementales o aplicación sobre las filas de una Matrix _____
2  def __and__(self, other):
3      <<Texto de ayuda para la composición de Transformaciones Elementales>>
4      if isinstance(other, T):
5          return T(self.abreviaturas+other.abreviaturas, rpr=self.rpr)
6
7      if isinstance(other, Sistema):
8          return other.__rand__(self)

```

10.4. Transposición de transformaciones elementales

Puesto que $\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} = (\mathbf{I}_{\tau_1}) \cdots (\mathbf{I}_{\tau_k})$ y puesto que el producto de matrices es asociativo, deducimos que la transpuesta de $\mathbf{I}_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k}$ es

$$(\mathbf{I}_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k})^T = ((\mathbf{I}_{\tau_1})(\mathbf{I}_{\tau_2}) \cdots (\mathbf{I}_{\tau_k}))^T = (\mathbf{I}_{\tau_k})^T \cdots (\mathbf{I}_{\tau_2})^T (\mathbf{I}_{\tau_1})^T = (\tau_k \mathbf{I}) \cdots (\tau_2 \mathbf{I})(\tau_1 \mathbf{I}) = \tau_k \cdots \tau_2 \tau_1 \mathbf{I}$$

Nótese cómo al transponer no solo cambiamos de lado los subíndices, sino también invertimos el orden de la secuencia de transformaciones (de la misma manera que también cambia el orden en el que se multiplican las matrices elementales). Esto sugiere denotar a la operación de invertir el orden de las transformaciones como una transposición:

$$(\tau_1 \cdots \tau_k)^T = \tau_k \cdots \tau_1;$$

así

$$(\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k})^T = (\tau_1 \cdots \tau_k)^T (\mathbf{A}^T) = \tau_k \cdots \tau_1 (\mathbf{A}^T)$$

Fíjese que efectivamente hemos logrado que la notación con abreviaturas se comporte como la notación matricial!

²Recuerde que la suma de listas (`list + list`) concatena las listas

El siguiente procedimiento invierte el orden de la lista cuando \mathbf{t} es una lista de abreviaturas. Cuando \mathbf{t} es una única abreviatura, no hace nada.

```

1 def __invert__(self):
2     """Transpone la lista de abreviaturas (invierte su orden)"""
3     return T( list(reversed(self.abreviaturas)), rpr=self.rpr) if isinstance(self.abreviaturas, list) else self

```

10.5. Potencias e inversa de transformaciones elementales

Toda matriz de la forma $\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}$ ó $\tau_1 \dots \tau_k$ es invertible por ser producto de matrices elementales:

$$(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k})^T (\mathbf{I}_{\tau_k^{-1} \dots \tau_1^{-1}})^T = \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k \cdot \tau_k^{-1} \dots \tau_1^{-1}} = \mathbf{I};$$

por lo que podemos denotar por $(\tau_1 \dots \tau_k)^{-1}$ a la sucesión de $\tau_k^{-1} \dots \tau_1^{-1}$. De este modo

$$(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k})^{-1} = \mathbf{I}_{(\tau_1 \dots \tau_k)^{-1}} = \mathbf{I}_{\tau_k^{-1} \dots \tau_1^{-1}}.$$

El siguiente método devuelve la potencia n -ésima de una transformación elemental y cuando n es -1 dicha potencia es la inversa:

```

1 T([ (1, 2, 3), (frac(1,3), 2), {1, 2} ]) **(-1)

```

$T(\{1, 2\}, (3, 2), (-1, 2, 3))$ que en Jupyter veríamos como $\begin{matrix} \tau \\ [1 \Rightarrow 2] \\ [(3)2] \\ [(-1)2+3] \end{matrix}$

Al implementar el método, definimos la potencia de manera recursiva (con una función auxiliar `lambda`). Además, si n es cero, devolveremos una transformación que no haga nada (identidad); por ejemplo $\begin{matrix} \tau \\ [1 \Rightarrow 1] \end{matrix}$.

```

1 def __pow__(self,n):
2     """Calcula potencias de una T (incluida la inversa)"""
3     <<Método auxiliar que calcula la inversa de una Transformación elemental>>
4     if not isinstance(n,int):
5         raise ValueError('La potencia no es un entero')
6
7     potencia = lambda T, n: T if n==1 else T & potencia(T, n-1)
8     TransformacionElemental = potencia(self,abs(n)) if n!=0 else T({1})
9
10    return TransformacionElemental if n>0 else Tinversa(TransformacionElemental)

```

```

1 def Tinversa ( self ):
2     """Calculo de la inversa de una transformación elemental"""
3     operaciones = [
4         ( -abrv[0], abrv[1], abrv[2]) if len(abrv)==3 else \
5         (frac(1,abrv[0]), abrv[1]) for abrv in CreaLista(self.abreviaturas) ]
6
7     return ~T( operaciones, rpr=self.rpr)

```

10.6. Transformaciones elementales “espejo”

Al diagonalizar por semejanza, y aplicar transformaciones elementales por la derecha, que es lo mismo que multiplicar por una matriz invertible por la derecha, necesitaremos expresar la corres-

pondiente matriz inversa mediante una secuencia de transformaciones elementales de la filas de la matriz identidad. Esto se logra con el método `espejo`.³

```

1 def espejo ( self ):
2     """Calculo de la transformación elemental espejo de otra"""
3     return T([ (abrv[0], abrv[2], abrv[1]) if len(abrv)==3 else abrv for abrv in CreaLista(self.abreviaturas)], rpr=self.rpr)

```

10.7. Sustitución de variables simbólicas

Sustituye la variable `c` por `v`, donde `v` puede ser un valor, u otra variable simbólica.

```

1 def subs(self, regla_de_sustitucion=[]):
2     '''Sustitución simbólica en transformaciones elementales'''
3
4     def sustitucion(operacion, regla_de_sustitucion):
5         if isinstance(operacion, tuple):
6             return tuple(sympy.S(operacion).subs(CreaLista(regla_de_sustitucion)) )
7         elif isinstance(operacion, set):
8             return set(sympy.S(operacion).subs(CreaLista(regla_de_sustitucion)) )
9         elif isinstance(operacion, list):
10            return [sustitucion(item, regla_de_sustitucion) for item in operacion]
11        elif isinstance(operacion, T):
12            return operacion.subs(CreaLista(regla_de_sustitucion))
13
14        self = T([sustitucion(operacion, regla_de_sustitucion) for operacion in self.abreviaturas])
15        return self
16
17 def simplify(arg):
18     if isinstance(arg,tuple) and (len(arg) == 2):
19         return (simplify(arg[0]), arg[1],)
20     elif isinstance(arg,tuple) and (len(arg) == 3):
21         return (simplify(arg[0]), arg[1], arg[2],)
22     else:
23         return arg
24
25 def factor(arg):
26     if isinstance(arg,tuple) and (len(arg) == 2):
27         return (factor(arg[0]), arg[1],)
28     elif isinstance(arg,tuple) and (len(arg) == 3):
29         return (factor(arg[0]), arg[1], arg[2],)
30     else:
31         return arg
32
33 def expand(arg):
34     if isinstance(arg,tuple) and (len(arg) == 2):
35         return (expand(arg[0]), arg[1],)
36     elif isinstance(arg,tuple) and (len(arg) == 3):
37         return (expand(arg[0]), arg[1], arg[2],)
38     else:
39         return arg

```

10.8. Métodos similares a los de una list

10.8.1. T es iterable

Haremos que `T` sea iterable con los procedimientos “mágicos” `__getitem__`, que permite seleccionar pasos de `T`, y `__setitem__`, que permite modificar pasos de `T`. Con `__len__` podremos contar el

³Al no encontrar ningún nombre en los manuales de Álgebra Lineal para este concepto, he adoptado este descriptivo nombre.

número de pasos de T.

```

1 def __getitem__(self,i):
2     """ Devuelve las transformaciones elementales del i-ésimo paso """
3     return T(self.abreviaturas[i])
4
5 def __setitem__(self,i,value):
6     """ Modifica las transformaciones elementales del i-ésimo paso """
7     self.abreviaturas[i]=value
8
9 def __len__(self):
10    """Número de pasos de T """
11    return len(self.abreviaturas)

```

10.8.2. Igualdad entre transformaciones elementales

```

1 def __eq__(self, other):
2     """Indica si es cierto que dos Transformaciones elementales son iguales"""
3     return self.abreviaturas == other.abreviaturas

```

10.9. Representación de la clase T

De nuevo construimos los dos métodos de presentación. Uno para la consola de comandos que escribe T y entre paréntesis la abreviatura (una tupla o un conjunto) que representa la transformación. Así,

- T({1, 5}) : intercambio entre los vectores primero y quinto.
- T((6, 2)) : multiplica por seis el segundo vector.
- T((-1, 2, 3)) : resta el segundo vector al tercero.

La otra representación es para el entorno Jupyter y replica la notación usada en los apuntes de la asignatura:

Python	Representación en Jupyter
T({1, 5})	$\tau_{[1 \rightleftharpoons 5]}$
T((6, 2))	$\tau_{[(6)2]}$
T((-1, 2, 3))	$\tau_{[(-1)2+3]}$

Los apuntes de la asignatura usan una notación matricial, y por tanto es una notación que discrimina entre operaciones sobre las filas o las columnas, situando los operadores a la izquierda o a la derecha de la matriz. En este sentido, nuestra notación en Python hace lo mismo. Así, en la siguiente tabla, la columna de la izquierda corresponde a operaciones sobre las filas, y la columna de la derecha a las operaciones sobre las columnas:

Mates II	Python	Mates II	Python
$\tau_{[i \rightleftharpoons j]} \mathbf{A}$	T({i,j}) & A	$\mathbf{A} \tau_{[i \rightleftharpoons j]}$	A & T({i,j})
$\tau_{[(a)i]} \mathbf{A}$	T((a,i)) & A	$\mathbf{A} \tau_{[(a)j]}$	A & T((a,j))
$\tau_{[(a)i+j]} \mathbf{A}$	T((a,i,j)) & A	$\mathbf{A} \tau_{[(a)i+j]}$	A & T((a,i,j))

10.9.1. Secuencias de transformaciones

Considere las siguientes transformaciones

- multiplicar por 2 el primer vector, cuya abreviatura es: $(2, 1)$
- intercambiar el tercer vector por cuarto, cuya abreviatura es: $\{3, 4\}$

Para indicar una secuencia que contiene ambas transformaciones, usaremos una lista de abreviaturas: $[(2,1), \{3,4\}]$. De esta manera, cuando componemos ambas operaciones: $T((2,1)) \& T(\{3,4\})$, nuestra librería nos devuelve la transformación composición de las dos operaciones **en el orden en el que han sido escritas**:

al escribir $T((2, 1)) \& T(\{3, 4\})$ Python nos devuelve $T([(1, 2), \{3, 4\}])$

Por tanto, si queremos realizar dichas operaciones sobre las columnas de la matriz **A**, podemos hacerlo de dos formas:

- $A \& T((2, 1)) \& T(\{3, 4\})$ (indicando las transformaciones de una en una)
- $A \& T([(2, 1), \{3, 4\}])$ (usando la transformación composición de ambas)

y si queremos operar sobre las filas hacemos exactamente igual, pero a la izquierda de la matriz

- $T((2, 1)) \& T(\{3, 4\}) \& A$
- $T([(2, 1), \{3, 4\}]) \& A$

Representación de una secuencia de transformaciones

Representación en la consola de Python	Representación en Jupyter
$T([(2, 1), (1, 3, 2)])$	$\tau_{\begin{bmatrix} (2)1 \\ (1)3+2 \end{bmatrix}}$

Representación de transformaciones identidad

Si las transformaciones multiplican un vector por 1, y suman un vector nulo a otro vector, dichas transformaciones no cambian el sistema de vectores. Lo habitual es que si un paso no modifica nada, que no se represente, por ello se filtran los pasos con el procedimiento [Cribado de secuencias de transformaciones](#); si, a resultados del filtrado, la lista de abreviaturas es vacía entonces la representación en L^AT_EX es una cadena vacía (no se pinta ningún símbolo en Jupyter). Si el atributo `rpr` es distinto de `'v'` la representación en Jupyter se realiza en horizontal.

```

1  def __repr__(self):
2      """ Muestra T en su representación Python """
3      return 'T(' + repr(self.abreviaturas) + ')'
4
5  def _repr_html_(self):
6      """ Construye la representación para el entorno Jupyter Notebook """
7      return html(self.latex())
8
9  def latex(self):
10     """ Construye el comando LaTeX para representar una Trans. Elem. """
11     def simbolo(t):
12         """Escribe el símbolo que denota una transformación elemental particular"""
13         if isinstance(t,(set,sympy.sets.sets.FiniteSet)):
```

```

14         return '\\left[\\mathbf{' + latex(list(t)[0]) + \\
15             '\\rightleftharpoons\\mathbf{' + latex(list(t)[-1]) + '\\right]}'
16     if isinstance(t,(tuple, sympy.core.containers.Tuple)) and len(t) == 2:
17         return '\\left[\\left(' + \\
18             latex(t[0]) + '\\right)\\mathbf{' + latex(t[1]) + '\\right]}'
19     if isinstance(t,(tuple, sympy.core.containers.Tuple)) and len(t) == 3:
20         return '\\left[\\left(' + latex(t[0]) + '\\right)\\mathbf{' + \\
21             latex(t[1]) + '\\right)' + '\\mathbf{' + latex(t[2]) + '\\right]}'
22
23     if isinstance(self.abreviaturas, (set, tuple) ):
24         return '\\underset{' + simbolo(self.abreviaturas) + '\\}{\\pmb{\\tau}}}'
25
26     elif self.abreviaturas == []:
27         return ' '
28
29     elif isinstance(self.abreviaturas, list) and self.rpr=='v':
30         return '\\underset{\\begin{subarray}{c} ' + \\
31             '\\\\'.join([simbolo(i) for i in self.abreviaturas]) + \\
32             '\\end{subarray}}{\\pmb{\\tau}}}'
33
34     elif isinstance(self.abreviaturas, list):
35         return '\\underset{' + \\
36             '\\}{\\pmb{\\tau}}}'\\underset{' + \\
37             '\\}{\\pmb{\\tau}}}'

```

10.10. La clase T completa

```

1  class T:
2      <<Texto de ayuda de la clase ~T->>
3      <<Inicialización de la clase ~T->>
4      <<Composición de Transformaciones Elementales o aplicación sobre las filas de una Matrix>>
5      <<Operador transposición para la clase ~T->>
6      <<Método auxiliar que calcula la inversa de una Transformación elemental>>
7      <<Potencia de una ~T->>
8      <<Transformación elemental espejo de una ~T->>
9      <<Sustitución de variables simbólicas en una Transformación elemental>>
10     <<Métodos de la clase ~T~ para que actúe como si fuera una list de Python>>
11     <<Representación de la clase ~T->>

```

Parte III

Las clases SubEspacio y EAfin

Capítulo 11

La clase SubEspacio (de \mathbb{R}^m)

El conjunto de vectores \mathbf{x} que resuelven el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es un subespacio de \mathbb{R}^n ; y el conjunto de vectores \mathbf{x} que resuelven el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ es un espacio afín de \mathbb{R}^n . En este capítulo vamos a definir objetos que representen estos subconjuntos de \mathbb{R}^n .

11.1. La clase SubEspacio (de \mathbb{R}^m)

La clase **SubEspacio** se puede instanciar tanto con un **Sistema** de **Vectores** como con una **Matrix**.

En el primer caso, dado un **Sistema** de vectores, por ejemplo

$$S = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \right],$$

SubEspacio(**S**) corresponde al conjunto de combinaciones lineales de los **Vectores** de dicho **Sistema**, representado por las siguientes ecuaciones *paramétricas*:

$$\left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right\}$$

donde el vector \mathbf{p} es el vector de parámetros. En el segundo caso, dada una **Matrix**, por ejemplo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

SubEspacio(**M**) corresponde al conjunto de **Vectores** que son solución al sistema de ecuaciones $\mathbf{Mv} = \mathbf{0}$; y que se puede representar con el sistema de ecuaciones *cartesianas*:

$$\left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \right\}$$

En ambos ejemplos corresponden al mismo subespacio de \mathbb{R}^3 ; y, de hecho, la librería muestra ambos tipos de representación para cada **SubEspacio**: las ecuaciones paramétricas a la izquierda y las cartesianas a la derecha.

$$\left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right\} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \right\}$$

SubEspacio tiene varios atributos.

- **dim**: dimensión del subespacio. En el ejemplo **dim=2**.
- **Rn**: indica el espacio vectorial \mathbb{R}^n al que pertenece **SubEspacio(S)**. En el ejemplo anterior **Rn=3** puesto que es un subespacio de \mathbb{R}^3 .
- **base**: una base del subespacio (un **Sistema de Vectores** de **Rn**). Cuando **dim==0** base es un **Sistema** vacío.
- **sgen**: Un **Sistema de Vectores** generador del subespacio. En particular será el sistema de vectores correspondiente a la **Matrix** de coeficientes empleada en la representación con ecuaciones paramétricas. En el ejemplo Cuando **dim==0**, **sgen** contiene un vector nulo de **Rn** componentes.

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \right]$$

- **cart**: **Matrix** de coeficientes empleada en la representación con las ecuaciones cartesianas. En el ejemplo

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11.2. Implementación de SubEspacio

La implementación requiere encontrar un **Sistema** base del **SubEspacio** columna de una **Matrix** **A**. Lo haremos pre-escalando una **Matrix** **A** con **elim(0)** (así evitamos las fracciones en la medida de lo posible). También necesitaremos encontrar un sistema generador del un espacio nulo de **A**. Lo haremos con el método auxiliar **SGenENulo**.

```

1  def __init__(self, data, sust=[], Rn=[]):  Inicialización de la clase SubEspacio
2      """Inicializa un SubEspacio de Rn"""
3      <<Método auxiliar ~sistema_generador_del_espacio_nulo_de~ una ~Matrix~>>
4      if not isinstance(data, Sistema):
5          raise ValueError(' Argumento debe ser un Sistema o Matrix ')
6
7      if not data:
8          if not Rn:
9              raise ValueError(' Si el sistema es vacío, es necesario indicar el espacio Rn ')
10         else:
11             self.Rn = Rn
12             self.__dict__ = SubEspacio(Sistema([self.vector_nulo()])).__dict__.copy()
13
14     elif isinstance(data, Matrix):
15         A = data
16         self.Rn = Rn if Rn else A.n
17         self.sgen = sistema_generador_del_espacio_nulo_de(A, sust, Rn)
18         self.dim = 0 if self.sgen.es_nulo() else len(self.sgen)
19         self.base = self.sgen if self.dim else Sistema([])
20         self.cart = SubEspacio(self.sgen, sust, self.Rn).cart
21
22     else:
23         if isinstance(data[1], BlockM):
24             self.Rn = ((data[1]).m, (data[1]).n)
25         elif isinstance(data[1], Sistema):
26             self.Rn = (data[1]).n
27
28         try:
29             A = Matrix(data).subs(sust)

```

```

30         except:
31             A = BlockM([data]).subs(sust)
32         self.base = Sistema([data[j] for j,v in enumerate(A.elim(0), 1) if v.no_es_nulo()])
33         self.dim = len(self.base)
34         self.sgen = self.base if self.base else Sistema([ self.vector_nulo() ])
35
36         if isinstance(self.Rn, int):
37             self.cart = -Matrix(sistema_generador_del_espacio_nulo_de(-A, sust))
38         elif isinstance(self.Rn, tuple):
39             self.cart = SubEspacio(Sistema([m.vec() for m in self.sgen]), Rn=self.Rn).cart

```

Las columnas de E correspondientes a los elementos nulos de K son una base del espacio nulo.

```

1  def sistema_generador_del_espacio_nulo_de(A, sust=[], Rn=[]):
2      """Encuentra un sistema generador del Espacio Nulo de A"""
3      K = A.K(0, sust);
4      E = I(A.n) & T(K.pasos[1])
5      lista = [ v.reshape(Rn) for j, v in enumerate(E,1) if (K[j]).es_nulo(sust) ]
6      return Sistema(lista) if lista else Sistema([self.vector_nulo()])

```

```

1  def vector_nulo(self):
2      return M0(self.Rn[0],self.Rn[1]) if isinstance(self.Rn, tuple) else V0(self.Rn)

```

11.3. Métodos de la clase SubEspacio

Definimos un método que nos indique si es cierto que un SubEspacio está contenido en otro (contenido_en). Si A y B son SubEspacios, la siguiente expresión

$$A.\text{contenido_en}(B)$$

nos dirá si es cierto que A es un SubEspacio de B.

Para comprobar si un SubEspacio A está contenido en un SubEspacio B, basta verificar si todos los vectores del sistema generador de A son solución de las ecuaciones cartesianas de B. Si B es un EAfin, entonces B.v debe ser nulo y A debe estar contenido en B.S.

```

1  def contenido_en(self, other):
2      """Indica si este SubEspacio está contenido en other"""
3      self.verificacion(other)
4      if isinstance(other, SubEspacio):
5          return all ([ (other.cart*v.vec()).es_nulo() for v in self.sgen ])
6          #if isinstance(self.sgen[1], Vector):
7          #    return all ([ (other.cart*v).es_nulo() for v in self.sgen ])
8          #elif isinstance(self.sgen[1], Matrix):
9          #    return all ([ (other.cart*v.vec()).es_nulo() for v in self.sgen ])
10
11     elif isinstance(other, EAfin):
12         return other.v.es_nulo() and self.contenido_en(other.S)

```

También definimos dos métodos (mágicos) que nos indican

- si dos SubEspacios son iguales (`__eq__`), es decir, que A esta contenido en B y viceversa; o
- si son distintos (`__ne__`), es decir, que no son iguales.

Así podemos usar las siguientes expresiones booleanas

$$A == B \quad \text{y} \quad A != B$$

```

1 def __eq__(self, other):
2     """Indica si un subespacio de Rn es igual a otro"""
3     self.verificacion(other)
4     return self.contenido_en(other) and other.contenido_en(self)
5
6 def __ne__(self, other):
7     """Indica si un subespacio de Rn es distinto de otro"""
8     self.verificacion(other)
9     return not (self == other)

```

Para que estos tres métodos funcionen es necesario un método auxiliar que realice la `verificacion` de que los dos argumentos son `SubEspacios` o `EAFines` del mismo espacio vectorial \mathbb{R}^m (como este método tampoco es mágico, se invoca con `self.verificacion()`).

```

1 def verificacion(self, other):
2     if not isinstance(other, (SubEspacio, EAFin)) or not self.Rn == other.Rn:
3         raise \
4             ValueError('Ambos argumentos deben ser subconjuntos de en un mismo espacio')

```

El método suma `A + B` arroja la suma de dos `SubEspacios` de \mathbb{R}^m (el es subespacio generado por la concatenación de los respectivos sistemas generadores).

```

1 def __add__(self, other):
2     """Devuelve la suma de subespacios de Rn"""
3     self.verificacion(other)
4     return SubEspacio(self.sgen.concatena(other.sgen))

```

y definimos otro método que nos devuelva la intersección: `A & B`.

Si `other` es un `EAFin` llamamos al método de la intersección entre un `EAFin` y un `SubEspacio`.

```

1 def __and__(self, other):
2     """Devuelve la intersección de subespacios"""
3     self.verificacion(other)
4
5     if isinstance(other, SubEspacio):
6         A = self.base
7         B = other.base
8         AB = A.concatena(B)
9         X = slice(1, self.dim) | Matrix(AB.espacio_nulo().sgen)
10        return SubEspacio(A*X)
11
12    elif isinstance(other, EAFin):
13        return other & self

```

Con `~A` obtenemos el complemento ortogonal (el `SubEspacio` generado por las filas de `self.cart`)

```

1 def __invert__(self):
2     """Devuelve el complemento ortogonal"""
3     if isinstance(self.sgen[1], Vector):
4         return SubEspacio( Sistema( ~(self.cart) ) )
5
6     elif isinstance(self.sgen[1], Matrix):
7         return SubEspacio(Sistema([v.reshape(self.Rn) for v in ~(self.cart)]))

```

Finalmente definimos un método para saber si un `Vector x` pertenece a un `SubEspacio A` (basta verificar si `x` es solución del sistema de ecuaciones cartesianas). Obtenemos la respuesta con

`x in A`

```

1 def __contains__(self, other):
2     """Indica si un Vector pertenece a un SubEspacio"""
3     if not isinstance(other, type(self.sgen|1)):
4         raise ValueError('Objeto de tipo distinto a los del SubEspacio')
5
6     if not estructura(other)==estructura(self.sgen|1):
7         raise ValueError('Objeto tiene estructura o longitud distinta a la de los vectores del SubEspacio')
8
9     return self.cart*other.vec() == V0(self.cart.m)

```

11.4. Métodos de representación de la clase SubEspacio

Métodos de representación de la clase SubEspacio

```

1 def _repr_html_(self):
2     """Construye la representación para el entorno Jupyter Notebook"""
3     return html(self.latex())
4
5 def EcParametricas(self, d=0):
6     """Representación paramétrica del SubEspacio"""
7     if d: display(Math(self.EcParametricas()))
8     return EAfin(self.sgen, self.vector_nulo()).EcParametricas()
9
10 def EcCartesianas(self, d=0):
11     """Representación cartesiana del SubEspacio"""
12     if d: display(Math(self.EcCartesianas()))
13     return EAfin(self.sgen, self.vector_nulo()).EcCartesianas()
14
15 def latex(self):
16     """ Construye el comando LaTeX para un SubEspacio de Rn"""
17     return EAfin(self.sgen, self.vector_nulo()).latex()

```

11.5. La clase SubEspacio completa

Definición de la clase SubEspacio

```

1 class SubEspacio:
2     <<Inicialización de la clase ~SubEspacio->>
3     <<Método auxiliar para establecer el vector nulo del subespacio>>
4     <<Métodos de la clase ~SubEspacio->>
5     <<Métodos de representación de la clase ~SubEspacio->>

```

Capítulo 12

La clase EAfin (de \mathbb{R}^m)

El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ forma un subespacio (que llamamos espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$), pero el conjunto de soluciones de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ cuando $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ es un *espacio afín*.

12.1. Implementación de EAfin

Vamos a crear la clase EAfin. La definiremos como un par $(\mathcal{S}, \mathbf{v})$ cuyo primer elemento, \mathcal{S} , sea un SubEspacio (el conjunto de soluciones a $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$) y cuyo segundo elemento, \mathbf{v} , sea un vector del espacio afín (una solución particular de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$). En el atributo S guardaremos el SubEspacio y en el atributo v un Vector. Así, pues, para instanciar un EAfin usaremos dos argumentos: el primero será un Sistema formado por Vectores (típicamente una Matrix) con la que formar el SubEspacio, y el segundo será un Vector.

Cuando $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$, el espacio afín es un subespacio (que por tanto contiene al vector nulo). Así que si $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$ en el atributo v guardaremos el vector nulo. Así, si consideramos el sistema “ampliado” que contiene los vectores del sistema generador de S primero, y v como último vector v, y aplicamos el método de eliminación de izquierda a derecha; el último vector tras la eliminación pertenece al espacio afín, y será cero si $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$. Si vi es cero (su valor por defecto), en self.v se guardará el vector resultante tras la eliminación, en caso contrario se guardará el vector indicado (vi) como argumento.

Iniciación de la clase EAfin

```
1 def __init__(self, data, v, vi=0):
2     """Inicializa un Espacio Afín de Rn"""
3     self.S = data if isinstance(data, SubEspacio) else SubEspacio(data)
4     self.Rn = self.S.Rn
5
6     if isinstance(self.Rn, int):
7         if not isinstance(v, Vector) or v.n != self.Rn:
8             raise ValueError('v y SubEspacio deben estar en el mismo espacio vectorial')
9
10    elif isinstance(self.Rn, tuple):
11        if not isinstance(v, Matrix) or (v.m,v.n) != self.Rn:
12            raise ValueError('v y SubEspacio deben estar en el mismo espacio vectorial')
13
14    self.v = v if vi else (self.S.sgen.concatena(Sistema([v]))).elim(1)|0
```

12.2. Métodos de la clase EAfin

Un vector \mathbf{x} pertenece al espacio afín \mathcal{S} si verifica las ecuaciones cartesianas, cuya matriz de coeficientes es `self.S.cart`, y cuyo vector del lado derecho es `(self.S.cart)*self.v`. Así pues

```
1 def __contains__(self, other):
2     """Indica si un Vector pertenece a un EAfin"""
3     if isinstance(self.S.sgen|1, Vector):
4         if not isinstance(other, Vector) or other.n != self.Rn:
5             raise ValueError\
6                 ('El Vector no tiene el número adecuado de componentes')
7         return self.S.cart*other == (self.S.cart)*self.v
8
9     elif isinstance(self.S.sgen|1, Matrix):
10        if not isinstance(other, Matrix) or (other.n,other.m) != self.Rn:
11            raise ValueError\
12                ('La matrix no tiene el orden adecuado')
13        return self.S.cart*other.vec() == self.S.cart*self.v.vec()
```

```
1 def contenido_en(self, other):
2     """Indica si este EAfin está contenido en other"""
3     self.verificacion(other)
4
5     if isinstance(other, SubEspacio):
6         return self.v in other and self.S.contenido_en(other)
7
8     elif isinstance(other, EAfin):
9         return self.v in other and self.S.contenido_en(other.S)
```

```
1 def __eq__(self, other):
2     """Indica si un EAfin de Rn es igual a other"""
3     self.verificacion(other)
4     return self.contenido_en(other) and other.contenido_en(self)
5
6 def __ne__(self, other):
7     """Indica si un subespacio de Rn es distinto de other"""
8     return not (self == other)
```

```
1 def verificacion(self, other):
2     if not isinstance(other, (SubEspacio, EAfin)) or not self.Rn == other.Rn:
3         raise ValueError('Ambos argumentos deben ser subconjuntos de en un mismo espacio')
```

La intersección es el conjunto de soluciones a ambos sistemas de ecuaciones cartesianas. El modo más sencillo es unificar ambos sistemas en uno solo: apilando las matrices de coeficientes por un lado y concatenando los vectores del lado derecho por el otro.

```
1 def __and__(self, other):
2     """Devuelve la intersección de este EAfin con other"""
3     self.verificacion(other)
4     if isinstance(other, EAfin):
5         M = self.S.cart.apila( other.S.cart )
6         if isinstance(self.S.sgen|1, Vector):
7             w = (self.S.cart*self.v).concatena( other.S.cart*other.v )
8         elif isinstance(self.S.sgen|1, Matrix):
9             w = (self.S.cart*self.v.vec()).concatena( other.S.cart*other.v.vec() )
10    elif isinstance(other, SubEspacio):
11        M = self.S.cart.apila( other.cart )
12        if isinstance(self.S.sgen|1, Vector):
13            w = (self.S.cart*self.v).concatena( V0(other.cart.m) )
14        elif isinstance(self.S.sgen|1, Matrix):
15            w = (self.S.cart*self.v.vec()).concatena( V0(other.cart.m) )
```

```

16
17     return SEL(M,w).eafin

```

Con $\sim A$ obtendremos el mayor SubEspacio perpendicular a A .

```

1 def __invert__(self):
2     """Devuelve el mayor SubEspacio perpendicular a self"""
3     return SubEspacio( Sistema([v.reshape(self.Rn) for v in ~(self.S.cart)]))

```

12.3. Métodos de representación de la clase EAfin

Métodos de representación de la clase EAfin

```

1 def _repr_html_(self):
2     """Construye la representación para el entorno Jupyter Notebook"""
3     return html(self.latex())
4
5 def EcParametricas(self, d=0):
6     """Representación paramétrica de EAfin"""
7     punto = latex(self.v) + '+' if (self.v != 0*self.v) else ''
8     if d: display(Math(self.EcParametricas()))
9     if isinstance(self.S.Rn,int):
10         return r'\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\ } \backslash
11             + latex(self.S.Rn) \backslash
12             + r'\ \left\{ \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{\ } \backslash
13             + latex(max(self.S.dim,1)) \backslash
14             + r', \ ; \ \boldsymbol{v} = ' \backslash
15             + punto \backslash
16             + latex(Matrix(self.S.sgen)) \backslash
17             + r'\boldsymbol{p} \right. \right\}'
18     else:
19         return r'\left\{ \pmb{\mathsf{M}} \in \mathbb{R}^{\ } \backslash
20             + latex(self.S.Rn[0]) + r'\times' + latex(self.S.Rn[1]) + ' \backslash
21             + r'\ \left\{ \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{\ } \backslash
22             + latex(max(self.S.dim,1)) \backslash
23             + r', \ ; \ \mathsf{\pmb{M}} = ' \backslash
24             + punto \backslash
25             + latex(self.S.sgen) \backslash
26             + r'\boldsymbol{p} \right. \right\}'
27
28 def EcCartesianas(self, d=0):
29     """Representación cartesiana de EAfin"""
30     if d: display(Math(self.EcCartesianas()))
31     if isinstance(self.S.Rn,int):
32         return r'\left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\ } \backslash
33             + latex(self.S.Rn) \backslash
34             + r'\ \left\{ ' \backslash
35             + latex(self.S.cart) \backslash
36             + r'\boldsymbol{v} = ' \backslash
37             + latex(self.S.cart*self.v) \backslash
38             + r'\right. \right\}'
39     else:
40         return r'\left\{ \mathsf{\pmb{M}} \in \mathbb{R}^{\ } \backslash
41             + latex(self.S.Rn[0]) + r'\times' + latex(self.S.Rn[1]) + ' \backslash
42             + r'\ \left\{ ' \backslash
43             + latex(self.S.cart) \backslash
44             + r'\vec{\mathsf{\pmb{M}}}= ' \backslash
45             + latex(self.S.cart*self.v.vec()) \backslash
46             + r'\right. \right\}'
47
48 def latex(self):
49     """ Construye el comando LaTeX para un EAfin de Rn"""
50     if self.S.sgen.es_nulo():
51         return r'\left\{ ' + latex(self.v) + r'\ \right\}'
52     else:

```

12.4. La clase EAfin completa

```

class EAfin:
    <<Inicialización de la clase ~EAfin>>
    <<Métodos de la clase ~EAfin>>
    <<Métodos de representación de la clase ~EAfin>>

```

Parte IV

Las clases Homogenea y SEL

Capítulo 13

Resolución de sistemas de ecuaciones homogéneos. La clase Homogenea

El siguiente código devuelve el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Descripción de los atributos:

- **sgen** es un sistema generador del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.
- **determinado** indica si es cierto que el sistema es determinado (una única solución)
- **tex** es la cadena de texto \LaTeX que representa los pasos dados para resolver el sistema.

13.1. Implementación de la clase Homogenea

```
1  class Homogenea:
2      def __init__(self, sistema, rep=0, sust=[], repsust=0):
3          """Resuelve un Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneo
4          y muestra los pasos para encontrarlo"""
5          try:
6              A = Matrix(sistema).subs(sust)
7          except:
8              A = BlockM([sistema]).subs(sust)
9
10         MA = A.apila(I(A.n),1)
11         MA.corteElementos.update({sistema.n+A.m})
12
13         K = A.K(0, sust)
14         E = I(A.n) & T(K.pasos[1])
15
16         self.base = Sistema([ v for j, v in enumerate(E,1) if (K[j].es_nulo(sust) )])
17         self.sgen = self.base if self.base else Sistema([ V0(sistema.n) ])
18         self.determinado = (len(self.base) == 0)
19         self.pasos = K.pasos;
20         self.TrF = K.TrF
21         self.TrC = K.TrC
22
23         self.enulo = SubEspacio(self.sgen)
24
25         if repsust:
26             self.tex = rprElim( A.apila( I(A.n) , 1 ) , self.pasos, [], sust)
27         else:
28             self.tex = rprElim( A.apila( I(A.n) , 1 ) , self.pasos)
```

```

30
31         if rep:
32             display(Math(self.tex))
33
34     <<Métodos de representación de la clase ~Homogenea~>>

```

La base la constituyen los vectores v de E que corresponden a los vectores nulos de K :

13.2. Métodos de representación de la clase Homogenea

```

1  def __repr__(self):
2      """Muestra el Espacio Nulo de una matriz en su representación Python"""
3      return 'Combinaciones lineales de (' + repr(self.sgen) + ')'
4
5  def _repr_html_(self):
6      """Construye la representación para el entorno Jupyter Notebook"""
7      return html(self.latex())
8
9  def latex(self):
10     """ Construye el comando LaTeX para la solución de un Sistema Homogéneo"""
11     if self.determinado:
12         return '\\left\\{\\ ' + latex(self.sgen|1) + '\\ \\right\\}'
13     else:
14         return '\\mathcal{L}\\left(\\ ' + latex(self.sgen) + '\\ \\right)'

```

Capítulo 14

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. La clase SEL

14.1. Implementación

14.1.1. Texto de ayuda

```
1         Texto de ayuda de la clase SEL
2         """Resuelve un Sistema de Ecuaciones Lineales
3         mediante eliminación con el sistema ampliado y muestra los pasos
4         dados
5         """
6
7
8         Resolución de un Sistema de Ecuaciones Lineales
9
10 class SEL:
11     def __init__(self, sistema, b, rep=0, sust=[], repsust=0):
12         <<Texto de ayuda de la clase ~SEL~>>
13         try:
14             A = Matrix(sistema.amplia(-b)).subs(sust).csis({sistema.n})
15         except:
16             A = BlockM([sistema.amplia(-b)]).subs(sust).csis({sistema.n})
17
18         MA = A.apila(I(A.n),1)
19         MA.corteElementos.update({sistema.n+A.m})
20         operaciones = A.elim(0,False,sust).pasos[1]
21
22         <<Aplicamos los ~pasos~ de eliminación sobre la matriz ampliada y obtenemos la solución>>
23
24         <<Equivalencia entre sistemas de ecuaciones>>
25         <<Métodos de representación de la clase ~SEL~>>
```

Aplicamos los pasos sobre toda la matriz ampliada (más bien “super ampliada”, pues tiene una matriz identidad por debajo). Si el último elemento de la última columna es nulo debajo vemos la solución.

```
1         Aplicamos los pasos de eliminación sobre la matriz ampliada y obtenemos la solución
2         E = I(sistema.n) & T(operaciones)
3
4         testigo = 0 | (I(A.n) & T(operaciones)) | 0
5         Normaliza = T([]) if testigo==1 else T([(frac(1,testigo), A.n)])
6         pasos = [[], operaciones+[Normaliza] ] if Normaliza else [], operaciones]
7
8         K = A & T(operaciones)
```

```

8
9 self.base      = Sistema([ v for j, v in enumerate(E,1) if (K[j]).es_nulo(sust) ])
10 self.sgen      = self.base if self.base else Sistema([ V0(sistema.n) ])
11 self.determinado = (len(self.base) == 0)
12 self.pasos     = pasos
13 self.TrF       = T(self.pasos[0])
14 self.TrC       = T(self.pasos[1])
15
16 if (K[0]).no_es_nulo():
17     self.solP = set()
18     self.eafin = set()
19 else:
20     self.solP = (I(sistema.n).amplia(V0(sistema.n)) & T(pasos[1]))|0
21     self.eafin = EAfin(self.sgen, self.solP, 1)
22
23 if repsust:
24     self.tex = rprElim( MA, self.pasos, [], sust )
25 else:
26     self.tex = rprElim( MA, self.pasos)
27
28 if rep:
29     display(Math(self.tex))

```

Equivalencia entre sistemas de ecuaciones

```

1 def __eq__(self, other):
2     """Indica si un subespacio de Rn es igual a otro"""
3     if not isinstance(other, SEL):
4         raise ValueError('El argumento debe ser SEL (Sist de Ecuaciones Lineales).')
5
6     return self.eafin == other.eafin

```

14.2. Métodos de representación de la clase SEL

Métodos de representación de la clase SEL

```

1 def __repr__(self):
2     """Muestra el Espacio Nulo de una matriz en su representación Python"""
3     return repr(self.solP) + ' + Combinaciones lineales de (' + repr(self.sgen) + ')'
4
5 def _repr_html_(self):
6     """Construye la representación para el entorno Jupyter Notebook"""
7     return html(self.latex())
8
9 def latex(self):
10    """ Construye el comando LaTeX para la solución de un Sistema Homogéneo"""
11    if self.determinado and self.solP:
12        return '\\left\\{ ' + latex(self.solP) + ' \\right\\}'
13    else:
14        return self.eafin.EcParametricas() if self.solP else '\\emptyset' #latex(set())

```

Parte V

La clase Determinante. Cálculo del determinante por eliminación

14.2.1. Método de inicialización

```
1  class Determinante:
2      """Determinante de una Matrix mediante eliminación Gaussiana por columnas"""
3
4      La representación muestra los pasos dados
5
6      """
7      def __init__(self, data, disp=0, sust=[]):
8          <<Cálculo del determinante>>
9
10         A = Matrix(data.subs(sust))
11
12         if not A.es_cuadrada(): raise ValueError('Matrix no cuadrada')
13
14         self.tex, self.valor, self.pasos = calculoDet( A.subs(sust) )
15
16         if disp:
17             display(Math(self.tex))
18
19     <<Métodos de representación de la clase Determinante>>
```

```
1  def calculoDet(A, sust=[]):
2
3      producto = lambda x: 1 if not x else x[0] * producto(x[1:])
4
5      def productos_realizados(operaciones):
6          P = [ producto([-1 if isinstance(abv,set) else abv[0] \
7                      for op in paso for abv in filter( lambda x: len(x)==2, op.abreviaturas)]) for paso in operaciones]
8          return P
9
10     operacionesEnColumnas = (A.L(0,sust).pasos[1])
11     operacionesEnFilas    = [T((frac(1,d),A.n+1)) for d in productos_realizados(operacionesEnColumnas)]
12     pasos                 = [operacionesEnFilas, operacionesEnColumnas]
13
14     matrixExtendida       = T(operacionesEnFilas) & A.extDiag(I(1),1) & T(operacionesEnColumnas)
15
16     determinante          = sympy.simplify( producto( matrixExtendida.diag() ) ).simplify()
17
18     tex                   = rprElimFyC( A.extDiag(I(1),1), pasos)
19
20     return [tex, determinante, pasos]
```

```
1  def __repr__(self):
2      """Muestra un Sistema en su representación Python"""
3      return 'Valor del determinante: ' + repr(self.valor)
4
5  def _repr_html_(self):
6      """Construye la representación para el entorno Jupyter Notebook"""
7      return html(self.latex())
8
9  def latex(self):
10     """Construye el comando LaTeX para representar un Sistema"""
11     return latex(self.valor)
```

Parte VI

La clase FuncionLineal

14.3. Implementación de las funciones afines en la clase FuncionLineal

14.3.1. Método de inicialización

```
1  def __init__(self, elementos_del_Dominio, elementos_de_la_Imagen):  
2      """Inicializa un Sistema con dos listas, tuplas o Sistemas de la misma longitud"""  
3      def conversion_de_R_a_R1(sis):  
4          return Sistema([Vector([e]) for e in sis])  
5  
6      if isinstance(BlockV(elementos_del_Dominio), Vector):  
7          elementos_del_Dominio = conversion_de_R_a_R1(elementos_del_Dominio)  
8      if isinstance(BlockV(elementos_de_la_Imagen), Vector):  
9          elementos_de_la_Imagen = conversion_de_R_a_R1(elementos_de_la_Imagen)  
10  
11      <<Verificación de que son Ok los argumentos para clase FuncionLineal>>  
12      <<Metodo auxiliar para el cálculo del nucleo de la función>>  
13  
14      pares = BlockM([BlockV(elementos_del_Dominio), BlockV(elementos_de_la_Imagen)]).elim(16)  
15      self.pares = BlockM([BlockV(elementos_del_Dominio), BlockV(elementos_de_la_Imagen)]).elim(16)  
16      self.dominio = (self.pares|1).span()  
17      self.imagen = (self.pares|2).span()  
18      self.nucleo = kernel(self)
```

```
1  Verificación de que son Ok los argumentos para clase FuncionLineal  
2  if (not es_ristra(elementos_del_Dominio)) or (not es_ristra(elementos_de_la_Imagen)):  
3      raise ValueError('El argumento debe ser una lista, tupla, o Sistema.')  
4  
5  if not len(elementos_del_Dominio) == len(elementos_de_la_Imagen):  
6      raise ValueError('Los dos sistemas o lista deben ser igual de largas')  
7  
8  nuevos_pares = BlockM([elementos_del_Dominio, elementos_de_la_Imagen]).elim(1)  
9  if [e for j,e in enumerate(2|nuevos_pares,1) if e.no_es_nulo() and (1|nuevos_pares|j).es_nulo()]:  
10     dispElim(BlockM([elementos_del_Dominio, elementos_de_la_Imagen]).cele({1}), nuevos_pares.pasos)  
11     raise ValueError('La lista de pares no corresponde a una función lineal')
```

```
1  Metodo auxiliar para el cálculo del nucleo de la función  
2  def kernel(self):  
3      dominio = self.pares|1  
4      imagen = self.pares|2  
5      s_generador = [punto for j,punto in enumerate(dominio, 1) if (imagen|j).es_nulo()]  
6      return Sistema(s_generador).span(Rn=(dominio).span().Rn)
```

14.4. Métodos la clase FuncionLineal

```
1  def es_invertible(self):  
2      return self.nucleo.dim==0 and self.es_lineal(reversed(self.pares))  
3  
4  def es_lineal(pares):  
5      dominio = pares|1  
6      imagen = pares|2  
7      if [pto for j,pto in enumerate(imagen,1) if (dominio|j).es_nulo() and (imagen|j).no_es_nulo()]:  
8          return False  
9      else:  
10         return True  
11  
12  def es_lineal(self,pares):  
13      nuevos_pares = BlockM([(pares|1).sis(), (pares|2).sis()]).elim(1)  
14      if [e for j,e in enumerate(2|nuevos_pares,1) if e.no_es_nulo() and (1|nuevos_pares|j).es_nulo()]:  
15          return False  
16      else:  
17          return True  
18  
19  def inversa(self):
```

```

20     """Devuelve la inversa de la FuncionLineal si existe"""
21     if not self.es_invertible():
22         raise ValueError('Esta FuncionLineal no es invertible')
23
24     return FuncionLineal((self.pares|2).sis(), (self.pares|1).sis())

```

```

1  def imagen_de(self, punto, rep=False):
2
3      if isinstance(BlockV([punto]), Vector):
4          punto = Vector([punto])
5
6      try:
7          punto in self.dominio
8      except:
9          raise ValueError('El elemento indicado no pertenece al dominio de la función')
10
11     cero = self.imagen.vector_nulo()
12     X = BlockV([punto, cero])
13
14     lista_pares_ampliada = (~BlockM(self.pares).apila(~BlockM([-X]),1))).cele({1})
15     nuevos_pares = lista_pares_ampliada.elim(1,rep)
16
17     return 2|nuevos_pares|0

```

```

1  def preimagen_de(self, punto, rep=False):
2
3      if isinstance(BlockV([punto]), Vector):
4          punto = Vector([punto])
5
6      try:
7          punto in self.imagen
8      except:
9          raise ValueError('El elemento indicado no pertenece a la imagen de la función')
10
11     cero = self.dominio.vector_nulo()
12     X = BlockV([punto, cero])
13
14     pasos_evaluacion = (1|(~reversed(self.pares)).amplia(-X,1)).elim(1).pasos
15
16     representante = 2|((~reversed(self.pares)).amplia(-X,1) & T(pasos_evaluacion[1]))|0
17
18     if rep:
19         dispElim((~reversed(self.pares)).amplia(-X,1).cele({1}), pasos_evaluacion)
20
21     return EAFin(self.nucleo.sgen, representante, 1)

```

14.5. Métodos de representación de la clase FuncionLineal

```

1  def __repr__(self):
2      """Muestra el Espacio Nulo de una matriz en su representación Python"""
3      return 'Sistema inicial de pares (Dominio, Imagen): ' + repr(self.pares)
4
5  def latex(self):
6      """ Construye el comando LaTeX para la clase FuncionLineal """
7      return latex((-self.pares).sis())
8
9  def _repr_html_(self):
10     """ Construye la representación para el entorno jupyter notebook """
11     return html(self.latex())

```

```

1  class FuncionLineal:

```

```
2    <<Inicialización de la clase FuncionLineal>>
3    <<Métodos la clase ~FuncionLineal~>>
4    <<Métodos de representación de la clase ~FuncionLineal~>>
```

Parte VII

Librería completa

Finalmente creamos la librería `nacal.py` concatenando los trozos de código que se describen en este fichero de documentación.

Importamos el módulo `Sympy` con el código:

```
import sympy
```

Así podremos usar números racionales e irracionales (incluso el cuerpo de polinomios).

Como queremos que la librería emplee números racionales siempre que sea posible, definimos tres métodos generales: `fracc(a/b)` es la fracción $\frac{a}{b}$; `numer(a,b)`; y `denom(a,b)` (véase la página siguiente). Para usar el número racional $\frac{1}{3}$ escribiremos `fracc(1,3)`, y para usar un número irracional como $\sqrt{2}$ escribimos `sympy.sqrt(2)`.

El módulo `Sympy` se ocupa de que Jupyter represente adecuadamente estos objetos (incluso simplificando expresiones, de manera que si escribimos el número irracional `fracc(2,sympy.sqrt(2))`, es decir $\frac{2}{\sqrt{2}}$, Jupyter lo simplificara representándolo como $\sqrt{2}$).

Para poder trabajar con los Notebooks en Emacs importamos los métodos `display`, `Math` y `display_png` del módulo `IPython.display`.

Para generar las imágenes `png` con las expresiones en \LaTeX en un directorio temporal importamos `tempfile` También importamos el método `join` del módulo `os.path`.

```

1  # coding=utf8
2  import sympy
3  from IPython.display import display, Math, display_png
4  import tempfile
5  from os.path import join
6
7  <<Consideracion de qué es un número>>
8  <<Métodos para usar coeficientes racionales cuando sea posible>>
9  <<Método html general>>
10 <<Método latex general>>
11 <<Pinta un objeto en Jupyter>>
12 <<Método auxiliar CreaLista que devuelve listas>>
13 <<Método auxiliar CreaSistema que devuelve sistemas>>
14 <<Métodos primer_no_nulo y ultimo_no_nulo de un Sistema>>
15 <<Otros métodos auxiliares>>
16 <<Cribado de secuencias de transformaciones>>
17 <<Simplificación de expresiones simbólicas>>
18 <<Representación de un proceso de eliminación rprElim>>
19 <<Representación de un proceso de eliminación rprElimFyC>>
20 <<Representación de un proceso de eliminación rprElimCF>>
21 <<Representación de un proceso de eliminación dispElim, dispElimFyC y dispElimCF>>
22
23 <<Definición de la clase Sistema>>
24 <<Definición de la subclase BlockV>>
25 <<Definición de la subclase Vector>>
26 <<Definición de las subclases V0 y V1>>
27 <<Definición de la subclase BlockM>>
28 <<Definición de la subclase Matrix>>
29 <<Definición de las subclases M0, M1 e I>>
30 <<Definición de las subclases de sistemas simbólicos>>
31
32 <<Consideracion de qué es una secuencia>>
33
34 <<Definición de la clase T>>
35
36 <<Definición de la clase -SubEspacio->>
37 <<Definición de la clase -EAfin->>
38
39 <<Resolución de un sistema de ecuaciones homogéneo>>
```

```
40 <<Resolución de un Sistema de Ecuaciones Lineales>>
41
42 <<Definición de la clase Determinante>>
43
44 <<Definición de las subclases ElimX>>
45 <<Definición de las subclases InvMatX>>
46 <<Definición de las subclases DiagonalizaX>>
47
48 <<Definición de la clase ~FuncionLineal~>>
```

Capítulo 15

Métodos generales

15.1. Números

Consideraremos como números los enteros, los números de coma flotante, los números complejos, y toda la familia de objetos de tipo `Basic` del módulo `Sympy`, lo que nos permite trabajar con números racionales, muchos números reales y con expresiones simbólicas.

```
1 NumberTypes = (int, float, complex, sympy.Basic)
2 es_numero   = lambda x: isinstance(x, NumberTypes) and not isinstance(x, bool)
```

15.2. Números racionales

```
1 def fracc(a,b):
2     """Transforma la fracción a/b en un número racional si ello es posible"""
3     if all( [ isinstance(i, (int, float, sympy.Rational)) for i in (a,b) ] ):
4         return sympy.Rational(a, b)
5     else:
6         return a/b
7
8 def numer(a,b):
9     """Devuelve el numerador de a/b si la fracción es un número racional,
10     si no devuelve a/b"""
11     if all( [ isinstance(i, (int, float, sympy.Rational)) for i in (a,b) ] ):
12         return fracc(a,b).p
13     else:
14         return a/b
15
16 def denom(a,b):
17     """Devuelve el denominador de a/b si la fracción es un número
18     racional, si no devuelve 1"""
19     if all( [ isinstance(i, (int, float, sympy.Rational)) for i in (a,b) ] ):
20         return fracc(a,b).q
21     else:
22         return 1
```

15.3. Ristras

Según el diccionario de la Real Academia Española una *ristra* es un *conjunto de ciertas cosas colocadas unas tras otras*; por ello, denominamos genéricamente “ristra” a cualquier objeto de tipo

list, tuple o Sistema.

```
1 RistraTypes = (tuple, list, Sistema)
2 es_ristra = lambda x: isinstance(x, RistraTypes)
3
4 def es_ristra_de_numeros(arg):
5     return all( [es_numero(elemento) for elemento in arg] ) if es_ristra(arg) else None
```

15.4. Métodos de representación para el entorno Jupyter

El método `html`, escribe el inicio y el final de un párrafo en html y en medio del párrafo escribirá la cadena `TeX`; que contendrá el código $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ de las expresiones matemáticas que queremos que se muestren en pantalla cuando usamos [Jupyter Notebook](#). En el navegador, la librería [MathJax](#) de Javascript se encargará de convertir la expresión $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ en la grafía correspondiente.

```
1 def html(TeX):
2     """ Plantilla HTML para insertar comandos LaTeX """
3     return "<p style=\"text-align:center;\">$" + TeX + "$</p>"
```

El método `latex` general, intentará llamar al método `latex` particular del objeto que se quiere representar (para todos los objetos de esta librería se define su método de representación). Si el objeto no tiene definido el método `latex`, entonces se emplea el método `sympy.latex()` del módulo [Sympy](#). Así,

```
1 Sistema([ sympy.Rational(1.5, 3), fracc(2.4, 1.2), fracc(2, sympy.sqrt(2)) ])
```

donde las componentes se han escrito explícitamente como

$$\frac{1,5}{3}, \quad \frac{2,4}{1,2}, \quad \text{y} \quad \frac{2}{\sqrt{2}},$$

será representado como

$$\left[\frac{1}{2}; \quad 2; \quad \sqrt{2}; \right]$$

```
1 def latex(a):
2     """Método latex general"""
3     try:
4         return a.latex()
5     except:
6         return sympy.latex(a)
```

Para visualizar un objeto en su formato $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ definimos el método `pinta`.

```
1 def pinta(data):
2     """Muestra en Jupyter la representación latex de data"""
3     display(Math(latex(data)))
```

Por ejemplo, compárese lo que devuelve `pinta`

```
1 pinta( Vector([sympy.sqrt(2), 0, fracc(3, 4)] ) )
```

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

con lo que devuelve print

```
1 print( Vector([sympy.sqrt(2), 0, fracc(3, 4) ]) )
```

Vector([sqrt(2), 0, 3/4])

15.5. Métodos CreaLista y CreaSistema

```
1 def CreaLista(t):  
2     """Devuelve t si t es una lista; si no devuelve la lista [t]"""  
3     return t if isinstance(t, list) else [t]
```

```
1 def CreaSistema(t):  
2     """Devuelve t si t es un Sistema; si no devuelve un Sistema que contiene t"""  
3     return t if isinstance(t, Sistema) else Sistema(CreaLista(t))
```

15.6. Métodos primer_no_nulo y ultimo_no_nulo de un Sistema

```
1 def primer_no_nulo(s):  
2     """Primer elemento no nulo en un sistema de sistemas de números"""  
3     c = [] if es_numero(s) else s.primer_no_nulo()  
4     return c + primer_no_nulo(CreaSistema(s)|c[0]) if c!=[] else []  
5  
6 def ultimo_no_nulo(s):  
7     """Primer elemento no nulo en un sistema de sistemas de números"""  
8     c = [] if es_numero(s) else s.ultimo_no_nulo()  
9     return c + ultimo_no_nulo(CreaSistema(s)|c[0]) if c!=[] else []  
10  
11 def elementoPivote(s):  
12     """Primer elemento no nulo"""  
13     if es_numero(s):  
14         return s  
15     elif CreaSistema(s).elementoPivote():  
16         return elementoPivote(CreaSistema(s).extractor(CreaSistema(s).primer_no_nulo()))  
17     else:  
18         None  
19  
20 def elementoAntiPivote(s):  
21     """Último elemento no nulo"""  
22     if es_numero(s):  
23         return s  
24     elif CreaSistema(s).elementoAntiPivote():  
25         return elementoAntiPivote(CreaSistema(s).extractor(CreaSistema(s).ultimo_no_nulo()))  
26     else:  
27         None
```

15.7. Otros métodos auxiliares

```
1 def particion(s,n):  
2     """ genera la lista de particionamiento a partir de un conjunto y un número  
3     >>> particion({1,3,5},7)  
4  
5     [[1], [2, 3], [4, 5], [6, 7]]  
6     """  
7     s = {e for e in s if e<=n}  
8     p = sorted(list(s | set([0,n])))  
9     return [ list(range(p[k]+1,p[k+1]+1)) for k in range(len(p)-1) ]
```

```

10
11 def estructura(S):
12     if isinstance(S, Sistema):
13         c = [type(S)]
14         for item in S:
15             if not isinstance(item, Sistema):
16                 if es_numero(item):
17                     c = c + [('num',)]
18                 else:
19                     c = c + [(type(item),)]
20             else:
21                 c = c + [item.estructura()]
22     else:
23         if es_numero(S):
24             c = [('num',)]
25         else:
26             c = [(type(S),)]
27
28     return c

```

15.8. Cribado de secuencias de transformaciones

En el proceso de eliminación, muchas transformaciones elementales realmente son identidades (sumar 0 veces otro vector y multiplicar un vector por 1).

A la hora de representar los pasos de eliminación, normalmente es mejor omitir estos pasos innecesarios. Definimos un procedimiento general que quita de una lista de abreviaturas aquellas que son innecesarias en la representación. Si como argumento se le da una lista de abreviaturas, devuelve una lista filtrada. Si como argumento se le da una Transformación, devuelve una Transformación cuya lista de abreviaturas está filtrada.

Cribado de secuencias de transformaciones

```

1 def filtradopasos(pasos):
2     abv = pasos.abreviaturas if isinstance(pasos,T) else pasos
3
4     p = [T([j for j in T([abv[i]]).abreviaturas if (isinstance(j,set) and len(j)>1)\
5         or (isinstance(j,tuple) and len(j)==3 and j[0]!=0) \
6         or (isinstance(j,tuple) and len(j)==2 and j[0]!=1) )) \
7         for i in range(0,len(abv)) ]
8
9     abv = [ t for t in p if t.abreviaturas] # quitamos abreviaturas vacías de la lista
10
11     return T(abv) if isinstance(pasos,T) else abv

```

15.9. Simplificación de expresiones simbólicas

Simplificación de expresiones simbólicas

```

1 def simplify(self):
2     """Devuelve las expresiones simplificadas"""
3     if isinstance(self, (list, tuple)):
4         return type(self)([ simplify(e) for e in self ])
5     elif isinstance(self, Sistema):
6         self.lista=[ simplify(e) for e in self ]
7         return self
8     elif isinstance(self, T):
9         self.abreviaturas=[ simplify(op) for op in self.abreviaturas ]
10        return self
11    else:
12        return (sympy.simplify(self)).simplify()
13
14 def factor(self):

```

```

15     """Devuelve las expresiones factorizadas"""
16     if isinstance(self, (list, tuple)):
17         return type(self)([ factor(e) for e in self ])
18     elif isinstance(self, Sistema):
19         self.lista=[ factor(e) for e in self ]
20         return self
21     elif isinstance(self, T):
22         self.abreviaturas=[ factor(op) for op in self.abreviaturas ]
23         return self
24     else:
25         return sympy.factor(self)
26
27 def expand(self):
28     """Devuelve las expresiones factorizadas"""
29     if isinstance(self, (list, tuple)):
30         return type(self)([ expand(e) for e in self ])
31     elif isinstance(self, Sistema):
32         self.lista=[ expand(e) for e in self ]
33         return self
34     elif isinstance(self, T):
35         self.abreviaturas=[ expand(op) for op in self.abreviaturas ]
36         return self
37     else:
38         return sympy.expand(self)

```
