Notación Asociativa para un curso de Álgebra Lineal

y su implementación en la librería `nacal` para Python

XII Jornadas de Docencia en Economía (JDE 2020)

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

18 de Septiembre de 2020

Filosofía subyacente

- Muchos resultados de un curso de Álgebra Lineal se pueden obtener mediante productos matriciales (que son asociativos). Ello da pie a simplificar la notación.

- Pero se deben evitar las ambigüedades o incoherencias lógicas.

- La notación debe ser operativa y ayudar a obtener resultados (debe ser similar al empleo de un lenguaje de programación)

Filosofía subyacente

- Muchos resultados de un curso de Álgebra Lineal se pueden obtener mediante productos matriciales (que son asociativos). Ello da pie a simplificar la notación.

- Pero se deben evitar las ambigüedades o incoherencias lógicas.

- La notación debe ser operativa y ayudar a obtener resultados (debe ser similar al empleo de un lenguaje de programación)

Filosofía subyacente

- Muchos resultados de un curso de Álgebra Lineal se pueden obtener mediante productos matriciales (que son asociativos). Ello da pie a simplificar la notación.

- Pero se deben evitar las ambigüedades o incoherencias lógicas.

- La notación debe ser operativa y ayudar a obtener resultados (debe ser similar al empleo de un lenguaje de programación)

Operaciones con matrices

Muchas operaciones son realizables con productos de matrices.

- Selección de componentes:

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$$

- Transformaciones elementales:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

. . . y además el producto es asociativo. . . ¡Que es una gran ventaja!

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \text{podemos usar} \quad \mathbf{ABC}$$

Operaciones con matrices

Muchas operaciones son realizables con productos de matrices.

- Selección de componentes:

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix};\qquad \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$$

- Transformaciones elementales:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & -2\end{bmatrix}$$

. . . y además el producto es asociativo. . . ¡Que es una gran ventaja!

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad\Rightarrow\quad \text{podemos usar} \quad \mathbf{ABC}$$

Operaciones con matrices

Muchas operaciones son realizables con productos de matrices.

- Selección de componentes:

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$$

- Transformaciones elementales:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

...y además el producto es asociativo...¡Que es una gran ventaja!

$$\mathbf{A}\big(\mathbf{BC}\big)=\big(\mathbf{AB}\big)\mathbf{C} \quad\Rightarrow\quad \text{podemos usar} \quad \mathbf{ABC}$$

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
-

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- ¡Pero los libros no definen todo como matrices! $\rightarrow$ Esto da lugar a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- ¡Pero los libros no definen todo como matrices! $\rightarrow$ Esto da lugar a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)
  - Vector de $\mathbb{R}^n$ es un *sistema* (una lista ordenada) de números transponer *(escribir en horizonal o vertical)* no cambia la lista. Cuando se escribe $y^{\intercal}\mathbf{A}$ es que en realidad "y" es una matriz

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- ¡Pero los libros no definen todo como matrices! $\to$ Esto da lugar a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)
  - Vector de $\mathbb{R}^n$ es un *sistema* (una lista ordenada) de números
    transponer *(escribir en horizonal o vertical)* no cambia la lista
    Cuando se escribe $y^{\intercal}\mathbf{A}$ es que en realidad "y" es una matriz

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- ¡Pero los libros no definen todo como matrices! $\rightarrow$ Esto da lugar a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)
  - Vector de $\mathbb{R}^n$ es un *sistema* (una lista ordenada) de números
    transponer *(escribir en horizonal o vertical)* no cambia la lista
    Cuando se escribe $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ es que en realidad "$\boldsymbol{y}$" es una matriz
  - Se habla de vectores *fila* o *columna* → (¿cambia la lista?)

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- ¡Pero los libros no definen todo como matrices! $\rightarrow$ Esto da lugar a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)
  - Vector de $\mathbb{R}^n$ es un *sistema* (una lista ordenada) de números
    transponer *(escribir en horizonal o vertical)* no cambia la lista
    Cuando se escribe $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ es que en realidad "$\boldsymbol{y}$" es una matriz
  - Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?)
    ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*? *(¡nunca se especifica!)*. . . ¿Hay alguna diferencia?
  - El producto de *matrices* se define como una *matriz*. . . ¿pero acaso puede ser también un *número*?

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- ¡Pero los libros no definen todo como matrices! $\rightarrow$ Esto da lugar a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)
  - Vector de $\mathbb{R}^n$ es un *sistema* (una lista ordenada) de números
    transponer *(escribir en horizonal o vertical)* no cambia la lista
    Cuando se escribe $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ es que en realidad "$\boldsymbol{y}$" es una matriz
  - Se habla de vectores *fila* o *columna*... (¿cambia la lista?)
    ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*? *(¡nunca se especifica!)*... ¿Hay alguna diferencia?
  - El producto de *matrices* se define como una *matriz*... ¿pero acaso puede ser también un *número*?

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- ¡Pero los libros no definen todo como matrices! $\rightarrow$ Esto da lugar a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)
  - Vector de $\mathbb{R}^n$ es un *sistema* (una lista ordenada) de números
    transponer *(escribir en horizonal o vertical)* no cambia la lista
    Cuando se escribe $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ es que en realidad "$\boldsymbol{y}$" es una matriz
  - Se habla de vectores *fila* o *columna*... (¿cambia la lista?)
    ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*? *(¡nunca se especifica!)*... ¿Hay alguna diferencia?
  - El producto de *matrices* se define como una *matriz*... ¿pero acaso puede ser también un *número*? ¿o un vector? ($\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$)
  - ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- ¡Pero los libros no definen todo como matrices! $\rightarrow$ Esto da lugar a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)
  - Vector de $\mathbb{R}^n$ es un *sistema* (una lista ordenada) de números
    transponer *(escribir en horizonal o vertical)* no cambia la lista
    Cuando se escribe $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ es que en realidad "$\boldsymbol{y}$" es una matriz
  - Se habla de vectores *fila* o *columna*... (¿cambia la lista?)
    ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*? *(¡nunca se especifica!)*... ¿Hay alguna diferencia?
  - El producto de *matrices* se define como una *matriz*... ¿pero acaso puede ser también un *número*? ¿o un vector? ($\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$)
  - ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?
- **Esta vía** tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- ¡Pero los libros no definen todo como matrices! $\rightarrow$ Esto da lugar a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)
  - Vector de $\mathbb{R}^n$ es un *sistema* (una lista ordenada) de números
    transponer *(escribir en horizonal o vertical)* no cambia la lista
    Cuando se escribe $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ es que en realidad "$\boldsymbol{y}$" es una matriz
  - Se habla de vectores *fila* o *columna*... (¿cambia la lista?)
    ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*? *(¡nunca se especifica!)*... ¿Hay alguna diferencia?
  - El producto de *matrices* se define como una *matriz*... ¿pero acaso puede ser también un *número*? ¿o un vector? $(\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b})$
  - ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?
- **Esta vía** tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- ¡Pero los libros no definen todo como matrices! $\rightarrow$ Esto da lugar a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)
  - Vector de $\mathbb{R}^n$ es un *sistema* (una lista ordenada) de números
    transponer *(escribir en horizonal o vertical)* no cambia la lista
    Cuando se escribe $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ es que en realidad "$\boldsymbol{y}$" es una matriz
  - Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?)
    ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*? *(¡nunca se especifica!)*. . . ¿Hay alguna diferencia?
  - El producto de *matrices* se define como una *matriz*. . . ¿pero acaso puede ser también un *número*? ¿o un vector? ($\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$)
  - ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?
- **Esta vía** tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

Evitar ambigüedades o incoherencias

Para aprovechar lo anterior a veces se trabaja con *números* y *vectores* como si todo fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- ¡Pero los libros no definen todo como matrices! $\rightarrow$ Esto da lugar a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)
  - Vector de $\mathbb{R}^n$ es un *sistema* (una lista ordenada) de números transponer *(escribir en horizonal o vertical)* no cambia la lista Cuando se escribe $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ es que en realidad "$\boldsymbol{y}$" es una matriz
  - Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?) ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*? *(¡nunca se especifica!)*. . . ¿Hay alguna diferencia?
  - El producto de *matrices* se define como una *matriz*. . . ¿pero acaso puede ser también un *número*? ¿o un vector? ($\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$)
  - ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?
- **Esta vía** tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

Nueva notación

- Introduciré dos símbolos que funcionarán como operadores
  - El operador " $|$ " selecciona componentes,
  - El operador " $\boldsymbol{\tau}$ " realiza transformaciones elementales,
- Implementaré ambos operadores[1] en Python para probar que la notación funciona
- Mantendré la asociatividad en la notación

[1] así como el resto de definiciones: vectores, matrices, etc.

Nueva notación

- Introduciré dos símbolos que funcionarán como operadores
  - El operador " | " selecciona componentes,
  - El operador " τ " realiza transformaciones elementales,
- Implementaré ambos operadores[1] en Python para probar que la notación funciona
- Mantendré la asociatividad en la notación
  - respetando la definición de cada objeto (evitando incoherencias o ambigüedades).

[1] así como el resto de definiciones: vectores, matrices, etc.

Nueva notación

- Introduciré dos símbolos que funcionarán como operadores
  - El operador " $|$ " selecciona componentes,
  - El operador " τ " realiza transformaciones elementales,
- Implementaré ambos operadores[1] en Python para probar que la notación funciona
- Mantendré la asociatividad en la notación
  - respetando la definición de cada objeto (evitando incoherencias o ambigüedades).

[1]así como el resto de definiciones: vectores, matrices, etc.

Nueva notación

- Introduciré dos símbolos que funcionarán como operadores
  - El operador “ $|$ ” selecciona componentes,
  - El operador “ τ ” realiza transformaciones elementales,
- Implementaré ambos operadores[1] en Python para probar que la notación funciona
- Mantendré la asociatividad en la notación
  - respetando la definición de cada objeto (evitando incoherencias o ambigüedades).

[1] así como el resto de definiciones: vectores, matrices, etc.

Notación

- Números, vectores y matrices son objetos distintos

- Como es habitual, y para no recargar la notación se omite el operador producto "·" cuando es posible.

$$2\boldsymbol{b}; \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{x}; \qquad 5\mathbf{A}; \qquad \mathbf{A}\mathbf{B}; \ \ldots$$

(*en Python estaremos obligados a incluir el símbolo del producto: "*"*)

Operadores | y τ actuan por la derecha y/o por la izquierda

- El operador " | " selecciona componentes,
- El operador " τ " realiza transformaciones elementales,

(veámoslo. . .)

Notación

- Números, vectores y matrices son objetos distintos

- Como es habitual, y para no recargar la notación se omite el operador producto "·" cuando es posible.

$$2\boldsymbol{b}; \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{x}; \qquad 5\mathbf{A}; \qquad \mathbf{AB}; \ \ldots$$

(*en Python estaremos obligados a incluir el símbolo del producto: "∗"*)

Operadores | y τ actuan por la derecha y/o por la izquierda

- El operador " | " selecciona componentes,
- El operador " τ " realiza transformaciones elementales,

(veámoslo. . .)

Notación

- Números, vectores y matrices son objetos distintos
- Como es habitual, y para no recargar la notación se omite el operador producto "·" cuando es posible.

$$2b; \qquad \mathbf{A}x; \qquad 5\mathbf{A}; \qquad \mathbf{AB}; \; \ldots$$

(*en Python estaremos obligados a incluir el símbolo del producto: "∗"*)

Operadores | y $\boldsymbol{\tau}$ actuan por la derecha y/o por la izquierda

- El operador " | " selecciona componentes,
- El operador " $\boldsymbol{\tau}$ " realiza transformaciones elementales,

(veámoslo. . .)

Notación para vectores

Vector de $\mathbb{R}^n$: $\boldsymbol{a}$

Sistema (lista ordenada) de números

- Selector componente $i$ésima: $\boxed{{}_{i|}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{|i}}$ (número)

$$\boldsymbol{a} = (2, \quad 5)\,; \qquad \Rightarrow \qquad {}_{1|}\boldsymbol{a} = 2$$

- Transf. elemental de componentes $\boxed{{}_{\tau}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\tau}}$ (vector)

$$\underset{[(10)\mathbf{1}]}{\tau}\boldsymbol{a} = (20, \quad 5)$$

Sobre *vectores* da igual actuar por la derecha que por la izquierda

Notación para vectores

Vector de $\mathbb{R}^n$: $\boldsymbol{a}$

Sistema (lista ordenada) de números

- Selector componente $i$ésima: $\boxed{{}_{i|}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{|i}}$ (número)

$$\boldsymbol{a} = (2, \quad 5)\,; \qquad \Rightarrow \qquad {}_{1|}\boldsymbol{a} = 2$$

- Transf. elemental de componentes $\boxed{{}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\tau}}}$ (vector)

$$\underset{[(10)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{a} = (20, \quad 5)$$

Sobre *vectores* da igual actuar por la derecha que por la izquierda

Notación para vectores

Vector de $\mathbb{R}^n$: $\boldsymbol{a}$

Sistema (lista ordenada) de números

- Selector componente $i$ésima: $\boxed{{}_{i|}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{|i}}$ (número)

$$\boldsymbol{a} = (2, \quad 5)\,; \qquad \Rightarrow \qquad {}_{1|}\boldsymbol{a} = 2$$

- Transf. elemental de componentes $\boxed{{}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\tau}}}$ (vector)

$$\underset{[(10)\mathbf{1}]}{\tau}\boldsymbol{a} = (20, \quad 5)$$

Sobre *vectores* da igual actuar por la derecha que por la izquierda

Notación para matrices

Matriz : $\mathbf{A}$

Sistema (lista ordenada) de vectores (sus columnas)

Operaciones por la **derecha** operan sobre las **columnas**
(y por la izquierda sobre las filas)

- Columna $j$ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila $i$ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$

Notación para matrices

Matriz : $\mathbf{A}$

Sistema (lista ordenada) de vectores (sus columnas)

Operaciones por la **derecha** operan sobre las **columnas**
(y por la izquierda sobre las filas)

- Columna $j$ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila $i$ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i, j)ésimo (un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$

Notación para matrices

Matriz : $\mathbf{A}$

Sistema (lista ordenada) de vectores (sus columnas)
Operaciones por la **derecha** operan sobre las **columnas**
(y por la izquierda sobre las filas)

- Columna $j$ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila $i$ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i,j)ésimo (un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas: $\mathbf{A}_{\tau}$

Notación para matrices

Matriz : $\mathbf{A}$

Sistema (lista ordenada) de vectores (sus columnas)
Operaciones por la **derecha** operan sobre las **columnas**
(y por la izquierda sobre las filas)

- Columna $j$ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila $i$ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i, j)ésimo (un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas: $\mathbf{A}_{\tau}$
- Transf. elemental de filas: ${}_{\tau}\mathbf{A}$

Notación para matrices

Matriz : $\mathbf{A}$

Sistema (lista ordenada) de vectores (sus columnas)
Operaciones por la **derecha** operan sobre las **columnas**
(y por la izquierda sobre las filas)

- Columna $j$ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila $i$ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i,j)ésimo (un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas: $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}$
- Transf. elemental de filas: ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$

Notación para matrices

Matriz : $\mathbf{A}$

Sistema (lista ordenada) de vectores (sus columnas)
Operaciones por la **derecha** operan sobre las **columnas**
(y por la izquierda sobre las filas)

- Columna $j$ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila $i$ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i,j)ésimo (un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas: $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}$
- Transf. elemental de filas: ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$

Notación para matrices

Matriz : $\mathbf{A}$

Sistema (lista ordenada) de vectores (sus columnas)
Operaciones por la **derecha** operan sobre las **columnas**
(y por la izquierda sobre las filas)

- Columna $j$ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila $i$ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i,j)ésimo (un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas: $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}$
- Transf. elemental de filas: ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$

A good notation should be unambiguous, pregnant, easy to remember: it should avoid harmful second meanings, and take advantage of useful second meanings; the order and connection of signs should suggest the order and connection of things.

GEORGE POLYA, *How to Solve It (1957)*

Notation is everything.

CHARLES F. VAN LOAN, *FFTs and the Sparse Factorization Idea (1992)*

Producto de matrices

Definición habitual (con notación habitual)

$\mathbf{AB}$ es la matriz cuya componente (i,j)ésima es

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = \sum a_{ik} b_{k,j}$$

Definición altenativa (con nueva notación)

$\mathbf{AB}$ es la matriz cuya columna $j$ésima es

$$\big(\mathbf{AB}\big)_{|j} = \mathbf{A}\big(\mathbf{B}_{|j}\big)$$

Producto de matrices

Ahora la expresión

$$_{i|}\mathbf{AB}_{|j}$$

está *"llena" de significados* (todos correctos).

$$\left(\mathbf{AB}\right)_{|j} = \mathbf{A}\left(\mathbf{B}_{|j}\right)$$

$$_{i|}\left(\mathbf{AB}\right) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right)\mathbf{B}$$

$$_{i|}\left(\mathbf{AB}\right)_{|j} = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{B}_{|j}\right)$$

¡NO SON NECESARIOS LOS PARÉNTESIS! (notación asociativa)

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)_{|i}=\boldsymbol{a}_{|i}+\boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $\left(\lambda\boldsymbol{b}\right)_{|i}=\lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $\left(\mathsf{A}+\mathsf{B}\right)_{|j}=\mathsf{A}_{|j}+\mathsf{B}_{|j}$ y prod: $\left(\lambda\mathsf{A}\right)_{|j}=\lambda(\mathsf{A}_{|j})$.

Matriz por vector es un vector

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $\left(\lambda\boldsymbol{b}\right)_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $\left(\lambda\mathbf{A}\right)_{|j} = \lambda\left(\mathbf{A}_{|j}\right)$.

Matriz por vector es un vector

- ${}_{i|}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{b}\right) = \left({}_{i|}\mathbf{A}\right)\boldsymbol{b}$

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$.

Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\boldsymbol{b}$
- $(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \boldsymbol{a}(\mathbf{B}_{|j})$

Operadores " $|$ " y " τ " resultan ser lineales
(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$.

Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\boldsymbol{b}$
- $(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \boldsymbol{a}(\mathbf{B}_{|j})$

Operadores "$|$" y "τ" resultan ser lineales
(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Transpuesta (solo definida para matrices)

La transpuesta cambia los operadores "$|$" y "τ" de lado.

$$(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$$

(¡Ojo, NO es asociativa!)

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$.

Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\boldsymbol{b}$
- $(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \boldsymbol{a}(\mathbf{B}_{|j})$

Operadores "$|$" y "τ" resultan ser lineales
(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Transpuesta (solo definida para matrices)

La transpuesta cambia los operadores "$|$" y "τ" de lado.

$$(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$$

(¡Ojo, NO es asociativa!)

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda \boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda \mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$.

Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_{i|}(\mathbf{A}b) = ({}_{i|}\mathbf{A})b$
- $(a\mathbf{B})_{|j} = a(\mathbf{B}_{|j})$

Operadores "$|$" y "$\boldsymbol{\tau}$" resultan ser lineales
(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Transpuesta (solo definida para matrices)

La transpuesta cambia los operadores "$|$" y "$\boldsymbol{\tau}$" de lado.

$$(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$$

(¡Ojo, NO es asociativa!)

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda \boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda \mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$.

Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\boldsymbol{b}$
- $(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \boldsymbol{a}(\mathbf{B}_{|j})$

Operadores “$|$ ” y “$\boldsymbol{\tau}$ ” resultan ser lineales
(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Transpuesta (solo definida para matrices)

La transpuesta cambia los operadores “$|$ ” y “$\boldsymbol{\tau}$ ” de lado.

$$(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$$

(¡Ojo, NO es asociativa!)

Demos más simples

Típica demo de la Transpuesta del producto

$$(\mathbf{AB})^{\intercal}{}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

y

$$(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)_{ik} \cdot \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

Demo más simple

$${}_{i|}(\mathbf{AB})^{\intercal}{}_{|j} = {}_{j|}\mathbf{AB}_{|i} = {}_{j|}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{|i} = \mathbf{B}_{|i} \cdot {}_{j|}\mathbf{A} = {}_{i|}\left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{|j}$$

Demos más simples

Típica demo de la Transpuesta del producto

$$(\mathbf{AB})^{\intercal}{}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

y

$$(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)_{ik} \cdot \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

Demo más simple

$${}_{i|}(\mathbf{AB})^{\intercal}{}_{|j} \;=\; {}_{j|}\mathbf{AB}_{|i} \;=\; {}_{j|}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{|i} \;=\; \mathbf{B}_{|i} \cdot {}_{j|}\mathbf{A} \;=\; {}_{i|}\left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{|j}$$

Demos más simples

Típica demo de la Transpuesta del producto

$$(\mathbf{AB})^{\intercal}{}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

y

$$(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)_{ik} \cdot \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

Demo más simple

$${}_{i|}(\mathbf{AB})^{\intercal}{}_{|j} \;=\; {}_{j|}\mathbf{AB}_{|i} \;=\; {}_{j|}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{|i} \;=\; \mathbf{B}_{|i} \cdot {}_{j|}\mathbf{A} \;=\; {}_{i|}\left(\mathbf{B}^{\intercal}\right)\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{|j}$$

Las definiciones sencillas tienen implementación literal

Suma de vectores

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}} \quad \text{para} \quad i = 1:n$$

```
Vector ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,len(self)+1) ])
```

donde `self` es $\boldsymbol{a}$ y `other` es $\boldsymbol{b}$

Producto de Matrices

$$\boxed{(\mathbf{AX})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_{|j})} \qquad \text{para } j = 1:n.$$

```
Matrix ( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1) ] )
```

donde `self` es $\mathbf{A}$ y `x` es $\mathbf{X}$

Las definiciones sencillas tienen implementación literal

Suma de vectores

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i}=\boldsymbol{a}_{|i}+\boldsymbol{b}_{|i}} \quad \text{para} \quad i=1:n$$

```
Vector ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,len(self)+1) ])
```

donde `self` es $\boldsymbol{a}$ y `other` es $\boldsymbol{b}$

Producto de Matrices

$$\boxed{(\mathbf{AX})_{|j}=\mathbf{A}(\mathbf{X}_{|j})} \qquad \text{para } j=1:n.$$

```
Matrix ( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1) ] )
```

donde `self` es $\mathbf{A}$ y `x` es $\mathbf{X}$

Notación Asociativa para un curso de Álgebra Lineal

He implementado en Python lo necesario para dar un curso.

`nacal` está pensada para ser usada con los notebooks de Jupyter

- Repositorio GitHub:
  `https://github.com/mbujosab/nacallib`
- Repositorio Python Package Index (PyPI):
  `https://pypi.org/project/nacal`
  - `pip3 install nacal`
- Notebook de demostración
- Notebooks del curso.

Ventajas de la nueva notación

- Notación operativa y con semántica
  - Descripción más simple de las operaciones
  - Simplificación de las demostraciones
  - Código más simple al programar

- Respeta las definiciones salvando las ambigüedades de la notación habitual
  - vease la siguente transparencia

Ventajas de la nueva notación

- Notación operativa y con semántica
  - Descripción más simple de las operaciones
  - Simplificación de las demostraciones
  - Código más simple al programar

- Respeta las definiciones salvando las ambigüedades de la notación habitual
  - vease la siguente transparencia

Operaciones con los nuevos operadores

- Selección de componentes:

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}_{|1} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}; \qquad {}_{2|}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}_{|2} = 4$$

- Transformaciones elementales:

$$\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & -2\end{bmatrix}$$

. . . y además la notación es asociativa. . . ¡Que es una gran ventaja!

$$\begin{array}{lcll} {}_{i|}(\mathbf{BC}) = ({}_{i|}\mathbf{B})\mathbf{C} & \Rightarrow & \text{podemos usar} & {}_{i|}\mathbf{BC} \\ {}_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{BC}) = ({}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{B})\,\mathbf{C} & \Rightarrow & \text{podemos usar} & {}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{BC} \end{array}$$