

## Notación Asociativa para un curso de Álgebra Lineal

y su implementación en la librería `naca1` para Python.

(las matemáticas como un lenguaje de programación)

XVI JORNADAS DE DOCENCIA EN ECONOMÍA (JDE 2024)

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

20 de junio de 2024

1 / 17

## Filosofía subyacente

- Muchas operaciones del Álgebra Lineal pueden realizarse con productos matriciales (que son asociativos). Esto permite simplificar la notación.
- Pero se deben evitar las ambigüedades o incoherencias lógicas.
- La notación debe ser operativa y ayudar a obtener resultados (debe ser similar al empleo de un lenguaje de programación)

2 / 17

## Operaciones con matrices

Muchas operaciones son realizables con productos de **matrices**.

- Selección:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

(los paréntesis son innecesarios pues el producto es asociativo)

- Transformaciones elementales (eliminación gaussiana):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(pero si multiplicamos por la derecha transformamos las columnas)

pero en estos ejemplos todo son **matrices**...

3 / 17

## Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si **números** y **vectores** fueran **matrices**.

- Matlab (Matrix Laboratory)  $\rightarrow$  libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros no todo son matrices!

Esto conduce a **incoherencias** (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de  $\mathbb{R}^n$  es una **lista** de **números** (transponer no tiene sentido) (escribir en horizontal o vertical no cambia la lista)  
Por tanto, en la expresión  $y^T A$  el símbolo " $y$ " debe ser una **matriz**
- Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?)  
¿ $\mathbb{R}^n$  está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*?  
(*no se especifica!*). . . ¿Habría alguna diferencia?
- El producto de **matrices** se define como una **matriz**. . . ¿pero acaso puede ser también un **número** o un vector?
- ¿Es lo mismo una lista de **números** que una lista de **matrices**?

Esta **vía** tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

4 / 17

## Nueva notación

- Introduciré dos símbolos que funcionarán como operadores
  - “|” selecciona componentes,
  - “ $\tau$ ” realiza transformaciones elementales,
 (podrán actuar tanto por la izquierda como por la derecha)
- Con ellos se mantiene la asociatividad en la notación
  - pero respetando la definición de cada objeto (evitando así incoherencias o ambigüedades).
- He implementado la notación<sup>1</sup> en Python para probar que funciona como un lenguaje de programación.  
(es una demostración de su potencia y consistencia).

<sup>1</sup>así como el resto de objetos: vectores, matrices, etc.

## Notación

- Números, vectores y matrices son objetos distintos
- Como es habitual (y para no recargar la notación) se omite el operador producto “.” cuando es posible.

$$2b; \quad \mathbf{A}x; \quad 5\mathbf{A}; \quad \mathbf{A}\mathbf{B}; \dots$$

(en Python estaremos obligados a incluir el símbolo del producto: “\*”)

### Operadores | y $\tau$ actúan por la derecha y/o por la izquierda

- El operador “|” selecciona componentes,
  - El operador “ $\tau$ ” realiza transformaciones elementales,
- (veámoslo...)

## Notación para vectores de $\mathbb{R}^n$

Lista ordenada de números:  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Selección de la componente  $i$ -ésima:  $i|\mathbf{a} = a_{|i}$  (número)

$$1|\mathbf{a} = 2; \quad \mathbf{a}_{|2} = 5$$

- Transf. elemental de componentes  $\tau \mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau$  (vector)

$${}_{[(10)1]}\tau \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_{[(-3)1+2]\tau} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sobre **vectores** da igual actuar por la derecha que por la izquierda

## Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas).  $\mathbf{A} = [\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}; \dots]$

Operaciones por la **derecha** actúan sobre las **columnas**  
por la **izquierda** actúan sobre las **filas**

- Columna  $j$ -ésima de una matriz (es un vector):  $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila  $i$ -ésima de una matriz (es un vector):  ${}_i|\mathbf{A}$
- Elemento  $(i, j)$ -ésimo (es un número):  ${}_i|\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas:  $\mathbf{A}_\tau$
- Transf. elemental de filas:  ${}_\tau\mathbf{A}$

¡Aparece una nueva regla!

La transposición “cambia de lado” las operaciones

$${}_i|\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)_{|i}; \quad {}_\tau\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)_\tau; \quad \mathbf{x}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)\mathbf{x}$$

(La transpuesta no se define para los vectores)

*A good notation should be unambiguous, pregnant, easy to remember: it should avoid harmful second meanings, and take advantage of useful second meanings; the order and connection of signs should suggest the order and connection of things.*

GEORGE POLYA, *How to Solve It* (1957)

*Notation is everything.*

CHARLES F. VAN LOAN, *FFTs and the Sparse Factorization Idea* (1992)

## Operaciones con los nuevos operadores

- Selección de componentes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{|2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad {}_{1|} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{|2} = 3$$

- Transformaciones elementales:

$$[(-2)\overset{\tau}{1}+2] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La notación mantiene la asociatividad  
pero ahora **NO** todo son **matrices**.

## Producto de matrices

### Definición con notación habitual

**AB** es la matriz cuya componente  $(i, j)$ -ésima es

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = \sum a_{ik} b_{k,j}$$

### Definición con la nueva notación (*asociativa*)

**AB** es la matriz cuya columna  $j$ -ésima (vector) es

$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$$

Así que la  $i$ -ésima componente de la  $j$ -ésima columna,  ${}_i|(\mathbf{AB})_{|j}$ , es

$${}_i|((\mathbf{AB})_{|j}) = {}_i|(\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})) = ({}_i|\mathbf{A})(\mathbf{B}_{|j})$$

## Producto de matrices

Ahora la expresión (sin paréntesis)

$${}_i|\mathbf{AB}_{|j}$$

está "llena" de significados (todos correctos).

$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$$

$${}_i|(\mathbf{AB}) = ({}_i|\mathbf{A})\mathbf{B}$$

$${}_i|\mathbf{AB}_{|j} = ({}_i|\mathbf{A})(\mathbf{B}_{|j})$$

- La asociatividad hace que la notación sea muy potente
- Según situamos los paréntesis destacamos un aspecto u otro

## Demos más simples

### Típica demo de la Transpuesta del producto

$$(\mathbf{AB})^T_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki},$$

y

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{B}^T)_{ik} \cdot (\mathbf{A}^T)_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki},$$

### Demo simple (basada en reglas de manipulación simbólica)

$$\left( (\mathbf{AB})^T \right)_{|j} = {}_j | \mathbf{AB} = \left( (\mathbf{A}^T)_{|j} \right) \mathbf{B} = (\mathbf{B}^T) (\mathbf{A}^T)_{|j}.$$

13 / 17

## Las definiciones sencillas tienen implementación literal

### Suma de vectores

$$\boxed{(a + b)_{|i} = a_{|i} + b_{|i}} \quad \text{para } i = 1 : n$$

```
Vector ( [ (self|i) + (other|i) for i in range(1,len(self)+1) ] )
```

donde self es  $a$  y other es  $b$

### Producto de Matrices

$$\boxed{(\mathbf{AX})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_{|j})} \quad \text{para } j = 1 : n.$$

```
Matrix ( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1) ] )
```

donde self es  $\mathbf{A}$  y x es  $\mathbf{X}$

15 / 17

## Definiciones sencillas

### Suma y producto por un escalar

**Vectores.** Suma:  $(a + b)_{|i} = a_{|i} + b_{|i}$  y prod:  $(\lambda b)_{|i} = \lambda(b_{|i})$ .

**Matrices.** Suma:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$  y prod:  $(\lambda \mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$ .

### Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_i | (\mathbf{A}b) = ({}_i | \mathbf{A})b$
- $(a\mathbf{B})_{|j} = a(\mathbf{B}_{|j})$

*Operadores “|” y “τ” son lineales*

(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Por eso la notación con matrices funciona (aunque entonces todo son matrices)

14 / 17

## Ventajas de la nueva notación

- Notación operativa y con semántica
  - Simplificación de las demostraciones
  - Descripción más simple de las operaciones
  - Código más simple al programar
- Respeta las definiciones salvando las ambigüedades de la notación habitual pero manteniendo la asociatividad

16 / 17

## Notación Asociativa para un curso de Álgebra Lineal

He implementado en Python lo necesario para dar un [curso](#).

[nacal](#) está pensada para ser usada con los [notebooks](#) de Jupyter

- Repositorio GitHub:  
<https://github.com/mbujosab/nacallib>
- Repositorio Python Package Index (PyPI):  
<https://pypi.org/project/nacal>
  - `pip3 install nacal`
- Notebook de demostración
- Notebooks del curso.