

# Notación Asociativa para un curso de Álgebra Lineal

y su implementación en la librería `naca1` para Python.

*(las matemáticas como un lenguaje de programación)*

XVI JORNADAS DE DOCENCIA EN ECONOMÍA (JDE 2024)

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

20 de junio de 2024

# Filosofía subyacente

- Muchas operaciones del Álgebra Lineal pueden realizarse con productos matriciales (que son asociativos). Esto permite simplificar la notación.
- Pero se deben evitar las ambigüedades o incoherencias lógicas.
- La notación debe ser operativa y ayudar a obtener resultados (debe ser similar al empleo de un lenguaje de programación)

# Filosofía subyacente

- Muchas operaciones del Álgebra Lineal pueden realizarse con productos matriciales (que son asociativos). Esto permite simplificar la notación.
- Pero se deben evitar las ambigüedades o incoherencias lógicas.
- La notación debe ser operativa y ayudar a obtener resultados (debe ser similar al empleo de un lenguaje de programación)

# Filosofía subyacente

- Muchas operaciones del Álgebra Lineal pueden realizarse con productos matriciales (que son asociativos). Esto permite simplificar la notación.
- Pero se deben evitar las ambigüedades o incoherencias lógicas.
- La notación debe ser operativa y ayudar a obtener resultados (debe ser similar al empleo de un lenguaje de programación)

# Operaciones con matrices

Muchas operaciones son realizables con productos de **matrices**.

- Selección:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

*(los paréntesis son innecesarios pues el producto es asociativo)*

- Transformaciones elementales (eliminación gaussiana):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

*(pero si multiplicamos por la derecha transformamos las columnas)*

*pero en estos ejemplos todo son matrices...*

# Operaciones con matrices

Muchas operaciones son realizables con productos de **matrices**.

- Selección:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

*(los paréntesis son innecesarios pues el producto es asociativo)*

- Transformaciones elementales (eliminación gaussiana):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(pero si multiplicamos por la derecha transformamos las columnas)

*pero en estos ejemplos todo son matrices...*

# Operaciones con matrices

Muchas operaciones son realizables con productos de **matrices**.

- Selección:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

*(los paréntesis son innecesarios pues el producto es asociativo)*

- Transformaciones elementales (eliminación gaussiana):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

*(pero si multiplicamos por la derecha transformamos las columnas)*

*pero en estos ejemplos todo son **matrices**...*

## Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory)  $\longrightarrow$  libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a **incoherencias** (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de  $\mathbb{R}^n$  es una lista de números (transponer no tiene sentido)  
(escribir en horizontal o vertical no cambia la lista)



# Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory)  $\longrightarrow$  libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de  $\mathbb{R}^n$  es una **lista** de números (transponer no tiene sentido)  
(*escribir en horizontal o vertical no cambia la lista*)  
Por tanto, en la expresión  $y^T A$  el símbolo " $y$ " debe ser una matriz

•

# Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) → libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de  $\mathbb{R}^n$  es una **lista** de números (transponer no tiene sentido)  
(*escribir en horizontal o vertical no cambia la lista*)

Por tanto, en la expresión  $y^T A$  el símbolo " $y$ " debe ser una matriz



# Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) → libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de  $\mathbb{R}^n$  es una **lista** de números (transponer no tiene sentido)  
(*escribir en horizontal o vertical no cambia la lista*)

Por tanto, en la expresión  $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$  el símbolo “ $\mathbf{y}$ ” debe ser una matriz

- Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?)  
¿ $\mathbb{R}^n$  está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*?  
(*¡no se especifica!*). . . ¿Habría alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*. . . ¿pero acaso puede ser también un *número* o un *vector*?

# Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) → libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- **Vector de  $\mathbb{R}^n$  es una lista de números** (transponer no tiene sentido)  
(escribir en horizontal o vertical no cambia la lista)  
Por tanto, en la expresión  $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$  el símbolo “ $\mathbf{y}$ ” debe ser una matriz
- Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?)  
¿ $\mathbb{R}^n$  está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*?  
(¡no se especifica!). . . ¿Habría alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*. . . ¿pero acaso puede ser también un *número* o un vector?
- ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?

# Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) → libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de  $\mathbb{R}^n$  es una **lista** de números (**transponer no tiene sentido**)  
(*escribir en horizontal o vertical no cambia la lista*)  
Por tanto, en la expresión  $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$  el símbolo " $\mathbf{y}$ " debe ser una matriz
- Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?)  
¿ $\mathbb{R}^n$  está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*?  
(*¡no se especifica!*). . . ¿Habría alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*. . . ¿pero acaso puede ser también un *número* o un vector?
- ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?

Esta vía tan extendida **provoca**, como mínimo, ciertas **ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

# Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) → libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de  $\mathbb{R}^n$  es una **lista** de números (transponer no tiene sentido)  
(escribir en horizontal o vertical no cambia la lista)  
Por tanto, en la expresión  $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$  el símbolo " $\mathbf{y}$ " debe ser una **matriz**
- Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?)  
¿ $\mathbb{R}^n$  está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*?  
(*¡no se especifica!*). . . ¿Habría alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*. . . ¿pero acaso puede ser también un **número** o un vector?
- ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?

Esta vía tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

# Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) → libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- **Vector de  $\mathbb{R}^n$  es una lista de números** (transponer no tiene sentido)  
(escribir en horizontal o vertical no cambia la lista)  
Por tanto, en la expresión  $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$  el símbolo " $\mathbf{y}$ " debe ser una matriz
- Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?)  
¿ $\mathbb{R}^n$  está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*?  
(*¡no se especifica!*). . . ¿Habría alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*. . . ¿pero acaso puede ser también un *número* o un vector?
- ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?

Esta vía tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

# Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) → libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de  $\mathbb{R}^n$  es una *lista* de números (transponer no tiene sentido)  
(escribir en horizontal o vertical no cambia la lista)  
Por tanto, en la expresión  $y^T A$  el símbolo " $y$ " debe ser una matriz
- Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?)  
¿ $\mathbb{R}^n$  está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*?  
(*¡no se especifica!*). . . ¿Habría alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*. . . ¿pero acaso puede ser también un *número* o un vector?
- ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?

**Esta vía** tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)



# Nueva notación

- **Introduciré dos símbolos** que funcionarán como operadores
  - “ $|$ ” selecciona componentes,
  - “ $\tau$ ” realiza transformaciones elementales,  
(podrán actuar tanto por la izquierda como por la derecha)
- Con ellos se mantiene la asociatividad en la notación

# Nueva notación

- Introduciré dos símbolos que funcionarán como operadores
  - “ | ” selecciona componentes,
  - “  $\tau$  ” realiza transformaciones elementales,(podrán actuar tanto por la izquierda como por la derecha)
- Con ellos se mantiene la asociatividad en la notación
  - pero respetando la definición de cada objeto (evitando así incoherencias o ambigüedades).
- He implementado la notación<sup>1</sup> en Python para probar que funciona como un lenguaje de programación.  
(es una demostración de su potencia y consistencia).

---

<sup>1</sup>así como el resto de objetos: vectores, matrices, etc.

# Nueva notación

- **Introduciré dos símbolos** que funcionarán como operadores
  - “ | ” selecciona componentes,
  - “  $\tau$  ” realiza transformaciones elementales,  
(podrán actuar tanto por la izquierda como por la derecha)
- Con ellos se mantiene la asociatividad en la notación
  - pero respetando la definición de cada objeto  
(evitando así incoherencias o ambigüedades).
- He implementado la notación<sup>1</sup> en Python para probar que funciona como un lenguaje de programación.  
(es una demostración de su potencia y consistencia).

---

<sup>1</sup>así como el resto de objetos: vectores, matrices, etc.

# Nueva notación

- **Introduciré dos símbolos** que funcionarán como operadores
  - “ $|$ ” selecciona componentes,
  - “ $\tau$ ” realiza transformaciones elementales,  
(podrán actuar tanto por la izquierda como por la derecha)
- Con ellos se mantiene la asociatividad en la notación
  - pero respetando la definición de cada objeto  
(evitando así incoherencias o ambigüedades).
- He implementado la notación<sup>1</sup> en Python para probar que funciona como un lenguaje de programación.  
*(es una demostración de su potencia y consistencia).*

---

<sup>1</sup>así como el resto de objetos: vectores, matrices, etc.

# Nueva notación

- **Introduciré dos símbolos** que funcionarán como operadores
  - “  $|$  ” selecciona componentes,
  - “  $\tau$  ” realiza transformaciones elementales,  
(podrán actuar tanto por la izquierda como por la derecha)
- Con ellos se mantiene la asociatividad en la notación
  - pero respetando la definición de cada objeto  
(evitando así incoherencias o ambigüedades).
- He implementado la notación<sup>1</sup> en Python para probar que funciona como un lenguaje de programación.  
*(es una demostración de su potencia y consistencia).*

---

<sup>1</sup>así como el resto de objetos: vectores, matrices, etc.

# Notación

- Números, vectores y matrices **son objetos distintos**
- Como es habitual (y para no recargar la notación) se omite el operador producto “.” cuando es posible.

$$2b; \quad \mathbf{A}x; \quad 5\mathbf{A}; \quad \mathbf{A}\mathbf{B}; \dots$$

(en Python estaremos obligados a incluir el símbolo del producto: “\*”)

Operadores  $|$  y  $\tau$  actúan por la derecha y/o por la izquierda

- El operador “ $|$ ” selecciona componentes,
- El operador “ $\tau$ ” realiza transformaciones elementales,

(veámoslo...)

# Notación para vectores de $\mathbb{R}^n$

Lista ordenada de números:  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Selección de la componente  $i$ -ésima:  $\boxed{a_i = a_{|i}}$  (número)

$$a_{|1} = 2; \quad a_{|2} = 5$$

- Transf. elemental de componentes  $\boxed{a_\tau = a_\tau}$  (vector)

$$a_{[(10)1]} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad a_{[(-3)1+2]} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sobre *vectores* da igual actuar por la derecha que por la izquierda

# Notación para vectores de $\mathbb{R}^n$

Lista ordenada de números:  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Selección de la componente  $i$ -ésima:  $\boxed{i|\mathbf{a} = \mathbf{a}|i}$  (número)

$$1|\mathbf{a} = 2; \quad \mathbf{a}|_2 = 5$$

- Transf. elemental de componentes  $\boxed{\tau \mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau}$  (vector)

$${}_{[(10)1]}^\tau \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_{[(-3)1+2]}^\tau = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sobre *vectores* da igual actuar por la derecha que por la izquierda



# Notación para vectores de $\mathbb{R}^n$

Lista ordenada de números:  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Selección de la componente  $i$ -ésima:  $\boxed{i|\mathbf{a} = \mathbf{a}|i}$  (número)

$$1|\mathbf{a} = 2; \quad \mathbf{a}|_2 = 5$$

- Transf. elemental de componentes  $\boxed{\boldsymbol{\tau}\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\boldsymbol{\tau}}}$  (vector)

$${}_{[(10)1]}\boldsymbol{\tau}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_{[(-3)1+2]\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sobre *vectores* da igual actuar por la derecha que por la izquierda

# Notación para vectores de $\mathbb{R}^n$

Lista ordenada de números:  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Selección de la componente  $i$ -ésima:  $\boxed{i|\mathbf{a} = \mathbf{a}|i}$  (número)

$$1|\mathbf{a} = 2; \quad \mathbf{a}|_2 = 5$$

- Transf. elemental de componentes  $\boxed{\tau\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau}$  (vector)

$${}_{[(10)1]}\tau\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_{[(-3)\tau 1+2]} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sobre *vectores* da igual actuar por la derecha que por la izquierda

## Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas).  $\mathbf{A} = [x; y; z; ]$

Operaciones por la **derecha** actúan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actúan sobre las **filas**

- Columna  $j$ -ésima de una matriz (es un vector):  $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila  $i$ -ésima de una matriz (es un vector):  ${}_i\mathbf{A}$

# Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas).  $\mathbf{A} = [x; y; z; ]$

Operaciones por la **derecha** actúan sobre las **columnas**  
por la **izquierda** actúan sobre las **filas**

- Columna  $j$ -ésima de una matriz (es un vector):  $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila  $i$ -ésima de una matriz (es un vector):  ${}_i\mathbf{A}$
- Elemento  $(i, j)$ -ésimo (es un número):  ${}_i\mathbf{A}_{|j}$

## Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas).  $\mathbf{A} = [\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}; ]$

Operaciones por la **derecha** actúan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actúan sobre las **filas**

- Columna  $j$ -ésima de una matriz (es un vector):  $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila  $i$ -ésima de una matriz (es un vector):  ${}_i|\mathbf{A}$
- Elemento  $(i, j)$ -ésimo (es un número):  ${}_i|\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas:  $\mathbf{A}_\tau$

# Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas).  $\mathbf{A} = [\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}; ]$

Operaciones por la **derecha** actúan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actúan sobre las **filas**

- Columna  $j$ -ésima de una matriz (es un vector):  $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila  $i$ -ésima de una matriz (es un vector):  ${}_i\mathbf{A}$
- Elemento  $(i, j)$ -ésimo (es un número):  ${}_i\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas:  $\mathbf{A}_{\tau}$
- Transf. elemental de filas:  ${}_{\tau}\mathbf{A}$

## Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas).  $\mathbf{A} = [\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}; ]$

Operaciones por la **derecha** actúan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actúan sobre las **filas**

- Columna  $j$ -ésima de una matriz (es un vector):  $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila  $i$ -ésima de una matriz (es un vector):  ${}_i\mathbf{A}$
- Elemento  $(i, j)$ -ésimo (es un número):  ${}_i\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas:  $\mathbf{A}_\tau$
- Transf. elemental de filas:  ${}_\tau\mathbf{A}$

¡Aparece una nueva regla!

La transposición "cambia de lado" las operaciones

$${}_i\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)_{|i}; \quad {}_\tau\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)_\tau; \quad \mathbf{x}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)\mathbf{x}$$

(La transpuesta no se define para los vectores)

# Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas).  $\mathbf{A} = [\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}; ]$

Operaciones por la **derecha** actúan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actúan sobre las **filas**

- Columna  $j$ -ésima de una matriz (es un vector):  $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila  $i$ -ésima de una matriz (es un vector):  ${}_i\mathbf{A}$
- Elemento  $(i, j)$ -ésimo (es un número):  ${}_i\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas:  $\mathbf{A}_\tau$
- Transf. elemental de filas:  ${}_\tau\mathbf{A}$

¡Aparece una nueva regla!

La transposición “cambia de lado” las operaciones

$${}_i\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)_{|i}; \quad {}_\tau\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)_\tau; \quad x\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)x$$

(La transpuesta no se define para los vectores)



## Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas).  $\mathbf{A} = [\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z};]$

Operaciones por la **derecha** actúan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actúan sobre las **filas**

- Columna  $j$ -ésima de una matriz (es un vector):  $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila  $i$ -ésima de una matriz (es un vector):  ${}_i\mathbf{A}$
- Elemento  $(i, j)$ -ésimo (es un número):  ${}_i\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas:  $\mathbf{A}_\tau$
- Transf. elemental de filas:  ${}_\tau\mathbf{A}$

¡Aparece una nueva regla!

La transposición “cambia de lado” las operaciones

$${}_i\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)_{|i}; \quad {}_\tau\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)_\tau; \quad x\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)x$$

(La transpuesta no se define para los vectores)

## Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas).  $\mathbf{A} = [\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z};]$

Operaciones por la **derecha** actúan sobre las **columnas**  
 por la **izquierda** actúan sobre las **filas**

- Columna  $j$ -ésima de una matriz (es un vector):  $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila  $i$ -ésima de una matriz (es un vector):  ${}_i|\mathbf{A}$
- Elemento  $(i, j)$ -ésimo (es un número):  ${}_i|\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas:  $\mathbf{A}_\tau$
- Transf. elemental de filas:  ${}_\tau\mathbf{A}$

¡Aparece una nueva regla!

La transposición “cambia de lado” las operaciones

$${}_i|\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)_{|i}; \quad {}_\tau\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)_\tau; \quad \mathbf{x}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^\top)\mathbf{x}$$

(La transpuesta no se define para los vectores)

*A good notation should be unambiguous, pregnant, easy to remember: it should avoid harmful second meanings, and take advantage of useful second meanings; the order and connection of signs should suggest the order and connection of things.*

GEORGE POLYA, *How to Solve It* (1957)

*Notation is everything.*

CHARLES F. VAN LOAN, *FFTs and the Sparse Factorization Idea* (1992)

# Operaciones con los nuevos operadores

- Selección de componentes:

$$\left[ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \right]_{|2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad {}_1| \left[ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \right]_{|2} = 3$$

- Transformaciones elementales:

$${}_{[(-2)\overset{\tau}{1}+2]} \left[ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{array} \right]$$

La notación mantiene la asociatividad  
*pero ahora **NO** todo son **matrices**.*

# Producto de matrices

## Definición con notación habitual

**AB** es la matriz cuya componente  $(i, j)$ -ésima es

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = \sum a_{ik}b_{k,j}$$

## Definición con la nueva notación (*asociativa*)

**AB** es la matriz cuya columna  $j$ -ésima (vector) es

$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$$

Así que la  $i$ -ésima componente de la  $j$ -ésima columna,  $_{i|}(\mathbf{AB})_{|j}$ , es

$$_{i|}\left((\mathbf{AB})_{|j}\right) = _{i|}\left(\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})\right) = (_{i|}\mathbf{A})(\mathbf{B}_{|j})$$

# Producto de matrices

## Definición con notación habitual

**AB** es la matriz cuya componente  $(i, j)$ -ésima es

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = \sum a_{ik} b_{k,j}$$

## Definición con la nueva notación (*asociativa*)

**AB** es la matriz cuya columna  $j$ -ésima (vector) es

$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$$

Así que la  $i$ -ésima componente de la  $j$ -ésima columna,  $_{i|}(\mathbf{AB})_{|j}$ , es

$$_{i|} \left( (\mathbf{AB})_{|j} \right) = _{i|} \left( \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j}) \right) = (_{i|}\mathbf{A})(\mathbf{B}_{|j})$$

# Producto de matrices

## Definición con notación habitual

**AB** es la matriz cuya componente  $(i, j)$ -ésima es

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = \sum a_{ik} b_{k,j}$$

## Definición con la nueva notación (*asociativa*)

**AB** es la matriz cuya columna  $j$ -ésima (vector) es

$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$$

Así que la  $i$ -ésima componente de la  $j$ -ésima columna,  ${}_i(\mathbf{AB})_{|j}$ , es

$${}_i \left( (\mathbf{AB})_{|j} \right) = {}_i \left( \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j}) \right) = ({}_i \mathbf{A})(\mathbf{B}_{|j})$$

## Producto de matrices

Ahora la expresión (sin paréntesis)

$${}_i|\mathbf{AB}|_j$$

está “llena” de significados (todos correctos).

$$(\mathbf{AB})|_j = \mathbf{A}(\mathbf{B}|_j)$$

$${}_i|(\mathbf{AB}) = ({}_i|\mathbf{A})\mathbf{B}$$

$${}_i|\mathbf{AB}|_j = ({}_i|\mathbf{A})(\mathbf{B}|_j)$$

- *La asociatividad hace que la notación sea muy potente*
- *Según situamos los paréntesis destacamos un aspecto u otro*



## Demos más simples

### Típica demo de la Transpuesta del producto

$$(\mathbf{AB})^{\top}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki},$$

y

$$(\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{\top})_{ij} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{B}^{\top})_{ik} \cdot (\mathbf{A}^{\top})_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki},$$

Demo simple (basada en reglas de manipulación simbólica)

$$\left( (\mathbf{AB})^{\top} \right)_{|j} = {}_{|j} \mathbf{AB} = \left( (\mathbf{A}^{\top})_{|j} \right) \mathbf{B} = (\mathbf{B}^{\top})(\mathbf{A}^{\top})_{|j}.$$

## Demos más simples

Típica demo de la Transpuesta del producto

$$(\mathbf{AB})^{\top}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki},$$

y

$$(\mathbf{B}^{\top} \mathbf{A}^{\top})_{ij} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{B}^{\top})_{ik} \cdot (\mathbf{A}^{\top})_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki},$$

Demo simple (basada en reglas de manipulación simbólica)

$$\left( (\mathbf{AB})^{\top} \right)_{|j} = {}_{|j} \mathbf{AB} = \left( (\mathbf{A}^{\top})_{|j} \right) \mathbf{B} = (\mathbf{B}^{\top}) (\mathbf{A}^{\top})_{|j}.$$

# Definiciones sencillas

## Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_{|i} = \mathbf{a}_{|i} + \mathbf{b}_{|i}$  y prod:  $(\lambda \mathbf{b})_{|i} = \lambda(\mathbf{b}_{|i})$ .

Matrices. Suma:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{|i|j} = \mathbf{A}_{|i|j} + \mathbf{B}_{|i|j}$  y prod:  $(\lambda \mathbf{A})_{|i|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|i|j})$ .

## Matriz por vector es un vector

# Definiciones sencillas

## Suma y producto por un escalar

**Vectores.** Suma:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_{|i} = \mathbf{a}_{|i} + \mathbf{b}_{|i}$     y prod:  $(\lambda \mathbf{b})_{|i} = \lambda(\mathbf{b}_{|i})$ .

**Matrices.** Suma:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$     y prod:  $(\lambda \mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$ .

Matriz por vector es un vector

$$(\mathbf{A}\mathbf{b})_{|i} = (\mathbf{A}_{|i}\mathbf{b})_{|0}$$

# Definiciones sencillas

## Suma y producto por un escalar

**Vectores.** Suma:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_{|i} = \mathbf{a}_{|i} + \mathbf{b}_{|i}$     y prod:  $(\lambda \mathbf{b})_{|i} = \lambda(\mathbf{b}_{|i})$ .

**Matrices.** Suma:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$     y prod:  $(\lambda \mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$ .

Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- $_{ij}(\mathbf{A}\mathbf{b}) = (_{ij}\mathbf{A})\mathbf{b}$

- $(\alpha\mathbf{B})_{|j} = \alpha(\mathbf{B}_{|j})$

*Operadores “|” y “ $\tau$ ” son lineales*

(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Por eso la notación con matrices funciona (aunque entonces todo son matrices)

# Definiciones sencillas

## Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_{|i} = \mathbf{a}_{|i} + \mathbf{b}_{|i}$  y prod:  $(\lambda \mathbf{b})_{|i} = \lambda(\mathbf{b}_{|i})$ .

Matrices. Suma:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$  y prod:  $(\lambda \mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$ .

## Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_i|(\mathbf{A}\mathbf{b}) = ({}_i|\mathbf{A})\mathbf{b}$
- $(\mathbf{a}\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{a}(\mathbf{B}_{|j})$

*Operadores “|” y “ $\tau$ ” son lineales*

(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Por eso la notación con matrices funciona (aunque entonces todo son matrices)

# Definiciones sencillas

## Suma y producto por un escalar

**Vectores.** Suma:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_{|i} = \mathbf{a}_{|i} + \mathbf{b}_{|i}$  y prod:  $(\lambda \mathbf{b})_{|i} = \lambda(\mathbf{b}_{|i})$ .

**Matrices.** Suma:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$  y prod:  $(\lambda \mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$ .

## Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_i|(\mathbf{A}\mathbf{b}) = ({}_i|\mathbf{A})\mathbf{b}$
- $(\mathbf{a}\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{a}(\mathbf{B}_{|j})$

*Operadores “|” y “τ” son lineales*

(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Por eso la notación con matrices funciona (aunque entonces todo son matrices)

# Definiciones sencillas

## Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_{|i} = \mathbf{a}_{|i} + \mathbf{b}_{|i}$  y prod:  $(\lambda \mathbf{b})_{|i} = \lambda(\mathbf{b}_{|i})$ .

Matrices. Suma:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$  y prod:  $(\lambda \mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$ .

## Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_i|(\mathbf{A}\mathbf{b}) = ({}_i|\mathbf{A})\mathbf{b}$
- $(\mathbf{a}\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{a}(\mathbf{B}_{|j})$

*Operadores “|” y “ $\tau$ ” son lineales*

(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Por eso la notación con matrices funciona (aunque entonces todo son matrices)



# Las definiciones sencillas tienen implementación literal

## Suma de vectores

$$\boxed{(a + b)_{|i} = a_{|i} + b_{|i}} \quad \text{para } i = 1 : n$$

`Vector ( [ (self|i) + (other|i) for i in range(1,len(self)+1) ] )`

donde `self` es  $a$  y `other` es  $b$

## Producto de Matrices

$$\boxed{(AX)_{|j} = A(X_{|j})} \quad \text{para } j = 1 : n.$$

`Matrix ( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1) ] )`

donde `self` es  $A$  y `x` es  $X$

# Las definiciones sencillas tienen implementación literal

## Suma de vectores

$$(a + b)_{|i} = a_{|i} + b_{|i} \quad \text{para } i = 1 : n$$

```
Vector ( [ (self|i) + (other|i) for i in range(1,len(self)+1) ] )
```

donde self es  $a$  y other es  $b$

## Producto de Matrices

$$(\mathbf{AX})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_{|j}) \quad \text{para } j = 1 : n.$$

```
Matrix ( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1) ] )
```

donde self es  $\mathbf{A}$  y x es  $\mathbf{X}$

# Ventajas de la nueva notación

- **Notación operativa y con semántica**
  - Simplificación de las demostraciones
  - Descripción más simple de las operaciones
  - Código más simple al programar
- Respeta las definiciones salvando las ambigüedades de la notación habitual pero manteniendo la asociatividad

# Ventajas de la nueva notación

- Notación operativa y con semántica
  - Simplificación de las demostraciones
  - Descripción más simple de las operaciones
  - Código más simple al programar
- Respeta las definiciones salvando las ambigüedades de la notación habitual pero manteniendo la asociatividad

# Ventajas de la nueva notación

- Notación operativa y con semántica
  - Simplificación de las demostraciones
  - Descripción más simple de las operaciones
  - Código más simple al programar
- Respeta las definiciones salvando las ambigüedades de la notación habitual pero manteniendo la asociatividad

# Notación Asociativa para un curso de Álgebra Lineal

He implementado en Python lo necesario para dar un curso.

`nacal` está pensada para ser usada con los notebooks de Jupyter

- Repositorio GitHub:  
<https://github.com/mbujosab/nacallib>
- Repositorio Python Package Index (PyPI):  
<https://pypi.org/project/nacal>
  - `pip3 install nacal`
- Notebook de demostración
- Notebooks del curso.