Notación Asociativa para un curso de Álgebra Lineal

y su implementación en la librería `nacal` para Python.

(*las matemáticas como un lenguaje de programación*)

XVI Jornadas de Docencia en Economía (JDE 2024)

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

20 de junio de 2024

Filosofía subyacente

- Muchas operaciones del Álgebra Lineal pueden realizarse con productos matriciales (que son asociativos). Esto permite simplificar la notación.

- Pero se deben evitar las ambigüedades o incoherencias lógicas.

- La notación debe ser operativa y ayudar a obtener resultados (debe ser similar al empleo de un lenguaje de programación)

Filosofía subyacente

- Muchas operaciones del Álgebra Lineal pueden realizarse con productos matriciales (que son asociativos). Esto permite simplificar la notación.

- Pero se deben evitar las ambigüedades o incoherencias lógicas.

- La notación debe ser operativa y ayudar a obtener resultados (debe ser similar al empleo de un lenguaje de programación)

Filosofía subyacente

- Muchas operaciones del Álgebra Lineal pueden realizarse con productos matriciales (que son asociativos). Esto permite simplificar la notación.
- Pero se deben evitar las ambigüedades o incoherencias lógicas.
- La notación debe ser operativa y ayudar a obtener resultados (debe ser similar al empleo de un lenguaje de programación)

Operaciones con matrices

Muchas operaciones son realizables con productos de **matrices**.

- Selección:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

(*los paréntesis son innecesarios pues el producto es asociativo*)

- Transformaciones elementales (eliminación gaussiana):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

pero en estos ejemplos todo son **matrices**. . .

Operaciones con matrices

Muchas operaciones son realizables con productos de **matrices**.

- Selección:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

(*los paréntesis son innecesarios pues el producto es asociativo*)

- Transformaciones elementales (eliminación gaussiana):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

pero en estos ejemplos todo son **matrices**...

Operaciones con matrices

Muchas operaciones son realizables con productos de **matrices**.

- Selección:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

(*los paréntesis son innecesarios pues el producto es asociativo*)

- Transformaciones elementales (eliminación gaussiana):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

pero en estos ejemplos todo son **matrices**. . .

Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de $\mathbb{R}^n$ es una lista de números (transponer no tiene sentido) *(escribir en horizonal o vertical no cambia la lista)*
  Por tanto, en la expresión $y^{\mathsf{T}}A$ el símbolo "y" debe ser una matriz

Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de $\mathbb{R}^n$ es una lista de números (transponer no tiene sentido)
  (escribir en horizonal o vertical no cambia la lista)
  Por tanto, en la expresión $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ el símbolo "$\boldsymbol{y}$" debe ser una matriz

Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de $\mathbb{R}^n$ es una lista de números (transponer no tiene sentido)
  (escribir en horizonal o vertical no cambia la lista)
  Por tanto, en la expresión $\boldsymbol{y}^{\intercal}\mathbf{A}$ el símbolo "$\boldsymbol{y}$" debe ser una matriz
- Se habla de vectores *fila* o *columna*... (¿cambia la lista?)

Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de $\mathbb{R}^n$ es una lista de números (transponer no tiene sentido) *(escribir en horizonal o vertical no cambia la lista)*
  Por tanto, en la expresión $\boldsymbol{y}^{\intercal}\mathbf{A}$ el símbolo "$\boldsymbol{y}$" debe ser una matriz
- Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?) ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*? *(¡nunca se especifica!)*. . . ¿Hay alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*. . . ¿pero acaso puede ser también un *número*?

Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de $\mathbb{R}^n$ es una lista de números (transponer no tiene sentido)
  (escribir en horizonal o vertical no cambia la lista)
  Por tanto, en la expresión $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ el símbolo "$\boldsymbol{y}$" debe ser una matriz
- Se habla de vectores *fila* o *columna*. . . (¿cambia la lista?)
  ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*? *(¡nunca se especifica!)*. . . ¿Hay alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*. . . ¿pero acaso puede ser también un *número*?
- ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?

Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de $\mathbb{R}^n$ es una lista de números (transponer no tiene sentido)
  (escribir en horizonal o vertical no cambia la lista)
  Por tanto, en la expresión $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ el símbolo "$\boldsymbol{y}$" debe ser una matriz
- Se habla de vectores *fila* o *columna*... (¿cambia la lista?)
  ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*?
  (¡nunca se especifica!)... ¿Hay alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*... ¿pero acaso puede ser también un *número*?
- ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?

Esta vía tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de $\mathbb{R}^n$ es una lista de números (transponer no tiene sentido)
  (escribir en horizonal o vertical no cambia la lista)
  Por tanto, en la expresión $\boldsymbol{y}^\intercal\mathbf{A}$ el símbolo "$\boldsymbol{y}$" debe ser una matriz
- Se habla de vectores *fila* o *columna*... (¿cambia la lista?)
  ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*?
  (¡nunca se especifica!)... ¿Hay alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*... ¿pero acaso puede ser también un *número*?
- ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?

Esta vía tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de $\mathbb{R}^n$ es una lista de números (transponer no tiene sentido)
  (escribir en horizonal o vertical no cambia la lista)
  Por tanto, en la expresión $\boldsymbol{y}^{\intercal}\mathbf{A}$ el símbolo "$\boldsymbol{y}$" debe ser una matriz
- Se habla de vectores *fila* o *columna*... (¿cambia la lista?)
  ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*?
  (¡nunca se especifica!)... ¿Hay alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*... ¿pero acaso puede ser también un *número*?
- ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?

Esta vía tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

Evitar ambigüedades o incoherencias

Por ello se opera como si *números* y *vectores* fueran *matrices*.

- Matlab (Matrix Laboratory) $\longrightarrow$ libros de texto.
- Pero en las definiciones de los libros ¡no todo son matrices!

Esto conduce a incoherencias (o como mínimo ambigüedades)

- Vector de $\mathbb{R}^n$ es una lista de números (transponer no tiene sentido)
  (escribir en horizonal o vertical no cambia la lista)
  Por tanto, en la expresión $\boldsymbol{y}^{\intercal}\mathbf{A}$ el símbolo "$\boldsymbol{y}$" debe ser una matriz
- Se habla de vectores *fila* o *columna*... (¿cambia la lista?)
  ¿$\mathbb{R}^n$ está formado por vectores *fila* o por vectores *columna*?
  (¡nunca se especifica!)... ¿Hay alguna diferencia?
- El producto de *matrices* se define como una *matriz*... ¿pero acaso puede ser también un *número*?
- ¿Es lo mismo una lista de *números* que una lista de *matrices*?

Esta vía tan extendida **provoca**, como mínimo, **ciertas ambigüedades** (a las que nos hemos acostumbrado)

Nueva notación

- Introduciré dos símbolos que funcionarán como operadores
  - " $|$ " selecciona componentes,
  - " $\boldsymbol{\tau}$ " realiza transformaciones elementales,

- Con ellos se mantiene la asociatividad en la notación
  - pero respetando la definición de cada objeto (evitando así incoherencias o ambigüedades).

- He implementado la notación[1] en Python para probar que funciona como un lenguaje de programación.

  (*es una demostración de su potencia y consistencia*).

[1] así como el resto de objetos: vectores, matrices, etc.

Nueva notación

- Introduciré dos símbolos que funcionarán como operadores
  - " $|$ " selecciona componentes,
  - " τ " realiza transformaciones elementales,
- Con ellos se mantiene la asociatividad en la notación
  - pero respetando la definición de cada objeto (evitando así incoherencias o ambigüedades).
- He implementado la notación[1] en Python para probar que funciona como un lenguaje de programación.

  (*es una demostración de su potencia y consistencia*).

[1] así como el resto de objetos: vectores, matrices, etc.

Nueva notación

- Introduciré dos símbolos que funcionarán como operadores
  - " $|$ " selecciona componentes,
  - " τ " realiza transformaciones elementales,
- Con ellos se mantiene la asociatividad en la notación
  - pero respetando la definición de cada objeto (evitando así incoherencias o ambigüedades).
- He implementado la notación[1] en Python para probar que funciona como un lenguaje de programación.

  (*es una demostración de su potencia y consistencia*).

[1] así como el resto de objetos: vectores, matrices, etc.

Nueva notación

- Introduciré dos símbolos que funcionarán como operadores
  - " | " selecciona componentes,
  - " τ " realiza transformaciones elementales,
- Con ellos se mantiene la asociatividad en la notación
  - pero respetando la definición de cada objeto (evitando así incoherencias o ambigüedades).
- He implementado la notación[1] en Python para probar que funciona como un lenguaje de programación.

  (*es una demostración de su potencia y consistencia*).

[1] así como el resto de objetos: vectores, matrices, etc.

Notación

- Números, vectores y matrices son objetos distintos
- Como es habitual, y para no recargar la notación se omite el operador producto "·" cuando es posible.

$$2\boldsymbol{b};\qquad \mathbf{A}\boldsymbol{x};\qquad 5\mathbf{A};\qquad \mathbf{AB};\ \ldots$$

(*en Python estaremos obligados a incluir el símbolo del producto: "*"*)

Operadores | y $\boldsymbol{\tau}$ actuan por la derecha y/o por la izquierda

- El operador " | " selecciona componentes,
- El operador " $\boldsymbol{\tau}$ " realiza transformaciones elementales,

(veámoslo. . .)

Notación para vectores de $\mathbb{R}^n$

Lista ordenada de números: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

- Selección de la componente i-ésima: $\boxed{{}_{i|}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{|i}}$ (número)

$$ {}_{1|}\boldsymbol{a} = 2; \qquad \boldsymbol{a}_{|2} = 5 $$

- Transf. elemental de componentes $\boxed{{}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\tau}}}$ (vector)

$$ {}_{\underset{[(10)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}20\\5\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{a}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} $$

Sobre *vectores* da igual actuar por la derecha que por la izquierda

Notación para vectores de $\mathbb{R}^n$

Lista ordenada de números: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Selección de la componente i-ésima: $\boxed{{}_{i|}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{|i}}$ (número)

$$ {}_{1|}\boldsymbol{a} = 2; \qquad \boldsymbol{a}_{|2} = 5 $$

- Transf. elemental de componentes $\boxed{{}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\tau}}}$ (vector)

$$ {}_{\underset{[(10)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{a}_{\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} $$

Sobre *vectores* da igual actuar por la derecha que por la izquierda

Notación para vectores de $\mathbb{R}^n$

Lista ordenada de números: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Selección de la componente i-ésima: $\boxed{{}_{i|}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{|i}}$ (número)

$${}_{1|}\boldsymbol{a} = 2; \qquad \boldsymbol{a}_{|2} = 5$$

- Transf. elemental de componentes $\boxed{{}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\tau}}}$ (vector)

$$\underset{[(10)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{a}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sobre *vectores* da igual actuar por la derecha que por la izquierda

Notación para vectores de $\mathbb{R}^n$

Lista ordenada de números: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Selección de la componente i-ésima: $\boxed{{}_{i|}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{|i}}$ (número)

$${}_{1|}\boldsymbol{a} = 2; \qquad \boldsymbol{a}_{|2} = 5$$

- Transf. elemental de componentes $\boxed{{}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\tau}}}$ (vector)

$$\underset{[(10)\mathbf{1}]}{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{a}\underset{[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sobre *vectores* da igual actuar por la derecha que por la izquierda

Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas). $\mathbf{A} = \Big[\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z};\Big]$

Operaciones por la **derecha** actuan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actuan sobre las **filas**

- Columna j-ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila i-ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$

Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas). $\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z};\right]$

Operaciones por la **derecha** actuan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actuan sobre las **filas**

- Columna j-ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila i-ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i, j)-ésimo (es un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$

Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas). $\mathbf{A} = [\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z};]$

Operaciones por la **derecha** actuan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actuan sobre las **filas**

- Columna j-ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila i-ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i, j)-ésimo (es un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas: $\mathbf{A}_{\tau}$

Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas). $\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z};\right]$

Operaciones por la **derecha** actuan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actuan sobre las **filas**

- Columna j-ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila i-ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i,j)-ésimo (es un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas: $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}$
- Transf. elemental de filas: ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$

Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas). $\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z};\right]$

Operaciones por la **derecha** actuan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actuan sobre las **filas**

- Columna j-ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila i-ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i,j)-ésimo (es un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas: $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}$
- Transf. elemental de filas: ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$

¡Aparece una nueva regla!

La transposición "cambia de lado" las operaciones

$${}_{i|}\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{|i}; \qquad {}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{\boldsymbol{\tau}}; \qquad \boldsymbol{x}\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\boldsymbol{x}$$

Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas). $\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z};\right]$

Operaciones por la **derecha** actuan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actuan sobre las **filas**

- Columna j-ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila i-ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i, j)-ésimo (es un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas: $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}$
- Transf. elemental de filas: ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$

¡Aparece una nueva regla!

La transposición "cambia de lado" las operaciones

$${}_{i|}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{\intercal})_{|i}; \qquad {}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{\boldsymbol{\tau}}; \qquad \boldsymbol{x}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{\intercal})\boldsymbol{x}$$

Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas). $\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z};\right]$

Operaciones por la **derecha** actuan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actuan sobre las **filas**

- Columna j-ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila i-ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i,j)-ésimo (es un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas: $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}$
- Transf. elemental de filas: ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$

¡Aparece una nueva regla!

La transposición "cambia de lado" las operaciones

$${}_{i|}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{\intercal})_{|i}; \qquad {}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{\boldsymbol{\tau}}; \qquad \boldsymbol{x}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{\intercal})\boldsymbol{x}$$

Notación para matrices

Lista ordenada de vectores (son sus columnas). $\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z};\right]$

Operaciones por la **derecha** actuan sobre las **columnas**

por la **izquierda** actuan sobre las **filas**

- Columna j-ésima de una matriz (es un vector): $\mathbf{A}_{|j}$
- Fila i-ésima de una matriz (es un vector): ${}_{i|}\mathbf{A}$
- Elemento (i,j)-ésimo (es un número): ${}_{i|}\mathbf{A}_{|j}$
- Transf. elemental de columnas: $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}}$
- Transf. elemental de filas: ${}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A}$

¡Aparece una nueva regla!

La transposición "cambia de lado" las operaciones

$${}_{i|}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{\intercal})_{|i}; \qquad {}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)_{\boldsymbol{\tau}}; \qquad \boldsymbol{x}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{\intercal})\boldsymbol{x}$$

A good notation should be unambiguous, pregnant, easy to remember: it should avoid harmful second meanings, and take advantage of useful second meanings; the order and connection of signs should suggest the order and connection of things.

GEORGE POLYA, *How to Solve It (1957)*

Notation is everything.

CHARLES F. VAN LOAN, *FFTs and the Sparse Factorization Idea (1992)*

Operaciones con los nuevos operadores

- Selección de componentes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{|2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad {}_{1|}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{|2} = 3$$

- Transformaciones elementales:

$$\underset{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La notación mantiene la asociatividad

pero ahora **NO** *todo son* **matrices**.

Producto de matrices

Definición con notación habitual

AB es la matriz cuya componente (i,j)-ésima es

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = \sum a_{ik} b_{k,j}$$

Definición con la nueva notación (*asociativa*)

AB es la matriz cuya columna j-ésima (vector) es

$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$$

Así que la i-ésima componente de la j-ésima columna, ${}_{i|}(\mathbf{AB})_{|j}$, es

$${}_{i|}\Big((\mathbf{AB})_{|j}\Big) = {}_{i|}\Big(\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})\Big) = ({}_{i|}\mathbf{A})(\mathbf{B}_{|j})$$

Producto de matrices

Definición con notación habitual

AB es la matriz cuya componente (i, j)-ésima es

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = \sum a_{ik} b_{k,j}$$

Definición con la nueva notación (*asociativa*)

AB es la matriz cuya columna j-ésima (vector) es

$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$$

Así que la i-ésima componente de la j-ésima columna, ${}_{i|}(\mathbf{AB})_{|j}$, es

$${}_{i|}\Big((\mathbf{AB})_{|j}\Big) = {}_{i|}\Big(\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})\Big) = ({}_{i|}\mathbf{A})(\mathbf{B}_{|j})$$

Producto de matrices

Definición con notación habitual

AB es la matriz cuya componente (i, j)-ésima es

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = \sum a_{ik} b_{k,j}$$

Definición con la nueva notación (*asociativa*)

AB es la matriz cuya columna j-ésima (vector) es

$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$$

Así que la i-ésima componente de la j-ésima columna, ${}_{i|}(\mathbf{AB})_{|j}$, es

$${}_{i|}\Big((\mathbf{AB})_{|j}\Big) = {}_{i|}\Big(\mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})\Big) = ({}_{i|}\mathbf{A})(\mathbf{B}_{|j})$$

Producto de matrices

Ahora la expresión

$${}_{i|}\mathbf{AB}_{|j}$$

está *"llena" de significados* (todos correctos).

$$(\mathbf{AB})_{|j} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_{|j})$$

$${}_{i|}(\mathbf{AB}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\mathbf{B}$$

$${}_{i|}\mathbf{AB}_{|j} = ({}_{i|}\mathbf{A})(\mathbf{B}_{|j})$$

- *La asociatividad hace que la notación sea muy potente*
- *Según situamos los paréntesis destacamos un aspecto u otro*

Demos más simples

Típica demo de la Transpuesta del producto

$$(\mathbf{AB})^{\intercal}{}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

y

$$(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{B}^{\intercal})_{ik} \cdot (\mathbf{A}^{\intercal})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

Demo simple (basada en reglas de manipulación simbólica)

$$\Big((\mathbf{AB})^{\intercal}\Big)_{|j} = {}_{j|}\mathbf{AB} = \Big((\mathbf{A}^{\intercal})_{|j}\Big)\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{\intercal})(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j}.$$

Demos más simples

Típica demo de la Transpuesta del producto

$$(\mathbf{AB})^{\intercal}{}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

y

$$(\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}^{\intercal})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{B}^{\intercal})_{ik} \cdot (\mathbf{A}^{\intercal})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

Demo simple (basada en reglas de manipulación simbólica)

$$\Big((\mathbf{AB})^{\intercal}\Big)_{|j} \;=\; {}_{j|}\mathbf{AB} \;=\; \Big((\mathbf{A}^{\intercal})_{|j}\Big)\mathbf{B} \;=\; (\mathbf{B}^{\intercal})(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j}.$$

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathsf{A}+\mathsf{B})_{|j} = \mathsf{A}_{|j} + \mathsf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda\mathsf{A})_{|j} = \lambda(\mathsf{A}_{|j})$.

Matriz por vector es un vector

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda\big(\mathbf{A}_{|j}\big)$.

Matriz por vector es un vector

- ${}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\boldsymbol{b}$

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda\big(\mathbf{A}_{|j}\big)$.

Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\boldsymbol{b}$
- $(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \boldsymbol{a}(\mathbf{B}_{|j})$

Operadores “ $|$ ” y “ τ ” resultan ser lineales
(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$.

Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\boldsymbol{b}$
- $(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \boldsymbol{a}(\mathbf{B}_{|j})$

Operadores " $|$ " y " τ " resultan ser lineales
(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Transpuesta (solo definida para matrices)

La transpuesta cambia los operadores " $|$ " y " τ " de lado.

$$(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$$

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$.

Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_{i|}(\mathbf{A}b) = ({}_{i|}\mathbf{A})b$
- $(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \boldsymbol{a}(\mathbf{B}_{|j})$

Operadores " | " y " τ " resultan ser lineales
(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Transpuesta (solo definida para matrices)

La transpuesta cambia los operadores " | " y " τ " de lado.

$$(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$$

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda \boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda \mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$.

Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\boldsymbol{b}$
- $(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \boldsymbol{a}(\mathbf{B}_{|j})$

Operadores "$|$" y "$\boldsymbol{\tau}$" resultan ser lineales
(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Transpuesta (solo definida para matrices)

La transpuesta cambia los operadores "$|$" y "$\boldsymbol{\tau}$" de lado.

$$(\mathbf{A}^{\intercal})_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$$

Definiciones sencillas

Suma y producto por un escalar

Vectores. Suma: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}$ y prod: $(\lambda\boldsymbol{b})_{|i} = \lambda(\boldsymbol{b}_{|i})$.

Matrices. Suma: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{|j} = \mathbf{A}_{|j} + \mathbf{B}_{|j}$ y prod: $(\lambda\mathbf{A})_{|j} = \lambda(\mathbf{A}_{|j})$.

Matriz por vector es un vector (también vector por matriz)

- ${}_{i|}(\mathbf{A}\boldsymbol{b}) = ({}_{i|}\mathbf{A})\boldsymbol{b}$
- $(\boldsymbol{a}\mathbf{B})_{|j} = \boldsymbol{a}(\mathbf{B}_{|j})$

Operadores " | " y " $\boldsymbol{\tau}$ " resultan ser lineales
(asociativos para el producto y distributivos para la suma).

Transpuesta (solo definida para matrices)

La transpuesta cambia los operadores " | " y " $\boldsymbol{\tau}$ " de lado.

$$(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})_{|j} = {}_{j|}\mathbf{A}$$

Las definiciones sencillas tienen implementación literal

Suma de vectores

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}} \quad \text{para} \quad i = 1:n$$

```
Vector ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,len(self)+1) ])
```

donde `self` es $\boldsymbol{a}$ y `other` es $\boldsymbol{b}$

Producto de Matrices

$$\boxed{(\mathbf{AX})_{|j} = \mathbf{A}((\mathbf{X}_{j})_{|)}} \qquad \text{para } j = 1:n.$$

```
Matrix ( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1) ] )
```

donde `self` es $\mathbf{A}$ y `x` es $\mathbf{X}$

Las definiciones sencillas tienen implementación literal

Suma de vectores

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{|i} = \boldsymbol{a}_{|i} + \boldsymbol{b}_{|i}} \quad \text{para} \quad i = 1:n$$

```
Vector ([ (self|i) + (other|i) for i in range(1,len(self)+1) ])
```

donde `self` es $\boldsymbol{a}$ y `other` es $\boldsymbol{b}$

Producto de Matrices

$$\boxed{(\mathbf{AX})_{|j} = \mathbf{A}((\mathbf{X}_{j})_{|)}} \qquad \text{para } j = 1:n.$$

```
Matrix ( [ self*(x|j) for j in range(1,x.n+1) ] )
```

donde `self` es $\mathbf{A}$ y `x` es $\mathbf{X}$

Ventajas de la nueva notación

- Notación operativa y con semántica
  - Simplificación de las demostraciones
  - Descripción más simple de las operaciones
  - Código más simple al programar

- Respeta las definiciones salvando las ambigüedades de la notación habitual pero manteniendo la asociatividad

Ventajas de la nueva notación

- Notación operativa y con semántica
  - Simplificación de las demostraciones
  - Descripción más simple de las operaciones
  - Código más simple al programar

- Respeta las definiciones salvando las ambigüedades de la notación habitual pero manteniendo la asociatividad

Ventajas de la nueva notación

- Notación operativa y con semántica
  - Simplificación de las demostraciones
  - Descripción más simple de las operaciones
  - Código más simple al programar

- Respeta las definiciones salvando las ambigüedades de la notación habitual pero manteniendo la asociatividad

Notación Asociativa para un curso de Álgebra Lineal

He implementado en Python lo necesario para dar un curso.

`nacal` está pensada para ser usada con los notebooks de Jupyter

- Repositorio GitHub:
  `https://github.com/mbujosab/nacallib`
- Repositorio Python Package Index (PyPI):
  `https://pypi.org/project/nacal`
  - `pip3 install nacal`
- Notebook de demostración
- Notebooks del curso.