a)
Fie o expresie de forma:
$(x_0 \lor x_1 \lor x_2) \land (x_0 \lor x_3 \lor x_4) \land ... \land (x_0 \lor x_{2n} \lor x_{2n+1})$
OPT ar face aceasta expresie sa evalueze True in 1 pas (setand x0 = True)
In schimb, worst case algoritmul Greedy-3CNF ar face n pasi (setand x2, apoi x4, .. x2n pe true)
Deci ALG poate fi pana la n ori mai prost decat OPT.

ALG <= n*OPT

b)
Greedy-3CNF(C, X)
1: C = {C1, . . . , Cm} mulțimea de predicate, X = {x1, . . . , xn} - mulțime de variabile
2: cât timp C ≠ ∅ execută
3: Alegem aleator Cj ∈ C.
4: Fie xi, xj, xk variabilele din Cj .
5: xi ← true, xj <- true, xk <- true
6: Eliminăm din C toate predicatele ce îl conțin pe xi, xj sau xk
7: return X

Lema:
Fie C'⊂ C o multime de clauze cu variabile disjuncte doua cate doua.
Fie S o solutie (lista de variabile = True). Deoarece clauzele din C sunt disjuncte doua cate doua inseamna ca orice variabila din S poate seta valoarea True doar unei singure clauze din C'. Deci |S| >=|C'| pentru orice multime S (inclusiv cea optima) si orice multime de clauze disjuncte 2 cate 2 C'.
OPT>=|C'|

Demonstratie:

Fie P* multimea de clauze selectate la linia 3.
Cum este P*?
P* e o multime formata din clauze disjuncte intre ele doua cate doua. Deoarece daca aleg o clauza (xa v xb v xc) care va fi inclusa in V*, toate celelalte clauze care contin xa sau xb sau xc sunt eliminate, deci nu vor fi incluse niciodata in P*.

OPT>=|P*| (din lema de mai sus)
3*OPT>=3|P*|=|S|
deci algoritmul este 3-aproximativ!

c)
Fie X={x1, x2, …, xn} o mulțime de variabile de tip bool si f:X->N o functie care asociaza fiecarei variabile costul 1 pentru setarea ei pe True si 0 altfel. Numim formulă booleană peste mulțimea X o formulă CNF (conjunctive normal form) o expresie de forma C1∧C2∧...∧Cm unde fiecare

predicat Ci este o disjuncție a unui număr de variabile (e alcătuit din mai multe variabile cu simbolul ∨ - logical or - între ele).

Ne dorim sa aflam costul minim pentru care putem face expresia sa evalueze True.

Fie $X = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$o solutie a problemei cu proprietatea:

$a_i = 1$ daca $x_i = True$, 0 altfel

Trebuie sa minimizam $\sum_{n}^{i=1} f(x_i) * a_i$.

Pentru fiecare(x_i, x_j, x_k)clauza trebuie sa avem constrangerile:

$a_i + a_j + a_k >= 1$

$0 <= a_i <= 1$ pt orice i

=> $\exists\ a_i \in \{a_i, a_j, a_k\}\ a.i.\ a_i >= 1/3$

Dem. Presupunem ca $nu\ exista\ a_i \in \{a_i, a_j, a_k\}\ a.i.\ a_i >= 1/3.$

=> $a_i < 1/3,\ a_j < 1/3, a_k < 1/3.$

=> $a_i + a_j + a_k < 1$

Contradictie, deoarece avem constrangerea $a_i + a_j + a_k >= 1$

Rezulta ca $\exists\ a_i \in \{a_i, a_j, a_k\}\ a.i.\ a_i >= 1/3.$

Aproximez $a_i \geq 1/3 \Rightarrow x_i = True.$

d)

$$ALG = \sum_{1 \leq i \leq n}^{i=1} f(x_i) * \begin{cases} 1\ daca\ a_i \geq 1/3 \\ 0\ daca\ a_i < 1/3 \end{cases} \leq \sum_{1 \leq i \leq n}^{i=1} f(x_i) * 3a_i = 3 \sum_{1 \leq i \leq n}^{i=1} f\left(x_i\right) * a_i \leq 3 * OPT$$

=> ALG e 3-aproximativ.