ជំពូកទី 1

ក្រុម

1.1 និយមន័យក្រុម

1.1.1 ធាតុច្រាស

សំណុំ E ប្រដាប់ដោយម្នាណវិធីក្នុង $\cdot$ ហើយ $e \in E$ ជាធាតុណឺត និង $a \in E$ ។ គេថា $a^{-1} \in E$ ជាធាតុច្រាសនៃ a កាលណា $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.1 លើ $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ចំពោះប្រមាណវិធី $+$ ធាតុច្រាសនៃ a គឺ $-a$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.2 លើ $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ចំពោះប្រមាណវិធី $\times$ នោះធាតុច្រាសនៃ a គឺ $\frac{1}{a}$ កាលណា $a \neq 0$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 1.1
លើ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $\cdot$ ហើយ a, b មានធាតុច្រាសគេបាន

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

សម្រាយបញ្ជាក់ យើងមាន $a, b \in E$ នោះ $ab \in E$ ។ ពិនិត្យ

$$ab \cdot b^{-1}a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$$

និង

$$b^{-1}a^{-1} \cdot ab = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$$

នោះយើងបាន $b^{-1}a^{-1}$ ជាធាតុច្រាសនៃ ab ។ ដូចនេះ $\boxed{(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}}$ ។ ■

1.1.2 ផ្នែកស្ដាប (closed)

សំណុំ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $\cdot$ ។ A ជាផ្នែកនៃ E $(A \subset E)$ ។ គេថា A ជាផ្នែកស្ដាបនៃ E លុះត្រាតែ $ab \in A$ ចំពោះគ្រប់ $a, b \in A$ ។

1.2 ប្រមាណវិធីក្រៅ

គេឱ្យ E, E ជាសំណុំ ។ យកអនុគមន៍

$$\begin{array}{rrcl} * : & K \times E & \to & E \\ & (\lambda, x) & \mapsto & \lambda * x \end{array}$$

យើងហៅ $*$ ជាប្រមាណវិធីក្រៅលើ E ការីក្នុង K ។

1.3 ក្រុម

1.3.1 កន្លះក្រុម (semigroup)

និយមន័យ 1.1
គេឱ្យ G ជាសំណុំប្រមាណវិធីក្នុង $\cdot$ ។ គេថា $(G, \cdot)$ ជាកន្លះក្រុមកាលណាប្រមាណវិធីនេះមានលក្ខណៈផ្តុំ (associativity) ។ មានន័យថាគ្រប់ $a, b, c \in G$ យើងបាន $(ab)c = a(bc)$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.3 យើងមាន $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ និង $(\mathbb{R}, +)$ ជាកន្លះក្រុម ។

ឧទាហរណ៍ 1.4 យើងមាន $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q},)$ និង $(\mathbb{R}, \cdot)$ ជាកន្លះក្រុម ។

ឧទាហរណ៍ 1.5 $(\mathcal{P}(E), \cup)$, $(\mathcal{P}(E), \cap)$, ជាកន្លះក្រុម

ឧទាហរណ៍ 1.6 លើ $\mathbb{Z}$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី $*$ កំណត់ដោយ

$$a * b = a + b - ab$$

គ្រប់ $a, b \in \mathbb{Z}$ ។ បង្ហាញថា $(\mathbb{Z}, *)$ ជាកន្លះក្រុម ។

សម្រាយបញ្ជាក់ គ្រប់ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ យើងមាន

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b - ab) * c \\ &= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c \\ &= a + b + c - ab - bc - ca + abc\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a * (b + c - bc) \\ &= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) \\ &= a + b + c - ab - bc - ca + abc\end{aligned}$$

នោះយើងបាន $(a * b) * c = a * (b * c)$ ដូចនេះ $\boxed{(\mathbb{Z}, *) \text{ ជាកន្លះក្រុម}}$ ។ ■

ឧទាហរណ៍ 1.7 លើ $\mathbb{R}_+^*$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ កំណត់ដោយ

$$a * b = a^{\ln b}$$

គ្រប់ $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ ។ បង្ហាញថា $(\mathbb{R}_+^*, *)$ ជាកន្លះក្រុម ។

សម្រាយបញ្ជាក់ គ្រប់ $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ យើងមាន

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a^{\ln b}) * c \\ &= \left(a^{\ln b}\right)^{\ln c} \\ &= a^{(\ln b)(\ln c)}\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a * (b^{\ln c}) \\ &= a^{\ln(b^{\ln c})} \\ &= a^{(\ln b)(\ln c)}\end{aligned}$$

នោះយើងបាន $(a * b) * c = a * (b * c)$ ដូចនេះ $\boxed{(\mathbb{R}_+^*, *) \text{ ជាកន្លះក្រុម}}$ ។ ■

គេឱ្យ $(G,*)$ ជាកន្លះក្រុម ហើយចំពោះ $x_1,x_2,\ldots,x_n\in G$ គេតាង

$$\begin{aligned}\overset{n}{\underset{i=1}{*}} &= x_1*x_1*\cdots*x_n\\ &= \left(\overset{k}{\underset{i=1}{*}}\right)*\left(\overset{n}{\underset{i=k+1}{*}}\right)\end{aligned}$$

ហើយគេកំណត់សរសេរ

$$x^n := \underbrace{x*x*\cdot*x}_{n\text{ដង}}$$

នោះយើងបាន $(x^n)^m = xnm$ និង $x^n*x^m = x^{n+m}$ ។

1.3.2 ម៉ូណូអ៊ីត (Monoide)

និយមន័យ 1.2
សំណុំ G ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ។ គេថា $(G,\,*)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតកាលណា $(G,\,*)$ ជាកន្លះក្រុមហើយមានធាតុណឺត ។ នោះយើងបាន

- $a*(b*c)=(a*b)*c$ *គ្រប់* $a,b,c\in G$ *និង*
- *មាន* $e\in G$ *ដែល* $e*a=a*e=a$ *គ្រប់* $a\in G$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.8 $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ ជាម៉ូណូអ៊ីត ។

ឧទាហរណ៍ 1.9 $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$, $(\mathbb{R},\cdot)$ ជាម៉ូណូអ៊ីត ។

ឧទាហរណ៍ 1.10 លើ $\mathbb{R}_+^*$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ កំណត់ដោយ

$$a*b=a^{\ln b}$$

ចំពោះគ្រប់ $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ ។ តើ $(\mathbb{R}_+^*,\,*)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតឬទេ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ តាមសម្រាយខាងលើ $(\mathbb{R}_+^*,\,*)$ ជាកន្លះក្រុម ។ ដើម្បីស្រាយថា $(\mathbb{R}_+^*,\,*)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតយើងត្រូវរក $x\in\mathbb{R}_+^*$ ដែល $x*a=a*x=a$ គ្រប់ $a\in\mathbb{R}_+^*$ ។ យើងមាន

$$a*e=a^{\ln e}=a$$

និង ■

ឧទាហរណ៍ 1.11 $(\mathcal{P}(E), \cup)$ និង $(\mathcal{P}(E), \cup)$ ជាម៉ូណូអ៊ីត ។

1.3.3 ម៉ូណូអ៊ីតរង

និយមន័យ 1.3
គេឱ្យ $(G, *)$ ជាម៉ូណូអ៊ីត និង $H \supset G$ ជាផ្នែកមិនទទេនៃ G ។ គេថា $(H, *)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី $*$ លុះត្រាតែបើធាតុ e ជាធាតុណឺតនៃ G នោះ $e \in H$ និង

$$a * b \in H$$

ចំពោះ $a, b \in H$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.12 គេយក $n \in \mathbb{N}$ នោះយើងបាន $(n\mathbb{Z}, +)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(\mathbb{Z}, +)$ ព្រោះ 0 ជាធាតុណឺតរបស់ $\mathbb{Z}$ ហើយ $0 = 0 \cdot n \in n\mathbb{Z}$ នោះ $n\mathbb{Z} \neq \varnothing$ ។ ម្យ៉ាងទៀត បើ $a, b \in n\mathbb{Z}$ នោះមាន $x, y \in \mathbb{Z}$ ដែល $a = nx,\ b = ny$ ហេតុនេះ

$$a + b = nx + nx = n(x + y) \in n\mathbb{Z}$$

នោះ $(n\mathbb{Z}, +)$ ជាធាតុ

ទ្រឹស្តីបទ 1.2
ប្រសព្វនៃពីរម៉ូណូអ៊ីតរងនៃម៉ូណូអ៊ីត $(G, *)$ ក៏ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(G, *)$ ដែរ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ តាង e ជាធាតុណឺតនៃ G ហើយតាង $A, B \subseteq G$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(G, *)$ ។ នោះ $e \in A$ និង $e \in B$ ហេតុនេះ $e \in A \cap B$ ។

បន្ទាប់មកទៀតយើងស្រាយលក្ខណៈស្ថាប ។ យក $x, y \in A \cap B$ នោះ

$$\begin{cases} x \in A \\ y \in A \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} x \in B \\ y \in B \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \quad x * y \in A \quad \text{និង} \quad x * y \in B$$

នោះយើងបាន $x * y \in A \cap B$ ។ សរុបមកយើងបាន $(A \cap B, *)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(G, *)$ ។ ■

វិបាក 1.3
ប្រសព្វនៃគ្រួសារម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(G, *)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(G, *)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ តាង $\mathcal{I} = \left\{i \in \mathbb{N} \ : \ A_i \subset G$ និង $(A_i, *)$ ជាម៉ូណូអ៊ីត$\right\}$ ជាសំណុំសន្ទស្សន៍នៃគ្រួសារម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(G, *)$ ។ យើងចង់ស្រាយថា $A := \bigcap_{i\in\mathcal{I}}$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងដែរ ។

តាង e ជាធាតុណឺតរបស់ G ។ យើងឃើញថា $A \neq \emptyset$ ព្រោះ $e \in A_i$ គ្រប់ $i \in \mathcal{I}$ នោះយើងបាន $e \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i = A$ ។ បន្ទាប់មកទៀតយើងស្រាយលក្ខណៈស្ថាបលើ A ។ យក $x, y \in A$ នោះគ្រប់ $i \in \mathcal{I}$ យើងបាន

$$\begin{aligned} & x \in A_i \land y \in A_i \\ \Longrightarrow \quad & x * y \in A_i && (\text{លក្ខណៈស្ថាបរបស់}A_i) \\ \Longrightarrow \quad & x * y \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i \end{aligned}$$

នោះ $(A, *)$ មានធាតុណឺត e ហើយមានលក្ខណៈស្ថាបលើប្រមាណវិធី $*$ ។

ដូចនេះ $\boxed{(A, +) \text{ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ } (G, *)}$ ។

■

សម្គាល់៖ ប្រជុំនៃពីរម៉ូឌុលអ៊ីតមិនមែនជាម៉ូឌុលអ៊ីតទូទៅទេ ។ ឧទាហរណ៍ $(2\mathbb{Z},+)$, $(3\mathbb{Z},+)$ ជាម៉ូឌុលអ៊ីតរងនៃ $(\mathbb{Z},+)$ តែ $(2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z},+)$ មិនមែនជាម៉ូឌុលអ៊ីតទេព្រោះ $2\in 2\mathbb{Z}$ ហើយ $3\in 3\mathbb{Z}$ ក៏ប៉ុន្តែ $5=2+3\notin 2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$ ។