គណិតវិភាគ

បង្រៀនដោយលោកគ្រូ ជា សុផល (Mr. Jams)

២៣ ធ្នូ ២០២១

ជំពូកទី 1

Logarithmic and Exponential Functions

1.1 Logarithmic function

និយមន័យ 1.1

យក $a > 0$ ហើយ $a \neq 1$ ។ គេតាងអនុគមន៍លោការីតគោល a ដោយអនុគមន៍

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \log_a x \end{array}$$

យើងសរសេរ $y = \log_a x \iff x = a^y$.

ជាឧទាហរណ៍ $\log_2 \sqrt{8} = 3/2$, ព្រោះថា $2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$.

វិបាក 1.1

យើងបានវិបាកដូចខាងក្រោម

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a \frac{1}{a} = \log_{\frac{1}{a}} a = -1$
- $\log_a a^n = n$
- $\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$

ទ្រឹស្តីបទ 1.2
នេះជាលក្ខណៈពិសេសរបស់ $\log$ ៖

- $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a x_1 x_2$
- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
- $\log_a x^n = n \log_a x$

សម្រាយបញ្ជាក់ តាង $y_1 = \log_a x_1$ នោះយើងបាន $x_1 = a^{y_1}$ ។ ដូចគ្នាដែរយើងតាង $y_2 = \log_a x_2 \iff x_2 = a^{y_2}$ ។ ដូចនេះ

$$\begin{aligned} & x_1 x_a^{y_1} a^{y_2} = a^{y_1+y_2} \\ \Longrightarrow\quad & y_1 + y_2 = \log_a x_1 x_2 \end{aligned}$$

■

ឧទាហរណ៍ 1.1 រកតម្លៃ x បើ

$$\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt{3}} x^2 + \log_{\sqrt{3}} x^3 + \cdots + \log_{\sqrt{3}} x^n = 2021$$

ដំណោះស្រាយ សមីការមានន័យកាលណា $x > 0$ ។ យើងបាន

$$\begin{aligned} & \log_{\sqrt{3}} x + 2\log_{\sqrt{3}} x + 3\log_{\sqrt{3}} x + \cdots + n\log_{\sqrt{3}} x = 2021 \\ & (1+2+3+\cdots+n)\log_{3^{1/2}} x = 2021 \\ & \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2\log_3 x = 2021 \\ \Longrightarrow\quad & x = 3^{\frac{2021}{n(n+1)}} \end{aligned}$$

■

1.2 រូបមន្តប្តូរគោល

ទ្រឹស្តីបទ 1.3 ⟨*រូបមន្តប្តូរគោល*⟩
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

សម្រាយបញ្ជាក់ យើងតាង $y = \log_a b$ នោះ $b = a^y$ ។ បំពាក់លោការីតគោល c លើអង្គសងខាងយើងបាន

$$\begin{aligned} & \log_c b = \log_c a^y = y \log_c a \\ \implies & y = \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{aligned}$$

■

ឧទាហរណ៍ 1.2 កេតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $\log_3 x = \log_4 x$ ។

ដំណោះស្រាយ សមីការមានន័យកាលណា $x > 0$ ។ តាមរូបមន្តប្តូរគោលយើងបាន

$$\begin{aligned} & \log_3 x = \log_4 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 4} \\ \implies & \log_3 x \left(1 - \frac{1}{\log_3 4}\right) = 0 \end{aligned}$$

នោះយើងបាន $\log_3 x = 0 \implies x = 1$ ។ ■

វិបាក 1.4
យើងបានក្លូរលៃដូចខាងក្រោម

- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

1.3 លោកការីតគោល 10 (ទសភាគ)

យើងសរសេរ $\log_{10} x = \log x = \lg x$ ។

1.4 លោការីតនេពៃ1 Neyzer logarithm

គេមាន $e \approx 2.718$ ។ យើងសរសេរ $\log_e = \mathrm{Log} x = \ln x$ ។

1.5 Derivative of Logarithmic Function

យើងមាន $y = \log_a x$

- ∘ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- ∘ $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
- ∘ $y = \log_a x \implies y' = \frac{1}{x \ln a}$

ឧទាហរណ៍ 1.3 រកដេរីវេនៃ $y = \log_3 \sqrt[3]{\lg \sqrt[3]{\ln \sqrt[3]{x}}}$

ដំណោះស្រាយ យើងមាន

$$\begin{aligned} y &= \log_3 \sqrt[3]{\lg \sqrt[3]{\ln \sqrt[3]{x}}} \\ &= \frac{1}{3}\log_3\left[\frac{1}{3}\cdot\log\left(\frac{1}{3}\ln x\right)\right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{3}}_{\text{constant}} + \frac{1}{3}\log_3\left[\log\left(\frac{1}{3}\ln x\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad y' &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log\left(\frac{1}{3}\ln x\right)\ln 3}\cdot\left(\underbrace{\log\frac{1}{3}}_{\text{constant}} + \log\ln x\right)' \\ &= \frac{1}{3\ln 3}\cdot\frac{1}{\log\left(\frac{1}{3}\ln x\right)}\cdot\left(\frac{(\ln x)'}{\ln 10\cdot\ln x}\right) \\ \Longrightarrow \quad y' &= \boxed{\frac{1}{3\ln 3}\cdot\frac{1}{\log\left(\frac{1}{3}\ln x\right)}\cdot\left(\frac{1}{x\ln 10\cdot\ln x}\right)} \end{aligned}$$

■