ពិជគណិតលីនេអ៊ែរ

បង្រៀនដោយ លោកគ្រូ ហាំ ការីម

December 29, 2021

ជំពូកទី 1

លំហវ៉ិចទ័រ

1.1 រំឭកមេរៀន

ឧទាហរណ៍ 1.1 ប្រមាណវិធី $+$ និង $\times$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងលើសំណុំ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ឬ $\mathbb{C}$ ។ ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់សំណើខាងលើយើងយក $\mathbb{K}$ ជាសំណុំណាមួយក្នុងចំណោមសំណុំខាងលើ ។ យើងឃើញថាគ្រប់ $a, b \in \mathbb{K}$ យើងបាន

$$a + b \in \mathbb{K} \quad \text{និង} \quad a \times b \in \mathbb{K} \quad \text{។}$$

បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងស្រាយលក្ខណៈ uniqueness របស់ប្រមាណវិធីទាំងពីរ ។ យក $a_0, b_0 \in \mathbb{K}$ ដែល $a_0 = a$ និង $b_0 = b$ នោះយើងបាន

$$a + b = a_0 + b_0 \quad \text{និង} \quad a \times b = a_0 \times b_0$$

ហេតុនេះ $a + b$ និង ab ជាធាតុតែមួយគត់ (unique element) ក្នុងសំណុំ $\mathbb{K}$ ។ ដូចនេះប្រមាណវិធី $+$ និង $\times$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងលើសំណុំ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ឬ $\mathbb{C}$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.2 $+$ និង $\times$ មិនមែនជាប្រមាណវិធីក្នុងសំណុំ $\mathbb{Q}^\complement$ ទេព្រោះប្រមាណវិធីនេះមិនស្ថាប (closed) លើ $\mathbb{Q}^\complement$ ឡើយ ។ ជាឧទាហរណ៍យើងអាចយក $a = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}^\complement$ និង $b = -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^\complement$ តែ

$$a + b = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{Q}^\complement$$

ហើយ

$$a \times b = \sqrt{2}(-\sqrt{2}) = -2 \notin \mathbb{Q}^\complement$$

ដូច្នេះ $+$ និង $\times$ មិនមែនជាប្រមាណវិធីក្នុងលើសំណុំ $\mathbb{Q}^\complement$ ឡើយ ។

ឧទាហរណ៍ 1.3 ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ មិនមែនជាប្រមាណវិធីក្នុងលើ $\mathbb{R}^n$ ទេព្រោះបើយើងយក $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ និង $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ដែល $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ យើងតែងតែទទួលបាន

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

មានន័យថា $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \notin \mathbb{R}^n$ នោះប្រមាណវិធីនេះមិនមែនជាប្រមាណវិធីក្នុងរបស់សំណុំ $\mathbb{R}^n$ ទេ ។

ឧទាហរណ៍ 1.4 តាង $\mathcal{F}(A, A)$ ជាសំណុំនៃអនុគមន៍ពី A ទៅ A ។ គេកំណត់អនុគមន៍មួយដែល

$$\begin{aligned} \circ : \quad \mathcal{F}(A,A) \times \mathcal{F}(A,A) &\longrightarrow \mathcal{F}(A,A) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

ជាប្រមាណវិធីក្នុងលើ $\mathcal{F}(A, A)$ ។

ដើម្បីងាយស្រួលសរសេរយើងតាង $\mathcal{F} := \mathcal{F}(A, A)$ ។ ដើម្បីបង្ហាញថា $\circ$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងយើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញពីលក្ខណៈមានតែមួយគត់ (uniqueness) ហើយមានលក្ខណៈស្ថាបលើ $\mathcal{F}$ ។

- លក្ខណៈ Unique ៖ យក $f, g, h, k \in \mathcal{F}$ ដែល $f = h$ និង $g = k$ នោះគ្រប់ $x \in A$ យើងបាន

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f\Big[g(x)\Big] \\ &= f\Big[k(x)\Big] && (\text{ព្រោះ } g = k) \\ &= h\Big[k(x)\Big] && (\text{ព្រោះ } f = h) \\ &= (h \circ k)(x) \end{aligned}$$

  នោះយើងបាន $f \circ g = h \circ k$ ។

- បន្ទាប់មកយើងស្រាយភាពស្ថាបរបស់ $\circ$ ។ ដោយគ្រប់ $f, g \in \mathcal{F}$ នោះ

$$f : A \to A \quad \text{និង} \quad g : A \to A$$

  គ្រប់ $x \in A$ យើងបាន $f \circ g(x) = f(g(x)) \in A$ នោះ $f \circ g$ ជាអនុគមន៍ពី A ទៅ A ។ មានន័យថា $f \circ g \in \mathcal{F}$ ។

ដូចនេះ $\circ$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងរបស់សំណុំ $\mathcal{F}$ ។

និយមន័យ 1.1
អនុគមន៍ $f : A \to B$ និង $g : A \to B$ ស្មើគ្នាកាលណាដែនកំណត់ $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g)$ ហើយ

$$f(x) = g(x)$$

ចំពោះគ្រប់ $x \in A$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.5 បើយើងឱ្យ $f(x) = 1 + \frac{x^2-1}{x(x-1)}$ និង $g(x) = 1 + \frac{x+1}{x}$ ។ យើងឃើញថា f, g មើលទៅដូចជាស្មើគ្នាមែន ក៏ប៉ុន្តែដែនកំណត់

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \quad \text{និង} \quad \mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ដូចនេះយើងបាន $f \neq g$ ។

1.2 ក្រុម

និយមន័យ 1.2
យក G ជាសំណុំមួយហើយ $*$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងរបស់ G ។ គេថា $(G, *)$ ជាក្រុមកាលណា

- (លក្ខណៈផ្តុំ) $a * (b * c) = (a * b) * c$ ចំពោះគ្រប់ $a, b, c \in G$
- (ធាតុណឺត) មាន $e \in G$ ដែល $e * a = a * e = a$ ចំពោះគ្រប់ $a \in G$
- (ធាតុច្រាស) គ្រប់ $a \in G$ មាន $b \in G$ ដែល $a * b = b * a = e$ ។

លំហាត់ 1.6 យក E ជាសំណុំមួយ ។ ឧបមាថា $\mathcal{S}(E)$ ជាសំណុំនៃអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ (bijection) ពី E ទៅ E ។ យក $\circ$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងលើ $\mathcal{S}(E)$ ដែលជាបណ្ដាក់រវាងអនុវត្តន៍មួយទល់មួយលើ E ។ តើ $(\mathcal{S}(E),\circ)$ ជាក្រុមឬទេ ? ជាក្រុមអេប៊ែលឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ យើងនឹងស្រាយថា $(\mathcal{S}(E),\circ)$ ជាក្រុម តែមិនមែនជាក្រុមអាប៊ែលទេ ។ ដំបូងយើងត្រូវដឹងថាតើប្រមាណវិធីនេះស្ថាបលើ $\mathcal{S}(E)$ ឬទេ ។ យក $f,g\in\mathcal{S}(E)$ ។ យើងចង់ស្រាយថា $f\circ g$ ក៏ជាអនុវត្តមួយទល់មួយដែរ ។ ឧបមាថាមាន $x,y\in E$ ដែល $(f\circ g)(x)=(f\circ g)(y)$ នោះយើងបាន

$$\begin{aligned} & f(g(x))=f(g(y)) & \\ \Longrightarrow\ & g(x)=g(y) & (\text{ព្រោះ } f \text{ មួយទល់មួយ}) \\ \Longrightarrow\ & x=y & (\text{ព្រោះ } g \text{ មួយទល់មួយ}) \end{aligned}$$

ហេតុនេះ $f\circ g\in\mathcal{S}(E)$ ។ ដើម្បីស្រាយថា $\mathcal{S}(E)$ ជាក្រុម យើងត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈ ៖

- យក $f,g,h\in\mathcal{S}(E)$ និង $x\in E$ ។ នោះ

  $$((f\circ g)\circ h)x=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))$$

  ស្រដៀងគ្នាដែរ យើងបាន

  $$(f\circ(g\circ h))x=f((g\circ h)x)=f(g(h(x)))$$

  នោះ $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ ។

- តាង $\mathrm{id}\colon E\to E$ ដោយ $id(x)=x$ គ្រប់ $x\in E$ ។ បើ $\mathrm{id}(a)=\mathrm{id}(b)$ នោះយើងបាន $a=b$ ហេតុនេះ id ជាអនុវត្តមួយទល់មួយលើ E ។ យក $f\in\mathcal{S}(E)$ នោះគ្រប់ $x\in E$ យើងបាន

  $$(f\circ\mathrm{id})(x)=f(\mathrm{id}(x))=f(x)$$

  ហើយ

  $$(\mathrm{id}\circ f)(x)=\mathrm{id}(f(x))=f(x)$$

  ហេតុនេះ $f\circ\mathrm{id}=\mathrm{id}\circ f=f$ ។ (id ជាធាតុណឺតក្នុង $\mathcal{S}(E)$) ។

- យក $f\in\mathcal{S}(E)$ ។ តាមលក្ខណៈរបស់អនុវត្តន៍មួយទល់មួយ យើងបានអនុគមន៍ច្រាស f^{-1} ក៏ជាអនុវត្តមួយទល់មួយដែរ ។ម្យ៉ាងទៀតគ្រប់ $x\in E$ យើងបាន

  $$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x=\mathrm{id}(x)$$

  ស្រដៀងគ្នាដែរ

  $$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x=\mathrm{id}(x)$$

  នោះ $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=\mathrm{id}$ (មានន័យថា f^{-1} ជាធាតុច្រាសនៃ f) ។

ដូចនេះយើងបាន $(\mathcal{S}(E), \circ)$ ជាក្រុម ។ យើងនឹងស្រាយថា G មិនមែនជាក្រុមអាប៊ែលទេ ។ យក $a, b, c \in E$ ជាចំនួនផ្សេងៗគ្នាក្នុង E ។ យើងរើសយកអនុគមន៍ $f, g \in \mathcal{S}(E)$ ដែល

$$f(a) = b, \quad g(a) = a \quad \text{និង} \quad g(b) = c$$

នោះយើងបាន $f(g(a)) = f(a) = b$ ក៏ប៉ុន្តែ $g(f(a)) = g(b) = c$ ។ ហេតុនេះ $f \circ g \neq g \circ f$ ។ មានន័យថា $(\mathcal{S}(E), \circ)$ មិនមែនជាក្រុមអាប៊ែលទេ ។

ដូចនេះ $\boxed{(\mathcal{S}(E), \circ) \text{ is a non-Abelian group.}}$

■

វិបាក 1.1
គេយក $n \in \mathbb{N}$ ហើយគេយក $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ។ ដូចលំហាត់ខាងលើដែរ យើងកំណត់សរសេរ $\mathcal{S}_n := \mathcal{S}(E)$ ជាសំណុំនៃអនុគមន៍មួយទល់មួយពី E ទៅ E ។ យើងបាន $(\mathcal{S}_n, \circ)$ ជាក្រុម តែមិនមែនជាក្រុមអាប៊ែលទេ (non-Abelian group) ។

សំណើ 1.2
យក $(G, *)$ ជាក្រុម ។

(a) ធាតុណឺតមានតែមួយគត់

(b) ធាតុប្រាស x' របស់ x មានតែមួយគត់

(c) ធាតុប្រាស់របស់ចម្រាសរបស់ x គឺ x; មានន័យថា $(x')' = x$

(d) គ្រប់ធាតុ $x, y \in G$ យើងបាន $(x * y) = y' * x'$

(e) គ្រប់ធាតុ $x, y, z \in G$ បើ $x * y = x * z$ នោះ $y = z$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

(a) យើងឧបមាថាមាន e, e_0 ជាធាតុណឺតរបស់ G ។ ដោយ e_0 ជាធាតុណឺតនោះយើងបាន $e_0 * e = e * e_0 = e$ ។ ដូចគ្នាដែរ ដោយ e ជាធាតុណឺតនោះ

$$e_0 * e = e * e_0 = e_0$$

នោះយើងបាន $e = e_0$ ។ ដូចនេះធាតុណឺតមានតែមួយគត់ ។

(b) ស្រដៀងគ្នាដែរ យើងឧបមាថាមាន a, b ជាធាតុប្រាសរបស់ x ។ ហេតុនេះ

$$a = e * a = (b * x) * a = b * (x * a) = b * e = b$$

នោះ $a = b$ ។ ដូចនេះធាតុណឺតរបស់ x មានតែមួយគត់ហើយយើងនឹងតាងវាដោយ x' ។

(c) ដោយហេតុថា x' ជាធាតុច្រាសនៃ x នោះយើងបាន

$$x * x' = x' * x = e$$

នោះយើងបានធាតុច្រាសរបស់ x' គឺ x ។ ដូចនេះ $\boxed{(x')' = x}$ ។

(d) យក $x, y \in G$ នោះ $x', y' \in G$ (well defined) ។ ពិនិត្យមើល

$$(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x' = x * e * x' = e$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * x) * y = y' * e * y = e$$

នោះយើងទាញបានថាចម្រាសរបស់ $x * y$ គឺ $y' * x'$ ។

ដូចនេះ $\boxed{(x * y)' = y' * x'}$ ។

(e) យើងមាន $x, y, z \in G$ ដែល $x * y = x * z$ ។ ដោយ $*$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងរបស់ G នោះ

$$\begin{aligned}
& x' * (x * y) = x' * (x * z) \\
\Longrightarrow \quad & (x' * x) * y = (x' * x) * z \\
\Longrightarrow \quad & e * y = e * z \\
\Longrightarrow \quad & y = z
\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត ចម្រាសនៃសំណើនេះ (converse of this statement) ក៏ពិតដែរ

ដូចនេះ $\boxed{x * y = x * z \iff y = z}$ ។

■