ពិជគណិតលីនេអ៊ែរ

បង្រៀនដោយ លោកគ្រូ ហាំ ការីម

December 20, 2021

ជំពូកទី 1

លំហវ៉ិចទ័រ

1.1 រំឭកមេរៀន

ឧទាហរណ៍ 1.1 ប្រមាណវិធី $+$ និង $\times$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងលើសំណុំ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ឬ $\mathbb{C}$ ។ ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់សំណើខាងលើយើងយក $\mathbb{K}$ ជាសំណុំណាមួយក្នុងចំណោមសំណុំខាងលើ ។ យើងឃើញថាគ្រប់ $a, b \in \mathbb{K}$ យើងបាន

$$a + b \in \mathbb{K} \quad \text{និង} \quad a \times b \in \mathbb{K}$$

ម្យ៉ាងទៀត $a + b$ និង ab ជាធាតុតែមួយគត់ (unique element) ក្នុងសំណុំ $\mathbb{K}$ ដូចនេះប្រមាណវិធី $+$ និង $\times$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងលើសំណុំ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ឬ $\mathbb{C}$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.2 $+$ និង $-$ មិនមែនជាប្រមាណវិធីក្នុងសំណុំ $\mathbb{Q}^C$ ទេព្រោះប្រមាណវិធីនេះមិនស្ថាប (closed) លើ $\mathbb{Q}^C$ ឡើយ ។ ជាឧទាហរណ៍យើងអាចយក $a = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}^C$ និង $b = -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^C$ តែ

$$a + b = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{Q}^C$$

ហើយ

$$a \times b = \sqrt{2}(-\sqrt{2}) = -2 \notin \mathbb{Q}^C$$

ដូច្នេះ $+$ និង $-$ មិនមែនជាប្រមាណវិធីក្នុងលើសំណុំ $\mathbb{Q}^C$ ឡើយ ។

ឧទាហរណ៍ 1.3 ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ មិនមែនជាប្រមាណវិធីក្នុងលើ $\mathbb{R}^n$ ទេព្រោះបើយើងយក $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ និង $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ដែល $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ យើងតែងតែទទួលបាន

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

មានន័យថា $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \notin \mathbb{R}^n$ នោះប្រមាណវិធីនេះមិនស្ថាបលើ $\mathbb{R}^n$ ទេ ។

ឧទាហរណ៍ 1.4 តាង $\mathcal{F}(A, A)$ ជាសំណុំនៃអនុគមន៍ពី A ទៅ A ។ គេកំណត់អនុគមន៍មួយដែល

$$\begin{aligned} \circ: \quad \mathcal{F}(A,A) \times \mathcal{F}(A,A) &\longrightarrow \mathcal{F}(A,A) \\ (f,g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

ជាប្រមាណវិធីក្នុងលើ $\mathcal{F}(A, A)$ ។

ដើម្បីងាយស្រួលសរសេរយើងតាង $\mathcal{F} := \mathcal{F}(A, A)$ ។ ដើម្បីបង្ហាញថា $\circ$ ជាប្រមាណវិធីយើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញ $\circ$ ខ្លួនឯងជាអនុគមន៍ (function) ហើយមានលក្ខណៈស្ថាបលើ $\mathcal{F}$ ។ ដើម្បីស្រាយថា $\circ\colon \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ជាអនុគមន៍ យើងយក $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ ហើយឧបមាថាមាន $a, b \in \mathcal{F}$ ដែល $f \circ g = a$ និង $f \circ g = b$ ។ ដោយយើងកំណត់យក $f \circ g(x) = f(g(x))$ ចំពោះគ្រប់ $x \in A$ នោះយើងបាន

$$a(x) = f(g(x)) = b(x)$$

នោះយើងបាន $a = b$ ។ ដូចនេះ $\circ\colon \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ជាអនុគមន៍ ។

បន្ទាប់មកយើងស្រាយភាពស្ថាបរបស់ $\circ$ ។ ដោយគ្រប់ $f, g \in \mathcal{F}$ នោះ

$$f\colon A \to A \quad \text{និង} \quad g\colon A \to A$$

នោះយើងបាន $f \circ g(x) = f(g(x)) \in A$ គ្រប់ $x \in A$ នោះយើងបាន $f \circ g$ ជាអនុគមន៍ពី A ទៅ A ។