Analysis 1

...

nach Satz 2:

Reelle Zahlen

(Intuitiv: Jeder Punkt liegt auf der Geraden)

Def: Ein dedekindscher Schnitt in den reellen Zahlen ist eine Zerlegung $\mathbb{R} = A \cup B$ in zwei nicht leere Teilmengen, so dass jede Zahl $a \in A$ kleiner ist als jede Zahl $b \in B$.

Die Stetigkeitseigenschaft der reellen Zahlen (Dedekindsche Schnittaxiom)

Ist $\mathbb{R} = A \cup B$ ein dedekindscher Schnitt, so besitzt entweder A eine größte Zahl oder B besitzt eine kleinste Zahl.

Anm: A und B sind disjunkt, da

$$\mathbb{R} = A \cup B(\text{ein D-Schnitt}) \Leftrightarrow \forall a \in A \quad \forall b \in B : a < b$$

...

jetzt folgt Satz 3: (Notiz: Bew. Für Schritt 1 per vollst. Induktion wäre interessant)

nach Schritt 2 von Satz 3:

...

Schritt 2

Die Menge

$$C := t \in \mathbb{R} : t > 0, t^n > x$$

hat kein kleinstes Element.

Bew: Sei $t_0 \in C$ beliebig. Wir definieren

$$h := \frac{t_0^n - x}{n \cdot t_0^{n-1}} < \frac{t_0^n}{nt_0^{n-1}} = \frac{t_0}{n} \leq t_0$$

Sei $t_1 := t_0 - h > 0$

Außerdem gilt:

$$t_0^n - t_1^n \underbrace{<}_{\text{siehe (*)}} n \cdot h \cdot t_0^{n-1} = t_0^n - x \Rightarrow t_1^n > x \Rightarrow t_1^n \in B$$

$\square$

Schritt 4:

Wir beweisen die Existenz von $y > 0$ mit $y^n = x$.

Bew: Sei A wie im Schritt 2 und sei $B = \mathbb{R} \backslash A$.

Aus der Definition von A folgt das

$$B = t \in \mathbb{R} : t > 0 \text{ und } t^n \geq x$$

$A \cup B$ ist ein dedekindscher Schnitt: gäbe es ein $a \in A$ und $b \in B$ mit $a \geq b \Rightarrow a > 0$. Dann folgt aus $a \geq b$ aber $a^n \geq b^n$. $\lightning$ zu $a^n < x$ und $b^n \geq x$

$\Rightarrow A \cup B$ ist ein dedekindscher Schnitt.

Nach Schritt 2 hat A kein größtes Element $\Rightarrow$ B hat ein kleinstes Element. Wir nennen dieses y.

Beh: $y^n = x$. Wäre $y^n \neq x$, so müsste $y^n > x$ gelten, und y wäre kleinstes Element von C. Widerspruch zu Schritt 3 $\Rightarrow y^n = x$

$\square$

—

...

Nun folgt Definition von Schranken, Satz 4.

...

Beweis von Satz 4

Bew: Wir beweisen nur (1), da (2) völlig analog bewiesen wird.

Sei also A nicht leer und von oben beschränkt.

Wir betrachten $X := M \in \mathbb{R} : \forall a \in A : a \leq M$

(Notiz: $X \neq \emptyset$ nach Voraussetzung.)

Sei $Y := \mathbb{R} \backslash X$. Dann gilt $Y \neq \emptyset$, da $a - 1 \in Y$ für jedes $a \in A$. Außerdem gilt:

(a) $\mathbb{R} = Y \cup X$

(b) für $y \in Y$ und $x \in X$ gilt stets $y < x$

Ist nämlich $y \in Y$, so ist y nicht obere Schranke von A

$$\left.\begin{array}{ll} \Rightarrow \exists a \in A & y < a \\ \text{weil } x \in X & a \leq x \end{array}\right\} \Rightarrow y < x.$$

(a), (b) $\Rightarrow \mathbb{R} = Y \cup X$ ist ein dedekindscher Schnitt.

Sei M_0 das kleinste Element von X oder das größte Element von Y.

Beh: M_0 ist nicht größtes Element von Y.

Andernfalls wäre $M_0 \in Y \Rightarrow \exists a \in A : M_0 < a$ und für $M_1 = \frac{M_0+a}{2}$ gilt $M_0 < M_1 < a$ Widerspruch zu M_0 ist größtes Element von Y.

...
Nun folgt der Rest des Beweises von Satz 4
Potenzen a^x
...
Für $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ betrachten wir zwei Fälle:
Fall 1: $(a \geq 1)$
Sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben.
$M(a, x) = a^q | q \in \mathbb{Q} : q < x$
Diese Menge ist von oben beschränkt durch $a^{\lfloor x \rfloor + 1}$
Nach Satz 4 besitzt $M(a, x)$ ein Supremum, und wir definieren

$$a^x = \sup\, M(a, x)$$

Für $0 < a < 1$:

$$a^x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$