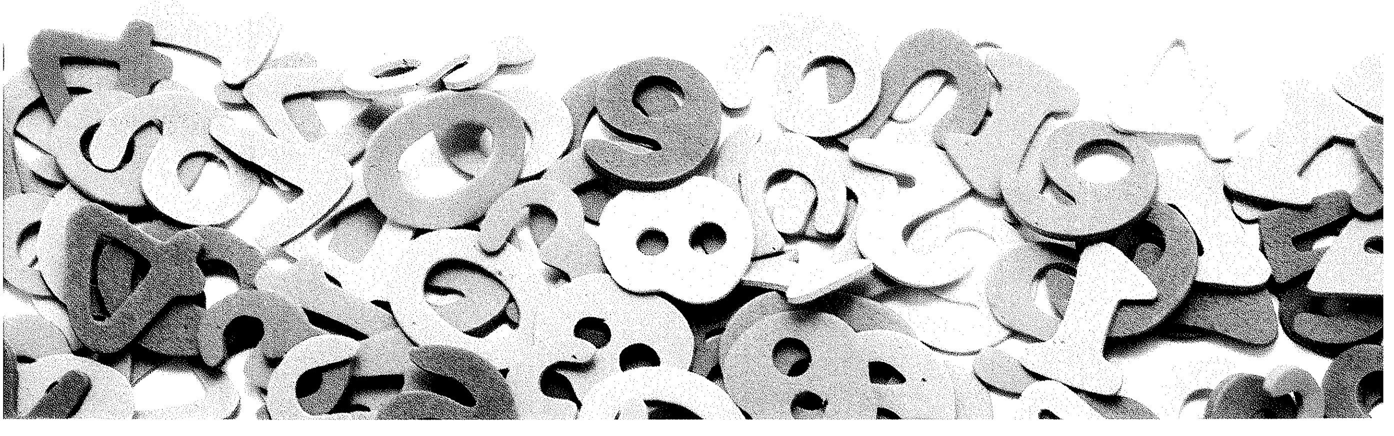
İÇİNDEKİLER

BÖLÜM TESTLERİ

ANALİZ



ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

1– Tek ve Çift Fonksiyonlar

$f: A \to B$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

- $\forall x \in A$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f(x) fonksiyonu TEK fonksiyon,
- $\forall x \in A$ için $f(-x) = f(x)$ ise
  f(x) fonksiyonu ÇİFT fonksiyondur

Örnek

$f: IR \to IR$, $f(x) = x^3 + x$ fonksiyonunu düşünelim.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x) \\ &= -x^3 - x \\ &= -(x^3 + x) = -f(x) \end{aligned}$$

f(x) tek fonksiyondur.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^5 - x$ fonksiyonunu düşünelim.

$f(-x) = 3(-x)^5 - (-x) = -3x^5 + x$
$= -(3x^5 - x) = -f(x)$

f(x) tek fonksiyondur.

Örnek

$f: IR \to IR$, $f(x) = x^2 + \cos x$ için

$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x)$

f(x) çift fonksiyondur.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - \cos x$ için

$f(-x) = (-x)^4 - \cos(-x) = x^4 - \cos x = f(x)$

f(x) çift fonksiyondur.

Özellikler

- İki çift fonksiyonun (veya iki tek fonksiyonun) çarpımı veya bölümü çift fonksiyondur.
- Bir tek bir çift fonksiyonun çarpımı veya bölümü tek fonksiyondur.
- Çift fonksiyonların tüm kuvvetleri çifttir.
- Tek fonksiyonların tek tamsayı kuvvetleri tek, çift tamsayı kuvvetleri çifttir.

Örnek

$f: IR \to IR$, $F(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x + 5}$ fonksiyonu için

$\left.\begin{array}{l} \sin x \to \text{Tek} \\ \cos x + 5 \to \text{çift} \end{array}\right\} \to$ Tek fonksiyon olur.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + x}$ fonksiyonu için

$\left.\begin{array}{l} \cos x \to \text{çift} \\ \sin x + x \to \text{tek} \end{array}\right\} \Rightarrow$ tek fonksiyon olur.

Örnek

f: IR − {0} → R

$f(x) = \frac{\tan x}{x}$ fonksiyonu için

tanx → tek
x tek } Çift fonksiyon olur.

Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2+4}$

$\sin^2 x \Rightarrow$ çift
$x^2+4 \Rightarrow$ çift } çift fonksiyon olur.

Örnek

f: IR → IR, $f(x) = \sin x + x^2$ fonksiyonu için

$f(-x) = \sin(-x) + (-x)^2 = -\sin x + x^2$

Ne tek ne çift fonksiyondur.

Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x + 1$ fonksiyonu için

$f(-x) = \tan(-x) + 1 = -\tan x + 1$

Ne tek ne çift fonksiyondur.

ÖĞRETEN SORU

Aşağıdakilerden hangileri çift fonksiyondur?

A) $f(x) = 3x - \sin x$

B) $f(x) = x^5 + x^3$

C) $f(x) = 5$

D) $f(x) = \cos x + x^2$

ÖĞRETEN CEVAP

(a) → Tek (c) → Çift

(b) → Tek (d) → Çift

CEVAP: C ve D şıkları

Örnek

Aşağıdakilerden hangileri çift fonksiyondur?

(a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$

(b) $f(x) = \cos^3 x$

(c) $f(x) = \sin^5 x + \cos x$

(d) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

(a) Ne tek ne çift

(b) Çift

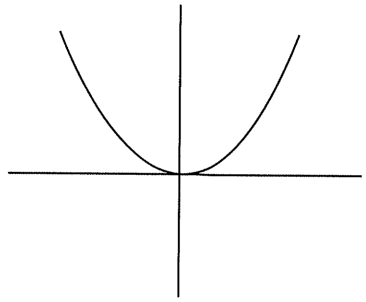
(c) Ne tek ne çift

(d) Tek

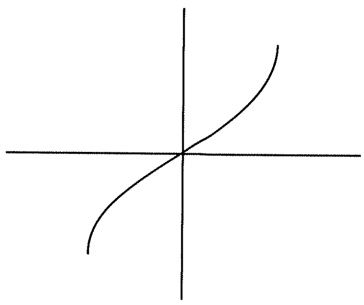
Sadece (b) şıkkı

Kural

- Çift fonksiyonların grafiği Oy–eksenine göre simetriktir.



- Tek fonksiyonların grafiği orijine göre simetriktir.



2– Mutlak Değer Fonksiyonu

Tanım: $A \subset IR$ olmak üzere,

$f: A \to IR$ için

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona **mutlak değer fonksiyonu** denir.

Örnek

$f: IR \to IR$ olmak üzere

$f(x) = \sqrt{x^2} + 3x - 1$ fonksiyonunu parçalı olarak ifade edin.

$\sqrt{x^2} = x$

$f(x) = x + 3x - 1$

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right\}$ kritik noktalar

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3x + 3, & x < 0 \\ x - 3x + 3, & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 3x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3, & x < 0 \\ -2x + 3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için

$f(x) = \sqrt{(x-1)^2} + |x+2|$ fonksiyonunu parçalı olarak ifade ediniz.

$f(x) = |x-1| + |x+2|$

$\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right\}$ kritik noktalar

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 - x - 2, & x < -2 \\ -x + 1 + x + 2, & -2 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x < -2 \\ 3, & -2 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Örnek

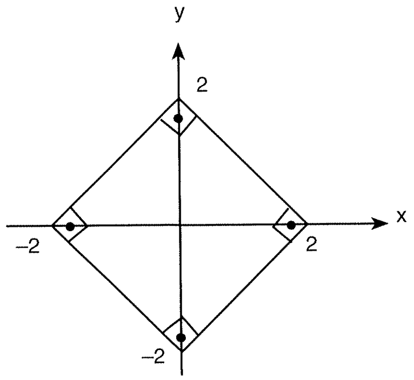
$|x| + |y| = 2$ grafiğini çiziniz.

$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = 2$

$x \geq 0, \quad y < 0 \quad \Rightarrow \quad x - y = 2$

$x < 0, \quad y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -x + y = 2$

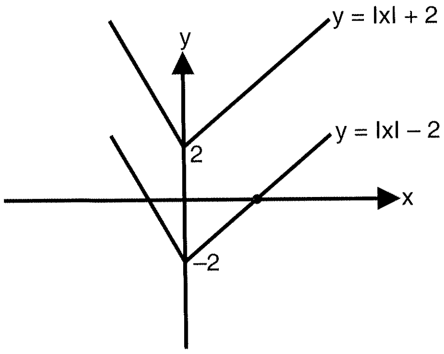
$x < 0, \quad y < 0 \quad \Rightarrow \quad -x - y = 2$



Örnek

$||x|-y| = 2$ grafiğini çizin.

- $|x| - y = 2 \Rightarrow y = |x| - 2$
- $|x| - y = -2 \Rightarrow y = |x| + 2$



Örnek

$|\log_3(x + 1)| = 2$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

$\log_3(x + 1) = 2 \Rightarrow x + 1 = 9 \Rightarrow x = 8$

$\log_3(x + 1) = -2 \Rightarrow x + 1 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = -\frac{8}{9}$

$8 - \frac{8}{9} = \frac{64}{9}$

Örnek

$f(x) = |x^2 - 4| - 1$ ve $g(x) = -1 + 3|x-2|$ eğrilerinin kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

$f(x) = g(x)$

$|x^2-4| - 1 = -1 + 3|x-2|$

$|x^2-4| = 3|x-2| \Rightarrow |x^2-4| - 3|x-2| = 0$

$|x-2| \,.\, |x+2| - 3|x-2| = 0$

$|x-2| \,.\, (|x+2|-3) = 0$

$|x-2| = 0 \quad |x+2| = 3$

$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$

$x + 2 = -3 \Rightarrow x = -5$

ve $x = 2$

$2 + 1 - 5 = -2$

Örnek

$|x^2 - 2x - 3| + |x^2 - 1| = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$|(x - 3)(x + 1)| + |(x - 1)(x + 1)| = 0$

$|x + 1| \,.\, (|x - 3| + |x - 1|) = 0$

$|x + 1| = 0 \Rightarrow x = -1. \qquad |x - 3| + |x - 1| \neq 0$

Ç.K. = {−1}

Örnek

$2\sqrt{4+4x+x^2}+3\sqrt{x^2-6x+9}=0$ **denkleminin çözüm kümesi nedir?**

$2\sqrt{(x+2)^2}+3\sqrt{(x-3)^2}=0$

$\underbrace{2|x+2|+3|x-3|}_{\neq 0}=0$ çözüm kümesi boştur.

Örnek

$|x-1|=-2x+8$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$x-1=-2x+8$
$3x=9$
$x=3$
$\Downarrow$
$3-1=-6+8\ \checkmark$

$x-1=2x-8$
$x=7$
$\Downarrow$
$7-1=-14+8$
$6\neq-6$ **x**

$Ç.K=\{3\}$

Örnek

$\left.\begin{array}{l} f(x)=|x-2|-\sqrt{x^2} \\ g(x)=4 \end{array}\right\}$ **eğrilerinin kesim noktalarının apsislerinin çözüm kümesi nedir?**

$f(x) = g(x)$

$|x-2| - |x| = 2$

$\left.\begin{array}{ll} x\geq 2 & \Rightarrow x-2-x\neq 2 \\ 0\leq x\leq 2 & \Rightarrow 2-x-x=2 \Rightarrow x=0 \\ x<0 & \Rightarrow 2-x+x=2 \end{array}\right\}$ $Ç.K=(-\infty,0]$

Örnek

$|x + 2| > |x - 1|$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$(|x+2|)^2 > (|x-1|)^2$

$x^2 + 4x + 4 > x^2 - 2x + 1$

$6x > -3$

$x > \frac{1}{2} \Rightarrow Ç.K=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

Örnek

$2 < |2x - 4| < 6$ eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

$2<2x-4<6$
$6<2x<10$
$3<x<5$
$\Downarrow$
$x=4$

$-6<2x-4<-2$
$-2<2x<2$
$-1<x<1$
$\Downarrow$
$x=0$

2 tamsayı vardır.

Örnek

$3 < |2x+1| < 7$ eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

$3<2x+1<7$	$-7<2x+1<-3$
$2<2x<6$	$-8<2x<-4$
$1<x<3$	$-4<x<-2$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$x=2$	$x=-3$

2 tamsayı vardır.

3– İşaret (Signum) Fonksiyonu

Tanım: $f: A \subset IR \rightarrow IR$ fonksiyonu için

$$\operatorname{sgn}f(x) = \begin{cases} 1 \ , & f(x) > 0 \text{ ise} \\ 0 \ , & f(x) = 0 \text{ ise} \\ -1 \ , & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı fonksiyonu **işaret (signum) fonksiyonu** denir.

Örnek

f: $[0,2\pi] \rightarrow IR$, sgn(cosx) = –1 denkleminin çözüm kümesi nedir?

$\operatorname{sgn}(\cos x) = -1 \quad \Rightarrow \quad \cos x > 0$

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

Ç.K. $= \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Örnek

f : $[0, 2\pi] \rightarrow IR$, sgn(sinx) = 1 denkleminin çözüm kümesi nedir?

$\operatorname{sgn}(\sin x) = 1 \Rightarrow \sin x > 0$

$0 < x < \pi$

Ç.K. $= (0, \pi)$

Örnek

sgn(x² – 2x – 3) = –1 denkleminin çözüm kümesi nedir?

		–1		3	
f(x)	+		–		+

$-1 < x < 3 \Rightarrow$ Ç.K $= (-1. 3)$

Örnek

sgn(log₃(x+1)) = –1 denkleminin çözüm kümesi nedir?

$\log_3(x+1) < 0$

$0 < x+1 < 1$

$-1 < x < 0 \Rightarrow$ Ç.K. $= (-1, 0)$

Örnek

sgnx . sgn(x – 2) = –1 denkleminin çözüm kümesi nedir?

$\underline{\operatorname{sgn}x} \ . \ \underline{\operatorname{sgn}(x-2)} = -1$

$\cdot 1 \quad -1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} 0 < x < 2$

$\cdot 1 \quad 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \begin{matrix} x < 0 \\ x > 2 \end{matrix} \quad \varnothing$

Ç.K. $= (0 ,2)$

Örnek

sgn(x+2) > sgn(x) eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$\left.\begin{matrix} \operatorname{sgn}x = -1 \\ \operatorname{sgn}(x+2) = 0 \\ \operatorname{sgn}(x+2) = 1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \Rightarrow x < 0 \\ \\ \Rightarrow x+2 \geqslant 0 \end{matrix} \Bigg\} \quad -2 \leq x < 0$

$\left.\begin{matrix} \operatorname{sgn}x = 0 \\ \operatorname{sgn}(x+2) = 1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \Rightarrow x = 0 \\ \Rightarrow x+2 > 0 \end{matrix} \Bigg\} \quad x = 0$

Ç.K. $= [-2, 0]$

Örnek

sgn(3x + 7) = 5 denkleminin çözüm kümesi nedir?

$\text{sgn}(3x - 7) \neq 5$

Ç.K. = $\varnothing$

Örnek

sgn(|3x + 1| – 4) < 1 eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$\left.\begin{array}{l} \text{sgn}(\ 3x+1\ \ -4)=0 \\ \text{sgn}(\ 3x+1\ \ -4)=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 3x+1\ \ -4 \leq 0 \\ 3x+1\ \ \leq 4 \end{array}$$

$$-4 \leq 3x+1 \leq 4$$

$$-5 \leq 3x \leq 3$$

$$-\frac{5}{3} \leq x \leq 1 \Rightarrow \left[-\frac{5}{3}, 1\right]$$

Örnek

$\sum\limits_{x=-2}^{4}(x+\text{sgn}(x))$ **değeri kaçtır?**

$\Rightarrow\ -2 + \text{sgn}(-2) = -3$

$-1 + \text{sgn}(-1) = -2$

$0 + \text{sgn}(0) = 0$

$1 + \text{sgn}(1) = 2$

$2 + \text{sgn}(2) = 3$

$3 + \text{sgn}(3) = 4$

$+\quad 4 + \text{sgn}(4) = 5$

9

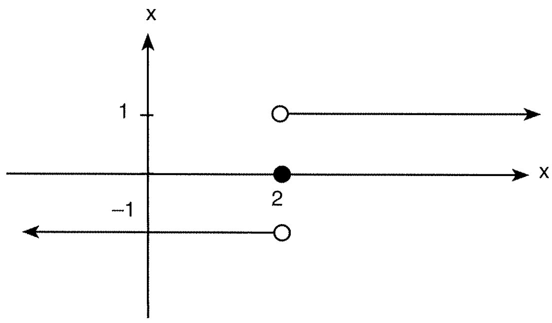
Örnek

y= sgn(x – 2) grafiğini çiziniz.

$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow y = -1$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0$

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow y = 1$



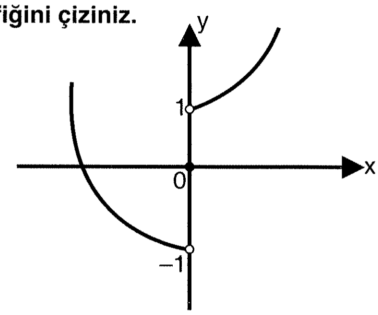
Örnek

y = x^2 + sgnx grafiğini çiziniz.

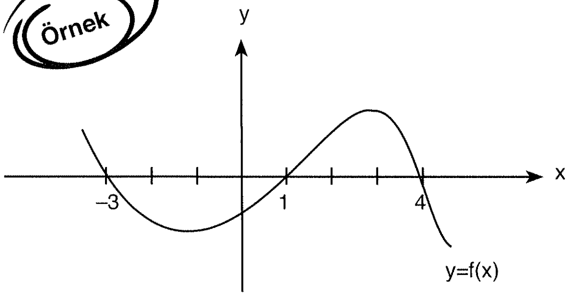
$x < 0 \Rightarrow y = x^2 - 1$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

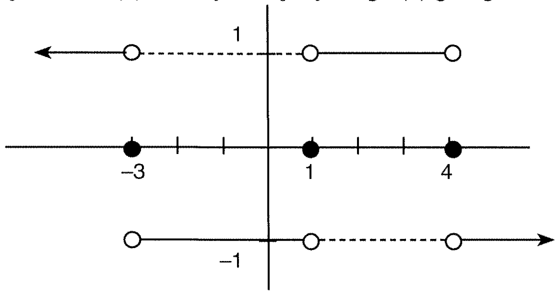
$x > 0 \Rightarrow y = x^2 + 1$



Örnek



Şekildeki f(x) fonksiyonu için y = sgnf(x) grafiği nedir?

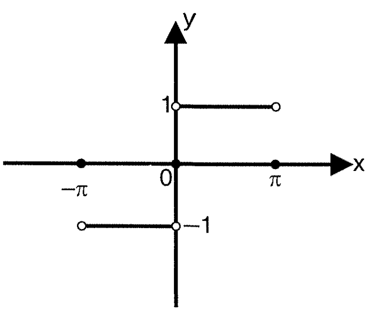


Örnek

f : [-π, π] → [–1, 1]

f(x) = sgn(sinx) grafiğini çiziniz.

$$\operatorname{sgn}(\sin x)=\begin{cases}0\ , & x=-\pi\\ -1, & -\pi<x<0\\ 0\ , & x=0\\ 1\ , & 0<x<\pi\\ 0\ , & x=\pi\end{cases}$$



Örnek

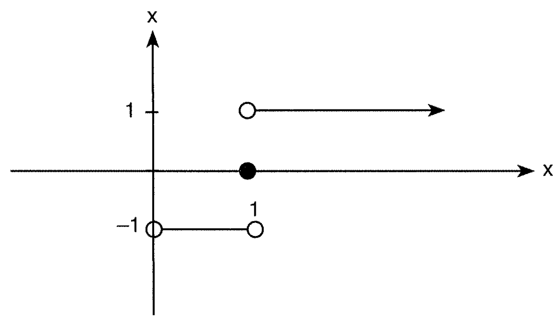
f: IR⁺ → IR

y = sgn(logx) grafiğini çiziniz.

$\log_2 x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

$\log_2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$\log_2 x < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 1 \Rightarrow \quad y = -1$

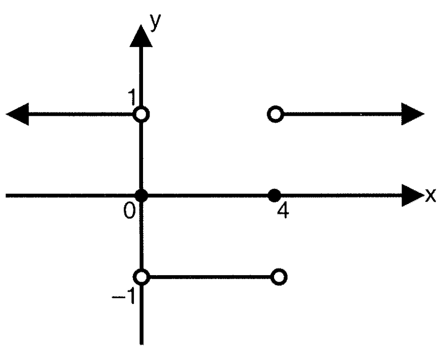


Örnek

f : ℝ → ℝ

f(x) = x² – 4x için y = sgn(f(x)) grafiğini çiziniz.

		0		4	
f(x)	+	0	–	0	+
sgnf(x)	1		–1		1



4– Tam Değer Fonksiyonu

Tanım: $x \in IR$ olmak üzere x'ten büyük olmayan en büyük tamsayıya x'in **tam değeri** denir ve $[|x|]$ ile gösterilir. $y = [|f(x)|]$ ifadesine ise **tam değer fonksiyonu** denir.

I. $x \in \mathbb{Z}$ ise $[\![x]\!] = x$

II. $x \notin \mathbb{Z}$ ise $\left.\begin{array}{l} a \in \mathbb{Z} \text{ ve} \\ a \le x < a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow [\![x]\!] = a$ olur.

Örnek olarak;

$[\![5]\!] = 5$, $[\![3.1]\!] = 3$, $[\![4.99]\!] = 4$

$[\![-1.9]\!] = -2$, $[\![-0.2]\!] = -1$, $[\![\pi]\!] = 3$

$[\![-\pi]\!] = -4$, $[\![e]\!] = 2$, $[\![-e]\!] = -3$

$[\![\log 21]\!] = 1$, $[\![\log_2 9]\!] = 3$, verilebilir.

Özellikler:

$\forall x, y \in IR$ ve $a \in \mathbb{Z}$ için

I. $[\![x]\!] = a \Rightarrow a \le x < a+1$

II. $[\![x+a]\!] = [\![x]\!] + a$

III. $[\![x]\!] \le x < [\![x+1]\!]$

IV. $[\![x + [\![y]\!]]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!]$

V. $[\![x+y]\!] \geqslant [\![x]\!] + [\![y]\!]$

VI. $[\![f(x)]\!] > a \Rightarrow f(x) \ge a+1$

VII. $[\![f(x)]\!] < a \Rightarrow f(x)$

Örnek

$[|x + [|x|] |] = 6$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$[|x|] + [|x|] = 6 \Rightarrow [|x|] = 3 \Rightarrow 3 \le x < 4$

Ç.K = [3, 4)

Örnek

$[|x + 3 [|x|]|] = 8$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$[|x + 3[|x|]|] = 8 \Rightarrow [|x|] = 2 \Rightarrow 2 \le x < 3$

Ç.K. = [2, 3)

Örnek

$[|x|]^2 - 4 \cdot [|x|] - 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$[|x|] = a \Rightarrow a^2 - 4a - 5 = 0$

$(a-5)(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1$

$a = 5$

$\left.\begin{array}{l} [\![x]\!] = -1 \Rightarrow -1 \le x < 0 \\ [\![x]\!] = 5 \Rightarrow 5 \le x < 6 \end{array}\right\}$ Ç.K. $= [-1, 0) \cup [5, 6)$

Örnek

$[|x|]^2 - [|x|] - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$[|x|] = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$(a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 2 = [|x|] \Rightarrow 2 \le x < 3$

$a = -1 = [|x|] \Rightarrow -1 \le x < 0$

Ç.K. = [–1 , 0) ∪ [2, 3)

Örnek

$[|\,|x-2|\,|] = 3$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$3 \le |x-2| < 4 \Rightarrow 3 \le x-2 < 4 \Rightarrow 5 \le x < 6$

$\searrow$ $-4 < x-2 \le -3 \Rightarrow -2 < x \le -1$

Ç.K = (–2, –1] ∪ [5, 6)

Örnek

$\left[\left|\dfrac{2x-5}{4}\right|\right]=3$ **denkleminin çözüm kümesi nedir?**

$3 \le \dfrac{2x-5}{4} < 4 \Rightarrow 12 \le 2x-5 < 16$

$17 \le 2x < 21$

$\dfrac{17}{2} \le x < \dfrac{21}{2} \Rightarrow Ç.K. = \left[\dfrac{17}{2}, \dfrac{21}{2}\right)$

Örnek

$\left[\left|\dfrac{1}{2x-3}\right|\right]=2$ **denkleminin çözüm kümesi nedir?**

$2 \le \dfrac{1}{2x-3} < 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} < 2x-3 \le \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{10}{3} < 2x \le \dfrac{7}{2}$

$\dfrac{5}{3} < x \le \dfrac{7}{4}$

$Ç.K = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{4}\right]$

Örnek

$[|x^2|] = 9$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$9 \le x^2 < 10 \Rightarrow 3 \le x < \sqrt{10}$

$-\sqrt{10} < x \le -3$

$Ç.K. = [3, \sqrt{10}) \cup (-\sqrt{10}, -3]$

Örnek

$[|(2x-5)|] \le 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$2x - 5 < 5 \quad \Rightarrow \quad 2x < 10$

$x < 5$

$Ç.K = (-\infty, 5)$

Örnek

$[|4x-3|] > 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$4x - 3 \ge 6 \Rightarrow 4x \ge 9 \Rightarrow x \ge \dfrac{9}{4} \Rightarrow Ç.K. = \left[\dfrac{9}{4}, +\infty\right)$

Örnek

$[\![3x+7]\!] > -3$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$3x + 7 \geqslant -2 \quad \Rightarrow \quad 3x \geqslant -9$

$x \geqslant -3$

$Ç.K = [-3, +\infty)$

Örnek

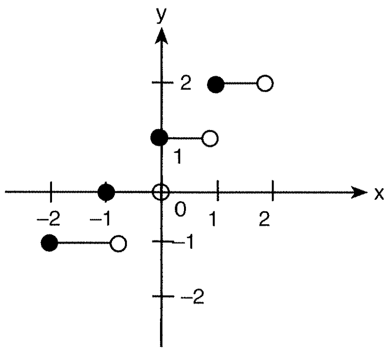
$[|6x-1|] \le -2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$6x-1<-1 \Rightarrow 6x<0$

$x<0 \Rightarrow$ Ç.K. $=(-\infty, 0)$

Örnek

$y=[|x+1|]$ grafiğini çizelim.



$-1 \le x < 0 \Rightarrow y = 0$

$0 \le x < 1 \Rightarrow y = 1$

$1 \le x < 2 \Rightarrow y = 2$

⋮

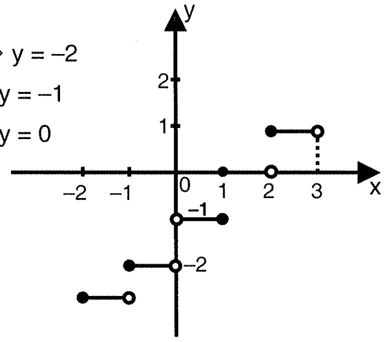
Örnek

$y=[|x-1|]$ grafiğini çizelim.

$-1 \le x < 0 \Rightarrow y = -2$

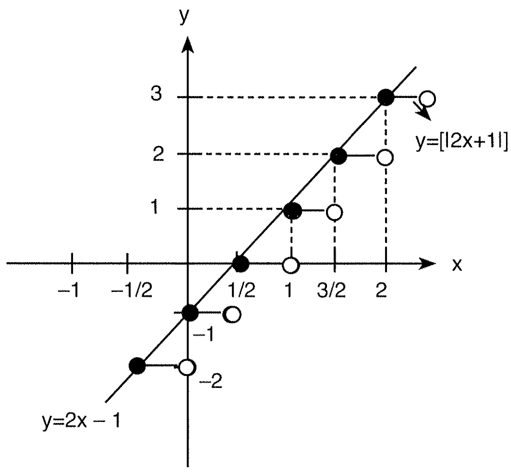
$0 \le x < 1 \Rightarrow y = -1$

$1 \le x < 2 \Rightarrow y = 0$



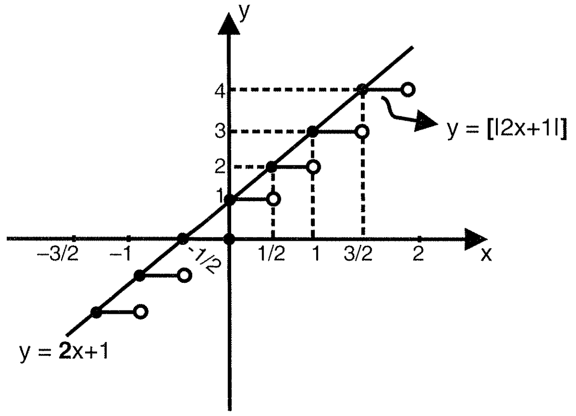
Örnek

$y=[|2x-1|]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



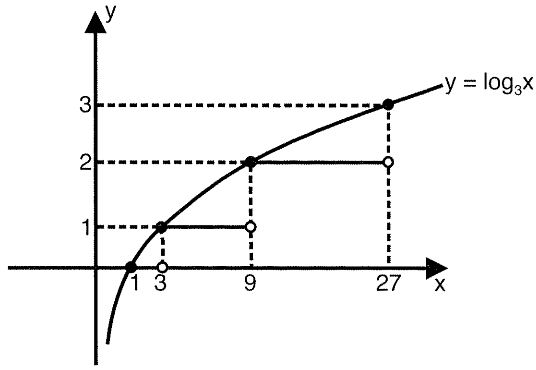
Örnek

y = [|2x + 1|] fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



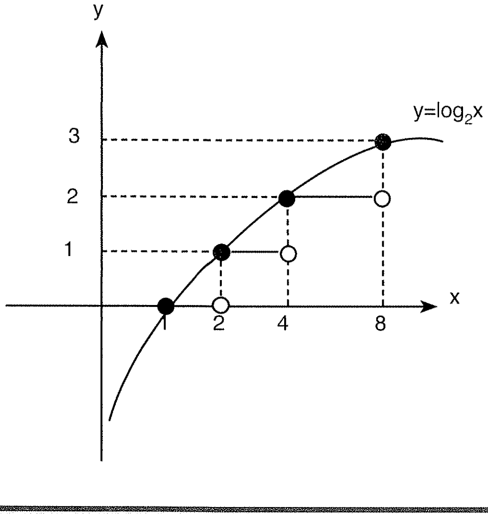
Örnek

y = [|log$_3$x|] grafiğini çiziniz.



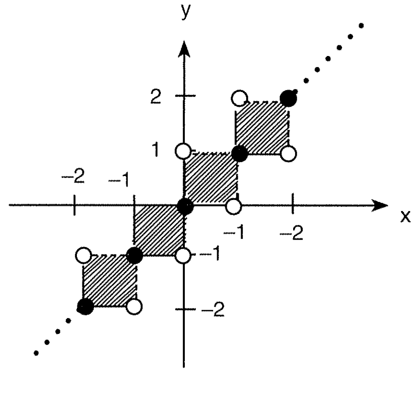
Örnek

y = [|log$_2$x|] grafiğini çiziniz.



Örnek

[|x|] = [|y|] grafiğini çiziniz.



$\left.\begin{array}{l} -1 \leq x < 0 \\ -1 \leq y < 0 \end{array}\right\}$

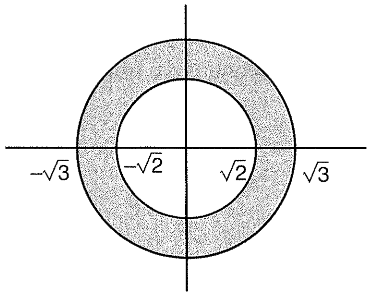
$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x < 1 \\ 0 \leq y < 1 \end{array}\right\}$

⋮

Örnek

$[|x^2 + y^2|] = 2$ grafiğini çiziniz.

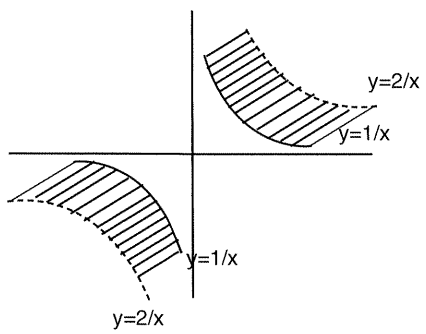
$2 \le x^2 + y^2 < 3$



Örnek

$[|x \,.\, y|] = 1$ grafiğini çiziniz.

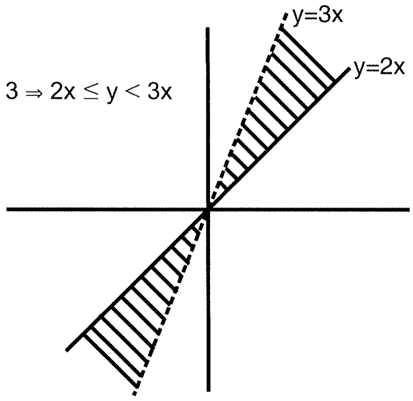
$1 \leq xy < 2 \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \le y < \frac{2}{x}$



Örnek

$\left[\left|\frac{y}{x}\right|\right] = 2$ grafiğini çiziniz.

$2 \le \frac{y}{x} < 3 \Rightarrow 2x \le y < 3x$



LİMİT

$A \subset IR$ ve $f: A-\{a\} \to IR$'ye tanımlı iken, x değişkeni $a \in IR$ sayısına yaklaştığında, f(x) fonksiyonu da $\ell \in IR$ sayısına yaklaşıyorsa, $\ell \in IR$ sayısına x, a'ya yaklaşırken f(x) fonksiyonunun limiti denir ve $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ ile gösterilir.

Özellikler

$A \subset IR$, $f: A \to IR$ ve $g: A \to IR$ birer fonksiyon ve $a \in IR$ olsun.

Eğer $\lim_{x \to a} f(x)$ ve $\lim_{x \to a} g(x)$ limitleri mevcutsa,

I. $\forall c \in IR$ için $\lim_{x \to a} (cf)(x) = c. \lim_{x \to a} f(x)$

II. $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

III. $\lim_{x \to a} (f.g)(x) = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x)$

IV. $\forall x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ve $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Örnek

$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2+x-6}{x-2} \right)$ **limitini hesaplayınız.**

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x+3) = 5$$

Örnek

$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^3+x^2-2x}{x^2-1} \right)$ **limitini hesaplayınız.**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x(x^2+x-2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x+2)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x+2)}{(x+1)} = \frac{1.3}{2} = \frac{3}{2}$$

1. Sağ ve Sol Limitler

$\lim_{x \to c^-} f(x) = \ell$ ifadesine f(x) fonksiyonunun c noktasındaki SOLDAN LİMİTİ,

$\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell$ ifadesine f(x) fonksiyonunun c noktasındaki SAĞDAN LİMİTİ denir.

Kural

$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \to c} = \ell$'dir.

$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x)$ yoktur.

Örnek

$\lim_{x \to 1} (\operatorname{sgn}(x^2-1))$ **limitinin değeri nedir?**

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} x = 1\text{'de limit yoktur.}$$

		−1		1	
x^2-1	+		−		+
$(\operatorname{sgn}(x^2-1))$	+1		−1		+1

Örnek

$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ **değeri nedir?**

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{array}\right\} x = 0\text{' da limit yoktur.}$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\text{sgn}x}$ **limiti nedir**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(-x)}{-1}=0\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\text{sgn}x}=0$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}([\![x+2]\!])$ ve $\lim\limits_{x\to 1}([\![x+2]\!])$ limitlerini hesaplayınız.

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}[\![x+2]\!]=3$ $\quad\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}[\![x+2]\!]=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+}[\![x+2]\!]=3\end{array}\right]$ x=1' de limit yoktur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}([\![x+3]\!])$ve $\lim\limits_{x\to 2}([\![x+3]\!])$ **limitlerini hesaplayınız.**

• $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}([\![x+3]\!])=3$ $\quad\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to 2^-}([\![x+3]\!])=4\\ \lim\limits_{x\to 2^+}([\![x+3]\!])=5\end{array}\right]$ $x=2$ 'de limit yoktur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}([\![x^2]\!])$ değeri nedir?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}[\![x^2]\!]=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}[\![x^2]\!]=0\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to 0}[\![x^2]\!]=0$$

Örnek

$$f(x)=\begin{cases}[\![x]\!]+a, & x<0\\ 3+\text{sgn}x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

fonksiyonu x = 0'da limite sahipse a kaçtır?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}([\![x]\!]+a)=-1+a\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(3+\text{sgn}x)=3+1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}a-1=4\\ a=5\end{array}$$

Örnek

$f(x)=\begin{cases}a.\cos x+1, & x<0\\ [\![x+1]\!] &, x>0\end{cases}$ **fonksiyonu x = 0'da limite sahipse a kaçtır?**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}(a.\cos x+1)=a+1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}[\![x+1]\!]=1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}a+1=1\\ a=1\end{array}$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}(⟦3x+2⟧+\text{sgn}x-\ x+1\ )$ **değeri nedir?**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}(⟦3x+2⟧+\text{sgn}x-\ x+1\ )=2+1-1=2\\ \lim\limits_{x\to 0^-}(⟦3x+2⟧+\text{sgn}x-\ x+1\ )=1-1-1=-1\end{array}\right\}$$

x = 0 da limit yoktur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{⟦3x+1⟧+|x|}{\text{sgn}(x-1)}$ **değeri nedir?**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{⟦3x+1⟧+|x|}{\text{sgn}(x-1)}=\dfrac{3+1}{-1}=-4\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{⟦3x+1⟧+|x|}{\text{sgn}(x-1)}=\dfrac{4+1}{1}=5\end{array}\right\}\ x = 1\text{'de limiti yoktur.}$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{5}{x-1}\right)$ ve $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{5}{x-1}\right)$ **limitlerini hesaplayınız.**

$$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{5}{x-1}\right)=-\infty$$

$$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{5}{x-1}\right)=\infty$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{5}{3-x}\right)$ **ve** $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{5}{3-x}\right)$ **limitlerini hesaplayınız.**

$$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{5}{3-x}=\infty$$

$$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{5}{3-x}=-\infty$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3}{(x-5)^2}$ **değerini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{3}{(x-5)^2}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{3}{(x-5)^2}=\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3}{(x-5)^2}=\infty$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2}{(x-4)^2}$ **değerini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2}{(x-4)^2}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2}{(x-4)^2}=\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2}{(x-4)^2}=\infty$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(5^{\frac{2}{x-1}}\right)$ ve $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(5^{\frac{2}{x-1}}\right)$ **değerlerini hesaplayınız.**

$\lim\limits_{x\to 1^+}5^{\infty}=\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 1^-}5^{-\infty}=0$

elde edilir.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 3^+}\left(2^{\frac{5}{x-3}}\right)$ **ve** $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(2^{\frac{5}{x-3}}\right)$ **değerlerini hesaplayınız.**

$\lim\limits_{x\to 3^+} 2^{\frac{5}{x-3}} = 2^{\infty} = \infty$ ve $\lim\limits_{x\to 3^-} 2^{\frac{5}{x-3}} = 2^{-\infty} = 0$ elde edilir.

2– Sandviç Teoremi

c'nin bir komşuluğunda c'den farklı $\forall x \in IR$ için

$h(x) \le f(x) \le g(x)$ ve $\lim\limits_{x\to c} h(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ ise $\lim\limits_{x\to c} = L$ olur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\left(\frac{3}{x}\right)$ **değeri nedir?**

$$-1 \le \sin\left(\frac{3}{x}\right) \le 1 \quad /x$$

$$-x \le x\sin\left(\frac{3}{x}\right) \le x$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}(-x)}_{0} \le \underbrace{\lim_{x\to 0} x.\sin\left(\frac{3}{x}\right)}_{0 \text{ bulunur.}} \le \underbrace{\lim_{x\to 0} x}_{0}$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\ x^2.\cos\left(\frac{4}{x}\right)$ **limitinin değeri kaçtır?**

$$-1 \le \cos\frac{4}{x} \le 1 \ / \ x^2$$

$$-x^2 \le x^2\cos\left(\frac{4}{x}\right) \le x^2$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}(-x^2)}_{\substack{\parallel \\ 0}} \le \underbrace{\lim_{x\to 0} x^2.\cos\left(\frac{4}{x}\right)}_{\substack{\parallel \\ 0 \text{ bulunur.}}} \le \underbrace{\lim_{x\to 0}(x^2)}_{\substack{\parallel \\ 0}}$$

3– Trigonometrik Fonksiyonların Limitleri

Özellikler

I. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$

II. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$

III. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$

IV. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\tan 3x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\tan 3x} = \frac{8}{3}$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{\sin 2x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{\sin 2x} = \frac{6}{2} = 3$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} 2x.\sin\frac{8}{x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$$x = \frac{1}{u} \Rightarrow \lim_{u\to 0}\frac{2\sin(8u)}{u} = 2.8 = 16$$

Örnek

$\lim\limits_{x \to \infty} 3x.\tan\frac{5}{x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\lim\limits_{x \to \infty} 3x.\tan\left(\frac{5}{x}\right) = \lim\limits_{u \to 0} \frac{3.\tan(5u)}{u} = 3.5 = 15$

$x = \frac{1}{u}$

Örnek

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{\cos 2x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{\cos 2x} = \frac{0}{1} = 0$

Örnek

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\cos x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$

Örnek

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$x - 1 = u \Rightarrow \lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin 2u}{3u} = \frac{2}{3}$

Örnek

$\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\tan(3x - 3\pi)}{2x - 2\pi}$ **değeri nedir?**

$x - \pi = u \rightarrow \lim\limits_{u \to 0} \frac{\tan 3u}{2u} = \frac{3}{2}$

$\frac{0}{0}$ var.

Örnek

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - \sin(2x-4) - 4}{x-2}$ **limitinin değeri nedir?**

$x - 2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{u \to 0} \frac{u.(u+4) - \sin 2u}{u}$

$= \lim\limits_{u \to 0}\left[(u+4) - \frac{\sin 2u}{u}\right] = 4 - 2 = 2$

Örnek

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - \sin(2x-2) - 1}{2x - 2}$ **değeri nedir?**

$x - 1 = u \Rightarrow \lim\limits_{u \to 0} \frac{u.(u+2) - \sin 2u}{2u}$

$\frac{0}{0}$ var.

$= \lim\limits_{u \to 0}\left(\frac{u+2}{2}\right) - \frac{\sin(2u)}{2u} = 1 - 1 = 0$

Örnek

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x + \arctan x}{2x - \sin 3x}$ **değeri kaçtır?**

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x + x}{2x - 3x} = -4$

$\frac{0}{0}$ durumunda $\sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \tan x \sim x$ denkliği kullanılabilir.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x - \tan 2x}{\tan x + \sin 2x}$ **değeri nedir?**

$\frac{0}{0}$ durumunda sinx ~ tanx ~ arctanx ~ arcsinx ~ x denkliği kullanılabilir.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-2x}{x+2x} = \dfrac{1}{3}$ elde edilir.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2x).\arctan x}{x.\tan^2(3x)}$ **değeri nedir?**

Denklikten $\frac{0}{0}$ var,

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x)^2.x}{x.(3x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3}{9x^3} = \dfrac{4}{9}$ elde edilir.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2(4x).\arcsin(2x)}{3x.\sin^2(5x)}$ **değeri kaçtır?**

Denklikten $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(4x)^2.2x}{3x.(5x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{32x^3}{75x^3} = \dfrac{32}{75}$

$\frac{0}{0}$ var.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 2x)^2}{x^2.\sin^2(3x)}$ **değeri nedir?**

$\frac{0}{0}$ var,

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left[1-(1-2\sin^2 x)\right]^2}{x^2.\sin^2(3x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sin^4 x}{x^2.\sin^2(3x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4.x^4}{x^2.(3x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^4}{9x^4}$

$= \dfrac{4}{9}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 4x)^2}{x^3.\arctan x}$ **değeri nedir?**

$\frac{0}{0}$ var.

$\cos 4x = 1 - 2\sin^2(2x)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2\sin^2(2x))^2}{x^3.\arctan x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sin^4(2x)}{x^3.\arctan x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4.(2x)^4}{x^3.x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4.16x^4}{x^4} = 64$

Örnek

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\frac{5}{x} + \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{4}{x} + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$ **değeri kaçtır?**

$x = \dfrac{1}{u} \Rightarrow \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{5u + \sin(2u)}{4u + \arctan u}$

Denklikten

$\frac{0}{0}$ var.

$\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{5u+2u}{4u+u} = \dfrac{7}{5}$

Örnek

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x - \cos x}{2x + \sin x}$ **değeri nedir?**

$\frac{\infty}{\infty}$ durumunda cosx, sinx sayı gibi görülebilir. Mesela 1 alınabilir.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x-1}{2x+1} = \dfrac{5}{2}$

Örnek

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\tan(x-2).\arctan(3x-6)}{\sin^2(2x-4)}$ **değeri nedir?**

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2).(3x-6)}{(2x-4)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2).3(x-2)}{4.(x-2)^2} = \dfrac{3}{4}$

$\frac{0}{0}$ var.

Örnek

$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right)$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}\left(\sqrt{\cos^2 x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}|\cos x|$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(\cos x) = 1 \\ \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(\cos x) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(\cos x) = 1$$

Örnek

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin 5x + 2x}{4x}$ **değeri kaçtır?**

$\Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{\sin 5x}{4x}\right)}_{0} + \underbrace{\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{2x}{4x}\right)}_{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

Örnek

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + \sin 3x}{x}$ **değeri kaçtır?**

$-1 \le \sin 3x \le 1$

$\rightarrow \underbrace{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x}}_{2} + \underbrace{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin 3x}{x}}_{0} = 2$

4– Genişletilmiş Gerçel Sayılar Kümesinde Limit Kurallar

(I) $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0 &, n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} &, n = m \\ \pm\infty &, n > m \end{cases}$

(II) $a > 1 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to (-\infty)} a^x = 0$

(III) $0 < a < 1 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to (-\infty)} a^x = \infty$

Örnek

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 3x + 6}{2x^2 + 4x - 1}$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2}{2x^2} = 2$

Örnek

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x + 5}$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

Örnek

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \dfrac{3x^3+2x^2-1}{2x^2+x+4}$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \dfrac{3x^3}{2x^2} = -\infty$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+4x-1}{-x^2+5x}$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{-x^2} = -\infty$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{4x^2-6}$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{4x^2-6} = 0$

Örnek

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \dfrac{2x+1}{5x^2+6x}$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \dfrac{2x}{5x^2} = 0$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-5x+9}+x}{2x+7}$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+x}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \dfrac{\sqrt{2x^2+3x}}{\sqrt{9x^2+1}-x}$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \dfrac{\sqrt{2}|x|}{|3x|-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{2}x}{-3x-x} = \dfrac{-\sqrt{2}}{-4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sgn}\left(\dfrac{6x-1}{-3x+4}\right)$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sgn}\left(\dfrac{6}{-3}\right) = \operatorname{sgn}(-2) = -1$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sgn}\left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2+4x}\right)$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sgn}\left(\dfrac{2x^2}{3x^2}\right) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{2}{3}\right) = 1$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$ **değeri nedir?**

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0 \\ &\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4}{x}\right) = 0 \\ &\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-4} = 2 \end{aligned}\right\} \; 0+0+2=2 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\![x]\!]}{x}$ **değeri nedir?**

$[\![x]\!] \sim x$ (sonsuz durumunda)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\![x]\!]}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5^x+3^{x-1}}{5^{x+1}+3^{x+2}}$ **değeri nedir?**

Büyüklükler oranlanır.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5^x}{5^{x+1}} = \frac{1}{5}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^{x+5}+3^{x+2}}{2^{x-3}+3^{x+4}}$ **değeri nedir?**

Büyükler oranlanır:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^{x+2}}{3^{x+4}} = \frac{1}{9}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \frac{7^x-2^{x+1}}{5.7^x+2^x}$ **değeri nedir?**

Küçüklükler oranlanır.

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \frac{-2^{x+1}}{2^x} = -2$

Kural

$\boxed{\lim\limits_{x\to\mp\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,.\lim\limits_{x\to\mp\infty} x+\frac{b}{2a}}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \frac{3.5^x+2.3^x}{4.5^x-3^{x-1}}$ **değeri nedir?**

Küçükler oranlanır:

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \frac{2.3^x}{-3^{x-1}} = -6$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x-1} - x + 1$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x\to\infty} x+\frac{3}{2} - x + 1 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{3}{2}\right) - x + 1 = \frac{5}{2}$

Kural

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k}$ 1^∞ belirsizliği

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+7} - x + 3$ **değeri nedir?**

$\lim\limits_{x\to\infty}\left|x-\frac{2}{2}\right| - x + 3 = \lim\limits_{x\to\infty} x - 1 - x + 3 = 2$

Örnek

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \sqrt{4x^2+16x-1} + ax + b = 3$ **ise**

a + b değeri nedir?

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} 2.\left|x+\frac{16}{8}\right| + ax + b = 3$

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} 2(-x-2) + ax + b = 3$

$\lim\limits_{x\to(-\infty)} \underbrace{(a-2)}_{0}x + \underbrace{(b-4)}_{3} = 3$

$\left.\begin{matrix} a=2 \\ b=7 \end{matrix}\right\}$ a + b = 9

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}$ **değeri nedir?**

1^{∞} var

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}=e^{-3}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ **değeri nedir?**

1^{∞} var

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=e^{2}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-2}\right)^{2x+5}$ **limitinin değeri nedir?**

1^{∞} var

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{4x-2}\right)^{2x+5}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5.(2x+5)}{4x-2}}=e^{\frac{5}{2}}$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-1}\right)^{4x+1}$ **limitinin değeri nedir?**

1^{∞} var

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x-1}\right)^{4x+1}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5.(4x+1)}{3x-1}}=e^{\frac{20}{3}}$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-1}{x^2+2}\right)^{2x-1}$ **değeri kaçtır?**

1^{∞} var

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-3}{x^2+2}\right)^{2x-1}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x-3)(2x-1)}{x^2+2}}=e^{8}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$ **değeri kaçtır?**

1^{∞} var

$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=e^{3.2}=e^{6}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$ **değeri kaçtır?**

1^{∞} var

$\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}=e^{5.3}=e^{15}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{\operatorname{cosec}x}$ **değeri kaçtır?**

1^{∞} var

Denklikten: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ bulunur.

SÜREKLİLİK

Tanım: $A \subset IR$,

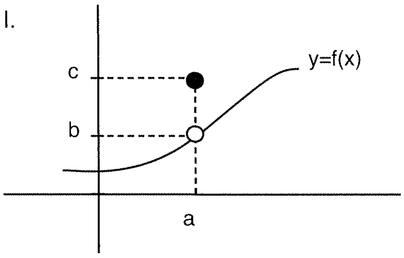
$f: A \to IR$ olmak üzere

$a \in A$ alınıyor.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ise f(x) fonksiyonu **a noktasında süreklidir** denir. Eğer f(x), A'daki her noktada sürekli ise A üzerinde süreklidir. denir.

Süreksizlik Çeşitleri

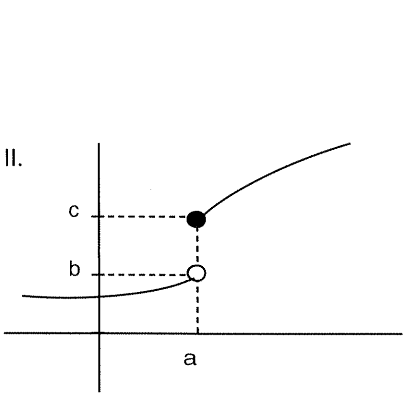
I.



$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ mevcut fakat bu değer f(a) değerinden farklı ise kaldırılabilir süreksizlik vardır.

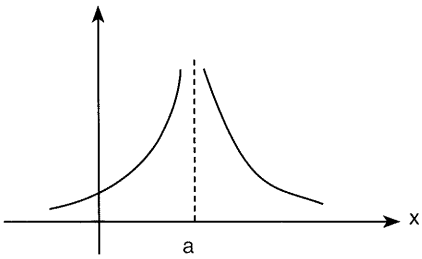
Şekil bu durumu örnekleniyor.

II.



a noktasında sağ ve sol limitler mevcut fakat farklı iseler **sıçrama süreksizliği** vardır. Şekil buna örnek olarak verilebilir.

III.



Sağ ve sol limitlerden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise, veya mevcut değilse **sonsuz süreksizliği** vardır.

Kural:

$A \subset IR$,

$f: A \to IR$ ve $a \in A$

(I) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \Longleftrightarrow f(x)$ sağdan süreklidir.

(II) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) \Longleftrightarrow f(x)$ soldan süreklidir.

Örnek

$f: IR \to IR$

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \sin x & , \ x > 0 \\ 2 & , \ x = 0 \\ \cos x - 1 & , \ x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu x = 0'da sürekli midir?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (\cos x - 1) = 1 - 1 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2 + \sin x) = 2 + 0 = 2 \end{array}\right\} \ x = 0\text{'da sürekli değildir}$$

$f(0) = 2$

Örnek

f : IR → IR

$$f(x)=\begin{cases}3+\cos x & , x<0\\ 4 & , x=0\\ 4\sin x & , x>0\end{cases}$$ **fonksiyonu x = 0' da sürekli midir?**

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^-}(3+\cos x)=4\\ \lim\limits_{x\to 0^+}4\sin x=0\\ f(0)=4\end{array}\right\}\ x=0'\text{ da sürekli değildir.}$$

Örnek

f: IR → IR

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(mx)}{2x} & , x<0\\ 3x+1 & , x\geq 0\end{cases}$$

fonksiyonu her yerde sürekli ise m değeri nedir?

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(mx)}{2x}=\lim_{x\to 0^+}(3x+1)$$

$$\frac{m}{2}=1\Rightarrow m=2$$

Örnek

f : IR → IR

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x} & , x<0\\ a & , x=0\\ \dfrac{2x-b}{x+3} & , x>0\end{cases}$$

fonksiyonu x = 0' da sürekli ise a + b nedir?

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 3x}{x}}=a=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-b}{x+3}$$

$$3=a=\frac{-b}{3}\Rightarrow a=3$$

$$\underline{+\quad b=-9}$$

$$=-6$$

Örnek

f : IR → IR

$$f(x)=\begin{cases}3.\cos x & , x<0\\ a\cos x+b & , 0\leq x\leq\pi\\ 2\sin x & , x>\pi\end{cases}$$

fonksiyonu her yerde sürekli ise (a+2b) değeri nedir?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}(3\cos x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a\cos x+b)\\ \quad 3=a+b\\ \lim\limits_{x\to \pi^-}(a\cos x+b)=\lim\limits_{x\to \pi^+}(2\sin x)\\ \quad -a+b=0\end{array}\right\}$$

$$a+b=3$$
$$\underline{-a+b=0}$$
$$b=\frac{3}{2}$$
$$\underline{a=\frac{3}{2}}$$
$$a+2b=\frac{3}{2}+3$$
$$=\frac{9}{2}$$

Örnek

f : IR → IR

$$f(x)=\begin{cases}a.\operatorname{sgn}(x^2-4) & , x<2\\ \dfrac{2}{x} & , x\geq 2\end{cases}$$

fonksiyonu her yerde sürekli ise a değeri nedir?

$$\underbrace{\lim_{x\to 2^-}a.\operatorname{sgn}(x^2-4)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{x}$$

$-a = 1 \Rightarrow a = -1$ bulunur.

Kural:

Sonlu sayıda süreksizlik noktası olan fonksiyonlara **parçalı sürekli fonksiyon** denir.

Örnek

$f(x)=\dfrac{3x+\cos x}{x^2-1}$ fonksiyonu

$$\left.\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\end{array}\right\}$$

olmak üzere iki süreksizlik noktasına sahip olduğundan parçalı sürekli fonsiyondur.

Fakat f(x) = tan $x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z$$

şeklinde sonsuz sayıda süreksizlik noktasına sahip olduğundan parçalı sürekli fonksiyon değildir.

Örnek

f: IR → IR

$$f(x)=\frac{x^2+2\cos x+1}{x^2+(m+1)x+3}$$

fonksiyonu her yerde sürekli ise m hangi aralıktadır?

Payda köke sahip olmamalı, yani $\Delta < 0$ olmalı

$$(m+1)^2-4\,.\,1\,.\,3<0$$

$$(m+1)^2<12 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{12}<m+1<\sqrt{12}$$

$$-2\sqrt{3}-1<m<2\sqrt{3}-1$$

Örnek

f : IR → IR

$$\mathbf{f(x)=\frac{x^2+2\sin x}{x^2+(k-2)x+4}}$$

fonksiyonu her yerde sürekli ise k hangi aralıktadır?

Payda köke sahip olmamalı, yani $\Delta < 0$ olmalı.

$(k-2)^2-4\,.\,1\,.\,4<0$

$(k-2)^2<16$

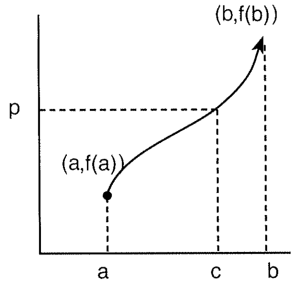
$-4<k-2<4$

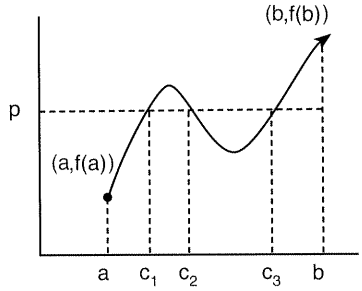
$-2<k<6$

Aradeğer Teoremi

f(x), [a, b]'de sürekli,

p sayısı f(a) ile f(b) arasında herhangi bir sayı ise [a, b] aralığında f(c) = p olacak şekilde en az bir c noktası vardır.



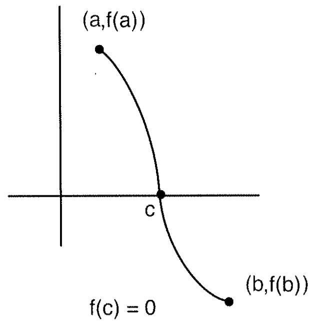


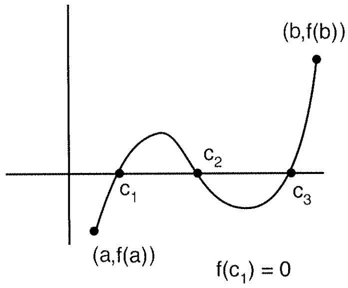
Şekillerden de görüldüğü üzere en az bir c noktası vardır.

Bolzano Teoremi

f(x), [a, b]'de sürekli ve

f(a) ve f(b) zıt işaretli ise a ile b arasında f(c) = 0 olacak şekilde en az bir c noktası vardır.





$f(c_1)=0$

$f(c_2)=0$

$f(c_3)=0$

Şekillerden de görüleceği üzere en az bir c noktası vardır.

Örnek

$x^4 + 2x^2 - 1 = 0$ denkleminin [0, 1] aralığında kökü var mıdır?

f(x) sürekli ve

$\left.\begin{matrix} f(0) = -1 \\ f(1) = 2 \end{matrix}\right\} f(0).f(1) < 0$

olduğundan en az bir kökü vardır.

Örnek

$x^6 + 3x^2 - 2 = 0$ denkleminin [0,1] aralığında kökü var mıdır?

f(x) sürekli ve

$\left.\begin{matrix} f(0) = -2 \\ f(1) = 2 \end{matrix}\right\}$ f(0) . f(1) < 0 olduğundan en az bir kökü vardır.

Örnek

$f(x) = \frac{2}{x}$ fonksiyonunun [–1, 1] aralığında kökü vardır?

$\left.\begin{matrix} f(-1) = -2 \\ f(1) = 2 \end{matrix}\right\} f(-1).f(1) < 0$

olduğu halde f(x), [–1, 1]'de sürekli olmadığından kökü yoktur.

Örnek

$f(x) = \frac{1}{x-3}$ fonksiyonunun [0,4] aralığında kökü var mıdır?

$\left.\begin{matrix} f(0) = -\frac{1}{3} \\ f(4) = 1 \end{matrix}\right\}$ f(0) . f(4) < 0 olduğu halde, f(x) . [0,4]' de sürekli olmadığından kökü yoktur.

Örnek

$y = x^5 - 2$ ve $y = 3x$ eğrileri [1, 2] aralığında kesişirler mi?

$x^5 - 2 = 3x$

$x^5 - 3x - 2 = 0$

Bolzano teoreminden;

$\left.\begin{matrix} f(x) \text{ sürekli} \\ f(1) = -4 \\ f(2) = 24 \end{matrix}\right\}$ f(1) . f(2) < 0 olduğundan [1,2] aralığında kesişirler.

Örnek

$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \ , & x < 1 \\ x^2 + 2 \ , & x \geq 1 \end{cases}$ fonksiyonunun [0,3] aralığında kökü var mıdır?

$\left.\begin{matrix} f(0) = -3 \\ f(3) = 11 \end{matrix}\right\}$ f(0) . f(3) < 0 fakat $\lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + 2)$

$-1 \neq 3$

f(x) sürekli olmadığından kök yoktur.

TÜREV

- $A \subset IR$, $a \in A$ ve f(x), A'da tanımlı fonksiyon olsun. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ veya $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

  limiti mevcutsa f(x), a noktasında türevlenebilidir. Bu türev $f'(a)$, $\dfrac{df(a)}{dx}$, $Df(a)$ ile gösterilir.

- $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ f(x)'in x = a'daki sol türevi (limit mevcutsa)

  $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ f(x)'in x=a'daki sağ (limit mevcutsa) türevidir.

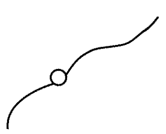
x = a'da türev olması için sağ ve sol türevler eşit olmalıdır.

1– Türev ve Süreklilik İlişkisi

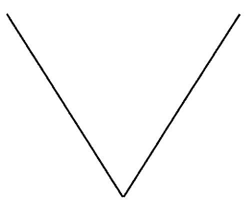
Kurallar.

1. $A \subset IR$, $a \in A$ ve f(x), A'da tanımlı fonksiyon y = f(x) fonksiyonu $a \in A$ için türevli ise x = a'da süreklidir. Tersi doğru değildir. Yani x = a'da sürekli olup türevli olmayabilir.
2. Bir fonksiyon süreksiz olduğu noktalarda türevsizdir.
3. Sürekli olduğu halde türevli olmadığı noktalar kırılma noktalarıdır.

Limit $\Leftarrow$ Süreklilik $\Leftarrow$ Türevli olma
$\not\Rightarrow$ $\not\Rightarrow$



Limiti var, fakat süreksiz



Sürekli fakat türevsiz

Örnek

$f: IR \to IR$, $\begin{cases} 2x+1, & x<2 \\ x^3-3 & x \geq 2 \end{cases}$

fonksiyonu x = 2'de türevli midir?

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-}(2x+1) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2.2+1 = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+}(x^3-3) = 8-3 = 5 \end{array}\right\}$ sürekli

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} 3x^2 = 12 \end{array}\right\}$ Türevsiz

Örnek

f : ℝ → ℝ

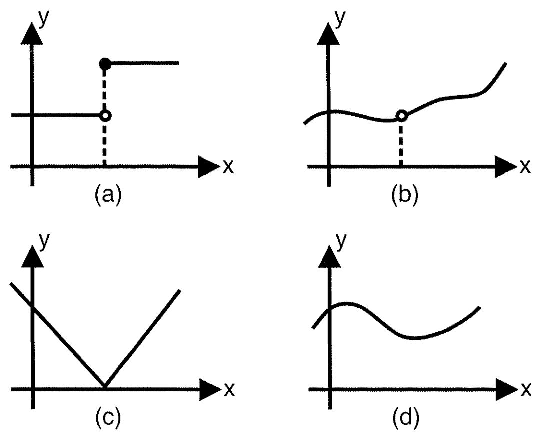
$f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x<1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

fonksiyonu x = 1' de türevli midir?

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-}(x^3+1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+}(2x) = 2 \end{array}\right\}$ Sürekli , $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} 3x^2 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2 \end{array}\right\}$ Türevsiz

Örnek

Aşağıdakilerden hangileri türevlenebilirdir?



(a) Limitsiz ⇒ Süreksiz ⇒ Türevsiz X

(b) Limitli ama süreksiz ⇒ Türevsiz X

(c) Sürekli ama türevsiz X

(d) Türevli ✓

Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x<1 \\ x^2+3, & x \geq 1 \end{cases}$

fonksiyonu her yerde türevli ise a ve b değerleri nelerdir?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} (ax+b) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+3) \Rightarrow a+b=4 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} a = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x \Rightarrow a=2 \end{array}\right\} b=2$$

2– Türev Almada Genel Kurallar

- $(c)^I = 0$ (c sabit)
- $(x^n)^I = nx^{n-1}$ (n sabit)
- $[f(x) \,.\, g(x)]^I = f^I(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g^I(x)$
- $[f(x) + g(x)]^I = f^I(x) + g^I(x)$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]^I = \dfrac{f^I(x).g(x) - f(x).g^I(x)}{[g(x)]^2}$
- $(fog)^I(x) = [f(g(x))]^I = f^I(g(x)) \,.\, g^I(x)$

Örnek

$|x| < 1$ için

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ veriliyor.

Buna göre $f^I\left(\frac{1}{2}\right)$ değeri nedir?

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad (x < 1 \text{için})$$

$$f^I(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f^I\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Örnek

$|3x| < 1$ için

$f(x) = 3x + 9x^2 + 27x^3 + \ldots$ ise $f^I\left(\frac{1}{6}\right)$ değeri kaçtır?

$f(x) = 3x \,.\, (1 + (3x) + (9x^2) + \ldots)$

$= 3x \,.\, (1 + (3x) + (3x^2) + \ldots) = 3x \,.\, \dfrac{1}{1-3x} = \dfrac{3x}{1-3x}$

$$f^I(x) = \frac{3.(1-3x) - 3x.(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{3-9x+9x}{(1-3x)^2} = \frac{3}{(1-3x)^2}$$

$$f^I\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$f: IR \to IR$, $f(x) = |x^2 - 2x|$ veriliyor.

Buna göre $f'(2)$ ve $f'(3)$ değerlerini bulunuz.

- $x = 3$ $\quad f(x) = (x^2 - 2x)$, $\quad f'(x) = (2x-2)\Big|_{x=3} = 4$
- $x = 2$ kritik nokta $\Rightarrow f'(2^+)$ ve $f'(2^-)$ bulmalıyız.

$$\left.\begin{array}{ll} x=2^+ \text{ için} & f(x) = x^2 - 2x \\ & f'(x) = 2x - 2\Big|_{x=2^+} \\ & \quad = 2 \\ x=2^- \text{ için} & f(x) = -x^2 + 2x \\ & f'(x) = -2x + 2\Big|_{x=2^-} \\ & \quad = -2 \end{array}\right\} f'(2^+) \neq f'(2^-)$$

türev yoktur.

Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^3 + 2x|$ veriliyor.

Buna göre $f'(1)$ ve $f'(0)$ değerleri kaçtır?

$x = 1$ için $f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2\big|_{x=1} = 5$

$x=1 = 5$

$x = 0$ kritik nokta

$x = 0^+ \to f'(x) = 3x^2 + 2\big|_{x=0^+} = 2$

$x = 0^- \to f'(x) = -3x^2 - 2\big|_{x=0^-} = -2$

$x = 0$ da türev yoktur.

Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |(x-2)^3|$ veriliyor.

$f'(2)$ kaçtır?

$x = 2$ kritik nokta

$$\left.\begin{array}{l} x=2^+ \text{ için } f(x) = (x-2)^3 \\ f'(x) = 3(x-2)^2\Big|_{x=2^-} = 0 \\ x=2^- \text{ için } f(x) = -(x-2)^3 \\ f'(x) = -3(x-2)^2\Big|_{x=2^-} = 0 \end{array}\right\} f'(2) = 0$$

Örnek

$f(x) = x \,.\, \text{sgn}(x-1)$ fonksiyonu için

$f'(2)$ ve $f'(1)$ değerleri nelerdir?

$x = 2$ için $f(x) = x \,.\, 1$

$f'(x) = 1 \Rightarrow f'(2) = 1$

$x = 1$ için kritik nokta

$$\left.\begin{array}{ll} x=1^+ \text{ için} & f(x) = x.1 \Rightarrow f'(x) = 1 \\ x=1^- \text{ için} & f(x) = x.(-1) \Rightarrow f'(x) = -1 \end{array}\right\} \text{türev yoktur.}$$

Örnek

$f(x) = [|x + 1|]$ için $f'(1)$ ve $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ nedir?

- $x = 1$ için kritik nokta

$$\left.\begin{array}{ll} x=1^+ & f(x) = 2 \\ x=1^- & f(x) = 1 \end{array}\right\} \text{Süreksiz} \Rightarrow \text{türevsiz}$$

- $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}$ (sabit)

  $f'(x) = 0$

Örnek

$f(x) = [\![x + 3]\!]$ için $f'(2)$ ve $f'(1/3)$ kaçtır?

$x = 2$ için kritik nokta

$$\left.\begin{array}{l} x = 2^+ \Rightarrow f(x) = 5 \\ x = 2^- \Rightarrow f(x) = 4 \end{array}\right\} \text{ süreksiz} \Rightarrow \text{türevsiz}$$

$x = 1/3$ için $f(x) = 3$ (sabit) $\Rightarrow f'(x) = 0$

Örnek

$f : [1,4] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = |x^2 - 4| + [\![x]\!] + sgn(x-3)$

fonksiyonu kaç noktada türevsizdir?

$|x^2 - 4| = 0$ yapan noktalar $\Rightarrow x = 2 \in [1,4]$

$x = -2 \notin [1,4]$

$[\![x]\!]$ tamsayı yapanlar $x = 1 \quad x = 3$

$x = 2 \quad x = 4$

$sgn(x - 3) = 0$ yapanlar $x = 3$

4 noktada türevsizdir.

Örnek

$f : [0,4] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-4} + |x^2 - 9| + [\![x+1]\!] + sgn(3x-1)$$

kaç noktada türevsizdir?

$3x - 4 = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}$

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x = -3 \notin [0,4]$

$[\![x+1]\!]$ için $\quad x = 0, 1, 2, 3, 4$

$sgn(3x-1) = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4| + x \,.\, [|x|] + sgn(2x - 5)$

ise $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ değeri kaçtır?

$x = \frac{3}{2}$ için $\quad f(x) = 4 - x^2 + x - 1$

$$f'(x) = -2x + 1 \Big|_{x=\frac{3}{2}}$$

$= -3 + 1$

$= -2$

Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |9 - x^2| + x^2 \,.\, [\![x]\!] + x \,.\, sgn(x - 1)$ ise $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ değeri kaçtır?

$x = \frac{3}{2}$ için $\quad f(x) = 9 - x^2 + x^2 \,.\, 1 + x \,.\, (-1)$

$f'(x) = -2x + 2x - 1 = -1$

Örnek

$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^3 - 1$ olmak üzere

$(fog)'(1)$ değeri nedir?

$$f'(\underbrace{g(1)}_{0}).g'(1) = f'(0)g'(1) \quad \begin{array}{l} \nearrow f'(x) = 2 \\ \searrow g'(x) = 3x^2 \end{array}$$

$= 2.3 = 6$

Örnek

$f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x^2 - 2$ olmak üzere,

$(fog)'(0)$ değeri kaçtır?

$f'(x) = 4x^3$

$f'(g(0)) \,.\, g'(0) = f'(-2) \,.\, g'(0)$

$g'(x) = 2x$

$= (-32) \,.\, 0 = 0$

Örnek

$f(3x-1) = x^3 + 2x^2 - 1$ ise $f'(5)$ değeri kaçtır?

$$\left.\begin{array}{l} f'(\underbrace{3x-1}_{5}).3 = 3x^2+4x \\ 3x-1=5 \\ x=2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} f'(5).3 = 12+8 \\ 3f'(5) = 20 \\ f'(5) = \dfrac{20}{3} \end{array}$$

Kural:

$$\left.\begin{array}{l} y = y(u) \\ u = u(z) \\ z = z(t) \end{array}\right\} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}$$ şeklindedir.

Örnek

$f(2x+5) = 2x^3 - 3x + 4$ ise $f'(7)$ değeri kaçtır?

$$\left.\begin{array}{l} f'(\underbrace{2x+5}_{7}).2 = 6x^2-3 \\ x=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} f'(7).2 = 6-3 \\ f'(7) = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

Örnek

$f(3x-1)\,.\,g(x^2+2) = 2x+1$,

$g(3) = 4$, $f'(2) = 1$ veriliyor.

$g'(3)$ değeri kaçtır?

$f'(3x-1)\,.\,3\,.\,g(x^2+2) + f(3x-1)\,.\,g'(x^2+2)\,.\,2x = 2$

$x = 1 \Rightarrow \underbrace{f'(2)}_{1}.3.\underbrace{g(3)}_{4} + f(2).g'(3).2 = 2$

$2f(2)\,.\,g'(3) = -10$

$f(2)\,.\,g'(3) = -5 \Rightarrow \frac{3}{4}\,.\,(g'(3)) - 5$

$g'(3) = -\frac{20}{3}$

$x = 1 \Rightarrow f(2)\,.\,\underset{\underset{4}{\parallel}}{g(3)} = 3 \Rightarrow f(2) = \frac{3}{4}$

Örnek

$y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-3}{x^2+2x}}$ ise $\dfrac{dy}{dx}$' in $x = 1$ için değeri kaçtır?

$$y = \left(\frac{x^2-3}{x^2+2x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-3}{x^2+2x}\right)^{-\frac{2}{3}}.\frac{2x(x^2+2x)-(x^2-3).(2x+2)}{(x^2+2x)^2}$$

$$x = 1 \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{3}.\left(\frac{-2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}.\frac{2.3-(-2).4}{9}$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}.\frac{14}{9} = \frac{14}{27}\left(-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

Örnek

$y = \sqrt{x^2+1}$, $x = u^2 + 1$, $u = 2t + 1$ ise $\dfrac{dy}{dt}$ değeri $t = 1$ için nedir?

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dt}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}.2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ \dfrac{dx}{du} = 2u \\ \dfrac{du}{dt} = 2 \end{array}\right\} \quad t = 1 \text{ için } \begin{array}{l} u = 3 \\ x = 10 \\ y = \sqrt{101} \end{array}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.2u.2\right|_{t=1} = \frac{10}{\sqrt{101}}.2.3.2 = \frac{120}{\sqrt{101}}$$

Örnek

$y = x^2 + 2$, $x = \sqrt{u^2+1}$, $u = t^2 + 1$ ise

$\frac{dy}{dt}$ değeri t = 1 için kaçtır?

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dt} = 2x.\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}.2t$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dy}{dx} = 2x \\ \frac{dx}{du} = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} \\ \frac{du}{dt} = 2t\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow u = 2 \\ x = \sqrt{5} \\ y = 7 \\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 2.\sqrt{5}.\frac{2}{\sqrt{5}}.2 = 8 \text{ bulunur.}\end{array}$$

Örnek

Bir dikdörtgenin boyutları eni 4 cm ve boyu 5 cm'dir. Dikdörtgen bir kısmından çekiliyor. Bu durumda eni 0.1 cm/s daralıyor, boyu ise 0.2 cm/s genişliyor.

Buna göre alandaki değişim oranı nedir?

$$A = x.y \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}.y + x\frac{dy}{dt}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -0,1 \\ y = 5 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0.2\end{array}\right\} \begin{array}{l}\frac{dA}{dt} = (-0.1).5 + 4.(0.2) \\ = -0.5 + 0.8 = 0.3\,cm^2/s\end{array}$$

Örnek

Bir dikdörtgenin boyutları eni 6 cm ve boyu 5 cm' dir. Dikdörtgen bir kısmından çekiliyor. Bu durumda eni 0.2 cm/s genişliyor, boyu ise 0,3 cm/s daralıyor.

Buna göre alandaki değişim oranı nedir?

$$A = x.y \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}.y + x.\frac{dy}{dt}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 6 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0.2 \\ y = 5 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -0.3\end{array}\right\} \begin{array}{l}\frac{dA}{dt} = (0.2).5 + 6.(-0.3) \\ = 1 - 1.8 = -0.8\ cm^2/s\end{array}$$

Örnek

Küre şeklindeki bir balonun yarıçapı 5 cm'dir. Balon şişirildiğinde yarıçapın artış oranı 0.2 cm/s' dir.

Buna göre hacminin artış oranı nedir?

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi.(3r^2).\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2.\frac{dr}{dt}$$

$$\left.\begin{array}{l} r = 5 \\ \frac{dr}{dt} = 0,2\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\frac{dV}{dt} = 4\pi.25.0,2 \\ = 20\pi\ cm^3/s\end{array}$$

Örnek

Bir çemberin alanı 0.5 cm^2/s hızıyla artıyor.

Yarıçapı 2 olduğuna göre yarıçapın artış oranı nedir?

$$A = \pi r^2 \Rightarrow \underset{0.5}{\underset{\Downarrow}{\frac{dA}{dt}}} = 2\pi \underset{2}{\underset{\Downarrow}{r}}\frac{dr}{dt}$$

$$0.5 = 4\pi.\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{0.5}{4\pi} = \frac{1}{8\pi}\text{cm/s}$$

Örnek

$f'(2) = 4$ olduğuna göre, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$ değeri nedir?

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}$$

$$= f'(2) - (-f'(2)) = 2f'(2) = 2 . 4 = 8$$

Örnek

$f'(4) = 3$ veriliyor.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4-h)}{h}$ değeri nedir?

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)-f(4-h)+f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(4-h)-f(4)}{h}$$

$$= f'(4) - (-f'(4)) = 2f'(4)$$

$$= 2 . 3$$

$$= 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$f(2) = 3$ ve $f'(2) = 1$ veriliyor.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-f^2(2)}{x-2}$ limitinin değeri kaçtır?

$$\underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}_{f'(2)}.(f(x)+f(2)) = f'(2) . (2f(2))$$

$$= 2f(2) . f'(2)$$

$$= 2. 3. 1$$

$$= 6$$

3– Ters Fonksiyonun Türevi

$A \subset IR$ ve $B \subset IR$ olmak üzere

$f: A \to B$, $1-1$ ve örten olsun.

f fonksiyonu $x_0 \in A$'da türevlenibilir ve $f'(x_0) \neq 0$ ise

$f^{-1}: B \to A$, $1-1$ ve örten fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$'da türevlenibilir ve

$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ olur.

Örnek

$f: IR \to IR$

$f(x) = x^7 + 2x$ fonksiyonu veriliyor. $(f^{-1})'(3)$ türevini bulunuz.

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{7x_0^6+2} = \frac{1}{9}$$

$$x^7 + 2x = 3 \Rightarrow x_0 = 1$$

Örnek

$f : (2, \infty) \to \mathbb{R}^+$

$f(x) = \sqrt{x^2-4}$ fonksiyonu veriliyor.

$(f^{-1})'(1)$ türevini hesaplayınız.

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2-4}}} = \frac{\sqrt{x_0^2-4}}{x_0} = \frac{\sqrt{5-4}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{x^2-4} = 1$$

$$x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

$$x = -\sqrt{5} \notin (2, \infty)$$

4– Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

Kurallar

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\mathrm{cosec}^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $(\sec x)' = \sec x . \tan x$
- $(\mathrm{cosec}\, x)' = -\mathrm{cosec}\, x . \cot x$

Örnek

$f(x) = (2x + \cos x) . (x^2 - \sin x)$ ise $f'(0)$ kaçtır?

$$f'(x) = (2 - \sin x) . (x^2 - \sin x) + (2x + \cos x) . (2x - \cos x)\Big|_{x=0}$$
$$= (2 - 0) . 0 + (0 + 1) . (0 - 1) = -1$$

Örnek

$y = \dfrac{\sin x}{x^2} + \cos^2(\sqrt{x})$ ise y' nedir?

$$y' = \frac{\cos x . x^2 - \sin x . 2x}{x^4} + 2\cos\sqrt{x} . (-\sin\sqrt{x}) . \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Örnek

$f(x) = \dfrac{1}{2}\tan^2 x - \cot x + x$ **ise $f'(x)$ nedir?**

$$f'(x) = \frac{1}{2} . 2\tan x . (1 + \tan^2 x) + (1 + \cot^2 x) + 1$$
$$= \tan x + \tan^3 x + \cot^2 x + 2$$

Örnek

$f(x) = (\tan x)^5 + \cot x - x^3$ ise $f'(x)$ nedir?

$$f'(x) = 5 . (\tan x)^4 . (1 + \tan^2 x) - (1 + \cot^2 x) - 3x^2$$

Örnek

$f(x) = \sqrt{x} . \mathrm{cosec}(\sqrt{x})$ ise $f'\left(\dfrac{\pi^2}{4}\right)$ **değeri kaçtır?**

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{cosec}(\sqrt{x}) + \sqrt{x} . (-\mathrm{cosec}(\sqrt{x})) . \cot(\sqrt{x}) . \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{\mathrm{cosec}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - \frac{\mathrm{cosec}(\sqrt{x}) . \cot(\sqrt{x})}{2}\Bigg|_{x=\frac{\pi^2}{4}}$$
$$= \frac{1}{2 . \frac{\pi}{2}} - 0 = \frac{1}{\pi}$$

elde edilir.

Örnek

$f(x) = \sec(\tan x) + \tan(\cos x)$ ise $f'(0)$ değeri kaçtır?

$$f'(x) = \sec(\tan x) . \tan(\tan x) . (1 + \tan^2 x)$$
$$+ (1 + \tan^2(\cos x)) . (-\sin x)\Big|_{x=0}$$

$$f'(0) = 0 + (1 + 0) . 0 = 0$$

5– Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

- arcsinx : $[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tanımlı fonksiyon

  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- arccosx : $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ tanımlı fonksiyon

  $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

- arctanx : $\mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tanımlı fonksiyon

  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

- arccotx: $\mathbb{R} \longrightarrow [0, \pi]$ tanımlı fonksiyon

  $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

- arcsecx: $\mathbb{R} \setminus (-1,1) \longrightarrow [0, \pi]$ tanımlı fonksiyon

  $(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$

- arccosecx : $\mathbb{R} \setminus (-1, 1) \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tanımlı fonksiyon

  $(\operatorname{arccosec} x)' = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$

Örnek

f(x) = arcsec(2^x) fonksiyonu için $f'(\log_2 3)$ değeri kaçtır?

$$f'(x) = \frac{1}{2^x \cdot \sqrt{(2^x)^2-1}} \cdot 2^x \ln 2$$

$$f'(\log_2 3) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3^2-1}} \cdot 3\ln 2 = \frac{\ln 2}{\sqrt{8}}$$

Örnek

$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$ ise $f'(2)$ değeri nedir?

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\Bigg|_{x=2} = \frac{-1}{4 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{4}}}$$

$$= -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$ bulunur.

Örnek

$f(x) = \frac{1}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$ ise $f'(x)$ nedir?

$$f(x) = \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}$$

$$f'(x) = -\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\left[\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-2}}{x^2+1}$$

elde edilir.

Örnek

$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \operatorname{arcsec} x$ ise $f'(x)$ nedir?

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x + \frac{1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}$$

Örnek

f(x) = cos(arctanx) + tan(arccosx) ise $f'(x)$ nedir?

$$f'(x) = -\sin(\arctan x) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$+\left(1+\tan^2(\arccos x)\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Örnek

$f(x)=(\arcsin(\sqrt{x}))^4$ ise $f'(x)$ nedir?

$$f'(x)=4(\arcsin(\sqrt{x}))^3.\frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{2(\arcsin(\sqrt{x}))^3}{\sqrt{x-x^2}}$$

6– Logaritmik Fonksiyonların Türevi

Kurallar

- $y=\log_a x \Rightarrow y'=\frac{1}{x\ln a}$
- $y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}$

Örnek

f(x) = (ln(tanx)) ise $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

$$f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1+1}{1}=2 \text{ bulunur.}$$

Örnek

f(x) = 2x + ln(sinx) ise $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

$$f'(x)=2+\frac{\cos x}{\sin x}=2+\cot x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=3$$

Örnek

$f(x)=\log_7(3x^2+2x+1)$ ise $f'(0)$ değeri kaçtır?

$$f'(x)=\frac{6x+2}{(3x^2+2x+1).\ln 7}\Big|_{x=0}=\frac{2}{\ln 7}$$

Örnek

$f(x)=\log_2(5x^3+x+1)$ ise $f'(0)$ değeri kaçtır?

$$f'(x)=\frac{15x^2+1}{(5x^3+x+1).\ln 2}\Big|_{x=0}=\frac{1}{\ln 2}$$

Örnek

$y=\ln[(x^2+3x).(2x^3-1)]$ ise y' nedir?

$y=\ln(x^2+3x)+\ln(2x^3-1)$

$$y'=\frac{2x+3}{x^2+3x}+\frac{6x^2}{2x^3-1}$$

Örnek

$y=\ln\left[\frac{2x^2+1}{3x^3+1}\right]$ ise y' nedir?

$y=\ln(2x^2+1)-\ln(3x^3+1)$

$$y'=\frac{4x}{2x^2+1}-\frac{9x^2}{3x^3+1}$$

Örnek

$y=\ln\sqrt{\frac{\tan x}{x}}$ ise y' nedir?

$$y=\frac{1}{2}[\ln(\tan x)-\ln x]$$

$$y'=\frac{1}{2}\left[\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}-\frac{1}{x}\right]$$

Örnek

$y = \ln\sqrt{\dfrac{16-x^2}{x^2+1}}$ ise y^I nedir?

$$y = \frac{1}{2}[\ln(16-x^2) - \ln(x^2+1))$$

$$y^I = \frac{1}{2}\left[\frac{-2x}{16-x^2} - \frac{2x}{x^2+1}\right]$$

7– Üstel Fonksiyonun Türevi

Kurallar

- $(a^x)^I = a^x \ln a$
- $(e^x)^I = e^x$

Örnek

$y = e^{4x^2-2x}$ ise y^I nedir?

$y^I = (8x-2)e^{4x^2-2x}$

Örnek

$y = e^{x^2+3x}$ ise y^I nedir?

$y^I = (2x+3)\, e^{x^2+3x}$

Örnek

$y = 2^{\cos x + \frac{1}{x}}$ ise y^I nedir?

$$y^I = 2^{\cos x + \frac{1}{x}}.\ln 2.\left(-\sin x - \frac{1}{x^2}\right)$$

Örnek

$y = 3^{\ln x + \tan x}$ ise y^I nedir?

$$y^I = 3^{\ln x + \tan x}.\ln 3.\left(\frac{1}{x} + 1 + \tan^2 x\right)$$

Örnek

$y = \dfrac{1}{\ln(e^x+1)} + \sqrt{x}.(\sin(\ln x))^2 + \ln\sqrt{2^x+1}$ ise y^I nedir?

$$y^I = -\frac{1}{[\ln(e^x+1)]^2}\cdot\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.(\sin(\ln x))^2 +$$

$$2\sqrt{x}.(\sin(\ln x)).\cos(\ln x).\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2^x \ln 2}{2^x+1}$$

Örnek

$y = e^{\sqrt{x}} + \tan(e^x) + \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$ **ise y^I nedir?**

$$y^I = e^{\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{x}} + (1+\tan^2(e^x))e^x + \frac{e^{2x}.2.(1+e^x) - e^{2x}.e^x}{(1+e^x)^2}$$

Örnek

$y = \dfrac{3^x}{1+3^x} + \cot(e^x) + 5^{\sqrt{x}}$ ise y^I nedir?

$$y^I = \frac{3^x.\ln 3.(1+3^x) - 3^x.(3^x.\ln 3)}{(1+3^x)^2}$$

8– Logaritma Yardımıyla Türev

$y = [f(x)]^{g(x)}$ şeklindeki bir fonksiyonun türevini almak istiyoruz.

$\ln y = g(x) \,.\, \ln(f(x))$

$$\frac{y'}{y} = g'(x)(\ln(f(x)) + g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y' = [f(x)]^{g(x)}.\left[g'(x).\ln(f(x)) + g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Örnek

$y = (x^3+1)^{x^2}$ ise $y'(1)$ kaçtır?

$$\ln y = x^2 \ln(x^3+1) \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x.\ln(x^3+1) + x^2.\frac{3x^2}{x^3+1}$$

$$y' = (x^3+1)^{x^2}\left[2x\ln(x^3+1) + \frac{3x^4}{x^3+1}\right]_{x=1}$$

$$= 2.\left[2\ln 2 + \frac{3}{2}\right] = 4\ln 2 + 3$$

Örnek

$y = (x+1)^{\frac{3}{x}}$ ise $y'(1)$ değeri kaçtır?

$$\ln y = \frac{3}{x}\ln(x+1) \Rightarrow \ln y = \frac{3\ln(x+1)}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \left.\frac{3.\frac{1}{x+1}.x - 3\ln(x+1).1}{x^2}\right|_{x=1}$$

$$y' = \left[\frac{\frac{3}{2} - 3\ln 2}{1}\right].2^3 = 12 - 24\ln 2$$

Örnek

$y = (\sin x)^{\pi x^3}$ ise y' nedir?

$$\ln y = \pi x^3.\ln(\sin x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = 3\pi x^2.\ln(\sin x) + \pi x^3\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = [3\pi x^2 \,.\, \ln(\sin x) + \pi x^3 \,.\, \cot x] \,.\, (\sin x)^{\pi x^3}$$

Örnek

$y = (\cos x)^{\ln x}$ ise y' nedir?

$$\ln y = \ln x \,.\, \ln(\cos x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}.\ln(\cos x) + \ln x.\frac{(-\sin x)}{\cos x}$$

$$y' = \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \ln x.\tan x\right).(\cos x)^{\ln x}$$

Örnek

$y = (x+1)^{\arctan x}$ ise y' nedir?

$\ln y = \arctan x \,.\, \ln(x+1)$

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right).\ln(x+1) + \arctan x.\frac{1}{x+1}$$

$$y' = \left[\frac{\ln(x+1)}{1+x^2} + \frac{\arctan x}{x+1}\right].(x+1)^{\arctan x}$$

Örnek

$y = x^{\arcsin x}$ ise y' nedir?

$\ln y = \arcsin x \,.\, \ln x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\ln x + \arcsin x.\frac{1}{x}$$

$$y' = \left[\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right].x^{\arcsin x}$$

Örnek

$y = \dfrac{(x^2+1)^3.\sqrt{x^3-1}}{(x+1)^4}$ ise y' nedir?

$$\ln y = 3\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x^3-1) - 4.\ln(x+1)$$

$$\frac{y'}{y} = 3.\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2}.\frac{3x^2}{x^3-1} - \frac{4}{x+1}$$

$$y' = \left(\frac{6x}{x^2+1} + \frac{3x^2}{2x^3-2} - \frac{4}{x+1}\right).\frac{(x^2+1)^3.\sqrt{x^3-1}}{(x+1)^4}$$

Örnek

$y=\dfrac{(x^3+1)^2.\sqrt{2x+1}}{(x^2-1)^4}$ **ise y^I nedir?**

$\ln y = 2\ln(x^3+1) + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - 4.\ln(x^2-1)$

$$\frac{y^I}{y}=2.\frac{3x^2}{x^3+1}+\frac{1}{2}.\frac{2}{2x+1}-4.\frac{2x}{x^2-1}$$

$$y^I=\left[\frac{6x^2}{x^3+1}+\frac{1}{2x+1}-\frac{8x}{x^2-1}\right].\frac{(x^3+1)^2.\sqrt{2x+1}}{(x^2-1)^4}$$

9– Hiperbolik Fonksiyonların Türevi

- $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
- $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth x=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}$
- $\operatorname{sech} x=\dfrac{1}{\cosh x}$, $\operatorname{cosech} x=\dfrac{1}{\sinh x}$

Kurallar

- $(\sinh x)^I=\cosh x$
- $(\cosh x)^I=\sinh x$
- $(\tanh x)^I=\operatorname{sech}^2 x$
- $(\coth x)^I=-\operatorname{cosech}^2 x$
- $(\operatorname{sech} x)^I=-\operatorname{sech} x\ .\ \tanh x$
- $(\operatorname{cosech} x)^I=-\operatorname{cosech} x\ .\ \coth x$

Örnek

$f(x)=\ln(\cosh 2x)+e^{\tanh(2x)}+\sinh^4(3x)$ ise $f^I(x)$ nedir?

$$f^I(x)=\frac{\sinh(2x).2}{\cosh(2x)}+e^{\tanh(2x)}.\operatorname{sech}^2(2x).2$$

$+\ 4\sinh^3(3x)\cosh(3x).3$

Örnek

$y=\sinh(\ln x)$ ise $y^I(2)$ nedir?

$$y'=\cosh(\ln x).\frac{1}{x}\Big|_{x=2}=\frac{\cosh(\ln 2)}{2}=\frac{\frac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{2}}{2}$$

$$=\frac{2+\frac{1}{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=1+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{5}{4}$$

Örnek

$y=\tanh(\ln x)$ ise $y^I(3)$ kaçtır?

$$y^I=\operatorname{sech}^2(\ln x).\frac{1}{x}\Big|_{x=\ln 3}=\frac{\operatorname{sech}^2(\ln 3)}{3}=\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2}{3}=\frac{3}{25}$$

$$\operatorname{sech}(x)=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}\Big|_{x=\ln 3}=\frac{2}{3+\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{10}{3}}=\frac{3}{5}$$

Örnek

$f(x)=\arcsin(\cosh x)$ ise $f^I(x)$ nedir?

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\cosh x)^2}}.\sinh x$$

Örnek

$f(x)=\tan(\sinh x)$ ise $f^I(x)$ nedir?

$f^I(x)=\sec^2(\sinh x)\ .\ \cosh x$

10– Ters Hiperbolik Fonksiyonların Türevi

Kurallar

- $(\text{arccos}\,hx)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ • $(\text{arcsin}\,hx)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $(\text{arctan}\,hx)' = \dfrac{1}{x^2-1}$ • $(\text{arc}\coth x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$
- $(\text{arc}\sec hx)' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$ • $(\text{arccos}\,echx)' = \dfrac{-1}{x\,.\sqrt{1+x^2}}$

11– Parametrik Fonksiyonların Türevleri

$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}$ şeklinde verilen parametrik fonksiyonlar için;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \text{ ve } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{x'(t)}$$

şeklindedir.

Örnek

$\left.\begin{array}{l} x = 3t^2+1 \\ y = 2t^3+3 \end{array}\right\}$ **fonksiyonu için t = 1 noktasında**

$\dfrac{dy}{dx}$ ve $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

değerleri nelerdir?

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6t^2}{6t} = t \\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \left.\frac{1}{6t}\right|_{t=1} = \frac{1}{6}$$

Örnek

$\left.\begin{array}{l} x = 2t^2-1 \\ y = 3t^2+t \end{array}\right\}$ **fonksiyonu için t = 1 noktasında $\dfrac{dy}{dx}$ ve $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ değerleri nelerdir?**

$$\frac{dy}{dx} = \left.\frac{6t+1}{4t}\right|_{t=1} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{6.4t-(6t+1).4}{16t^2}}{4t} = \frac{24t-24t-4}{64t^3} = -\left.\frac{1}{16t^3}\right|_{t=1} = -\frac{1}{16}$$

Örnek

$\left.\begin{array}{l} x = 1+\sin t \\ y = 2-\cos t \end{array}\right\}$ **fonksiyonu için** $\dfrac{dy}{dx}$ ve $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **nelerdir?**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+\tan^2 t)}{\cos t}$$

Örnek

$\left.\begin{array}{l} x = t+\sin t \\ y = \cos t \end{array}\right\}$ **fonksiyonu için $\dfrac{dy}{dx}$ ve $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ değerleri nelerdir?**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{1+\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{(-\cos t).(1+\cos t)+\sin t.(-\sin t)}{(1+\cos t)^2}}{(1+\cos t)}$$

$$= \frac{-\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}{(1+\cos t)^3} = -\frac{1+\cos t}{(1+\cos t)^3} = -\frac{1}{(1+\cos t)^2}$$

12–Kapalı Fonksiyonların Türevleri

F(x, y) = 0 kapalı fonksiyonunun türevi $\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{Fx}{Fy}}$ ile hesaplanır.

Örnek

$x^2 + y^3 + \sin(x + y) - \ln x + \tan y = 0$ için $\frac{dy}{dx}$ nedir?

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+\cos(x+y)-\frac{1}{x}}{3y^2+\cos(x+y)+1+\tan^2 y}$$

Örnek

$4xy^3 + \cos(2x+3y) - x\ln y + 1 = 0$ için $\frac{dy}{dx}$ nedir?

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4y^3-2\sin(2x+3y)-\ln y}{12xy^2-3\sin(2x+3y)-\frac{x}{y}}$$

Örnek

$x^3 + 2xy^2 - 3y = 0$ için $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(1,1)}$ nedir?

$$\frac{dy}{dx}=-\left.\frac{3x^2+2y^2}{4xy-3}\right|_{(1,1)}=-5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left.\frac{(6x+4y.y^{I})(4xy-3)-(3x^2+2y^2)(4y+4xy^{I})}{(4xy-3)^2}\right|_{(1,1)}$$

$$=-\frac{(6-20).1-(5)(4-20)}{1}=-\frac{-14+80}{1}$$

$$=-66$$

13–Yüksek Mertebeden Türevler

Örnek

$y = (x + 1)^5$ fonksiyonu için $y^{III}(1)$ değeri kaçtır?

$$\left.\begin{aligned} y^{I}&=5(x+1)^4\\ y^{II}&=20(x+1)^3\\ y^{III}&=60(x+1)^2\end{aligned}\right\}\ y^{III}(1)=60.2^2=240$$

Örnek

$y = (2x-1)^3$ fonksiyonu için $y^{III}(0)$ değeri kaçtır?

$y^{I} = 3(2x-1)^2 . 2$

$y^{II} = 6(2x-1) . 2^2$

$y^{III} = 6 . 2 . 2^2 = 48$

Örnek

$y = x^6 - 5x^4 + 2x - 1$ fonksiyonu için $y^{(6)}$ ve $y^{(7)}$ türevleri nelerdir?

$$\left.\begin{aligned} y^{(6)}&=6!\\ y^{(7)}&=0\end{aligned}\right\}\ \text{olarak bulunur.}$$

Örnek

$y = 2x^8 + 4x^5 - 3x^2 + 4$ fonksiyonu için $y^{(8)}$ ve $y^{(9)}$ türevleri nelerdir?

$$\left.\begin{aligned} y^{(8)}&=2.8!\\ y^{(9)}&=0\end{aligned}\right\}\ \text{olarak bulunur.}$$

Örnek

y = cos3x için $y^{(22)}$ türevi nedir?

$$\left.\begin{aligned} y^{I} &= -\sin 3x.3 \\ y^{II} &= -\cos 3x.3^2 \\ y^{III} &= \sin 3x.3^3 \\ y^{IV} &= \cos 3x.3^4 \end{aligned}\right\} \rightarrow y^{(22)} = -\cos 3x.3^{22}$$

Örnek

y = sin(2x+1) için $y^{(27)}$ türevi nedir?

$$\left.\begin{aligned} y^{I} &= \cos(2x+1).2 \\ y^{II} &= -\sin(2x+1).2^2 \\ y^{III} &= -\cos(2x+1).2^3 \\ y^{IV} &= \sin(2x+1).2^4 \end{aligned}\right\} \rightarrow y^{(27)} = -\cos(2x+1)\,.\,2^{27}$$

Örnek

y = $\cos^2(3x+1)$ ise $y^{(10)}$ değeri nedir?

$$y = \frac{1+\cos(6x+2)}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos(6x+2))$$

$$\left.\begin{aligned} y^{I} &= \frac{1}{2}(-6\sin(6x+2)) \\ y^{II} &= \frac{1}{2}(-6^2\cos(6x+2)) \\ y^{III} &= \frac{1}{2}(6^3\sin(6x+2)) \\ y^{IV} &= \frac{1}{2}(6^4\cos(6x+2)) \end{aligned}\right\} \rightarrow y^{(10)} = \frac{1}{2}.(-6^{10}).\cos(6x+2)$$

Örnek

y = e^{2x} ise $y^{(20)}$ türevi nedir?

$y^{I} = 2e^{2x}$

$y^{II} = 2^2e^{2x}$

⋮

$y^{(20)} = 2^{20}\,.\,e^{2x}$ bulunur.

Örnek

y = e^{3x} ise $y^{(50)}$ türevi nedir?

$y^{I} = 3e^{3x}$

$y^{II} = 3^2e^{3x}$

⋮

$y^{(50)} = 3^{50}.\,e^{3x}$ elde edilir.

Örnek

y = ln(2x + 1) ise $y^{(12)}(1)$ değeri kaçtır?

$$\left.\begin{aligned} y^{I} &= \frac{2}{(2x+1)} \\ y^{II} &= -\frac{2^2}{(2x+1)^2} \\ y^{III} &= \frac{2^3}{(2x+1)^3}.2 \\ y^{IV} &= -\frac{2^4}{(2x+1)^4}.6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y^{(12)} &= -\frac{2^{12}}{(2x+1)^{12}}.11! \\ x = 1 \Rightarrow y^{(12)}(1) &= -\frac{2^{12}}{3^{12}}.11! \\ &= -11!.\left(\frac{2}{3}\right)^{12} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek

y = ln(3x–1) ise $y^{(13)}(1)$ değeri kaçtır?

$$\left.\begin{aligned} y^{I} &= \frac{3}{3x-1} \\ y^{II} &= -\frac{3^2}{(3x-1)^2} \\ y^{III} &= \frac{3^3}{(3x-1)^3}.2 \\ y^{IV} &= -\frac{3^4}{(3x-1)^4}.6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y^{(13)} &= \frac{3^{13}}{(3x-1)^{13}}.12! \\ x = 1 \Rightarrow y^{(13)}(1) &= \frac{3^{13}}{2^{13}}.12! \\ &= 12!.\left(\frac{3}{2}\right)^{13} \end{aligned}$$

14–Polinom–Türev İlişkisi

$P(x) : IR \rightarrow IR$ olmak üzere

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinomu veriliyor.

P(x) polinomunun n katlı bir kökü x = a ise

$P(a) = P^I(a) = P^{II}(a) = ... = P^{(n-1)}(a) = 0$ olur.

Örnek

P(x) = x³ + ax² + bx polinomu (x – 1)² ile tam bölünüyorsa (a – b) değeri nedir?

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=0 \\ P'(1)=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -/P(1)=1+a+b=0 \\ P'(1)=3+2a+b=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -1-a-b=0 \\ 3+2a+b=0 \\ \hline 2+a=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-2 \\ b=1 \end{array}\right\} a-b=-3 \end{array}$$

Örnek

P(x) = ax⁴ + bx³ + cx² + dx + e polinomu (x – 1)⁴ ile tam bölünüyorsa a ile b arasındaki bağıntı nedir?

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=0 \\ P^I(1)=0 \\ P^{II}(1)=0 \\ P^{III}(1)=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} P^I(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d \\ P^{II}(x)=12ax^2+6bx+2c \\ P^{III}(x)=24ax+6b\Big|_{x=1}=0 \end{array}$$

$$24a+6b=0 \Rightarrow \boxed{b=-4a}$$

15–Türevin Geometrik Anlamı

y = f(x) eğrisine üzerindeki A(a, f(a)) noktasından çizilen teğetin eğimi m ise

$m = f^I(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ şeklindedir.

Bu noktadaki teğetin denklemi

$\boxed{(y-f(a)) = f^I(a)(x-a)}$ ile

normalin denklemi ise

$\boxed{(y-f(a)) = -\dfrac{1}{f^I(a)}(x-a)}$ ile hesaplanır.

Örnek

y = x³ + 2x eğrisine üzerindeki x = 1 apsisli noktasından çizilen teğet ve normal denklemleri bulunuz.

$$y^I = 3x^2+2\Big|_{x=1} = 5 \Rightarrow m_T = 5$$

$$m_N = -\frac{1}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=3 \\ m_T=5 \end{array}\right\} 5 = \frac{y-3}{x-1} \Rightarrow y-3 = 5x-5$$

$$y = 5x-2$$

teğet denklemi

$$\left.\begin{array}{l} (1,3) \\ m_N=-\frac{1}{5} \end{array}\right\} -\frac{1}{5} = \frac{y-3}{x-1} \Rightarrow 5y-15 = -x+1$$

$$x+5y = 16$$

normal denklemi

Örnek

$y = x^4 + 2x$ eğrisine üzerindeki $x = 1$ apsisli noktasından çizilen teğet ve normal denklemleri bulunuz.

$y' = 4x^3 + 2\Big|_{x=1} = 6$; $m_T = 6$, $m_N = -\frac{1}{6}$; $x = 1 \Rightarrow y = 3$

$\left.\begin{matrix}(1,3)\\ m_T = 6\end{matrix}\right\}$ $6 = \frac{y-3}{x-1} \Rightarrow y - 3 = 6x - 6$

$y = 6x - 3$ teğet denklemi

$\left.\begin{matrix}(1,3)\\ m_N = -\frac{1}{6}\end{matrix}\right\}$ $-\frac{1}{6} = \frac{y-3}{x-1} \Rightarrow 6y - 18 = -x + 1$

$x + 6y = 19$ normal denklemi

Örnek

$y = \ln x + 2x$ eğrisinin $y = 3x + 7$ doğrusuna paralel olan teğetinin denklemini bulunuz.

Eğimler eşit olmalı

$\left.\begin{matrix}y' = \frac{1}{x} + 2\\ m_d = 3\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\frac{1}{x} + 2 = 3 \Rightarrow x = 1\\ y = \ln 1 + 2 = 2\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}(1,2)\\ m = 3\end{matrix}$

$3 = \frac{y-2}{x-1} \Rightarrow \begin{matrix}y - 2 = 3x - 3\\ y = 3x - 1\end{matrix}$

Örnek

$y = e^{2x} + 1$ eğrisinin $y = -\frac{1}{2}x + 3$ doğrusuna dik olan teğetinin denklemini bulunuz.

$\left.\begin{matrix}y' = 2e^{2x}\\ m_d = -\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ $m_1 \cdot m_2 = -1$

$2e^{2x} = 2 \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0$

$y = e^0 + 1 = 2$

$\left.\begin{matrix}(0,2)\\ m_T = 2\end{matrix}\right\}$ $2 = \frac{y-2}{x-0} \Rightarrow y - 2 = 2x$

$y = 2x + 2$

Örnek

$y = 3x^3 + 1$ ve $y = \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$ eğrileri arasındaki açının tanjantı kaçtır?

$3x^3 + 1 = \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$

$6x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}x = 1\\ y = 4\end{matrix}\right\}$ (1,4) noktası

$\left.\begin{matrix}y' = 9x^2\\ y' = 5x + \frac{3}{2}\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}m_1 = 9\\ m_2 = \frac{13}{2}\end{matrix}\right\}$

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = \frac{9 - \frac{13}{2}}{1 + \frac{117}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{119}{2}} = \frac{5}{119}$$

elde edilir.

Örnek

$y = 4x^2 + 1$ ve $y = 2x^3 + 3$ eğrileri arasındaki açının tanjantı kaçtır?

$4x^2 + 1 = 2x^3 + 3 \Rightarrow 2x^3 - 4x^2 + 2 = 0$

$x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}x = 1\\ y = 5\end{matrix}\right\}$

(1,5) noktası için;

$y' = 8x \longrightarrow m_1 = 8$

$y' = 6x^2\Big|_{x=1} \longrightarrow m_2 = 6$

$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = \frac{8-6}{1+8.6} = \frac{2}{49}$ elde edilir.

Örnek

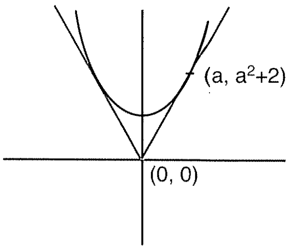
$xy = 1$ ve $x^2 + ay^2 = 9$ eğrilerinin dik kesiştikleri bilindiğine göre a değeri kaçtır?

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} = m_1\\[6pt] \frac{dy}{dx} &= -\frac{2x}{2ay} = m_2\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &m_1.m_2 = -1\\[6pt] &\left(-\frac{y}{x}\right).\left(-\frac{x}{ay}\right) = -1\\[6pt] &\frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek

$y = x^2 + 2$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti orijinden geçer?

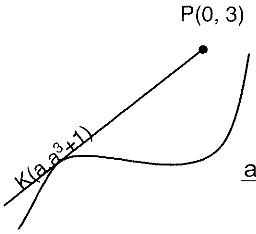


$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{a^2+2}{a}\\[6pt] y^{|} &= 2x\Big|_{x=a} = 2a\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}\frac{a^2+2}{a} = 2a &\Rightarrow a^2+2 = 2a^2\\ a^2 &= 2\\ a &= \mp\sqrt{2}\end{aligned}$$

$(\mp\sqrt{2}, 4)$ noktaları

Örnek

$y = x^3 + 1$ eğrisine dışındaki P(0, 3) noktasından çizilen teğetin eğriye değdiği nokta nedir?



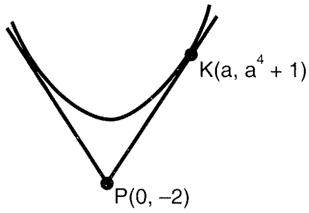
$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{a^3+1-3}{a-0} = \frac{a^3-2}{a}\\[6pt] y^{|} &= 3x^2\Big|_{x=a} = 3a^2\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{a^3-2}{a} = 3a^2 \Rightarrow \begin{aligned} a^3-2 &= 3a^3\\ 2a^3 &= -2\\ a^3 &= -1\\ a &= -1 \Rightarrow (-1, 0)\end{aligned}$$

noktası

Örnek

$y = x^4 + 1$ eğrisine dışındaki P(0, –2) noktasından çizilen teğetin eğriye değdiği nokta nedir?



$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{a^4+1+2}{a}\\[6pt] y^{|} &= 4x^3\Big|_{x=a} = 4a^3\end{aligned}\right\}$$

$$4a^3 = \frac{a^4+3}{a}$$

$4a^4 = a^4 + 3$

$3a^4 = 3 \Rightarrow a^4 = 1$

$a = 1 \quad a = -1$

(1, 2) veya (–1, 2)

noktaları

Örnek

$x = t^2 + 2t - 1$
$y = t^3 - 2t + 3$
eğrisinin A(2, 2) noktasındaki teğet denklemi nedir?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2-2}{2t+2}\bigg|_{t=1} = \frac{1}{4} = m = \frac{y-2}{x-2}$$

$$x - 2 = 4y - 8$$

$$x - 4y + 6 = 0$$

Örnek

$\left.\begin{aligned} x &= 2t^3+1 \\ y &= t^2+2t+2 \end{aligned}\right\}$ **eğrisinin A(3, 5) noktasındaki normal denklemi nedir?**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t+2}{6t^2}\bigg|_{t=1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = m_T$$

$$\Downarrow$$

$$m_N = -\frac{3}{2} = \frac{y-5}{x-3}$$

$$-3x + 9 = 2y - 10$$

$$3x + 2y = 19$$

Örnek

$4x^2y - 5x^3 + y^2 = 0$ eğrisinin A(1, 1) noktasındaki normal denklemi nedir?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8xy-15x^2}{4x^2+2y}\bigg|_{(1,1)} = -\frac{-7}{6} = \frac{7}{6} = m_T$$

$$m_N = -\frac{6}{7} = \frac{y-1}{x-1} \Rightarrow -6x + 6 = 7y - 7$$

$$6x + 7y = 13$$

Örnek

$x^4 - 2xy^3 + y^4 = 0$ eğrisinin A(1, 1) noktasındaki teğet denklemi nedir?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3-2y^3}{-6xy^2+4y^3}\bigg|_{(1,1)} = -\frac{2}{-2} = 1 = m_T$$

$$1 = \frac{y-1}{x-1} \Rightarrow y - 1 = x - 1 \Rightarrow y = x$$

Örnek

$x^2 + y^2 = 5$ eğrisinin hangi apsisli noktasındaki teğetinin eğimi $\frac{1}{2}$'dir?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -2x$$

$$x^2 + (-2x)^2 = 5 \Rightarrow 5x^2 = 5$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

Örnek

$\left.\begin{array}{l} x = 2t^3+1 \\ y = t^2+2t+2 \end{array}\right\}$ **eğrisinin A(3, 5) noktasındaki normal denklemi nedir?**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t+2}{6t^2}\Big|_{t=1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = m_T$$

$$\Downarrow$$

$$m_N = -\frac{3}{2} = \frac{y-5}{x-3}$$

$-3x + 9 = 2y - 10$

$3x + 2y = 19$

Örnek

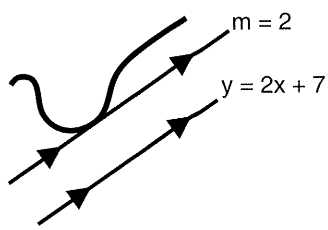
$x^4 - 2xy^3 + y^4 = 0$ eğrisinin A(1, 1) noktasındaki teğet denklemi nedir?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3-2y^3}{-6xy^2+4y^3}\Big|_{(1,1)} = -\frac{2}{-2} = 1 = m_T$$

$$1 = \frac{y-1}{x-1} \Rightarrow y-1 = x-1 \Rightarrow y = x$$

Örnek

$y = x^2 + 1$ eğrisinin $y = 2x + 7$ doğrusuna en yakın noktası nedir?



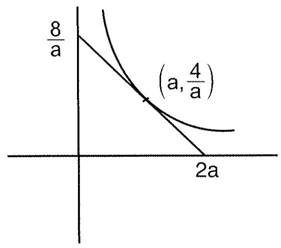
$y' = 2x = m_d = 2$

$x = 1$

(1, 2) noktası

Örnek

xy = 4 eğrisinin herhangi bir noktasındaki teğetinin koordinat eksenleriyle oluşturduğu üçgenin alanı kaçtır?



$$y = \frac{4}{x} \Rightarrow y' = \frac{-4}{x^2}\Big|_{x=a} = -\frac{4}{a^2} = m$$

$$-\frac{4}{a^2} = \frac{y-\frac{4}{a}}{x-a} \Rightarrow -4x+4a = a^2y-4a$$

$4x + a^2y = 8a$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \quad y=\frac{8}{a} \\ y=0 \quad x=2a \end{array}\right\} \quad \frac{2a.\frac{8}{a}}{2} = 8$$

Örnek

$y = 2x^3 - 5x + 7$ eğrisinin Ox–ekseni ile 45°'lik açı yapan teğetinin denklemini bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} y' = 6x^2-5 \\ m_d = \tan 45° = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 6x^2-5 = 1 \\ x = \mp 1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 4 \\ x = -1 \Rightarrow y = 10 \end{array}\right\}$$

$$\bullet\ 1 = \frac{y-4}{x-1} \Rightarrow y-4 = -1 \Rightarrow y = x+3$$

$$\bullet\ 1 = \frac{y-10}{x+1} \Rightarrow y-10 = x+1 \Rightarrow y = x+11$$

Örnek

$y = x^3 - 2x + 5$ eğrisinin eğrisinin OX –ekseni ile 45°'lik açı yapan teğetinin denklemi nedir?

$$\left.\begin{array}{l} y^I = 3x^2 - 2 \\ m_d = \tan 45^0 = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x^2 - 2 = 1 \\ x = \mp 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1, 4) \\ (-1, 6) \end{array} \text{ noktaları}$$

$$1 = \frac{y-4}{x-1} \Rightarrow y - 4 = x - 1 \Rightarrow y = x + 3$$

$$1 = \frac{y-6}{x+1} \Rightarrow y - 6 = x + 1 \Rightarrow y = x + 7$$

Örnek

$y = x^2 + 3$ ve $y = -x^2 + 7$ eğrileri hangi açı altında kesişirler?

$$x^2 + 3 = -x^2 + 7 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$x = -\sqrt{2}$$

- $$\left.\begin{array}{l} y^I = 2x\Big|_{x=\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \\ y^I = -2x\Big|_{x=\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{1-8} \\ \tan 0 = -\dfrac{4\sqrt{2}}{7} \end{array}$$

$$\theta = \arctan\left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$$

- $$\left.\begin{array}{l} y^I = 2x\Big|_{x=-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \\ y^I = -2x\Big|_{x=-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{1-8} = \dfrac{4\sqrt{2}}{7} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{7}\right) \end{array}$$

Örnek

$y = 2 + x$ ve $y = 2 + \frac{x^2}{2}$ eğrileri hangi açı altında kesişirler?

$$2 + x = 2 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = x \Rightarrow x^2 = 2x$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y^I = 1 \\ y^I = x\Big|_{x=2} = 2 \end{array}\right\} \quad \tan\theta = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

$\theta = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right)$ elde edilir.

$$\left.\begin{array}{l} y^I = 1 \\ y^I = x|_{x=0} = 0 \end{array}\right\} \vartheta = 45^\circ$$

Örnek

Bir hareketlinin aldığı yol $x(t) = t^3 - 2t + 3$ ile veriliyor.

Buna göre 3. saniye sonundaki hızını ve ivmesini bulunuz.

$x(t) \Rightarrow$ Yol	$x^I(t) = 3t^2 - 2$
$x^I(t) \Rightarrow$ Hız	$x^I(3) = 3.3^2 - 2 = 25 \Rightarrow$ hız
$x^{II}(t) \Rightarrow$ İvme	$x^{II}(t) = 6t$
	$x^{II}(3) = \Rightarrow 18$ ivme

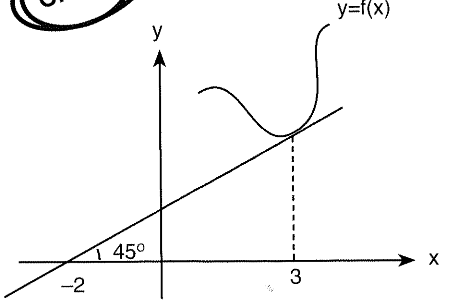
Örnek

Bir hareketlinin aldığı yol $x(t) = \frac{t^3}{3} + 2t + 1$ ile veriliyor.

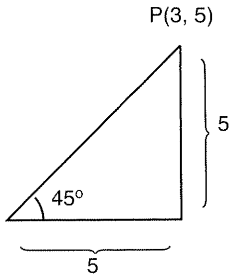
Buna göre 4. saniye sonundaki hızını ve ivmesini bulunuz.

	$x^I(t) = t^2 + 2$
$x(t) \to$ Yol	$x^I(4) = 18 \Rightarrow$ Hız
$x^I(t) \to$ Hız	$x^{II}(t) = 2t$
$x^{II}(t) \to$ İvme	$x^{II}(4) = 8 \Rightarrow$ İvme

Örnek



Verilen şekle göre $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ için $g'(3)$ değeri kaçtır?



$f(3) = 5$

$f'(3) = \tan 45° = 1$

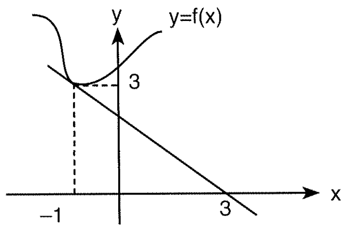
$g'(x) = 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x)$

$g'(3) = 6f(3) + 10f'(3)$

$= 6.5 = 10.1$

$= 40$

Örnek

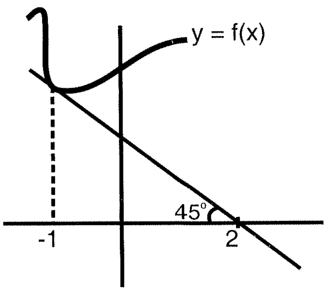


Verilen şekle göre $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ ise $g'(-1)$ değeri kaçtır?

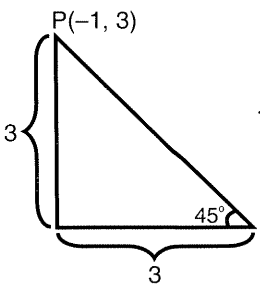
$$g'(x) = \left.\frac{f'(x).x - f(x).1}{x^2}\right|_{x=-1} = \frac{-f'(-1) - f(-1)}{1}$$

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= 3 \\ f'(-1) &= -\frac{3}{4} \end{aligned}\right\} g'(-1) = \frac{\frac{3}{4} - 3}{1} = \frac{3 - 12}{4} = -\frac{9}{4}$$

Örnek



Verilen şekle göre $g(x) = (2x^2)\,f(x)$ ise $g'(-1)$ değeri kaçtır?



$f(-1) = 3$

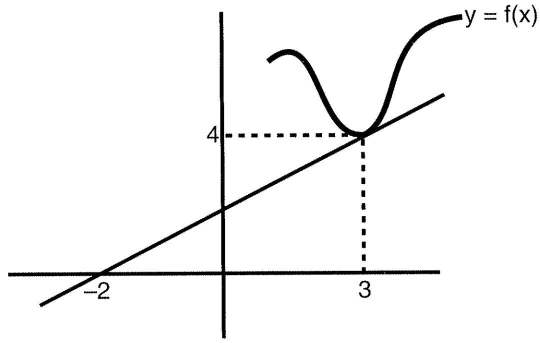
$f'(-1) = \tan 135° = -1$

$g'(x) = 4x\,f(x) + 2x^2 f'(x)$

$g'(-1) = -4\,f(-1) + 2f'(-1)$

$= -4\,.\,3 + 2\,.\,(-1) = -14$

Örnek



Verilen şekle göre $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-2}$ ise $g'(3)$ değeri kaçtır?

$$g'(x) = \left.\frac{f'(x).(x-2) - f(x).1}{(x-2)^2}\right|_{x=3}$$

$$= \frac{f'(3) - f(3)}{1}$$

$$\left.\begin{aligned} f(3) &= 4 \\ f'(3) &= \frac{4}{5} \end{aligned}\right\} g'(3) = \frac{4}{5} - 4 = -\frac{16}{5} \text{ bulunur.}$$

16–Türevle İlgili Teoremler

A– Rolle Teoremi

f, [a, b]'de sürekli ve (a, b)'de türevli olsun.

Eğer f(a) = f(b) ise (a, b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

Örnek

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ fonksiyonunun [–2, 0] aralığında Rolle teoremini gerçekleyen x değeri kaçtır?

f(x), [–2, 0]'da sürekli ve (–2, 0)'da türevli

$$\left.\begin{array}{l} f(x),\ [-2,0]\text{'da sürekli ve } (-2,0)\text{'da türevli} \\ \left.\begin{array}{l} f(-2) = -8 + 12 - 4 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} f(-2) = f(0) \text{ bulunur.} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Rolle}\\ \text{gerçekleşir.}\end{array}$$

$f'(c) = 0$

$$f'(c) = 3c^2 + 6c + 2 = 0 \Rightarrow c_{1,2} = \frac{-6 \mp \sqrt{36 - 4.3.2}}{6}$$

$$c_{1,2} = \frac{-6 \mp \sqrt{12}}{6} = \frac{-6 \mp 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\boxed{c = -1 \mp \frac{\sqrt{3}}{3} \in [-2, 0]}$$

Örnek

$f(x) = x^2 + ax - 6$ fonksiyonuna [0, 1] aralığında Rolle teoremi uygulanabildiğine göre a değeri kaçtır?

f(x) polinom olduğundan sürekli türevli

f(0) = f(1) sağlanmalı

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -6 \\ f(1) = 1 + a - 6 \end{array}\right\} -6 = a - 5 \quad a = -1 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$f(x) = a\sin x + 2x$ fonksiyonuna $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında Rolle teoremi uygulanabilmesi için a ne olmalıdır?

f(x), sürekli - türevli

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + \pi \end{array}\right\} \begin{array}{l} a + \pi = 0 \\ a = -\pi \text{ bulunur.} \end{array}$$

Örnek

f(x) = tanx fonksiyonuna [0, π]'de Rolle teoremi uygulanabilir mi?

$f(0) = f(\pi)$ fakat f(x), $x = \frac{\pi}{2}$'de süreksiz, Rolle uygulanamaz.

Örnek

f(x) = cotx fonksiyonuna $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$' de Rolle teoremi uygulanabilir mi?

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)$ fakat f(x), x = 0' da süreksiz Rolle uygulanamaz.

Örnek

$f(x) = x^2 + [|x|]$ fonksiyonuna [–2, 2]'de Rolle teoremi uygulanabilir mi?

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 2 \\ f(2) = 6 \end{array}\right\} f(-2) \neq f(2) \Big\} \text{ Rolle uygulanamaz.}$$

Ayrıca f(x), sürekli değil.

Örnek

$f(x) = x^2 + sgn(x-2)$ fonksiyonuna [0, 4]' de Rolle uygulanabilir mi?

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} f(0)=-1 \\ f(4)=17 \end{array}\right\} f(0) \neq f(4) \\ \text{Ayrıca } f(x)\text{, sürekli değil.}\end{array}\right\} \text{Rolle uygulanamaz.}$$

Örnek

$f(x) = |x + 1|$ fonksiyonuna [–2, 0]'da Rolle uygulanabilir mi?

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\text{, sürekli} \\ f(-2) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\}$$

Fakat f(x), x = –1'de türevsiz

Rolle uygulanamaz.

B– Ortalama Değer Teoremi

f, [a, b]'de sürekli ve (a, b)'de türevli olsun.

Bu durumda

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ noktası vardır.

Örnek

$f(x) = x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunun [1, 2] aralığında ortalama değer teoremini sağlayan x değeri kaçtır?

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(c) \Rightarrow \frac{(4+8-1)-(1+4-1)}{1} = 2c+4$$

$$11 - 4 = 2c + 4$$

$$2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in [1,2]$$

$\boxed{f(x)\text{, sürekli türevli}}$

Örnek

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ fonksiyonunun [2, 3] aralığında ortalama değer teoremini sağlayan x değeri kaçtır?

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = f'(c) \Rightarrow \frac{\left(3+\frac{1}{3}\right)-\left(2+\frac{1}{2}\right)}{1} = 1 - \frac{1}{c^2}$$

$\boxed{f(x)\text{, sürekli türevli}}$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{6}$$

$$c = \sqrt{6} \in [2,3]$$

Örnek

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında ortalama değer teoremini sağlayan x değeri kaçtır?

$\boxed{f(x)\text{, sürekli} - \text{türevli}}$ $\quad \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0} = f'(c)$

$$\frac{-1-1}{\pi} = -\sin c \Rightarrow \quad \frac{2}{\pi} = \sin c \Rightarrow c = \boxed{\arcsin\frac{2}{\pi}}$$

Örnek

$f(x) = \sin x + 1$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında ortalama değer teoremini sağlayan x değeri kaçtır?

f(x), sürekli - türevli

$$\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0} = f'(c) \quad \frac{1-1}{\pi} = \cos c$$

$$\cos c = 0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$$

C– Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi

f ve g fonksiyonları, [a, b]'de sürekli ve (a, b)'de türevli ve $g^{I}(x) \neq 0$ $(\forall x \in (a,b))$ ise $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f^{I}(c)}{g^{I}(c)}}$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ vardır.

Örnek

$f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = 2x - 1$ fonksiyonlarının [1, 3] aralığında genelleştirilmiş ortalama değer teoremini sağlayan x değeri kaçtır?

$$\frac{f(3)-f(1)}{g(3)-g(1)} = \frac{f^{I}(c)}{g^{I}(c)}$$

$$\frac{28-2}{5-1} = \frac{3c^2}{2} \Rightarrow \frac{26}{4} = \frac{3c^2}{2}$$

$$3c^2 = 13$$

$$c^2 = \frac{13}{3}$$

$$c = \sqrt{\frac{13}{3}} \in [1,3]$$

bulunur.

17– Türevin Limite Uygulanması
L′ Hospital Kuralı

$\frac{0}{0} \cdot \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$, $\infty - \infty$ gibi ifadeler birer belirsizliktir.

Bu belirsizlikleri $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ durumlarına dönüştürerek limit değerlerini hesaplarız.

■ f ve g, $A \subset \mathbb{R}$'de sürekli ve $A - \{a\}$ kümesinde tanımlanmış türevli iki fonksiyon ve $g^{I}(x) \neq 0$ olsun. O zaman

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ise } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{I}(x)}{g^{I}(x)}$$

ile hesaplanır. Benzer şekilde

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ ise } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f^{I}(x)}{g^{I}(x)}$$

ile hesaplanır.

A. $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali

Örnek

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2\ln x}$ **limitinin değerini hesaplayınız.**

$\frac{0}{0}$ var. L′ Hosp. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-3}{\frac{2}{x}} = \dfrac{-1}{2}$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-x - \ln x + 1}{1 - x^2}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\frac{0}{0}$ var. L′ Hosp. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-1-\frac{1}{x}}{-2x} = \dfrac{-1-1}{-2} = 1$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x\sin x}{\sin^2 x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\frac{0}{0}$ var. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + \sin x + x\cos x}{2\sin x.\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + \sin x + x\cos x}{\sin 2x}$

$\frac{0}{0}$ var. L′ Hosp.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + \cos x + \cos x - x\sin x}{2\cos 2x} = \dfrac{2+1+1}{2} = 2$ bulunur.

■ Pratik Yol

$\sin x \sim x$ (denklikten) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x.x}{x^2} = 2$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{e^x-1}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\dfrac{0}{0}$ var. L' Hosp. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{e^x}=\dfrac{1}{1}$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+\sin x)}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\dfrac{0}{0}$ var. L' Hosp. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{\frac{\cos x}{1+\sin x}}=\dfrac{1}{\frac{1}{1}}=1$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{2x^2}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\dfrac{0}{0}$ var. L' Hosp. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{4x}=\dfrac{0}{0}$ var.

L' Hosp. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{4}=-\dfrac{1}{4}$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\tan\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{3}{x}}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\dfrac{0}{0}$ var. L' Hosp.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{2}{x}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{\left(1+\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right).\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{3}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{-\left(1+\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)-3}=\frac{-2}{-1-3}=\frac{1}{2}\text{ bulunur.}$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{1/x}-1}{\frac{2}{x}}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\dfrac{0}{0}$ var. L' Hosp. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{1/x}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\arctan x}{2x+\sin 3x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\dfrac{0}{0}$ var. L'Hosp. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{1+x^2}}{2+3\cos 3x}=\dfrac{1+1}{2+3}=\dfrac{2}{5}$

- **Pratik Yol**

$\left.\begin{array}{l}\sin x\sim x\\ \arctan x\sim x\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x}{2x+3x}=\dfrac{2}{5}$

(Denklikten)

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,.\arcsin x}{\sin^2 x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\dfrac{0}{0}$ var. L' Hosp. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{2\sin x\,.\cos x}$

L' Hosp. tekrar uygulanır. Fakat işlem oldukça uzar.

Pratik Yol

arcsinx ~ x (Denklikten)

sinx ~ x

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{x^2}=1$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\frac{0}{0}$ var. L'Hosp. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{5}x^{-4/5}-\frac{1}{3}x^{-2/3}}{\frac{1}{4}x^{-3/4}-\frac{1}{2}x^{-1/2}}$

$= \dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{-2}{15}}{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{15}\cdot\frac{4}{1} = \frac{8}{15}$

B– $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(2\tan x)}{\ln(\sin x)}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\frac{\infty}{\infty}$ var. L' Hosp.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{2(1+\tan^2 x)}{2.\tan x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\tan^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}} = 1$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 2x)}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\frac{\infty}{\infty}$ var. L.' Hosp. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}}{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3\cos 3x\,.}{2\cos 2x\,.}\underbrace{\boxed{\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}}}_{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} = 1$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+2\ln x}{e^x+x^2}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\frac{\infty}{\infty}$ var. L' Hosp. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+\frac{2}{x}}{e^x+2x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ var. L' Hosp. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x-\frac{2}{x^2}}{e^x+2}$

$\frac{\infty}{\infty}$ var. L' Hosp. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+\frac{4}{x^3}}{e^x} = 1$ bulunur.

■ **Pratik Yol:** $e^x > x^n > \ln x$
$(n \geqslant 1)$

Büyükler oranlanır: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+e^x)}{x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\frac{\infty}{\infty}$ var. L' Hosp. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+e^x}{x^2+e^x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ var. L' Hosp. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+e^x}{2x+e^x} \to \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{e^x+2} = 1$

■ **Pratik Yol:** $e^x > x^n$
$(n \geqslant 1)$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\overset{\text{ihmal}}{\cancel{x^2}}+e^x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$ **limitinin değeri kaçtır?**

L' Hosp. kullanabiliriz. Fakat daha kısa yoldan gidelim.

$x^n > \ln x$

Payda >Pay

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{\ln x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

L.' Hosp. kullanabiliriz. Fakat daha kısa yoldan gidelim:

$x^n \geq \ln x$

$(n \geqslant 1)$

Pay > Payda

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{\ln x}=\infty$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{500}+1}{e^x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$e^x > x^{500} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{500}+1}{e^x}=0$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1.01)^x}{x^{10}}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$a^x > x^n \Rightarrow (1.01)^x > x^{10} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1.01)^x}{x^{10}}=\infty$ bulunur.

$(a>1)$ $(n \geqslant 1)$

C– $0.\infty$ belirsizliği

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} x^3.e^{-2x}$ **limitinin değeri nedir?**

∞ . 0 belirsizliği var.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}=\frac{\infty}{\infty}$ var

L' Hosp $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2e^{2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{4e^{2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{8e^{2x}}=0$

$\left(\#e^{2x} > x^3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}=0 \text{ olur.}\right)$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x$ **limitinin değeri kaçtır?**

$0 . (-\infty)$ var. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\frac{-\infty}{\infty}$ var.

L.' Hosp. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-2}=0$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x.\operatorname{cosec} 3x$ **limitinin değeri kaçtır?**

$0.\infty$ var.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\operatorname{cosec}^2 x$ **limitinin değeri kaçtır?**

$0\,.\,\infty$ var. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{0}{0}$ var.

L.' Hosp. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2\sin x.\cos x}=\dfrac{1}{2}$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}(2x).\sin\dfrac{1}{x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$0.\,\infty$ var.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{2x}}=\dfrac{0}{0}$ var.

L' Hosp $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{2x^2}}=2$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}.\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\infty\,.\,0$ var.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{0}{0}$ var.

L.' Hosp. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$

$=1$ bulunur.

D– $\infty.\infty$ belirsizliği

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cosec}x-\dfrac{1}{x}\right)$ **limitinin değeri nedir?**

$\infty-\infty$ belirsizliği var.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\dfrac{0}{0}$ var.

L' Hosp $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\dfrac{0}{0}$ var.

L' Hosp $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\dfrac{0}{2}=0$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$ **limitinin değeri nedir?**

$\infty-\infty$ belirsizliği var.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-e^x+1}{xe^x-x}=\dfrac{0}{0}$ var.

L' Hosp $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{e^x+xe^x-1}=\dfrac{0}{0}$ var.

L' Hosp $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\dfrac{-1}{2}$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ **limitinin değeri nedir?**

$\infty-\infty$ var.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{x\ln x-\ln x}=\dfrac{0}{0}$

L.' Hosp. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+x.\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}=\dfrac{0}{0}$ var.

L.' Hosp. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+0+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x}$ **limitinin değeri nedir?**

$\infty-\infty$ var.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})$

$$=\lim\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{2}{\infty}=0$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x+3}-x$ **limitinin değeri kaçtır?**

$\infty-\infty$ var.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}$$

$(\sqrt{x^2+2x+3}+x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+x}=1 \text{ bulunur.}$$

Pratik Yol

$$\lim_{x\to 0}\left|x+\frac{2}{2}\right|-x=x+1-x$$

$$=1$$

E– 1^∞, ∞^0, 0^0 belirsizliği

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2)^{\sin x}$ **limitinin değeri nedir?**

0^0 var.

$$y=\lim_{x\to 0^+}(x^2)^{\sin x}$$

$$\ln y=\lim_{x\to 0^+}2\sin x.\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\frac{-\infty}{\infty} \text{ var}$$

$$\text{L' Hosp } \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{-\frac{2\sin x}{x}}_{-2}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{0}=0\Rightarrow \ln y=0$$

$y=1$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0^-}(1-3^x)^{\sin x}$ **limitinin değeri kaçtır?**

0^0 var.

$$y=\lim_{x\to 0^-}(1-3^x)^{\sin x}\Rightarrow \ln y=\lim_{x\to 0^-}\sin x.\ln(1-3^x)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-3^x)}{\frac{1}{\sin x}}=\frac{\infty}{\infty} \text{ var.}$$

$$\text{L.' Hosp. } \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-3^x.\ln 3}{1-3^x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{3^x\ln 3}{\cos x}}_{\ln 3}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 x}{1-3^x}}_{\text{L.' Hosp.}}$$

$$=\ln 3.\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x\cos x}{-3^x.\ln 3}=0$$

$\ln y=0\Rightarrow y=1$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x+5}$ **limitinin değeri nedir?**

1^∞ var.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\boxed{3}}{\boxed{3}x-2}\right)^{\boxed{2}x+5}=e^{\frac{3.2}{3}}=e^2$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-4}\right)^{3x-2}$ **limitinin değeri kaçtır?**

1^{∞} var.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\boxed{9}}{\boxed{2}x-4}\right)^{\boxed{3}x-2}=e^{\frac{9.3}{2}}=e^{\frac{27}{2}}$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}$ **limitinin değeri nedir?**

1^{∞} var.

$$y=\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}\Rightarrow \ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{x}=\frac{0}{0}\text{ var.}$$

$$\text{L' Hosp }\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3\cos 3x}{1+\sin 3x}}{1}=3\Rightarrow \ln y=3$$

$$y=e^3$$

Pratik Yol

$\boxed{\sin x\sim x}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=e^3$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+\tan x)^{\frac{1}{x}}$ **limitinin değeri kaçtır?**

1^{∞} var.

$$y=\lim_{x\to 0^+}(e^x+\tan x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x+\tan x)}{x}=\frac{0}{0}\text{ var.}$$

$$\text{L.' Hosp. }\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^x+1+\tan^2 x}{e^x+\tan x}}{1}=2\to \ln y=2$$

$$y=e^2$$

Pratik Yol

$$\left.\begin{array}{l}e^x\sim 1+x\\ \tan x\sim x\end{array}\right\}\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^2$$

$$=e.\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-(x+1).\frac{1}{x+1}}{3x^2+2x}$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$ **limitinin değeri nedir?**

$\frac{0}{0}$ var. L'Hosp. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[(1+x)^{1/x}\right]^{I}}{1}$

$y=(1+x)^{1/x}\Rightarrow \ln y=\frac{1}{x}\ln(1+x)$

$$\frac{y^I}{y}=\frac{\frac{1}{x+1}\cdot x-\ln(1+x).1}{x^2}\Rightarrow y^I=\frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{(x+1)x^2}y$$

$$y^I=(1+x)^{1/x}.\frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2(x+1)}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}}_{e}\ \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^3+x^2}}_{L^I\text{Hosp}}$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}{3x^2+2x}$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{3x^2+2x}=\frac{0}{0}\text{ var.}$$

$$L^I\text{Hosp.}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{6x+2}=e\cdot\frac{(-1)}{2}=-\frac{e}{2}\text{ bulunur.}$$

18– Diferansiyel yardımıyla yaklaşık değer hesabı

$f: A \subset IR \rightarrow IR$ ve $x \in A$'da türevlenebilir olsun.

$f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x f^{I}(x)$ ile yaklaşık değer hesabı yapabiliriz.

Örnek

$\sqrt{17}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ x = 16 \\ \Delta x = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(16+1) \cong f(16) + 1.f^{I}(16) \\ f(16) = 4 \\ f^{I}(x) = \left.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=16} = \dfrac{1}{2.4} = \dfrac{1}{8} \\ f(17) \cong 4 + \dfrac{1}{8} = 4.125 \end{array}$$

Örnek

$\sqrt[3]{9}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sqrt[3]{x} \\ x = 8 \\ \Delta x = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(8+1) \cong f(8) + 1.f^{I}(8) \\ f(8) = \sqrt[3]{8} = 2 \\ f^{I}(x) = \left.\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right|_{x=8} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \dfrac{1}{12} \\ \sqrt[3]{9} = 2 + \dfrac{1}{12} = \dfrac{25}{12} \end{array}$$

19– Artan–Azalan Fonksiyonlar

f, [a, b]'de sürekli ve (a, b)'de türevli olsun.

$\forall\, x \in (a, b)$ için

$f^{I}(x) > 0$ ise f, (a, b)'de artandır.

$f^{I}(x) < 0$ ise f, (a, b)'de azalandır.

$f^{I}(x) = 0$ ise f, (a, b)'de sabittir.

Örnek

$f(x) = x^2 - 6x + 7$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

$f^{I}(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

		3	
f^{I}	$-$	o	$+$
f	↘		↗

f, $(-\infty, 3)$ aralığında azalan,

f, $(3, \infty)$ aralığında artan.

Örnek

$f(x) = -x^2 + 4x + 9$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

$f^{I}(x) = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

		2	
f^{I}	$+$	o	$-$
f	↗		↘

f, $(-\infty, 2)$ aralığında artan,

f, $(2, \infty)$ aralığında azalan.

Örnek

$f(x) = x^3 + 6x$ için artan-azalan aralıklarını bulunuz.

$f^{I}(x) = 3x^2 + 6 > 0 \ \ \forall x \in IR$ olduğundan

$f(x)$, $(-\infty, \infty)$'da artandır.

Örnek

f: IR → IR, $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x+7$ **fonksiyonunun artan–azalan olduğu bölgeyi bulunuz.**

$f'(x) = x^2 + 4x + 3 = \quad (x + 1)(x + 3) = 0$

$x = -1$

$x = -3$

		−3		−1	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

$(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$ aralığında f artan,
$(-3, -1)$ aralığında f azalandır.

Örnek

$f(x) = x^3 - 12x$ fonksiyonunun artan - azalan olduğu bölgeyi bulunuz.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2) = 0$

$x = 2\ ,\ x = -2$

		−2		2	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

f, $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ aralığında artan,
f, $(-2, 2)$ aralığında azalandır.

Örnek

f: $[0, \pi] \Rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = x\sin x + \cos x$ fonksiyonu için artan–azalan bölgeyi bulunuz.

$f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$

$x \geqslant 0$

	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

f(x), $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$'de artan, $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 'de azalandır.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f(x) = x^2 . e^{2x}$ fonksiyonu için artan - azalan olduğu bölgeyi bulunuz.

$f'(x) = 2xe^{2x} + x^2 . 2e^{2x} = e^{2x}(2x + 2x^2)$

$= \underbrace{2e^{2x}}_{\geq 0}(x^2+x)$

$x = 0$ ve $x = -1$

		−1		0	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

f, $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$' da artan,
$(-1, 0)$' da azalandır.

Örnek

f: IR → IR, $f(x)\dfrac{x}{x^2+4}$ fonksiyonu için artan–azalan olduğu bölgeyi bulunuz.

$$f^{I}(x)=\frac{1.(x^2+4)-x.2x}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

$\left.\begin{matrix} x=2 \\ x=-2 \end{matrix}\right\}$

		−2		2	
f^{I}	−	0	+	0	−
f	↗		↘		↗

f, (−∞, −2) ∪ (2, ∞)'da azalan
f, (−2, 2)'da artandır.

Örnek

f : ℝ → ℝ , $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$ fonksiyonunun artan - azalan olduğu bölgeyi bulunuz.

$$f^{I}(x)=\frac{(2x+2)}{2\sqrt{x^2+2x+3}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

		−1	
f^{I}	−	0	+
f	↘		↗

f, (−∞, −1)' de azalan,
f, (−1, ∞)' da artandır.

20– Fonksiyonların Maksimum ve Minimum Noktaları

A– Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum

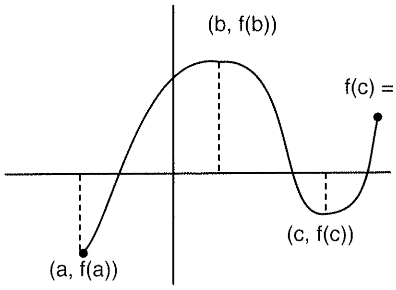
- A ⊂ IR, f: A → IR bir fonksiyon ve c ∈ A olsun.

(I) ∀x∈A için f(x) ⩽ f(c) ise

(c, f(c)) mutlak maksimum noktadır.

(II) ∀x∈A için f(x) ⩾ f(c) ise

(c, f(c)) mutlak minimum noktadır.



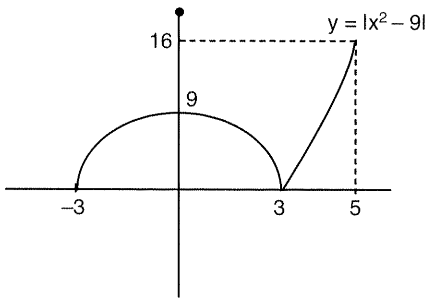
Yukarıdaki şekilde f: [a, d] → IR fonksiyonu veriliyor. Buna göre [a, d] aralığında;

(a, f(a)) mutlak minimum noktasıdır.

(b, f(b)) ise mutlak maksimum noktasıdır.

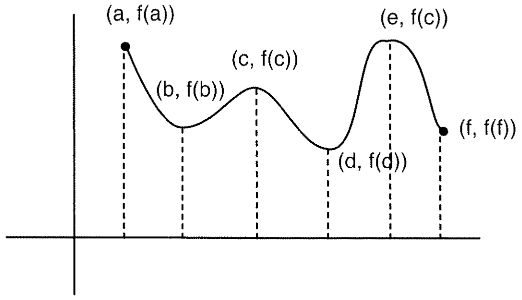
Örnek

f: [–3, 5] → IR aralığında f(x) = $|x^2-9|$ için mutlak maksimum ve mutlak minimum noktaları bulunuz.



- (–3, 0) noktası mutlak minimum
- (5, 16) noktası mutlak maksimum noktalarıdır.

B– Yerel Maksimum ve Yerel Minimum



Bir [a, f] aralığı veriliyor. Bu aralık içinde f(x) fonksiyonunun alt aralıklarındaki tepe (uç) değerler yerel ekstremum noktaları olurlar.

Burada $\left.\begin{matrix}(b, f(b)\\(d, f(d))\end{matrix}\right\}$ yerel minimum,

$\left.\begin{matrix}(c, f(c))\\(e, f(e))\end{matrix}\right\}$ yerel maksimum,

(d, f(d)) → mutlak minimum

(e, f(e)) → mutlak maksimum noktalarıdır.

Fermat Teoremi

f: [a, b] → IR fonksiyonunun bir c∈(a, b) noktasında yerel maksimum veya yerel minimumu varsa ve f, c'de türevlenebiliyorsa

$f'(c) = 0$ olur.

Örnek

f: IR → IR, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 7$

fonksiyonu için yerel ekstremumları bulunuz.

$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$

$\left.\begin{matrix}x = 1\\x = 3\end{matrix}\right\}$

		1		3	
f'	+	0	–	0	+
f	↗	max	↘	min	↗

$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 7 = \frac{1}{3} + 8 = \frac{25}{3} \Rightarrow \left(1, \frac{25}{3}\right)$ yerel maksimum nokta

$f(3) = \frac{1}{3}.27 - 2.9 + 9 + 7 = 9 - 18 + 9 + 7 = 7 \Rightarrow (3, 7)$

yerel minimum nokta

Örnek

$\left.\begin{matrix}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\f(x) = x^3 - 3x\end{matrix}\right\}$ fonksiyonu için yerel ekstremumları bulunuz.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x+1) = 0$

$x = -1$ ve $x = 1$

		–1		1	
f'	+	0	–	0	+
f	↗	max	↘	min	↗

- $f(-1) = -1 + 3 = 2$

  (–1, 2) yerel max noktası
- $f(1) = 1 - 3 = -2$

  (1, –2) yerel min. noktası

Örnek

$\left.\begin{matrix}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\f(x) = x^4 - 2x^2\end{matrix}\right\}$

fonksiyonu için yerel ekstremumları bulunuz.

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$x = 0$

$x = -1$

$x = 1$

		–1		0		1	
f'	–	0	+	0	–	0	+
f	↘	min	↗	max	↘	min	↗

$\left.\begin{matrix}f(-1) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow (-1, -1)\\f(1) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow (1, -1)\end{matrix}\right\}$ yerel minimum noktaları

$f(0) \Rightarrow (0, 0)$ yerel maksimum noktası

Örnek

$f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ **fonksiyonu için yerel ekstremumları bulunuz.**

$$f'(x) = \frac{2x.x-(x^2+4).1}{x^2} = \frac{2x^2-x^2-4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$$

$x = -2$

$x = 2$

		-2		0		2	
f'	+		−		−		+
f	↗	max	↘		↘	min	↗

$f(-2) = -4 \Rightarrow (-2, -4)$ yerel max noktası

$f(2) = 4 \Rightarrow (2, 4)$ yerel min. noktası

Örnek

$f(x) = x^2e^x$ fonksiyonu için yerel ekstremumları bulunuz.

$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$

$= x(x + 2)e^x$

$x = 0$

$x = -2$

		-2		0	
f'	+		−		+
f	↗	max	↘	min	↗

$f(-2) = 4e^{-2} \Rightarrow (-2, 4e^{-2}) \Rightarrow$ yerel maksimum noktası

$f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0) \Rightarrow$ yerel minimum noktası

Örnek

$f(x) = x^2 - 2x + 5$ fonksiyonunun $[-1, 4]$ aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

- $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

  $f(1) = 1 - 2 + 5 = 4 \Rightarrow$ Mutlak minimum değer
- $f(-1) = 1 + 2 + 5 = 8$
- $f(4) = 16 - 8 + 5 = 13 \Rightarrow$ Mutlak maksimum değer

Örnek

$f(x) = x^2 + 4x + 7$ fonksiyonunun $[-3, 2]$ aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

$f'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

$f(-2) = 4 - 8 + 7 = 3$

$f(-3) = 9 - 12 + 7 = 4$

$f(2) = 4 + 8 + 7 = 19 \rightarrow$ Mutlak maksimum değer

mutlak minimum değer

Örnek

$f(x) = 5^x$, $[-1, 3]$ aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

$f(x)$, artan fonksiyon

$f'(x) \neq 0$

$f'(x) = 5x \,.\, \ln 5 > 0$

$f(-1) = 5^{-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow$ Mutlak minimum değer

$f(3) = 5^3 = 125 \Rightarrow$ Mutlak maksimum değer

Örnek

$f(x)=\sqrt{x}$, [2, 5] aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ ([2, 5] aralığında)

$f'(x)\neq 0$

f(x), [2, 5]' de artan fonksiyon

$f(2)=\sqrt{2}$ → mutlak minimum değer

$f(5)=\sqrt{5}$ → mutlak maksimum değer

Örnek

$f:IR-\{0\}\to IR$

$f(x)=\dfrac{x^2+9}{x}$, [−4, 4] aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

$$f'(x)=\frac{2x(x)-(x^2+9).1}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-9}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2}$$

$x=-3 \Rightarrow f(-3)=-6$

$x=3 \Rightarrow f(3)=6$

$f(-4)=\dfrac{16+9}{-4}=\dfrac{-25}{4}$ → Mutlak minimum değer

$f(4)=\dfrac{16+9}{4}=\dfrac{25}{4}$ → Mutlak maksimum değer

Örnek

$f(x)=x^2+2kx+5$ fonksiyonunun minimum değeri −3 ise k değeri kaçtır?

$f'(x)=2x+2k=0 \Rightarrow x=-k$

$f(-k)=-3$

		$-k$	
f'	−	○	+
f	↘		↗
		min	

$k^2-2k^2+5=-3$

$-k^2=-8$

$k=\mp 2\sqrt{2}$

Örnek

$f(x)=-x^2+2kx+3$ fonksiyonun maksimum değeri 8 ise k değeri kaçtır?

$f'(x)=-2x+2k=0 \Rightarrow x=k$

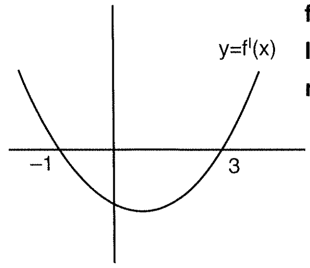
$f(k)=-k^2+2k^2+3=8$

		k	
f'	+	○	−
f	↗		↘
		max	

$k^2+3=8$

$k=\mp\sqrt{5}$

Örnek

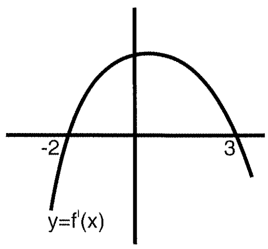


f fonksiyonun artan–azalan olduğu bölgeyi bulunuz.

		−1		3	
f'	+	0	−	0	+
f	↗	max	↘	min	↗

f, $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ artan ve f$(-1, 3)$ aralığında azalandır.

Örnek



f fonksiyonunun artan - azalan olduğu bölgeyi bulunuz.

		−2		3	
f'	−		+		−
f	↘	min	↗	max	↘

f, $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ azalan,

f, $(-2, 3)$ artandır.

UYARI–1

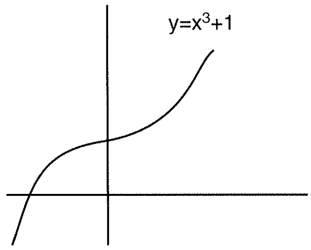
[a, b] aralığında bir c $\in$(a, b) için $f'(c) = 0$ olması o noktada yerel ekstremum olduğunu göstermez. Yani Fermat teoriminin karşıtı doğru değildir.

Örneğin; $f(x) = x^3 + 1$ için

$f'(x) = 3x^2 = 0$

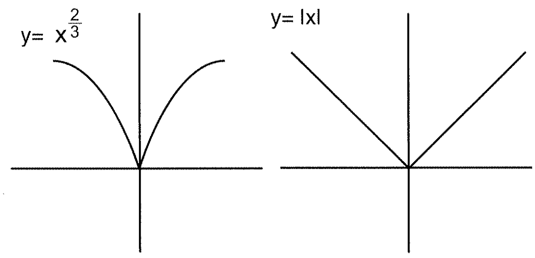
		0	
f'	+	0	+
1	↗		↗

Yerel ekstrem yok.



UYARI–2

Fonksiyon bir noktada yerel ekstremuma sahip olduğu halde o noktada türevli olmayabilir.



Her iki şekilde de görüldüğü üzere ,x = 0'da yerel minimum fakat türevsiz

Kural

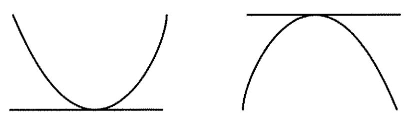
f, (a, b)'de türevli,

c $\in$ (a, b) kritik nokta ve $f''(c) \neq 0$ olsun.

Buna göre eğer;

$f''(c) > 0$ ise c'de yerel minimum,

$f''(c) < 0$ ise c'de yerel maksimum vardır.



$\left.\begin{array}{l} f'(c) = 0 \\ f''(c) > 0 \end{array}\right\}$ Yerel minimum

$\left.\begin{array}{l} f'(c) = 0 \\ f''(c) < 0 \end{array}\right\}$ Yerel maksimum

Örnek

f: IR⁺ → IR, f(x) = xlnx + 1 fonksiyonunun yerel ekstremum değerini ve türünü bulunuz.

$f'(x) = \ln x + x.\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$x = \frac{1}{e}$

$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = e$

$f'' > 0$ olduğundan yerel minimum vardır.

$f(1/e) = \frac{1}{e}.(-1) + 1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$ yerel minimum değeri

Örnek

f(x) =2sinx + 3cosx fonksiyonunun [0, 2π] aralığındaki yerel ekstremum değerlerini bulunuz.

Bu tip y = asinx + bcosx soruları için kısa yol:

$\left.\begin{array}{l} \max \sqrt{a^2+b^2} \\ \min -\sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right\}$ ile bulunur.

Burada $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ maksimum değer

$-\sqrt{13}$ minimum değer

Örnek

f(x) = sinx + 2cosx fonksiyonunun [0, 2π] aralığındaki yerel ekstremum değerlerini bulunuz.

Bu tip y = asinx + bcosx soruları için kısa yol:

$\left.\begin{array}{l} \max \sqrt{a^2+b^2} \\ \min -\sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right\}$ ile bulunur.

Burada $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ maksimum değer

$-\sqrt{5}$ minimum değer

21–Maksimum–Minimum Problemleri

Örnek

İki pozitif tamsayının toplamları 30 ise bu iki sayısının kareleri toplamı en az ve en fazla kaç olur?

$\left.\begin{array}{l} x + y = 30 \\ A(x) = x^2 + y^2 \end{array}\right\}$

$y = 30 - x$

$A(x) = x^2 + (30 - x)^2$

$A'(x) = 0$

$2x + 2(30 - x).(-1) = 0$

$x - 30 + x = 0 \Rightarrow x = 15$

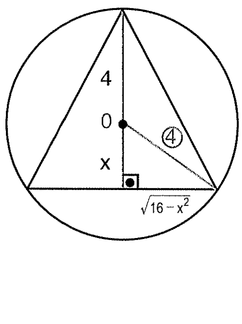
$A(15) = 15^2 + 15^2 = 225 + 225 = 450$ en az değeri

1 ve 29 uç değerler

$\left.\begin{array}{l} A(1) = 1^2 + 29^2 = 842 \\ A(29) = 29^2 + 1^2 = 842 \end{array}\right\}$ en çok değeri

Örnek

4 yarıçaplı bir çemberin içine çizilen bir üçgenin alanı en fazla kaç olur?



$S = (4 + x)\sqrt{16 - x^2}$

$S' = 0$

$S' = \sqrt{16 - x^2} + (4 + x)\cdot\frac{(-x)}{\sqrt{16 - x^2}} = 0$

$16 - x^2 - 4x - x^2 = 0$

$2x^2 + 4x - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

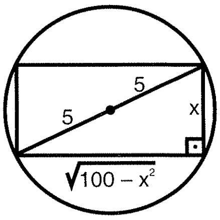
$(x + 4)(x - 2) = 0$

$x = 2$

$S = (4 + 2).\sqrt{16 - 4} = 6.2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

Örnek

5 yarıçaplı bir çemberin içine çizilebilen bir dikdörtgenin alanı en fazla kaç olur?



$$s = \frac{x.\sqrt{100-x^2}}{2} \Rightarrow s' = 0$$

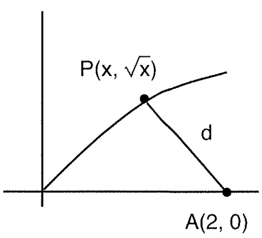
$$s = \frac{\sqrt{100x^2 - x^4}}{2}$$

$$(100x^2 - x^4)' = 0 \Rightarrow x = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow s = 50$$

Örnek

A(2, 0) noktasının $y = \sqrt{x}$ eğrisine uzaklığı en az kaç olur?



$$|AP| = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

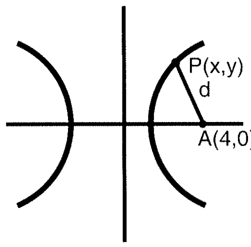
$$|AP|' = 0 \Rightarrow (2x - 3) = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$AP = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4} = \sqrt{\frac{9 - 18 + 16}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Örnek

$x^2 - y^2 = 4$ eğrisi üzerinde alınan bir noktanın A(4,0) noktasına uzaklığı en az kaç olur?



$$|AP| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

$$y^2 = x^2 - 4$$

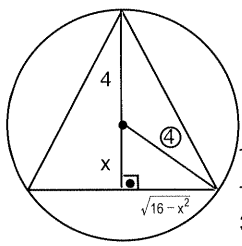
$$|AP| = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x^2 - 4} = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$$

$$|AP|' = 4x - 8 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} |AP| = 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Yarıçapı 4 cm olan bir küre içerisine yerleştirilecek en büyük hacimli dik dairesel koninin hacmi kaçtır?



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h$$

$$= \frac{\pi}{3}.(16 - x^2).(4 + x)$$

$$V' = 0$$

$$-2x\,.\,(4 + x) + (16 - x^2)\,.\,1 = 0$$

$$-8x - 2x^2 + 16 - x^2 = 0$$

$$3x^2 + 8x - 16 = 0$$

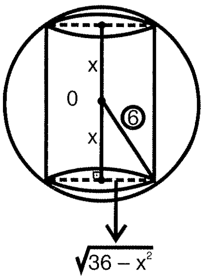
$$\left.\begin{matrix} 3x & +4 \\ x & -4 \end{matrix}\right\} x = \frac{4}{3}$$

$$V = \frac{\pi}{3}.\left(16 - \frac{16}{9}\right).\left(4 + \frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}.\left(\frac{128}{9}\right).\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{\pi.2056}{81}$$

Örnek

Yarıçapı 6 cm olan bir küre içerisine yerleştirilebilecek en büyük hacimli dik dairesel silindirin yarıçapı kaçtır?



$V = \pi r^2 h$

$= \pi \,.\, (36 - x^2).2x$

$V' = 0$

$V' = \pi .[(-2x) \,.\, 2x + (36 - x^2) \,.\, 2] = 0$

$-4x^2 + 72 - 2x^2 = 0$

$72 = 6x^2$

$x^2 = 9 \quad x = 3$

$r = 3\sqrt{3}$

Örnek

$x^2 + y^2 = 16$ ise $2x + 3y$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

$A = 2x + 3y = 2x + 3\sqrt{16 - x^2}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 2 + 3\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{16-x^2}} = 0$

$2 = \dfrac{3x}{\sqrt{16-x^2}} \Rightarrow 4 = \dfrac{9x^2}{16-x^2} \Rightarrow x = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$

$A(x) = 2.\dfrac{8}{\sqrt{13}} + 3.\sqrt{16 - \dfrac{64}{13}}$

$= \dfrac{16}{\sqrt{13}} + 3.\sqrt{\dfrac{144}{13}} = \dfrac{16}{\sqrt{13}} + \dfrac{36}{\sqrt{13}} = \dfrac{52}{\sqrt{13}} = 4\sqrt{13}$

Örnek

$x^2 + y^2 = 25$ ise $3x + 2y$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

$A(x) = 3x + 2y = 3x + 2\sqrt{25 - x^2}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 3 + 2.\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{25-x^2}} = 0$

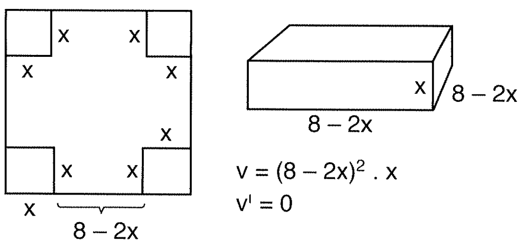
$3 = \dfrac{2x}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow 9 = \dfrac{4x^2}{25-x^2}$

$225 - 9x^2 = 4x^2$

$13x^2 = 225 \Rightarrow x = \dfrac{15}{\sqrt{13}} \Rightarrow A(x) = 5\sqrt{13}$

Örnek

Bir kenarı 8 cm olan kare şeklindeki kartonun köşelerinden eşit alanlı kareler kesilerek geriye kalan parçalardan üstü açık kare prizma yapılıyor. Bu prizmanın hacmi en fazla kaç olur?



$V = (8 - 2x)^2 \,.\, x$

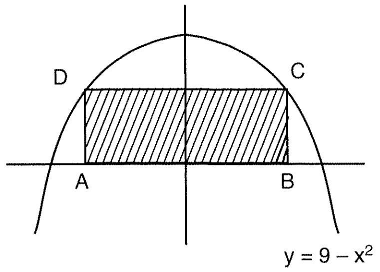
$V' = 0$

$V' = 2(8 - 2x).(-2).x + (8-2x)^2.1$

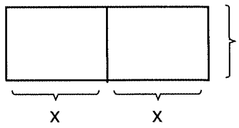
$= (8 - 2x)(-4x + 8 - 2x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$

$V = \left(8 - \dfrac{8}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{4}{3} = \left(\dfrac{16}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{1024}{27} \text{ cm}^3$

Örnek



Yandaki şekile göre ABCD dikdörtgeninin alanı en fazla kaç olur?



$A(x) = 2x\,(9 - x^2)$

$A^I(x) = 0$

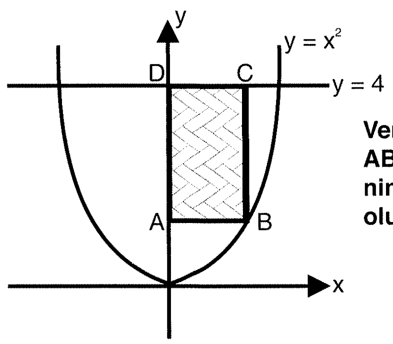
$A^I(x) = 2(9 - x^2) + 2x.(-2x) = 0$

$18 = 6x^2$

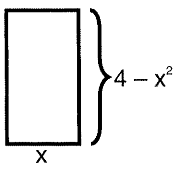
$x = \sqrt{3}$

$A(x) = 2.\sqrt{3}\,.\,6 = 12\sqrt{3}$

Örnek



Verilen şekle göre ABCD dikdörtgeninin alanı en fazla kaç olur?



$s(x) = x(4 - x^2)$

$= 4x - x^3$

$s^I(x) = 0 \Rightarrow 4 - 3x^2 = 0$

$x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$s(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}.\left(4 - \frac{4}{3}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}.\left(\frac{8}{3}\right)$

$= \frac{16}{3\sqrt{3}}$ elde ediliyor.

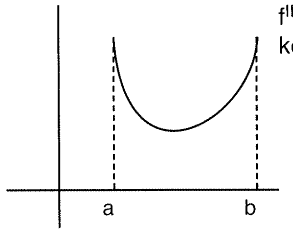
22 – Konkavite ve Büküm Noktası

Kural

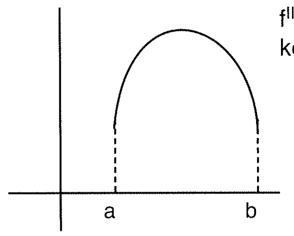
f: (a, b) → IR olmak üzere, $\forall x \in (a, b)$ için f(x) fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri alınabiliyorsa

(I) $f^{II}(x) > 0$ ise, f, (a, b) aralığında dış bükey (konveks)

(II) $f^{II}(x) < 0$ ise, f, (a, b) aralığında iç bükey (konkav) olur.

- 

$f^{II}(x) > 0$ ($\forall x \in (a, b)$) Dışbükey (konveks)

- 

$f^{II}(x) < 0$ ($\forall x \in (a, b)$) iç bükey (konkav)

 # Tanım

Bir f fonksiyonunun sürekli olduğu ve konvekslikten konkavlığa ya da konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktaya dönüm (büküm) noktası denir.

Örnek

$y = x^4 - 6x^2$ eğrisinin konkavitesini inceleyin.

$y^I = 4x^3 - 12x$

$y^{II} = 12x^2 - 12 = 0$

$12(x - 1)(x + 1) = 0$

$x = -1$

$x = 1$

		(–1, –5) –1		(1, –5) 1	
f^{II}	+	0	–	0	+
f	↗		↘		↗
	konveks		konkav		konveks

f, $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ aralığında konveks
(–1, 1) aralığında konkavdır.

\# (–1, –5) ve (1,–5) noktaları dönüm noktalarıdır.

Örnek

$y = x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ eğrisinin konkavitesini inceleyin.

$$\left.\begin{array}{l} y^{I} = 3x^2 + 6x - 7 \\ y^{II} = 6x + 6 = 0 \end{array}\right\} x = -1$$

(−1, 10)

		−1	
f^{II}	−		+
f	konkav		konveks

f, $(-\infty, -1)$ aralığında konkav,

$(-1, \infty)$ aralığında konvekstir.

(−1, 10) noktası dönüm noktasıdır.

Örnek

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ eğrisinin dönüm noktasının apsisi kaçtır?

$$\left.\begin{array}{l} y^{I} = 6x^2 - 12x - 12 \\ y^{II} = 12x - 12 = 0 \end{array}\right\} x = 1$$

Örnek

$y = 2x^4 - 12x^2 + 7$ eğrisinin dönüm noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

$$\left.\begin{array}{l} y^{I} = 8x^3 - 24x \\ y^{II} = 24x^2 - 24 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \text{ dönüm noktaları}$$

Örnek

$y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ eğrisinin konkavitesini inceleyin.

$$y^{I} = \frac{2(1 + x^2) - 2x.2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}$$

$$y^{II} = \frac{-4x.(1 + x^2)^2 - (-2x^2 + 2).2(1 + x^2).2x}{(1 + x^2)^4}$$

$$= \frac{(1 + x^2)[-4x - 4x^3 - 8x + 8x^3]}{(1 + x^2)^4}$$

$$= \frac{4x^3 - 12x}{(1 + x^2)^3}$$

$4x(x^2 - 3) = 0$

$x = 0$

$x = \sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3}$

		dönüm noktası $-\sqrt{3}$		dönüm noktası 0		dönüm noktası $\sqrt{3}$	
f^{II}	−		+		−		+
f	konkav		konveks		konkav		konveks

Örnek

$y = e^{-x^2}$ eğrisinin konkavitesini inceleyin.

$y^{I} = (-2x)e^{-x^2}$

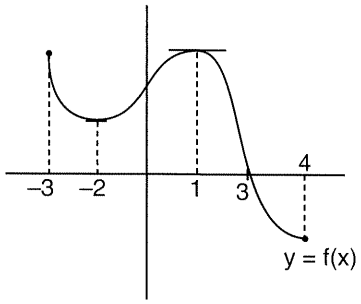
$y^{II} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2 - 2 = 0 \\ x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \text{dönüm noktaları}$$

		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	
f^{II}	+		−		+
f	konveks		konkav		konveks

Grafik Yorumlama

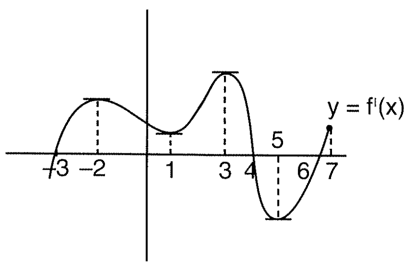
Örnek



f fonksiyonu için;

- (–3, –2) aralığında azalan
- x = –2'de yerel minimum
- (–2, 1) aralığında artan
- x = 1'de yerel maksimum
- (1, 4) aralığında azalan
- $f''(-2.5) > 0$
- $f''(-1) > 0$
- $f''(1.5) < 0$
- $f''(0.8) < 0$

Örnek



	–3		4		6	
f'	–		+		–	+
f	↘		↗		↘	↗
	min		max		min	

f için;

- x = –3'de yerel minimum
- x = 4'de yerel maksimum
- x = 6'da yerel minimum
- (–∞, –3)∪(4, 6)'da azalan
- (–3, 4)∪(6 + ∞)'da artan
- $f''(-2) = 0$
- $f''(1) = 0$
- $f''(3) = 0$
- $f''(5) = 0$

$\left.\right\}$ –2, 1, 3, 5'de dönüm noktaları var.

- (–3, –2)'de konveks
- (–2, 1)'de konkav
- (1, 3)'de konveks
- (3, 5)'de konkav
- (5, 7)'de konveks

23– Eğri Grafikleri

A– Düşey Asimptot

y = f(x) fonksiyonu için

$\lim\limits_{x \to X_0^+} f(x) = \mp\infty$ ya da $\lim\limits_{x \to X_0^-} f(x) = \mp\infty$

koşullarından en az birini sağlayan X_0 varsa $x = X_0$ doğrusuna f(x) fonksiyonunun düşey asimptotu denir.

Örnek

$f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ **eğrisinin düşey asimptotu nedir?**

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ düşey asimptot

Örnek

$\mathbf{y = \dfrac{x^3}{x+2}}$ **eğrisinin düşey asimptotu nedir?**

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ düşey asimptot

Örnek

$y = \dfrac{x^2+4x+5}{x^3-x}$ **eğrisinin düşey asimptotları nelerdir?**

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x.(x^2-1) = 0 \Rightarrow x.(x-1)(x+1) = 0$

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right\}$ düşey asimptotlar

Örnek

$y = \dfrac{x^2+7}{x^3-2x^2-3x}$ **eğrisinin düşey asimptotları nelerdir?**

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x\,.\,(x^2-2x-3) = 0$

$x(x-3)(x+1) = 0$

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right\}$ düşey asimptotlar

Örnek

$y = \dfrac{x^3+2}{x^2+kx+4}$ **eğrisinin düşey asimptotları arasındaki uzaklık 2 birim ise k değeri kaçtır?**

$x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{a} = \dfrac{\sqrt{k^2-4.1.4}}{1} = 2$

$\sqrt{k^2-16} = 2 \Rightarrow k^2 - 16 = 4$

$k^2 = 20$

$k = \mp 2\sqrt{5}$

Örnek

$f(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2+kx+4}$ **eğrisinin düşey asimptota sahip olmaması için k ne olmalıdır?**

$\Delta < 0 \Rightarrow k^2 - 4\,.\,1\,.\,4 < 0$

$k^2 < 16$

$-4 < k < 4$

Örnek

$y = e^{\frac{1}{x}}$ **eğrisinin düşey asimptotu nedir?**

$x = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ $x = 0$ düşey asimptot

Örnek

$y = 5^{\frac{1}{x}}$ **eğrisinin düşey asimptotu nedir?**

$x = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ $x = 0$ düşey asimptot

Örnek

f(x) = tanx fonksiyonunun düşey asimptotu nedir?

$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow \cos x=0$

$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z$

Örnek

f(x) = cotx fonksiyonunun düşey asimptotu nedir?

$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow \sin x=0$

$x=k\pi\ ,\ k\in z$

B– Yatay Asimptot

y = f(x) fonksiyonu için

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ veya $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ ise $(a\in IR)$

y = a doğrusuna f fonksiyonunun yatay asimptotudur, denir.

Örnek

$y=\frac{x^2+1}{2x^2+3x-1}$ **eğrisinin yatay asimptotu nedir?**

$y=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+3x-1}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$ yatay asimptot

Örnek

$y=\frac{2x^3+3}{3x^3-2x+1}$ **fonksiyonunun yatay asimptotu nedir?**

$y=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{2x^3+3}{3x^3-2x+1}\Rightarrow y=\frac{2}{3}$ yatay asimptot.

Örnek

$y=x.\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$ **eğrisinin yatay asimptotu nedir?**

$y=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)^x\Rightarrow y=\ln e^{-1}$

$y=-1$ yatay asimptot

Örnek

$f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}$ **eğrisinin asimptotları nelerdir?**

- x = 0 düşey asimptot
- $y=\lim\limits_{x\to\mp\infty} e^{\frac{1}{x^2}}\Rightarrow y=1$ yatay asimptot

Örnek

f(x) = $\frac{x}{|x|-1}$ **eğrisinin asimptotları nelerdir?**

- $\left.\begin{array}{r}|x|-1=0\Rightarrow x=1\\ x=-1\end{array}\right\}$ düşey asimptotlar
- $y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{|x|-1}\Rightarrow y=1$ yatay asimptot
- $y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|-1}\Rightarrow y=-1$ yatay asimptot

Örnek

$y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ **eğrisinin asimptotlarının kesim noktası nedir?**

$x^2 - 4 = 0$ $\qquad$ $y = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-4} = 1$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right\}$ düşey $\qquad$ $y = 1$ yatay

$\left.\begin{array}{l} (2,1) \\ (-2,1) \end{array}\right\}$ kesim noktaları

Örnek

$y = \dfrac{2x^2-3x+4}{x^2-3x+2}$ **eğrisinin asimptotlarının kesim noktası nedir?**

- $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right\}$ düşey
- $y = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{2x^2-3x+4}{x^2-3x+2} \Rightarrow y = 2$ yatay asimptot

$\left.\begin{array}{l} (1,2) \\ (2,2) \end{array}\right\}$ kesim noktaları

C– Eğik ve Eğri Asimptot

$y = f(x)$ eğrisi için;

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0$ veya $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - g(x) = 0$

olacak şekilde bir $g(x)$ eğrisi varsa $y = g(x)$ eğrisine; $\boxed{ax+b}$ şeklinde ise **eğik asimptot** $\boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \; (n \geq 2)}$ şeklinde ise **eğri asimptot** denir.

Örnek

$y = \dfrac{2x^2+3x-1}{x-2}$ **eğrisinin eğik asimptotu nedir?**

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 3x - 1 & x - 2 \\ \hline \mp 2x^2 \pm 4x & 2x + 7 = y \\ \hline 7x - 1 & \\ \mp 7x \pm 14 & \\ \hline 13 & \end{array}$$

$y = 2x + 7$ eğik asimptot

Örnek

$f(x) = \dfrac{4x^2+2x+5}{x+1}$ **eğrisinin eğik asimptotu nedir?**

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 + 2x + 5 & x + 1 \\ \hline \pm 4x^2 \pm 4x & 4x - 2 = y \\ \hline -2x + 5 & \\ \pm 2x \mp 2 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

$y = 4x - 2$ eğik asimptot

Örnek

$f(x)=\frac{x^3}{x+1}$ **eğrisinin eğri asimptotu nedir?**

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x+1 \\ \cline{2-2} \mp x^3 \mp x^2 & x^2-x+1 \\ \hline -x^2 & \\ \pm x^2 \pm x & \\ \hline x & \\ \mp x \mp 1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$y=x^2-x+1$ eğri asimptot

\# **Kural**

$a>0$ için $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ eğrisinin eğik asimptotu $y=\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2a}$ olur. ($a<0$ için asimptot yoktur.)

Örnek

$\mathbf{f(x)=\frac{x^3+x^2}{x+2}}$ **eğrisinin eğri asimptotu nedir?**

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2 & x+2 \\ \cline{2-2} \mp x^3 \mp 2x^2 & x^2-x+2 \\ \hline -x^2 & \\ \pm x^2 \pm 2x & \\ \hline 2x & \\ \mp 2x \mp 4 & \\ \hline -4 & \end{array}$$

$y=x^2-x+2$ eğri asimptot

Örnek

$y=\sqrt{x^2+4x-7}$ **eğrisinin eğik asimptotu nedir?**

$y=\left|x+\frac{4}{2}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} y=x+2 \\ y=-x-2 \end{array}\right\}$ eğik asimptotlar

Örnek

$\mathbf{y=\sqrt{x^2-6x+11}}$ **eğrisinin eğik asimptotu nedir?**

$y=\left|x-\frac{6}{2}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{l} y=x-3 \\ y=-x+3 \end{array}\right\}$ eğik asimptotlardır.

Örnek

y = xarctanx eğrisinin eğik asimptotu nelerdir?

$y=mx+n$

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]$

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\arctan x}{x}=\arctan\infty=\frac{\pi}{2}$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\arctan x-\frac{\pi}{2}x\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}$ var.

L'Hospital $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-1$

$y=\frac{\pi}{2}x-1$ eğik asimptot

Benzer şekilde $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ diğer eğik asimptot bulunur. ($x\to-\infty$ için)

Polinom Fonksiyonlarının Grafikleri İçin Pratik Yollar

$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

polinomlarının grafikleri için kısa yollar:

■ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (III. bölgede başlar.)
- → $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (I. bölgede biter)
- → $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ (IV. bölgede biter)

■ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ (II. bölgede başlar.)
- → $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (I. bölgede biter)
- → $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ (IV. bölgede biter)

■ $P(x) = 0$ için

Tek katlı köklerde x – eksenini keser.

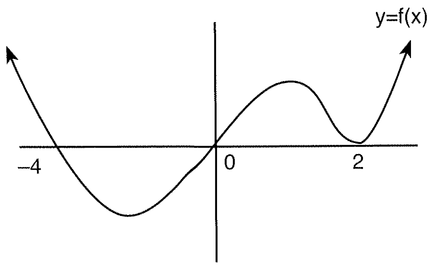
Çift katlı köklerde x – eksenine teğettir.

Örnek

$y = x \cdot (x-2)^2 \cdot (x+4)^3$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

$x = 0$ tek katlı
$x = 2$ çift katlı
$x = -4$ tek katlı

$x \to \infty \Rightarrow y = \infty$
$x \to (-\infty) \Rightarrow y = \infty$

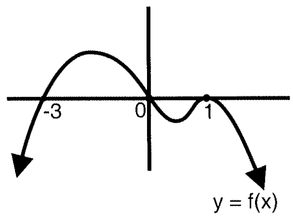


Örnek

$y = x \cdot (x-1)^2 \cdot (-x-3)^3$ eğirisinin grafiğini çiziniz.

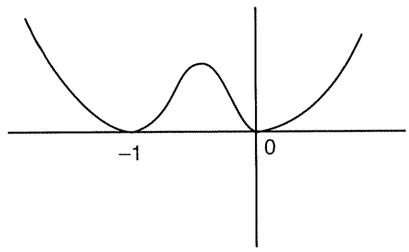
$x = 0$ tek katlı
$x = 1$ çift katlı
$x = -3$ tek katlı

$x \to \infty \Rightarrow y \to (-\infty)$
$x \to (-\infty) \Rightarrow y \to (-\infty)$

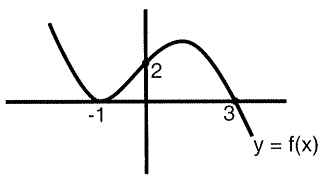


Örnek

$y = x^2(x+1)^2$ grafiğini çiziniz.



Örnek



Şekilde verilen 3. dereceden eğriyi bulunuz.

$y = a \cdot (x+1)^2 \cdot (x-3)$

$y(0) = 2$

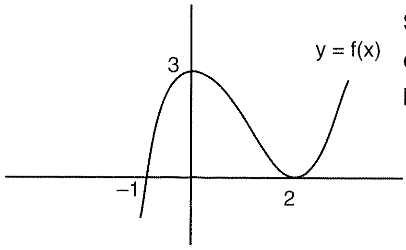
$2 = a \cdot 1 \cdot (-3)$

$a = -\frac{2}{3}$

$x = -1$ çift katlı
$x = 3$ tek katlı

$y = -\frac{2}{3}(x+1)^2 \cdot (x-3)$

Örnek



Şekilde verilen 3. dereceden eğriyi bulunuz.

x = −1 tek katlı

x = 2 çift katlı

$y = a\,.\,(x+1)\,.\,(x-2)^2$

$y(0) = 3$

$3 = a\,.\,1\,.\,4 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}(x+1).(x-2)^2$

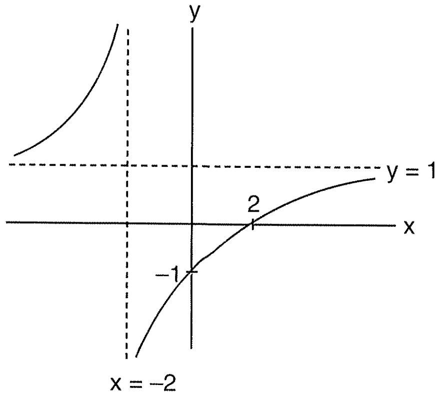
Rasyonel Fonksiyonların Grafikleri

Örnek

$y = \frac{x-2}{x+2}$ **eğrisinin grafiğini çiziniz.**

- x = −2 düşey asimptot (KELEBEK)
- y = 1 yatay asimptot
- $x = 0 \Rightarrow y = -1$

  $y = 0 \Rightarrow x = 2$



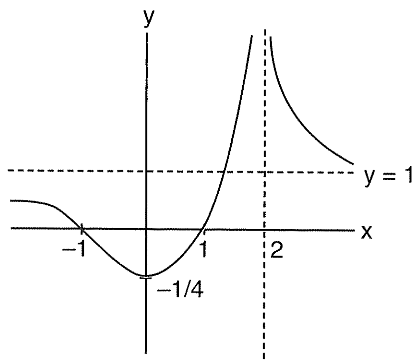
Örnek

$y = \frac{x^2-1}{(x-2)^2}$ **eğrisinin grafiğini çiziniz.**

- x = 2 düşey asimptot (BACA)
- y = 1 yatay asimptot
- $x = 0 \Rightarrow y = -1/4$

  $y = 0 \Rightarrow x = 1$

  $x = -1$



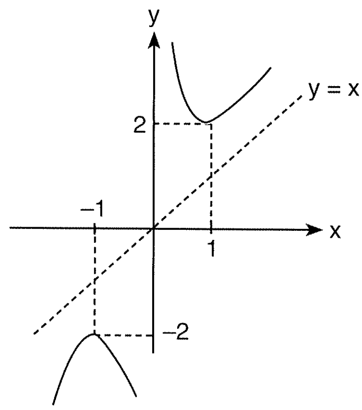
Örnek

$y = \frac{x^2+1}{x}$ **eğrisinin grafiğini çiziniz.**

- x = 0 düşey asimptot (KELEBEK)

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x \\ \cline{2-2} \mp\ x^2 & x \\ \hline 1 & \end{array}$$

y = x eğik asimptot



- $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = -1$ yerel ekstremumlar

İNTEGRAL

1– Belirsiz İntegral

Temel Kurallar

- $\forall c \in IR$ için
  $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$
- $\int [af(x) + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$
- $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$
- $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$
- $\int df(x) = f(x) + c$

Örnek

$\frac{d}{dx}\int \sin(e^x)dx$ **değeri neye eşittir?**

$\frac{d}{dx}\int \sin(e^x)dx = \sin(e^x)$

Örnek

$\frac{d}{dx}\left[\int \frac{x+2}{\sin x}dx\right]$ **değeri neye eşittir?**

$\frac{d}{dx}\left[\int \frac{x+2}{\sin x}dx\right] = \frac{x+2}{\sin x}$

Örnek

$\int d[\cot(\ln x)]$ **değeri neye eşittir?**

$\int d[\cot(\ln x)] = \cot(\ln x) + c$

Örnek

$\int d[\ln(\tan x)]$ **değeri neye eşittir?**

$\int d[\ln(\tan x)] = \ln(\tan x) + c$

Örnek

$\left[\int \log_3(e^x)dx\right]'$ **değeri neye eşittir?**

$\left[\int \log_3(e^x)dx\right]' = \log_3(e^x)$

Örnek

$[\int \tan(\sec x)dx]'$ **değeri neye eşittir?**

$[\int \tan(\sec x)dx]' = \tan(\sec x)$

Temel İntegrasyon Formüller

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
2. $\int a dx = ax + c$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \ (a > 0)$
6. $\int \cos x dx = \sin x + c$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \text{cosec}^2 x dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$
10. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + c = -\text{arccot}\, x + c$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$
12. $\int \sinh x dx = \cosh x + c$
13. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$
14. $\int \sec x dx = \ln \sec x + \tan x + c$
15. $\int \text{cosec}\, x dx = -\ln \text{cosec}\, x + \cot x + c$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c$

Örnek

$\int \frac{3x^2 - 4x + 5}{x} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\int \frac{3x^2 - 4x + 5}{x} dx$

$= \int \left(3x - 4 + \frac{5}{x}\right) dx = 3\frac{x^2}{2} - 4x + 5\ln x + c$

Örnek

$\int \left(2\cos x + \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x}\right) dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\int 2\cos x dx + \int 3x^{-1/2} dx + \int \frac{4}{x} dx$

$= 2\sin x + 6\sqrt{x} + 4\ln x + c$

Örnek

$\int \left(\frac{4}{\sin^2 x} + 5.e^x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) dx$ **integralini hesaplayınız.**

$-4\cot x + 5e^x + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c$ bulunur.

Örnek

$\int \left(3\sec x + 7^x + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right) dx$ **integralini hesaplayınız.**

$3\ln(\sec x + \tan x) + \frac{7^x}{\ln 7} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + c$ bulunur.

Örnek

$\int \left(\frac{1}{5^x} + \sinh x + \text{cosec}\, x\right) dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\int \left[\left(\frac{1}{5}\right)^x + \sinh x + \text{cosec}\, x\right] dx = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$

$+ \cosh x - \ln(\text{cosec}\, x + \cot x) + c$

Örnek

$\int \left[\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{x}\right]dx$ **integralini hesaplayınız.**

$2\tan x + \arcsin x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$ bulunur.

Örnek

$\int (2+\tan^2 x)dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int \left[1 + \underbrace{(1+\tan^2 x)}\right]dx = x + \tan x + c$$

Örnek

$\int(2-\cot^2 x)dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \underbrace{(3-1-\cot^2 x)}dx = 3x + \cot x + c$$

Örnek

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$ ve $f(1) = 3$ ise $f(2)$ kaçtır?

$f(x) = \int (3x^2+6x-1)dx = x^3+3x^2-x+c$

$f(1) = 1 + 3 - 1 + c = 3 \Rightarrow c = 0$

$f(2) = 2^3 + 3.2^2 - 2 + 0 = 8 + 12 - 2 = 18$

Örnek

$f'(x) = x^3 + 3x^2 - 7$ ve $f(2) = 4$ ise $f(1)$ kaçtır?

$f(x) = \int (x^3+3x^2-7)dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - 7x + c$

$f(2) = 4 + 8 - 14 + c = 4$

$-2 + c = 4 \Rightarrow c = 6$

$f(1) = \frac{1}{4} + 1 - 7 + 6 = \frac{1}{4}$ bulunur.

Örnek

$\int xf'(x)dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3$ **ve $f(1) = 2$ ise $f(2)$ kaçtır?**

$\left[\int xf'(x)dx\right]' = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3\right)'$

$xf'(x) = x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = x + 4$

$f(x) = \int (x+4)dx$

$f(x) = \frac{x^2}{2} + 4x + c$

$f(1) = \frac{1}{2} + 4 + c = 2 \Rightarrow c = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$f(2) = 2 + 8 - \frac{5}{2} = 10 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$ bulunur.

Örnek

$f''(x) = 3x^2 - 2$ olmak üzere $y = f(x)$ eğrisi $2x + y - 1 = 0$ eğrisine $(1, -1)$ noktasında teğet ise $f(2)$ kaçtır?

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ m_d = f'(1) = -2 \end{array}\right\} \text{veriliyor.}$$

$$f''(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x) = \int (3x^2 - 2)dx \\ f'(x) = x^3 - 2x + a \\ f'(1) = 1 - 2 + a = -2 \Rightarrow a = -1 \end{array}$$

$$f'(x) = x^3 - 2x - 1 \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) = \int (x^3 - 2x - 1)dx \\ f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 - x + b \end{array}$$

$$f(1) = \frac{1}{4} - 1 - 1 + b = -1 \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 - x + \frac{3}{4}$$

$$f(2) = 4 - 4 - 4 + \frac{3}{4} = -\frac{13}{4}$$

Örnek

$f''(x) = 2x + 1$ ve $f(x)$ fonksiyonunun $(1,2)$' deki eğimi 3 ise $f(0)$ kaçtır?

$f''(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = \int(2x+1)dx$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = x^2 + x + c \\ f'(1) = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 + 1 + c = 3 \\ c = 1 \end{array}$$

$f'(x) = x^2 + x + 1$

$$f(x) = \int (x^2 + x + 1)dx \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + d$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + d = 2 \end{array}\right\} d = \frac{1}{6}$$

Örnek

$y = f(x)$ için $dy = (x^2-1)dx$ ve $f(0) = 2$ veriliyor.

Buna göre $f(1)$ kaçtır?

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = \int (x^2 - 1)dx$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x + c$$

$$f(0) = 0 - 0 + c = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$f(1) = \frac{1}{3} - 1 + 2 = \frac{4}{3}$$

elde edilir.

Örnek

$y = f(x)$ fonksiyonunun $P(x,y)$ noktasındaki eğimi $(3x^2 + 1)$ ve $f(0) = 2$ ise $f(1)$ kaçtır?

$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f(x) = \int(3x^2 + 1)dx$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + x + c \\ f(0) = 0 + 0 + c = 2 \end{array}\right\} c = 2$$

$f(1) = 1 + 1 + 2 = 4$ elde edilir.

Örnek

$\int \frac{2 + x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}dx$ **integralinin değeri nedir?**

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}dx + \int xdx = 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \frac{x^2}{2} + c$$

Örnek

$\int \frac{x\sqrt{1+x^2}-2}{\sqrt{1+x^2}}dx$ **integralinin değeri nedir?**

$$\int xdx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{2} - 2.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c$$

Örnek

$\int (mx)^{\frac{m+1}{m}}dx$ **integralinin değeri nedir?**

$$\int m^{\frac{m+1}{m}} \cdot x^{\frac{m+1}{m}}dx = m^{\frac{m+1}{m}} \cdot \frac{x^{\frac{m+1}{m}+1}}{\frac{m+1}{m}+1} + c$$

$$= \frac{m^{\frac{m+1}{m}} \cdot x^{\frac{2m+1}{m}}}{\frac{2m+1}{m}}$$

Örnek

$\int 2^x.e^x dx$ **integralinin değeri nedir?**

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + c$$

Örnek

$\int 5^{\ln x}dx$ **integralinin değeri nedir?**

$$5^{\ln x} = x^{\ln 5} \Rightarrow \int x^{\ln 5}dx = \frac{x^{\ln 5+1}}{\ln 5+1} + c$$

Örnek

$\int x^2 f(x)dx = \frac{x^2}{4}.(2\ln x - 1) + k$ **ise f(x) nedir?**

$$\left[\int x^2 f(x)dx\right]' = \left[\frac{x^2}{4}.(2\ln x - 1) + k\right]'$$

$$x^2 f(x) = \frac{x}{2}.(2\ln x - 1) + \frac{x^2}{4}.\frac{2}{x}$$

$$x^2 f(x) = x\ln x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \Rightarrow x^2 f(x) = x\ln x$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Örnek

$\int x^3 \ln x dx = x^4 . (A\ln x + B) + C$ **ise A+B kaçtır?**

$$[\int x^3 . \ln x dx]' = [x^4 . (A\ln x + B)]'$$

$$x^3 . \ln x = 4x^3 . (A\ln x + B) + x^4 . \left(\frac{A}{x}\right)$$

$$x^3\ln x = 4Ax^3\ln x + 4Bx^3 + Ax^3 \Rightarrow$$

$$x^3\ln x = \underbrace{(4A)}_{1} x^3\ln x + \underbrace{(A+4B)}_{0} x^3$$

$$A = \frac{1}{4} \Rightarrow B = -\frac{1}{16}$$

$$A + B = \frac{3}{16}$$

Örnek

$\int x^2 e^{2x}dx = (Ax^2+Bx+C)e^{2x}+D$ **ise A + B + C kaçtır?**

$[\int x^2e^{2x}\,dx]' = [(Ax^2 + Bx + C)e^{2x} + D]'$

$x^2e^{2x} = (2Ax + B)e^{2x} + (Ax^2 + Bx + C)\,.\,2e^{2x}$

$= (Ax^2 + (2A + B)\,x + (B + C))2e^{2x}$

$= \Big[\underbrace{(2A)}_{1}x^2+\underbrace{(4A+2B)}_{0}x+\underbrace{(2B+2C)}_{0}\Big]e^{2x}$

$$\left.\begin{aligned} &A = 1/2 \\ &4A + 2B = 0 \Rightarrow B = -2A = -1 \\ &2B + 2C = 0 \Rightarrow C = -B = 1 \end{aligned}\right\} A + B + C = 1/2$$

2– İntegral Alma Yöntemleri

a) Değişken Değiştirme Yöntemi

$\int f(y(x)).y'(x)dx$ integralini çözmek için

$$\left.\begin{aligned} &y(x) = u \\ &y'(x)dx = du \end{aligned}\right\}$$ değişken değiştirme uygulanır.

$\int f(u)du$ integraline dönüştürüp integrali hesaplarız.

Örnek

$\int (2+5x)^7dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned} &5x+2=u \\ &5dx=du \end{aligned}\right\} \int u^7\frac{du}{5}=\frac{1}{5}.\int u^7du$$

$$=\frac{1}{5}.\frac{u^8}{8}+c=\frac{(5x+2)^8}{40}+c$$

Örnek

$\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned} &2+\ln x=u \\ &\frac{1}{x}dx=du \end{aligned}\right\} \int \sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u\sqrt{u}+c$$

$$=\frac{2}{3}.(2+\ln x).\sqrt{2+\ln x}+c$$

Örnek

$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$ **integralinin değeri nedir?**

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{x}=u \\ &\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du \end{aligned}\right\} \int e^u du=e^u+c=e^{\sqrt{x}}+c$$

Örnek

$\int$cotxdx integralinin değeri nedir?

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{du}{u}=\ln u+c=\ln(\sin x)+c$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin x=u \\ &\cos x dx=du \end{aligned}\right\}$$

Örnek

$\int \frac{x^6}{1+x^{14}}dx$ **integralinin değeri nedir?**

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{x^6}{(1+(x^7)^2)}dx \\ &x^7=u \\ &7x^6dx=du \end{aligned}\right] \frac{1}{7}\int \frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{7}\arctan u+c$$

$$=\frac{1}{7}\arctan(x^7)+c$$

Örnek

$\int \sin^{\frac{3}{2}} x . \cos x dx$ **integralinin değeri nedir?**

$$\left.\begin{array}{l}\sin x = u\\ \cos x dx = du\end{array}\right\} \int u^{\frac{3}{2}} du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5}\sin^2 x . \sqrt{\sin x} + c$$

Örnek

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ **integralinin değeri nedir?**

$$\left.\begin{array}{l}f(x) = u\\ f'(x)dx = du\end{array}\right\} \int \frac{du}{u} = \ln u + c$$

$$= \ln f(x) + c$$

Örnek

Türevi kendisinin üç katına eşit olan pozitif bir f(x) fonksiyonu için f(0) = 2 ise f(x) nedir?

$f'(x) = 3f(x) \Rightarrow \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 3dx$

$\ln f(x) = 3x + c$

$\ln f(0) = 0 + c \Rightarrow \quad c = \ln 2$

$\ln f(x) = 3x + \ln 2$

$\ln\left(\frac{f(x)}{2}\right) = 3x \Rightarrow f(x) = 2e^{3x}$ bulunur.

Örnek

Türevi kendisinin 4 katına eşit olan pozitif bir f(x) fonksiyonu için f(0) = 1 ise f(x) nedir?

$f'(x) = 4f(x) \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 4dx$

$\ln f(x) = 4x + c$

$\ln f(0) = 0 + c \Rightarrow \ln 1 = c \Rightarrow c = 0$

$f(x) = e^{4x}$

Örnek

y = f(x) fonksiyonunun her noktadaki teğetinin eğimi apsis ve ordinatının çarpımının iki katına eşit ve f(x) (0, 1) noktasından geçiyor ise bu fonksiyon nedir?

$y' = 2xy \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int 2x dx$

$$\left.\begin{array}{l}\ln y = x^2 + c\\ \ln 1 = 0 + c \Rightarrow c = 0\\ y = e^{x^2}\end{array}\right\}$$

Örnek

$\int \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}$ **integralinin değeri nedir?**

$$\left.\begin{array}{l}\sin x + 2\cos x = u\\ (\cos x - 2\sin x)dx = du\end{array}\right\} \int \frac{du}{u} = \ln u + c$$

$$= \ln(\sin x + 2\cos x) + c$$

Örnek

$\int \frac{\cos 2x}{4+\sin 2x}dx$ **integralinin değeri nedir?**

$$\left.\begin{array}{l} 4+\sin 2x = u \\ 2\cos 2x dx = du \end{array}\right\} \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(4+\sin 2x)+c$$

Örnek

$\int f^3(x).f^{I}(x)dx$ **integralinin değeri nedir?**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = u \\ f^{I}(x)dx = du \end{array}\right\} \int u^3 du = \frac{u^4}{4}+c = \frac{f^4(x)}{4}+c$$

Kural

$\int f(x)dx = F(x)+c$ ise

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$ olur.

Örnek

$\int f^{\alpha}(x) . f^{I}(x)dx$ **integralinin değeri nedir?** ($\alpha \neq -1$)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = u \\ f^{I}(x)dx = du \end{array}\right\} \int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$$

$$= \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c$$

Örnek

$\int \frac{dx}{2x-5} = \frac{1}{2}\ln(2x-5)+c$

$\int (x-1)^7 dx = \frac{(x-1)^8}{8}+c$

$\int \cos(3x-1)dx = \frac{\sin(3x-1)}{3}+c$

$\int e^{5x+7}dx = \frac{e^{5x+7}}{5}+c$

bu kurala örnek verilebilir.

Örnek

$\int \frac{dx}{3x+7} = \frac{1}{3}\ln(3x+7)+c$

$\int (x+3)^5 dx = \frac{(x+3)^6}{6}+c$

$\int \sin(2x+7)dx = \frac{-\cos(2x+7)}{2}+c$

$\int e^{-3x+8}dx = \frac{e^{-3x+8}}{-3}+c$ bu kurala örnek verilir.

Örnek

$\int \frac{x}{2x^2+3}dx$ **integralinin değerini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2+3 = u \\ 4x.dx = du \end{array}\right\} \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln u + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln(2x^2+3)+c$$

Örnek

$\int \frac{3x}{4x^2-1}dx$ **integralinin değerini hesaplayınız.**

$\left.\begin{matrix} 4x^2-1=u \\ 8xdx=du \end{matrix}\right\}$ $\quad \frac{3}{8}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{8}\ln u + c$

$= \frac{3}{8}\ln(4x^2-1)+c$

Örnek

$\int 6x\sqrt{3x^2+7}\,dx$ **integralinin değerini hesaplayınız.**

$\left.\begin{matrix} 3x^2+7=u \\ 6x.dx=du \end{matrix}\right\}$ $\int \sqrt{u}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(3x^2+7)\sqrt{3x^2+7}+c$

 # Kural

- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$

Örnek

$\int(2x+1)(x^2+x-7)^5dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

$\left.\begin{matrix} x^2+x-7=u \\ (2x+1)dx=du \end{matrix}\right\}$ $\int u^5du = \frac{u^6}{6}+c$

$= \frac{(x^2+x-7)^6}{6}+c$

Örnek

$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ **integralinin değeri nedir?**

$\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \arcsin\left(\frac{x+1}{3}\right)+c$

Örnek

$\int \frac{dx}{13+4x+x^2}$ **integralinin değeri nedir?**

$\int \frac{dx}{9+(x+2)^2} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right)+c$

Örnek

$\int \frac{2}{x(\ln x)}dx$ **integralinin değeri nedir?**

$\left.\begin{matrix} \ln x=u \\ \frac{1}{x}dx=du \end{matrix}\right\}$ $\int \frac{2du}{u} = 2\ln u + c$

$= 2\ln(\ln x)+c$

Örnek

$\int \frac{(\ln x)^4}{x}dx$ **integralinin değeri nedir?**

$\left.\begin{matrix} \ln x=u \\ \frac{1}{x}dx=du \end{matrix}\right\}$ $\int u^4du = \frac{u^5}{5}+c$

$= \frac{\ln^5 x}{5}+c$

Örnek

$\int \frac{1}{x\cos^2(\ln x+2)}dx$ **integralinin değeri nedir?**

$\left.\begin{matrix} \ln x+2=u \\ \frac{1}{x}dx=du \end{matrix}\right\}$ $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \sec^2 u\,du$

$= \tan u + c$

$= \tan(\ln x+2)+c$

Örnek

$\int(2 + \tan^2 x) \, . \, \sec^2 x dx$ **integralinin değeri nedir?**

$\left.\begin{array}{l}\tan x = u \\ \sec^2 x dx = du\end{array}\right\}$ $\int (2+u^2)du = 2u + \frac{u^3}{3} + c$

$= 2\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c$

Örnek

$\int \frac{2x+5}{x^2-2x+5} dx$ **integralinin değeri nedir?**

$x^2 - 2x + 5 = u$

$(2x - 2)dx = du$

$\Rightarrow \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + \int \frac{7}{4+(x-1)^2} dx$

$= \int \frac{du}{u} + 7\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)$

$= \ln(x^2-2x+5) + \frac{7}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$

Örnek

$\int \frac{-2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$ **integralinin değeri nedir?**

$\int \frac{-2x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx + \int \frac{5}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx$

$= \int u^{-\frac{1}{2}} du + 5\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)$

$= 2\sqrt{3-2x-x^2} + 5\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

$\left.\begin{array}{l}3-2x-x^2 = u \\ (-2-2x)dx = du\end{array}\right\}$

Örnek

$\int \frac{\ln x}{x \ln 3x} dx$ **integralinin değeri nedir?**

$\int \frac{\ln x}{x.(\ln x + \ln 3)} dx = \int \frac{(u-\ln 3)du}{u} = \int \left(1 - \frac{\ln 3}{u}\right) du$

$= u - \ln 3 . \ln u + c$

$\left.\begin{array}{l}\ln x + \ln 3 = u \\ \frac{1}{x} dx = du\end{array}\right\}$ $= (\ln 3x) - (\ln 3) . \ln(\ln 3x) + c$

Örnek

$\int \frac{x+5}{(x-2)^3} dx$ **integralinin değeri nedir?**

$\int \frac{x-2+7}{(x-2)^3} dx = \int \left[\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{7}{(x-2)^3}\right] dx$

$= \int \left[(x-2)^{-2} + 7(x-2)^{-3}\right] dx$

$= \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + 7.\frac{(x-2)^{-2}}{-2} + c$

$= -\frac{1}{(x-2)} - \frac{7}{2}.\frac{1}{(x-2)^2} + c$

b) Özel Değişken Değiştirme Yöntemleri

 # Kural:

$\sqrt{a^2-x^2}$ 'den başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralinde x = a.sint dönüşümü uygulanır.

Örnek

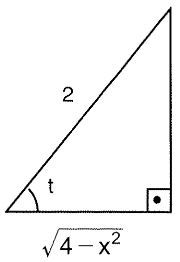
$\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x=2\sin t \\ dx=2\cos t dt \end{array}\right\} \int \frac{(2\sin t+2)}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}.2\cos t dt$$

$$=\int \frac{2\sin t+2}{\cancel{2\cos t}}.\cancel{2\cos t}dt=-2\cos t+2t+c$$

$$=-\frac{2\sqrt{4-x^2}}{2}+2.\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

$$=-\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$$



 # Kural

$\sqrt{a^2+x^2}$ ifadesinden başka köklü ifade barındırmayan fonksiyonların integralinde x = a.tant dönüşümü yapılır.

Örnek

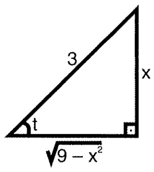
$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x=3\ \text{sint} \\ dx=3\ \text{cot tdt} \end{array}\right\} \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{3\sin t}.3\cos t dt$$

$$=\int \frac{3\cos t.3\cos t}{3\sin t}dt=3\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt$$

$$=3.\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=3.\int \text{cosec} t dt-3\int \sin t dt$$

$$=3.(-\ln|\text{cosec} t+\cot t|)+3\cos t+c$$



$$=-3.\ln\left(\frac{3}{x}+\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right)+3.\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}+c$$

Örnek

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x=3\tan t \\ dx=3\sec^2 t dt \end{array}\right\} \int \frac{3\sec^2 t dt}{9\tan^2 t.\sqrt{9\tan^2 t+9}}$$

$$=\int \frac{3\sec^2 t dt}{9\tan^2 t.3\sec t dt}=\int \frac{\sec t}{9\tan^2 t}dt$$

$$=\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{9\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}dt=\frac{1}{9}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\frac{1}{9}\int \frac{du}{u^2}$$

$$=-\frac{1}{9u}+c$$

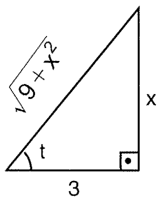
sint=u

costdt=du

$$=-\frac{1}{9\sin t}+c$$

$$=-\frac{1}{9.\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}}+c$$

$$=-\frac{\sqrt{9+x^2}}{9x}+c$$



 # Kural

$\sqrt{x^2-a^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralinde x = asect dönüşümü yapılır.

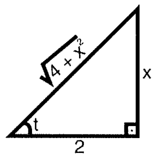
Örnek

$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x=2\tan t \\ dx=2\sec^2 t dt \end{array}\right\} \int \frac{2\sec^2 t dt}{(2\tan t)\sqrt{4+4\tan^2 t}}$$

$$=\int \frac{\sec^2 t dt}{\tan t.2\sec t}=\frac{1}{2}\int \frac{\sec t}{\tan t}dt=\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin t}{\cos t}}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \text{cosec} t dt=-\frac{1}{2}\ln(\text{cosec} t+\cot t)+c$$



$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}+\frac{2}{x}\right)+c$ elde edilir.

Örnek

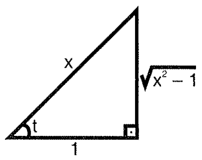
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x = \sec t \\ dx = 2\sec t.\tan t dt \end{array}\right\} \int \frac{2\sec t.\tan t dt}{(2\sec t).2\tan t} = \frac{t}{2} + c$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

Örnek

$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x = \sec t \\ dx = \sec t.\tan t dt \end{array}\right\} \int \frac{\sqrt{\sec^2 t - 1}}{\sec t} \sec t.\tan t dt$$
$$\Rightarrow \int \frac{\tan t}{\sec t}.\sec t.\tan t dt = \int \tan^2 t dt$$
$$= \int (1 + \tan^2 t - 1)dt = \tan t - t + c$$
$$= \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcsec} x + c$$



Örnek

$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+2}{\sqrt[4]{x+1}} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x+1 = t^{12} \\ dx = 12t^{11}dt \end{array}\right\} \int \frac{t^4+2}{t^3}.12t^{11}dt$$
$$= \int (12t^{12} + 24t^8)dt$$
$$= 12\frac{t^{13}}{13} + 24.\frac{t^9}{9} + c$$
$$= \frac{12}{13}(x+1)^{\frac{13}{12}} + \frac{8}{3}.(x+1)^{\frac{3}{4}} + c$$

Örnek

$\int \frac{1+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[6]{x-1}} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x-1 = t^{12} \\ dx = 12t^{11}dt \end{array}\right\} \int \frac{1+t^3}{t^2}.12t^{11}dt$$
$$= \int (12t^9 + 12t^{12})dt$$
$$= 12.\frac{t^{10}}{10} + 12.\frac{t^{13}}{13} + c = \frac{6}{5}.(x-1)^{\frac{5}{6}} + \frac{12}{13}.(x-1)^{\frac{13}{12}} + c$$

Örnek

$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \cot^2 x.\operatorname{cosec}^2 x dx = \int u^2.(-du)$$
$$\left.\begin{array}{l} \cot x = u \\ -\operatorname{cosec}^2 x dx = du \end{array}\right\} \quad = -\frac{u^3}{3} + c$$
$$= -\frac{1}{3}.\cot^3 x + c$$

Örnek

$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan^2 x.\sec^2 x dx = \int u^2 du$$
$$\left.\begin{array}{l} \tan x = u \\ \sec^2 x dx = du \end{array}\right\} \quad = \frac{u^3}{3} + c$$
$$= \frac{\tan^3 x}{3} + c$$

Örnek

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ **integralini** $x=\frac{1}{t}$ **dönüşümü ile hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{t} \\ dx=\frac{-1}{t^2}dt \end{array}\right\} \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}=\int \frac{-dt}{\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}}$$

$$=\int \frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}}=\int -\frac{udu}{u}=\int -du$$

$1-t^2=u^2$

$-2tdt=2udu$

$$=-u+c$$
$$=-\sqrt{1-t^2}+c$$
$$=-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+c$$
$$=-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$$

Örnek

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ **integralini** $x=\frac{1}{t}$ **dönüşümü ile hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{array}\right\} \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}=\int \frac{-\frac{1}{t}dt}{\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}}=\int -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\arcsin t+c=-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)+c$$

Örnek

$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} e^x-1=u^2 \\ e^xdx=2udu \end{array}\right\} \int \frac{e^xdx}{e^x\sqrt{e^x-1}}=\int \frac{2udu}{(u^2+1).u}$$

$$=\int \frac{2du}{u^2+1}=2\arctan u+c$$

$$=2\arctan(\sqrt{e^x-1})+c$$

Örnek

$\int \frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} e^x+1=u^2 \\ e^xdx=2udu \end{array}\right\} \int \frac{3e^x.e^x\cdot dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

$$=\int \frac{3.(u^2-1).2udu}{u}=6\int (u^2-1)du$$

$$=6.\left(\frac{u^3}{3}-u\right)+c$$

$$=2u^3-6u+c$$

$$=2.(e^x+1)^{\frac{3}{2}}-6.(e^x+1)^{\frac{1}{2}}+c$$

Örnek

$\int \frac{dx}{3+2\cos x}$ **integralini hesaplayınız.**

Bu tip sorularda $\tan\frac{x}{2}=t$ dönüşümü kullanılır.

$$\left.\begin{array}{l} \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right\}$$

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+2.\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+2-2t^2}{1+t^2}}=\int \frac{2dt}{5+t^2}$$

$$=2.\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)+c$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right)+c$$

Örnek

$\int \frac{dx}{2+\sin x}$ **integralini hesaplayınız.**

Bu tip sorularda $\tan\frac{x}{2} = t$ dönüşümü kullanılır.

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right\}$$

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t^2+2t}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}.\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+c$$

c) Kısmi İntegrasyon Yöntemi

u ve ϑ, x değişkenine göre diferansiyellenebilen iki fonksiyon ise

$\int u.d\vartheta = u.\vartheta - \int \vartheta.du$ ile integral hesabı yapılabilir.

Örnek

$\int xe^{2x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x = u \\ e^{2x}dx = d\vartheta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} dx = du \\ \vartheta = \frac{e^{2x}}{2} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \int xe^{2x}dx = x.\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}.dx$$

$$= \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}+c$$

 # Alternatif Yol

T	İ
(+) x	e^{2x}
(−) 1	$\frac{e^{2x}}{2}$
0	$\frac{e^{2x}}{4}$

$\Rightarrow \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}+c$ bulunur.

 # Kural

$$\boxed{\int \ln x dx = x\ln x - x + c}$$

Örnek

$\int x.\sin 2x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} x = u \Rightarrow dx = du \\ \sin 2x dx = d\vartheta \Rightarrow \vartheta = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \int x\sin 2x dx = x.\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right).dx$$

$$= -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$ bulunur.

Örnek

$\int x^4\ln x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} \ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x}dx = du \\ x^4dx = d\vartheta \Rightarrow \vartheta = \frac{x^5}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow (\ln x).\frac{x^5}{5} - \int \frac{x^5}{5}.\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^5\ln x}{5} - \frac{x^5}{25}+c$$

Örnek

$\int x^2\ln x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} \ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x}dx = du \\ x^2dx = d\vartheta \Rightarrow \vartheta = \frac{x^3}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow (\ln x).\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9}+c$$

Örnek

$\int \arctan x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}\arctan x = u \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2}dx = du \\ dx = d\vartheta \Rightarrow x = \vartheta\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x.\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

Örnek

$\int$**arcsinxdx integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}\arcsin x = u \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = du \\ dx = d\vartheta \Rightarrow x = \vartheta\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x.\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$ elde edilir.

Örnek

$\int x\sec^2 x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}x = u \Rightarrow dx = du \\ \sec^2 x\, dx = d\vartheta \Rightarrow \tan x = \vartheta\end{array}\right\} \Rightarrow x.\tan x - \int \tan x\, dx$$

$$= x\tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$= x\tan x + \ln(\cos x) + c$$

Örnek

$\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}x = u \Rightarrow dx = du \\ \dfrac{dx}{\sin^2 x} = d\vartheta \Rightarrow -\cot x = \vartheta\end{array}\right\} \Rightarrow x\,.\,(-\cot x) - \int(-\cot x)\,.\,dx$$

$$= -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= -x\cot x + \ln(\sin x) + c$$

Örnek

$\int (\ln x)^2 dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}(\ln x)^2 = u \Rightarrow 2(\ln x)\dfrac{1}{x}dx = du \\ dx = d\vartheta \Rightarrow x = \vartheta\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(\ln x)^2.x - \int x.\frac{2\ln x}{x}dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c$$

Örnek

$\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}x^2e^x = u \Rightarrow (x^2+2x)e^x dx = du \\ d\vartheta = \dfrac{dx}{(x+2)^2} \Rightarrow -\dfrac{1}{(x+2)} = \vartheta\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x^2e^x.\left(-\frac{1}{x+2}\right) - \int\left(\frac{-1}{x+2}\right).x(x+2)e^x dx$$

T	İ
$\oplus x$	e^x
$\ominus 1$	e^x
0	e^x

$$= -\frac{x^2e^x}{x+2} + \int xe^x dx$$

$$= -\frac{x^2e^x}{x+2} + xe^x - e^x + c$$

Örnek

$\int (x^2-2x)e^x dx$ **integralini hesaplayınız.**

T	İ
(+) x^2-2x	e^x
(–) $2x-2$	e^x
(+) 2	e^x
0	e^x

$\Rightarrow (x^2-2x-2x+2+2)e^x+c$

$= (x^2-4x+4)e^x+c$

elde edilir.

Örnek

$\int (x^2+1)e^{-x} = dx$ **integralini hesaplayınız.**

T	İ
$\oplus x^2+1$	e^{-x}
$\ominus 2x$	$-e^{-x}$
$\oplus 2$	e^{-x}
0	$-e^{-x}$

$\Rightarrow (-x^2-1-2x-2)e^{-x}+c$

$=(-x^2-2x-3)e^{-x}+c$ elde edilir.

Örnek

$\int (x^2+2x)\cos x dx$ **integralini hesaplayınız.**

T	İ
(+) x^2+2x	$\cos x$
(–) $2x$	$\sin x$
(+) 2	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$\Rightarrow (x^2+2)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

elde edilir.

Örnek

$\int (x^2-1)\sin x dx$ **integralini hesaplayınız.**

T	İ
$\oplus x^2-1$	$\sin x$
$\ominus 2x$	$-\cos x$
$\oplus 2$	$-\sin x$
0	$\cos x$

$\Rightarrow (-x^2+1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$ elde edilir.

Örnek

$\int e^x \sin x dx$ **ve** $\int \sin(\ln x)dx$ **integrallerini hesaplayınız.**

$I = \int e^x \sin x dx = e^x.(-\cos x) - \int(-\cos x).e^x dx$

$\left.\begin{array}{l} e^x = u \Rightarrow e^x dx = du \\ \sin x dx = d\upsilon \Rightarrow -\cos x = \upsilon \end{array}\right\}$

$= -e^x\cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x\cos x + e^x.\sin x - \underbrace{\int \sin x.e^x dx}_{I}$

$e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$

$\cos x dx = d\upsilon \Rightarrow \sin x = \upsilon$

$I = e^x\sin x - e^x\cos x - I \Rightarrow 2I = e^x\sin x - e^x\cos x$

$$I = \frac{e^x\sin x - e^x\cos x}{2}$$

$\int \sin(\ln x)dx$ için

$\left.\begin{array}{l} x = e^t \\ dx = e^t dt \end{array}\right\} \int e^t \sin t dt = \frac{e^t\sin t - e^t\cos t}{2} + c$

Örnek

$\int x^5.e^{x^3}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\int x^2.x^3e^{x^3}dx = \int \frac{ue^u}{3}du$

$= \frac{1}{3}\left[ue^u - \int e^u du\right]$

$\left.\begin{array}{l} x^3 = u \\ 3x^2dx = du \end{array}\right\}$

$= \frac{1}{3}.[ue^u - e^u + c] = \frac{1}{3}[x^3e^{x^3} - e^{x^3} + c]$

elde edilir.

	T	İ
(+)	u	e^u
(−)	1	e^u
	0	e^u

Örnek

$\int \log_2 x dx$ integralini hesaplayınız.

$\int \frac{\ln x}{\ln 2}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \ln x dx = \frac{1}{\ln 2}.(x\ln x - x) + c$ elde edilir.

d) Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri

Özdeşlik Yardımıyla Hesaplanabilen İntegraller

Örnek

$\int \sin^2 x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}.\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$

Örnek

$\int \cos^2 x dx$ integralini hesaplayınız.

$\Rightarrow \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}.\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$

Örnek

$\int \sqrt{1+\cos 4x}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\boxed{\cos 2a = 2\cos^2 a - 1} \Rightarrow \int \sqrt{1 + 2\cos^2(2x) - 1}\,dx$

$= \int \sqrt{2}.\cos 2x dx = \sqrt{2}.\frac{\sin 2x}{2} + c$

Örnek

$\int \sqrt{\mathbf{1 - \cos 6x}}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\boxed{\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a} \Rightarrow \int \sqrt{1 - (1 - 2\sin^2(3x))}\,dx$

$= \int \sqrt{2\sin^2(3x)}\,dx$

$= \int \sqrt{2}.\sin(3x)dx = \sqrt{2}.\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) + c$

Örnek

$\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\left.\begin{array}{l} 1 = \cos^2 x + \sin^2 x \\ \sin 2x = 2\sin x\cos x \end{array}\right\}$

$\int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x}\,dx$

$= \int \sqrt{(\cos x + \sin x)^2}\,dx$

$= \int (\cos x + \sin x)dx = \sin x - \cos x + c$

Örnek

$\int \sqrt{\mathbf{1 - \sin 2x}}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\left.\begin{array}{l} 1 = \cos^2 x + \sin^2 x \\ \sin 2x = 2\sin x\cos x \end{array}\right\} \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x}\,dx$

$= \int \sqrt{(\cos - \sin x)^2}\,dx$

$= \int (\cos x - \sin x)dx = \sin x + \cos x + c$

■ $\int \sin^m x.\cos^n x dx$ **tipindeki ingeraller**

Örnek

$\int \sin^3 x.\cos^2 x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int \sin^2 x.\cos^2 x.\sin x dx = \int (1-\cos^2 x).\cos^2 x.\sin x dx$$

$\left.\begin{array}{l}\cos x = u \\ -\sin x dx = du\end{array}\right\}$

$$= \int (1-u^2).u^2.(-du)$$

$$= \int (u^4-u^2)du = \frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+c$$

$$= \frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+c$$

Örnek

$\int \cos^4 x.\sin^3 x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\int \cos^4 x.\sin^2 x.\sin x dx = \int \cos^4 x.(1-\cos^2 x).\sin x dx$

$\left.\begin{array}{l}\cos x = u \\ -\sin x dx = du\end{array}\right\}$ $\int u^4.(1-u^2).(-du)$

$$= \int (u^6-u^4)du = \frac{u^7}{7}-\frac{u^5}{5}+c$$

$$= \frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+c$$

Örnek

$\int \cos^5 x dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \cos^4 x.\cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx$$

$\left.\begin{array}{l}\sin x = u \\ \cos x dx = du\end{array}\right\}$ $\int (1-u^2)^2 du = \int (1-2u^2+u^4)du$

$$= u-\frac{2u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+c$$

$$= \sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+c$$

Örnek

$\int \sin^5 x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\int \sin^4 x.\sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^2.\sin x dx$

$\cos x = u \Rightarrow -\sin x dx = du$

$$\Rightarrow \int (1-u^2)^2.(-du) = \int (1-2u^2+u^4)(-du)$$

$$= \int (-u^4+2u^2-1)du = -\frac{u^5}{5}+2\frac{u^3}{3}-u+c$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5}+2.\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+c \text{ bulunur.}$$

■ $\int \sin ax.\sin bx dx, \int \sin ax.\cos bx dx, \int \cos ax.\cos bx\, dx$

Tipindeki İntegraller

Bu tip integralleri çözmek için;

$$\sin ax.\sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x]$$

$$\sin ax.\cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x]$$

$$\cos ax.\cos bx = \frac{1}{2}.[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x]$$

bağıntıları kullanılır.

Örnek

$\int \cos 3x.\cos 2x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int \cos 3x.\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int [\cos x+\cos 5x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin x+\frac{\sin 5x}{5}+c\right]$$

Örnek

$\int \sin 5x.\sin 2x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int \sin 5x.\sin 2x dx = \frac{1}{2}\int [\cos 3x-\cos 7x]dx$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 7x}{7}\right]+c$$

Örnek

$\int \sin 6x.\cos 2x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int \sin 6x.\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int [\sin 4x + \sin 8x]dx$$
$$= \frac{1}{2}.\left[-\frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 8x}{8}\right] + c$$

■ $\int \tan^m x.\sec^n x dx$ **Tipindeki İntegraller**

Örnek

$\int \tan^4 x.\sec^4 x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int \tan^4 x(1+\tan^2 x).\sec^2 x dx = \int u^4.(1+u^2).du$$

$\left.\begin{array}{l}\tan x = u \\ \sec^2 x dx = du\end{array}\right\}$

$$= \int (u^6 + u^4)du$$
$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^4}{5} + c$$
$$= \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^5 x}{5} + c$$

 # Kural

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$
$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\ln|\operatorname{cosec} x + \cot x| + c$$

Örnek

$\int \tan^7 x\ .\ \sec^4 x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\int \tan^7 x\ .\ \sec^2 x\ .\ \sec^2 x dx = \int \tan^7 x\ .\ (1 + \tan^2 x)\ .\ \sec^2 x dx$

$\left.\begin{array}{l}\tan x = u \\ \sec^2 x dx = du\end{array}\right\} \int u^7.(1+u^2)du = \int (u^7 + u^9)du$

$$= \frac{u^8}{8} + \frac{u^{10}}{10} + c = \frac{\tan^8 x}{8} + \frac{\tan^{10} x}{10} + c$$

e) Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri

Örnek

$\int \frac{x}{x^2 - 2x - 3}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow Ax + A + Bx - 3B = x$$
$$\underbrace{(A+B)}_{1}x + \underbrace{(A-3B)}_{0} = x$$

$$\begin{array}{r} A+B=1 \\ -/\ A-3B=0 \\ \hline 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{3}{4}\end{array}$$

$$\int \left(\frac{3}{4}.\frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{4}.\frac{1}{(x+1)}\right)dx$$
$$= \frac{3}{4}\ln(x-3) + \frac{1}{4}\ln(x+1) + c$$

Örnek

$\int \frac{2}{x^2-4}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow Ax + 2A + Bx - 2B = 2$$
$$\underbrace{(A+B)}_{0}x + \underbrace{(2A-2B)}_{2} = 2$$

$$\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \\ \hline \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l}A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2}\end{array}\right\} \int \left(\frac{1}{2}.\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{2}.\frac{1}{(x+2)}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x+2) + c$$

Örnek

$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int \frac{du}{u^2 - 3u + 2} = \int \left(\frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+2}\right)du$$

$\left.\begin{array}{l}e^x = u \\ e^x dx = du\end{array}\right\}$ $Au - 2A + Bu - B = 1$

$$\underbrace{(A+B)}_{0}u + \underbrace{(-2A-B)}_{1} = 1$$

$\left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ -2A-B=1 \\ \hline -A=1 \\ A=-1 \\ B=1\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\int \left[-\frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-2}\right]du \\ = -\ln(u-1) + \ln(u-2) + c \\ = \ln\left(\frac{e^x-2}{e^x-1}\right) + c\end{array}$

Örnek

$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 4\sin x + 3}$ **integralini hesaplayınız.**

$\left.\begin{array}{l}\sin x = u \\ \cos x dx = du\end{array}\right\} \int \frac{du}{u^2+4u+3} = \int \left[\frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+3}\right] du$

$Au + 3A + Bu + B = 1$

$\underbrace{(A+B)}_{0}u + \underbrace{(3A+B)}_{1} = 1$

$-A - B = 0$

$\underline{3A + B = 1}$

$A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$

$= \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+3}\right) du$

$= \frac{1}{2}\ln(u+1) - \frac{1}{2}\ln(u+3) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin x + 1}{\sin x + 3}\right) + c$

Örnek

$\int \frac{x^3}{x+1} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x+1 \\ \underline{\mp x^3 \mp x^2} & x^2 - x + 1 \\ -x^2 & \\ \underline{\pm x^2 \pm x} & \\ x & \\ \underline{\mp x \mp 1} & \\ 1 & \end{array}$$

$\int \left[(x+1) + \frac{1}{(x^2-x+1)}\right] dx$

$= \int \left[(x+1) + \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right] dx$

$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan\left(\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$

Örnek

$\int \frac{2x+7}{x^2-4x+13} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13} dx + \int \frac{11}{x^2-4x+13} dx = \int \frac{du}{u} + \int \frac{11}{(x-2)^2+9} dx$

$\left.\begin{array}{l} x^2 - 4x + 13 = u \\ (2x-4)dx = du \end{array}\right\}$

$= \ln u + 11.\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + c$

$= \ln(x^2 - 4x + 13) + \frac{11}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + c$

3– Belirli İntegral

a) İntegral Fonksiyonunun Türevi

Kurallar (Leibniz Formülü)

- f: [a, b] → IR fonksiyonu integrallenebilir olsun.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

- $u(x)$ ve $\vartheta(x)$, x'e göre türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$F(x) = \int_{u(x)}^{\vartheta(x)} f(t)dt \text{ ise } F'(x) = f(\vartheta(x)).\vartheta'(x)) - f(u(x)).u'(x)$$

$$F(x) = \int_a^{\vartheta(x)} f(t)dt \text{ ise } F'(x) = f(\vartheta(x)).\vartheta'(x)$$

şeklindedir.

Örnek

$F(x) = \int_{x^2}^{3x+5} e^{t^2} dt$ **ise $F'(1)$ nedir?**

$F'(x) = e^{(3x+5)^2}.(3x+5)' - e^{(x^2)^2}.(x^2)'$

$= e^{(3x+5)^2}.3 - 2xe^{x^4} \Rightarrow F'(1) = 3e^{64} - 2e$

Örnek

$F(x) \int_{2x+1}^{x^2} \sin(t^2)dt$ ise $F^I(1)$ nedir?

$F^I(x) = \sin((x^2)^2) . (x^2)^I - \sin((2x+1)^2) . (2x+1)^I$

$= 2x . \sin(x^4) - 2 . \sin[(2x+1)^2]$

$F^I(1) = 2\sin 1 - 2\sin 9$ elde edilir.

Örnek

$F(x) = \int_{3}^{x} e^{-t^2} dt$ ise $\frac{F^{II}(x)}{F^{I}(x)}$ nedir?

$$\left.\begin{array}{l} F^I(x) = e^{-x^2} \\ F^{II}(x) = (-2x)e^{-x^2} \end{array}\right\} \frac{(-2x)e^{-x^2}}{e^{-x^2}} = -2x \text{ elde edilir.}$$

Örnek

$F(x) = \int_{5}^{x} \cos(t^2)dt$ ise $\frac{F^{II}(x)}{F^{I}(x)}$ nedir?

$$\left.\begin{array}{l} F^I(x) = \cos(x^2) \\ F^{II}(x) = -\sin(x^2).2x \end{array}\right\} \frac{(-2x)\sin(x^2)}{\cos(x^2)} = (-2x)\tan(x^2)$$

Örnek

$\frac{d}{dx}\left[\int_{3}^{2x} \sqrt{t^2+3t}\, dx\right]$ nedir?

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{3}^{2x} \sqrt{t^2+3t}\, dt\right] = \sqrt{(2x)^2+3.(2x)}\,.(2x)^I$$

$= \sqrt{4x^2+6x}\,.2$ elde edilir.

Örnek

$\frac{d}{dx}\left[\int_{5}^{x^2} \sqrt{t^3+t}\, dt\right]$ nedir?

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{5}^{x^2} \sqrt{t^3+t}\, dt\right] = \sqrt{x^6+x^2}\,.(x^2)^I$$

$= 2x\sqrt{x^6+x^2}$ elde edilir.

Örnek

$f(x) = \int_{2}^{2x} \ln(t^2+1)dt$ **eğrisinin x = 1 apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?**

$f^I(x) = \ln(4x^2 + 1) . 2$

$f^I(1) = \ln(5) . 2 = 2\ln 5 = m$

Örnek

$f(x) = \int_{4}^{\ln x} (t^2+2)dt$ eğrisinin x=e apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

$$f^I(x) = \left((\ln x)^2+2\right).\frac{1}{x}\Big|_{x=e} = (1+2).\frac{1}{e} = \frac{3}{e}$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{cosec}^3 x . \int\limits_0^x \frac{t^2}{t^5+1} dt$ **integralinin değeri nedir?**

$$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \frac{t^2}{t^5+1} dt}{\sin^3 x} = \frac{0}{0} \text{ var. L'Hospital uygulanır.}$$

$$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{x^5+1}}{3\sin^2 x . \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{x^2}{3\sin^2 x}}_{=1} \cdot \frac{1}{\cos x.(x^5+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ elde edilir.}$$

Örnek

$\lim\limits_{x\to 0}$ **cosec**^{4}**x.** $\int\limits_0^{x^2} \frac{t}{t^3+1}$**dt integralinin değeri nedir?**

$$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \frac{t}{t^3+1} dt}{\sin^4 x} = \frac{0}{0} \text{ var. L.' Hospital uygulanır.}$$

$$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{x^6+1} \cdot 2x}{4\sin^3 x . \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3}{4\sin^3 x} \cdot \frac{1}{x.(x^6+1).\cos x}$$

$$= \frac{2}{4.1.1} = \frac{1}{2} \text{ elde edilir.}$$

Örnek

$F(x) = \int\limits_{\sin x}^{\ln x} (t^2+1)dt$ **ise F'(1) nedir?**

$F'(x) = [(\ln x)^2 + 1]. \frac{1}{x} - [(\sin x)^2 + 1].\cos x$

$F'(1) = 1 - [(\sin 1)^2 + 1].\cos 1$ elde edilir.

b) Belirli İntegral

f, [a, b] üzerinde sınırlı bir fonksiyon ise aşağıdakiler gerçeklenir:

(I) f sürekli ise integrallenibilir.
(II) f parçalı sürekli ise integrallenebilir.
(III) f monoton ise integrallenebilinir.

İntegral Hesabın Temel Teoremi

f, [a, b]'de tanımlı ve integrallenebilir olsun.

$\forall x \in (a, b)$ için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde bir $F : [a, b] \to IR$ var ise

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ olur. (Newton–Leibniz Formülü)

Kural:

$f : [a, b] \to IR$ ve integrallenibilir ise

- $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$
- $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$
- $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

Örnek

$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{1}{2}.(e^{2\ln 3} - e^{2\ln 2})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\ln 9} - e^{\ln 4}) = \frac{1}{2}(9-4) = \frac{5}{2}$$

Örnek

$\int\limits_1^{(e^3-2)} \frac{dx}{x+2}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int\limits_1^{e^3-2} \frac{dx}{x+2} = \ln(x+2)\Big|_1^{e^3-2} = \ln(e^3) - \ln 3$$

$$= 3 - \ln 3$$

Örnek

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}.\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-0\right] = \frac{\pi}{4}$$

elde edilir.

Örnek

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-0\right] = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$ elde edilir.

Örnek

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x.\sin^2 x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin^2 x.\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x).\sin^2 x.\cos x dx$$

$\left.\begin{array}{l}\sin x = u\\ \cos x dx = du\end{array}\right\}$

$$= \int_0^1 (1-u^2).u^2.du = \int_0^1 (u^2-u^4)du$$

$$= \left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$$

Örnek

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\left.\begin{array}{l}\cos x = u\\ -\sin x dx = du\end{array}\right\}$ $\int_1^0 \frac{(-du)}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$

$$\arctan u\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Örnek

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2.\sin x dx$ **integralini hesaplayınız.**

T	İ
(+) x^2	$\sin x$
(−) $2x$	$-\cos x$
(+) 2	$-\sin x$
0	$\cos x$

$$(-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(2\frac{\pi}{2}\right)-(2) = \pi - 2$$ elde edilir.

Örnek

$\int_0^1 (x^2+1)e^x dx$ **integralini hesaplayınız.**

T	İ
⊕ x^2+1	e^x
⊖ $2x$	e^x
⊕ 2	e^x
0	e^x

$$(x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x\Big|_0^1$$

$= (2e - 2e + 2e) - (1+2)$

$= 2e - 3$ elde edilir.

Örnek

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x.\sec^2 x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}\tan x = u\\ \sec^2 x dx = du\end{array}\right\} \int_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Örnek

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cot\theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}\theta}} d\theta$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{\frac{-1}{2}}\theta.\cos\theta d\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta = u\\ \cos\theta d\theta = du\end{array}\right\} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^{-\frac{1}{2}}.du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= 2\sqrt{u}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$ elde edilir.

Örnek

$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}2+\ln x = u\\ \frac{dx}{x} = du\end{array}\right\} \int_2^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}\Big|_2^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2}$$

Örnek

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}x = \sin t\\ dx = \cos t dt\end{array}\right\} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}.\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-0\right] = \frac{\pi}{4}$$

Örnek

$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}x+2 = u^2\\ dx = 2udu\end{array}\right\} \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{(u^2-2)^2}{u}.2udu = 2\int_{\sqrt{2}}^2 (u^4-4u^2+4)du$$

ile bulunur.

Örnek

$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+(x^3)^2}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\arctan u\Big|_0^1$$

$$\left.\begin{array}{l}x^3 = u\\ 3x^2 dx = du\end{array}\right\} \begin{array}{l}= \frac{1}{3}(\arctan 1 - \arctan 0)\\ = \frac{\pi}{12}\end{array}$$

Örnek

$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\Big|_1^2$

$= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$

Örnek

$\int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{5+2x+x^2}}$ **integralini hesaplayınız.**

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{4+(x+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{2}.[\arctan 1 - \arctan 0]$

$= \frac{\pi}{8}$ elde edilir.

Örnek

$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\left.\begin{array}{l} x = \sin^2 t \\ dx = 2\sin t \cos t dt \end{array}\right\} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}}.2.\sin t \cos t dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin^2 t.\cos t dt}{\cos t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2t)dt$

$= \left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Örnek

$\int_0^3 \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{1+\sqrt{2x+3}}}$ **integralini hesaplayınız.**

$\left.\begin{array}{l} 2x+3 = u^2 \\ 2dx = 2udu \end{array}\right\} \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{udu}{1+u} = \int_{\sqrt{3}}^{3} \left(1 - \frac{1}{u+1}\right)du$

$= [u - \ln(u+1)]\Big|_{\sqrt{3}}^{3} = (3 - \ln 4) - (\sqrt{3} - \ln(\sqrt{3}+1))$

$= (3-\sqrt{3}) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)$

Örnek

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$1 + \tan x = u \Rightarrow (1 + \tan^2 x)dx = du$

$\int_1^2 \frac{du}{u} = \ln u \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Örnek

$\int_1^e \frac{\mathbf{\cos(\ln x)}}{\mathbf{x}}\mathbf{dx}$ **integralini hesaplayınız.**

$\left.\begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{array}\right\} \int_0^1 (\cos u)du = \sin u\Big|_0^1$

$= \sin 1 - \sin 0$

$= \sin 1$

Örnek

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3\tan^2 x + 4} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x dx}{4 + 3\tan^2 x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan x = u \\ \sec^2 x dx = du \end{array}\right\} \int\limits_0^1 \frac{du}{4+3u^2} = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{du}{\frac{4}{3}+u^2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \arctan\left(\frac{u}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ elde edilir.}$$

Örnek

$\int\limits_2^5 x-4 \, dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int\limits_2^4 (4-x)dx + \int\limits_4^5 (x-4)dx = \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4 + \left(\frac{x^2}{2} - 4x\right)\Bigg|_4^5$$

$$= (16-8) - (8-2) + \left(\frac{25}{2} - 20\right) - (8-16)$$

$$= 8 - 6 - \frac{15}{2} + 8 = 10 - \frac{15}{2} = \frac{5}{2}$$

Örnek

$\int\limits_{-2}^{3} \dfrac{|x|}{x} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int\limits_{-2}^{0} \frac{(-x)}{x} dx + \int\limits_0^3 \frac{x}{x} dx = \int\limits_{-2}^{0} (-dx) + \int\limits_0^3 dx = (-x)\Big|_{-2}^{0} + x\Big|_0^3$$

$$= 0 - (2) + 3 - 0 = 1$$

Örnek

$\int\limits_{-3}^{4} x^2 - 2x - 3 \, dx$ **integralini hesaplayınız.**

$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right\}$$

		-1		3	
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow \int\limits_{-3}^{-1} (x^2 - 2x - 3)\,dx - \int\limits_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)dx + \int\limits_3^4 (x^2 - 2x - 3)dx$$

ile hesaplarız.

Örnek

$\int\limits_{-1}^{2} x.\, x - 1 \, dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int\limits_{-1}^{1} x.(1-x)dx + \int\limits_1^2 x.(x-1)dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (x - x^2)dx + \int\limits_1^2 (x^2 - x)dx \text{ ile hesaplarız.}$$

Örnek

$\int\limits_0^3 x^2.|x-2|dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int\limits_0^2 x^2.(2-x)dx + \int\limits_2^3 x^2.(x-2)dx$$

$$= \int\limits_0^2 (2x^2 - x^3)dx + \int\limits_2^3 (x^3 - 2x^2)dx \text{ ile hesaplarız.}$$

Örnek

$\int_0^3 4x.\text{sgn}(x-1)dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_0^1 4x.(-1)dx+\int_1^3 4x.1.dx=\int_0^1(-4x)dx+\int_1^3(4x)dx$$
$$=(-2x^2)\Big|_0^1+(2x^2)\Big|_1^3$$
$$=(-2)+(18-2)=14 \text{ elde edilir.}$$

Örnek

$\int_{-2}^{2}$ **x.sgnxdx integralini hesaplayınız.**

$$\int_{-2}^{0} x.(-1)dx+\int_0^2 x.1dx=\int_{-2}^{0}(-x)dx+\int_0^2 xdx$$
$$=\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$
$$=0-(-2)+2-0=4 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$\int_{-1}^{4}\text{sgn}(x^2+2x-3)dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned}x^2+2x-3=(x+3)(x-1)&=0\\ x&=-3\\ x&=1\end{aligned}\right\}$$

	-3		1	
+		−		+

$$\int_{-1}^{1}(-1)dx+\int_1^4(1)dx=(-x)\Big|_{-1}^{1}+x\Big|_1^4=(-1)-(1)+4-1$$
$$=-2+3=1$$

Örnek

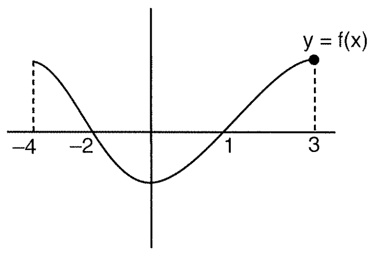
$\int_{-3}^{5}\textbf{sgn}(\mathbf{x^2-4x+3})\mathbf{dx}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned}x^2-4x+3=(x-1)(x-3)&=0\\ x&=1\\ x&=3\end{aligned}\right\}$$

	1		3	
+		−		+

$$\int_{-3}^{5}\text{sgn}(x^2-4x+3)dx=\int_{-3}^{1}1dx+\int_1^3(-1)dx+\int_3^5 1dx$$
$$=x\Big|_{-3}^{1}+(-x)\Big|_1^3+x\Big|_3^5$$
$$=1-(-3)+(-3)-(-1)+5-3=4-2+2=4$$

Örnek



Verilen şekle göre $\int_{-4}^{3}\text{sgnf}(x)dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_{-4}^{-2}1dx+\int_{-2}^{1}(-1)dx+\int_1^3 1dx=x\Big|_{-4}^{-2}+(-x)\Big|_{-2}^{1}+x\Big|_1^3$$
$$=(-2)-(-4)+(-1)-(2)+3-1$$
$$=2-3+2=1 \text{ elde edilir.}$$

Örnek

$\int_0^3 [\,x\,]dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^1 0dx+\int_1^2 1dx+\int_2^3 2dx = x\Big|_1^2+(2x)\Big|_2^3 = 2-1+6-4=3$$

Örnek

$\int_1^4 x.[\![x]\!]dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_1^2 xdx+\int_2^3 2xdx+\int_3^4 3xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2+x^2\Big|_2^3+3\frac{x^2}{2}\Big|_3^4$$

$$=2-\frac{1}{2}+9-4+24-\frac{27}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+5+\frac{21}{2}=17$$

Örnek

$\int_1^6 \left[\frac{x}{2}\right]dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_1^2 0dx+\int_2^4 1dx+\int_4^6 2dx = x\Big|_2^4+(2x)\Big|_4^6$$

$$=4-2+12-8=2+4=6$$

Örnek

$\int_2^9 \left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_2^3 0dx+\int_3^6 1dx+\int_6^9 2dx = x\Big|_3^6+(2x)\Big|_6^9 = 6-3+18-12$$

$$=3+6=9$$

Örnek

$\int_0^3 x^{[\,x\,]}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_0^1 x^0dx+\int_1^2 x^1dx+\int_2^3 x^2dx = \int_0^1 dx+\int_1^2 xdx+\int_2^3 x^2dx$$

$$=x\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+\frac{x^3}{3}\Big|_2^3=\underset{(6)}{\frac{1}{1}}+\underset{(3)}{\frac{3}{2}}+\underset{(2)}{\frac{19}{3}}=\frac{6+9+38}{6}=\frac{53}{6}$$

Örnek

$\int_1^4 (2x)^{[\![x]\!]}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_1^2 (2x)^1dx+\int_2^3 (2x)^2dx+\int_3^4 (2x)^3dx$$

$$=\int_1^2 (2x)dx+\int_2^3 (4x^2)dx+\int_3^4 (8x^3)dx$$

$$=x^2\Big|_1^2+\frac{4x^3}{3}\Big|_2^3+(2x^4)\Big|_3^4$$

$$=3+\frac{76}{3}+350=353+\frac{76}{3}=\frac{1135}{3}$$

Kural

f: [–a, a] → IR fonksiyonu sürekli olsun.

(I) f tek bir fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

(II) f çift bir fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(III) f periyodik bir fonksiyon ve periyot T ise

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx$$

Örnek

$\int_{-5}^{5} x^5 \cos x dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^5 \cos x \\ f(-x) &= (-x)^5 \cos(-x) = -x^5 \cos x = -f(x) \end{aligned}\right\} \text{f(x), tek fonksiyon}$$

$$\int_{-5}^{5} x^5 . \cos x dx = 0$$

Örnek

$\int_{-3}^{3} \mathbf{x^4 . \sin x dx}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^4 \sin x \\ f(-x) &= (-x)^4 \sin(-x) = -x^4 \sin x = -f(x) \end{aligned}\right\} \text{f(x) tek fonksiyon}$$

$$\int_{-3}^{3} x^4 \sin x dx = 0$$

Örnek

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 . \sin x}{x^4 + 7} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 \sin x}{x^4 + 7} \\ f(-x) &= \frac{(-x)^2 \sin(-x)}{(-x)^4 + 7} = -\frac{x^2 \sin x}{x^4 + 7} = -f(x) \end{aligned}\right\} \text{f(x) tek fonksiyon}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \sin x}{x^4 + 7} dx = 0$$

Örnek

$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{\frac{x^3}{\cos x + 5} dx}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{\cos x + 5} \\ f(-x) &= \frac{(-x)^3}{\cos(-x) + 5} = -\frac{x^3}{\cos x + 5} = -f(x) \\ \int_{-\pi}^{\pi} &\frac{x^3}{\cos x + 5} dx = 0 \end{aligned}\right\} \text{f(x), tek fonksiyon}$$

Örnek

$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 . \sin x + 1}{x^2+1} dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 \sin x + 1}{x^2+1} \\ f(-x) = \frac{(-x)^2 \sin(-x)+1}{(-x)^2+1} = \frac{-x \sin x + 1}{x^2+1} \end{array}\right\} \text{f(x), ne tek ne çift fonksiyon}$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin x}{x^2+1} dx}_{\substack{\parallel \\ \text{(Tek fonksiyon)}}} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \arctan 1 - \arctan(-1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Örnek

$\int_{-2}^{2} (x^5 + 2x^3 + 1 + x) dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_{-2}^{2} \underbrace{(x^5 + 2x^3)}_{\substack{\text{Tek} \\ \text{fonksiyon}}} dx + \int_{-2}^{2} (\underbrace{x + 1}_{\substack{\text{çift} \\ \text{fonksiyon}}}) dx = 0 + 2\int_{0}^{2} (x+1) dx$$

$$= 2.\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{0}^{2} = 2.[(2+2) - 0] = 8$$

Örnek

$\int_{-1}^{1} (\mathbf{x^7 + x^5 + 2x^3 + x^2 + 2}) \mathbf{dx}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{(x^7 + x^5 + 2x^3)}_{\text{Tek Fonksiyon}} dx + \int_{-1}^{1} \underbrace{(x^2+2)}_{\text{Çift fonksiyon}} dx = 0 + 2\int_{0}^{1} (x^2+2) dx$$

$$= 2.\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{0}^{1} = 2.\left(\frac{1}{3} + 2\right) = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3}$$

c) Bir fonksiyonun bir aralıktaki ortalama değeri

f(x), [a, b] aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$K = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x) dx$ şeklinde tanımlanan

K sayısına f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığındaki **ortalama değeri** denir.

Örnek

f(x) = 2x + 1 fonksiyonunun [1, 3] aralığındaki ortalama değerini hesaplayınız.

$$K = \frac{\int_{1}^{3} (2x+1) dx}{3-1} = \frac{(x^2+x)\Big|_{1}^{3}}{2} = \frac{(9+3)-(1+1)}{2} = 5$$

Örnek

f(x) = x² + 1 fonksiyonunun [0,2] aralığındaki ortalama değerini hesaplayınız.

$$K = \frac{\int_{0}^{2} (x^2+1) dx}{2-0} = \frac{\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{0}^{2}}{2} = \frac{\frac{8}{3}+2}{2} = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

Örnek

f(x) = sinx fonksiyonunun $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz.

$$K = \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{(-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

Örnek

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz.

$$K = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx}{\frac{\pi}{4} - 0} = \frac{(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

d) İntegral yardımıyla bazı limitlerin hesaplanması

f: [a, b] → IR aralığında sürekli olmak üzere;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k.\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Özel olarak [a, b] = [0, 1] aralığı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Örnek

$\lim_{n\to\infty} \frac{1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6}{n^7}$ **limitini hesaplayınız.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\left[\left(\frac{1}{n}\right)^6 + \left(\frac{2}{n}\right)^6 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^6\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^6 = \int_0^1 x^6\,dx = \frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{1}{7}$$

Örnek

$\lim_{n\to\infty} \frac{1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + n^7}{n^8}$ **limitini hesaplayınız.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^7 + \left(\frac{2}{n}\right)^7 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^7\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^7 = \int_0^1 x^7\,dx$$

$$= \frac{x^8}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

Örnek

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n}{n}}}{n}$ **limitini hesaplayınız.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\left[e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n}{n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1$$

Örnek

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + 3e^{\frac{3}{n}} + \ldots + ne^{\frac{n}{n}}}{n^2}$ **limitini hesaplayınız.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\left[\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}} + \frac{2}{n}e^{\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{n}{n}e^{\frac{n}{n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 xe^x\,dx = (x-1)e^x\Big|_0^1$$

$$= 0 - (-1) = 1$$

Örnek

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + 2\sin\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + n\sin\left(\frac{n}{n}\right)}{n^2}$$

limitini hesaplayınız.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\left[\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{2}{n}\right)\sin\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)\sin\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x\sin x\,dx = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^1$$

$$= (-\cos 1 + \sin 1) - (0 + 0)$$

$$= \sin 1 - \cos 1$$

	T	İ
+	x	sinx
−	1	−cosx
	0	−sinx

Örnek

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)}{n}$ **limitini hesaplayınız.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\int_0^1\cos(\pi x)dx=\left.\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right|_0^1$$

$$=0$$

Örnek

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\sqrt[n]{3+\frac{k}{n}}$ **limitini hesaplayınız.**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3+\frac{k}{n}\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\ln(3+x)dx$$

$$=\left.[(3+x).\ln(3+x)-(3+x)]\right|_0^1$$

$$=(4\ln4-4)-(3\ln3-3)=\ln\left(\frac{256}{27}\right)-1$$

elde edilir.

Örnek

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{1+n^2}+\dfrac{n}{4+n^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$ **limitini hesaplayınız.**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+n}+\frac{1}{\frac{4}{n}+n}+\ldots+\frac{1}{\frac{n^2}{n}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\frac{1}{n^2}+1}+\frac{1}{\frac{4}{n^2}+1}+\ldots\frac{1}{\frac{n^2}{n^2}+1}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\arctan x\Big|_0^1=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

Kural:

f, [a, b] üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ise

(I) $\forall x\in[a, b]$ için $f(x)\geqslant 0$ ise $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ 'dır.

(II) $\forall x\in[a, b]$ için $f(x)\leqslant g(x)$ ise $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$ 'dir.

(III) $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|\,dx$

Örnek

$\int_1^2\sqrt{1+x^6}\,dx$ **integralinin değeri hangi aralıktadır?**

$x\geqslant 1 \Rightarrow x^6\leqslant 1+x^6\leqslant x^6+x^6$

$x^3\leqslant\sqrt{1+x^6}\leqslant\sqrt{2}x^3$

$$\int_1^2 x^3dx\leq\int_1^2\sqrt{1+x^6}\,dx\leq\int_1^2\sqrt{2}x^3$$

$$\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2\leq\qquad\leq\sqrt{2}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2$$

$$\frac{15}{4}\leq\qquad\leq\frac{\sqrt{2}.15}{4}$$

$\left[\frac{15}{4},\frac{15\sqrt{2}}{4}\right]$

aralığı

Örnek

$\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(x^3)dx$ **integralinin en küçük üst sınırını bulunuz.**

$$\left.\begin{array}{l}\sin x\leq x\\ \sin(x^3)\leq x^3\end{array}\right\}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(x^3)dx\leq\int_0^{\frac{1}{2}}x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{64}$$

Örnek

$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x.\sin(x^2)dx$ **integralinin en küçük üst sınırını bulunuz.**

$$\left.\begin{array}{l}\sin x \le x \\ \sin(x^2) \le x^2\end{array}\right\} \quad \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x.\sin(x^2)dx \le \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^3dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{64}$$

Örnek

$\int\limits_0^1 \frac{x^3}{1+x^9}dx$ **integrali hangi aralıktadır?**

$0 \leqslant x \leqslant 1$

$0 \leqslant x^9 \leqslant 1$

$1 \leqslant 1 + x^9 \leqslant 2$

$\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x^9} \le 1$

$\frac{x^3}{2} \le \frac{x^3}{1+x^9} \le x^3$

$\int\limits_0^1 \frac{x^3}{2}dx \le \int\limits_0^1 \frac{x^3}{1+x^9}dx \le \int\limits_0^1 x^3dx$

$\frac{1}{8} \le \qquad\qquad \le \frac{1}{4} \Rightarrow \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$ aralığı

Örnek

$\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^5}dx$ **integrali hangi aralıktadır?**

$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^5 \le 1 \Rightarrow 1 \le 1 + x^5 \le 2$

$\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x^5} \le 1$

$\int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}dx \le \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^5}dx \le \int\limits_0^1 x^2dx$

$\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ aralığı $\quad \Leftarrow \quad \frac{1}{6} \le \qquad\qquad \le \frac{1}{3}$

Bazı özel belirli integral soruları

Örnek

$\int\limits_1^9 [\,x\,]dx + \int\limits_1^9 [\,-x\,]dx$ **integralinin değeri nedir?**

$\int\limits_1^9 ([\,x\,]+[\,-x\,])dx$ için

$1 < x < 2$ için $\quad [|x|] + [|-x|] = 1 - 2 = -1$

$2 < x < 3$ için $\quad [|x|] + [|-x|] = 2 - 3 = -1$

$$\int\limits_1^9 ([\,x\,]+[\,-x\,])dx = \int\limits_1^9 (-1)dx = (-x)\Big|_1^9 = (-9)-(-1) = -8$$

Örnek

$\int\limits_0^6 [\![x]\!]dx + \int\limits_0^6 [\![-x]\!]dx$ **integralinin değeri nedir?**

$0 < x < 1 \Rightarrow [\![x]\!] + [\![-x]\!] = 0 - 1 = -1$

$1 < x < 2 \Rightarrow [\![x]\!] + [\![-x]\!] = 1 - 2 = -1$

$$\int\limits_0^6 ([\![x]\!]+[\![-x]\!])dx = \int\limits_0^6 (-1)dx = (-x)\Big|_0^6 = -6$$

Örnek

$\int\limits_0^{10} [\,x\,]dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 0dx + \int\limits_1^2 1dx + \int\limits_2^3 2dx + \ldots + \int\limits_9^{10} 9dx$$

$$= 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = \frac{9.10}{2} = 45$$

Örnek

$\int\limits_0^{15} [\![x]\!]dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 0dx + \int\limits_1^2 1dx + \int\limits_2^3 2dx + \ldots + \int\limits_{14}^{15} 14dx$$

$= 0 + 1 + 2 + \ldots + 14 = \dfrac{14.15}{2} = 105$ elde edilir.

Örnek

$\int\limits_0^{16} [\sqrt{x}]dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int\limits_0^1 0dx + \int\limits_1^4 1dx + \int\limits_4^9 2dx + \int\limits_9^{16} 3dx$$

$$= \underbrace{\int\limits_0^1 0dx}_{\|} + \underbrace{\int\limits_1^4 1dx} + \int\limits_4^9 2dx + \int\limits_9^{16} 3dx$$

$$= 0 + x\Big|_4^1 + (2x)\Big|_4^9 + (3x)\Big|_9^{16}$$

$= (4 - 1) + (18 - 8) + (48 - 27) = 3 + 10 + 21 = 34$

Örnek

$\int\limits_0^{25} [\![\sqrt{x}]\!]dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\underbrace{\int\limits_0^1 0dx}_{\|} + \int\limits_1^4 1dx + \int\limits_4^9 2dx + \int\limits_9^{16} 3dx + \int\limits_{16}^{25} 4dx$$

$$= 0 + x\Big|_1^4 + (2x)\Big|_4^9 + (3x)\Big|_9^{16} + (4x)\Big|_{16}^{25}$$

$= (4 - 1) + (18 - 8) + (48 - 27) + (100 - 64)$

$= 3 + 10 + 21 + 36 = 70$

Örnek

$\int\limits_0^1 x^2(1-x)^6dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{array}{l}1 - x = u\\ -dx = du\end{array}\right\} \int\limits_1^0 (1-u)^2.u^6(-du) = \int\limits_0^1 u^6(1-u)^2du$$

$$= \int\limits_0^1 u^6.(1 - 2u + u^2)du = \int\limits_0^1 (u^6 - 2u^7 + u^8)du$$

$$= \left(\frac{u^7}{7} - 2\frac{u^8}{8} + \frac{u^9}{9}\right)\Big|_0^1 = \underset{(36)}{\frac{1}{7}} - \underset{(63)}{\frac{1}{4}} + \underset{(28)}{\frac{1}{9}} = \frac{36 - 63 + 28}{252} = \frac{1}{252}$$

Örnek

$\int_0^1 x^2(1-x)^8 dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned}1-x&=u\\-dx&=du\end{aligned}\right\}\int_1^0 (1-u)^2.u^8(-du)=\int_0^1 u^8(1-u)^2du$$

$$\int_0^1 u^8.(1-2u+u^2)du=\int_0^1 (u^8-2u^9+u^{10})du$$

$$=\left(\frac{u^9}{9}-\frac{2u^{10}}{10}+\frac{u^{11}}{11}\right)\Bigg|_0^1=\underset{(55)}{\frac{1}{9}}-\underset{(99)}{\frac{1}{5}}+\underset{(45)}{\frac{1}{11}}$$

$$=\frac{55-99+45}{495}$$

$$=\frac{1}{495}$$

Örnek

$\int_0^1 x^3.(1-x^2)^8 dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned}x&=\sin u\\dx&=\cos u du\end{aligned}\right\}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3u.\cos^{16}udu$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u.(1-\cos^2u).\cos^{16}udu$$

$$\left.\begin{aligned}\cos u&=t\\-\sin udu&=dt\end{aligned}\right\}\int_1^0 (1-t^2).t^{16}(-dt)=\int_0^1 t^{16}.(1-t^2)dt$$

$$=\int_0^1 (t^{16}-t^{18})dt=\left(\frac{t^{17}}{17}-\frac{t^{19}}{19}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{17}-\frac{1}{19}=\frac{2}{323}$$

Örnek

$\int_0^1 x^3.(1-x^2)^6 dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned}x&=\sin u\\dx&=\cos u du\end{aligned}\right\}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3u.\cos^{12}udu=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u.(1-\cos^2u).\cos^{12}udu$$

$$\left.\begin{aligned}\cos u&=t\\-\sin udu&=dt\end{aligned}\right\}\int_1^0 (1-t^2).t^{12}.(-dt)=\int_0^1 t^{12}.(1-t^2)dt$$

$$=\int_0^1 (t^{12}-t^{14})dt=\left(\frac{t^{13}}{13}-\frac{t^{15}}{15}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{13}-\frac{1}{15}=\frac{2}{195}$$

Örnek

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6x\,dx}{\sin^6x+\cos^6x}$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{\pi}{2}-u\\dx&=-du\end{aligned}\right\}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^6u}{\cos^6u+\sin^6u}(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6x}{\cos^6x+\sin^6x}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6x}{\sin^6x+\cos^6x}dx=I$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6x}{\cos^6x+\sin^6x}dx=I$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=2I \Rightarrow \frac{\pi}{2}=2I \Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

Pratik Yol

$$\boxed{\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\frac{a}{2}} \Rightarrow \text{Dolayısıyla bu soru için}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4} \text{ olur.}$$

Örnek

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}}dx \textbf{ integralini hesaplayınız.}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\pi}{2}-u \\ dx&=-du \end{aligned}\right\} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sqrt[3]{\sin u}}{\sqrt[3]{\cos u}+\sqrt[3]{\sin u}}(-du)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\sin x}}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}}dx=I$$

$$+\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\sin x}}dx=I$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=2I \Rightarrow \frac{\pi}{2}=2I \Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

Pratik yol

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\frac{a}{2}$$

Bu soru için $\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ bulunur.

Örnek

$$\int_0^2 \frac{x^5}{x^5+(2-x)^5}dx \textbf{ integralini hesaplayınız.}$$

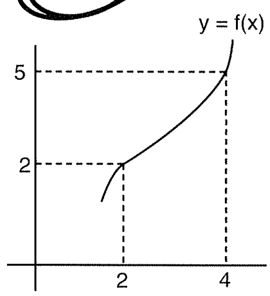
Pratik yolumuzdan $\Rightarrow \frac{2}{2}=1$ bulunur.

Örnek

$$\int_0^1 \frac{x^6}{x^6+(1-x)^6}dx \textbf{ integralini hesaplayınız.}$$

Pratik yolumuzdan $\Rightarrow \frac{1}{2}$ bulunur.

Örnek



Verilen şekle göre aşağıdaki soruları çözünüz.

a) $\int_2^4 f(x)dx+\int_2^4 xf'(x)dx$

b) $\int_2^4 \frac{f'(x)}{x}dx-\int_2^4 \frac{f(x)}{x^2}dx$

a) $\int_2^4 [f(x)+xf'(x)]dx=\int_2^4 [xf(x)]'dx$

$$=[xf(x)]\Big|_2^4=4f(4)-2f(2)$$

$$=4.5-2.2=16$$

b) $\int_2^4 \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}dx=\int_2^4\left[\frac{f(x)}{x}\right]'dx=\left[\frac{f(x)}{x}\right]\Big|_2^4$

$$=\frac{f(4)}{4}-\frac{f(2)}{2}=\frac{5}{4}-\frac{2}{2}=\frac{1}{4}$$

Örnek

$\int\limits_0^{\sqrt{5}} [\,x^2\,]dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int\limits_0^1 0dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} 1dx+\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2dx+\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} 3dx+\int\limits_2^{\sqrt{5}} 4dx$$

$$=0+x\Big|_1^{\sqrt{2}}+(2x)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}+3x\Big|_{\sqrt{3}}^{2}+4x\Big|_2^{\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{2}-1+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+6-3\sqrt{3}+4\sqrt{5}-8$$

$$=-\sqrt{2}-\sqrt{3}+4\sqrt{5}-3$$

Örnek

$\int\limits_0^5 [\![x]\!]^2 dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int\limits_0^1 0dx+\int\limits_1^2 1^2dx+\int\limits_2^3 2^2dx+\int\limits_3^4 3^2dx+\int\limits_4^5 4^2dx$$

$$=x\Big|_1^2+(4x)\Big|_2^3+(9x)\Big|_3^4+(16x)\Big|_4^5$$

$$=1+4+9+16=30$$

Örnek

$\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \sin^2x.\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=\sin^2x.\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\\ &f(-x)=\sin^2(-x).\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=-\sin^2x.\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)=-f(x)\end{aligned}\right\}$$

f(x) tek fonksiyon

$$\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \sin^2x.\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)dx=0$$

Örnek

$\int\limits_{-1}^{1} \cos x.\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=\cos x.\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)\\ &f(-x)=\cos(-x).\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)=-\cos x.\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)=-f(x)\end{aligned}\right\}$$

f(x) tek fonksiyon

$$\int\limits_{-1}^{1} \cos x.\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)=0$$

Örnek

$\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx$ ise

$\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{8+\sin^2x}}dx$ **integralini hesaplayınız.**

$$\int\limits_0^{\pi} x\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{8+\sin^2x}}dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{8+\sin^2x}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{9-\cos^2x}}dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_1^{-1}\frac{(-du)}{\sqrt{9-u^2}}$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos x=u\\ &-\sin x dx=du\end{aligned}\right\}=\frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(-du)}{\sqrt{9-u^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\arcsin\frac{u}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}\left[\arcsin\frac{1}{3}-\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 2\arcsin\frac{1}{3}=\pi\arcsin\frac{1}{3}$$

Örnek

$\int\limits_{-1}^{1} xf(x^2)dx$ **integralini hesaplayınız.**

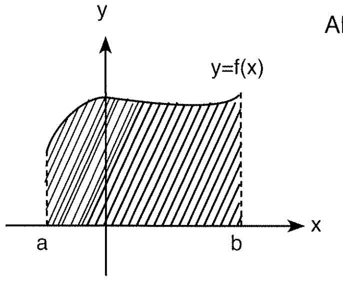
$$\left.\begin{aligned}&f(x^2)\Rightarrow \text{çift fonksiyon}\\ &x\Rightarrow \text{tek fonksiyon}\end{aligned}\right\}xf(x^2)\Rightarrow \text{tek fonksiyondur}$$

$\int\limits_{-1}^{1} xf(x^2)dx=0$ bulunur.

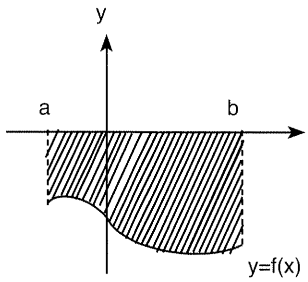
4– İntegral Uygulamaları

a) Alan Hesabı

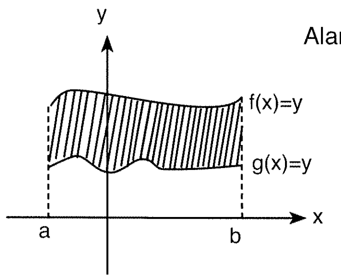
■ $\text{Alan} = \int_a^b f(x)dx$



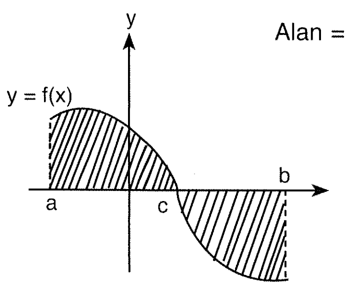
■ $\text{Alan} = -\int_a^b f(x)dx$



■ $\text{Alan} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

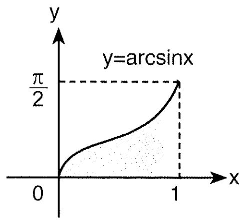


■ $\text{Alan} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$



Örnek

y = arcsinx eğrisi x = 0, x = 1 doğruları ve Ox ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.



$$\int_0^1 \arcsin x dx$$

$$\arcsin x = u \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = du$$

$$dx = d\vartheta \Rightarrow x = \vartheta$$

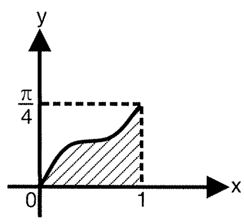
$$\int_0^1 \arcsin x dx = \arcsin x . x \Big|_0^1 - \int_0^1 x . \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \arcsin 1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - x^2 = u^2 \\ -2xdx = 2udu \end{array}\right\} = \frac{\pi}{2} - \int_1^0 \frac{(-udu)}{u} = \frac{\pi}{2} + \int_1^0 du = \frac{\pi}{2} - 1$$

Örnek

y = arctanx eğrisi x=0, x=1 doğruları ve 0X ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.



$$\int_0^1 \arctan x dx$$

$$\arctan x = u \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}dx = du$$

$$dx = d\vartheta \Rightarrow x = \vartheta$$

$$\int_0^1 \arctan x dx = \arctan x . x \Big|_0^1 - \int_0^1 x . \frac{1}{1+x^2}dx$$

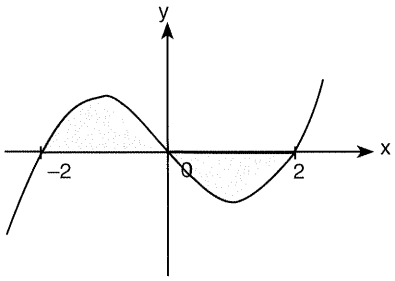
$$= \arctan 1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

Örnek

$y = x^3 - 4x$ eğrisi ile Ox–ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.

$y = x.(x-2).(x+2)$



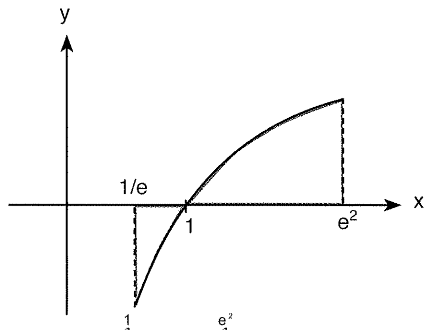
$y = x^3 - 4$ tek fonksiyon dolayısıyla,

Alan = $2\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx$ ile hesaplanır.

Alan = $2.\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0} = 2.[0-(4-8)] = 8$ bulun§ur

Örnek

$y = \ln x$ eğriisi ile $x = \frac{1}{e}$ ve $x = e^2$ doğruları arasında kalan alanı hesaplayınız.



$$\text{Alan} = -\int_{1/e}^{1}\ln x dx + \int_{1}^{e^2}\ln x dx$$

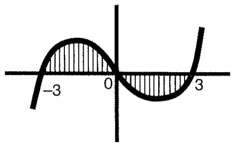
$$= -(x\ln x - x)\Big|_{1/e}^{1} + (x\ln x - x)_{1}^{e^2}$$

$$= -\left((-1)-\left(-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\right)\right)+\left((2e^2-e^2)-(-1)\right)$$

$$= -\left[-1+\frac{2}{e}\right]+[e^2+1] = 1-\frac{2}{e}+e^2+1 = e^2+2-\frac{2}{e}$$

Örnek

$y = x^3 - 9x$ eğrisi ile 0X – ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.



$y = x^3 - 9x$ tek fonksiyon

Dolayısıyla

Alan $= 2\int_{-3}^{0}(x^3-9x)dx$ ile

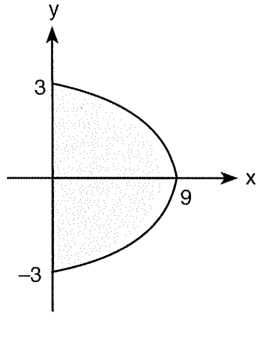
hesaplanır.

$$\text{Alan} = 2.\left(\frac{x^4}{4}-9\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{0} = 2.\left[0-\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{2}\right)\right]$$

$$= 2.\frac{81}{4} = \frac{81}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$x = 9 - y^2$ eğrisi ve y – ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.



$$\text{Alan} = \int_{-3}^{3}(9-y^2)dy$$

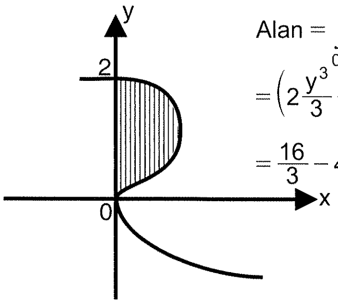
$$= \left(9y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3}$$

$$= (27-9)-(-27+9)$$

$$= 54-18 = 36$$

Örnek

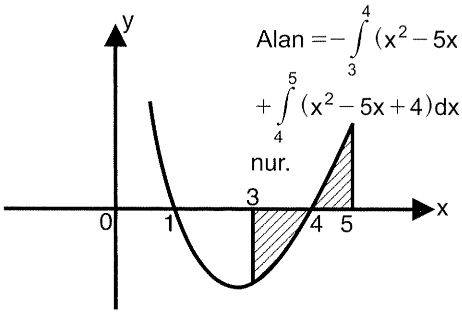
$x = 2y^2 - y^3$ eğrisi ve y - ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.



$$\text{Alan} = \int_0^2 (2y^2 - y^3)dy$$
$$= \left(2\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2$$
$$= \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

Örnek

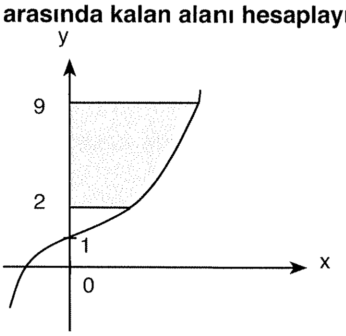
$y = x^2 - 5x + 4$ eğrisi $x = 3$ ve $x = 5$ doğruları ve 0X - ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.



$$\text{Alan} = -\int_3^4 (x^2 - 5x + 4)dx$$
$$+ \int_4^5 (x^2 - 5x + 4)dx$$ ile bulunur.

Örnek

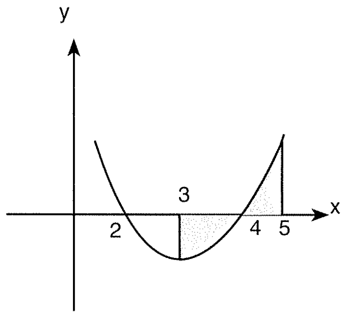
$y = x^3 + 1$ eğrisi $y = 2$ ve $y = 9$ doğruları ve Oy–ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.



$$x = \sqrt[3]{y-1}$$
$$\text{Alan} = \int_2^9 \sqrt[3]{y-1}\,dy = \frac{3}{4}(y-1)^{\frac{4}{3}}\Big|_2^9$$
$$= \frac{3}{4}.8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}.1^{\frac{4}{3}}$$
$$= \frac{3}{4}.16 - \frac{3}{4}.1 = \frac{45}{4}$$

Örnek

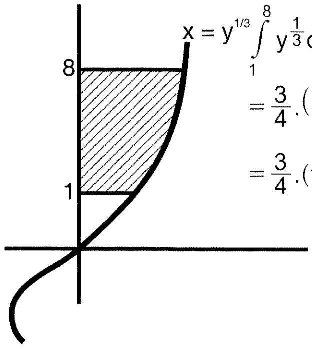
$y = x^2 - 6x + 8$ eğrisi $x = 3$ ve $x = 5$ doğruları ve Ox ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.



$$\text{Alan} = -\int_3^4 (x^2 - 6x + 8)dx$$
$$+ \int_4^5 (x^2 - 6x + 8)dx$$ ile bulunur.

Örnek

$x = \sqrt[3]{y}$, $y=1$ ve $y=8$ ile 0Y ekseni arasında kalan alanı bulunuz.



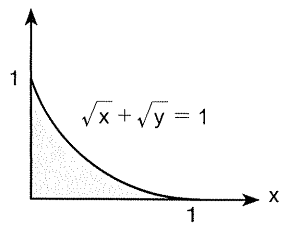
$$x = y^{1/3} \int_1^8 y^{\frac{1}{3}}dy = \left.\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_1^8$$

$$= \frac{3}{4}.(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}})$$

$$= \frac{3}{4}.(16-1) = \frac{45}{4}$$

Örnek

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ eğrisinin Ox–ekseni ve Oy–ekseni ile sınırlandırıldığı bölgedeki alanını hesaplayınız.



$\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$

$y = (1-\sqrt{x})^2 = 1 + x - 2\sqrt{x}$

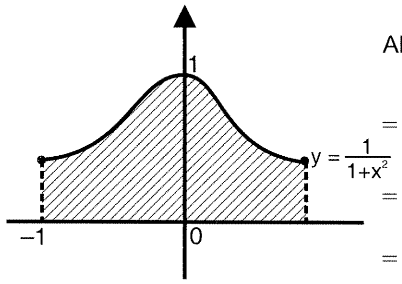
$$\text{Alan} = \int_0^1 (x+1-2x^{\frac{1}{2}})dx = \left(\frac{x^2}{2} + x - 2.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + 1 - \frac{4}{3} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$$

elde edilir.

Örnek

$y = \dfrac{1}{1+x^2}$ eğrisi $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları ve 0X - ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.



$$\text{Alan} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= 2\arctan x\Big|_0^1$$

$$= 2.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Örnek

$y = \cos^2 x.\sin x$ eğrisinin $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ doğruları ve Ox–ekseni arasında kalan alanını hesaplayınız.

$$\text{Alan} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x.\sin x dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^2.(-du)$$

$$\left.\begin{matrix} \cos x = u \\ -\sin x dx = du \end{matrix}\right\} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} u^2 du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}$$

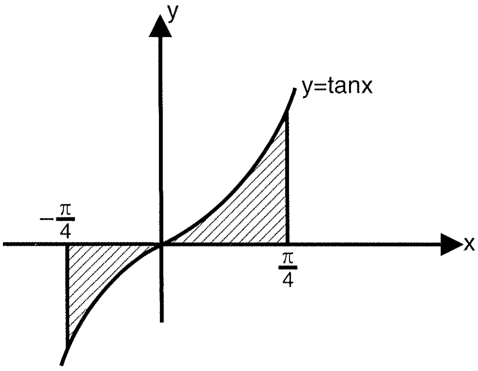
$$= \frac{1}{3} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{24}$$

$$= \frac{8-2\sqrt{2}}{24}$$

elde edilir.

Örnek

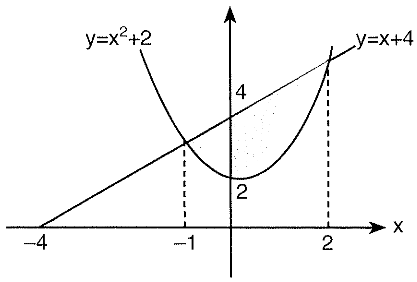
y = tanx eğrisinin $x = -\frac{\pi}{4}$ ve $x = \frac{\pi}{4}$ doğruları ile 0X - ekseni arasında kalan alanını hesaplayınız.



$$\text{Alan} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$
$$= 2.(-\ln(\cos x))\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= -2.\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$
$$= 2\ln\sqrt{2}$$
= ln2 elde edilir.

Örnek

y = x^2 + 2 ve y = x + 4 eğrileri arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

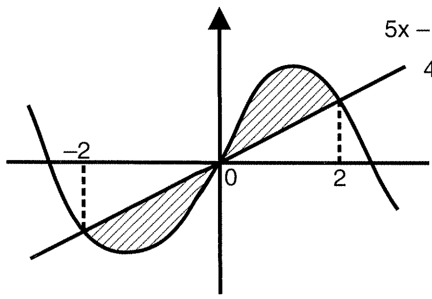


$x^2 + 2 = x + 4$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x-2)(x+1) = 0$
$x = -1$ ve $x = 2$

$$\int_{-1}^{2}[(x+4)-(x^2+2)]dx = \int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$
$$= \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{2} = \left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$
$$= \left(-\frac{8}{3}+6\right)-\left(\frac{5}{6}-2\right) = -\underset{(2)}{\frac{8}{3}}-\frac{5}{6}+\underset{(6)}{\frac{8}{1}} = \frac{-16-5+48}{6}$$
$$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

Örnek

y = 5x – x^3 ve y = x eğrileri arasında kalan alanı hesaplayınız.

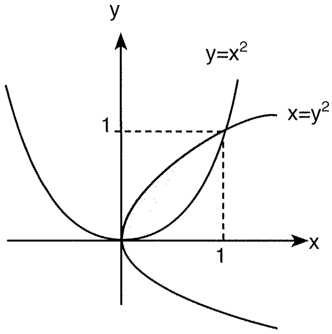


$5x - x^3 = x$
$4x = x^3$
$x = 0$
$x = 2$
$x = -2$

$$\text{Alan} = 2\int_0^2 (5x - x^3 - x)dx$$
$$= 2\int_0^2 (4x - x^3)dx = 2.\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2$$
$$= 2.(8-4)$$
= 8 elde edilir.

Örnek

y = x^2 ve x = y^2 eğrileri arasında kalan alanı hesaplayınız.

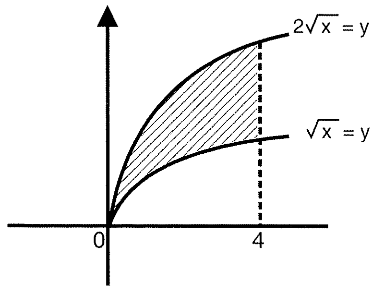


$$\text{Alan} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Örnek

$x = y^2$, $x = \frac{y^2}{4}$ eğrileri ve $x = 4$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{x} \\ y=2\sqrt{x} \\ x=4 \end{array}\right\}$$

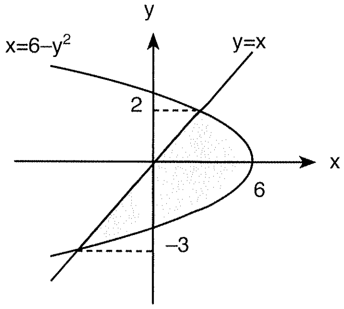


$$\text{Alan} = \int_0^4 (2\sqrt{x}-\sqrt{x})dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}.4.2 = \frac{16}{3}$$

Örnek

$x = 6 - y^2$ parabolü ile $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.



$6 - y^2 = y$
$y^2 + y - 6 = 0$
$(y + 3)(y - 2) = 0$
$y = -3$ ve $y = 2$

$$\text{Alan} = \int_{-3}^{2} \left((6-y^2)-(y)\right)dy$$

$$= \int_{-3}^{2} (6-y^2-y)dy = \left(6y-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{2}$$

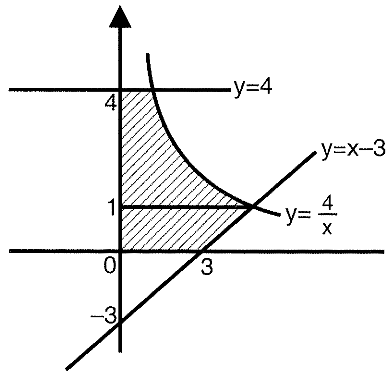
$$= \left(12-\frac{8}{3}-2\right)-\left(-18+9-\frac{9}{2}\right)$$

$$= 12-\frac{14}{3}+9+\frac{9}{2}$$

$$= \underset{(6)}{\frac{21}{1}}-\underset{(2)}{\frac{14}{3}}+\underset{(3)}{\frac{9}{2}} = \frac{126-28+27}{6} = \frac{125}{6}$$

Örnek

$y = \frac{4}{x}$ eğrisi, 0X - ekseni, 0Y - ekseni ve $y = x - 3$ ve $y = 4$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.



$$\frac{4}{x} = x - 3$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Alan} = \int_0^1 (y+3)dy + \int_1^4 \frac{4}{y}dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{2}+3y\right)\Big|_0^1 + 4\ln y\Big|_1^4$$

$$= \left(\frac{1}{2}+3\right)+4\ln 4-4\ln 1$$

$= \frac{7}{2}+\ln 256$ elde edilir.

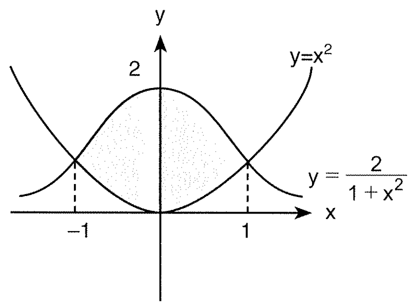
Örnek

$y = \frac{2}{1+x^2}$ ve $y = x^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

$$x^2 = \frac{2}{1+x^2}$$

$$x^4 + x^2 = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right\}$$



$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{1+x^2}-x^2\right)dx = \left(2\arctan x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(2\arctan 1-\frac{1}{3}\right)-\left(2\arctan(-1)+\frac{1}{3}\right)$$

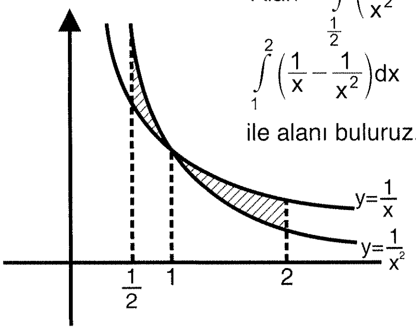
$$= 4\arctan 1-\frac{2}{3} = 4.\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3} = \pi-\frac{2}{3}$$

Örnek

$y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{2}{x^2}$ eğrileri ve $x=\frac{1}{2}$ ve x = 2 doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

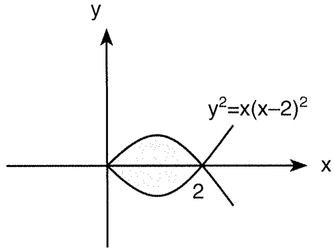
$$\text{Alan} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx + \int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

ile alanı buluruz.



Örnek

$y^2 = x(x-2)^2$ eğrisinin oluşturduğu kapalı bölgenin alanını hesaplayınız.

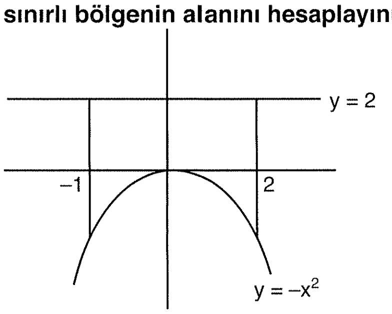


$y=(x-2)\sqrt{x}$

$\text{Alan}= 2\int_{0}^{2}(x-2)\sqrt{x}\,dx$ ile hesaplanır.

Örnek

$y=-x^2$, y = 2 eğrileri ve x = –1 ve x = 2 doğruları ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.



$$\text{Alan} = \int_{-1}^{2}(2-(-x^2))dx$$

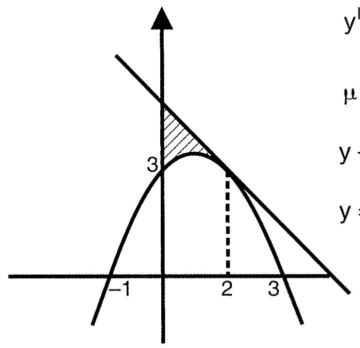
$$= \int_{-1}^{2}(2+x^2)dx$$

$$=\left(2x+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=\left(4+\frac{8}{3}\right)-\left(-2-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{20}{3}+\frac{7}{3}=9$$

Örnek

$y=-x^2+2x+3$ eğrisi ile bu eğriye x = 2 apsisli noktada teğet olan doğru ve 0Y - ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.



$y' = -2x+2\Big|_{x=2} = -2$

$\mu = -2 = \frac{y-3}{x-2}$

$y-3=-2x+4$

$y=-2x+7$

$$\text{Alan} = \int_{0}^{2}[(-2x+7)-(-x^2+2x+3)]dx$$

$$= \int_{0}^{2}(x^2-4x+4)dx$$

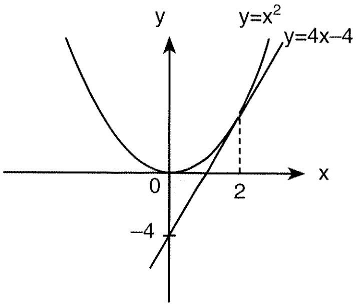
$$= \int_{0}^{2}(x-2)^2dx = \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_{0}^{2} = \frac{8}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$y = x^2$, Oy– ekseni ve $y = x^2$ parabolüne $x = 2$ apsisli noktada teğet olan doğru arasında kalan alanı hesaplayınız.

$$y' = 2x \Big|_{x=2} = 4 = m_T \Rightarrow 4 = \frac{y-4}{x-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y-4 = 4x-8 \\ y = 4x-4 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 = 4x-4 \\ x^2-4x+4=0 \\ x = 2 \end{array}$$



$$\text{Alan} = \int_0^2 [x^2-(4x-4)]dx$$

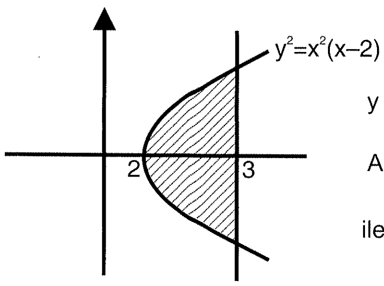
$$= \int_0^2 (x^2-4x+4)dx$$

$$= \int_0^2 (x-2)^2 dx = \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2$$

$$= 0 - \frac{(-8)}{3} = \frac{8}{3}$$

Örnek

$y^2 = x^2(x-2)$ eğrisi ve $x = 3$ doğrusunun oluşturduğu kapalı bölgenin alanını hesaplayınız.



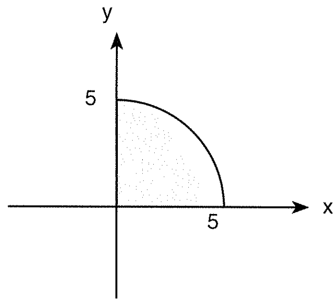
$y = x.\sqrt{x-2}$

$\text{Alan} = 2\int_2^3 x\sqrt{x-2}\,dx$

ile hesaplanır.

Örnek

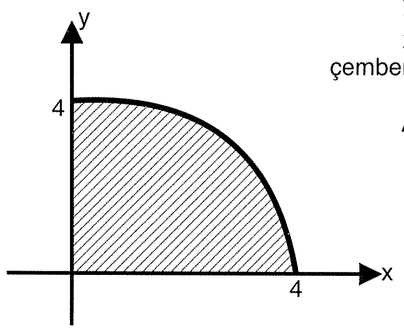
$\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**



$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{25-x^2} \\ x^2+y^2 = 25 \\ \text{Çemberin üst yarısı} \end{array}\right\} \text{Alan} = \frac{\pi.5^2}{4} = \frac{25\pi}{4}$$

Örnek

$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**



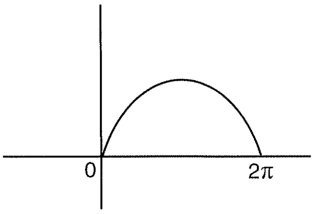
$$\left.\begin{array}{r} y = \sqrt{16-x^2} \\ x^2+y^2 = 16 \\ \text{çemberin üst yarısı} \end{array}\right\}$$

$\text{Alan} = \frac{\pi.4^2}{4}$

$= 4\pi$

Örnek

$\left.\begin{array}{l} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{array}\right\}$ **parametrik denklemi ile verilen eğrinin $x \in [0,2\pi]$ sınırları arasındaki bölgesinin alanını hesaplayınız.**



$$\text{Alan} = \int_0^{2\pi} y\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} y(t) \cdot x'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\cdot(1-\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt$$

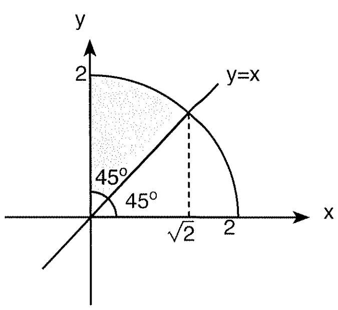
$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = \left[t - 2\sin t + \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \left(2\pi + \frac{1}{2}\cdot(2\pi)\right) - 0 = 3\pi \text{ bulunur.}$$

Örnek

$\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2} - x\right)dx$ **integralini hesaplayınız.**

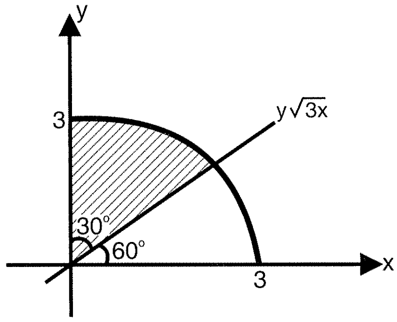
$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{4-x^2} \\ y = x \end{array}\right\}$ $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin üst yarısı ve $y = x$ arasında kalan alan



$\text{Alan} = \dfrac{\pi.2^2}{8} = \dfrac{\pi}{2}$ bulunur.

Örnek

$\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{9-x^2} - \sqrt{3}x\right)dx$ **integralini hesaplayınız.**

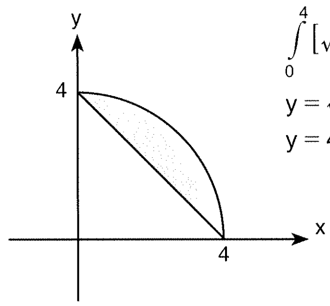


$x^2 + y^2 = 9$ çemberinin üst yarısı ve $y = \sqrt{3}x$ doğrusu arasında kalan alan

$\text{Alan} = \dfrac{\pi.3^2}{12} = \dfrac{3\pi}{4}$ bulunur.

Örnek

$\int_0^{4} \left(\sqrt{16-x^2} - 4 + x\right)dx$ **integralini hesaplayınız.**



$$\int_0^4 \left[\sqrt{16-x^2} - (4-x)\right]dx$$

$y = \sqrt{16-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$

$y = 4 - x$

$\text{Alan} = \dfrac{\pi.4^2}{4} - \dfrac{4.4}{2} = 4\pi - 8$ bulunur.

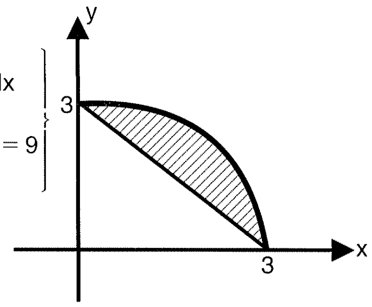
Örnek

$\int_0^3 \left(\sqrt{9-x^2}-3+x\right)dx$ **integralini hesaplayınız.**

$\int_0^3 \left[\sqrt{9-x^2}-(3-x)\right]dx$

$y=\sqrt{9-x^2} \Rightarrow x^2+y^2=9$

$y=3-x$

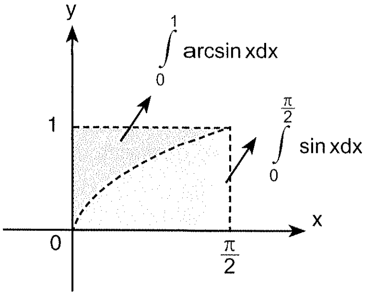


$$\text{Alan}=\frac{\pi.3^2}{4}-\frac{3.3}{2}$$

$$=\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{2}=\frac{9\pi-18}{4}$$

Örnek

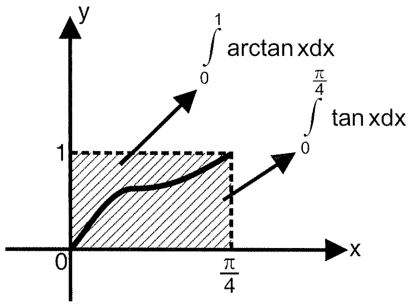
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx+\int_0^1 \arcsin x dx$ **integralini hesaplayınız.**



$\frac{\pi}{2}.1=\frac{\pi}{2}$ bulunur.

Örnek

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx+\int_0^1 \arctan x dx$ **integralini hesaplayınız.**



$\frac{\pi}{4}.1=\frac{\pi}{4}$

bulunur.

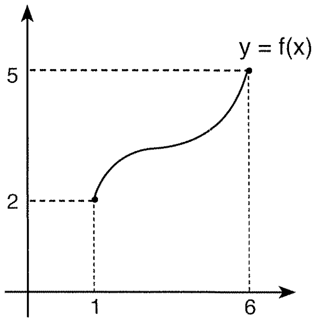
Örnek

y = arcsinx + arccosx eğrisinin x = 0 , x = 2 doğruları ve 0x-ekseni arasında kalan bölgesinin alanını hesaplayınız.

arcsinx + arccosx = $\frac{\pi}{2}$ olduğundan alan

$\int_0^2 \frac{\pi}{2}dx=\frac{\pi}{2}x\Big|_0^2=\pi$ bulunur.

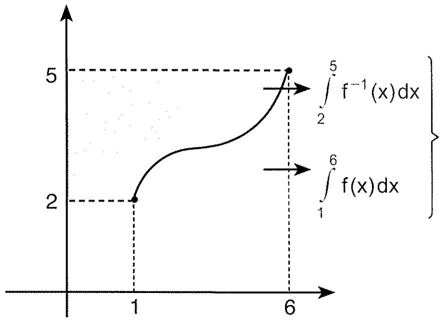
Örnek



Verilen şekle göre,

$$\int_1^6 f(x)\,dx + \int_2^5 f^{-1}(x)\,dx$$

değeri kaçtır?



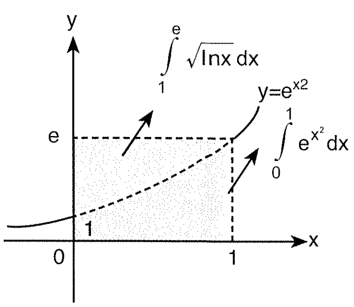
5.6 – 2.1 = 28 bulunur.

Örnek

$\int_0^1 e^{x^2}dx + \int_1^e \sqrt{\ln x}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

$f(x) = e^{x^2}$ olarak ele alırsak;

$y = e^{x^2} \Rightarrow x = e^{y^2} \Rightarrow \ln x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{\ln x} = f^{-1}(x)$ olur.



1 . e = e bulunur.

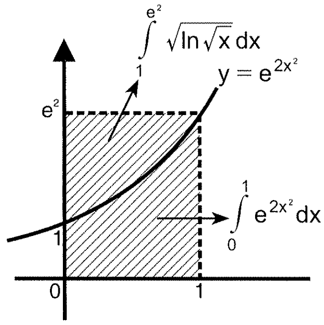
Örnek

$\int_0^1 e^{2x^2}dx + \int_1^{e^2} \sqrt{\ln\sqrt{x}}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

$f(x) = e^{2x^2}$ olarak ele alalım.

$y = e^{2x^2} \Rightarrow x = e^{2y^2} \Rightarrow 2y^2 = \ln x \Rightarrow y^2 = \ln\sqrt{x}$

$y = \sqrt{\ln\sqrt{x}} = f^{-1}(x)$ olur.



$e^2 . 1 = e^2$ bulunur.

b) Hacim Hesabı

Disk Yöntemi

y = f(x) eğrisi, x = a ve x = b doğruları ve 0x – ekseni ile sınırlı bölgenin 0x – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi;

$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$ ile hesaplanır.

Bununla birlikte $f(x) \geq g(x) \geq 0$ olmak üzere

y = f(x), y = g(x) eğrileri, x = a, x = b doğruları ve 0x – ekseni ile sınırlı bölgenin 0x – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi;

$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$ ile bulunur.

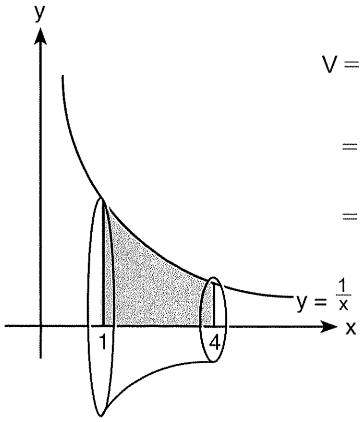
Kabuk Yöntemi

y = f(x), y = g(x) eğrileri ile x = a, x = b doğruları ve 0x – ekseni ile sınırlı bölgenin 0y – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi;

$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}$ ile bulunur.

Örnek

$y = \frac{1}{x}$ eğrisi $x = 1$, $x = 4$ doğruları ve $0x$ – ekseni arasında sınırlı bölgenin $0x$ – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaçtır?



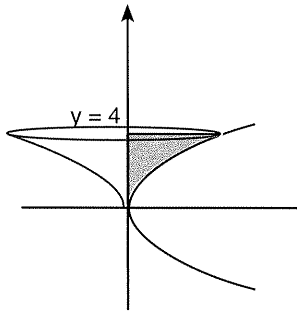
$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^4$$

$$= \pi \cdot \left[\left(-\frac{1}{4}\right) - (-1)\right] = \frac{3\pi}{4}$$

Örnek

$y = x^2$ eğrisi, $y = 4$ doğrusu ve $0y$ – ekseni arasında kalan bölgenin $0y$ – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaçtır?



$$V = \pi \int_0^4 [g(y)]^2 dy$$

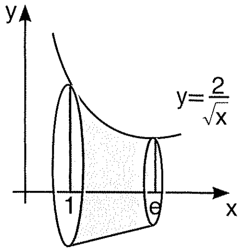
$$x = g(y) = y^2$$

$$V = \pi \int_0^4 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^4 y^4 dy$$

$$= \pi \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_0^4 = \frac{1024\pi}{5}$$

Örnek

$y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ eğrisi, $x = 1$ ve $x = e$ doğruları ile OX –ekseni arasında sınırlı bölgenin OX–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaçtır?

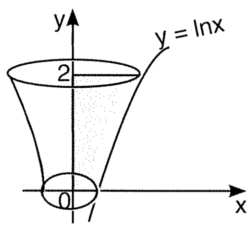


$$V = \pi \int_1^e \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \pi \int_1^e \frac{4}{x} dx$$

$$= 4\pi \cdot \ln x \Big|_1^e = 4\pi \cdot 1 = 4\pi$$

Örnek

$y = \ln x$ eğrisi, $y = 2$ doğrusu, OX ve OY–eksenleri arasında kalan bölgenin OY–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaçtır?



$$x = e^y = g(y)$$

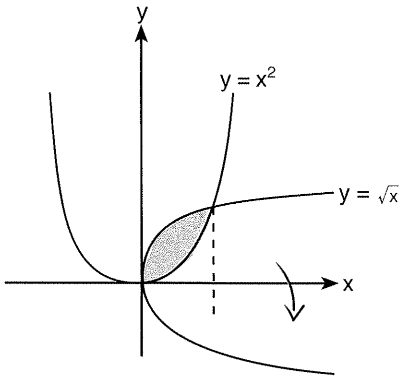
$$V = \pi \int_0^2 [g(y)]^2 dy = \pi \int_0^2 (e^y)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 e^{2y} dy = \pi \cdot \frac{e^{2y}}{2} \Big|_0^2$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot (e^4 - 1)$$

Örnek

$y = x^2$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrileri arasındaki bölgenin 0x – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaçtır?



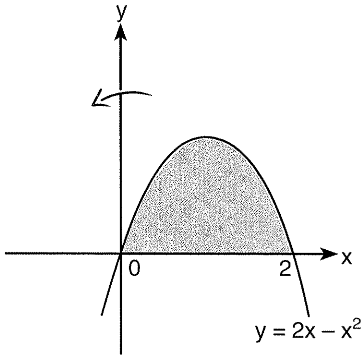
$$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 1$$

$$V = \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2)dx = \int_0^1 (x - x^4)dx$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

Örnek

$y = 2x - x^2$ eğrisi ve 0x - ekseni ile sınırlı bölgenin 0y – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?



Kabuk yöntemi

$$V = 2\pi \int_0^2 xf(x)dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 x \cdot (2x - x^2)dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)dx$$

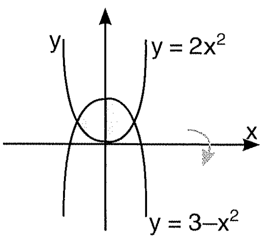
$$= 2\pi \cdot \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 2\pi \cdot \left(\frac{16}{3} - 4\right)$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= 8\frac{\pi}{3}$$

Örnek

$y = 2x^2$ ve $y = 3 - x^2$ eğrileri arasındaki bölgenin OX–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaçtır?



$2x^2 = 3 - x^2$

$\left.\begin{array}{l} 3x^2 = 3 \Rightarrow x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right\}$

$$V = \int_{-1}^{1} [(3 - x^2)^2 - (2x^2)^2]dx$$

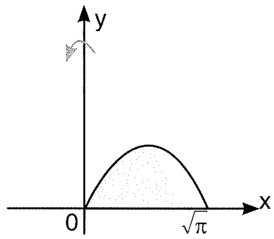
$$= \pi \int_{-1}^{1} [9 - 6x^2 + x^4 - 4x^4]dx$$

$$= \pi \cdot \left(9x - 2x^3 - 3\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 2\pi \cdot \left(9 - 2 - \frac{3}{5}\right) = 2\pi \cdot \left(7 - \frac{3}{5}\right) = 2\pi \cdot \frac{32}{5} = \frac{64\pi}{5}$$

Örnek

$y = \sin(x^2)$ eğrisi, $x = 0$, $x = \sqrt{\pi}$ doğruları ve 0X–ekseni ile sınırlı bölgenin 0Y–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?



Kabuk yöntemi

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x\, f(x)dx$$

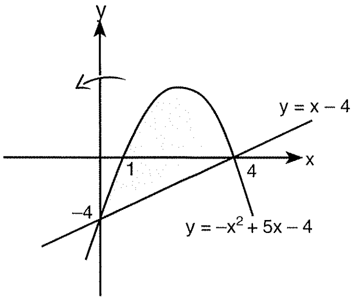
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin(x^2)dx$$

$\left.\begin{array}{l} x^2 = u \\ 2xdx = du \end{array}\right\}$

$$= \pi \int_0^{\pi} \sin u du = \pi \cdot (-\cos u)\Big|_0^{\pi} = \pi \cdot (1 - (-1)) = 2\pi$$

Örnek

$y = -x^2 + 5x - 4$ parabolü ile $y = x - 4$ doğrusu arasında kalan bölgenin 0y – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaçtır?



$-x^2 + 5x - 4 = x - 4$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$x = 0$

$x = 4$

Kabuk yöntemi

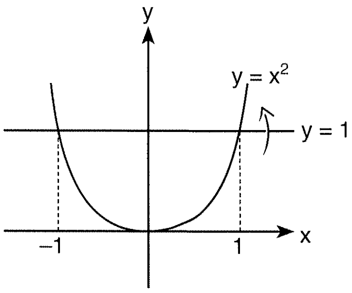
$$V = 2\pi \int_0^4 x \cdot [f(x) - g(x)]dx$$

ile hesaplanır.

$$= 2\pi \int_0^4 x \cdot [(-x^2 + 5x - 4) - (x - 4)]dx$$

Örnek

$y = x^2$ eğrisinin $y = 1$ ile sınırlı bölgesinin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?



$$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 dx$$

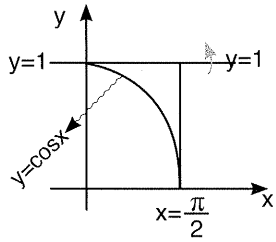
$$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)dx$$

$$= 2\pi \cdot \left(x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi \cdot \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = 2\pi \cdot \left(\frac{8}{15}\right) = \frac{16\pi}{15}$$

Örnek

$y = \cos x$ eğrisi, $x = \frac{\pi}{2}$ ve $y = 1$ doğruları arasında kalan bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaçtır?



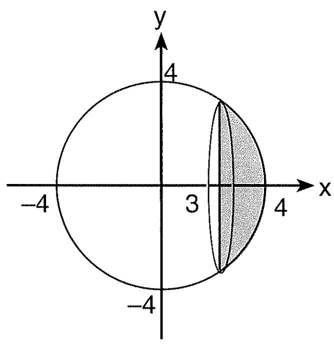
$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos x + \cos^2 x)dx$$

ile hesaplanır.

Örnek

Yarıçapı 4 birim olan küre merkezden 3 birim uzaklıkta bir düzlem ile kesiliyor. Oluşan küre kapağının hacmi kaç birim küptür?



$x^2 + y^2 = 16 \; y^2 = 16 - x^2$

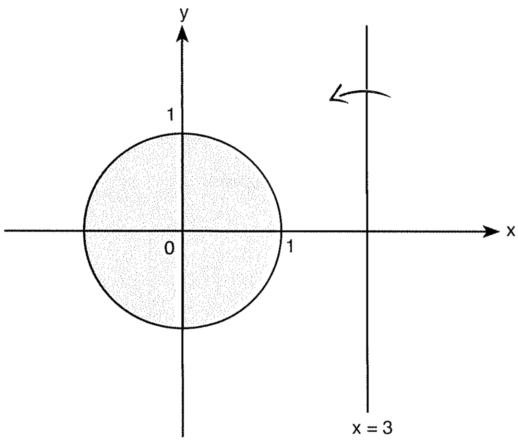
$$V = \pi \int_3^4 f^2(x)dx$$

$$= \pi \int_3^4 (16 - x^2)dx = \pi \cdot \left(16x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_3^4$$

$$= \pi \cdot \left[\left(64 - \frac{64}{3}\right) - (48 - 9)\right] = \pi \cdot \frac{11}{3}$$

Örnek

$x^2 + y^2 = 1$ çemberinin $x = 3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?



V = Alınan Yol x (Cember Alanı)

$= 2\pi . 1 . 3 \times \pi . 1^2$

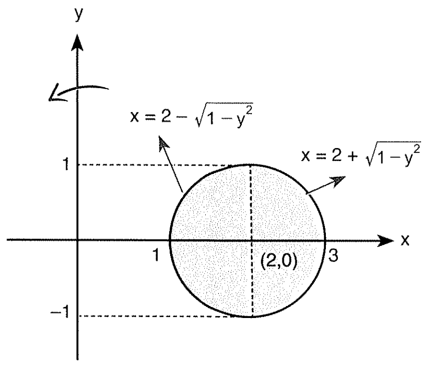
$= 6\pi^2$

Örnek

$(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ çemberinin 0y – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaçtır?

M(2,0)

r = 1



Simit şeklinde bir cisim oluşur.

$(x-2)^2 = 1 - y^2$

$x - 2 = \mp\sqrt{1-y^2}$

$x = 2 \mp\sqrt{1-y^2}$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2 - \left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right] dy$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} 8\sqrt{1-y^2}\,dy = 8\pi \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy}_{\text{yarım çember alanı}}$$

$= 8\pi \cdot \dfrac{\pi \cdot 1^2}{2} = 4\pi^2$ elde edilir.

Pratik Yol

$$\underbrace{\text{Alınan Yol}}_{2\pi\,.\,1\,.\,2} \times \underbrace{\text{Çember Alanı}}_{\pi\,.\,1^2} = 4\pi^2$$

yarıçap   devir sayısı

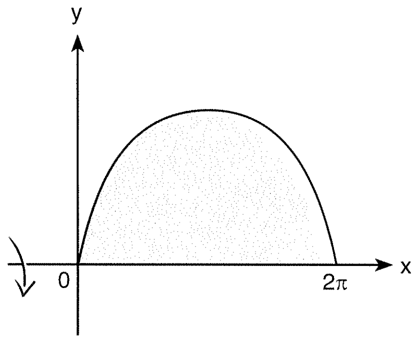
Örnek

$x = t - \sin t$

$y = 1 - \cos t$

parametrik denklemi ile verilen eğri

$x = 0$, $x = 2\pi$ doğruları ve 0x – ekseni ile sınırlı bölgenin 0x – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?



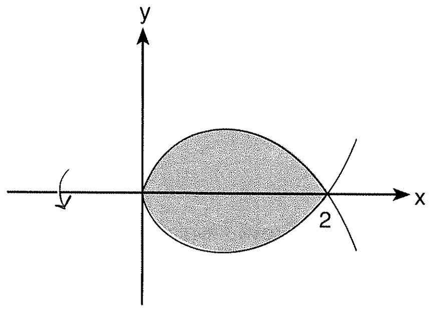
$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \cdot (1-\cos t)\,dt$$

ile hesaplanır.

Örnek

$y^2 = x(x-2)^2$ eğrisi ile sınırlı bölgenin 0x – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?



$$V = \pi \int_0^2 x(x-2)^2 dx$$ ile hesaplanır.

Peki 0y – ekseni etrafında döndürülseydi ne olurdu?

Kabuk yöntemi;

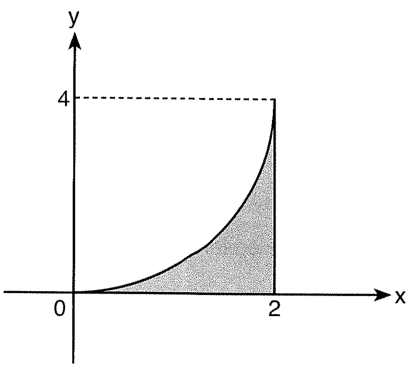
$$V = 2 \cdot 2\pi \int_0^2 x f(x) dx = 4\pi \int_0^2 x \cdot \sqrt{x} \cdot (x-2) dx$$ ile hesaplanırdı

Örnek

$y = x^2$ eğrisi, $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları arasındaki bölgenin

a) 0x – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini,

b) 0y – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



a) $V = \pi \int_0^2 (f(x))^2 dx$

$= \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx$

$= \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$

b) $f(y) = 2$

$g(y) = \sqrt{y}$

$V = \pi \int_0^4 [2^2 - (\sqrt{y})^2] dy$

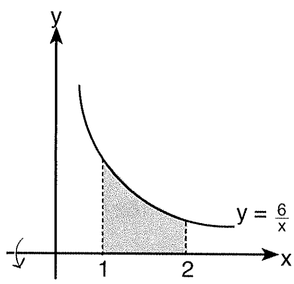
$= \pi \int_0^4 (4 - y) dy$

$= \pi \left(4y - \frac{y^2}{2}\right) \Big|_0^4$

$= (16 - 8) = 8\pi$

Örnek

xy = 6 eğrisi x = 1 ve x = 2 doğruları ve 0x – ekseni arasındaki bölgenin 0x – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?



$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{6}{x}\right)^2 dx$

$= \pi \int_1^2 \frac{36}{x^2} dx$

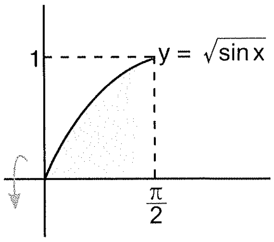
$= \pi \cdot \left(-\frac{36}{x}\right) \Big|_1^2$

$= \pi \cdot [(-18) - (-36)] = 18\pi$

ile hesaplanır.

Örnek

$y=\sqrt{\sin x}$ eğrisi $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ doğruları ve 0X–ekseni arasındaki bölgenin 0X–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?



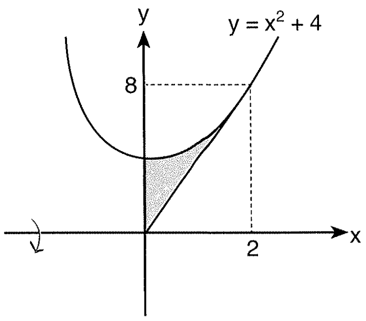
$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{\sin x})^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\pi(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\cdot(0-(-1))=\pi$$

Örnek

$y=x^2+4$ eğrisi, 0y – ekseni ve bu eğriye $x=2$ noktasında teğet olan doğru arasındaki bölgenin 0x – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?



$$y'=2x\big|_{x=2}=4=m$$

$$4=\frac{y-8}{x-2}$$

$$y-8=4x-8$$

$$y=4x$$

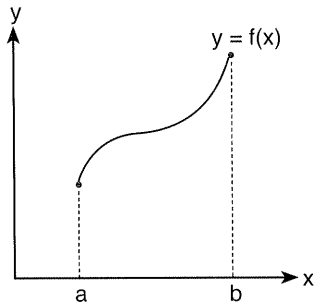
$$V=\pi\int_0^2((x^2+4)^2-(4x)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^2(x^4+8x^2+16-16x^2)dx$$

$$=\pi\int_0^2(x^4-8x^2+16)dx=\pi\cdot\left(\frac{x^5}{5}-\frac{8x^3}{3}+16x\right)\Big|_0^2$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+48\right)=\frac{496\pi}{15}$$

c) Eğri uzunluğu hesabı



$y=f(x)$ eğrisi ile ifade edilen türevli f fonksiyonu verilsin.

Bu eğrinin a ve b apsisli noktaları arasında kalan yayın uzunluğu;

$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ ile hesaplanır.

- Benzer şekilde
  $x=g(y)$
  $a\leqslant y\leqslant b$
  yayının uzunluğu ise
  $l=\int_a^b\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$ ile hesaplanır.

- $x=x(t)$
  $y=y(t)$
  $a\leqslant t\leqslant b$
  parametrki denklemi ile ifade edilen eğrinin yay uzunluğu ise
  $l=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

Örnek

$y = x^{\frac{3}{2}}$ eğrisinin x = 0 ve x = 2 apsisli noktaları arasındaki yay uzunluğunu bulunuz.

$$y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$I = \int_0^2 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx$$

$$= \frac{\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}}\Big|_0^2$$

$$= \frac{8}{27}\left[\left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

Örnek

$y = 2x^{\frac{3}{2}}$ eğrisinin x = 0 ve x = 1 apsisli noktaları arasındaki yay uzunluğunu bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} \\ f'(x) &= 2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} I &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+9x}\,dx = \frac{(1+9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 9}\Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{27}\cdot\left[10\sqrt{10} - 1\right]$$

Örnek

$y = \ln x - \frac{x^2}{8}$ eğrisinin x = 1 ve x = 3 apsisli noktaları arasındaki yay uzunluğunu bulunuz.

$$y = f(x) = \ln x - \frac{x^2}{8}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{4}$$

$$I = \int_1^3 \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{16}-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)^2}\,dx = \left(\ln x + \frac{x^2}{8}\right)\Big|_1^3$$

$$= \left(\ln 3 + \frac{9}{8}\right) - \left(\frac{1}{8}\right) = \ln 3 + 1 = \ln(3e)$$

Örnek

$y = \frac{1}{3}\cdot(x^2-2)^{\frac{3}{2}}$ eğrisinin [2, 4] aralığındaki yay uzunluğunu bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2-2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x = x\sqrt{x^2-2} \\ 1+(y')^2 &= 1+x^2(x^2-2) = x^4-2x^2+1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} I &= \int_2^4 \sqrt{(x^2-1)^2}\,dx \\ &= \int_2^4 (x^2-1)\,dx \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_2^4 = \left(\frac{64}{3}-4\right) - \left(\frac{8}{3}-2\right)$$

$$= \frac{56}{3} - 2 = \frac{50}{3}$$

Örnek

$y = \ln(\sec x)$ eğrisinin $\left[\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right]$ aralığındaki yay uzunluğunu bulunuz.

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{\sec x \cdot \tan x}{\sec x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x)\,|_0^{\pi/4}$$

$$= \ln\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1+0)$$

$$= \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Örnek

$y = \ln(\cos x)$ eğrisinin $[0, \frac{\pi}{4}]$ aralığındaki yay uzunluğunu bulunuz.

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Örnek

$x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y}$ eğrisinin [1, 2] aralığındaki yay uzunluğunu bulunuz.

$$1 + (x')^2 = 1 + \left(y^2 - \frac{1}{4y^2}\right)^2 = 1 + y^4 + \frac{1}{16y^4} - \frac{1}{2}$$

$$= \left(y^2 + \frac{1}{4y^2}\right)^2$$

$$I = \int_1^2 \left(y^2 + \frac{1}{4y^2}\right)dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{1}{4y}\right)|_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{61}{24} - \frac{1}{12} = \frac{59}{24}$$

Örnek

$x = y^2 - \frac{1}{8}\ln y$ eğrisinin [1, 2] aralığındaki yay uzunluğunu bulunuz.

$$1 + (x')^2 = 1 + \left(2y - \frac{1}{8y}\right)^2 = 1 + \left(4y^2 + \frac{1}{64y^2} - \frac{1}{2}\right)$$

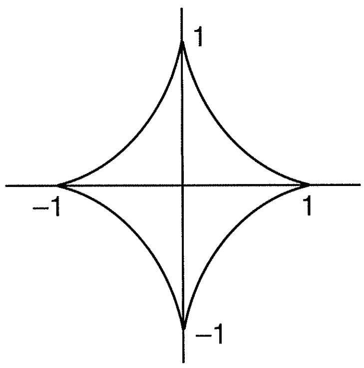
$$= \left(2y + \frac{1}{8y}\right)^2$$

$$I = \int_1^2 \left(2y + \frac{1}{8y}\right)dy = \left(y^2 + \frac{1}{8}\ln y\right)\Big|_1^2 = \left(4 + \frac{1}{8}\ln 2\right) - (1)$$

$$= 3 + \frac{1}{8}\ln 2$$

Örnek

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ **astroid eğrisinin yay uzunluğunu bulunuz.**



kapalı fonksiyon türevi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = \frac{-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$I = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx$$

$$= 4\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}dx = 4 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\,|_0^1 = 6$$

Örnek

$x = 1 - \cos t$
$y = \sin t$
$0 \leqslant t \leqslant \pi$

parametrik denklemi ile verilen eğrinin yay uzunluğu kaçtır?

$x' = \sin t$

$y' = \cos t$

$(x')^2 + (y')^2 = 1$

$$l = \int_0^{\pi} 1\,dt = \pi$$

Örnek

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{x = \sin t} \\ &\mathbf{y = t + \cos t} \\ &\mathbf{0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}} \end{aligned}\right\}$$ **parametrik denklemi ile verilen eğrinin yay uzunluğu kaçtır?**

$$\left.\begin{aligned} x' &= \cos t \\ y' &= 1 - \sin t \end{aligned}\right\} (x')^2 + (y')^2 = \cos^2 t + 1 + \sin^2 t - 2\sin t$$

$$= 2\,(1 - \sin t)$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}\right)\right)$$

$$= 4\sin^2 \frac{t}{2}$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\frac{t}{2}\,dt = -2 \cdot \frac{\cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right)$$

$$= -4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 4 - 2\sqrt{2}$$

Örnek

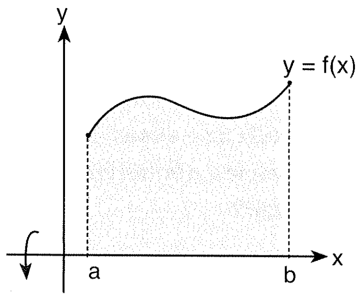
$y = \int_0^x \sqrt{t^2 + 2t}\,dt$ **eğrisinin [1, 2] aralığındaki yay uzunluğunu bulunuz.**

$y' = \sqrt{x^2 + 2x} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + (x^2 + 2x) = (x + 1)^2$

$$l = \int_1^2 (x + 1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^2 = (2 + 2) - \left(\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

d) Dönel yüzey alanı



$y = f(x)$ eğrisinin

$x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlı bölgesinin Ox – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzel alanı;

$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ ile hesaplanır.

- Benzer şekilde

  $x = g(y)$

  $a \leqslant y \leqslant b$

  eğrisinin Oy – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzel alanı

  $S = 2\pi \int_a^b |g(y)|\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,dy$ ile hesaplanır.

- $x = x(t)$

  $y = y(t)$

  $a \leqslant t \leqslant b$

  parametrik eğrisi ile verilen eğrinin Ox – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanı

  $S = 2\pi \int_a^b |y| \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$ ve Oy – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanı

  $S = 2\pi \int_a^b |x| \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$ ile hesaplanır.

Örnek

$y = \frac{1}{3}x^3$ eğrisinin [0,2] aralığında 0x – ekseni ile sınırlı bölgesinin 0x – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanı nedir?

$$S = 2\pi \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3\right)\cdot\sqrt{1+(x^2)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}\,dx = 2\pi \int_1^{17} \frac{\sqrt{u}}{12}du = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{u\sqrt{u}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^{17}$$

$$= \frac{\pi}{9}[17\sqrt{17}-1]$$

$1 + x^4 = u$

$4x^3dx = du$

Örnek

$y = \sqrt{9-x}$ eğrisinin [0, 1] aralığında 0X–ekseni ile sınırlı bölgesinin 0X–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanı nedir?

$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{9-x} \\ y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{9-x}} \end{array}\right\} s = 2\pi \int_0^1 \sqrt{9-x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4(9-x)}}\,dx$$

$$s = 2\pi \int_0^1 \sqrt{9-x+\frac{1}{4}}\,dx$$

$$s = 2\pi \int_0^1 \sqrt{\frac{37}{4}-x}\,dx = 2\pi\cdot\frac{\left(\frac{37}{4}-x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot(-1)}\Bigg|_0^1$$

$= -\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\left(\frac{33}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{37}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ elde edilir.

Örnek

$y = e^x$ eğrisinin [0,3] aralığında 0x – ekseni ile sınırlı bölgesinin 0x - ekseni etrağında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanı nedir?

$S = 2\pi \int_0^3 e^x\sqrt{1+(e^x)^2}\,dx$ ile hesaplanır.

Örnek

$y = \ln x$ eğrisinin [1, 3] aralığında 0X–ekseni ile sınırlı bölgesinin 0X–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanı nedir?

$s = 2\pi \int_1^3 \ln x\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$ ile hesaplanır.

Örnek

$x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ eğrisinin [0, 1] aralığında 0y – ekseni ile sınırlı bölgesinin 0y – ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanı nedir?

$x = g(y) = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$

$g'(y) = y^{\frac{1}{2}}$

$S = 2\pi \int_0^1 \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1+y}\,dy$ ile hesaplanır.

5. Genelleştirilmiş İntegraller

a) Birinci çeşit genelleştirilmiş integraller

$a \in \mathbb{R}$; f, $[a, \infty]$ aralığında integrallenebilir olsun.

Bu durumda

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ ifadesine f nin $[a, \infty]$ üzerindek birinci çeşit genelleştirilmiş integrali denir.

Eğer bu integralin limiti varsa integral yakınsak, yoksa ıraksaktır. Benzer şekilde

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integralleri de birinci çeşit genelleştirilmiş integrallerdir.

Birinci çeşit genelleştirilmiş integraller için yakınsaklık testleri

1. Karşılaştırma Testi

$[a, +\infty]$ üzerinde tanımlı sürekli f ve g fonksiyonları için $\forall x \in [a, \infty)$ için $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ sağlanıyor ise

- $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^{\infty} g(x)dx$ ıraksaktır.
- $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ yakınsak ise $\int_a^{\infty} f(x)dx$ yakınsaktır.

2. Limit Karşılaştırma Testi

$[a, \infty]$ üzerinde tanımlı sürekli f ve g fonksiyonları için

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

- $0 \leqslant L < \infty$ için $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ yakınsak $\Leftrightarrow \int_a^{\infty} g(x)\,dx$ yakınsak
- $0 < L \leqslant \infty$ için $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ıraksak $\Leftrightarrow \int_a^{\infty} g(x)\,dx$ ıraksak

p. testi

$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ için $p > 1$ ise integral yakınsak

$p \leqslant 1$ için integral ıraksak

$(a \neq 0)$

Örnek

$\int_2^{\infty} e^{-x}dx$ **integrali yakınsak mıdır?**

$\int_2^{\infty} e^{-x}dx = (-e^{-x})\Big|_2^{\infty} = 0-(-e^{-2}) = e^2$ yakınsak

Örnek

$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ **integrali yakınsak mıdır?**

$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ yakınsak

Örnek

$\int_2^{\infty}\frac{1}{x^3}dx, \int_3^{\infty}\frac{1}{x}dx, \int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ **integrallerinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

- $p = 3 \Rightarrow p > 1$
- $p = 1 \Rightarrow$ ıraksak
- $p = \frac{1}{2} \Rightarrow p < 1$ ıraksak

Örnek

$\int_5^{\infty}\frac{1}{x^4}dx, \int_2^{\infty}\frac{1}{x}dx, \int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ **integrallerinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

- $p = 4 \Rightarrow p > 1$ yakınsak
- $p = 1 \Rightarrow$ ıraksak
- $p = \frac{1}{3} \Rightarrow p < 1$ ıraksak

Örnek

$\int_5^{\infty} e^{-x^2}dx$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$x \leqslant x^2$ ((5, ∞) aralığında)

$x^2 \geq x$

$-x^2 \leqslant -x$

$\int_5^{\infty} e^{-x^2}dx \leqslant \int_5^{\infty} e^{-x}dx = (-e^{-x})\Big|_5^{\infty} = 0-(-e^{-5}) = e^{-5}$

$\boxed{\text{yakınsak}}$

Örnek

$\int_2^{\infty}\frac{\cos^2 x}{x^3}dx$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$\cos^2 x \leq 1$

$\int_2^{\infty}\frac{\cos^2 x}{x^3}dx \leq \int_2^{\infty}\frac{1}{x^3}dx$

$p = 3 \Rightarrow$ yakınsak

Örnek

$\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-0,2}}$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-0,2}} > \int_2^{\infty}\frac{dx}{x}$

$p = 1 \Rightarrow \boxed{\text{ıraksak}}$

Örnek

(a) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^4+3}$

(b) $\int_5^\infty \frac{dx}{x+2}$

(c) $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+4}}$

(d) $\int_1^\infty \frac{dx}{e^{3x}+2}$

verilen integrallerin yakınsaklığını inceleyiniz.

(a) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^4+3} \sim \int_2^\infty \frac{dx}{x^4}$

$p = 4 \Rightarrow$ yakınsak

(b) $\int_5^\infty \frac{dx}{x+2} \sim \int_2^\infty \frac{dx}{x}$

$p = 1 \Rightarrow$ ıraksak

(c) $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+4}} \sim \int_2^\infty \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$

$p = \frac{2}{3} \Rightarrow$ ıraksak

(d) $\int_1^\infty \frac{dx}{e^{3x}+2} \sim \int_1^\infty \frac{dx}{e^{3x}} = \int_1^\infty e^{-3x}dx = \frac{e^{-3x}}{(-3)}\Big|_1^\infty$

$= 0 - \left(-\frac{e^{-3}}{3}\right) = \frac{1}{3e^3} \Rightarrow$ yakınsak

Örnek

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5+2}$, (b) $\int_2^\infty \frac{dx}{x+3}$

(c) $\int_5^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+7}}$, (d) $\int_1^\infty \frac{dx}{e^x-2}$

verilen integrallerin yakınsaklığını inceleyiniz.

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5+2} \sim \int_1^\infty \frac{dx}{x^5}, p = 5 \Rightarrow \boxed{\text{yakınsak}}$

(b) $\int_2^\infty \frac{dx}{x+3} \sim \int_2^\infty \frac{dx}{x}, p = 1 \Rightarrow \boxed{\text{ıraksak}}$

(c) $\int_5^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+7}} \sim \int_5^\infty \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}, p = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\text{ıraksak}}$

(d) $\int_1^\infty \frac{dx}{e^x-2} \sim \int_1^\infty \frac{dx}{e^x} = \int_1^\infty e^{-x}dx = (-e^{-x})\Big|_1^\infty$

$= 0 - (-e^{-1}) = e^{-1}$

$\boxed{\text{yakınsak}}$

Örnek

$\int_2^\infty \frac{(3x+5)}{(x^2+1)\cdot(x+2)}dx$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$\int_2^\infty \frac{(3x+5)}{(x^2+1)(x+2)}dx \sim \int_2^\infty \frac{3x}{x^2\cdot x}dx = \int_2^\infty \frac{3}{x^2}dx$

$p = 2 \Rightarrow$ yakınsak

Örnek

$\int_1^{\infty} \frac{(2x^2+7)dx}{(x^3+5)(x+1)}$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\int_1^{\infty} \frac{(2x^2+7)}{(x^3+5)(x+1)}dx \sim \int_1^{\infty} \frac{2x^2}{x^3 \cdot x}dx = \int_1^{\infty} \frac{2}{x^2}dx$$

$p = 2 \Rightarrow \boxed{\text{yakınsak}}$

b) İkinci çeşit genelleştirilmiş integraller

f, [a, b) aralığının herbir kapalı alt aralığı üzerinde integrallenebilir ve

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ ise } \int_a^b f(x)dx \text{ integraline}$$

ikinci çeşit genelleştirilmiş integral denir. b noktasına ise singüler nokta denir.

Benzer şekilde f, (a, b] için

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ veya $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ ise $\int_a^b f(x)dx$ integraline ikinci çeşit genelleştirilmiş integral denir.

a noktası singüler noktadır. Bu integralin limiti varsa integral yakınsak, limiti yoksa integral ıraksaktır.

İkinci çeşit genelleştirilmiş integraller için yakınsaklık testleri

1. Karşılaştırma testi

Pozitif f(x) fonksiyonu için b tek singüler nokta ve $\forall x \in [a,b)$ için $f(x) \leqslant g(x)$ olmak üzere

- $\int_a^b g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x)dx$ yakınsaktır.
- $\int_a^b f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^b g(x)dx$ ıraksaktır.

2. Limit testi

Pozitif f(x) fonksiyonu için b tek singüler nokta ve $\forall x \in [a,b)$ için $\lim\limits_{x \to b^-} (b-x)^p f(x) = L$ ise,

- $0 \leqslant L < \infty$ ve $p < 1$ ise $\int_a^b f(x)dx$ yakınsaktır.
- $0 < L \leqslant \infty$ ve $p \geq 1$ ise $\int_a^b f(x)dx$ ıraksaktır.

p testi

$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ veya $\int_a^b \frac{1}{(x-b)^p}dx$ için

$p \geq 1$ ise ıraksak, $p < 1$ ise yakınsaktır.

Örnek

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 0-(-2) = 2 \text{ yakınsak}$$

- p testi ile de $p = \frac{1}{2} < 1$ yakınsak olduğunu görebilirdik.

Örnek

$\int_0^3 \frac{dx}{x^3}$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\int_0^3 x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_0^3 = -\frac{1}{2x^2}\Big|_0^3 = -\frac{1}{18}+\infty$$

$= \infty$ ıraksak

- p testi ile de $p = 3 > 1$ ıraksak olduğunu görebilirdik.

Örnek

$\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$x = 2$ singüler nokta

$$\int_0^{2^-} \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} + \int_{2^+}^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$$

$p = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ yakınsak

Örnek

$\int_0^{\pi} \tan x dx$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\underbrace{\int_0^{(\frac{\pi}{2})^-} \tan x dx}_{-\ln(\cos x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}^-}} + \int_{(\frac{\pi}{2})^+}^{\pi} \tan x dx = \int_0^{\pi} \tan x dx$$

Iraksak

Örnek

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2}$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2} = \underbrace{\int_{(-1)^+}^0 \frac{dx}{(1+x)(1-x)}}_{\substack{p=1\\ \text{ıraksak}}} + \underbrace{\int_0^{1^-} \frac{dx}{(1+x)(1-x)}}_{\substack{p=1\\ \text{ıraksak}}}$$

Örnek

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}}$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ için $p = \frac{1}{4} < 1$ yakınsak

Örnek

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^4}dx$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \cdot \frac{\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$p = 3 \Rightarrow$ ıraksak

c) Üçüncü çeşit genelleştirilmiş integral

Bir integral hem birinci çeşit hem de ikinci çeşit genelleştirilmiş integralin özelliklerini taşıyorsa bu integrale üçüncü çeşit **genelleştirilmiş integral** denir.

Örnek

$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}$ integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^3}dx}_{\text{ıraksak}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}dx}_{\text{yakınsak}} \quad \text{ıraksaktır.}$$

Örnek

Aşağıda verilen integrallerin cinsini belirleyiniz.

(a) $\int_0^\infty \cos x dx$ (b) $\int_0^\infty \frac{e^x}{x}dx$ (c) $\int_0^2 \frac{dx}{4x^2+1}$

(d) $\int_0^{10} \frac{dx}{x-5}$ (e) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-x}$

(a) 1. çeşit genelleştirilmiş integral
(b) 3. çeşit genelleştirilmiş integral
(c) Genelleştirilmiş integral değil
(d) 2. çeşit genelleştirilmiş integral
(e) 2. çeşit genelleştirilmiş integral

Genelleştirilmiş İntegraller ile ilgili çalışma soruları

Örnek

Verilen integrallerin cinsini belirleyiniz.

(a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

(b) $\int_0^\infty x^2 e^{2x} dx$

(c) $\int_1^5 \frac{x^2}{\ln x}dx$

(d) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$

(e) $\int_1^\pi \frac{\cos x}{x}dx$

(a) 1. çeşit genelleştirilmiş integral

(b) 1. çeşit genelleştirilmiş integral

(c) 2. çeşit genelleştirilmiş integral

(d) 3. çeşit genelleştirilmiş integral

(e) Genelleştirilmiş integral değil

Örnek

Verilen integrallerin yakınsaklığını inceleyiniz.

(a) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^4}$

(b) $\int_3^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x+1}}$

(c) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

(d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x+2}$

(e) $\int_1^\infty xe^{-x}dx$

(f) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$

(g) $\int_0^1 \frac{dx}{x^5}$

(h) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4}$

(a) 1. çeşit
$p = 4 > 1 \Rightarrow$ yakınsak

(b) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x+1}} \sim \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}}$
1. çeşit $p = \frac{5}{2} > 1 \Rightarrow$ yakınsak

(c) $\ln x = u$
$\frac{1}{x}dx = du$
$\displaystyle\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2}$
1. çeşit, $p = 2 > 1 \Rightarrow$yakınsak

(d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+2} \sim \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$
1 çeşit, $p = 1$ ıraksak

(e) $\displaystyle\int_1^{\infty} xe^{-x}dx = \left(-\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)\Big|_1^{\infty} = \frac{(-x-1)}{e^x}\Big|_1^{\infty}$
$= 0 - \left(\frac{-2}{e}\right)$
$= \frac{2}{e} \Rightarrow$ yakınsak

	T	i
⊕	x	e^{-x}
⊖	1	$-e^{-x}$
	0	e^{-x}

(f) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}}$
2. çeşit, $p = \frac{5}{2} > 1$ ıraksak

(g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^5}$
2. çeşit, $x = 5 > 1$ ıraksak

(h) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{dx}{x^2-4} = \int_1^{2^-} \frac{dx}{(x-2)(x+2)} + \int_{2^+}^{3} \frac{dx}{(x-2)(x+2)}$
$p = 1 \Rightarrow$ ıraksak
2. çeşit

Örnek

Verilen integrallerin yakınsaklığını inceleyiniz.

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ **(b)** $\displaystyle\int_1^{\infty} x^2e^{-x^3}dx$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+3}$

(d) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ **(e)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ **(f)** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^2dx}{x^2}$

(g) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{(x+3)}{(\sqrt{x}+1)^3}dx$ **(h)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}dx$

(a) 1. çeşit
$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} \sim \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$, $p = 3 > 1 \Rightarrow$ Yakınsak

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^2e^{-x^3}dx = \int_1^{\infty} e^{-u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_1^{\infty} e^{-u}du$

1. çeşit
$\left.\begin{array}{l} x^3 = u \\ 3x^2\,dx = du \end{array}\right\}$ $\displaystyle= \frac{1}{3}\cdot(-e^{-u})\Big|_1^{\infty}$ Yakınsak
$\displaystyle= \frac{1}{3}\cdot[0-(-e^{-1})] = \frac{1}{3e}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+3} \sim \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x} = \int_0^{\infty} e^{-x}dx$
1. çeşit
$= (-e^{-x})\Big|_0^{\infty}$
$= 0-(-e^{-1}) = \frac{1}{e}$ Yakınsak

(d) 2. çeşit
$\left.\begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{1}{x}dx = du \end{array}\right\}$ $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{du}{\sqrt{u}}$
$p = \frac{1}{2} < 1$ Yakınsak

(e) 2. çeşit
$\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}$
$p = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Yakınsak

(f) 1. çeşit

$$\left.\begin{array}{l} x=e^{y} \\ dx=e^{y}dy \end{array}\right\} \int_0^{\infty} \frac{y^2}{e^{2y}}\cdot e^{y}dy$$

$$=\int_0^{\infty} y^2\cdot e^{-y}dy=(-y^2-2y-2)e^{-y}\Big|_0^{\infty}$$

T	İ
$\oplus\ y^2$	e^{-y}
$\ominus\ 2y$	$-e^{-y}$
$\oplus\ 2$	e^{-y}
0	$-e^{-y}$

$$=\frac{(-y^2-2y-2)}{e^{y}}\Big|_0^{\infty}$$

$$=0-\left(\frac{-2}{1}\right)=2 \text{ Yakınsak}$$

(g) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{x+3}{(\sqrt{x}+1)^3}dx\sim\int_2^{\infty}\frac{x}{x\sqrt{x}}dx=\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$,

$p=\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ ıraksak

(h) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}u^2du=\frac{u^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\pi^3}{64}}{3}=\frac{\pi^3}{192}$

yakınsak

Örnek

$\displaystyle\int_5^{\infty}\frac{dx}{\ln x}$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\int_5^{\infty}\frac{dx}{\ln x}>\int_5^{\infty}\frac{dx}{x}$$

$p=1\Rightarrow$ ıraksak

Örnek

$\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+x^2}}$ **integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+x^2}}<\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}}}=\int_2^{\infty}e^{-x}dx$$

$$=(-e^{-x})\Big|_2^{\infty}$$

$$=0-(-e^{-2})=\frac{1}{e^2}$$

$\boxed{\text{yakınsak}}$

Örnek

$\displaystyle\int_1^{8}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ **integralinin yakınsak olması için p ne olmalıdır?**

$$\left.\begin{array}{l} \ln x=u \\ \frac{1}{x}dx=du \end{array}\right\} \int_0^{\ln 8}\frac{du}{u^p}$$

2. çeşit, $p<1$ ise yakınsak olur.

Örnek

$\displaystyle\int_3^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ **integralinin yakınsak olması için p ne olmalıdır?**

$$\left.\begin{array}{l} \ln x=u \\ \frac{1}{x}dx=du \end{array}\right\} \int_{\ln 3}^{\infty}\frac{du}{u^p}$$

1. çeşit $p>1$ ise yakınsak olur.

Örnek

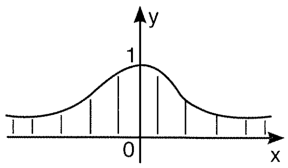
$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ **ise** $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ **değeri kaçtır?**

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{y} \\ dx=\frac{1}{2\sqrt{y}}dy \end{array}\right\} \int_0^\infty e^{-y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy = \sqrt{\pi} \text{ bulunur.}$$

Örnek

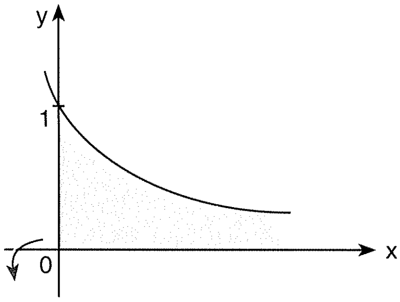
$y=\frac{1}{1+x^2}$ **eğrisi ve 0x– ekseni arasındaki bölgenin alanı kaçtır?**



$$s = 2\cdot\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= 2\cdot(\arctan x)|_0^\infty$$
$$= 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$$

Örnek

$y = e^{-x}$ eğrisinin 1. bölgede 0x–ekseni ve 0y-ekseni ile arasındaki bölgenin 0x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?



$$V = \pi\int_0^\infty (e^{-x})^2dx = \pi\int_0^\infty e^{-2x}dx$$
$$= \pi\cdot\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)\Big|_0^\infty$$
$$= -\frac{\pi}{2}\cdot(0-1) = \frac{\pi}{2}$$

KURAL

Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\cdot e^{-x}dx$ ile tanımlıdır.

- n>0 için yakınsaktır.
- $n \leqslant 0$ için ıraksaktır.
- $n \in Z^+$ için $\Gamma(n) = (n-1)!$

Beta Fonksiyonu

$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}\cdot(1-x)^{n-1}dx$ ile tanımlıdır.

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Örnek

$\int_0^{\infty} x^7 \cdot e^{-x} dx$ **değeri kaçtır?**

$$\Gamma(8) = \int_0^{\infty} x^7 \cdot e^{-x} dx = 7!$$

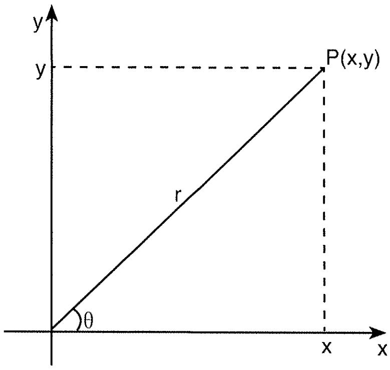
Örnek

$\int_0^1 x^5 \cdot (1-x)^6 dx$ **değeri kaçtır?**

$$\int_0^1 x^{6-1} \cdot (1-x)^{7-1} dx = \beta(6,7) = \frac{\Gamma(6) \cdot \Gamma(7)}{\Gamma(13)} = \frac{6!\,7!}{13!}$$

KUTUPSAL KOORDİNATLAR

1-Genel Kavramlar



Kartezyen düzlemde P(x,y) ile gösterilen noktayı kutupsal koordinatlarda (r,θ) ile ifade ederiz.

$\boxed{\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{matrix}}$ ile geçişleri sağlarız.

Örnek

Aşağıda kutupsal noktaları verilen noktaların kartezyen koordinatlarını yazınız.

(a) $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $(5, 0)$

(c) $(-3, \pi)$ **(d)** $\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$

(e) $\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ **(f)** $\left(\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

(a) $\left.\begin{matrix} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ y = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $\left.\begin{matrix} r = 5 \\ \theta = 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 5\cos 0 = 5 \\ y = 5\sin 0 = 0 \end{matrix}\right\} (5, 0)$

(c) $\left.\begin{matrix} r = -2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = (-3) \cdot \cos\pi = 3 \\ y = (-3)\sin\pi = 0 \end{matrix}\right\} (3, 0)$

(d) $\left.\begin{matrix} r = -2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = (-2)\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = -1 \\ y = (-2)\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \end{matrix}\right\} (-1, -\sqrt{3})$

(e) $\left.\begin{matrix} r = -\sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = (-\sqrt{2}) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = -1 \\ y = (-\sqrt{2}) \cdot \sin\frac{\pi}{4} = -1 \end{matrix}\right\} (-1, -1)$

(f) $\left.\begin{matrix} r = \sqrt{3} \\ \theta = \frac{2\pi}{3} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \end{matrix}\right\} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Örnek

Aşağıda kutupsal koordinatları verilen noktaların kartezyen koordinatlarını bulunuz.

(a) $(2, -\frac{\pi}{4})$ (b) $(3, \pi)$

(c) $(-2, 2\pi)$ (d) $(1, \frac{\pi}{2})$

(e) $(3, \frac{\pi}{4})$ (f) $(-\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$

(a) $\left.\begin{matrix} r = 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 2.\cos(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \\ r = 2.\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} \end{matrix}\right\} (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

(b) $\left.\begin{matrix} r = 3 \\ \theta = \pi \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 3.\cos\pi = -3 \\ y = 3\sin\pi = 0 \end{matrix}\right\} (-3, 0)$

(c) $\left.\begin{matrix} r = -2 \\ \theta = 2\pi \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = (-2).\cos 2\pi = -2 \\ y = (-2).\sin 2\pi = 0 \end{matrix}\right\} (-2, 0)$

(d) $\left.\begin{matrix} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 1.\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y = 1.\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{matrix}\right\} (0, 1)$

(e) $\left.\begin{matrix} r = 3 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 3.\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 3.\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

(f) $\left.\begin{matrix} r = -\sqrt{3} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = (-\sqrt{3}).\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2} \\ y = (-\sqrt{3})\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \left(-\frac{3}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

Örnek

Aşağıda kartezyen koordinatları verilen noktaların kutupsal koordinatlarını bulunuz.

(a) $(1,\sqrt{3})$ **(b)** $(-2, 2)$

(c) $(0, -2)$ **(d)** $(3, 0)$

(a) $\left.\begin{array}{l} r^2 = 1+3 \\ r = 2 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \\ \theta = \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right\} \left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$

(b) $\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \\ \tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right\} \left(2\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

(2. bölge)

(c) $\left.\begin{array}{l} r = 2 \\ \theta = \dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right\} \left(2, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

(d) $\left.\begin{array}{l} r = 3 \\ \theta = 0 \end{array}\right\} (3, 0)$

Örnek

Aşağıda kartezyen koordinatları verilen noktaların kutupsal koordinatlarını bulunuz.

(a) $(\sqrt{3}, 1)$ (b) $(1, -1)$

(c) $(-3, 0)$ (d) $(0, 2)$

(a) $\left.\begin{array}{l} r^2 = 3 + 1 \\ r = 2 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right\} \left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$

(b) $\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = \dfrac{7\pi}{4} \\ \text{(4. bölge)} \end{array}\right\} \left(\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right)$

(c) $\left.\begin{array}{l} r = 3 \\ \theta = \pi \end{array}\right\} (3, \pi)$

(d) $\left.\begin{array}{l} r = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Örnek

$x^2 + y^2 = 9$ çemberinin kutupsal koordinatlardaki denklemini yazınız.

$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \begin{array}{l} r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 9 \\ r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \end{array}$

Örnek

$x^2 + y^2 = 4$ çemberinin kutupsal koordinatlardaki denklemini yazınız.

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \begin{array}{l} r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 4 \\ r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \end{array}$$

Örnek

$(x-2)^2 + y^2 = 4$ çemberinin kutupsal koordinatlardaki denklemini yazınız.

$$\underbrace{x^2+y^2}_{r^2} - 4x = 0 \Rightarrow r^2 - 4r\cos\theta = 0$$
$$r = 4\cos\theta$$

Örnek

$x^2 + (y-3)^2 = 9$ çemberinin kutupsal koordinatlardaki denklemini yazınız.

$$\underbrace{x^2+y^2}_{r^2} - \underbrace{6y}_{r\sin\theta} = 0 \Rightarrow r^2 = 6r\sin\theta$$
$$r = 6r\sin\theta$$

Örnek

$y = \sqrt{3}x$ doğrusunun kutupsal koordinatlardaki denklemini yazınız.

$$r\sin\theta = \sqrt{3}\,r\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

Örnek

$y = x$ doğrusunun kutupsal koordinatlardaki denklemini bulunuz.

$$r\sin\theta = r\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Örnek

$(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2) = 2x^2$ eğrisinin kutupsal koordinatlardaki denklemini bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 = r^2 \\ x = r\cos\theta \end{array}\right\} \begin{array}{l} r^4 + r^2 = 2r^2\cos^2\theta \\ r^2 + 1 = 2\cos^2\theta \\ r^2 = 2\cos^2\theta - 1 \\ \boxed{r^2 = \cos 2\theta} \end{array}$$

Örnek

(a) $y = 2$ (b) $xy = 4$ (c) $x^2 - y^2 = 4$

eğrilerinin kutupsal koordinatlardaki denklemini bulunuz.

(a) $\begin{cases} r\sin\theta = 2 \\ r = \dfrac{2}{\sin\theta} \Rightarrow r = 2\operatorname{cosec}\theta \end{cases}$

(b) $\begin{cases} xy = 4 \\ r\cdot\cos\theta\cdot r\sin\theta = 4 \\ r^2\cos\theta\sin\theta = 4 \end{cases}$

(c) $x^2 - y^2 = 4$

$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 4 \Rightarrow r^2\cdot\cos^2\theta = 4$

Örnek

Kutupsal koordinatlarda verilen eğrilerin kartezyen koordinatlarındaki denklemini bulunuz.

(a) $r\cos\theta = -3$ **(b)** $\sqrt{3}\cos\theta = \sin\theta$

(c) $r^2 = 6r\sin\theta$ **(d)** $r = \tan\theta \cdot \sec\theta$

(e) $r\cos\theta = \ln r + \ln\sin\theta$ **(f)** $r^2 + 3r^2\cos\theta\sin\theta = 6$

(a) $x = -3$

(b) $\sqrt{3}r\cos\theta = r\sin\theta$
$\sqrt{3}x = y$

(c) $x^2 + y^2 = 6y \Rightarrow x^2 + y^2 - 6y = 0$

(d) $r^2 = r \cdot \tan\theta \cdot \sec\theta$
$r^2 = r \cdot \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{1}{\cos\theta} \Rightarrow r^2\cos^2\theta = r\sin\theta$
$x^2 = y$

(e) $r\cos\theta = \ln(r\sin\theta)$
$x = \ln y$

(f) $r^2 + 3 \cdot r\cos\theta \cdot r\sin\theta = 6$
$x^2 + y^2 + 3xy = 6$

Örnek

Kutupsal koordinatlarda verilen eğrilerin kartezyen koordinatlardaki denklemini bulunuz.

(a) $r\sin\theta = 5$ (b) $r\sin\theta + r\cos\theta = 2$

(c) $r^2\sin2\theta = 5$ (d) $r = \sec\theta . e^{r\sin\theta}$

(e) $r\cos\theta = 2\sin2\theta$ (f) $r^2 = 4r\cos\theta$

(a) $y = 5$

(b) $y + x = 2$

(c) $r^2.2\sin\theta.\cos\theta = 5 \Rightarrow r\cos\theta.r\sin\theta = \frac{5}{2}$
$xy = \frac{5}{2}$

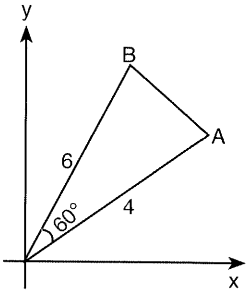
(d) $r = \frac{1}{\cos\theta}.e^{r\sin\theta} \Rightarrow r\cos\theta = e^{r\sin\theta}$
$x = e^y \Rightarrow y = \ln x$

(e) $r\cos\theta = 2.2\sin\theta.\cos\theta$
$r = 4\sin\theta \Rightarrow r^2 = 4r\sin\theta$
$x^2 + y^2 = 4y$

(f) $r^2 = 4r\cos\theta$
$x^2 + y^2 = 4x$

Örnek

A $\left(4,\frac{\pi}{12}\right)$ **ve B** $\left(6,\frac{5\pi}{12}\right)$ **noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.**



$|AB| = ?$

Kosinüs Teoreminden;

$|AB|^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 60°$

$|AB|^2 = 36 + 16 - 48 \cdot \frac{1}{2}$

$|AB|^2 = 52 - 24$

$|AB|^2 = 28 \Rightarrow |AB| = 2\sqrt{7}$

Örnek

$r = 1 - \cos\theta$ **eğrisine** $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ **noktasından çizilen teğetin denklemi nedir?**

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} r &= 1-\cos\theta \\ r' &= \sin\theta \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{2} \text{ için } \begin{aligned} r &= 1 \\ r' &= 1 \end{aligned}$$

$$m = \frac{1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2}}{1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} - 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\left.\begin{aligned} m &= -1 \\ x &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\} -1 = \frac{y-1}{x-0} \Rightarrow \begin{aligned} y - 1 &= -x \\ y &= 1 - x \end{aligned} \text{ elde edilir.}$$

Ya da kutupsal koordinatlarda

$r\sin\theta = 1 - r\cos\theta \Rightarrow r\sin\theta + r\cos\theta = 1$
elde edilir.

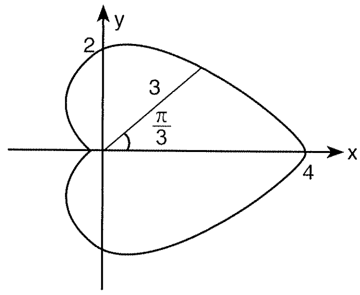
2- Kutupsal Koordinatlarda Eğri Çizimi

Koordinat Eğrileri

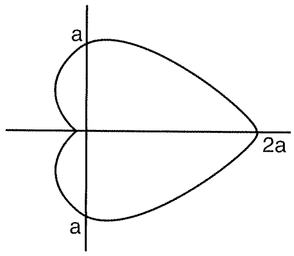
Örnek

$r = 2(1+\cos\theta)$ **eğrisini çiziniz.**

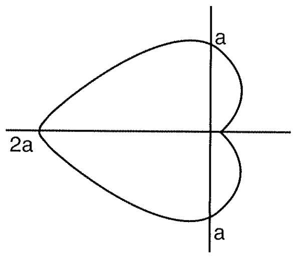
θ	r
0	4
$\frac{\pi}{3}$	3
$\frac{\pi}{2}$	2
π	0



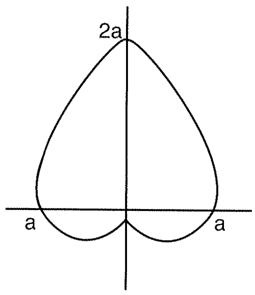
• $r = a(1+\cos\theta)$



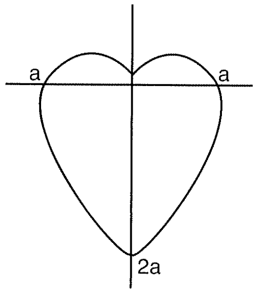
• $r = a\cdot(1-\cos\theta)$



• $r = a\cdot(1+\sin\theta)$



• $r = a(1-\sin\theta)$

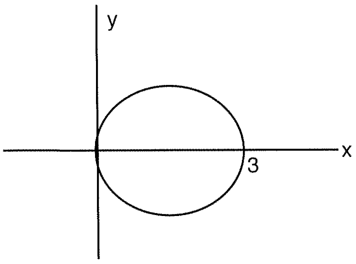


Çemberler

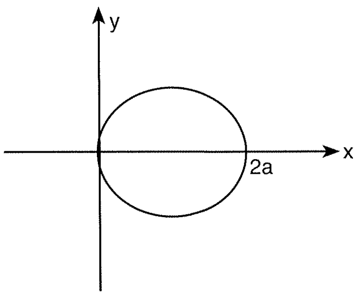
Örnek

$r = 3\cos\theta$ eğrisini çiziniz.

θ	r
0	3
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0

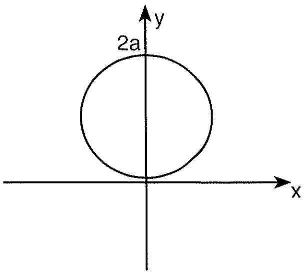


• $r = 2a\cos\theta$



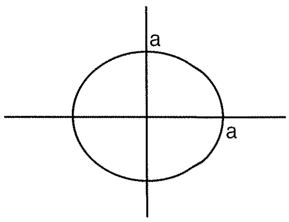
(Yarıçapı a olan sağdan teğet çember)

• $r = 2a\sin\theta$



(Yarıçapı a olan yukarıdan teğet çember)

• $r = a$



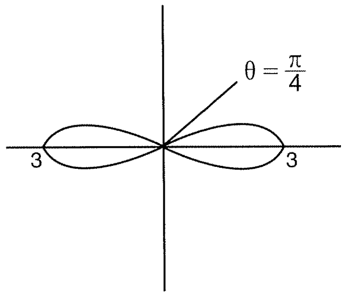
(Yarıçapı a olan orijin merkezli çember)

Lemniskat Eğrileri

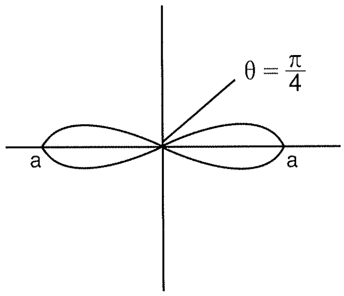
Örnek

$r^2 = 9\cos 2\theta$ eğrisini çiziniz.

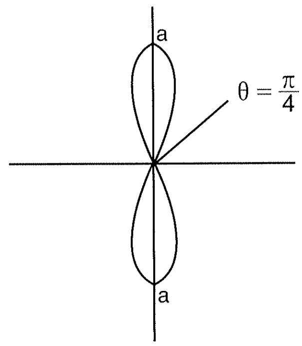
θ	r
0	∓ 3
$\frac{\pi}{3}$	$\mp\frac{3}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{2}$	–
π	∓ 3
$\frac{\pi}{4}$	0



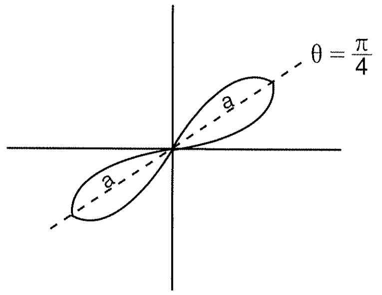
• $r^2 = a^2\cos 2\theta$



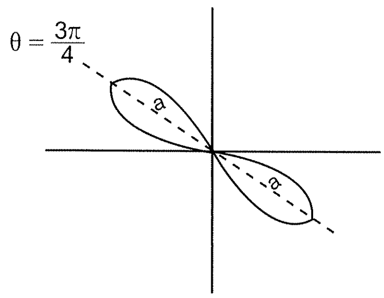
• $r^2 = -a^2\cos 2\theta$



• $r^2 = a^2 \sin 2\theta$



• $r^2 = -a^2 \sin 2\theta$

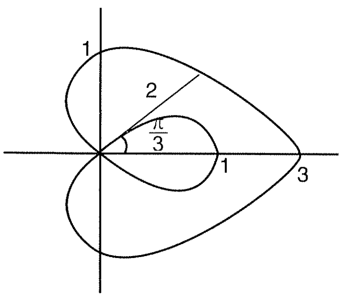


Limaçon Eğrileri

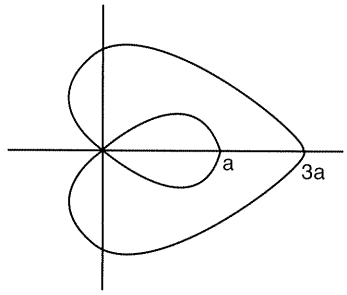
Örnek

r= 1 + 2cosθ eğrisini çiziniz.

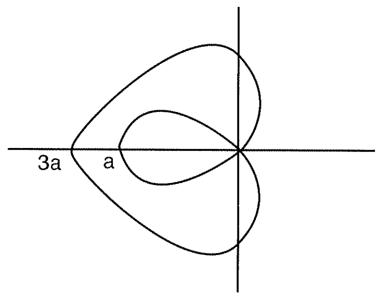
θ	r
0	3
$\frac{\pi}{3}$	2
$\frac{\pi}{2}$	1
π	−1



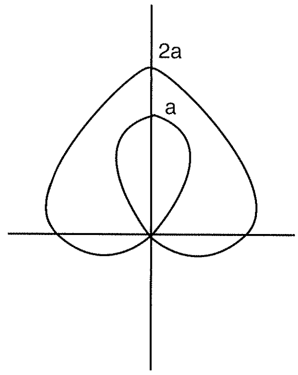
• $r = a(1 + 2\cos\theta)$



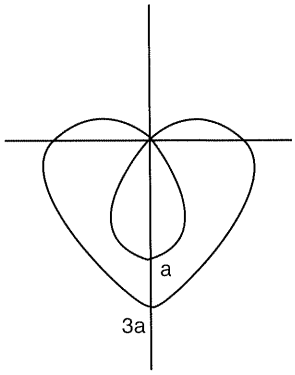
• $r = a(1 - 2\cos\theta)$



• $r = a(1 + 2\sin\theta)$



• $r = a\,(1 - 2\sin\theta)$

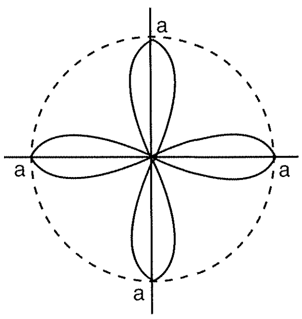


Gül Eğrileri

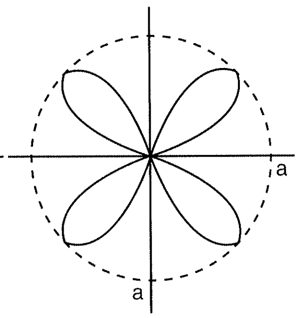
$\left.\begin{array}{l} r = a\cos n\theta \\ r = a\sin n\theta \end{array}\right\}$ şeklindeki eğrilerdir.

- n tek ise n – yapraklı gül oluşur.
- n çift ise 2n– yapraklı gül oluşur.

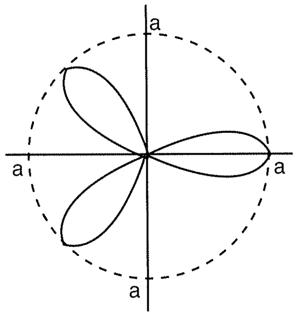
• $r = a\cos 2\theta$



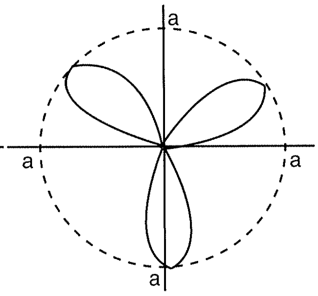
• $r = a\sin 2\theta$



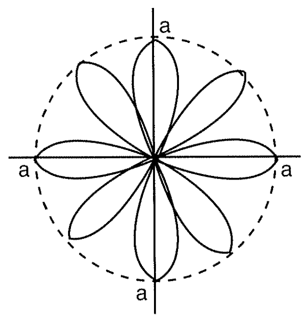
• $r = a \cdot \cos 3\theta$



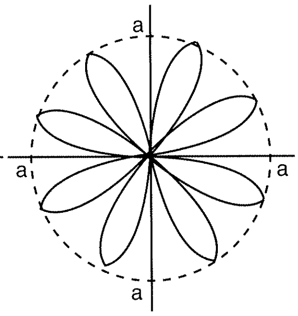
• $r = a\sin 2\theta$



• $r = a \cdot \cos 4\theta$



• $r = a\sin 4\theta$

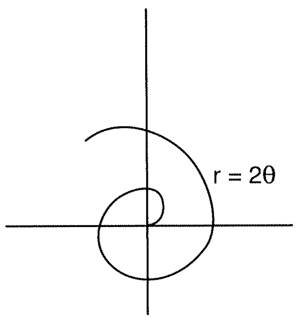


Arşimet Spirali ($r = n\theta$)

Örnek

$r = 2\theta$ eğrisini çiziniz.

θ büyüdükçe r büyür.

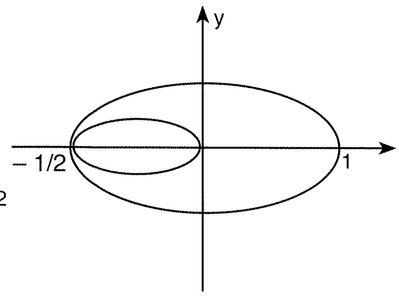


Nefroid Eğrileri

Örnek

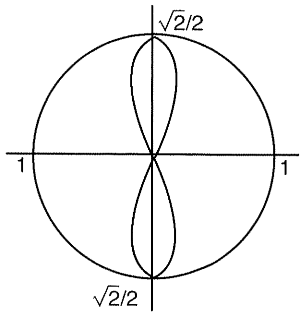
$r = \cos \dfrac{\theta}{3}$ eğrisini çiziniz.

θ	r
0	1
π	1/2
2π	−1/2



Örnek

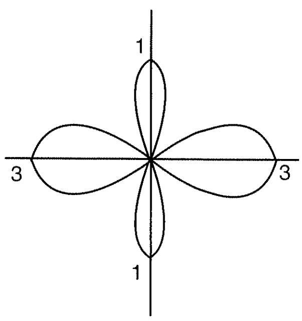
$r = \cos \dfrac{\theta}{2}$ eğrisini çiziniz.



θ	r
0	1
π	$\sqrt{2}/2$
2π	−1

Örnek

$r = 1 + 2\cos 2\theta$

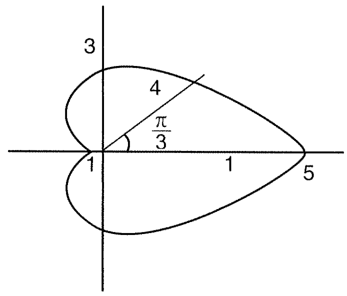


θ	r
0	3
$\pi/2$	1
π	3

Örnek

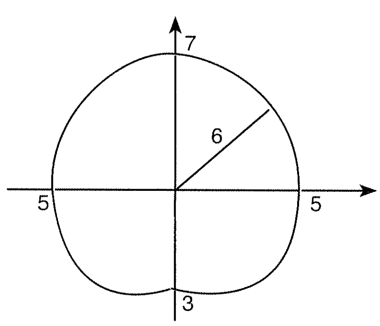
$r = 3 + 2\cos\theta$ eğrisini çiziniz.

θ	r
0	5
$\frac{\pi}{3}$	4
$\frac{\pi}{2}$	3
π	1



Örnek

$r = 5 + 2\sin\theta$ eğrisini çiziniz.



θ	r
0	5
$\pi/3$	6
$\pi/2$	7
π	5
$3\pi/2$	3

Örnek

Aşağıdaki eğrilerin kesim noktalarını bulunuz.

(a) $r = \cos\theta$, $r = 1 - \cos\theta$

(b) $r = -\cos\theta$, $r = \cos 2\theta$

(c) $r^2 = 9\cos\theta$, $r^2 = 9\sin\theta$

(d) $r = \sqrt{3}\cos\theta$, $r = \sin 2\theta$

(e) $r = 1$, $r = 2\cos 2\theta$

(a) $\cos\theta = 1 - \cos\theta$

$2\cos\theta = 1$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \to \theta = \frac{\pi}{3}\ \left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{3}\right), \quad \theta = \frac{5\pi}{3}\ \left(\frac{1}{2},\frac{5\pi}{3}\right)$$

(b) $-\cos\theta = \cos 2\theta$

$-\cos\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow 2\cos^2\theta + \cos - 1 = 0$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{2}\\ \cos\theta &= -1\end{aligned}\right\}$$

$\left(-\frac{1}{2},\frac{\pi}{3}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{5\pi}{3}\right),(1,\pi)$

(c) $9\cos\theta = 9\sin\theta$

$\tan\theta = 1$

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{4}\\ \theta &= \frac{5\pi}{4}\end{aligned}\right\} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{4}\right)$$

(d) $\sqrt{3}\cos\theta = \sin 2\theta$

$\sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \cos\theta\cdot(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= 0\\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\}$$

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(0,\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$

(e) $2\cos 2\theta = 1$

$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned}2\theta &= \frac{\pi}{3}\\ 2\theta &= \frac{5\pi}{3}\end{aligned}\right\} \quad \left(1,\frac{\pi}{6}\right) \quad \left(1,\frac{5\pi}{6}\right)$$

Örnek

Aşağıdaki eğrilerin kesim noktalarını bulunuz.

(a) $r = 1$, $r = 2\cos\theta$

(b) $r = \sqrt{3}\sin\theta$, $r^2 = \cos^2\theta$

(c) $r = 1 + 2\sin\theta$, $r = 1 - 2\cos\theta$

(d) $r = 2$, $r = 4\sin 2\theta$

(e) $r = \sin 2\theta$, $r = 2$

(a) $1 = 2\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \to \left.\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{3}\\ \theta &= \frac{5\pi}{3}\end{aligned}\right\} \quad \left(1,\frac{\pi}{3}\right) \quad \left(1,\frac{5\pi}{3}\right)$$

(b) $r^2 = 3\sin^2\theta = \cos^2\theta$

$\tan^2\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\mp 1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{7\pi}{6}$ $\quad$ $\theta = \frac{5\pi}{6}, \theta = \frac{11\pi}{6}$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{6}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{7\pi}{6}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5\pi}{6}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{11\pi}{6}\right)$

(a) $1 + 2\sin\theta = 1 - 2\cos\theta$

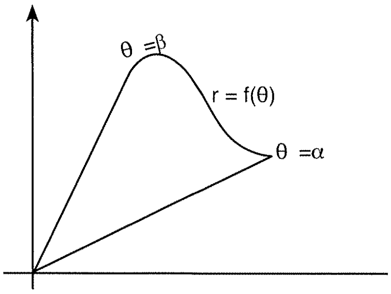
$$\tan\theta = -1 \to \left.\begin{aligned}\theta &= \frac{3\pi}{4}\\ \theta &= \frac{7\pi}{4}\end{aligned}\right\} \quad \left(1+\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right) \quad \left(1-\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$$

(d) $2 = 4\sin 2\theta \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned}2\theta &= \frac{\pi}{6}\\ 2\theta &= \frac{5\pi}{6}\end{aligned}\right\} \quad \left(2,\frac{\pi}{12}\right) \quad \left(2,\frac{5\pi}{12}\right)$$

(e) $\sin 2\theta \neq 2$ kesişmez

3. Kutupsal Koordinatlarda Alan Hesabı

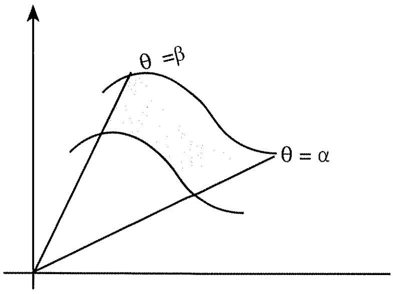


r= f (θ) eğrisinin $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ açıları arasındaki bölgesinin alanı

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)d\theta}$$ ile hesaplanır.

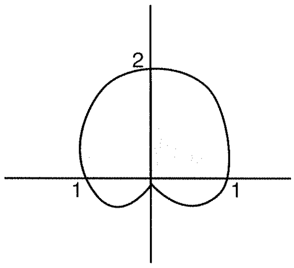
- $\left.\begin{array}{l} r = f(\theta) \\ r = g(\theta) \end{array}\right\}$ eğrilerinin arasındaki bölgenin $\theta=\alpha$ ve $\theta=\beta$ açıları ile sınırlı bölgesinin alanı

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f^2(\theta) - g^2(\theta)]}$$ ile hesaplanır.



Örnek

r = 1 + sinθ kardiyoidinin sınırladığı kapalı bölgenin alanı nedir?



$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\sin\theta)^2 d\theta$$

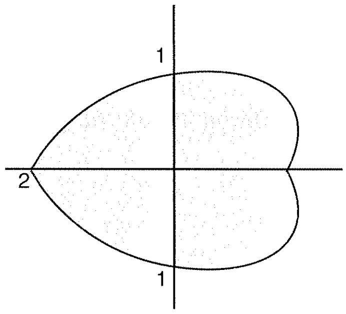
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\sin\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[(2\pi - 2 + \pi) - (0-2)] = \frac{3\pi}{2}$$

Örnek

r = 1 – cosθ kardiyoidinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi} [1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta]d\theta$$

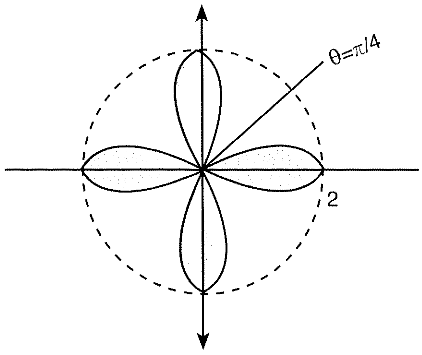
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[2\pi + \pi] = \frac{3\pi}{2}$$

Örnek

$r = 2\cos 2\theta$, 4 yapraklı gül eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



$$A = 8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} 4\cos^2(2\theta)d\theta$$

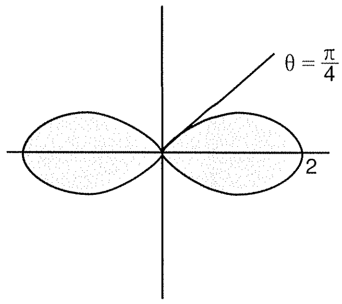
$$= 16\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 4\theta}{2}d\theta$$

$$= 8\cdot\left(\theta + \frac{\sin 4\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= 8\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi$$

Örnek

$r^2 = 4\cos 2\theta$ lemniskat eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



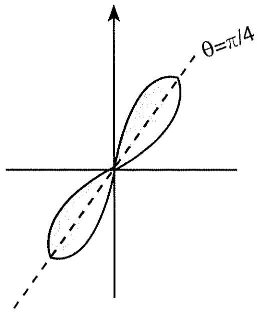
$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\theta$$

$$= 2\cdot\int_0^{\pi/4} 4\cos 2\theta d\theta$$

$$= 4\sin 2\theta\,\Big|_0^{\pi/4} = 4.1 = 4$$

Örnek

$r^2 = \sin 2\theta$ lemniskat eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\theta$$

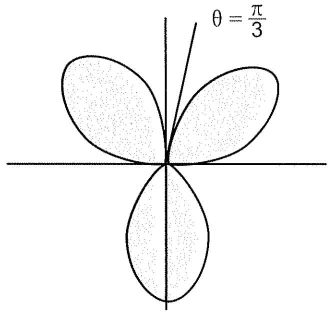
$$= 2\int_0^{\pi/4} \sin 2\theta d\theta$$

$$= (-\cos 2\theta)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= 0-(-1) = 1$$

Örnek

$r = \sin 3\theta$, 3 yapraklı gül eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



$$A = 3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} r^2 d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta d\theta$$

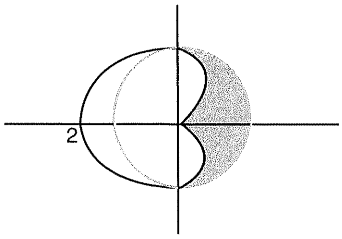
$$= \frac{3}{2}\cdot\int_0^{\pi/3} \left(\frac{1-\cos 6\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\left(\theta - \frac{\sin 6\theta}{6}\right)\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Örnek

r = 1 çemberinin içinde r = 1 − cosθ kardiyoidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$$A=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[1^2-(1-\cos\theta)^2\right]d\theta$$

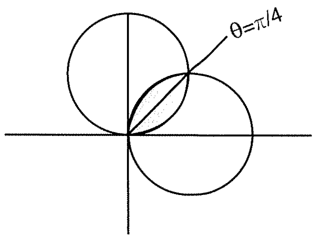
$$=\int_{0}^{\pi/2}\left[1-1+2\cos\theta-\cos^2\theta\right]d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}\left(2\cos\theta-\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta=2\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot\left(\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$=2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-\pi/4$$

Örnek

r = cosθ ve r = sinθ eğrilerinin arakesitinde kalan bölenin alanını bulunuz.



$\cos\theta=\sin\theta$

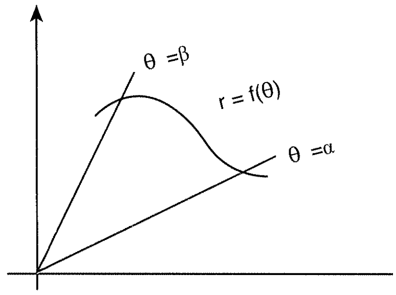
$\tan\theta=1 \qquad \theta=\pi/4$

$$\text{Alan}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\theta-\frac{\sin2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi-2}{8}$$

4- Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğu Hesabı



r = f(θ) eğrisinin θ = α ve θ = β açıları arasındaki yayının uzunluğu

$\boxed{l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta}$ ile hesaplanır.

Örnek

r = 1 + cosθ eğrisinin yay uzunluğunu hesaplayınız.

$$\left.\begin{array}{l}r=1+\cos\theta\\ \underline{r'=-\sin\theta}\end{array}\right\}\ l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2\theta+2\cos\theta+\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\theta}\,d0$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=2\cdot2\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=4\cdot\frac{\sin\theta/2}{1/2}\Bigg|_0^{\pi}=\left(8\sin\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=8\cdot1=8$$

DİZİLER VE SERİLER

1) Diziler

Tanım kümesi doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi adı verilir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa (a_n) dizisine sınırlı dizi denir.

Örnek

$a_n = (-1)^n$ için $|a_n| = |(-1)^n| = 1$

olduğundan dizi sınırlıdır.

Örnek

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ için $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1$ olduğundan dizi sınırlıdır.

Örnek

$a_n = \frac{\cos n}{n}$ **için** $|a_n| = \left|\frac{\cos n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leq 1$

olduğundan dizi sınırlıdır.

Örnek

$a_n = \frac{\sin n}{n}$ için $|a_n| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leq 1$ olduğundan dizi sınırlıdır.

Tanım

Üstten sınırlı bir dizinin üst sınırlarının en küçüğüne en küçük üst sınır (eküs) ya da supremum, alttan sınırlı bir dizinin alt sınırlarının en büyüğüne ise en büyük alt sınır (ebas) veya infimum denir.

Örnek

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n}{n+1}$ **ise inf (a_n) ve sup (a_n) kaçtır?**

Sup $(a_n) = 2$, inf $(a_n) = -2$

Örnek

$a_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)$ **ise inf(a_n) ve sup(a_n) kaçtır?**

sup$(a_n) = 1$

inf$(a_n) = -1$

Örnek

$a_n = \left[\!\left[(-1)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)\right]\!\right]$

ise inf(a_n) ve sup(a_n) kaçtır?

sup$(a_n) = 1$, inf$(a_n) = -2$

- Yakınsak bir dizinin tek limiti vardır.
- Yakınsak her dizi sınırlıdır.

Kural:

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$a_n < a_{n+1}$ ise $\Leftrightarrow$ (a_n) artan

$a_n > a_{n+1}$ ise $\Leftrightarrow$ (a_n) azalan

$a_n \leq a_{n+1}$ ise $\Leftrightarrow$ (a_n) azalmayan

$a_n \geq a_{n+1}$ ise $\Leftrightarrow$ (a_n) artmayan

- Artan veya azalan dizilere monoton diziler denir.
- Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

Örnek

$a_n = \frac{2n}{3n+1}$ dizisinin monotonluğunu inceleyin.

$$a_n + 1 - a_n = \frac{2(n+1)}{3(n+1)+1} - \frac{2n}{3n+1} = \frac{2n+2}{3n+4} - \frac{2n}{3n+1}$$

$$= \frac{6n^2 + 6n + 2n + 2 - 6n^2 - 8n}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{2}{(3n+1)(3n+4)} > 0$$

monoton artan.

Örnek

$a_n = \frac{n}{n+2}$ dizisinin monotonluğunu inceleyiniz?

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} = \frac{n^2 + 2n + n + 2 - n^2 - 3n}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{2}{(n+3)(n+2)} > 0$$

Monoton artan

Örnek

$a_n = \frac{2n+1}{2n-3}$ **dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.**

$a_n = \left\{-3, 5, \frac{7}{3}, ...\right\}$ monoton değil

Dizilerin Yakınsaklığı
Kurallar:

$\lim a_n = a$, $\quad \lim b_n = b$, $\quad c \in \mathbb{R}$ olsun.

- $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$
- $\lim (ca_n) = c . \lim a_n$
- $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$
- $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \begin{pmatrix} bn \neq 0 \\ b \neq 0 \end{pmatrix}$

Örnek

$a_n = \frac{n+3}{3n-5}$ dizisinin monotonluğunu inceleyiniz?

$a_n = \left\{-2, 5, \frac{3}{2}, ...\right\}$ monoton değil

Örnek

$a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ **dizisinin limitinin $\frac{1}{10}$ komşuluğu dışında kaç terimi vardır?**

$\forall \varepsilon > 0$, $|a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ sayısı arıyoruz.

$$a = \lim a_n = 2 \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{2n+1-2n-2}{n+1} < \frac{1}{10}\right|$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow n + 1 > 10$$

$$n > 9$$

8 terim komşuluk dışındadır.

Teorem:

$\lim a_n = a$ ise

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a \text{ olur.}$$

Örnek

$\lim \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$ **limitinin değerini hesaplayınız.**

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim a_n = 0$ olduğundan

$$\lim \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = 0 \text{ olur.}$$

Örnek

$\lim \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}\right)$ **limitinin değerini hesaplayınız?**

$a_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim a_n = 1$ olduğundan

$$\lim \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}\right) = 1 \text{ olur.}$$

Kural

(a_n) pozitif terimli bir dizi

$\lim \frac{a_n + 1}{a_n} = k$ ise $\lim \sqrt[n]{a_n} = k$ olur.

Örnek

$\sqrt[n]{n}$ dizisinin limitini bulunuz.

$a_n = n$ alalım

$a_{n+1} = (n + 1)$ olur

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ olur.

Kural

$a_n > 0$ ve $\lim(a_n) = a$ olacak şekilde bir (a_n) dizisi olsun. O zaman

$\lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} = a$ olur.

Örnek

$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ **dizisinin limitini bulunuz.**

$a_n = \frac{1}{n}$ alalım.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}$$

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim a_n = 0$$

Örnek

$a_n = \frac{\sin n}{n}$ **dizisinin limitini bulunuz.**

$-1 \le \sin n \le 1$

$$\underbrace{\lim\left(-\frac{1}{n}\right)}_{0} \le \lim\left(\frac{\sin n}{n}\right) \le \underbrace{\lim\left(\frac{1}{n}\right)}_{0}$$

$\lim \frac{\sin n}{n} = 0$ (sandviç teoremi)

Örnek

$a_n = \frac{\cos n}{n}$ **dizisinin limitini bulunuz.**

$-1 \le \cos n \le 1$

$$\underbrace{\lim\left(-\frac{1}{n}\right)}_{0} \le \lim\left(\frac{\cos n}{n}\right) \le \underbrace{\lim\left(\frac{1}{n}\right)}_{0} \Rightarrow \lim \frac{\cos n}{n} = 0$$

(sandviç teoremi)

Örnek

$\lim\left(\frac{2n-3}{2n+1}\right)^{3n}$ **limitinin değeri nedir?**

$\lim\left(1-\frac{4}{2n+1}\right)^{3n}=e^{\frac{(-4)\cdot 3}{2}}=e^{-6}$

Örnek

$\lim\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{4n}$ **limitinin değeri nedir?**

$\lim\left(1+\frac{3}{3n-2}\right)^{4n}=e^{\frac{3.4}{3}}=e^{4}$

Örnek

$a_n=(-1)^n$ dizisinin limiti nedir?

$a_n=\{(-1),1,(-1),1,\dots\}$

$\sup(a_n)=1$ $\quad\inf(a_n)=-1$

Limiti yoktur.

Örnek

$a_n=(-1)^n\cdot\frac{2n}{n+1}$ **dizisinin limiti nedir?**

$\left.\begin{array}{l}\sup(a_n)=2\\ \inf(a_n)=-2\end{array}\right\}$ limiti yoktur.

Örnek

$a_n=(-1)^n.\frac{n}{n+1}$ dizisinin limiti nedir?

$\left.\begin{array}{l}\sup(a_n)=1\\ \inf(a_n)=-1\end{array}\right\}$ limiti yoktur.

Örnek

$a_n=(-1)^n\cdot\frac{n}{n^2+4}$ **dizisinin limiti nedir?**

$\lim(-1)^n\cdot\frac{n}{n^2+4}=0$

Kural

$|r|<1$ ise $\lim r^n=0$

Örnek

$a_n=\frac{2^n}{3^n}$ **ve** $b_n=(-1)^n\frac{3^n}{5^n}$ **dizilerinin limitlerini bulunuz.**

$\lim a_n=\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n=0 \qquad \left|\frac{2}{3}\right|<1$

$\lim b_n=\lim(-1)^n\frac{3^n}{5^n}=0 \qquad \left|-\frac{3}{5}\right|<1$

Örnek

$a_n = \frac{3^n}{7^n}$ ve $b_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{5^n}$ dizilerinin limitlerini bulunuz.

$\lim a_n = \lim\left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$

$\left|\frac{3}{7}\right| < 1$

$\lim b_n = \lim(-1)^n \cdot \frac{2^n}{5^n} = 0$

$\left|-\frac{2}{5}\right| < 1$

Örnek

$a_1 = 1$, $n > 1$ için $a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ dizisi yakınsak olduğuna göre $\lim(a_n)$ kaçtır?

$\lim(a_n) = a$ ise $\lim(a_{n-1}) = a$ olur.

$a = \sqrt{a+6} \Rightarrow a^2 = a+6$

$a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3$

Örnek

$a_1 = 1$, $n > 1$ için $a_n = \sqrt{3+2a_{n-1}}$ dizisi yakınsak olduğuna göre $\lim(a_n)$ kaçtır?

$\lim(a_n) = a$ ise $\lim(a_{n-1}) = a$ olur.

$a = \sqrt{3+2a} \Rightarrow a^2 = 3 + 2a$

$a^2 - 2a - 3 = 0$

$a = 3$

Örnek

Aşağıdaki dizilerin limitlerini bulunuz.

(a) $5 + \frac{1}{3^n}$ **(b)** $\frac{3\cos n + n}{2n+1}$

(c) $\frac{n+3}{n^2-7}$ **(d)** $\frac{(-1)^n}{2n+1}$

(e) $\frac{\cos^2 n}{3^n}$ **(f)** $\sqrt[n]{n^3}$

(g) $n \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$ **(h)** $n \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)$

(a) $\lim\left(5 + \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{0}\right) = 5$

(b) $\lim\left(\frac{3\cos n + n}{2n+1}\right) = \underbrace{\lim\left(\frac{3\cos n}{2n+1}\right)}_{0} + \underbrace{\lim\left(\frac{n}{2n+1}\right)}_{1/2} = 1/2$

(c) $\lim\left(\frac{n+3}{n^2-7}\right) = 0$

(d) $\lim \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$

(e) $\lim \frac{\cos^2 n}{3^n} = 0$ (sandviç teoremi)

(f) $\lim \sqrt[n]{n^3} = \lim(\sqrt[n]{n})^3 = 1^3 = 1$

(g) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0}$ var.

$\frac{1}{n} = u \Rightarrow \underset{\text{L.Hosp}}{\lim\limits_{u \Rightarrow 0}} \frac{1-\cos(2u)}{u} = \lim\limits_{u \to 0} \frac{2\sin(2u)}{1} = 0$

(h) $\lim \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim(\ln(e^3)) = 3$

Örnek

Aşağıdaki dizilerin limitlerini bulunuz?

a) $\dfrac{2n+(-1)^n}{n}$ **b)** $\dfrac{2n+1}{\sqrt{n}+3}$

c) $2+(-1)^n$ **d)** $\dfrac{\cos n}{5^n}$

e) $n.\ln\left(\dfrac{2n+1}{2n+4}\right)$ **f)** $n^2\left(1-\cos\left(\dfrac{2}{n}\right)\right)$

g) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n}$ **h)** $\dfrac{2n+\cos n}{3n-1}$

a) $\lim\dfrac{2n+(-1)^n}{n}=\lim\left(\dfrac{2n}{n}\right)+\underbrace{\lim\dfrac{(-1)^n}{n}}_{\substack{\shortparallel\\0}}=2$

b) $\lim\dfrac{2n+1}{\sqrt{n}+3}=\infty$

c) $\lim(2+(-1)^n)\begin{cases}\inf=1\\ \sup=3\end{cases}$ limit yok

d) $\lim\dfrac{\cos n}{5^n}=0$ (Sandviç teoremi)

e) $\lim\ln\left(1-\dfrac{3}{2n+4}\right)^n=\lim\ln(e^{-3/2})=-\dfrac{3}{2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-\cos(2u)}{u^2}=\dfrac{0}{0}$ var.

$\left.\begin{matrix}\frac{1}{n}=u\\ u\to 0\end{matrix}\right\}\overset{\text{L'Hosp}}{\lim\limits_{u\to 0}}\dfrac{\text{Sin}2u.2}{2u}=2$

g) $\lim\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n}$

$\lim\dfrac{1}{\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)^n}=\lim\dfrac{1}{\infty=\left(\frac{9}{8}\right)^n+\underbrace{\left(\frac{8}{15}\right)^n}_{\substack{\shortparallel\\0}}}=0$

h) $\lim\dfrac{2n+\cos n}{3n-1}=\underbrace{\lim\dfrac{2n}{3n-1}}_{\frac{2}{3}}+\underbrace{\lim\dfrac{\cos n}{3n-1}}_{\substack{\shortparallel\\0}}=\dfrac{2}{3}$

Örnek

$\lim\dfrac{n^2}{3^n}$ **değeri nedir?**

$\boxed{\begin{matrix}n^n>n!>a^n>n^k>\ln n\\ (a>1)(k\geq 1)\end{matrix}}$

$\lim\dfrac{n^2}{3^n}=0$

Örnek

$\lim\dfrac{n^4}{n!}$ **değeri nedir?**

$n^n>n!>a^n>n^k>\ln n$

$(a>1)\ (k\geq 1)$

$\lim\dfrac{n^4}{n!}=0$

Örnek

Aşağıdaki limitleri bulunuz?

(a) $\lim\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{n^2}{n^3}\right)$

(b) $\lim\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)$

(c) $\lim\frac{2^{n+2}+5^{n-1}}{2^{n-1}+5^{n+2}}$

(d) $\lim n\cdot\left[1-\sqrt{\frac{4}{n}+1}\right]$

(e) $\lim\frac{1}{n}\cdot\left[\left(2+\frac{1}{n}\right)+\left(2+\frac{2}{n}\right)+\left(2+\frac{3}{n}\right)+\ldots+\left(2+\frac{n}{n}\right)\right]$

(f) $\lim\frac{n!+\ln n}{n^2+n^n}$

(g) $\lim\frac{n^{1000}+1000^n}{\ln n+n!}$

(a) $\lim\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim\frac{\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}}{n^3}$

$=\lim\frac{2n^3+..}{6n^3}=\frac{1}{3}$

(b) $\lim\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$

(c) $\lim\frac{5^{n-1}+2^{n+2}}{5^{n+2}+2^{n-1}}=\lim\frac{5^{n-1}}{5^{n+2}}=\frac{1}{125}$

(Büyükler oranlanır.)

(d) $\lim\left[n-\sqrt{4n+n^2}\right]=\lim\left[n-\sqrt{n^2+4n}\right]$

$=\lim\left(n-\left(n+\frac{4}{2}\right)\right)=-2$

(e) $\lim\frac{1}{n}\cdot\left[2n+\frac{1+2+\ldots+n}{n}\right]$

$=\lim\frac{1}{n}\cdot\left[2n+\frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n}\right]=\lim\frac{1}{n}\cdot\left[2n+\frac{n+1}{2}\right]$

$=\lim\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{5n+1}{2}\right]=\lim\frac{5n+1}{2n}=\frac{5}{2}$

(f) $\lim\frac{n!+\ln n}{n^2+n^n}=\lim\frac{n!}{n^n}=0$

(Büyükler oranlanır)

(g) $\lim\frac{n^{1000}+1000^n}{\ln n+n!}=\lim\frac{1000^n}{n!}=0$

(Büyükler oranlanır)

Örnek

$\lim\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$ **limitinin değeri nedir?**

$a_n=\sqrt[n]{n}\Rightarrow\lim\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}=a$ olduğundan

($\lim a_n=a$)

$\lim a_n=\lim\sqrt[n]{n}=1$

Örnek

a_n yakınsak ve pozitif tanımlı bir dizi olmak üzere

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)$ **ise $\lim a_n$ nedir?**

$\left.\begin{array}{l}\lim a_n=a\\ \lim a_{n+1}=a\end{array}\right\}\ a=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+3}{a}\right)$

$2a^2=a^2+3$

$a^2=3\Rightarrow a=\sqrt{3}$

2) Seriler

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots$

ifadesine **seri** adı verilir, a_n ifadesi ise serinin **genel terimi**dir.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ serisi için

$S_k=a_1+a_2+\ldots+a_k$ şeklindeki toplama serinin **kısmı toplamlar dizisi** denir. Serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise seriye **yakınsak seri** denir. Bu dizinin limitine ise seri toplamı adı verilir. Yakınsak olmayan serilere ise **ıraksak seriler** denir.

Örnek

Aşağıdaki serilerin toplamını bulunuz?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{(5k-1)(5k+4)}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos^{2k}\theta \; (\theta \neq k\pi)$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-3^k}{6^k}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+2}{(k(k+1))^2}$

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

i) $\sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{k+1}-2\sqrt{k}+\sqrt{k-1}$

j) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+2)}$

a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1$$
$$=\left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)$$
$$+\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)$$
$$+\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)$$
$$+$$
$$\vdots$$

b) $$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1+r+r^2+\ldots = \frac{1}{1-r} \qquad |r|<1}$$

$$3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = 6$$

$$\left|\frac{1}{2}\right|<1$$

c) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5k-1}-\frac{1}{5k+4}\right) = \left(\frac{1}{4}-\cancel{\tfrac{1}{9}}\right) = \frac{1}{4}$$
$$+\left(\cancel{\tfrac{1}{9}}-\cancel{\tfrac{1}{14}}\right)$$
$$+\left(\cancel{\tfrac{1}{14}}-\cancel{\tfrac{1}{19}}\right)$$
$$+$$
$$\vdots$$

d) $$\sum_{k=1}^{\infty}\cos^{2k}\theta = \cos^2\theta+\cos^4\theta+\cos^6\theta+\ldots$$
$$=\cos^2\theta\cdot(1+\cos^2\theta+\cos^4\theta+\ldots)$$
$$=\cos^2\theta\cdot\frac{1}{1-\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \tan^2\theta$$

e) $$\sum_{k=3}^{\infty}\ln\left(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right) = \sum_{k=3}^{\infty}\ln\left[\frac{k\cdot(k+2)}{(k+1)^2}\right]$$
$$=\sum_{k=3}^{\infty}(\ln k-\ln(k+1)) + \sum_{k=3}^{\infty}(-\ln(k+1)+\ln(k+2))$$
$$=(\ln 3-\ln 4)+(-)\ln(4)+\ln 5$$
$$+(\ln 4-\ln 5)+(-)\ln 5+\ln 6$$
$$+\ \vdots \qquad + \qquad \vdots$$
$$+\ln n-\ln(n+1)+(-)\ln(n+1)+\ln(n+2)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$=\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\underbrace{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}_{\lim\,=\,0}=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

f) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}$$

g) $$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2} = 2\cdot\begin{bmatrix} 1-\cancel{\frac{1}{2^2}}+ \\ \cancel{\frac{1}{2^2}}-\cancel{\frac{1}{3^2}}+ \\ \cancel{\frac{1}{3^2}}-\cancel{\frac{1}{4^2}}+ \\ \vdots \end{bmatrix} = 2$$

h) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}_{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{1}$$
$$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-1)=\infty$$
$$+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})$$
$$+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})$$
$$+\ \vdots$$
$$+\sqrt{n}-\cancel{\sqrt{n-1}}$$

i) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})+\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-\sqrt{k}+\sqrt{k-1})$

$$\begin{array}{ll} \sqrt{3}-\sqrt{2} & +(-\sqrt{2}+\sqrt{1}) \\ +\sqrt{4}-\sqrt{3} & +(-\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ +\ \vdots & +\ \vdots \\ +\sqrt{n+1}-\sqrt{n} & +(-\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) \\ \ \vdots & \end{array}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt{2})+\frac{\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{1}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt{2})+\frac{1}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$

$$=1-\sqrt{2}$$

j) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+2)}$

$$=-\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}-\frac{1}{3.5}-\frac{1}{4.6}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$$

$$=-\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\ldots\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}+..\right.$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

Örnek

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **değeri nedir?**

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)n+2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{array}{l}\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{3}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\\ -\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{4}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[1-\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{n+2}}\right]=\frac{1}{4}$$

Örnek

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right]$ **değeri kaçtır?**

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\ln k-\ln(k+1))-\sum_{n=2}^{\infty}\ln(k+1)-\ln(k+2)$$

$$\begin{array}{llll} = & (\ln2-\cancel{\ln3}) & - & (\ln3-\cancel{\ln4}) \\ + & (\cancel{\ln3}-\cancel{\ln4}) & - & (\cancel{\ln4}-\cancel{\ln5}) \\ + & \vdots & - & \vdots \end{array}$$

$$+\ \cancel{\ln n}-\ln(n+1)-(\cancel{\ln(n+1)})-\ln(n+2))$$

$$=\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\underbrace{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}_{\text{limiti sıfırdır.}}=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Örnek

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ **değeri nedir?**

$$=\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{-4}{15}$$

Örnek

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{1-n}$ **değeri kaçtır?**

$$2\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}=2.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

Örnek

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{n+2}$ **değeri nedir?**

$$=\left(\frac{e}{\pi}\right)^3+\left(\frac{e}{\pi}\right)^4+\left(\frac{e}{\pi}\right)^5+\ldots=\left(\frac{e}{\pi}\right)^3\cdot\left[1+\left(\frac{e}{n}\right)+\left(\frac{e}{\pi}\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{e}{\pi}\right)^3\cdot\frac{1}{1-\frac{e}{\pi}}=\frac{e^3}{\pi^3}\cdot\frac{1}{\frac{\pi-e}{\pi}}=\frac{e^3}{\pi^2(\pi-e)}$$

Örnek

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot3^n+5\cdot4^n}{12^n}$ **değeri kaçtır?**

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{5}{2}=\frac{19}{6}$$

Örnek

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4.5^n-3.2^n}{10^n}$ **değeri kaçtır?**

$$=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-3.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=4\cdot1-3\cdot\frac{1}{4}$$

$$=4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$$

Kural: $|r|<1$ olmak üzere,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot r^{n-1}=\frac{1}{(1-r)^2}}$$

Örnek

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^k}$ **değeri kaçtır?**

$$\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{16}{25}}=\frac{1}{\frac{16}{5}}$$

$$r=\frac{1}{5}\qquad=\frac{5}{16}$$

Örnek

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{7^k}$ **serisinin değeri kaçtır?**

$$=\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{k-1}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{\frac{36}{49}}=\frac{1}{\frac{36}{7}}=\frac{7}{36}$$

$$r=\frac{1}{7}$$

Örnek

$\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\frac{2^{k+1}}{7^k}$ **serisinin değeri kaçtır?**

$$2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^k=2\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)^k$$

$$=2\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)^{k-1}$$

$$=-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2}{7}\right)^2}$$

$$=-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{\frac{81}{49}}=-\frac{4}{\frac{81}{7}}=-\frac{28}{81}$$

Örnek

$\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k.k.\frac{3^k}{5^{k+1}}$ **ise n değeri kaçtır?**

$$\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot(-1)^k\cdot\frac{3^k}{5^k}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^k$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}$$
$$=\left(-\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$=-\frac{3}{25}\cdot\frac{1}{\frac{64}{25}}=-\frac{3}{64}$$

Örnek

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3k+1}{7^k}$ **serisinin değeri kaçtır?**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k}{7^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7^k}=\frac{3}{7}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots\right)$$
$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}}$$
$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{\frac{36}{49}}+\frac{1}{6}=\frac{3}{\frac{36}{7}}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12}+\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$$

Örnek

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^k}\right)^{\ln 3}$ **serisinin değeri kaçtır?**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^{k\ln 3}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(e^{\ln 3})^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

Örnek

$\sum\limits_{k=-\infty}^{n}3^k=\frac{81}{2}$ **ise n değeri kaçtır?**

$$3^{-\infty}+\ldots+3^n=\frac{81}{2}$$
$$3^n\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)=\frac{81}{2}$$
$$3^n\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{81}{2}\quad\Rightarrow 3^n\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{81}{2}$$
$$\Rightarrow 3^n=\frac{81}{2}\cdot\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow 3^n=27$$

$$\Rightarrow n=3$$

Örnek

$\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+k^2}}$ **serisinin değeri kaçtır?**

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k\cdot(k+1)}}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right)+\cancel{\ldots}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Örnek

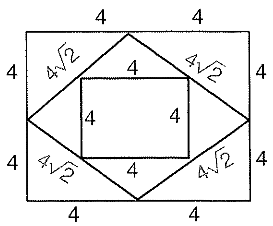
Bir kenarı 8 cm olan bir kare veriliyor.

Karenin kenarlarının orta noktalarını birleştirerek yeni bir kare oluşturuluyor. Bu şekilde devam edilerek sonsuz çoklukta kare elde ediliyor.

Bu karelerin;

a) Çevreleri toplamı,

b) Alanları toplamı kaçtır?



a) $\text{Çevre} = 32 + 16\sqrt{2} + 16 + \ldots$

$$= 32\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\ldots\right)$$

$$= 32\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 32\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$(\sqrt{2}+1)$$

$$= 32.(2+\sqrt{2})$$

$$= 64 + 32\sqrt{2}$$

a) $\text{Alan} = 64 + 32 + 16 + \ldots$

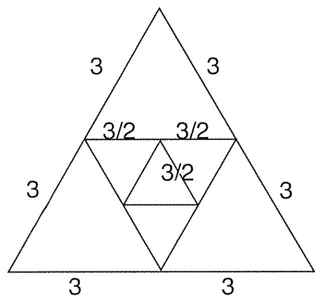
$$= 64\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right) = 64\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{64}{\frac{1}{2}} = 128$$

Örnek

Bir kenarı 6 cm olan bir eşkenar üçgen veriliyor. Üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni bir üçgen oluşturuluyor. Bu şekilde devam edilerek sonsuz çoklukta üçgen oluşturuluyor. Bu üçgenlerin;

a) Çevreleri toplamı,

B) Alanları toplamı kaçtır?



a) $\text{Çevre} = 18 + 9 + \frac{9}{2} + \ldots$

$$= 18.\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right)$$

$$= 18\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{18}{\frac{1}{2}} = 36$$

b) $\text{Alan} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} + \cdots$

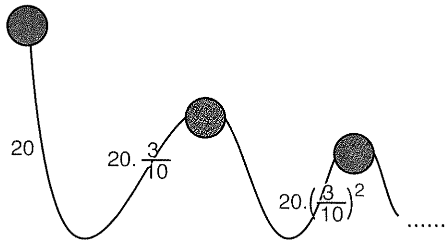
$$= \frac{6^2\sqrt{3}}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)$$

$$= 9\sqrt{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = 9\sqrt{3}\cdot\frac{4}{3} = 12\sqrt{3}$$

Örnek

20 m yükseklikten bırakılan bir top yere çarpınca düştüğü yüksekliğin $\frac{3}{10}$ 'u kadar yükseliyor.

Topun duruncaya kadar aldığı yol kaç metredir?



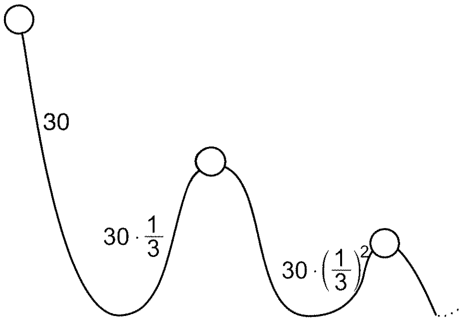
$$\text{Yol} = 20 + 2.\left[20 \cdot \frac{3}{10} + 20 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 + ...\right]$$

$$= 20 + 2.20.\frac{3}{10} \cdot \left[1 + \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + ...\right]$$

$$= 20 + 12.\frac{1}{1-\frac{3}{10}} = 20 + \frac{12}{\frac{7}{10}} = 20 + \frac{120}{7} = \frac{260}{7} \text{ metre}$$

Örnek

30 metre yükseklikten bırakılan bir top yere çarpınca düştüğü yüksekliğin $\frac{1}{3}$ ü kadar yükseliyor. Topun duruncaya kadar aldığı yol kaç metredir?



$$\text{Yol} = 30 + 2 \cdot \left[30 \cdot \frac{1}{3} + 30 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots\right]$$

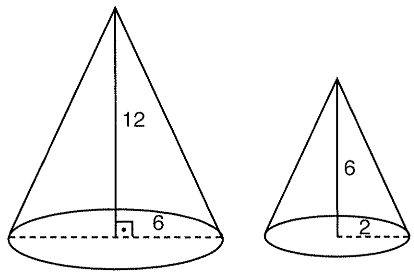
$$= 30 + 2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= 30 + 20 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 30 + \frac{20}{\frac{2}{3}} = 30 + 30 = 60 \text{ metre}$$

Örnek

Yüksekliği 12 br, taban yarıçapı 6 br olan bir koni veriliyor. Yüksekliğin $\frac{1}{2}$si ve yarıçapın $\frac{1}{3}$ ü uzunluklarında yeni bir koni oluşturuluyor.

Bu şekilde devam edilerek sonsuz çoklukta koniler oluşturuluyor. Bu konilerin hacimleri toplamı kaçtır?



$V_1 = \frac{1}{3}\pi.6^2.12 \qquad V_2 = \frac{1}{3}\pi.2^2.6 ...$

$$\text{Hacim} = \frac{1}{3}\pi.6^2.12.\left(1 + \frac{1}{18} + ...\right) = \frac{\pi \cdot 36.12}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{18}}$$

$$= \pi.144.\frac{1}{\frac{17}{18}} = \pi.\frac{144.18}{17} = \frac{2592\pi}{17} \text{br}^3$$

Teorem:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim a_n = 0$ olur. Fakat bu teoremin tersi doğru değildir.

Örneğin;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisi yakınsak ve $\lim a_n = \lim \frac{1}{n^2+1} = 0$

Fakat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ için $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$ olduğu halde bu seri harmonik seridir ve ıraksaktır.

Teorem:

$\lim a_n \neq 0$ ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.

Örneğin şu serileri düşünelim:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2}{k}\right)$ **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} e^{1/n}$ **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+5}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n-3}$

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \cos\left(\frac{2}{k}\right) = \cos 0 = 1 \neq 0$ ıraksak seri

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2 \neq 0$ ıraksak seri

c) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{1/n} = e^0 = 1 \neq 0$ ıraksak seri

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+5} = \frac{3}{2} \neq 0$ ıraksak seri

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \Rightarrow$ limit yok $\Rightarrow$ ıraksak seri

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n-3} = \infty \Rightarrow$ ıraksak seri

Pozitif Terimler İçin Yakınsaklık Testleri:

Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq 0$ ise $\sum a_n$ serisine **pozitif terimli seri** adı verilir.

1. Karşılaştırma Testi:

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ ve $a_n \leq k.b_n$ olmak üzere bir k sabiti mevcut olsun.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ıraksaktır.

Örneğin;

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k(k+2)}$ verilsin.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k(k+2)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1-\cancel{\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}} \\ \cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}} \\ \vdots \\ \cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1} \\ \cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{n+1}}^{0}-\cancel{\frac{1}{n+2}}^{0}\right]$$

$= \frac{3}{4} \Rightarrow$ Yakınsak seri

Kural:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ için

$\alpha > 1$ ise seri yakınsaktır.

$\alpha \leq 1$ ise seri ıraksaktır.

Özel olarak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonik seri olarak adlandırılır ve ıraksaktır.

Örneğin;

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ yakınsak iken ($\alpha = 3 > 1$)

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ıraksaktır. ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

2. Limit Karşılaştırma Testi

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif terimli seriler ve

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ verilsin.

- $0 < L < \infty$ ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ aynı karakterlidir.
- $L = 0$ ise $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır.
- $L = \infty$ ise $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

Örnek olarak;

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+3k+5}$ **b)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(k+1)}{k^2+3k+5}$

c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2+4}}$ **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)^2}{(k^2+3)^3}$

e) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-k}}{k^3+1}$

Serilerinin yakınsaklığını inceleyelim.

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+3k+5}\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ yakınsak $(\alpha=2>1)$

b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+3k+5}\sim\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{k}{k^2}=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$ harmonik seri $\Rightarrow$ ıraksak

c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2+4}}\sim\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{2/3}}\left(\alpha=\frac{2}{3}<1\right)\Rightarrow$ ıraksak

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^2}{(k^2+3)^3}\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^6}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$ $(\alpha=4>1)$ yakınsak

e) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-k}}{k^3+1}\sim\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ $(\alpha=3>1)$ yakınsak

3. İntegral Testi

(a_k) pozitif bir dizi, f, $[1,\infty)$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon verilsin. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $f(k)=a_k$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}a_k \text{ yakınsak} \iff \int_1^{\infty}f(x)dx \text{ yakınsak}}$$

Örnek

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}$ **serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}\sim\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=(\arctan x)\Big|_1^{\infty}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Yakınsak

Örnek

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-1/k}}{k^2}$ **serisinin yakınsaklığını inceleyiniz?**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-1/k}}{k^2}\sim\int_1^{\infty}\frac{e^{-1/x}}{x^2}dx=\int_{-1}^{0}e^u du=e^u\Big|_{-1}^{0}$$
$$-\frac{1}{x}=u\Rightarrow\frac{1}{x^2}dx=du\Rightarrow 1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$$

Yakınsak

Örnek

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ **ve** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ **serilerinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}\sim\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u}\Rightarrow \text{Harmonik}$$

Iraksak seri

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}\sim\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u^2}\quad(\alpha=2>1)$$

Yakınsak $\quad \ln x=u$

$\frac{1}{x}dx=du$

4. Oran Testi

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ pozitif terimli serisi için

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=L$ olsun.

Eğer;

- $L<1$ ise $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ yakınsak,
- $L>1$ ise $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ ıraksak
- $L=1$ ise test başarısız

Örnek

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ **serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1 \text{ Yakınsak seri}$$

Örnek

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ **serisinin yakınsaklığını inceleyiniz?**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1 \text{ Yakınsak seri}$$

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.n!}{n^n}$ **serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n.n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3.(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{3}{e} > 1 \text{ Iraksak seri}$$

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n.(n!)^2}$ **serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{3^{n+1}.((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{3^n.(n!)^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{3.(n+1).(n+1)} = \frac{4}{3} > 1 \text{ Iraksak seri}$$

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n.(n!)^2}{(2n)!}$ **serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}.[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{5^n.(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5.(n+1).(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{5}{4} > 1 \text{ ıraksak seri}$$

5. Kök Testi

(a_n) pozitif terimli bir dizi ve

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ verilsin.

Eğer;

- $L < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak,
- $L > 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksak,
- $L = 1$ ise test başarısız.

Örnek

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}+\frac{6}{n}\right)^n$ **c)** $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2}$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

a) $a_n = \frac{n^2}{5^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{5} = \frac{1}{5} < 1$ yakınsak seri

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{4}+\frac{6}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}+\frac{6}{n} = \frac{1}{4} < 1$ yakınsak seri

c) $a_n = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n = e > 1$ ıraksak seri

Örnek

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}+\frac{4}{n}\right)^n$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$

serilerinin yakınsaklığını inceleyiniz.

(a) $a_n = \frac{3^n}{n^4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(\sqrt[n]{n})^4} = 3$

$3 > 1$ ıraksak seri

Örnek

Aşağıda verilen serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ **b)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin^4 n}{n^3}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^3.e^{-n}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n}$ **f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+4}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n}$ **h)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n.(n!)}$

i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$ **j)** $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k^2}}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ **l)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{e}\right)^n$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik-Iraksak

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} \sim \int_2^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int_{\ln 2}^{\infty} u^2 du = \infty$ Iraksak

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\sin^4 n}{n^3} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$ $(\alpha = 3 > 1)$ Yakınsak

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{e} = \frac{1}{e} < 1$ Yakınsak

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{\ln n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{3\ln n} = \frac{\infty}{\infty}$

L'Hospital $= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{3.\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1$ Yakınsak

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n+4} = \infty \neq 0 \Rightarrow$ Iraksak

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^3}\right)^n \quad |r|=\left|\frac{1}{e^3}\right|<1$ Yakınsak

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n.(n!)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1).(n+1)!}}{\frac{2^n}{n.n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n.2}{(n+1).(n+1)}$

$=0<1$ Yakınsak

i) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln 2)^n} \Rightarrow |r|=\left|\frac{1}{\ln 2}\right|>1$ Iraksak

j) $\sum_{k=1}^{\infty}e^{\frac{1}{k^2}} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}e^{\frac{1}{k^2}}=e^0=1\neq 0$ Iraksak

k) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{(k+1)}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}}=\frac{1}{3}<1$ Yakınsak

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{e}\right)^n$

$|r|=\left|\frac{\pi}{e}\right|>1 \Rightarrow$ Iraksak

Örnek

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ **(b)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{\ln n}$ **(c)** $\sum_{n=2}^{\infty}n^3.e^{-n^2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n.3^n}$ **(e)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{n}\right)^n$ **(f)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3^n)^2}{n^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+1}\right)^n$ **(h)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}$ **(i)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n.n!}$ **(k)** $\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^3}$ **(l)** $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^{2n}$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow (\alpha=2>1) \Rightarrow$ Yakınsak

(b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{\ln n} \sim \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\ln n}=\infty \Rightarrow$ Iraksak

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{e^{n^2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{e^{(n+1)^2}}}{\frac{n^3}{e^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n^2}}{e^{n^2+2n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{2n+1}}=0<1$

$\Rightarrow$ Yakınsak

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{n3^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+3)}{(n+1).3^{n+1}}}{\frac{n+2}{n.3^n}}=\frac{1}{3}<1$

$\Rightarrow$ Yakınsak

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{6}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}=0<1$

$\Rightarrow$ Yakınsak

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3^n)^2}{n^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(3^n)^2}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^2}{n}=0<1$

$\Rightarrow$ Yakınsak

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+1}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{4n+1}\right)^n}=\frac{1}{4}<1$

$\Rightarrow$ Yakınsak

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{\ln n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{2.\ln n}$

(L'Hosp)

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}<1$

$\Rightarrow$ Yakınsak

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{5^n}=\infty \Rightarrow$ Iraksak

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n.n!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}}{\frac{5^n}{n.n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0$

$\Rightarrow$ Yakınsak

(k) $\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^3} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}e^{-k^3}=e^0=1\neq 0 \Rightarrow$ Iraksak

(l) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^{2n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{4n+3}\right)^{2n}$

$=e^{\frac{-2.2}{4}}=e^{-1}=\frac{1}{e}<1 \Rightarrow$ Yakınsak

Örnek

$a_1 = \frac{1}{4}$ ve $a_{n+1} = \frac{2n-1}{3n+4} a_n$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaklığını inceleyiniz.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+4} = \frac{2}{3} < 1$ Yakınsak

Örnek

$a_1 = \frac{2}{3}$ ve $a_{n+1} = \frac{4n+3}{3n-1} a_n$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+3}{3n-1} = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow$ Iraksak

Örnek

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ serisinin yakınsaklığını p değerlerine göre inceleyiniz.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \sim \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

$$\left.\begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{array}\right\} \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^p}$$

($p > 1$ ise yakınsak, $p \le 1$ ise ıraksak)

Alterne Seriler ve Bu Serilerin Yakınsaklığı

Terimlerin işareti ardışık olarak değişen serilere **alterne seriler** adı verilir.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k.k$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$

Teorem: Leibniz Testi

$\forall n \ge 1$ için $0 < a_{n+1} \le a_n$ ve $\lim a_n = 0$ ise

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ serisi yakınsaktır.

Örnek

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$ alterne serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\left.\begin{array}{l} a_k = \frac{1}{2^k} \text{ ise} \\ a_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}} \text{ olur} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 < a_{k+1} \le a_k \\ \text{ve } \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0 \end{array}$$

olduğundan seri yakınsaktır.

Tanım:

- $\sum a_n$ serisi için $\sum |a_n|$ serisi yakınsak ise

  $\sum a_n$ serisine **mutlak yakınsak** denir.

- $\sum a_n$ seri yakınsak fakat $\sum |a_n|$ ıraksak ise

  $\sum a_n$ serisine **şartlı (koşullu) yakınsak** denir.

- Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.

Örnek

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}$ serisini inceleyelim.

$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k^3}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ ($\alpha = 3 > 1$) Mutlak yakınsak dolayısıyla yakınsaktır.

Örnek

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4}$ **serisini inceleyelim.**

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k^4}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \Rightarrow (\alpha = 4 > 1)$ Mutlak yakınsak

dolayısıyla yakınsaktır.

Örnek

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ **serisini inceleyelim.**

$\left.\begin{array}{l} a_k = \frac{1}{k} \text{ alalım.} \\ a_{k+1} = \frac{1}{k+1} \text{ olur.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 < a_{k+1} < a_k \\ \text{ve} \quad \lim a_k = 0 \end{array}$

Seri yakınsaktır.

Fakat $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ıraksak seridir.

Dolayısıyla şartlı yakınsaktır.

Örnek

Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{5^n}{n(3^n+1)}$ **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^{2n}}{4^n}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+7}$ **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{2n-3}$

g) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{(2n)!}$ **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n.\cos n\pi}{5^n}$

i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(\ln n)^2}{n}$ **j)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n!}{n^n}$

k) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n . e^{-\frac{n}{n+1}}$ **l)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n!}{3^n}$

a) $\sum\left|\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}\right| = \sum\frac{1}{5^n} = \sum\left(\frac{1}{5}\right)^n$ Yakınsak

Mutlak yakınsak

b) $\sum\left|\frac{(-3)^n}{n!}\right| = \sum\frac{3^n}{n!} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = 0$ Yakınsak

Mutlak yakınsak

c) $\sum\left|\frac{(-1)^n 5^n}{n(3^n+1)}\right| = \sum\frac{5^n}{n(3^n+1)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1).(3^{n+1}+1)}}{\frac{5^n}{n.(3^n+1)}} = \frac{5}{3} > 1$

Iraksak

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n.5^n}{n(3^n+1)} \neq 0$ Iraksak

d) $\sum\left|(-1)^n \cdot \frac{9^n}{4^n}\right| = \sum\left(\frac{9}{4}\right)^n \Rightarrow$ Iraksak

$\lim(-1)^n \cdot \frac{9^n}{4^n} \neq 0$ Iraksak

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+7}\right| = \sum\frac{1}{n^2+7} \sim \sum\frac{1}{n^2}$ Yakınsak

Mutlak yakınsak

f) $\lim(-1)^n \frac{(2n+1)}{2n-3} \neq 0 \Rightarrow$ Iraksak

g) $\sum\left|\frac{\cos n\pi}{(2n)!}\right| = \sum\frac{1}{(2n)!}$ Yakınsak

Mutlak yakınsak

h) $\sum\left|\frac{n\cos n\pi}{5^n}\right| = \sum\frac{n}{5^n}$ Yakınsak

Mutlak yakınsak

i) $\sum\left|\frac{(-1)^n(\ln n)^2}{n}\right| = \sum\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right) \equiv \int\limits_2^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ Iraksak

$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{(\ln n)^2}{n} \\ a_{n+1} = \frac{(\ln(n+1))^2}{n+1} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a_{n+1} < a_n \\ \lim(-1)\frac{(\ln n)^2}{n} = 0 \end{array}\right\}$ Yakınsak

Şartlı yakınsak

j) $\sum\left|(-1)^n \frac{n!}{n^n}\right| = \sum\frac{n!}{n^n}$ Yakınsak

Mutlak yakınsak

k) $\lim(-1)^n.e^{-\frac{n}{n+1}} \neq 0$ Iraksak

l) $\lim(-1)^n.\frac{n!}{3^n} \neq 0$ Iraksak

Kuvvet Serileri

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = Co + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ...$$

biçimindeki seriye kuvvet serisi denir.

Örnek olarak;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + ...$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ serileri verilebilir.

Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı

$\sum C_n(x-a)^n$ kuvvet serisi için seriyi yakınsak yapan x noktalarının oluşturduğu aralığa **yakınsaklık aralığı**;

$|x-a| < R$ şeklinde yakınsak olduğu aralık için buradaki R sayısına **yakınsaklık yarıçapı** denir.

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ kuvvet serisi için yakınsaklık aralığını iki şekilde bulabiliriz.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = L$ ya da $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = L$ ile L sayısını buluruz.

- $L \neq 0$ ise $R = \frac{1}{L}$'dir.

  $|x-a| < R$ için seri yakınsak,

  $|x-a| > R$ için seri ıraksaktır.
- $L = 0$ ise $R = \infty$ olur. Her x için yakınsak
- $L = \infty$ ise $R = 0$ olur. Sadece $x = a$ için yakınsak

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ **serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|x| < 1$$

R = 1 yarıçap

$|x| < 1$

$-1 < x < 1$

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$ **serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(-1)^n.x^n}\right| = |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow R = 1 \text{ (yarıçap)}$$

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ **serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}.x^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n.x^n}{n}}\right| = |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$x = -1$ için $\sum\frac{1}{n}$ ıraksak

$x = 1$ için $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ yakınsak

$(-1, 1] \Rightarrow$ yakınsaklık aralığı

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ **serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$x = -1$ için $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ $\Rightarrow$ Yakınsak

$x = 1$ için $\sum\frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ Iraksak

$[-1, 1)$ yakınsaklık aralığı

Örnek

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n!}$ **serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x-1)^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|}{n+1} = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için yakınsak

Örnek

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{3^n}$ **serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{(x+2)^n}{3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+2|}{3} < 1$$

$|x+2| < 3 \rightarrow$ yarıçapı

$-3 < x+2 < 3$

$-5 < x < 1 \Rightarrow$ yakınsaklık aralığı

$x = -5 \Rightarrow \sum(-1)^n$ ıraksak

$x = 1 \Rightarrow \sum 1^n$ ıraksak

Örnek

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{2^n}$ **serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{(x-3)^n}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{2} < 1$$

$|x-3| < 2 \rightarrow$ yarıçap

$-2 < x-3 < 2$

$1 < x < 5$

$$\left.\begin{array}{ll} x = 1 \text{ için } \sum(-1)^n & \text{Iraksak} \\ x = 5 \text{ için } \sum 1 & \text{Iraksak} \end{array}\right\} (1,\ 5) \text{ yakınsaklık aralığı}$$

Örnek

Aşağıdaki serilerin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2nx^n}{n+3}$ **b)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{\sqrt{n}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n3^n}$ **d)** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (\ln n)x^n$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!.(x+1)^n$ **f)** $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{n!.x^n}{5^n}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{2n+1}$ **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^nx^n}{n!}$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n!}}$ **j)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n.x^n}{n!}$

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^nx^n}{n+1}$ **l)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n.\dfrac{x^n}{2^n}$

a) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2n+2).x^{n+1}}{(n+4)}}{\frac{2n.x^n}{n+3}}\right| = \lim_{n\to\infty}|x| < 1$$

$-1 < x < 1$

$$\left.\begin{array}{ll} x=-1 & \sum\frac{2n}{(n+3)}\cdot(-1)^n \text{ ıraksak} \\ x = 1 & \sum\frac{2n}{n+3} \text{ ıraksak} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Yarıçap} = 1 \\ \text{Aralık} = (-1,\ 1)\end{array}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+3)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{(x+3)^n}{\sqrt{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}|x+3| < 1$$

$-1 < x+3 < 1$

$-4 < x < -2$

$$\left.\begin{array}{l} x=-4 \Rightarrow \sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ ıraksak} \\ x=-2 \Rightarrow \sum\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ıraksak} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Yarıçap} = 1 \\ \text{Aralık} = (-4,\ -2]\end{array}$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\dfrac{x^n}{n3^n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|}{3} < 1$

$|x| < 3$

$-3 < x < 3$

$x = -3 \Rightarrow \sum\dfrac{(-1)^n}{n}$ yakınsak

$x = 3 \Rightarrow \sum\dfrac{1}{n}$ ıraksak

Aralık = [–3, 3)

Yarıçap = 3

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\ln(n+1)x^{n+1}}{\ln n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\cdot x\right| = |x| < 1$

limit = 1

(L'Hosp)

$-1 < x < 1$

$x = -1$ $\sum(-1)^n \ln n$ ıraksak

$x = 1$ $\sum \ln n$ ıraksak

Aralık = (–1, 1)

Yarıçap = 1

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)!.(x+1)^{n+1}}{n!.(x+1)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|(n+1)|.|(x+1)| = \infty > 1$

$(x \neq -1$ için$)$

Yarıçap = 0

Aralık = {–1}

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(n+1)!.x^{n+1}}{5^{n+1}}}{\dfrac{n!.x^n}{5^n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(\dfrac{n+1}{5}\right)\right|.|x| = \infty$

$(x \neq 0$ için$)$

Yarıçap = 0

Aralık = 0

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{x^{n+2}}{2n+3}}{\dfrac{x^{n+1}}{2^{n+1}}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|x| < 1$

$-1 < x < 1$

$x = -1$ $\sum\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ yakınsak

$x = 1$ $\sum\dfrac{1}{2n+1}$ ıraksak

Yarıçap = 1

Aralık = [–1, 1)

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(n+1)^{n+1}.x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n.x^n}{n!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^n}{n^n}\right||x|$

$= \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}_{e}.|x| < 1 \Rightarrow |x| < \dfrac{1}{e}$

$\Downarrow$

$-\dfrac{1}{e} < x < \dfrac{1}{e}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\dfrac{x^n}{\sqrt{n!}}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{|x|}{\sqrt{n+1}}\right| = 0 < 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için yakınsak

Aralık = $\mathbb{R}$

Yarıçap = ∞

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{(-1)^n x^n}{n!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|}{n+1}$

$= 0 < 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$ Yakınsak

Aralık = $\mathbb{R}$

Yarıçap = ∞

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}.x^{n+1}}{n+2}}{\dfrac{(-1)^n.x^n}{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|x| < 1$

$-1 < x < 1$

$x = 1 \Rightarrow \sum\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ yakınsak

$x = -1 \Rightarrow \sum\dfrac{1}{n+1}$ ıraksak

Aralık = (–1, 1]

Yarıçap = 1

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}.x^{n+1}}{2^{n+2}}}{\dfrac{(-1)^n.x^n}{2^n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|}{2} < 1$

$|x| < 2$

$-2 < x < 2$

$x = -2$ $\sum 1$ ıraksak

$x = 2$ $\sum(-1)^n$ ıraksak

Aralık = (–2, 2)

Yarıçap = 2

Örnek

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{x^n}$ **serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+2)}{x^{n+1}}}{\frac{(n+1)}{x^n}}\right| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x|} < 1 \Rightarrow |x| > 1$$

$x > 1$ veya

$x < -1$

$x = -1 \Rightarrow \sum \frac{(n+1)}{(-1)^n}$ ıraksak

$x = 1 \Rightarrow \sum n+1$ ıraksak

Aralık = $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Örnek

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nx^n}$ **serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)x^{n+1}}}{\frac{1}{n}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x|} < 1 \Rightarrow |x| > 1$$

$\Rightarrow x > 1$ veya $x < -1$

$x = -1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n(-1)^n}$ Yakınsak

$x = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ Iraksak

$(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ Yakınsak aralığı

Örnek

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{x^n}$ **serilerinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{x^{n+1}}}{\frac{n!}{x^n}}\right| \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{x}\right| = \infty > 1$

  $\forall x \in \mathbb{R}$ için ıraksak

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{x^{n+1}}}{\frac{3^n}{x^n}}\right| \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{|x|} < 1$

  $|x| > 3$

  $x > 3$ veya $x < -3$

$x = 3 \Rightarrow \sum 1$ ıraksak

$x = -3 \Rightarrow \sum (-1)^n$ ıraksak

Aralık = $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

Örnek

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ **limitinin değerini bulunuz.**

$U_n = \frac{n^n}{n!}$ alalım. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$= e$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ bulunur.

TAYLOR VE MACLAURİN SERİLERİ

Tanım: Bir f(x) fonksiyonunun x = a civarındaki **Taylor seri** açılımı

$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$ ile tanımlanır.

Özel olarak a = 0 alınırsa oluşan

$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0).x^k}{k!}$ serisine **Maclaurin serisi** adı verilir.

Örnek

f(x) = cosx fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

$f(x)=\cos x\,|_{x=0}=1$
$f'(x)=-\sin x\,|_{x=0}=0$
$f''(x)=-\cos x\,|_{x=0}=-1$
$f'''(x)=\sin x\,|_{x=0}=0$
$f^{IV}(x)=\cos x\,|_{x=0}=1$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots$

$\boxed{\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n)!}}$

Benzer şekilde $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ bulunur.

Örnek

f(x) = e^x fonksiyonunun Maclaurin seri açılımını bulunuz.

$f(x)=e^x\,|_{x=0}=1$
$f'(x)=e^x\,|_{x=0}=1$
$f''(x)=e^x\,|_{x=0}=1$
⋮

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

$\boxed{e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$

Kural:

$f(x)=\frac{1}{1-x}$ için Maclaurin seri açılımı

$\boxed{\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n}$ şeklindedir.

$=1+x+x^2+x^3+\ldots$

Bu açılımından yararlanarak aşağıdaki soruları çözünüz.

Örnek

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.2^n}=?$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=?$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{3n}=?$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n.x^{5n}=?$

e) $\frac{1}{1+x}$ **için Maclaurin açılımı nedir?**

f) arctanx için Maclaurin açılımı nedir?

g) ln(1-x) ve ln(1+x) için Maclaurin açılımları nelerdir?

h) f(x) = 1 + 2x + 3x² + 4x³ + ... toplamı neye eşittir? (IxI < 1)

i) $\frac{1}{(1-x)^2}$ **için Maclaurin açılımı nedir?**

a) $\int\limits_0^x\frac{1}{1-t}dt=\int\limits_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n dt$

$-\ln(1-t)\Big|_0^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x$

$-\ln(1-x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

x = 1/2 seçelim $-\ln\frac{1}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.2^n}=\ln 2$

b) $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \Big/ x$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

$x = \frac{1}{3}$ alalım: $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-x^5)^n = \frac{1}{1+x^5}$

e) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$$\boxed{\frac{1}{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

f) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . x^{2n}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . t^{2n} dt$$

$$\boxed{\arctan x} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

g) $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt$

$$-\ln(1-t)\Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}}$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Benzer şekilde

$$\boxed{\ln(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{n+1}}{n+1} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} . x^n}{n}}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ bulunur.}$$

h) $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)'$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

$\Downarrow$

i) için yanıt olur.

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Örnek

f(x) = lnx fonksiyonunu x = 1 civarında Taylor serisine açalım.

$f(x) = \ln x|_{x=1} = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}|_{x=1} = 1 = (-1)^0.1!$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}|_{x=1} = -1 = (-1).1!$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}|_{x=1} = 2 = (-1)^2.2!$

$f^{IV}(x) = -\frac{6}{x^4}|_{x=1} = -6 = (-1)^3.3!$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1).(x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x-1)^n$ elde edilir.

Örnek

f(x) = e^x fonksiyonunu x = 2 civarında Taylor serisine açalım.

$f(x) = e^x|_{x=2} = e^2$

$f'(x) = e^x|_{x=2} = e^2$

$f''(x) = e^x|_{x=2} = e^2$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2).(x-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2.(x-2)^n}{n!}$$

elde edilir.

Örnek

Taylor seri açılımlarından yararlanarak aşağıdaki soruları çözünüz.

a) $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots=?$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}=?$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=?$

d) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots=?$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}=?$

f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}.2^n}{n}=?$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}=?$

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ seri yazılışıdır.

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ olduğuna göre, $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ olur.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}=e^{-2}$

c) $1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}\ldots=\sin 1$

d) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}\ldots=\cos 1$

e) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

f) $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}.x^n}{n}$

$x=2\Rightarrow \ln 3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}.2^n}{n}$

g) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

$x=\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\frac{9}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$

Örnek

$f(x)=e^x$ fonksiyonunun $x=4$ civarında Taylor seri açılımını bulunuz.

$f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{x!}$

$e^4.e^{x-4}=e^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^4.(x-4)^n}{n!}$

Örnek

$f(x)=\frac{1}{1-x}$ fonksiyonunun $x=2$ civarında Taylor seri açılımını bulunuz.

$f(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-(x-2)-2}=\frac{1}{-1-(x-2)}=-\frac{1}{1+(x-2)}$

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

$-\frac{1}{1+(x-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}-(-1)^n.(x-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}.(x-2)^n$

Örnek

$f(x)=\frac{1}{3-x}$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımını bulunuz.

$f(x)=\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$

Örnek

$f(x)=\frac{1}{3-x}$ fonksiyonunun $x=1$ civarında Taylor seri açılımını bulunuz.

$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{2-(x-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$

Örnek

$f(x) = 3^x$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımını bulunuz.

$$3^x = (e^{\ln 3})^x = e^{x\ln 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln 3)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n . x^n}{n!}$$

Örnek

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2}}{x^6}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \frac{x^3}{6} - \sin x}{x^5}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{x^2} - x - x^3}{x^5}$

a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \ldots$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2}}{x^6} = \frac{1}{6}$$

b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{(4x)^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-8x^2 + 2x^2}{x^2}$$

$$= -6$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)}{x^5} = \frac{-1}{120}$$

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\right) - x - x^3}{x^5} = -\frac{1}{2}$$

Örnek

Aşağıdaki integralleri x'in kuvvetleri cinsinden bulunuz.

a) $\displaystyle\int_0^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ **b)** $\displaystyle\int_0^x e^{-t^3} dt$

c) $\displaystyle\int_0^x \sin(t^2) dt$ **d)** $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1 - t^3} dt$

a) $$\int_0^x \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . t^{2n}}{(2n)!}}{t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-2}}{(2n)!} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . t^{2n-1}}{(2n-1).(2n)!}\Bigg|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n-1}}{(2n)!(2n-1)}$$

b) $$\int_0^x e^{-t^3} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^3)^n}{n!} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{3n}}{n!} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{3n+1}}{n!.(3n+1)}\Bigg|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{3n+1}}{n!(3n+1)}$$

c) $$\int_0^x \sin(t^2) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} dt$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n+2}}{(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . t^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}\Bigg|_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}$$

d) $$\int_0^x \frac{1}{1 - t^3} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (t^3)^n dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{3n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n+1}}{3n+1}\Bigg|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)}$$

Örnek

Aşağıdaki integrallerin yaklaşık değerlerini bulunuz.

a) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ **b)** $\int_0^1 e^{-x^3} dx$

c) $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx$ **d)** $\int_0^1 \sqrt{x}.\cos x\, dx$

a) $\int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx$

$= \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}$

b) $\int_0^1 e^{-x^3} dx = \int_0^1 \left(1 + (-x^3) + \frac{(-x^3)^2}{2}\right) dx$

$= \left(x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{14}\right)\Big|_0^1$

$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{14}$

c) $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$

$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots$

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + \ldots$

$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$

$\int_0^1 (1+x^4)^{1/2} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{8}\right) dx$

$= \left(x + \frac{x^5}{10} - \frac{x^9}{72}\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{72}$

d) $\int_0^1 \sqrt{x}.\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) dx = \int_0^1 \left(x^{1/2} - \frac{x^{5/2}}{2} + \frac{x^{9/2}}{24}\right) dx$

$= \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}\cdot 2} + \frac{x^{11/2}}{\frac{11}{2}\cdot 24}\right)\Big|_0^1$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{132}$

Örnek

$f(x) = \sin^2 x$ fonksiyonunun Maclaurin serisi açılımını bulunuz.

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos 2x$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.(2x)^{2n}}{(2n)!}$

elde edilir.