# Pesquisa Operacional - Problema da Corrente de Equilíbrio

Eduardo César[1] Manassés Ferreira[1] Marzo Júnior[1]
Thiago Linke[1]

[1] Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil

Pesquisa Operacional, 2013

# Resumo

# Modelagem

***Application 1.8 Electrical Networks***

The electrical network shown in Figure 1.3 has eight resistors, two current sources (at nodes 1 and 6), and one current sink (at node 7). In this network we wish to determine the equilibrium current flows through the resistors. A popular method for solving this problem is to introduce a variable $x_{ij}$ representing the current flow on the arc $(i, j)$ of the electrical network and write a set of equilibrium relationships for these flows; that is, the voltage–current relationship equations (using Ohm's law) and the current balance equations (using Kirchhof's law). The solution of these equations gives the arc currents $x_{ij}$. An alternative, and possibly more efficient approach is to formulate this problem as a convex cost flow problem. This formulation uses the well-known result that the equilibrium currents on resistors are those flows for which the resistors dissipate the least amount of the total power supplied by the voltage sources (i.e., the electric current follows the path of least resistance). Ohm's law shows that a resistor of resistance $r_{ij}$ dissipates $r_{ij}x_{ij}^2$ ohms of power. Therefore, we can obtain the optimal currents by solving the following convex cost flow problem:

$$\text{Minimize} \sum_{(i,j)\in A} r_{ij}x_{ij}^2$$

subject to

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = b(i) \quad \text{for each node } i \in N,$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{for each arc } (i, j) \in A.$$

In this model $b(i)$ represents the supply/demand of a current source or sink.

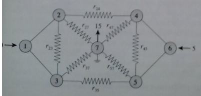


Figure 1.3 Electrical network.

*Sec. 1.3 Applications* 15

The formulation of a set of equilibrium conditions as an equivalent optimization model is a powerful idea in the physical sciences, dating from the last century, which has become known as so-called *variational principles*. The term "variational" arises because the equilibrium conditions are the "optimality conditions" for the equivalent optimization model that tell us that we cannot improve the optimal solution by varying (hence the term "variational") the optimal solution to this optimization model.

# O Problema
## Organizando os dados.

| | leiteP | queijo | iogurte |
|---|---|---|---|
| demandaMáxima (kL) | 50 | 35 | 50 |
| produçãoMínima (kL) | 50 | - | - |
| | | | |
| insumo: leite (L/unidade) | 1 | 10 | 2.5 |
| lucroUnitario ($/unidade) | 0.07 | 1.04 | 0.2 |
| | | | |
| lucro ($/kL) | 70 | 104 | 80 |
| limiteDiário insumo (kL) | | 100 | |
| implicação | | 1kg queijo $\rightarrow$ 1L iogurte | |
| | | 4L $\rightarrow$ 1L | |

$\frac{\$}{kL} = lucro = \frac{lucroUnitario}{insumo:leite} = \frac{\$}{\cancel{unidade}} \frac{\cancel{unidade}}{\cancel{L}} \frac{1000\cancel{L}}{kL}$ * Unidades convertidas para kL de insumo básico: o leite.

# Definições

## Restrições (em kL)

- leiteP + queijo + iogurte $\leq$ 100
- leiteP $\geq$ 50 $\rightarrow$ -leiteP $\leq$ -50
- leiteP $\leq$ 50
- queijo $\leq$ 35
- iogurte $\leq$ 50
- 4 $\times$ iogurte - queijo $\geq$ 0 $\rightarrow$ queijo - 4 $\times$ iogurte $\leq$ 0

## Forma matricial

### cotas

$$A: \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}$$

Matriz de coeficientes

### máximo

$b$:

100 -50 50 35 50 0

$$Ax = b$$

# Definições

## Conjuntos

electrical-networkss: $\{leiteP, queijo, iogurte\}$
Restricoes: $\{r1, r2, r3, r4, r5, r6\}$

## Variáveis

producao: $\{electrical - networkss\}$

## Parâmetros

lucro: $\{70, 104, 80\}$
cotas: $\{Restricoes, electrical - networkss\}$
maximo: $\{Restricoes\}$

# Definições

## Objetivo

Maximizar:

$\sum_{j \in electrical-networkss} lucro[j] \times producao[j]$

## Restrições

Sujeito a:

$cotas[i, j] \times producao[j] \leq maximo[i]$

$\{i \in Restricoes\}, \{j \in electrical - networkss\}$

## Afinal, qual a melhor escolha?

Saberemos agora . . .

# electrical-networks.mod e electrical-networks.data

# electrical-networks.sol

glpsol –model electrical-networks.mod –data electrical-networks.data –output electrical-networks.sol

# Modelo Primal

$$\text{Max.}Z = \sum_{j}^{n} c_j x_j \qquad \text{sujeito a}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = 1, 2, 3..., m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, 3..., n)$$

# Obtendo o dual

- Função objetivo do primal é maximização, então a do dual é minimização.

# Obtendo o dual

- Função objetivo do primal é maximização, então a do dual é minimização.
- Termos constantes das restrições do dual são os coeficientes da função objetiva do primal e vice-versa.

# Obtendo o dual

- Função objetivo do primal é maximização, então a do dual é minimização.
- Termos constantes das restrições do dual são os coeficientes da função objetiva do primal e vice-versa.
- O número de incógnitas do dual ($m$ valores de $y_i$) é igual ao número de restrições do primal.

# Obtendo o dual

- Função objetivo do primal é maximização, então a do dual é minimização.
- Termos constantes das restrições do dual são os coeficientes da função objetiva do primal e vice-versa.
- O número de incógnitas do dual ($m$ valores de $y_i$) é igual ao número de restrições do primal.
- O número de restrições do dual é igual ao número de incógnitas do primal ($m$ valores de $x_j$).

# Obtendo o dual

- Função objetivo do primal é maximização, então a do dual é minimização.
- Termos constantes das restrições do dual são os coeficientes da função objetiva do primal e vice-versa.
- O número de incógnitas do dual ($m$ valores de $y_i$) é igual ao número de restrições do primal.
- O número de restrições do dual é igual ao número de incógnitas do primal ($m$ valores de $x_j$).
- A matriz de coeficientes do dual é a transposta da matriz de coeficientes do primal.

# Modelo Dual

$$\text{Min.} D = \sum_{i}^{m} b_i y_j \qquad \text{sujeito a}$$

$$\sum_{i=0}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad (j = 1, 2, 3..., n)$$

$$y_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3..., m)$$

# Problema Dual

Função objetivo:

$$\mathrm{Min.}D = 100 \times y_1 - 50 \times y_2 + 50 \times y_3 + 35 \times y4 + 50 \times y_5 + 0 \times y_6$$

$$\text{Restrições:} \quad \begin{array}{lllllll} y1 & -y2 & +y3 & & & & \geq 70 \\ y1 & & & -y4 & & +y6 & \geq 104 \\ y1 & & & & +y5 & -4y6 & \geq 80 \end{array}$$

## electrical-networksDual.mod e electrical-networks.data

# electrical-networksDual.sol

glpsol –model electrical-networksDual.mod –data electrical-networksDual.data –output electrical-networksDual.sol

# Variação de f induzida por b

$\Delta f = y\Delta b$ a

# Variação de f induzida por b

$\Delta f = y \Delta b$ a

b

# Acrescentar variáveis

**Quarto Produto** c

## Acrescentar variáveis

**Quarto Produto** c
d

## Conclusões

- item 1

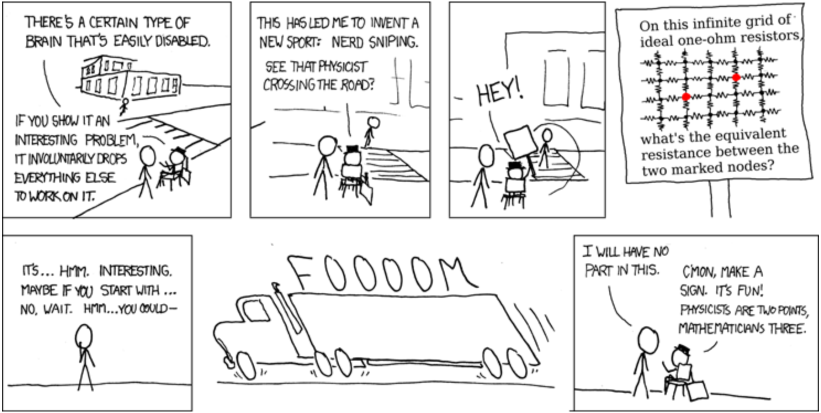
# Conclusões

- item 1
- item 2

# Conclusões

- item 1
- item 2
- item 3

# Dúvidas


THERE'S A CERTAIN TYPE OF BRAIN THAT'S EASILY DISABLED.
IF YOU SHOW IT AN INTERESTING PROBLEM, IT INVOLUNTARILY DROPS EVERYTHING ELSE TO WORK ON IT.
THIS HAS LED ME TO INVENT A NEW SPORT: NERD SNIPING.
SEE THAT PHYSICIST CROSSING THE ROAD?
HEY!
On this infinite grid of ideal one-ohm resistors, what's the equivalent resistance between the two marked nodes?
IT'S... HMM. INTERESTING. MAYBE IF YOU START WITH ... NO, WAIT. HMM...YOU COULD–
FOOOOM
I WILL HAVE NO PART IN THIS.
C'MON, MAKE A SIGN. IT'S FUN! PHYSICISTS ARE TWO POINTS, MATHEMATICIANS THREE.

Apresentação produzida usando

LaTeX

disponível em goo.gl/1DtLf