

Pesquisa Operacional - Problema da Corrente de Equilíbrio

Eduardo César¹ Manassés Ferreira¹ Marzo Júnior¹
Thiago Linke¹

¹Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil

Pesquisa Operacional, 2013

Resumo

1 Modelagem

- O Problema
- O Modelo

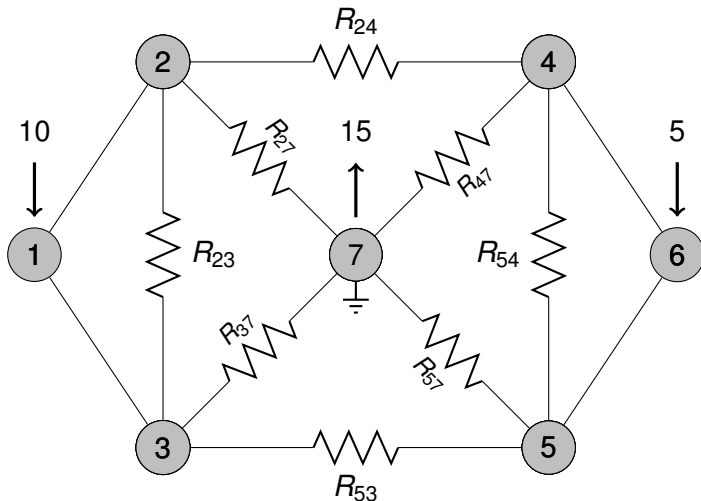
2 Resolução

- Resolução sistema quadrático
- Resolução Fluxo em Redes

3 Conclusões

Determinação da corrente de equilíbrio

Deseja-se determinar a corrente de equilíbrio que flui em um circuito elétrico como por exemplo:



Modelos

Existe mais de uma forma de se resolver o este problema. Três dessas formas serão mostradas aqui:

- 1 Modelagem como sistema de equações lineares.
- 2 Modelagem com sistema quadrático
- 3 Modelagem como fluxo em redes com custo convexo.

Modelagem como sistema linear

- Problema é resolvido introduzindo-se uma variável x_{ij} representando o fluxo de corrente no arco (i, j) do circuito elétrico e montar um sistema de equações de equilíbrio para estes fluxos. A solução para este sistema fornece a intensidade x_{ij} para cada arco respectivo.
- Baseia-se nos princípios físicos:
 - Lei de Ohm $\rightarrow V = R \times I$
 - 1ª Lei de Kirchhof $\rightarrow I_1 = I_2 + I_3$

Modelagem como fluxo em redes com custo convexo

Esta formulação se utiliza de um comportamento conhecido de que as correntes de equilíbrio nos resistores são os fluxos para qual os resistores dissipam a menor potência total suprida pelas fonte de tensão (ou seja, a corrente elétrica segue o caminho de menor resistência.)

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} r_{ij} x_{ij}^2 \quad \text{sujeito a}$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{i:(j,i) \in A} x_{ji} = b(i) \quad \text{para cada nodo } i \in N,$$

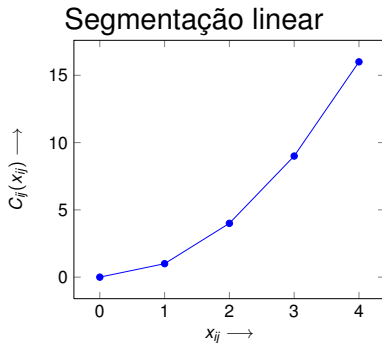
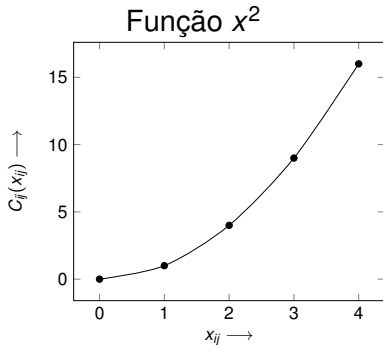
$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{para cada arco } (i, j) \in A.$$

Linearização do custo convexo

Aproximação por segmentação:

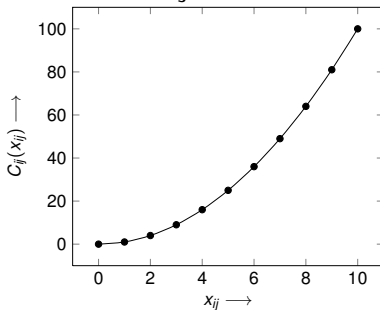
- Cada custo de arco $C_{ij}(x_{ij})$ possui p segmentos lineares:
 $0 = d_{ij}^0 < d_{ij}^1 < d_{ij}^2 < d_{ij}^3 < \dots$, que denotam os pontos onde a função “quebra”.
- custo varia linearmente no intervalo $[d_{ij}^{k-1}, d_{ij}^k]$.
 Denotamos c_{ij}^k como o coeficiente de custo linear no intervalo $[d_{ij}^{k-1}, d_{ij}^k]$.
- Sendo assim, para especificar o a função aproximada, precisamos especificar os segmentos e a inclinação da função nesses segmentos.

Linearização do custo convexo

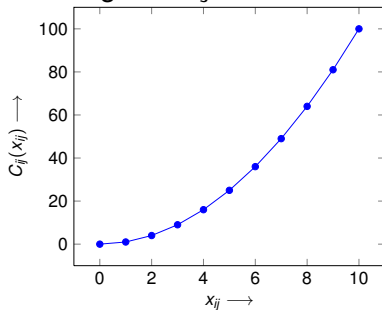


Linearização do custo convexo

Função x^2

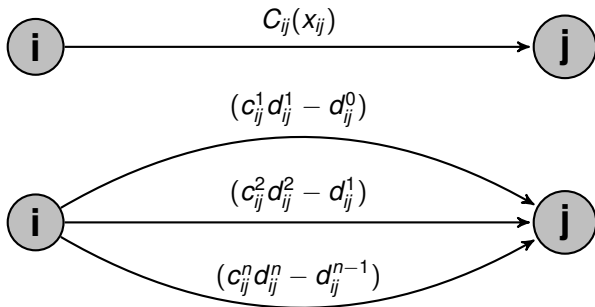


Segmentação linear

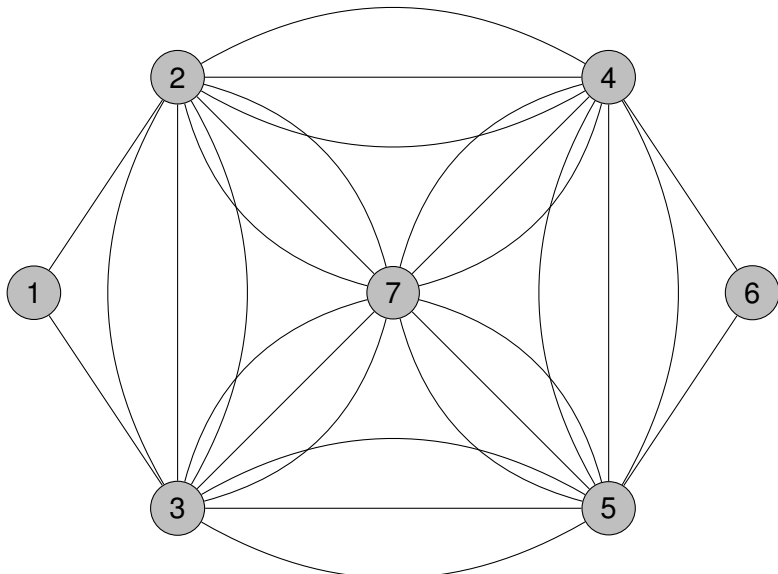


Linearização do custo convexo

Arco original e arcos correspondentes na nova rede:



Linearização do custo convexo



Sistema quadrático

$$F : A \longrightarrow I \subset \mathbb{N}$$

$$F[(i, j)] = K$$

$$\text{Tal que } (i_1, j_1) < (i_2, j_2) \iff F[(i_1, j_1)] < F[(i_2, j_2)]$$

$$\text{Sendo que } (a, b) < (c, d) \iff (a < c) \vee ((a == c) \wedge (b < d))$$

Esta ordem total faz com que F seja invertível.

Resolução sistema quadrático

Sistema quadrático

$$F : A \longrightarrow I \subset \mathbb{N}$$

$$H_{ij} = 0 \qquad i \neq j$$

$$lb_i = 0 \forall i$$

$$lb_i = \infty \forall i$$

$$A_{i,F(i,j)} = 1 \qquad \forall i, j : (i, j) \in A$$

$$A_{i,F(i,j)} = -1 \qquad \forall i, j : (j, i) \in A$$

$$A_{i,j} = 0 \qquad \text{Caso contrário}$$

Resolução sistema quadrático

Sistema quadrático

$$b_1 = 10$$

$$b_6 = 5$$

$$b_7 = -15$$

$$b_i = 0$$

Caso contrário

Resolução Fluxo em Redes

segmento	1-2	1-3	2-3	2-4	2-7	3-5	3-7	4-5	4-6	4-7	5-6	5-7	tempo(ms)
1	100				100				-50	50			12
2	75	25			75	25			-50	50			15
4	62	38			62		38		-38	38	-12	12	19
8	43	57		19	38	5	38		-19	38	-31	36	22
16	54	46		9	45	9	37		-27	36	-23	32	30
32	50	50		10	45	10	40		-25	35	-25	35	77
linear	50	50		8.33	41.67	8.33	41.67		-25	33.33	-25	33.33	15
octave	50	50		8.33	41.67	8.33	41.67		-25	33.33	-25	33.33	150

Conclusões

- O algoritmo em redes é mais eficiente que a resolução em sistemas de equações lineares.

Conclusões

- O algoritmo em redes é mais eficiente que a resolução em sistemas de equações lineares.
- O equilíbrio está associado à condição de optimalidade do problema linear associado.

Dúvidas

