

# Pesquisa Operacional - Problema da Corrente de Equilíbrio

Eduardo César<sup>1</sup>   Manassés Ferreira<sup>1</sup>   Marzo Júnior<sup>1</sup>  
Thiago Linke<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil

Pesquisa Operacional, 2013

## Resumo

### 1 Modelagem

- O Problema
- O Modelo

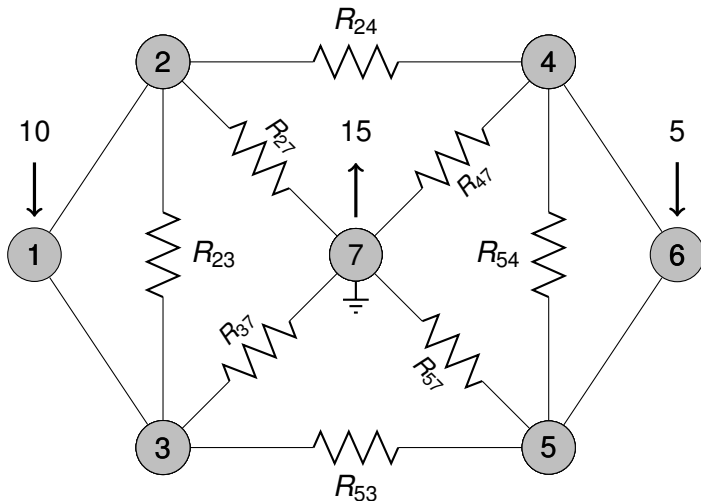
### 2 Resolução

- Resolução sistema quadrático
- Resolução Fluxo em Redes

### 3 Conclusões

## Determinação da corrente de equilíbrio

Deseja-se determinar a corrente de equilíbrio que flui em um circuito elétrico como por exemplo:



# Modelos

Existe mais de uma forma de se resolver o este problema.  
Duas dessas formas serão desenvolvidas aqui:

- 1 Modelagem como sistema de equações lineares.
- 2 Modelagem como fluxo em redes com custo convexo.

## Modelagem como sistema quadrático

- Problema é resolvido introduzindo-se uma variável  $x_{ij}$  representando o fluxo de corrente no arco  $(i, j)$  do circuito elétrico e montar um sistema de equações de equilíbrio para estes fluxos. A solução para este sistema fornece a intensidade  $x_{ij}$  para cada arco respectivo.
- Baseia-se nos princípios físicos:
  - Lei de Ohm  $\rightarrow V = R \times I$
  - 1ª Lei de Kirchhof  $\rightarrow I_1 = I_2 + I_3$

## Modelagem como fluxo em redes com custo convexo

Esta formulação se utiliza de um comportamento conhecido de que as correntes de equilíbrio nos resistores são os fluxos para qual os resistores dissipam a menor potência total suprida pelas fonte de tensão (ou seja, a corrente elétrica segue o caminho de menor resistência.)

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} r_{ij} x_{ij}^2 \quad \text{sujeito a}$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{i:(j,i) \in A} x_{ji} = b(i) \quad \text{para cada nodo } i \in N,$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{para cada arco } (i,j) \in A.$$

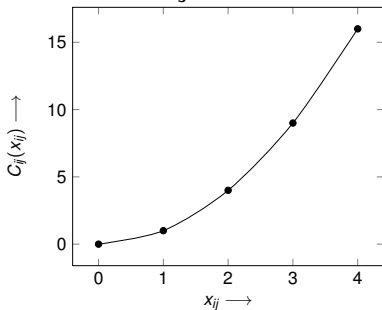
## Linearização do custo convexo

Aproximação por segmentação:

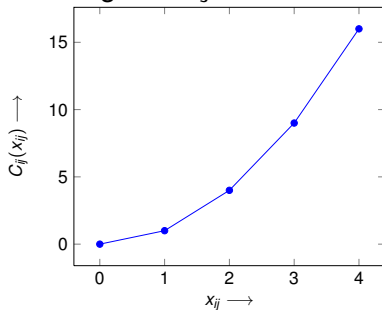
- Cada custo de arco  $C_{ij}(x_{ij})$  possui  $p$  segmentos lineares:  
 $0 = d_{ij}^0 < d_{ij}^1 < d_{ij}^2 < d_{ij}^3 < \dots$ , que denotam os pontos onde a função “quebra”.
- custo varia linearmente no intervalo  $[d_{ij}^{k-1}, d_{ij}^k]$ .  
 Denotamos  $c_{ij}^k$  como o coeficiente de custo linear no intervalo  $[d_{ij}^{k-1}, d_{ij}^k]$ .
- Sendo assim, para especificar o a função aproximada, precisamos especificar os segmentos e a inclinação da função nesses segmentos.

# Linearização do custo convexo

## Função $x^2$



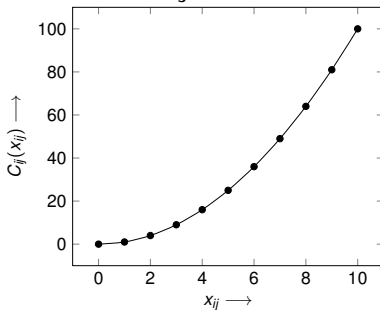
## Segmentação linear



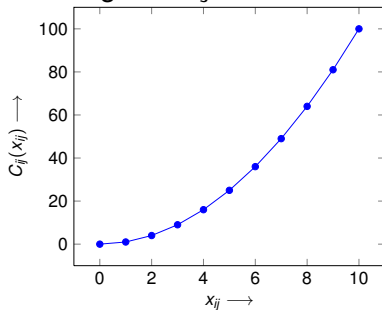


# Linearização do custo convexo

## Função $x^2$

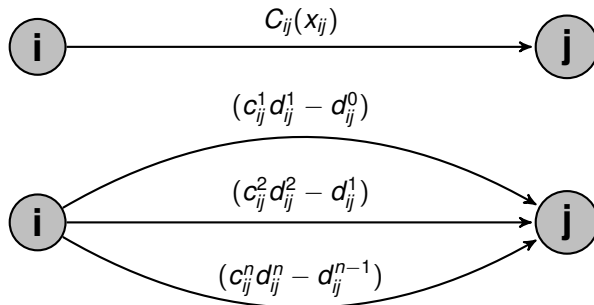


## Segmentação linear

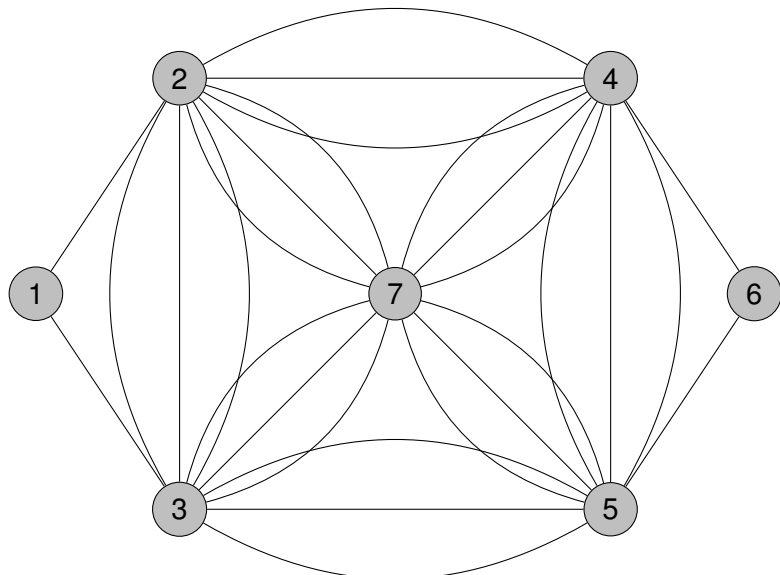


# Linearização do custo convexo

Arco original e arcos correspondentes na nova rede:



## Linearização do custo convexo



Resolução sistema quadrático

## Sistema quadrático

$$F : A \longrightarrow I \subset \mathbb{N}$$

$$F[(i, j)] = K$$

$$\text{Tal que } (i_1, j_1) < (i_2, j_2) \iff F[(i_1, j_1)] < F[(i_2, j_2)]$$

$$\text{Sendo que } (a, b) < (c, d) \iff (a < c) \vee ((a == c) \wedge (b < d))$$

Esta ordem faz com que F seja invertível

Resolução sistema quadrático

# Sistema quadrático

$$F : A \longrightarrow I \subset \mathbb{N}$$

$$H_{ij} = 0 \qquad i \neq j$$

$$lb_i = 0 \forall i$$

$$lb_i = \infty \forall i$$

$$A_{i,F(i,j)} = 1 \qquad \forall i, j : (i, j) \in A$$

$$A_{i,F(i,j)} = -1 \qquad \forall i, j : (j, i) \in A$$

$$A_{i,j} = 0 \qquad \text{Caso contrário}$$

Resolução sistema quadrático

# Sistema quadrático

$$b_1 = 10$$

$$b_6 = 5$$

$$b \geq -15$$

$$b_i = 0$$

Caso contrário

# Resolução Fluxo em Redes

segmento	1-2	1-3	2-3	2-4	2-7	3-5	3-7	4-5	4-6	4-7	5-6	5-7	tempo(ms)
1	100				100				-50	50			12
2	75	25			75	25			-50	50			15
4	62	38			62		38		-38	38	-12	12	19
8	43	57		19	38	5	38		-19	38	-31	36	22
16	54	46		9	45	9	37		-27	36	-23	32	30
32	50	50		10	45	10	40		-25	35	-25	35	77
linear	50	50		8.33	41.67	8.33	41.67		-25	33.33	-25	33.33	15
octave	50	50		8.33	41.67	8.33	41.67		-25	33.33	-25	33.33	150

# Resultados

segmento	1-2	1-3	2-3	2-4	2-7	3-5	3-7	4-5	4-6	4-7	5-6	5-7	tempo(ms)
1	100				100				-50	50			12
2	75	25			75	25			-50	50			15
4	62	38			62		38		-38	38	-12	12	19
8	43	57		19	38	5	38		-19	38	-31	36	22
16	54	46		9	45	9	37		-27	36	-23	32	30
32	50	50		10	45	10	40		-25	35	-25	35	77
linear	50	50		8.33	41.67	8.33	41.67		-25	33.33	-25	33.33	15
octave	50	50		8.33	41.67	8.33	41.67		-25	33.33	-25	33.33	150



## Conclusões

- O algoritmo em redes é mais eficiente que a resolução em sistemas de equações lineares.

## Conclusões

- O algoritmo em redes é mais eficiente que a resolução em sistemas de equações lineares.
- O equilíbrio está associado à condição de optimalidade do problema linear associado.

# Dúvidas

