Pesquisa Operacional - Problema da Corrente de Equilíbrio

Eduardo César[1] Manassés Ferreira[1] Marzo Júnior[1]
Thiago Linke[1]

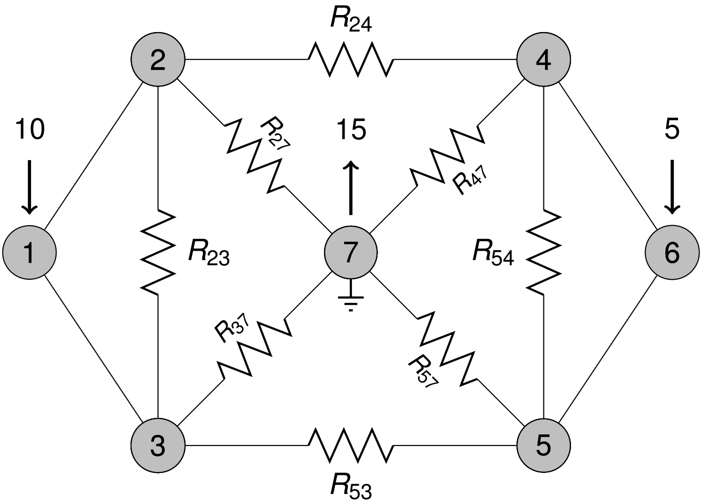
[1]Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil

Pesquisa Operacional, 2013

Resumo

Determinação da corrente de equilíbrio

Deseja-se determinar a corrente de equilíbrio que flui em um circuito elétrico como por exemplo:



Modelos

Existe mais de uma forma de se resolver o este problema. Três dessas formas serão mostradas aqui:

1. Modelagem como sistema de equações lineares.
2. Modelagem com sistema quadrático
3. Modelagem como fluxo em redes com custo convexo.

Modelagem como sistema linear

- Problema é resolvido introduzindo-se uma variável x_{ij} representando o fluxo de corrente no arco(i, j) do circuito elétrico e montar um sistema de equações de equilíbrio para estes fluxos. A solução para este sistema fornece a intensidade x_{ij} para cada arco respectivo.
- Baseia-se nos príncipios físicos:
  - Lei de Ohm $\longrightarrow V = R \times I$
  - 1^a Lei de Kirchhof $\longrightarrow I_1 = I_2 + I_3$

Modelagem como fluxo em redes com custo convexo

Esta formulação se utiliza de um comportamento conhecido de que as correntes de equilíbrio nos resistores são os fluxos para qual os resistores dissipam a menor potência total suprida pelas fonte de tensão (ou seja, a corrente elétrica segue o caminho de menor resistência.)

$$\text{Minimizar} \sum_{(i,j)\in A} r_{ij} x_{ij}^2 \qquad \text{sujeito a}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{i:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i \qquad \text{para cada nodo } i \in N,$$

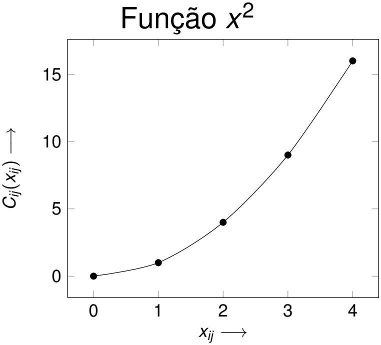
$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{para cada arco } (i,j) \in A.$$

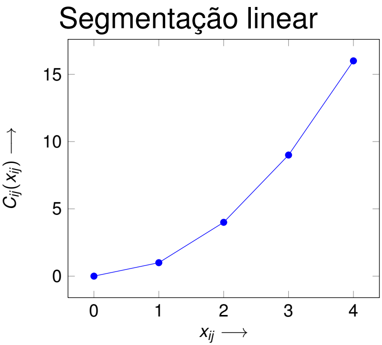
Linearização do custo convexo

Aproximação por segmentação:

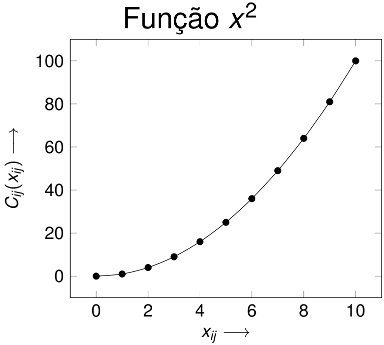
- Cada custo de arco $C_{ij}(x_{ij})$ possui p segmentos lineares: $0 = d_{ij}^0 < d_{ij}^1 < d_{ij}^2 < d_{ij} < ...$, que denotam os pontos onde a função "quebra".
- custo varia linearmente no intervalo $[d_{ij}^{k-1}, d_{ij}^k]$. Denotamos c_{ij}^k como o coeficiente de custo linear no intervalo $[d_{ij}^{k-1}, d_{ij}^k]$.
- Sendo assim, para especificar o a função aproximada, precisamos especificar os segmentos e a inclinação da função nesses segmentos.

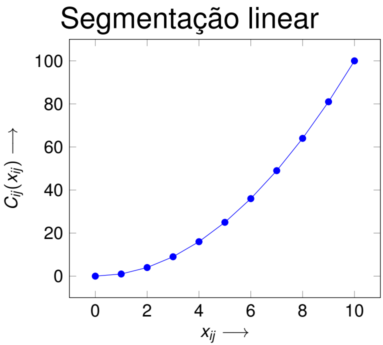
Linearização do custo convexo





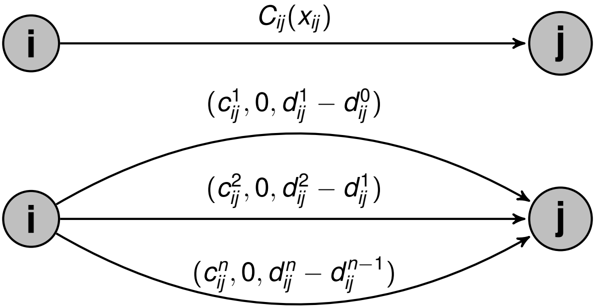
Linearização do custo convexo



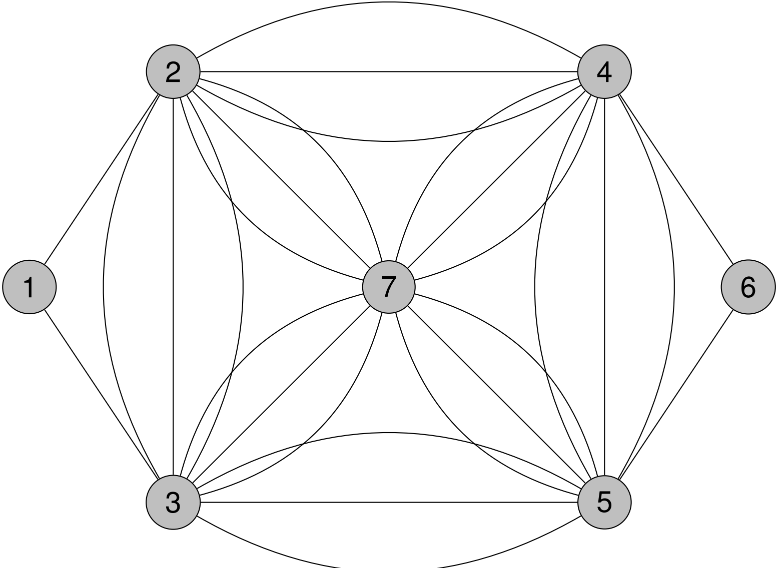


Linearização do custo convexo

Arco original e arcos correspondentes na nova rede:



Linearização do custo convexo



Sistema quadrático

- Problema 1: GLPK não resolve funções objetivo que não sejam lineares

Sistema quadrático

- Problema 1: GLPK não resolve funções objetivo que não sejam lineares
- Solução: O GNU Octave tem um solver para programação linear quadrática

Sistema quadrático

- Problema 1: GLPK não resolve funções objetivo que não sejam lineares
- Solução: O GNU Octave tem um solver para programação linear quadrática
- Problema 2: GNU Octave não aceita GMPL

Sistema quadrático

- Problema 1: GLPK não resolve funções objetivo que não sejam lineares
- Solução: O GNU Octave tem um solver para programação linear quadrática
- Problema 2: GNU Octave não aceita GMPL
- Solução: Programa simples converte grafo de entrada para entrada do GNU Octave

Sistema quadrático

- Para tornar as matrizes mais compactas, vamos usar uma representação baseada em arestas presentes no grafo

Sistema quadrático

- Para tornar as matrizes mais compactas, vamos usar uma representação baseada em arestas presentes no grafo
- Para tal, vamos definir um mapa $F : A \longrightarrow I \subset \mathbb{N}$ que mapeia arestas em números

Sistema quadrático

- Para tornar as matrizes mais compactas, vamos usar uma representação baseada em arestas presentes no grafo
- Para tal, vamos definir um mapa $F : A \longrightarrow I \subset \mathbb{N}$ que mapeia arestas em números
- Definindo uma ordem total nas arestas e preservando a ordem por F garante conversão e inversão fáceis

Sistema quadrático

- Em termos de $F[(i,j)]$ com $(i,j) \in A$, temos:

$$r_{ij} \longrightarrow H_{ab}$$

Tal que

$$H_{ab} = 0 \qquad a \neq b$$

$$H_{F[(i,j)],F[(i,j)]} = r_{ij} \qquad \text{caso contrário}$$

Sistema quadrático

- Em termos de $F[(i,j)]$ com $(i,j) \in A$, temos:

$$r_{ij} \longrightarrow H_{ab}$$

Tal que

$$H_{ab} = 0 \qquad a \neq b$$

$$H_{F[(i,j)],F[(i,j)]} = r_{ij} \qquad \text{caso contrário}$$

-

$$A_{i,F[(i,j)]} = 1 \qquad \forall i,j : (i,j) \in A$$

$$A_{i,F[(i,j)]} = -1 \qquad \forall i,j : (j,i) \in A$$

$$A_{a,b} = 0 \qquad \text{Caso contrário}$$

Sistema quadrático

Tendo uma conversão organizada e codificada em um programa, podemos usar o GNU Octave para resolver o sistema quadrático.

Resolução Fluxo em Redes

Tabela de segmentação dos fluxos

Segmento	1->2	2->7	2->4	2->3	3->5	3->2	4->6	5->6	6->4	7->5	tempo (ms)
1	0	100	100	0	0	0	50	0	0	50	3.355
2	25	75	75	0	25	0	50	0	0	50	3.948
5	40	60	60	0	40	0	30	20	20	30	4.687
10	45	55	45	10	45	0	30	30	30	20	5.627
15	50	50	50	0	40	10	30	30	20	30	8.428
20	48	52	44	8	40	8	34	32	24	26	5.398
30	50	50	40	10	40	10	35	35	25	25	9.488
50	49	51	42	9	42	7	33	33	26	24	15.303
100	50	50	42	8	42	8	34	32	24	26	23.834
200	50	50	42	8	42	8	34	32	24	26	38.798
300	50	50	41	9	41	9	34	34	25	25	42.686

Minimização Quadrática - Octave

1->2	2->7	2->4	2->3	3->5	3->2	4->6	5->6	6->4	7->5	tempo (ms)
50.000	50.000	8.333	41.667	8.333	41.667	25.000	33.333	25.000	33.333	245

Sistema Linear - Numerical Recipes

1->2	2->7	2->4	2->3	3->5	3->2	4->6	5->6	6->4	7->5	tempo (ms)
50.000	50.000	8.333	41.667	8.333	41.667	25.000	33.333	25.000	33.333	2

net genenerator Klingman

netgn151

método	tempo (ms)
nr	4
octave	86000

netgn101

método	tempo (s)
nr	900
octave	∞

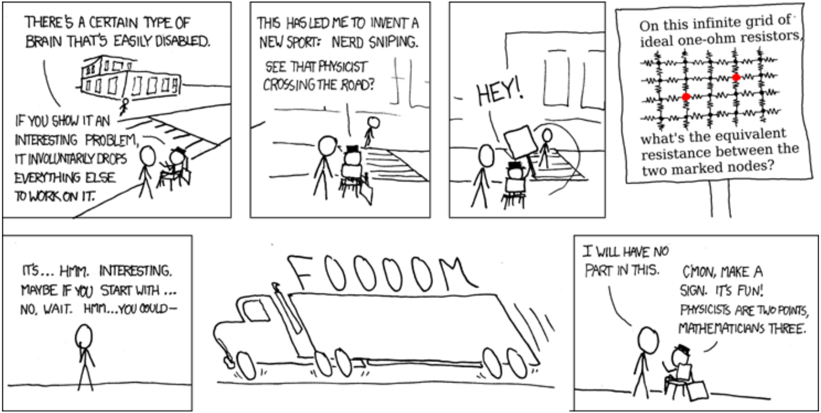
Conclusões

- O algoritmo em redes é mais eficiente que a resolução em sistemas de equações lineares.

Conclusões

- O algoritmo em redes é mais eficiente que a resolução em sistemas de equações lineares.
- O equilíbrio está associado à condição de optimalidade do problema linear associado.

Dúvidas


THERE'S A CERTAIN TYPE OF BRAIN THAT'S EASILY DISABLED.
IF YOU SHOW IT AN INTERESTING PROBLEM, IT INVOLUNTARILY DROPS EVERYTHING ELSE TO WORK ON IT.
THIS HAS LED ME TO INVENT A NEW SPORT: NERD SNIPING.
SEE THAT PHYSICIST CROSSING THE ROAD?
HEY!
On this infinite grid of ideal one-ohm resistors, what's the equivalent resistance between the two marked nodes?
IT'S... HMM. INTERESTING. MAYBE IF YOU START WITH ... NO, WAIT. HMM...YOU COULD—
FOOOOM
I WILL HAVE NO PART IN THIS.
C'MON, MAKE A SIGN. IT'S FUN! PHYSICISTS ARE TWO POINTS, MATHEMATICIANS THREE.