Universidade Federal do Amazonas

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

Resolução de sistemas lineares mediante 4 métodos de análise numérica

Relatório para a disciplina de Cálculo Numérico

por

Aluno: Micael Davi Lima de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. José Francisco de Magalhães Neto

Manaus, Novembro de 2019

Micael Davi Lima de Oliveira

Resolução de sistemas lineares mediante 4 métodos de análise numérica

Relatório como requisito de nota parcial para a disciplina de Cálculo Numérico apresentado durante o 4º Período pelo discente de matrícula *21851626* da turma *FB01* ao Curso de Bacharelado em Física pela Universidade Federal do Amazonas.

Orientador: Prof. Dr. José Francisco de Magalhães Neto

Manaus, AM

2019

Agradecimentos

Agradeço muito a Deus, por me dar forças e esperança em viver. Ainda que eu não mereça tamanho amor, me fortalece nos dias de tristeza.

Aos meus pais, pelo carinho e apoio.

Ao professor José Reginaldo, cujo conhecimento transmitido foi imprescindível para a realização deste trabalho.

Sumário

1 Resolução via eliminação de Gauss-Jordan

O sistema linear, em sua forma matricial e estendida, será solucionado pelo método da eliminação gaussiana. Este é apresentado logo abaixo:

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & b_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right] \tag{1.1}$$

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} -4,0000 & 4,0000 & -17,0000 & 36,5000 \\ -3,0000 & -15,0000 & 6,0000 & -81,0000 \\ 19,0000 & 6,0000 & -5,0000 & 7,0000 \end{array}\right] \tag{1.2}$$

O principal objetivo consiste em transformar a matriz A numa matriz identidade I. Para isso, será necessário inicialmente que a linha 1 seja dividida -4, ou seja, $L_1/(-4) \rightarrow L_1'$, afim de que se obtenha $a_{11}^{(1)} = 1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(0)} & b_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right] \tag{1.3}$$

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|c} 1,0000 & -1,0000 & 4,2500 & -9,1250 \\ -3,0000 & -15,0000 & 6,0000 & -81,0000 \\ 19,0000 & 6,0000 & -5,0000 & 7,0000 \end{array}\right] \\ L_1^{(0)}/(-4) \rightarrow L_1^{(1)} \end{array} \tag{1.4}$$

O termo $a_{21}^{(0)}$ pode ser eliminado ao ser subtraído por -3. Enquanto o termo $a_{31}^{(0)}$

torna-se nulo ao ser subtraído por -19. Portanto, serão efetuadas as seguintes operações elementares nas linhas 2 e 3, onde $L_2' \to L_2 - L_1 \cdot (-3)$ e $L_3' \to L_3 - L_1 \cdot (19)$.

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & b_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right] \tag{1.5}$$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1,0000 & -1,0000 & 4,2500 & -9,1250 \\ 0,0000 & -18,0000 & 18,7500 & -108,3750 \\ 0,0000 & 25,0000 & -85,7500 & 180,3750 \end{array}\right] \tag{1.6}$$
$$L_2^{(0)} - L_1^{(1)} \cdot (-3) \to L_2^{(1)}$$
$$L_3^{(0)} - L_1^{(1)} \cdot (19) \to L_3^{(1)}$$

Será realizado um processo semelhante ao apresentado acima, com a intenção de obter uma nova matriz estendida $A^{(2)}|b^{(2)}$. Desta vez, é preciso que o elemento $b_{22}^{(1)}$ se torne nulo. E assim, será feito a operação elementar onde $L_2^{(1)}/(-18)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right] \tag{1.7}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1,0000 & -1,0000 & 4,2500 & -9,1250 \\ 0,0000 & 1,0000 & -1,0417 & 6,0208 \\ 0,0000 & 25,0000 & -85,7500 & 180,3700 \end{array}\right] \tag{1.8}$$
$$L_2^{(1)}/(-18) \to L_2^{(2)}$$

O passo seguinte será eliminar os elementos $a_{12}^{(2)}$ e $a_{32}^{(1)}$. Para isso, será feito as seguintes operações elementares: $L_1^{(2)} \to L_1^{(2)} - L_2^{(1)} \cdot (-1)$ e $L_3^{(2)} \to L_3^{(1)} - L_2^{(1)} \cdot (25)$.

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right] \tag{1.9}$$

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1,0000 & 0,0000 & 3,2083 & -3,1042 \\ 0,0000 & 1,0000 & -1,0417 & 6,0208 \\ 0,0000 & 0,0000 & -59,7075 & 29,8500 \end{array}\right] \tag{1.10}$$

$$L_1^{(1)} - L_2^{(2)} \cdot (-1) \rightarrow L_1^{(2)}$$

$$L_3^{(1)} - L_2^{(2)} \cdot (25) \rightarrow L_3^{(2)}$$

Antes de chegar na solução do sistema, ainda é preciso que o elemento $a_{33}^{(2)}$ seja igual a 1, assim como, os elementos $a_{13}^{(2)}$ e $a_{23}^{(2)}$ iguais a 0. Inicialmente para que todos elementos da diagonal principal sejam iguais a 1, será feito a operação elementar onde: $L_3^{(3)} \rightarrow L_3^{(2)}/(-59,7075)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(3)} \end{array}\right] \tag{1.11}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1,0000 & 0,0000 & 3,2083 & -3,1042 \\ 0,0000 & 1,0000 & -1,0417 & 6,0208 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & -0,4999 \end{array}\right] \tag{1.12}$$

$$L_3^{(2)}/(-59,7075) \rightarrow L_3^{(3)}$$

Para que finalmente se obtenha $A^{(3)}|b^{(3)} = I$, ainda é preciso efetuar 2 operações elementares nas linhas $L_1^{(2)}$ e $L_2^{(2)}$.

$$A^{(3)}|b^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1^{(3)} \\ 0 & 1 & 0 & b_2^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(3)} \end{array}\right] \tag{1.13}$$

$$A^{(3)}|b^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,5004 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 5,5001 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & -0,4999 \end{array}\right] \tag{1.14}$$

$$L_1^{(2)} - L_1^{(2)} \cdot (-3,1042) \rightarrow L_1^{(3)}$$

$$L_2^{(2)} - L_2^{(2)} \cdot (-1,0417) \rightarrow L_2^{(3)}$$

Portanto, a solução do sistema pelo método de Gauss-Jordan é finalmente dado pelo vetor $b^{(3)}$ presente na matriz entendida $(I|b^{(3)})$, onde a precisão foi de $\epsilon \leq 0,001$.

Coordenadas da Solução: $b^{(3)} \approx (-1.500, 5.500, -0.500)$

2 Resolução via Fatoração LU

O sistema linear na forma $A \cdot x = b$ também possui a possibilidade de ser expresso por uma fatoração onde $(LU) \cdot x = b$. E assim, a solução do sistema fornecido pode ser obtida pela resolução de 2 sistemas lineares triangulares:

i) $L \cdot y = b$ ii)$U \cdot x = y$

Contudo, é preciso que a matriz não seja singular, e que portanto, seja invertível. Isto porque, o vetor $y = L^{-1} \cdot b$, e apenas com esta condição será possível solucionar via fatoração LU. O sistema a ser solucionado é:

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & b_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right] \tag{2.1}$$

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} -4,0000 & 4,0000 & -17,0000 & 36,5000 \\ -3,0000 & -15,0000 & 6,0000 & -81,0000 \\ 19,0000 & 6,0000 & -5,0000 & 7,0000 \end{array}\right] \tag{2.2}$$

O primeiro passo, será calcular o determinante da matriz com intuito de averiguar a possibilidade de uma resolução via fatoração LU. O método escolhido foi o método de Sarris.

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left|\begin{array}{ccccc} -4,0000 & 4,0000 & -17,0000 & -4,0000 & 4,0000 \\ -3,0000 & -15,0000 & 6,0000 & -3,0000 & -15,0000 \\ 19,0000 & 6,0000 & -5,0000 & 19,0000 & 6,0000 \end{array}\right| \tag{2.3}$$

3
Resolução via método de Gauss-Jacobi

4

Resolução via método de Gauss-Seiden

Bibliografia

[1] Burden R. L. et al. Numerical Analysis. 9 ed. Brooks/Cole Cengage Learning, 2010.

[2] Chapra, Steven C. Numerical methods for engineers. University of Michigan - Seventh edition.

[3] Numerical analysis lecture notes. Acesso em: 28 de outubro de 2019.
Disponível em: `http://www-users.math.umn.edu/~olver/num_/lng.pdf`

[4] Ruggiero, Márcia A. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. São Paulo: Pearson Education, 2ª edição, 2000.