Stabilität invertierter Pendel

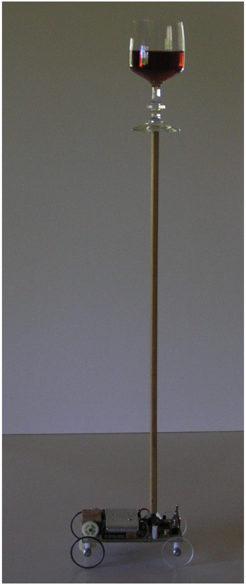
Michael Hartmann

Kaffeeseminar

4. November 2016

Überblick

Invertierte Pendel



balancing cart (1976), https://en.wikipedia.org/wiki/Inverted_pendulum

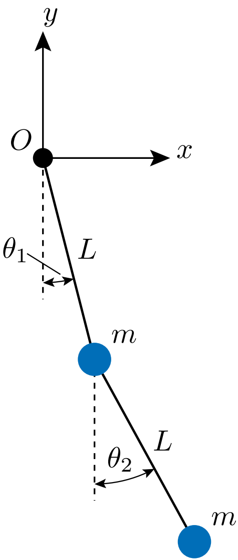
Invertierte Pendel

hoverboard, https://de.wikipedia.org/wiki/E-Board

Invertierte Pendel

Einrad, https://en.wikipedia.org/wiki/Unicycle

Doppelpendel



Koordinaten

$$x_1 = L\sin\theta_1$$
$$y_1 = -L\cos\theta_1$$
$$x_2 = L\sin\theta_1 + L\sin\theta_2$$
$$y_2 = -L\cos\theta_1 - L\cos\theta_2$$

Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T - V$$
$$T = \frac{1}{2}mv^2$$
$$V = -mgL\,(3 + 2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Linearisieren um $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \pi$

Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) \approx \frac{1}{2} m L^2 \left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right)$$

Potentielle Energie ($\Delta_j \equiv \theta_j - \pi$)

$$V = -mgL \left(3 + 2\cos\theta_1 + \cos\theta_2 \right) \approx -mgL \left(\Delta_1^2 + \frac{\Delta_2^2}{2} \right)$$

Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{2} m L^2 \left(2\dot{\Delta}_1^2 + \dot{\Delta}_2^2 + 2\dot{\Delta}_1 \dot{\Delta}_2 \right) + mgL \left(\Delta_1^2 + \frac{\Delta_2^2}{2} \right)$$

Linearisieren um $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \pi$

Euler-Lagrange–Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Delta}_j} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Delta_j} = 0$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{L}{g}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\Delta}_1 \\ \ddot{\Delta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}$$

Eigenfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}\underbrace{\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}}_{\approx 1.8478}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L}}\underbrace{\sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}}_{\approx 0.7654}$$

Normalkoordinaten

Kleine Abweichungen $\Delta_j \approx 0$ in Normalkoordinaten

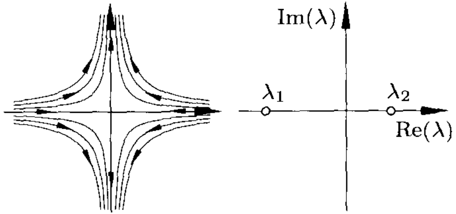
$$\ddot{X}_j - \omega_j^2 X_j = 0, \qquad j = 1, 2$$

Als System 1. Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} X_j \\ \dot{X}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_j^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_j \\ \dot{X}_j \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm\omega_j$$



An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

Stabilisieren

Aufhängung O oszilliere nun mit Frequenz ω_0 und Amplitude ϵ nach oben und unten

$$\ddot{X}_j - \omega_j^2 \left(1 + \frac{\epsilon\omega_0^2}{g} \cos(\omega_0 t)\right) X_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, N$$

Reskalieren mit $\tau = \omega_0 t$

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_j}{\mathrm{d}\tau^2} + (\alpha_j + \beta_j \cos\tau)\, X_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, N$$

$$\text{mit} \qquad \alpha_j = -\omega_j^2/\omega_0^2, \quad \beta_j = -\omega_j^2 \epsilon / g$$

Stabilisieren

Aufhängung O oszilliere nun mit Frequenz ω_0 und Amplitude ϵ nach oben und unten

$$\ddot{X}_j - \omega_j^2 \left(1 + \frac{\epsilon\omega_0^2}{g}\cos(\omega_0 t)\right) X_j = 0, \qquad j = 1, \dots, N$$

Reskalieren mit $\tau = \omega_0 t$

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_j}{\mathrm{d}\tau^2} + (\alpha_j + \beta_j \cos\tau)\, X_j = 0, \qquad j = 1, \dots, N$$

$$\text{mit} \qquad \alpha_j = -\omega_j^2/\omega_0^2, \quad \beta_j = -\omega_j^2 \epsilon/g$$

$\Rightarrow$ N ungekoppelte Mathieu-Gleichungen

Mathieu-Gleichung

Mathieu-Gleichung

$$\ddot{y}(t) + (\alpha + \beta \cos t)\, y(t) = 0$$

Eigenschaften

- linear
- homogen
- 2π-periodisch

Floquet-Theorem

Theorem: Jede Fundamentalmatrix Φ von

$$\dot{y}(t) = \mathcal{L}(t)y(t)$$

mit stetiger ω-periodischer Koeffizientenmatrix $\mathcal{L}$ lässt sich als

$$\Phi(t) = \mathcal{P}(t)\exp(\mathcal{R}t)$$

schreiben, wobei $\mathcal{P}$ ω-periodisch und $\mathcal{R}$ konstant.

Definition: Es gilt $\Phi(t+T) = \Phi(t)\mathcal{B}$ und die Eigenwerte λ_j von $\mathcal{B}$ heißen charakteristische Multiplikatoren.

Floquet-Theorem (2)

Lemma: Sei λ_j ein charakteristischer Multiplikator, dann existiert eine Lösung

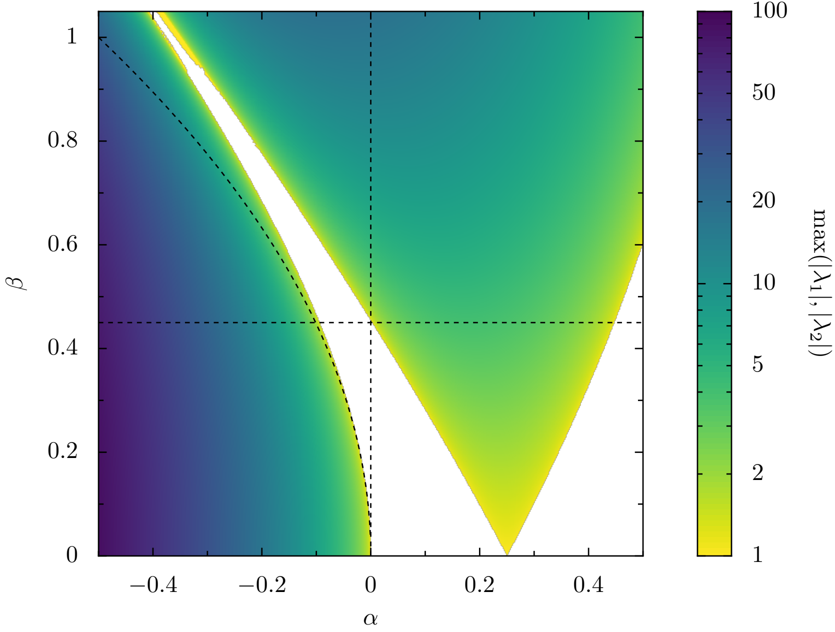
$$y(t+T) = \lambda_j y(t)\,.$$

Stabilität: Falls $|\lambda_j| > 1$, dann divergiert $y(t)$ für $t \to \infty$.

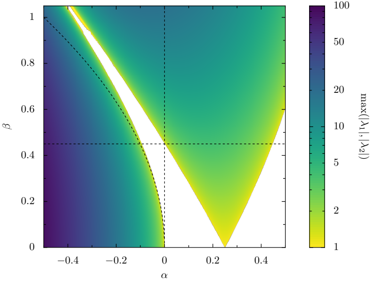
Numerisch:

1. Berechne Propagator $U(t+T,t)$
2. Berechne Eigenwerte λ_j von $U(t+T,t)$
3. Falls alle Eigenwerte $|\lambda_j| \leq 1 \to$ Lösung stabil

Stabilität Mathieu-Gleichung



Stabilität invertiertes N-Pendel



Idee: Wähle ϵ, ω_0 so, dass alle Punkte

$$(\alpha, \beta) = (-\omega_j^2/\omega_0^2, \omega_j^2 \epsilon/g)$$

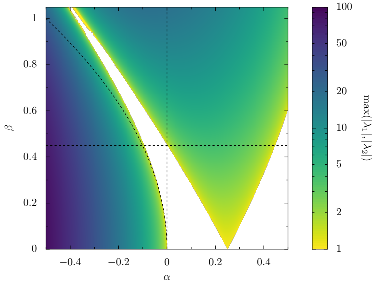
im stabilen Bereich liegen.

Hochfrequenz-Limes: $\omega_0^2 \gg \omega_{\mathrm{max}}^2$

$$\alpha = -\frac{\omega_j^2}{\omega_0^2} > -\frac{\beta^2}{2} = -\frac{\omega_j^4 \epsilon^2}{2g^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}g}{\omega_0 \omega_j} < \epsilon$$

$$\beta = \frac{\omega_j^2 \epsilon}{g} < 0.45 \quad \Rightarrow \quad \epsilon < 0.45 \frac{g}{\omega_j^2}$$

Stabilität invertiertes N-Pendel



Idee: Wähle ϵ, ω_0 so, dass alle Punkte

$$(\alpha, \beta) = (-\omega_j^2/\omega_0^2, \omega_j^2 \epsilon / g)$$

im stabilen Bereich liegen.

Hochfrequenz-Limes: $\omega_0^2 \gg \omega_{\mathrm{max}}^2$

$$\alpha = -\frac{\omega_j^2}{\omega_0^2} > -\frac{\beta^2}{2} = -\frac{\omega_j^4 \epsilon^2}{2g^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}g}{\omega_0 \omega_j} < \epsilon$$

$$\beta = \frac{\omega_j^2 \epsilon}{g} < 0.45 \quad \Rightarrow \quad \epsilon < 0.45 \frac{g}{\omega_j^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}g}{\omega_0\, \omega_{\mathrm{min}}} < \epsilon < 0.45 \frac{g}{\omega_{\mathrm{max}}^2}$$

invertiertes Doppelpendel

Stabilitätsbedingung

- für $m_1 = m_2 = m$:

$$\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\omega_0} < \frac{\epsilon}{L} < 0.45\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

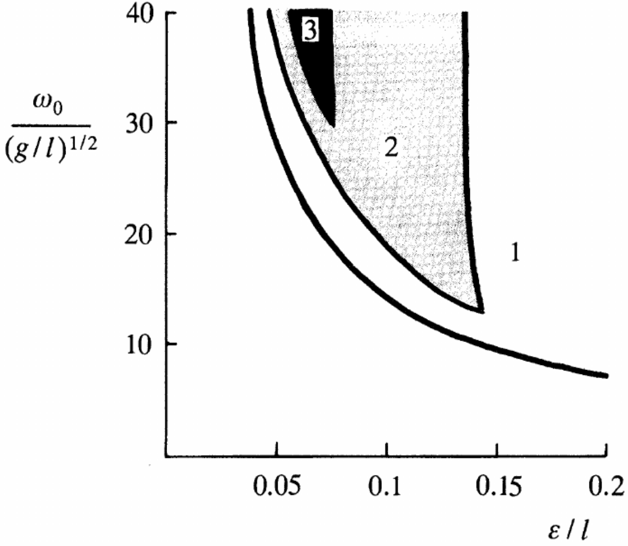
- für beliebige Massenverhältnisse (m_1 mit O verbunden):

$$\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\sqrt{2+2\sqrt{\mu}}}{\omega_0} < \frac{\epsilon}{L} < 0.45(1-\sqrt{\mu})$$

  mit

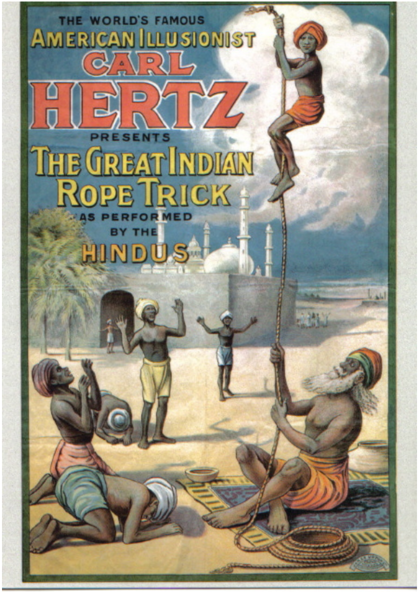
$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

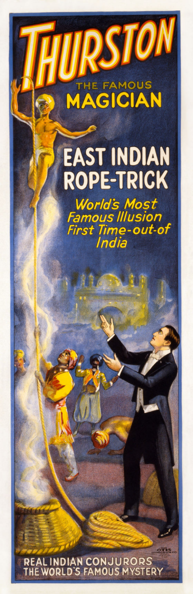
invertiertes N-Pendel



D. J. Acheson, **A pendulum theorem**, The Royal Society (1993)

Indischer Seiltrick





Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Indian_rope_trick

Indischer Seiltrick

Eigenfrequenzen eines N-Pendels

$$\omega_j = \sqrt{\xi_j \, \frac{g}{L}}, \qquad j = 1, \ldots, N$$

mit ξ_j: j-te Nullstelle des Laguerre-Polynoms $L_N(x)$

Asymptotische Entwicklung von ξ_j für $N \gg 1$

$$\xi_j \simeq \chi_j^2/4N, \qquad \chi_1 \approx 2.4, \quad \chi_N \simeq (N - 1/4)\,\pi$$

mit χ_j: j-te Nullstelle der Bessel Funktion $J_0(x)$

Größte/kleinste Eigenfrequenz

$$\omega_{\min} \approx 1.2\sqrt{\frac{g}{NL}}, \qquad \omega_{\max} \approx \frac{\pi}{2}\,(N - 1/4)\,\sqrt{\frac{g}{NL}}$$

Indischer Seiltrick

Größte/kleinste Eigenfrequenz

$$\omega_{\text{min}} \approx 1.2\sqrt{\frac{g}{NL}}, \qquad \omega_{\text{max}} \approx \frac{\pi}{2}\left(N - {}^{1}\!/\!_{4}\right)\sqrt{\frac{g}{NL}}$$

Stabilitätsbedingung

$$\frac{1.18}{\omega_0}\sqrt{\frac{g}{NL}} \lesssim \frac{\epsilon}{NL} \lesssim \frac{0.182}{\left(N - {}^{1}\!/\!_{4}\right)^2}$$

$$\frac{gNL}{\omega_0} \lesssim \epsilon \lesssim 0.154\frac{L}{N}$$

Indischer Seiltrick

Größte/kleinste Eigenfrequenz

$$\omega_{\min} \approx 1.2\sqrt{\frac{g}{NL}}, \qquad \omega_{\max} \approx \frac{\pi}{2}\left(N - {}^{1}\!/\!{}_{4}\right)\sqrt{\frac{g}{NL}}$$

Stabilitätsbedingung

$$\frac{1.18}{\omega_0}\sqrt{\frac{g}{NL}} \lesssim \frac{\epsilon}{NL} \lesssim \frac{0.182}{\left(N - {}^{1}\!/\!{}_{4}\right)^2}$$

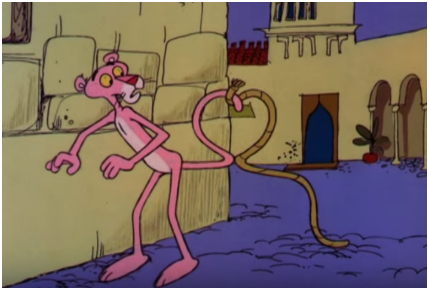
$$\frac{gNL}{\omega_0} \lesssim \epsilon \lesssim 0.154\frac{L}{N}$$

$\Rightarrow$ für $N \gg 1$ immer schwieriger zu erfüllen

Beispiel aus der echten Welt

Abbildung: Steve Mould, Upside down pendulum, youtube

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit



Quellen

- D. J. Acheson, **A pendulum theorem**, The Royal Society (1993)
- Fermat's Library: A Pendulum theorem

Vortrag auf github