Елена Владимировна.

# Кинематика.

**Кинематика** - раздел механики, изуч. движ. тел без причин, вызывающ. движ. тел.

**Твёрдое тело** - расстояние между любыми малыми частями кот. не меняются

**Система** - одно тело или несколько тел, связанные между собой нитями, блоками и т.д. или вовсе не связанные друг с другом.

**Система отчёта** нуж. $\forall$ тело, относит. которого рассматривается движ. сис-мы

**Поступательное движ.** - движ., при котором все малые части тела движ. по одинаковым $\parallel$-ым траекториям.

**Материальная точка** - твёрдое тело, лин. размеры которого много меньше лин. размеров траектории, по кот. движ. тело.

**Траектория** - линия, которую описывает мат. точка в процессе своего движ.

**Радиус вектор** - вектор, соед. начало отсчёта и тело, в процессе его движ.

**Характеристики:**

1. $\bar{v}$ - изм. радиус вектора за ед. времени.

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$ скорость направ. по касам. траектории

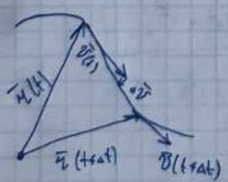
$$\Delta \bar{r} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)$$


$\bar{r}(t)$ - урав-е движ

следст: куда направ. правая часть, туда левая.

2. $\bar{a}$ - изм. скорости за ед. времени.

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$



Средние харак-ки.

**Перемещение** – разница двух радиус векторов

$$\bar{v}_{ср} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

**Путь** – длина участка траектории между 2-мя точками движ. тела.

$$\vec{v}_{ср} = \frac{S}{\Delta t}$$

Пример:

1) $\bar{v} = const$ ур-е движ – ?

$$t = 0: \ \bar{r}(t=0) = \bar{r}_0$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow d\bar{r} = \bar{v}\,dt \Rightarrow \int_{r_0}^{\bar{r}(t)} d\bar{r} = \int_0^t \bar{v}\,dt \Rightarrow \bar{r}(t) - \bar{r}_0 = \bar{v}t$$

$$\boxed{\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v}t}$$

2) $v \neq const$

$a = const$

$t = 0 \quad \bar{r}(t=0) = \bar{r}_0$

$\bar{v}(t=0) = \bar{v}_0$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \Rightarrow d\bar{v} = a \cdot dt \Rightarrow \int_{v_0}^{\bar{v}(t)} d\bar{v} = \int_0^t a \cdot dt \Rightarrow \bar{v}(t) - v_0 = \bar{a} \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \bar{a}t}$$

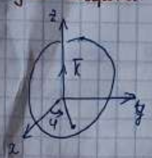
$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow d\bar{r} = \bar{v} \cdot dt = (\bar{v}_0 + \bar{a}t)\,dt \Rightarrow \int_{r_0}^{r(t)} d\bar{r} = \int_0^t (v_0 + \bar{a}t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{r}(t) - \bar{r}_0 = \bar{v}_0 t + \frac{\bar{a}t^2}{2} \Rightarrow \boxed{\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{\bar{a}t^2}{2}}$$

Вращательное движ.

**Вращ. движ. вокруг оси** – это такое движ, при котором все малые части тела движ. по окруж-тям, плоскости кот. ||-ы, а центры окруж. лежат на одной прямой, кот. наз. осью вращения.

**Угол поворота** – это ∠ на кот. поворачивается радиус вектор за время $t$




**Угловая скорость** –

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \bar{k} \qquad \{1k+1\}$$

**Угловое ускорение**

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \bar{k} \qquad [\varepsilon] = \left[\frac{1}{c^2}\right]$$

При равномерном движ. по окруж-ти вводят период (время 1-го полного оборота) и частоту (число оборотов в ед. времени)

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \qquad [\nu]\ Гц.$$

$$[\omega] = \left[\frac{1}{c}\right]$$

1) Если $\omega = const \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t}$ равномерное движ. по окр.

2) $\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \\ \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t \end{cases}$ – равноускоренное $\qquad \begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \\ \omega(t) = \omega_0 - \varepsilon t \end{cases}$ – равнозамед.

$$\boxed{\bar{\varphi}(t) = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\bar{\varepsilon}t^2}{2}}$$

Средние харак-ки.

**Перемещение** - разница двух радиус векторов

$$\bar{v}_{ср} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

**Путь** - длина участка траектории между 2мя точками движ. тела.

$$\bar{v}_{ср} = \frac{S}{\Delta t}$$

Пример:

1) $\bar{v} = const$ ур-е движ - ?

$t=0: \ \bar{r}(t=0) = \bar{r}_0$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow d\bar{r} = \bar{v}\, dt \Rightarrow \int_{r_0}^{\bar{r}(t)} d\bar{r} = \int_0^t \bar{v}\, dt \Rightarrow \bar{r}(t) - \bar{r}_0 = \bar{v} t$$

$$\boxed{\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v} t}$$

2) $v \neq const$

$a = const$

$t=0 \quad \bar{r}(t=0) = \bar{r}_0$

$\bar{v}(t=0) = \bar{v}_0$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \Rightarrow d\bar{v} = a\, dt \Rightarrow \int_{v_0}^{\bar{v}(t)} d\bar{v} = \int_0^t a \cdot dt \Rightarrow \bar{v}(t) - v_0 = \bar{a} \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \bar{a} t}$$

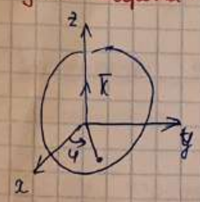
$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow d\bar{r} = \bar{v} \cdot dt = (\bar{v}_0 + \bar{a}t)\, dt \Rightarrow \int_{r_0}^{r(t)} d\bar{r} = \int_0^t (v_0 + \bar{a}t)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{r}(t) - \bar{r}_0 = \bar{v}_0 t + \frac{\bar{a} t^2}{2} \Rightarrow \boxed{\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{\bar{a} t^2}{2}}$$

Вращательное движ.

**Вращ. движ. вокруг оси** - это такое движ, при котором все мат. точки тела движ. по окруж-тям, плоскости кот. ||-ы, а центры окружн. лежат на одной прямой, кот. наз. осью вращения.

**Угол поворота** - это ∠ на кот. поворачивается радиус вектор за время t




**Угловая скорость** -

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \bar{k} \qquad \{|k|=1\}$$

**Угловое ускорение**

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \bar{k} \qquad [\varepsilon] = \left[\frac{1}{c^2}\right]$$

При равномерном движ. по окруж-ти вводят период (время 1го полного оборота) и частоту (число оборотов в ед. времени)

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \qquad [\nu]\ Гц.$$

$$[\omega] = \left[\frac{1}{c}\right]$$

1) Если $\omega = const \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t}$ равномерное движ. по окр.

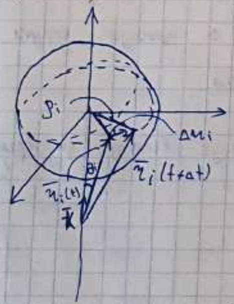
2) $\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \\ \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t \end{cases}$ - равноускоренное

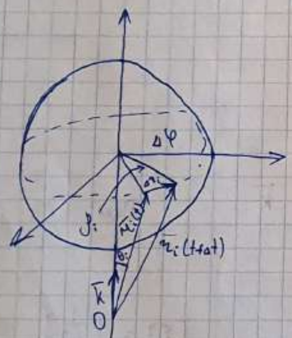
$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \\ \omega(t) = \omega_0 - \varepsilon t \end{cases}$ - равнозамед.

$$\boxed{\bar{\varphi}(t) = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\bar{\varepsilon} t^2}{2}}$$

23 Связь между линейными и угловыми хар-ми.

(Начало)




Вывод:

$\bar{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ $\qquad \Delta r_i = \rho_i \Delta\varphi = r_i \sin\theta_i \Delta\varphi \Rightarrow v_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r_i}{\Delta t} =$

$= r_i \sin\theta_i \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r_i \sin\theta_i\, w = \rho_i\, w \Rightarrow$

Т.к. направление лин. скорости строго по касат. $\boxed{v_i = [\bar{w}, \bar{r}_i]}$

Эйлера

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}[\bar{w}, \vec{r}_i] = \left[\frac{d\bar{w}}{dt}, \vec{r}_i\right] + \left[\bar{w}\ \frac{d\bar{r}_i}{dt}\right] =$$

$$= [\bar{\varepsilon}, \bar{r}_i] + [\bar{w}\ [\bar{w}\ \bar{r}_i]]$$

$$\vec{a}_i = a_\tau \vec{\tau} + a_n \cdot \bar{n}$$

$\tau$

$$a_\tau = \varepsilon \rho_i = \varepsilon r_i \sin\theta_i$$

$$a_n = w^2 \rho_i = w^2 r_i \sin\theta_i = \frac{v_i^2}{\rho_i}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{w^4 \rho_i^2 + \varepsilon^2 \rho_i^2}$$

При двит. по окр., нормальное ускор. $(\bar{a}_n)$ всегда отл. от нуля, а тангенциальное

появляется только при ускоренном двит. ⇒ двит. по окруж. всегда имеет ускорение

## Законы сохранения.

З.с. связаны связаны с симметрией нашего пространства и времени

Наше пространство однородно и изотропно, а время однородно

Пространство однородно, если при ||-ом переносе осей, св-ва пространства не меняются. С этим св-вом связан. ЗСИ.

Простр. изотропно, если при ∀ повороте осей св-ва пространства не меняются. С этим св-вом связан. с ЗСМИ (момента импульса)

Время однородно, т.к. ∀ сдвиги во времени не меняют его (все моменты времени физ. равноправны). С этим св-вом связан ЗСЭ.

## ЗСИ.

Назовём массой сис-мы сумму масс её малых частей. Назовём импульсом сис-мы сумму импульсов её малых частей, причём импульсов малой части..

$M = \sum\limits_i m_i \qquad \bar{p} = \sum \bar{p}_i \qquad \bar{p}_i = m_i \bar{v}_i$

if $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \ldots = \bar{v} \Rightarrow \bar{p} = \sum m_i \bar{v} = \vec{v} \sum\limits_i m_i = M\bar{v}$

Импульс не может возникнуть ниоткуда и не может исчезнуть никуда. Импульс передаётся от 1-го тела к другому локально

## Понятие силы.

Задача. Пусть тело Б действ. на тело А. и в некот. точке пространства передаёт телу А импульс ⇒ если за какой-то промеж. вр. $\Delta t$ продолжит промежуток $\Delta\vec{p}_A = \underbrace{\vec{F}_{AB} \cdot \Delta t}_{\text{импульс силы}}$ $\qquad \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{p}_A}{\Delta t} = \vec{F}_{AB}$

Сила - импульс, переданный телу А за ед. времени. Т.е. мы заменили действ. одного тела на другое - силой

Хар-ки силы:

1) Величина (модуль)

2) Направление

3) Точка приложения

$$\Delta \vec{p}_A = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ F_{AB} \to \infty}} \vec{F}_{AB} \cdot \Delta t$$

$J$ - сила удара $\quad \vec{J} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \vec{F} \to \infty}} \vec{F}\, \Delta t$

Пример: (Импульсные весы Бора)

$\Delta t$: $\Delta p \cdot N = F \cdot \Delta t = mg \cdot \Delta t = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ F \to \infty}} F \Delta t \Rightarrow$ ($\lim F\Delta t = J$)

$N$-число ударов

$$\Rightarrow NJ = mg\Delta t \Rightarrow J = \frac{mg}{n} \qquad n = \frac{N}{\Delta t}$$

Заключение:

Если на тело A действ. несколько тел, то за время $\Delta t$ тело A получ. импульс $\Delta \vec{p}_A = \vec{F}_{AB} \cdot dt + \vec{F}_{AC}\, dt$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_A}{dt} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \dots}$$

ур-е баланса импульса либо II з-н.

Законы Ньютона.

$\boxed{\text{I}}$ Во всех инерциальных сис-ах отсчёта, если на тело не действ. другие тела либо действ. этих тел скомпенсировано, то тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолин. движ.

$\boxed{\text{II}}$ Во всех инерциальных сис-ах отсчёта изм. импульса тела в ед. времени = сумме всех сил, действ. на тело.

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i}$$

$\boxed{\text{III}}$ Во всех инерциальных сис-мах отсчёта, силы, с кот. 2 тела действ. друг на друга, = по модулю, противополож. по направ. и приложены к разным телам.

$$\Delta \vec{p}_A = \vec{F}_{AB} \cdot \Delta t = -\vec{F}_{BA} \cdot \Delta t \Rightarrow \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Внутр. и внеш. силы. Теор. об изм. импульса сис-мы. (2-я запись з-а 1)

Задачи. Пусть сис-ма - одно тело. Разбиваем его на малые части, такие, что каждое движ. поступательно. Элементы действ. малых частей друг на друга силами и опред. внут. силы (это силы со стороны 1ой малой части на другую) внеш. силы (силы, действ. на тело, со стороны др. ~~тел~~ сил, не вход. в сис-му)

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \Rightarrow \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \; ; \quad \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} = \sum_{\substack{ij \\ i<j}} \vec{F}_{ij} + \sum_{\substack{ij \\ i>j}} \vec{F}_{ij} = (\text{меняем } i \leftrightarrow j) =$$

$$= \sum_{i<j} F_{ij} + \sum_{i<j} F_{ji} = \cancel{\sum_{i<j}} = \sum_{i<j} (F_{ij} + F_{ji}) =$$

$= \left(\begin{matrix} \text{по III зн} \\ F_{ij} = -F_{ji} \end{matrix}\right) = 0 \qquad \frac{d\vec p}{dt} = \sum_i \vec F_i$

Изм. импульса мех. сис-мы в ед врем. = сумме внеш. сил, действ. на сис-му, т.е. внут. сил не могут изм. импульс сис-мы

$$d\bar p = d\sum \vec F_i$$

## ЗСИ.

если на сис-му не действ. внеш. сил либо действ. внеш. сил скомпенсировано, либо это действ. происходит за беск. малый промеж. времени, то импульс такой сис-мы остаётся величиной постоянной.

— защита 2 дз закончена —

## Теорема о движении центра масс.

Вводим понятие центра масс

$$\vec r_c = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum m_i \vec r_i}{\sum_i m_i}$$

Тогда скорость центра масс $\vec v_c = \frac{d\vec r_c}{dt} = \frac{\sum m_i \vec v_i}{\sum_i m_i}$

Ускорение: $\vec a_c = \frac{d\vec v_c}{dt} = \frac{\sum m_i \vec a_i}{\sum_i m_i}$

возьмём $\frac{d\vec v_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_i \vec v_i}{\sum m_i}\right) = \frac{d\vec p}{dt}\cdot\frac{1}{\sum_i m_i} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_i m_i \frac{d\vec v_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec p_i\right) = \frac{d\bar p}{dt} = \vec F_i$, т.к. $\sum_i m_i = M$

$$\boxed{M\frac{d^2\vec r_c}{dt^2} = \sum \vec F}$$

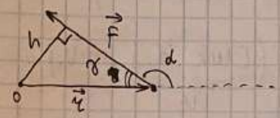
Т.е. центр масс движ. поступат. и только под действ. внеш. сил. Внут. силы не могут изм. полож. центра масс

## ЗСМИ (момента импульса)

Мгновенным импульсом сис-мы наз. сумма механ. моментов импульса её мат-х частиц

$$\vec L = \sum_i \vec L_i \qquad L_i = [\vec r_i, \bar p_i] = [\vec r_i, m_i \vec v_i]$$

Мгновенный момент сил: $\bar M = [\vec r, F]$




$|\vec M| = |[\vec r, F]| = |\vec r||\vec F|\sin\alpha = |\vec r||\vec F|\sin(\pi-\gamma) =$

$= |\vec F|\underbrace{|\vec r|\sin\gamma}_{=h}$

$\{\sin\gamma = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r\cdot\sin\gamma\}$

$\Rightarrow M = F\cdot h$ h – плечо силы

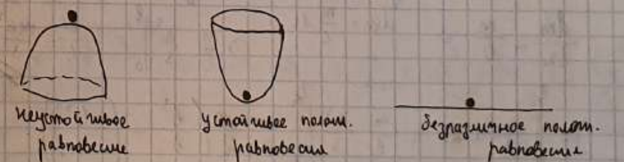
## Чуть-чуть статики.

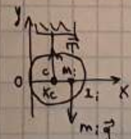
Для того, чтобы тело находилось в равновесии, необх. выполнение 2ух усл.:

1) $\sum_i \vec F_i = 0$ 2) $\sum_i \vec M_i = 0$

(сумма моментов сил, действ. на тело относит. ∀ начала коорд. = 0)

Центр тяжести тела – это такая точка, подвесив за кот., тело, наход. в покое в ∀ повёрнутом полож. Т.е. находится в безразличном равновесии.



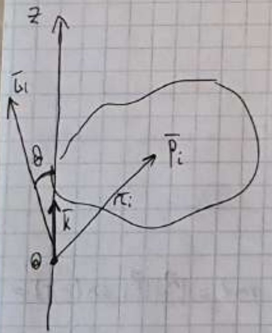




относит. C $M_i = m_i g h_i$ где $h_i = x_i - x_c$

$$M = \sum_i M_i = \sum_i m_i g(x_i - x_c) = g\left(\sum_i m_i x_i - \sum_i m_i x_c\right) =$$

$$= g\left(\sum_i m_i x_i - x_c\sum_i m_i\right) = 0 \Rightarrow x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$\vec{r}_c = x_c \vec{i} + y_i \vec{j} + z_c \vec{k} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$




$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$

$L_z = L\cos\theta = (\vec{L}\vec{k}) = \sum_i ([\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]\vec{k}) = \sum_i ([\vec{k}\, \vec{r}_i], m_i \vec{v}_i) = \frac{1}{\omega}\sum_i (\underbrace{[\omega\vec{k}, \vec{r}_i]}_{v_i}, m_i \vec{v}_i) = \frac{1}{\omega}\sum_i (\vec{v}_i, m\vec{v}_i) \ominus$

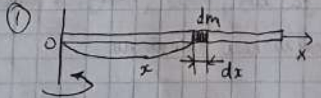
$\ominus \frac{1}{\omega}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{\omega}\sum_i m_i (\omega \rho_i)^2 = \omega \sum_i m_i \rho_i^2$ = J – момент инерции данного тела, относит. данной оси

$\rho_i$ – рад. окр. по кот. движ. i-ая малая часть

Момент инерции – мера инертности при вращательном движении.

Пр:

1)



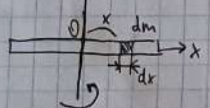

m, l

$dJ = dm\cdot x^2 = \frac{m}{l}dx\cdot x^2 \Rightarrow J = \int_0^l \frac{m}{l}x^2 dx \ominus$

$\frac{dm}{dx} = \frac{m}{l} \Rightarrow dm = \frac{m}{l}dx$

$\ominus \frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{ml^3}{3l} = \frac{ml^2}{3}$

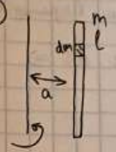
2)




$J = \int_{-l/2}^{l/2}\frac{m}{l}x^2 dx = \frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m}{3l}\left(\frac{l^3}{8} - \left(-\frac{l^3}{8}\right)\right) =$

$= \frac{m}{3l}\frac{l^3}{4} = \frac{ml^2}{12}$

3)




$dJ = dma^2 \Rightarrow J = \int dma^2 = a^2\int dm = ma^2$

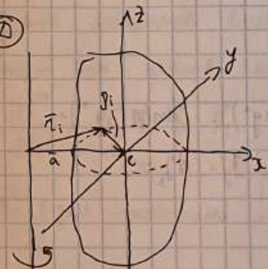
1 вопрос для защиты ДЗ №2

Гюйгенс – Штейнер.

(Т) Момент инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс = сумме моментов инерций относит. оси, прохд-ей через центр масс и ∥-ой данной, и произвед-е массы тела на квадрат расстояния между осями.

(Д)

рис.1




(т.кос.)

$dJ = dm\, r^2$ ; $r^2 = \rho^2 + a^2 - 2\rho a\cos\alpha$

$dJ = dm\rho^2 + dm a^2 - dm\, 2\rho a\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow J = \int dm\rho^2 + \int a^2 dm - \int dm\cdot 2\rho a\cos\alpha$

Для. $\int dm\cdot 2\rho a\cos\alpha = 2a\int dm\,\rho\cos\alpha$

$\rho\cos\alpha = x$ (см. рис.1.1)

$\int dm\,\overbrace{\rho\cos\alpha}^{x} = \int dm\cdot x = \left[x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\right] = \underset{0}{x_c}\cdot m = 0 \Rightarrow$

(т.к. начало коорд.)

Вид сверху:

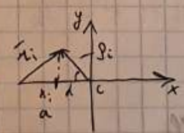



рис.1.1

$\Rightarrow J = J_c + a^2\underbrace{\int dm}_{m} \Rightarrow \boxed{J = J_c + ma^2}$

ЧТД

Конец защиты

m, R

{Разложим в прямоуг.}

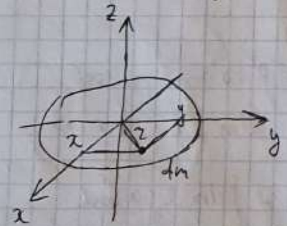
$$dJ = dm \cdot r^2 \; ; \quad \frac{dm}{dS} = \frac{m}{\pi R^2} \; ; \quad dS = 2\pi r \cdot dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dm = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$J = \int_0^R \frac{m}{R^2} 2r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{2mR^4}{4R^2} = \frac{mR^2}{2}$$

## (Т) Теор. для моментов инерций для плоской фигуры

Для любой плоской фигуры момент инерции относит. оси $\perp$ой плос-ти тела = сумме моментов инерций относит. 2ух других осей, составляющих декартовую трубку координат



$$dJ_z = dm r^2 = dm(x^2+y^2) = dm(x^2+y^2) =$$

$$= \underbrace{dm x^2}_{dJ_y} + \underbrace{dm y^2}_{dJ_x} = dJ_y + dJ_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_z = J_x + J_y$$

$$J_z = J_x + J_y = [J_x = J_y] = 2J_x \Rightarrow \frac{mR^2}{2} = 2J_x \Rightarrow J_x = \frac{mR^2}{4}$$

## Ближе к ЗСИ

Как импульс так и момент импульса всей Вселенной сохр.

Как и импульс, момент импульса передаётся локально от 1-ого тела к другому. Если тело Б действ. на тело А, то за время $dt$ вместе с передачей импульса, тело Б передаст телу А момент импульса.

ЗСИ и момент импульса – независим.

момент импульса

↓ механ. ↓ собственный

$$d\bar{p}_A = \bar{F}_{AB}\, dt \; ; \quad d\bar{L}_A = \bar{M}_{AB}\, dt \quad \text{где} \quad \bar{M}_{AB} = [\bar{r}\; F_{AB}]$$

**вторая зацита ДЗ Б2**

## (Т) Т. об изменении механ.-го момента импульса сис-мы

Изменение механ.-го момента импульса сис-мы в ед. времени = сумме моментов внеш. сил, действ. на сис-му и сумме моментов внут. сил, действ. между частями частями сис-мы

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i [\vec{r}_i\; \vec{F}_i] + \vec{M}_{внут.}$$

(Д) (для одного тела) $\overset{i:}{=}$ $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j,\, i\neq j} \vec{F}_{ij} \Rightarrow [\bar{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt}] = [\vec{r}_i, \vec{F}_i] +$

$$+ \sum_{j,\, i\neq j} [\bar{r}_i\; \bar{F}_{ij}]$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i\; \vec{p}_i] = \Big[\underbrace{\frac{d\bar{r}_i}{dt}}_{v_i}\; \bar{p}_i\Big] + \Big[\bar{r}_i\; \frac{d\bar{p}_i}{dt}\Big] \Rightarrow \frac{d}{dt}\big([\bar{r}_i\; \bar{p}_i]\big) =$$

0, т.к. $\bar{v}_i \uparrow\uparrow \bar{p}_i$

$$= [\bar{r}_i\; \bar{F}_i] + \sum_{j,\, i\neq j} [\vec{r}_i\; F_{ij}] \Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_i \underbrace{[r_i\; p_i]}_{\vec{L}} = \sum_i [r_i\; F_i] + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} [\bar{r}_i \bar{F}_{ij}]$$

$$\sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} [\bar{r}_i\; \bar{F}_{ij}] = \frac{1}{2}\sum_{ij} [\bar{r}_i\; \bar{F}_{ij}] + \frac{1}{2}\sum_{ij} [\bar{r}_i\; \bar{F}_{ij}] = [i \rightleftarrows j] =$$

по III з.Н. $F_{ji} = -F_{ij}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij} [r_i\; F_{ij}] + \frac{1}{2}\sum_{\substack{ij \\ j\neq i}} [\bar{r}_j\; \bar{F}_{ji}] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{ij,\, i\neq j} [\bar{r}_i \bar{F}_{ij}] - \sum_{ij,\, j\neq i} [\bar{r}_j \bar{F}_{ij}]\Big) = \frac{1}{2}\sum_{ij} [(\vec{r}_i - \bar{r}_j)\, \vec{F}_{ij}] = \bar{M}_{внут.}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_i [\bar{r}_i\ \bar{F}_i] + \bar{M}_{внут.}}$$

$\frac{170}{5}$

конец защиты

1. Замечание: Видно, что момент ~~импульса~~ внут. сил не зависит от выбора системы отсчёта, а зависит только от разности $i - \vec{F}_j$ $\Rightarrow$ если внут. силы центральные (т.е. $P_i - P_j$) $\parallel F_{ij}$ то момент внут. сил $= 0$

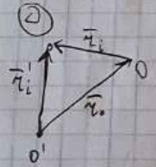
ЗСИ: Если сумма моментов внут сил, действ. на сис-му $= 0$, а внут. силы – центральные, то механич. момент импульса такой сис-мы остаётся величиной постоянной

Защита $D_3$ 5 ③

$\Gamma$ ( )

Изменения механич. момента импульса имеет один и тот же вид во всех сис-мах отсчёта, кот. покоятся относит. друг друга.

②



$\bar{r}_0 = const$

$\bar{v}_i' = \bar{v}_i$

$\bar{r}_i' = \bar{r}_i + \bar{r}_0$

$$\bar{L}' = \sum_i [\bar{r}_i', \bar{p}_i'] = \sum_i [(\bar{r}_i + \bar{r}_0), \bar{p}_i] =$$

$$= \sum_i [\bar{r}_i\ \bar{p}_i] + \sum_i [\bar{r}_0\ \bar{p}_i] = \bar{L} + \sum_i [\bar{r}_0\ \bar{p}_i]$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{d}{dt}\sum_i [\bar{r}_0\ \bar{p}_i] = \frac{d\bar{L}}{dt} + \left[\bar{r}_0\ \frac{d\bar{p}}{dt}\right] =$$

$$= \frac{d\bar{L}}{dt} + [\bar{r}_0\ \bar{F}]$$

$$\bar{M}' = \sum_i [\bar{r}_i', \bar{F}_i] = \sum_i [(\bar{r}_i + \bar{r}_0), \bar{F}_i] = \sum_i [\bar{r}_i\ \bar{F}_i] + \sum_i [\bar{r}_0\ \bar{F}_i] =$$

$$= \bar{M} + [\bar{r}_0\ \bar{F}]$$

$$\Rightarrow [\bar{r}_0\ \bar{F}] = \bar{M}' - \bar{M} \Rightarrow \frac{d\bar{L}'}{dt} = \frac{d\bar{L}}{dt} + \bar{M}' - \bar{M} \Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} - \bar{M}$$

С учётом того, что момент внут. сил не зависит от с.о. доказано что изм. мех. имп-са имеет один и тот же вид что

— конец защиты —

~~$\frac{d}{dt}$~~

Если система – твердое тело и оно вращ. вокруг оси.

$L_z = J\omega$ ; $M_z = (\bar{M}\ \bar{k})$ ; внут. силы – центральные $\bar{M}_{внут} = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = M_z \Rightarrow$

$$\Rightarrow J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z \Rightarrow \boxed{J_z\, \varepsilon = M_z = \sum_i M_{iz}}$$ – основное уравнение динамики вращат. движ. твердого тела относит. $O_z$

# Закон Сохранения Механической Энергии

В энергии можно выделить энергию видимого движ. тела – $E_к$

Кинетич. энергия тела $(E_к)$ = сумме кинетич. энергий её малых частей

кинет. энер.

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \quad \text{if } (\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \ldots = \bar{v}_i) \Rightarrow K = \sum_i \frac{m_i v^2}{2} =$$

$$= \frac{v^2}{2}\sum_i m_i = \frac{m v^2}{2}$$

Передача энергии происходит за счёт работы силы.

Работа силы – Если тело $B$ действует на тело $A$ с силой $\vec{F}_{AB}$ и если точка прилож. силы за время $dt$ сместилось на $d\vec{r}$, то вместе с передачей импульса от тела $B$ к телу $A$ и независимо от него, тело $B$ передаёт телу $A$ энергию в виде элементарной работы = скалярному произв. силы на перемещ.

$$\delta A = (\vec{F}_{AB}, d\vec{r}) \ ; \ [A] = [H \cdot м] = [Дж]$$

(есть работа на промежутке) ($\delta$)

мощность – это работа, производимая действующ. силы в ед. времени.

$[N] = [\frac{Дж}{с}] = [Вт]$

$\boxed{\text{Защита Д/З 51 ③}}$ экз.

Т (об изменении кинет. энергии)

Изменени кинетической энергии сис-мы за ∞-малый промежуток времени = сумме эл-ых работ внеш. и внут. сил, действ. на сис-му

$$dK = \sum_i (\vec{F}_i \, d\vec{r}_i) + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\vec{F}_{ij} \, d\vec{r}_i) \qquad \text{где } d\bar{r}_i = \bar{v}_i \, dt$$

⊙ (Для одного тела)

Разобьём тело на малые части, каждое из кот. движ. поступательно, и заменим действ. малых частей друг на друга силой.

$$\frac{d\bar{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} \quad \Big| \cdot \bar{v}_i$$

$$\left(\bar{v}_i \frac{d\bar{p}_i}{dt}\right) = (\bar{F}_i \, \bar{v}_i) + \sum_j (\bar{F}_{ij} \, \bar{v}_i) \; ;$$

$$\left(\bar{v}_i \frac{d\bar{p}_i}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\bar{v}_i \; m\bar{v}_i) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_i v_i^2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\bar{v}_i \; m_i\bar{v}_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{v}_i}{dt}, m_i\bar{v}_i\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{v}_i, \frac{m_i d\bar{v}_i}{dt}\right) = \left(\bar{v}_i, m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}}_{\text{полная кинет. энерг.}} = \sum_i (\bar{F}_i \, \bar{v}_i) + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij} \, \bar{v}_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \sum_i (\bar{F}_i \, \bar{v}_i) + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij} \, \bar{v}_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dK = \sum_i (\bar{F}_i, \bar{v}_i \, dt) + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij}, \bar{v}_i \, dt)$$

$$\Rightarrow dK = \sum_i (\bar{F}_i \, d\bar{r}_i) + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij} \, d\bar{r}_i)$$

ЧТД

– end protection –

Замечание: Работа внут. сил

$$\sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij} \, d\bar{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_{ij} (\bar{F}_{ij} \, d\bar{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{ij} (F_{ij} \, d\bar{r}_i) = [i \rightleftarrows j] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij} \, d\bar{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{ji \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ji} \, d\bar{r}_i) = [F_{ij} = -F_{ji}] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} F_{ij} \, d(\bar{r}_i - \bar{r}_j)$$

Вывод: Если ~~эти~~ внут. силы ближкодейств., то работа их ≠ 0

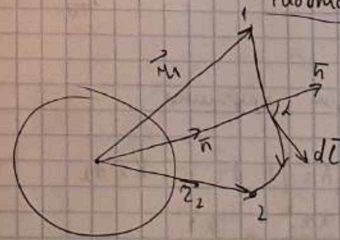
Потому, какую работу выполняют различ. силы, их можно разделить на два класса: потенц. и непотенциальные (~~гироскопические~~) (диссипативные)

экз Потенциальными ( ) – наз. силы, работа кот. не зависит от формы траектории, а зависит только от начальной и конечной точек.

Отсюда ⇒ что работа потенциальной силы по ∀ замкнут. траектории = 0.

Для потенц. силы элементарная работа = полному дифф-лу со знаком минус от неком. ф-ции, кот. наз. потенциальной энергией.

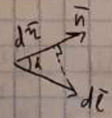
Работа сил гравитационного взаимодействия



$$\bar{F} = -G\frac{mM}{r^2}\bar{n}$$

$$\delta A = (\bar{F} \, d\bar{l}) = -G\frac{mM}{r^2}(\bar{n} \, d\bar{l}) =$$

$$= -G\frac{mM}{r^2} dl \cos\alpha = (dl\cos\alpha = dr) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \delta A = -G\frac{mM}{r^2} dr$$

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = -GMm\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = G\frac{mM}{r}\Bigg|_1^2 =$$

$$= G\frac{mM}{r_2} - G\frac{mM}{r_1}$$

$\Delta K_{12} = A_{12} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = G\frac{mM}{r_2} - G\frac{mM}{r_1} \Rightarrow \frac{mv_1^2}{2} - G\frac{mM}{r_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = -G\frac{mM}{r}} \qquad \boxed{\delta A = -dU}$$

Защита ДЗ к (4)

Связь силы и потенциальной энергии

$$\delta A = -dU(r) \qquad \begin{cases} \delta A = (\bar F \, d\bar r) = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \\ dU(r) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

Частная производ.:

$z = 2x - 3y^2$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y$

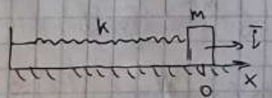
$$F = F_x\bar i + F_y \bar j + F_z \bar k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec F = -\frac{\partial U}{\partial x}\bar i - \frac{\partial U}{\partial y}\bar j - \frac{\partial U}{\partial z}\bar k =$$

$$= -\Big(\underbrace{\bar i\frac{\partial}{\partial x} + \bar j\frac{\partial}{\partial y} + \bar k\frac{\partial}{\partial z}}_{\text{operator Набла}}\Big)U(r) = -\vec\nabla U(r) = -\mathrm{grad}\,U(r)$$

что

Потенциальная энергия упругой деформации пружины.




$$\bar F = -kx\bar i \Rightarrow \delta A = (\bar F\,d\bar r) = -kx\,dx$$

$$A_{12} = \int_1^2 -kx\,dx = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}$$

$$\Delta K_{12} = A_{12} \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} \Rightarrow \boxed{U = \frac{kx^2}{2}}$$

Замечания:

1. Кинет. энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижн. оси: $K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 \rho_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i\rho_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}$

2. Т. Кёнига: Кинетич. энергия твёрдого тела = сумме кин. энергии центра масс и кинет. энергии вращения относительно центра масс

$$K = K_{ц.м} + \frac{I\omega^2}{2}\Big|_{отн.ц.м.}$$

3. Закон сохран. мех. энергии

$E = K + U$, где $E$ – полная мех-ая энергия сис-мы

$K$ – полная кин-ая энер-гия сис-мы

$U$ – потенциальная энергия сис-мы

$$\Delta K = \sum_i A_i = A_{кон} + A_{нек.с} \Rightarrow [A_{кон} = U_1 - U_2] \Rightarrow K_2 - K_1 =$$

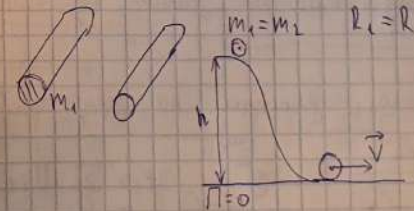
$$= A_{н.к.} + U_1 - U_2 \Rightarrow (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = A_{н.с.} \Rightarrow \boxed{\Delta E = A_{н.с.}}$$

З. сох. полной мех. энергии.

Если на сис-му и внутри сис-мы не действ. неконсервативные силы, либо работа нек-ых сил = 0, то полная мех энергия сис-мы остаётся величиной постоянной.

Примеры:

1) $m_1 = m_2 \quad R_1 = R_2$




$E_{нач} = E_{кон}$

$E_{нач} = mg(h+R)$

$E_{кон} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + mgR \Rightarrow$

$\Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$

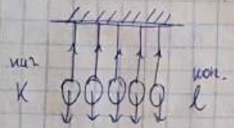
$$V = \omega R \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2R^2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

$$J_{с.ц} = \frac{mR^2}{2}\ ; \quad J_{п.ц} = mR^2$$

- Скорость сплошного цилиндра будет больше

2) Прибор Мариотта.

АУУ




K - нач. кол-во шариков (отпускающихся)

l - конеч. кол-во шариков (отталкиваемых.)

$$\begin{cases} KmV = lmV' \\ K\frac{mV^2}{2} = l\frac{mV'^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} KV = lV' \\ KV^2 = lV'^2 \end{cases} \Rightarrow V = V' \Rightarrow \boxed{K = l}$$

## Механические колебания

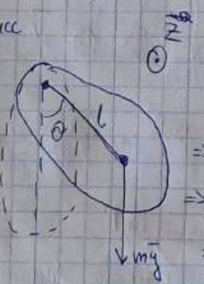
• **Колебания** — это периодич. изм. некот. физ. величины со временем. Колеб-я возник. в случае, когда сис-ма находится в положении устойчивого равновесия, и мы каким-либо способом выводим сис-му из него, при этом диссипативные силы в сис-ме должны быть незначит-ны.

• **Матем. маятник** — $\forall$ твёрдое тело, подвешенное на длинной нерастяжимой невесомой нити, длина кот. много больше линейн. размеров тела

Будем рассматривать малые колеб-я маятников ($\leq 10-15°$)
При больших колебаниях период колеб-ий зависит от амплитуды.

• **Физ. маятник** — $\forall$ твердое тело, подвешенное на горизонт. оси, не проходящей через центр масс

ф. маятник


$I\varepsilon_z = \sum_i M_{iz}$

$M_z = -mgl\sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow I\varepsilon = -mgl\sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow [\varepsilon = \ddot\theta] \Rightarrow I\ddot\theta + mgl\sin\theta = 0$

$\Rightarrow [\sin\theta \sim \theta] \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot\theta + \frac{mgl}{I}\theta = 0$

• **Приведенная длина** — это длина такого мат. маятника, период колеб. которого = периоду колебания данного физ. маятника

$\ddot\theta + \omega_0^2\theta = 0$ — это диф-ое ур-е гармонич. колебаний, происходящих с частотой $\omega_0$

$$\boxed{\theta(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = B\sin(\omega_0 t + \varphi_0')}$$

A — амплит. колеб., т.е. макс отклонение физ. велич. от полож. равновесия

$\omega_0$ — циклич. частота кол-ний, т.е. число колеб-ий за $2\pi$ сек.

$\omega_0 t + \varphi_0$ — фаза колеб., указывающая положение физ. величины в данный момент времени.

$\varphi_0$ — начальная фаза

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}}$$

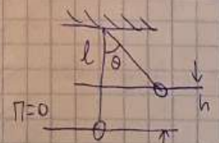
• T (период) физ. маятника зависит только от его параметров

• Единств-е реш., т.е. ур-ие движения маятника, зависит от 2ух нач. усл.

м. маятник

$$E = \frac{mV^2}{2} + mgh = \frac{m(\dot\theta l)^2}{2} + mgl(1-\cos\theta) \Rightarrow$$

$2\sin^2\frac{\theta}{2} \approx [\theta\text{-мал}] \approx \frac{\theta^2}{2}$




$$\Rightarrow \boxed{\frac{ml^2\dot\theta^2}{2} + mgl\frac{\theta^2}{2} = E_0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2\dot\theta^2}{2} + mgl\frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}E_0 \Rightarrow \frac{ml^2}{2}\cdot 2\dot\theta\cdot\ddot\theta + \frac{mgl}{2}2\theta\cdot\dot\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot\theta + \frac{g}{l}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

$$T_м = T_ф \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \Rightarrow \boxed{l_{пр} = \frac{I}{ml}}$$

**Замечание (для полной энергии)**

$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$\dot\theta = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow E = \frac{ml^2\omega_0^2 A^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)}{2} + \frac{mgl}{2}A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$

$$= \left[ \omega_0^2 = \frac{g}{l} \right] = \frac{ml^2 A^2 g \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2l} + \frac{mglA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{mglA^2}{2}$$

$$\boxed{E \sim A^2}$$

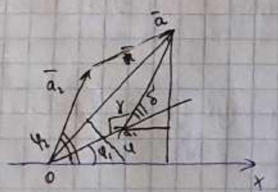
Защита II дз. Нахождение момента инерции для: стержня, диска (мб вырез), цилиндра (мб полость), сферы, шара (мб полость). Теоремой Гюйгенса - Штейнера пользоваться нельзя.

## Сложение колебаний (I защита 3 дз)

1. Сложение колебаний одного направления равных частот.

Складывать их будем с помощью векторной диаграммы

① 
$$\begin{aligned} &x_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ + &x_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ \hline &x(t) = a \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$




$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$ ; $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ ; $\gamma = \pi - \delta$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos\gamma = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\pi - \delta) =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2}$$

② Сложение колебаний одного направл. близких частот

$\omega_1, \omega_2$, $\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1} \cdot 100\% \approx 5\% - 6\%$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right] = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

$$\omega_{ср} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

~~$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] = 2A\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t)$~~

$\omega_м = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ - частота ~~модуляции~~ модуляции

$\Rightarrow x(t) = 2A\cos(\omega_{ср} t)\cos(\omega_м t)$

$x(t) = A_м(t)\cos(\omega_{ср} t)$, где $A_м(t) = 2A\cos(\omega_м t)$


$\tau_{мод} = \frac{2\pi}{\omega_м}$ $\tau_б = \frac{\tau_м}{2}$

3. Сложение взаимно перпендик.-ых колебаний

③ $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ ; $y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$

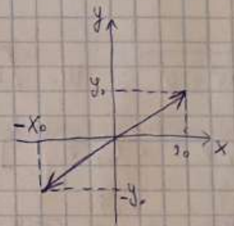
Если частоты кратные, то тогда траектория движ. фигуры Лиссажу

1) $\delta = 0$ - разность фаз $= 0$

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t)$

$\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0} \Rightarrow \boxed{y = \frac{y_0}{x_0} x}$




2) $\delta = \pi$

$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t$

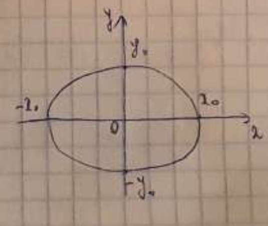
$y(t) = -y_0 \cos\omega_0 t$

(В ответе амплитуды не мб отриц.)

$\frac{x}{y} = -\frac{x_0}{y_0} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{y_0}{x_0} x}$


3) $\delta = \frac{\pi}{2}$ ; $x(t) = x_0 \cos\omega_0 t$ ; $y(t) = -y_0 \sin\omega_0 t$

$\Rightarrow \cos\omega_0 t = \frac{x}{x_0}$ ; $\sin\omega_0 t = \frac{-y}{y_0} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1}$

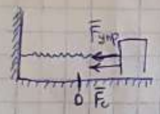



(мб ещё $\delta = -\frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ - такой же эллипс но стрелки в др. стор.

Конец защиты

## Затухающие колебания

Начало II Закона 3 Дз




$F_c = -b\vec{V}$ по II ЗН: $ma = -kx - b\vec{V} \Rightarrow a + \frac{b}{m}V + \frac{k}{m}x = 0$;

$\frac{b}{m} = 2\beta$ ; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$\omega_0$ – частота незатухающ. колебаний

$\beta$ – коэф. затухания

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ; $x = Ce^{\lambda t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$

$\lambda_{12} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

1) $\beta < \omega_0$

$\lambda = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний

$\Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}]$

По формуле Эйлера: $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}[C_1\cos\omega t + C_1 i\sin\omega t +$
$+ C_2\cos\omega t - C_2 i\sin\omega t] = e^{-\beta t}[(C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t] =$
$= e^{-\beta t}[(C_1 + C_2)\cos\omega t - i(C_2 - C_1)\sin\omega t] \Rightarrow \left| \begin{matrix} C_1 + C_2 = A_0\cos\varphi_0 \\ i(C_2 - C_1) = A_0\sin\varphi_0 \end{matrix} \right|$

$\Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}[A_0\cos\omega t\cos\varphi_0 - A_0\sin\omega t\sin\varphi_0] = \underline{A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)}$

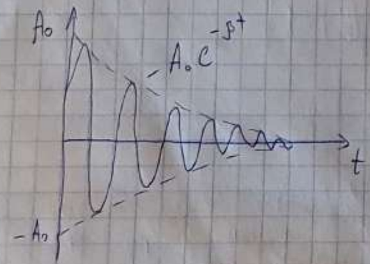
– ур-е свобод. затухающ. колебаний,

где $A_0$ и $\varphi_0$ зависят от нач. усл. (константы):

$x(t=0) = x_0$

$\frac{dx}{dt}(t=0) = V_0$

конец защиты




## Анализ затухающих колеб.

1. $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$

2. Время затухания – время, за которое амплитуда уменьшается в $e$ раз: $A_0 e^{-\beta t} = \frac{A_0}{e} \Rightarrow e^{-\beta\tau} = e^{-1} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{\beta}}$

3. Декремент затухания: показывает, во сколько раз амп-да уменьшилась за период: $D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$

4. Логарифмический декремент затухания:

$\lambda = \ln D = \beta T$

5. Число колеб-ий, за которое амплитуда уменьшается в $e$ раз:

$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}$

6. Добротность сис-мы:

$Q = 2\pi\frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$

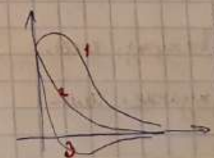
Для слабозатухающих колебаний ($\beta \ll \omega_0$) получим добротность:

$Q = 2\pi\frac{A_0^2 e^{-2\beta t}}{A_0^2 e^{-2\beta t} - A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}$ ; $e^{-2\beta T} = 1 - 2\beta T + \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = \frac{2\pi}{1 - 1 + 2\beta T} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = \boxed{\pi \cdot N_e}$ Чем выше добротность, тем ближе сис-ма к идеальной

2) $\beta = \omega_0 \Rightarrow T \to \infty \Rightarrow$ колеб. исчезают

3) $\beta > \omega_0 \Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$ – такое движ. наз апериод.




① $V_0 > 0$
② $V_0 \leq 0$
③ $V_0 \ll 0$

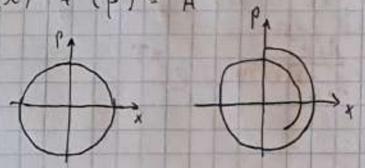
## Фазовая плоскость.

$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$

$p = \dfrac{\dot{x}}{\omega} = -A\sin(\omega t + \varphi_0)$

$(x)^2 + (p)^2 = A^2$




фазовая территория даёт соотнош. между коорд. и скоростью

## Вынужденное колеб.

Задача Вынужд. колеб. происходит, когда на сис-му действ. внеш. период. сила.

$ma = -b v - kx + F_0 \cos\omega t \quad |:m$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{b}{m}}_{2\beta}\frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x = \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{f_0}\cos\omega t$$

III защита дз 3 **Начало**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$$ — диф-ое ур-е вынужд. колебаний

реш-ием того ур-я: $x(t) = A e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \varphi_0\right) + x_0\cos(\omega t + \varphi)$

1-е слагаемое через неком.-е время стремится к 0 ($\to 0$), поэтому установившееся колебание будет проходить по закону:

$x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi)$

$x_0$ – амплитуда вынужд. колеб. $\varphi$ – сдвиг фаз между смещением и вынужд. силой

$\omega$ – частота вынуждающ. силы

$\dfrac{dx}{dt} = -x_0\omega\sin(\omega t + \varphi)$ (1ая произв) ; $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -x_0\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$ (2ая произв)

подставим:

$-x_0\omega^2\cos(\omega t + \varphi) - 2\beta x_0\omega\sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 x_0\cos(\omega t + \varphi) = f_0\cos\omega t$

группируем по cos и sin:

$x_0(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \varphi) - 2\beta x_0\omega\sin(\omega t + \varphi) =$ [развернем $\sin(x+y)$ и $\cos(x+y)$] $= x_0(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t\cos\varphi - x_0(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\omega t\sin\varphi - 2\beta x_0\omega\cdot\sin\omega t\cos\varphi - 2\beta x_0\omega\cos\omega t\sin\varphi = f_0\cos\omega t$

$[x_0(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - 2\beta x_0\omega\sin\varphi]\cos\omega t - [x_0(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\varphi + x_0 2\beta\omega\cos\varphi]\cdot\sin\omega t = f_0\cos\omega t$

Должно выполняться в $\forall$ момент времени!

Вычисли:

$$\begin{cases} x_0[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - 2\beta\omega\sin\varphi] = f_0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)\sin\varphi + 2\beta\omega\cos\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - 2\beta\omega\sin\varphi} \\ \operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

вспомним ф-лу: $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}$

Тогда:

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = [\text{замена}] = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{z}, \text{ где } z = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = -\frac{2\beta\omega}{z} \Rightarrow x_0 = \frac{f_0}{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{z} + \frac{4\beta^2\omega^2}{z}} = \frac{f_0 z}{z^2} =$$

$= \dfrac{f_0}{z} \Rightarrow$ подставим $z$: $\boxed{x_0 = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$ – амплитуда вынужд. колеб.-ий

ЧТО

— конец защиты —

## Анализ полученного решения. — 4 защита $\delta_3 \delta_3$ —

случай

(1) $\omega << \omega_0$ (<< - много меньше) $\Rightarrow z \simeq \omega_0^2$ ; $\sin\varphi = 0$ ; $\cos\varphi \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = 0$. В этом случае смещение совпадает с вынужд. силой по фазе $\Rightarrow$ $x_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{f_0 m}{K} = \frac{F_0}{K} = \underline{x_{cm}}$

статическое реш-е.

случай

(2)

$\omega \sim \omega_0$ (когда $\omega$ сравнима с $\omega_0$) $\Rightarrow \left.\begin{matrix} \sin\varphi \to -1 \\ \cos\varphi \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

Вынужд.-ая сила опережает смещение на $\frac{\pi}{2}$

(задачка: Найдем частоту вынужд. сил, при которой амплитуда вынужд. колеб. max)

исследуем на экстрему, т.к. числ const: надо min знамен.

$\Rightarrow -4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$ — резонансная частота

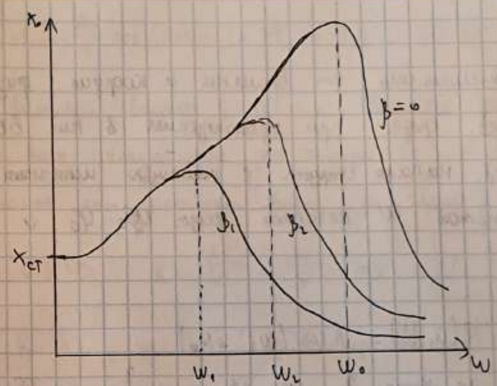
Резонанс — резкое возраст. амплитуды вынужд. колебаний, когда частота вынужд.-ей силы = опред. значению, кот. наз. резонансной частотой

(3) $\omega >> \omega_0$

$z \to \omega^2$ $\left.\begin{matrix} \sin\varphi \to 0 \\ \cos\varphi \to -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi \to -\pi$ $x_0 = \frac{f_0}{\omega^2}$

Смещение и вынуждающая сила находятся в противофазе.

— конец —




$\beta_1 > \beta_2$

$\omega_1 < \omega_2$

(на защите тоже нарисуй).

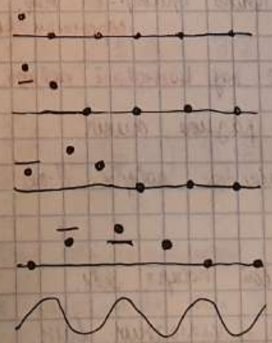
## Механические волны.

**Волна (механич-ая)** — распространение возмущения в упругой среде.

**Упругая среда** — та среда, кот-рая при внеш. возд.-ях ..., а при прекращении внеш. возд. возвр. в исх. состояние.

**Среды бывают** упругими по объему, т.е. они сопротив. изм. ~~объема~~ формы

газообр. и жидкие среды упругие по объёму. Тверд. тела обладают ~~упруг~~ упруг. и формы и объёма



В зависимости от колеб. малых частей среды, волны бывают: продольные и попереч.

Волна наз. продольн. - если колеб. малых частиц происходит вдоль распрост. волны.

Волна наз. попереч., если направ. колебаний малых частей $\perp$ направ. распростр. волн.

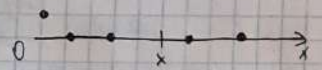
Продольные волны распростр. в $\forall$ средах, а поперечные только в средах упр. по форме

Звуковые волны — продольные

## Ур-е волны.

ур-е волны – это зависимость от времени и координ. физ. величины, характ. колеб. среды при прохождении в ней волны.

Задача: Приведём в колеб. начало струны с помощью источника, кот. приводит колеб. с частотой $\omega$ начальной фазы $\varphi_0$ и Амплитудой $A$.



$$\varphi(0,t') = A\cos(\omega t' + \varphi_0)$$

колеб. дойдут до коорд. $x$ на $\Delta t$ $\quad \Delta t = \frac{x}{\upsilon}$, где $\upsilon$ – скорость распространен. фазы волны

$$\Rightarrow \varphi(x,t) = \varphi(0,t') \quad \text{где } t = t' + \Delta t = t' + \frac{x}{\upsilon}$$

подставим: $\varphi(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}x + \varphi_0\right)$

$\xi(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}x + \varphi_0\right)$ – ур-е волны, распростр. в положит. направ. $Ox$

эта волна распрост. против $Ox$

**Волновое поле** – область прост-ва, внутри которого колеб. все малые части среды.

Поверх.-ть отделяющ. волновое поле от остального простр-ва наз. **фронтом волны**

Геометр. место точек, колеб. в одинаковой фазе наз. **волновой поверх.**

По виду волновой поверх., волны делятся на разные типы.

1. Например плоские волны – это те, у кот. волновые поверх. $\parallel$-ые плоскости. (Таких волн в природе $\nexists$)
2. Пример. Сферические волны, – те, у кот. волновой поверх. явл. концентрич. сферы, в центре кот. находится источник волн.

$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - (\bar{k}\,\bar{r}) + \varphi_0)$ – ур-е сферич. волны

$\bar{k}$ – волновой вектор; $|\bar{k}| = k$ – волновое число (показывает, какое число длин волн укладывается на отрезке $2\pi$) $= \frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda$ – длина волны (расстояние, кот. проходит волна за период);

$$\lambda = VT \Rightarrow k = \frac{2\pi}{VT} = \frac{\omega}{V} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\omega}{k}} \text{ фазовая скорость}$$

$\bar{k} = k\cdot\hat{n}$, где $\hat{n}$ – ед. вектор, направл. вдоль рас-ия волны.

$$\Rightarrow \xi(x,t) = A\cos(\omega t \mp kx + \varphi_0) = f\left(t \mp \frac{x}{V}\right);$$

$$\lambda = \mp\frac{x}{V} \Rightarrow \xi = f(\lambda)$$

Защита 4 ДЗ

### Дифф-ое волновые ур-я.

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t \mp kx + \varphi_0) = f\left(t \mp \frac{x}{V}\right); \quad \lambda = t \mp \frac{x}{V} \Rightarrow \xi = f(\lambda).$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{d\xi}{d\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{d\xi}{d\lambda}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{d\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{d\xi}{d\lambda}\left(\mp\frac{1}{v}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\xi}{\partial x} = \mp\frac{1}{v}\frac{\partial\xi}{\partial t}}$$

волновое ур-е 1ого пор.

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{d^2\xi}{d\lambda^2}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{d^2\xi}{d\lambda^2}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \left(\mp\frac{1}{V}\right)\frac{d^2\xi}{d\lambda^2}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}}$$

Волновое ур-е 2ого пор.

Для общего случая, если волна распр-ся под углом к ДПСК (не вдоль к какой-либо оси к-т) то

$$\underbrace{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}}_{\Delta} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

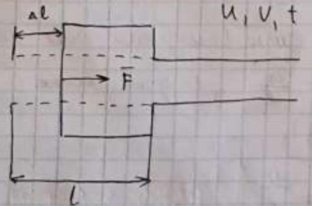
Оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \boxed{\nabla^2\xi = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}}$$

— Конец —

## Скорость распространения волны в тв. теле

2 Защита ЧД3




$u, v, t$

рис. *

$\bar{F}$ – постоянная сила

малые части будут смещаться вдоль стержня => по стержню побежит волна.

Будем считать, что все малые части движутся с пост. скор. $u$; $V$ – фазовая скорость

За время $t$ торец стержня сместится на $\Delta l$ и фронт. волны сместится на $l$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{\Delta l}{t} \qquad V = \frac{l}{t}$$

Масса тела, участвующая в движ. – $M = \rho \Delta V = \rho S l = \rho S V t$

Импульс силы $F \cdot t = Mu \Rightarrow F \cdot t = \rho S V t \cdot u \Rightarrow F = \rho S V u$

По закону Гука: $F = \sigma S$, $\sigma$ – напряжение

$$F = \sigma S = \rho S V u \Rightarrow \sigma = \rho V u \; ; \text{ т.к. } \sigma = E\frac{\Delta l}{l} \text{ то } E\frac{\Delta l}{l} = \rho V u$$

$$\Rightarrow E\frac{u}{V} = \rho V u \Rightarrow V^2 = \frac{E}{\rho} \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$ скорость распростр-ия продольной волны в тв. теле

— Конец —

## Энергия волны

3 Защита ЧД3

рис *

$$A = F\Delta l = \rho S V u \cdot u \cdot t = \rho u^2 S V t = \rho u^2 \Delta V$$

Эта работа ушла в потенц. энергию деформации стержня и кинет. эн. движ. малых частей

$$K = \frac{Mu^2}{2} = \frac{\rho S V t u^2}{2} = \frac{\rho u^2}{2}\Delta V$$

$$\Pi = \frac{k\Delta l^2}{2} = \left[F = \sigma S = E\frac{\Delta l}{l}S = \frac{ES}{l}\Delta l = k\Delta l\right] = \frac{ES}{l}\frac{\Delta l^2}{2} =$$

$$= \frac{\rho}{2}\frac{E}{\rho}\frac{S\Delta l^2 l}{l^2} = \frac{\rho V^2 S l \Delta l^2}{2t^2 V^2} = \frac{\rho \Delta l^2}{2t^2} S l = \frac{\rho u^2}{2}\Delta V$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{полн} = K + \Pi = \rho u^2 \Delta V}$$ — Конец —

**Объёмная плот. энергии волны** – Энергия волны, кот. сосред-ся в ед. объёма волнового поля

проще: сколько объёма на ед. энергии

$w = \rho u^2$ — об. плотн.  $\quad E_п = w\Delta V = wSVt$ — полная эн.

$$w = \frac{W_к + W_п}{V} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial}\right)^2$$

Объём, занимаемый волновым полем, увелич. => энергия передаётся от источника всё новым частям тела. Т.о., распрост. волны (бегущей) неразрывно связано с передачей энергии и её распростр-ем

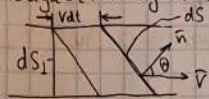
**Поток энергии** – это энергия, пересек. данную пов-ть в ед. времени, ⊥ этой пов-ти

$$\Phi_S = \frac{dE}{dt}$$

**Плотность потока энергии** – это энергия волны, пересек. ед-ую пов-ть в ед. врем., ⊥ этой пов-ти

4 Защита ЧД4

Задача: Найдём энергию, пересек. пов-ть $dS$ за время $dt$.




$$d\bar{S} = dS \cdot \bar{n} \; ; \; dE = w\,dS_\perp \cdot Vdt = wVdt \cdot \cos\theta \cdot dS = w\,dt\,(d\bar{S}\bar{v})$$

$$y = \frac{dE}{dS_\perp dt} = w \cdot v \Rightarrow \boxed{\bar{y} = w \cdot \bar{v}}$$ вектор Умова

вектор Умова

— Конец —

## Сечение волны

В случае слож. когерентных волн происходит явление интерференции, т.е. перераспр. энергии в разных т. прос-ва

Мех. волны явл-ся когерентными, если у них один. частота

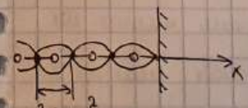
При слож. волн, бегущих навстр. друг другу, возник **стоячая волна**

Те точки, где амплитуда ст. волны = 0, наз. **узлами ст. волны**.

Точки, где амплит. ст. волны max наз. **пучностями ст. волны**

$$\xi_1(x,t) = A\cdot\cos(wt - kx)$$
$$\xi_2(x,t) = A\cdot\cos(wt + kx)$$
$$\xi = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t)$$
$$\boxed{\xi(x,t) = 2A\cdot\cos kx \cos wt}$$ ур-е стояч. волны

$$\boxed{A = 2A\cdot\cos kx}$$ Амплитуда стоят. волны.




$\lambda_{ст} = \frac{\lambda}{2}$

о – пучности

• – узлы

$\cos kx = 0$ – условие узлов

$kx = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1 \ldots$

$k = 2\pi/\lambda \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\pi(1+2n)}{2} \Rightarrow x = \frac{\lambda(1+2n)}{4}$

$|\cos kx| = 1$ – условие пучностей

$kx = \pi n$, $n = 0, 1 \ldots$

$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pi n \to x = \frac{\lambda n}{2}$

Расстояние между 2-мя соседними узлами наз **длиной ст. волны**

## Скорости малых частей струны

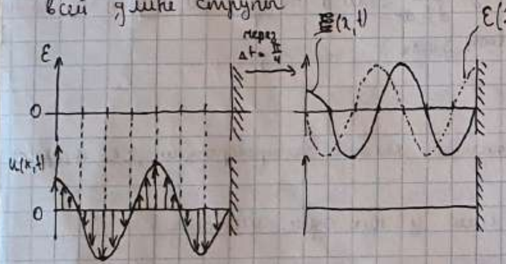
$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2A\omega \cos kx \sin \omega t = \omega 2a \cos kx \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varepsilon$ – деформация малых частей струны

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2Ak \sin kx \cos \omega t = 2Ak \cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) \cos \omega t$$

Узлы и пучности скорости совпадают со скор, но опереж.-ют по времени на $\frac{\pi}{2}$, а узлы и пучности дефор. сдвинуты пополам по коорд.

В некот. момент времени деформация малых частей $= 0$, по всей длине струны




Когда скорости малых частей $=0$, вся энергия волны – энергия упругой деформации струны и наоборот, когда энергия упругой деформации отсутствует, вся энергия волны – кинетич. энергия малых частей струны. Т.о. энергия перетекает из пучности в узлы и наоборот.

След. поток энергии за период $= 0$.

### Вывод.

Основные отличия стоячей волны от бегущей

① $A_б = const$ (бегущей) $\quad A_{ст} = 2A_б \cos kx \neq const$

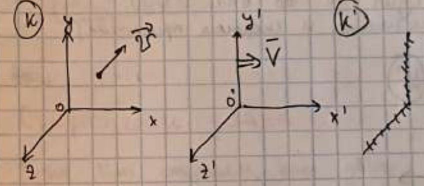
② $\lambda_{ст.} = \frac{\lambda_б}{2}$ (длина)

③ Бегущая волна переносит энергию. Стоячая волна энергию не пропускает.

## Преобразования Галилея.

Р-м инерциальные С.О. (и.с.о), расстояние между 2-мя точками одинаково во всех И.С.О. Промежуток времени между 2-мя событиями одинаков.

Если какая-то величина не зависит от выбора С.О., её наз. инвариантной




В момент времени $t=0$ $O$ и $O'$ совпадают.

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x' = v_x - v \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases} \xRightarrow{\text{найдем ускор.}} \begin{cases} a_x' = a_x \\ a_y' = a_y \\ a_z' = a_z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\bar{a}' = \bar{a}} = inv$$

### Вывод.

Ур-е второго ЗН имеет один и тот же вид во всех И.С.О.

Т.е. явл. инвариантом (inV)

Отсюда вытекает мех. принцип относительности: экз

ни какими мех. эксперементами нельзя обнаружить, движется С.О. или покоится.

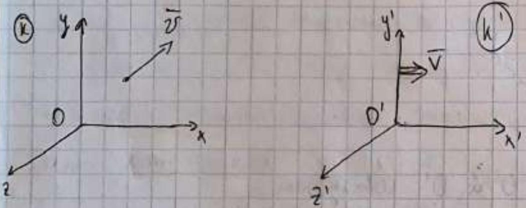
Распространение волн не явл. inv к преобраз. Галилея.

Лоренц создал преобразования, в кот. волна явл. inv.

# Специальная Теория относительности (СТО)

На основании преобраз. Лоренца, Эйнштейн совершил кинемат. вывод на основании двух постулатов

- ① Все физ процессы протекают один-го во всех И.С.О
- ② Скорость света в вакууме один-ва во всех И.С.О. (не зависит от скорости источника (света) и скорости приёмника)



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

I инвариант – это интервал между двумя событиями.

① $t_1, x_1, y_1, z_1$  ② $t_2, x_2, y_2, z_2$

В сис-ме (k) $S_{12}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$, где $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$

в сис-ме (k') $S'^2_{12} = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$

Цель: док-ть, что $\Delta S_{12} = \Delta S'_{12}$

(Д)

$$c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 = \frac{c^2\left(t_2 - \frac{x_2 V}{c^2} - t_1 + \frac{x_1 V}{c^2}\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} -$$

для удобства

$$- \frac{(x_2 - Vt_2 - x_1 + Vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \begin{bmatrix} \beta = \frac{V}{c} \\ t_{21} = t_2 - t_1 \\ x_{21} = x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \frac{c^2}{1-\beta^2}\left(t_{21} - \frac{V}{c^2}x_{21}\right)^2 -$$

$$- \frac{(x_{21} - Vt_2)^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2}\left[c^2 t_{21}^2 + \frac{V^2 x_{21}^2}{c^2} - 2Vt_{21}x_{21} - x_{21}^2 + 2Vx_{21}t_{21} - t_{21}^2 V^2\right] = \frac{1}{1-\beta^2}\left[c^2 t_{21}^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - x_{21}^2\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right)\right] = c^2 t_{21}^2 - x_{21}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{12} = S'_{12}}$$

## Сокращение длины

Пусть есть стержень, кот. движ. вдоль Ox со скоростью $v$ относит лаборат. С.О. (Л.С.О) (k) и в сис-ме (k') кот. также движ. со скоростью V относ. (k), этот стержень покоится и его длина $= l_0$

В (k): $x_1$ и $x_2$; в (k'): $x_1'$ и $x_2'$, а время $t$ одно и то же.

$$\Rightarrow l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \boxed{l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

## ~~Измерение~~ – Изменение промеж. времени (замедление времени)

Пусть есть часы, кот. движ. со скоростью $v$ вдоль Ox относит. лаборат. С.О. (k). Тогда в сис-ме (k'), кот. тоже движ. со скоростью $v$ относит. (k) часы покоются, значит $x'$ не меняется. Тогда промеж. времени между двумя событиями в (k') $= \tau_0$. Это же измер. времени в сис-ме (k) происх. в разных точках $x_1$ и $x_2$ в соответств. моменты времени $t_1$ и $t_2$

$$\tau_0 = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{x_2 V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{x_1 V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{V}{c^2}\underbrace{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}_{=v}\right]}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{(t_2 - t_1)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

## Преобраз. компонент скорости

(K') движ. относит. (K) со скоростью V. В сис-ме (K) движ. тело со скор. $u$

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt}; \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx - Vdt}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\frac{dt - \frac{Vdx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}} =$$

$$= \frac{dx - Vdt}{dt - \frac{Vdx}{c^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{Vdx}{dtc^2}} = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1-\beta^2}}{dt - \frac{Vdx}{c^2}} = \frac{dy}{dt}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{Vdx}{c^2dt}} \Rightarrow$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}}$$

Пр. 20.04.2022

$u_x = u \quad u_y = u_z = 0 \Rightarrow u'_x = \frac{u-V}{1-\frac{uV}{c^2}} \quad u'_y = u'_z = 0$

Из (K') в (K) $u = \frac{u+V}{1+\frac{uV}{c^2}}$

$u = 0$ – вдоль оси Ox $\quad u' = \frac{c \cdot V}{1 - \frac{Vc}{c^2}} = \cancel{\frac{c-V}{1-\frac{V}{c}}}\; c\frac{\cancel{c-V}}{\cancel{c-V}} = c$

$$u = \frac{c+V}{1+\frac{cV}{c^2}} = c\frac{\cancel{c+V}}{\cancel{c+V}} = c$$

## Сведения из ~~[illegible]~~ релятивисткой динамики

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$m_0$ – масса покоя

$E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя

$E = mc^2$ – полная энергия

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow p^2 = \frac{m_0^2v^2 - m_0^2c^2 + m_0^2c^2}{1-\beta^2} =$$

$$= \frac{m_0^2c^2 - m_0^2c^2(1-\beta^2)}{1-\beta^2} = \frac{m_0c^2}{1-\beta^2} - m_0^2c^2 \Rightarrow p^2 = \frac{m_0^2c^2}{1-\beta^2} - m_0^2c^2 \;\Big|\cdot c^2$$

$$p^2c^2 = \frac{m_0^2c^4}{1-\beta^2} - m_0^2c^4 \Rightarrow \boxed{E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4} = inv$$

ЭКЗ

$K = E - E_0$ Найти: Связь импульса и $E_к$. ~~по~~ $p$ и $K$

см. PK2 №13 бил (сам)

## Термодинамика и молекулярно-кинетическая теория

не надо

Термодинамика – наука о передаче тепла (наз. теорией тепла)

Феноменологическая термодинамика (иногда будем наз. термодинамика)

Феноменологич. термодин. изуч. тепловые яв. с макроскопической точки зрения. Пояснение: сис-ма – сплошная непрерыв. среда (нет атомов и молекул). Ф. термодин. оперирует двумя важными параметрами:

температура и кол-во тепла. Темп. хар-ует степень нагретости тела,

кол-во тепла, энергию, переданную сис-ме в процессе теплообмена

Темп. изм. термометром

Кол-во тепла измер. калориметр

Шкала цельсия имеет 2-е реперные точки:

1. 0°C – темп. замерзания воды
2. 100°C – ~~точка~~ темп. кипения воды

$0°K = -273°C$ (27)

Термодинамич. сис-ма (ТС)

① Термод. сис-мы → простые, сложные

ТС наз. простой if состоит из 1ого химич. стабильного в-ва

Пр: вода в стакане

ТС наз. сложной

Пр: аккумулятор

② По взаим. с окруж. сис-мы мб → открытыми, закрыт.

ТС наз. открытой, if она может обмениваться с окр. массами в-ва, вход. в сис-му

Пр: Вода и водяной пар над поверх. воды

Сис-ма кот. не может обмен. массами – закрыт.

Пр. воздух под поршнем

③ По фазовому сост. сис-мы мб → однофазными, двухфазн., трехфазн.

Фаза – газообраз. жидкую и твердую сост.

Равновесное состояние простой термодин. сис-мы. (27)

Разобьем сис-му на малые части, кот. непрерывно примыкают друг к другу

$P_i$ – давление малой части

$T_i$ – темпер. малой части

$v_i$ – скорость видимого движ. малой части

① Равновесное состоя. простой ~~ТД~~ Термодин. сис-мы харак. отсутств. параметр.-ми

$v_1 = v_2 = \ldots = v_i = \ldots = 0$

② $P_1 = P_2 = \ldots = P_i$ – давление в малых частях должно быть один (в пренебреж. силы тяжести)

③ $T_1 = T_2 = \ldots = T_i = \ldots = T$

При выполнении всех этих условий термодин. сис-ма наход. в состоянии внут. равновесия, а если кроме этого, давление и темп. сис-мы совпад. с давл. и темп. окруж., то сис-ма наход. во внешнем равновесии

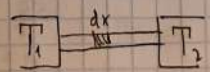
О равновесн. сост.

На ряду с равновесным сост. ∃ неравновесное состояние.

Равновесное сост. могут сохр. бескон. долго

Неравновесные сост. постоянно меняются со временем, т.е ∃ одно мгновени

Стационарное состоян. – не меняется с течен. времени но не явл. равновесным

Пр: 

эл-т dx – явл. равновесным, но между малыми частями стержня равновесия нет.

If сис-ма неравновесна, то её можно описать с помощью принципа локального равновес. Т.е. неравновесное состояние состоит из множ-ва равновесных состояний её малых частей, но нет равновесия между малыми частями сис-мы

## (21) Ур-е состоян. простой термодин. сис-мы (ур-е Менделеева Клапейрона)

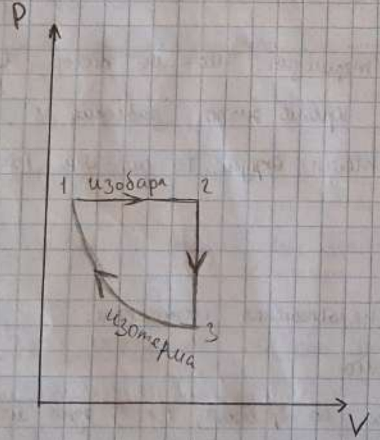
Равновесное сост. можно однознач. описывать 2-мя параметрами
Третий пар-тр явл. ф-цие первых двух $pV$; $pT$; $VT$

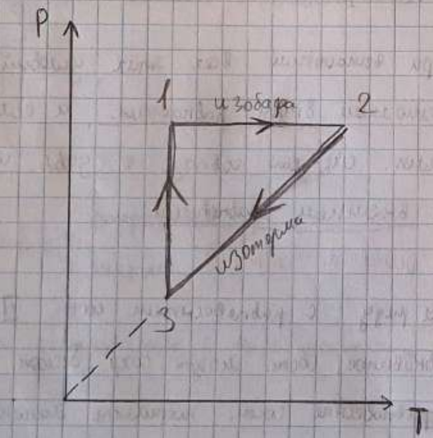
Идеальный газ - $\nexists$ в природе газ, кот. имеет только одну фазу (с его помощью можно хорошо описывать разрежен. газом)

Газ наз идеальным у кот темп. конденсации << темпер. при кот. мы его наблюд.

$$\boxed{pV = \frac{m}{\mu} RT}$$

! Построить на термодинам. диаграммах (на 2ух) изотерму, изобару, изохору, изобраз на диаг. какую-то точку мы полностью задаём равновесное состояние газа.




1) Процесс 1-2: $p = const$ $T\uparrow\uparrow$ $\frac{V}{T} = const \Rightarrow V\uparrow\uparrow$
2) Процесс 2-3: $V = const$ $P\downarrow\downarrow$ $T\downarrow\downarrow$
3) Процесс 3-1: $T = const$ $p\uparrow\uparrow$ $pV = const \Rightarrow V\downarrow\downarrow$

## Квази-равновесный обратимый процесс.

Задача: Имеем идеальный газ под поршнем, будем поддерживать темп., объём., давление постоянно. ⇒ сис-ма находится во внеш. равновесном состоянии.

$p_2 = p_1 + dp$ $T_2 = T_1 + dT$ — скачком изм давление и темп. и далее будем поддерж. $p_2$ и $T_2$ и опять сис-ма перестроится и перейдёт в новое равновесное сост-е.

Вывод: Если эти скачки беск. малы, то для перестройки сис-мы нужно бескон. малое время, т.е. времени перехода в новое сост. можно пренебречь. Т.о. скачками мы можем перевести сис-му из 1-ого равновесного состояния в другое квази-равновесным способом.

Квази-равновесный процесс — процесс, при котором в каждый момент времени сис-ма наход. в равновесии и вместе с тем, переходит из 1ого равновесного сост. в другое.
Такие сис-мы может совершить обратный переход ⇒ Квази-равновес. процессы обратимы. Неравновесные процессы — необратимы.

! На диаграмме, линия — квази-равновесный процесс.
Неравновесный процесс на диаг. нарисовать нельзя.


## (22) Работа газа.

27.04.22.

$\delta A = pdV$

Поршень под действием силы $\vec{F}$ очень медленно двигается


$$\delta A = F_g\, dh = p\, S dh = p\, dV$$

Пр: $T = const$ $\delta A = pdV \Rightarrow A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\, dV$ $pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow$


$\Rightarrow p(V) = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$ $A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = [pV = const] = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$

Работа газа м.б. как +, так и −. ⊖: когда газ сжимается.
Работа, совершённая окружением над сис-мой $\delta A' = -\delta A$, где $\delta A$ – работа сис-мы
Также, если процесс замкнутый, то на PV диаграмме: работа – площадь фигуры, огранич. замкнутым процессом.

Сис-ма в процессе теплообмена получает тепло от окруж.. Кол-во тепла изнач. измерялась в калориях. 1 кал = кол-во тепла, необход. для нагревания 1 см³ воды при нормальных услов. от 0°C до 1°C

$$\boxed{C_T = \frac{\delta Q'}{dT}}$$ где Q' – тепло, измер. в калориях

Теплоёмкость сис-мы – кол-во тепла, необх. сообщить сис-ме для нагрев. её на 1°

Удельная теплоёмкость – кол-во тепла для нагревания единицы массы на 1°.

$$\boxed{C_{уд} = \frac{\delta Q'}{m dT} \Rightarrow \delta Q' = C_{уд}\, m dT}$$

Молярная теплоёмкость – кол-во тепла, кот. необх. сообщить 1-ому молю для нагревания на 1°

$$\boxed{C_{мол} = \frac{\mu}{m}\frac{\delta Q'}{dT} \Rightarrow \delta Q' = \frac{m}{\mu} dT\, C_{мол}}$$

(25)

## Описание цикла Карно

Задача: Р-м простую термодин. сис-му (идеальный газ под поршнем)

$T_1$ нагр. → $Q'_1$ → рабочее тело ⇒ A → $Q'_2$ → $T_2$ холод.

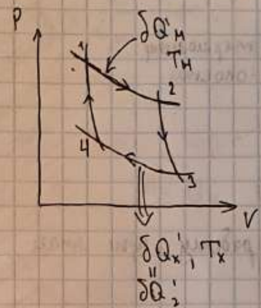
① Приведём сис-му в соприкосн. с нагревателем и дадим газу поработать над окруж., при этом газ не меняет темп.

② Отводим рабочее тело от нагревателя, при этом газ продолжает работать над окруж. и его темп. падает до темп. холод.-ка.

③ Приводим сис-му в контакт с холодильником и совершаем работу над сис-мой, не изм. его темп. При этом сис-ма отдаёт часть тепла холод-ку.

④ Отводим сис-му от холодильника, при этом газ продолжает сжиматься ⇒ его темп. увелич. до темп. нагревателя.

Тепловая машина, работающая по такому циклич. процессу, наз. машина Карно (Идеальная теплов. машина)




Первое начало термодинамики.
Теор. о мех. эквивал. тепла.

(28)

Первое начало термодин. (по Томсону)

Невозможна теплов. машина, работающ. с простой термодин. сис-мой, кот. бы за цикл совершала отлич. от нуля работу над окружением и при этом за этот цикл не брала бы от окруж. никакой теплоты

(Это утвержд. утверждает невозможность вечного двиг. 1-ого рода)

Пр: Берём паровозик и он без подачи топлива мог бы ездить.

(28)

Ⓣ О мех. эквиваленте тепла

Для ∀ цикла Карно, совершаемого над простой термодин. сис-мой отнош. работы, совершённой сис-мой над окружен. к теплу, получ. сис-мой за цикл – есть величина постоянная и имеет одно и то же значение

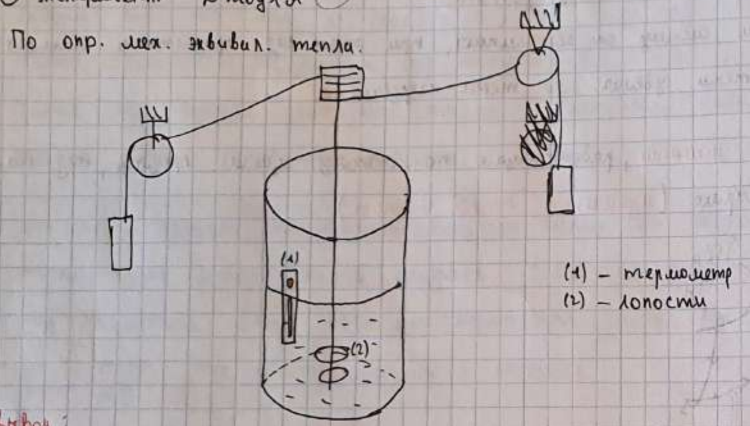
$$\boxed{J = \frac{A}{Q'_1 - Q'_2}} \Rightarrow \boxed{A = J(Q'_1 - Q'_2) = Q_1 - Q_2}, \text{ где } Q = JQ'$$

$[Q] = Дж$

Вывод: Это говорит о том, что работа и кол-во теплоты – явл. проявлением одной и той же сущности — энергией.

② Эксперемент Джоуля (28)

По опр. мех. эквивал. тепла.




(1) – термометр
(2) – лопости

Вывод:

При движ. груза вниз, сила тяжести соверш. работу, при этом вода нагреется

$J = 4,16 \frac{Дж}{кал}$ – результат Джоуля

$J_{современное} = 4,19 \frac{Дж}{кал}$

(29) (30)

## Второе начало термодинамики (по Томсону)

Невозможна тепловая машина, работ. с простой термодин. сис-мой, кот. за один цикл совершала отлич. от нуля работу над окружением, при этом бы брала тепло от нагревателя и не отдавала части тепла холод-ку, при этом не производя никаких измен. в окруж. среде (невозможность вечного двиг 2ого рода)

(29)

Т Карно – Клаузиуса

Для любого циклич. процесса, отнош. теплоты, получ. от нагрев. к теплу, отданного холод-ку – явл. ф-цией температур нагревателя и холод-ка.

В развитии этой теор. Томсон доказал, что это отнош. теплот = отнош. температур нагревателя и холод-ка

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

— КПД тепловой машины

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_н} \cdot 100\%}$$

где A – работа за весь цикл

$Q_н$ = суммарная теплота, получив. от окруж. в сис-му

для цикла Карно

$$A = Q_н - Q_х \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} = 1 - \frac{Q_х}{Q_н} = \left[\frac{Q_х}{Q_н} = \frac{T_х}{T_н}\right] = 1 - \frac{T_х}{T_н}}$$

Выводы:

1. КПД не зависит от рабочего тела.
2. КПД не зависит от того, как идут адиабаты и изотермы.

Т.к можно рассмотр. бескон. малый цикл Карно.

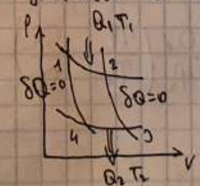
Тогда: (29)

Ⓘ Первая Термодинамич. теор.

Для ∀ квазиравновесного циклич. процесса, сумма работы, соверш. окруж. над сис-мой и теплоты, получ. сис-мой от окружения за цикл = 0.

$$\boxed{\oint(\delta A' + \delta Q) = 0}$$

• докажем в начале для цикла Карно

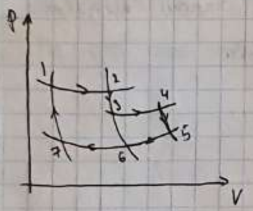



$$\oint \delta A' = A' = -A \qquad \oint \delta Q = \int_1^2 \delta Q + \cancel{\int_2^3 \delta Q} + \int_3^4 \delta Q + \cancel{\int_4^1 \delta Q} =$$

$$= Q_1 - Q_2 \Rightarrow \oint(\delta A' + \delta Q) = -A + Q_1 - Q_2$$

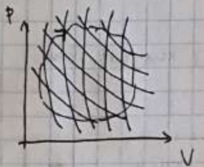
по теор. о мех. экв. тепла $A = Q_1 - Q_2 \Rightarrow \oint(\delta A' + \delta Q) = 0$

• докажем для двух циклов Карно, прикасающ. друг к другу



$$\oint \delta A' = -A_1 - A_2$$

$$\oint \delta Q' = Q_{12} + Q_{34} - Q_{56} - Q_{67}$$



$$\oint (\delta A' + \delta Q) = \sum_{k=1}^{n} \oint (\delta A' + \delta Q)_k = 0$$

устремив n к ∞, мы док-ли теор.

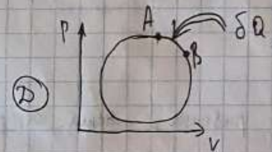
ЧТД

Эта теор. также может яв. формулировкой 1-ого начала термодин.

## II Вторая термод. теор.

Для ∀ циклич-ого квазиравновесного процесса, соверш.-ого с простой термодин. процессом справедливо: $\boxed{\oint \frac{\delta Q}{T} = 0}$

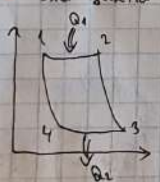
где $\delta Q$ – тепло, получ. сис-мой на бескон. малом уч-ке этого процесса



$T_A \approx T_B \approx T$

$T$ – темп. сис-мы на этом участке процесса

• Для цикла Карно.



$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^3 \cancel{\frac{\delta Q}{T}}^{\,0} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} + \int_4^1 \cancel{\frac{\delta Q}{T}}^{\,0} =$$

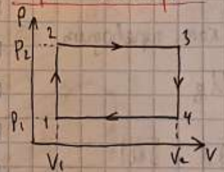
$$= \frac{1}{T_1} \underbrace{\int_1^2 \delta Q}_{Q_1} + \frac{1}{T_2} \underbrace{\int_3^4 \delta Q}_{-Q_2} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_2} \underbrace{\left( \frac{T_2}{T_1} - \frac{Q_2}{Q_1} \right)}_{0}$$

[по теор. Карно-Клаузиса и продолжении Кельвина $\left( \frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \right)$]

• Для двух циклов Карно, касающ. друг друга.

Эта теор. ~~яв.~~ может яв. 2-ым началом термодин. ЧТД

## Ур-е Майера.



По 1 теор: $\oint (\delta A' + \delta Q) = 0$

$$\oint \delta Q = \int_1^2 \delta Q + \int_2^3 \delta Q + \int_3^4 \delta Q + \int_4^1 \delta Q =$$

$$= \int_1^2 c_V \nu \, dT + \int_2^3 c_p \nu \, dT + \int_3^4 c_V \nu \, dT + \int_4^1 c_p \nu \, dT =$$

[$c_p$ – $p = const$ $c_V$ – $V = const$]

$$= \nu c_V \int_1^2 dT + \nu c_p \int_2^3 dT + \nu c_V \int_3^4 dT + \nu c_p \int_4^1 dT =$$

$$= \nu c_V (T_2 - T_1) + \nu c_p (T_3 - T_2) + \nu c_V (T_4 - T_3) + \nu c_p (T_1 - T_4) =$$

$$= \nu (c_p - c_V)(T_3 - T_2 + T_1 - T_4);$$

$$\oint \delta A' = -(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = -p_2 V_2 + p_2 V_1 + p_1 V_2 - p_1 V_1 =$$

$$= -\nu R T_3 + \nu R T_2 + \nu R T_4 - \nu R T_1 = -\nu R (T_3 - T_2 - T_4 + T_1);$$

$$\Rightarrow \oint (\delta A' + \delta Q) = \nu (c_p - c_V - R)(T_3 - T_2 - T_4 + T_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_p - c_V - R = 0 \Rightarrow \boxed{c_p = c_V + R}$$

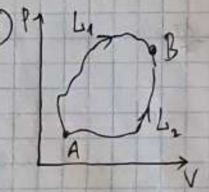
ЧТД

## III Третья термод. теор (о ∃ внут. энергии)

На множ-ве равновесных состояний простой термодин. сис-мы ∃ ф-ция, заданная с точностью до константы так, что на ∀ эл-те квазиравновесного процесса сумма элемен-ой работы, соверш-го окруж. над сис-мой и эл-ты тепла, получ. сис-мой от окруж-ия = полному дифф-лу этой ф-ции, кот. наз. внут. энергией сис-мы

$$\boxed{dU = \delta A' + \delta Q}$$

Д




Пусть сис-ма находится в равновесном состоянии A. Припишем этому сост. $U_A$;

р-м. ∀ квазиравновесный процесс, кот. переводит сис-му в состояние B. Т.е. $U_B$;

$$\Rightarrow U_B^{(1)} = U_A + \int_{L_1} (\delta A' + \delta Q) \quad ; \quad U_B^{(2)} = U_A + \int_{L_2} (\delta A' + \delta Q)$$

! Теперь. Если U - явл. ф-цией состояния сис-мы, то её значение не зависит от вида квазиравновесного процесса.

надо док-ть, что $U_B^{(1)} = U_B^{(2)}$

по теор. I: $\oint (\delta A' + \delta Q) = 0 \to \int_{L_1} (\delta A' + \delta Q) + \int_{\bar{L}_2} (\delta A' + \delta Q) = 0$

[PS. $\bar{L}_2$ - это от B до A, а $L_2$ - это от A до B]

$$\Rightarrow \text{т.к.} \int_{\bar{L}_2} (\delta A' + \delta Q) = -\int_{L_2} (\delta A' + \delta Q) \Rightarrow \int_{L_1} (\delta A' + \delta Q) - \int_{L_2} (\delta A' + \delta Q) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{L_1} (\delta A' + \delta Q) = \int_{L_2} (\delta A' + \delta Q) \Rightarrow U_B^{(1)} = U_B^{(2)} \Rightarrow U_B = U_A + \int (\delta A' + \delta Q)$$

Если A и B близки, то всё переходит в дифф-ую формулу

$$dU = \delta A' + \delta Q \quad \text{или} \quad \delta Q = \delta U + \delta A$$

Данная теор. может явл. формулировкой 1-ого начала термодинамики

Эта теор. фактически задаёт ЗСЭ.

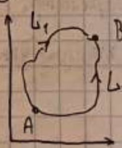
ЧТД

## IV Четвёртая термодин. теор. (Теорема о ∃-ии Энтропии)

На множ-ве равновесных состояний простой термодин. сис-мы ∃ ф-ция, заданная с точностью до константы, такая, что на ∀ эл-те квазиравновесного процесса, проводимое сис-мой, отношение тепла, получ. сис-мой на этом эл-те к температуре, есть полный дифф-ал этой фун-ции, кот. наз. энтропией

$$\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T}}$$ где T - темп. сис-мы

Д




$$S_B^{(1)} = S_A + \int_{L_1} \frac{\delta Q}{T} \qquad S_B^{(2)} = S_A + \int_{L_2} \frac{\delta Q}{T}$$

док-ть: $S_B^{(1)} = S_B^{(2)}$

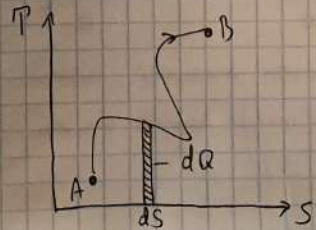
по теор II: $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow \int_{L_1} \frac{\delta Q}{T} + \int_{\bar{L}_2} \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow \left[ \int_{\bar{L}_2} \frac{\delta Q}{T} = -\int_{L_2} \frac{\delta Q}{T} \right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{L_1} \frac{\delta Q}{T} - \int_{L_2} \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow \int_{L_1} \frac{\delta Q}{T} = \int_{L_2} \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow S_B^{(1)} = S_B^{(2)}$$

Если A и B близки, то $dS = \frac{\delta Q}{T}$

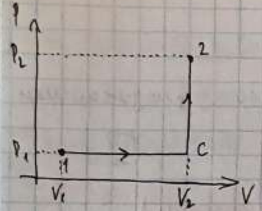
Данная теор. может явл. 2-ым начало термодинамики

ЧТД




$$\delta Q = T dS$$

Пр. 1: (Внут. энергия идеал. газа.)



Т.к. $U$ – есть ф-ция состояния

$(U_2 - U_1)$ не зависит от процесса перехода из $\cdot 1 \to \cdot 2$

$$U_2 - U_1 = \int_1^2 (\delta A' + \delta Q) = \int_1^c (\delta A' + \delta Q) + \int_c^2 (\delta A' + \delta Q) =$$

$$= -p_1(V_2 - V_1) + \nu C_p \int_1^c dT + \nu C_V \int_c^2 dT =$$

$$= -p_1V_2 + p_1V_1 + \nu C_p (T_c - T_1) + \nu C_V (T_2 - T_c) = -\nu R T_c + \nu R T_1 +$$

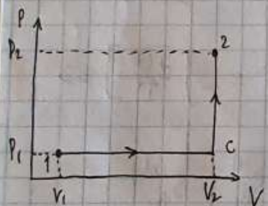
$$+ \nu C_p T_c - \nu C_p T_1 + \nu C_V T_2 - \nu C_V T_c = T_c \nu \underbrace{(-R + C_p - C_V)}_{=0} + \nu T_1 \underbrace{(R - C_p)}_{-C_V} +$$

$$+ \nu C_V T_2 = \nu C_V T_2 - \nu C_V T_1 = \nu C_V (T_2 - T_1)$$

$U = \nu C_V T$, договорились, что принимаем за ноль.

! Внут. энергия идеального газа зависит только от одного параметра, от температуры

Пр. 2. (Энтропия идеального газа)



$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^c \frac{\delta Q}{T} + \int_c^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^c \frac{\nu C_p dT}{T} + \int_c^2 \frac{\nu C_V dT}{T} = \nu C_p \int_1^c \frac{dT}{T} + \nu C_V \int_c^2 \frac{dT}{T} =$$

$$= \nu C_p \ln\frac{T_c}{T_1} + \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_c}$$

$$\frac{T_c}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}; \quad \frac{T_2}{T_c} = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow \boxed{S_2 - S_1 = \nu C_p \ln\frac{V_2}{V_1} + \nu C_V \ln\frac{p_2}{p_1}}$$

Пр. 3 (Ур-е адиабаты (ур-е Пуассона))

Адиобатный процесс – процесс, протекающий без теплообмена сис-мы с окруж. средой.

$$\delta Q = 0 \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \nu C_p \ln\frac{V_2}{V_1} + \nu C_V \ln\frac{p_2}{p_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{C_p}{C_V}\ln\frac{V_2}{V_1} + \ln\frac{p_2}{p_1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{C_p}{C_V} = \gamma - \ldots\right) \Rightarrow \ln\frac{V_2^\gamma}{V_1^\gamma} + \ln\frac{p_2}{p_1} = 0$$

$\gamma$ – показатель адиабаты

$$\Rightarrow \ln\frac{p_2V_2^\gamma}{p_1V_1^\gamma} = 0 \Rightarrow p_2V_2^\gamma = p_1V_1^\gamma \Rightarrow \boxed{pV^\gamma = const}$$

$\gamma = \frac{i+2}{i}$

Опр. Политропические процессы – процессы, протекающ. с постоянной теплоёмкостью

$\boxed{pV^n = const}$ $n$ – показатель политропы

$\boxed{\text{if } n=1}$ – изотерма; $\boxed{\text{if } n=0}$ – изобара; $\boxed{\text{if } n=\gamma}$ – адиобата

$\boxed{\text{if } n = \pm\infty}$ $p^{\frac{1}{n}} V = const \Rightarrow V = const$ – изохора

Лекция 14.

доп. вопрос

V Внут. энергия равновесного состояния сис-мы = сумме внутр. энергий её малых частей

VI Энтропия равновес. сост. сис-мы = сумме энтропий её малых частей

Замечания

Р-м сис-мы, используя принцип локального равновесия можем записать неравесное состояние, как совокуп. равновесн. состояний малых частей (но между малыми частями равновесия нет)

Гиббс I теор., а План II теор. распространили на неравновес. сост.

## Неравенство Клаузиуса

Постановка задачи: Пусть сис-ма неравновесна и находится в термостате, темп. термостата поддерживается и $= T_0$.
Сис-ма может обмениваться теплом с окруж.

$T_0$ $S_i$ $T_i$

$\delta Q_{12}$ — тепло, которое получает 1-ая часть от $2^{ой}$

$\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\delta Q_{12} \ge 0$, экспериментально доказано, что передача тепла от более нагретого к менее нагретому

ссылаясь на ТG $\to$ $S = \sum_i S_i \Rightarrow dS = \sum_i dS_i$;

$dS_i = \frac{\delta Q_i}{T_i}$, где $T_i$ — темп i-ой малой части, $\delta Q_i$ — тепло, кот. поступает в i-ую часть

$$\delta Q_i = \delta Q_{i0} + \sum_{\substack{j \\ i \ne j}} \delta Q_{ij}$$

Подставим: $dS_i = \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \sum_j \frac{\delta Q_{ij}}{T_i} \Rightarrow dS = \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \overbrace{\sum_{ij} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i}}^{\text{разобьём}} =$

$$= \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \sum_{\substack{ij \\ i<j}} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i} + \sum_{\substack{ij \\ i>j}} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i} = [i \rightleftarrows j] =$$

$$= \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \sum_{\substack{ij \\ i<j}} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i} + \sum_{\substack{ij \\ j>i}} \frac{\delta Q_{ij}}{T_j} = (\delta Q_{ji} = -\delta Q_i) =$$

$$= \sum_j \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \sum_{\substack{ij \\ i<j}} \underbrace{\left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right)\delta Q_{ij}}_{\ge 0}$$

$$\left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_0}\right)\delta Q_{i0} \ge 0 \Rightarrow \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} \ge \frac{\delta Q_{i0}}{T_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dS \ge \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} \ge \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_0} = \frac{\sum \delta Q_{i0}}{T_0} = \frac{\delta Q_0}{T_0}$$

$\Rightarrow \boxed{dS \ge \frac{\delta Q}{T_0}}$ это для неравновесн. сост.!

Нер-во Клаузиуса

$\delta Q$ — тепло, получ. сист-мой от окруж. $T_0$ — темп. окруж.

Замечания:

- Если сис-ма теплоизолирована $\to$ (if $\delta Q = 0 \Rightarrow dS \ge 0$)
- Если сис-ма равновесна и теплоизолирована $\Rightarrow dS = 0$

## Условия равновесия

Если темп. сис-мы = темп окруж., то сис-ма находится в тепловом равновесии.

Температура — это индикатор теплового равновесия сис-мы.

Если давление сис-мы совпадает с давлением окруж., то сис-ма находится в динамическом равновесии.

разобьём сис-му на малые

$S_i$ $V_i$

переведем все малые части в бескон. близкое расстояние: $V_1 + \delta V_1$, $V_i + \delta V_i$ … $S_i + \delta S_i$. Такое состояние наз. проварьируем.

Виртуальное перемещ. — перемещ. из исходного в беск. близкое, кот. удовл. доп. условием связей.

Т.к. сис-ма изолирована, Гиббс предположил след. ур. связи:

$$\sum_i \delta V_i = 0 \; ; \; \sum_i \delta S_i = 0$$

## Принцип Гиббса

Для того, чтобы изолированная сис-ма была в равновесии, необх. и дост., чтобы для $\forall$ вирт. перемещ., удовл. усл. связи: $\sum_i \delta V_i = 0$, $\sum_i \delta S_i = 0$ вариация внут. энергии сис-мы $= 0$ ($\delta U = 0$)

## Пр: Постановка задачи:

Пусть у нас есть двух фазная сис-ма – жидкость и пар в цилиндре под поршнем.

Пусть пар имеет: $T$, $m$. жидкость имеет: $T'$, $m'$

$$\bar{U} = mu + m'u' \Rightarrow \delta U = \delta m \cdot u + m\delta u + dm' + m'\delta u' \ominus$$

($u$ – удельная внут. энергия пара; $u'$ – жидкости)

$$\ominus (\delta m = -\delta m') = \delta m (u - u') + m\delta u + m'\delta u'$$

используем доп усл. связи:

$dV = 0$ и $\delta S = 0$; вводим удельный объем: $V = mv + m'v'$

вводим удельную энтропию: $S = mS + m'S'$

Тогда:

$$\delta V = \delta m \cdot v + m\delta v + \delta m' v + m'\delta v' = \delta m (v - v') + m\delta v + m'\delta v'$$

$$\delta S = \delta m\, S + m\delta S + \delta m' S' + m'\delta S' = \delta m (S - S') + m\delta S + m'\delta S'$$

Нам необх. найти усл. экстремум внут. энергии. Для этого будем использовать метод неопр. множ. Лагранжа.

Согласно этому методу составим вариационное усл.

① $\delta U + \beta\delta V - \lambda\delta S = 0$

$\lambda, \beta$ – неопред. множ., кот. находятся из ур. связей

$$dm (u - u') + m\delta u + m'\delta u' - \lambda\,\delta m (S - S') - \lambda m\delta S - \lambda m'\delta S' +$$
$$+ \beta\,\delta m (v - v') + \beta m\delta v + \beta m'\delta v' = 0$$

$$dA' = -pdV;\ \delta Q = TdS;\ dU = \delta A' + \delta Q \Rightarrow$$

$$\delta u = TdS - pdV;\quad \delta u' = T'dS' - p'dV'$$

$$\delta m (u - u') + mT\delta S - mp\delta V + m'T'dS' - m'p'\delta V' - \lambda\,\delta m (S - S') -$$
$$- \lambda m\delta S - \lambda m'\delta S' + \beta\delta m (V - V') + \beta m\delta V + \beta m'\delta V' = 0$$

$$\delta m [u - u' - \lambda(S - S') + \beta(V - V')] + \delta S\, m [T - \lambda] - m[p - \beta]\delta V +$$
$$+ m' dS' (T' - \lambda) - m'(p' - \beta)\delta V' = 0$$ – это равенство должно выполн. при $\forall$ вариациях

$$\Rightarrow \begin{array}{l} T - \lambda = 0 \\ T' - \lambda = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{T = T'}$$

$$\begin{array}{l} p - \beta = 0 \\ p' - \beta = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{p = p'}$$

$$u - u' - \lambda(S - S') + \beta(V - V') = 0 \Rightarrow u - \lambda S + \beta V = u' - \lambda S' + \beta V' \Rightarrow$$

$u - TS + pV = \text{const}$ – это комбинация, относящаяся к единице массы сис-мы наз. химическим потенциалом сис-мы

## Статистическая термодинамика (МКТ)

Сис-ма состоит из атомов, молекул.

Идеальный газ удовл. след. усл:

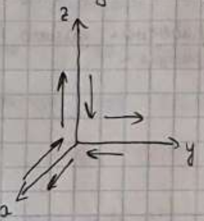
1) Все молекулы движутся хаотически, нет выбранного направл. движ. Давление во все стороны передаётся одинаково.
2) Пренебрегаем энергией взаимодействия между молекулами.
3) Соударения между молекулами и стенками сосуда происходят по законам абсолютно упругого удара
4) Собственный объём молекул намного меньше того объёма, кот. занимает газ.

Поставим задачу. Давление газа на стенку сосуда

$N_i$ – число молекул, имеющих $i$-ую скорость $V_i$

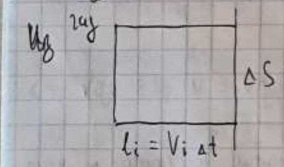
$N_i - V_i$ ; $\sum_i N_i = N$

Т.к. молекулы двит. хаотически, будем считать, что они двит. по трём взаимоперпендик. направлениям. Т.о. в одну сторону двит. $\frac16$ часть от всего числа молекул.




При столкновении со стенкой одна молекула передаёт стенке вот такой импульс:

$$\Delta p_i = 2 m_0 V_i$$




За время $\Delta t$: до стеночки долетает:

$\Delta N_i = n_i \Delta V_i \frac{1}{6}$

$n_i$ – концентрация молекул, имеющ. эту скор. $n_i = \frac{N_i}{V}$

$\Delta V_i = \Delta S' V_i \Delta t$

подставим:

$\Rightarrow \Delta N_i = \frac{1}{6} n_i \Delta S V_i \Delta t$   $\Delta P_i = \Delta N_i \cdot \Delta p_i = \frac{1}{3} n_i m_0 \Delta S V_i^2 \Delta t$

Тогда все молекулы за время $\Delta t$ передают стенке импульс:

$\Delta P = \sum_i \Delta P_i = \frac{1}{3} m \Delta S \Delta t \cdot \sum_i n_i v_i^2$

$\sum_i n_i v_i^2 = \frac{1}{V} \sum_i N_i v_i^2 = \frac{N}{V} v^2_{ср.кв} = n \cdot v^2_{ср.кв} \Rightarrow$

$v_{ср} = \frac{1}{N} \sum_i N_i v_i$

$v_{ср.кв} = \sqrt{\frac{\sum N_i v_i^2}{N}}$

$\Rightarrow \Delta P = \frac{1}{3} m_0 \Delta S \Delta t\, n\, v^2_{ср.кв}$

$\Delta P = F \Delta t$   давление $\boxed{p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{1}{3} m_0 n v^2_{ср.кв}}$ основное ур-е МКТ

Закон распределения энергии по степеням свободы (закон Больцмана)

$K_{пост} = \frac{m_0 v^2_{ср.кв}}{2} \Rightarrow$ [Осн. ур-е МКТ] $\Rightarrow \boxed{p = \frac{2}{3} n K_{пост}}$

$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{1}{\mu} RT = \frac{\rho}{\mu} RT$   $p = \frac{m_0 n}{m_0 N_A} RT \Rightarrow \left[\frac{R}{N_A} = k\right]$

$\Rightarrow \boxed{p = nkT}$

k – постоянная Больцмана

$\frac{2}{3} K_{пост} = kT \Rightarrow K_{пост} = \frac{3}{2} kT$   $K_{пост} = \frac{m_0 v_x^2}{2} + \frac{m_0 v_y^2}{2} + \frac{m_0 v_z^2}{2}$

Вывод:

часть энергии

На каждую часть (степень свободы) приходится $\frac{1}{2} kT$

одноатомный $i = 3$

двухатомный $i = 3 + 2 = 5$ (2 оси вращ.)

трёх + $i = 3 + 3 = 6$

$K_{полн} = \frac{i}{2} kT = K_{пост} + K_{вращ}$

$U = \underbrace{\frac{m}{\mu}}_{=\nu} C_V T$ ; $U = NK = N \cdot \frac{i}{2} kT = \underbrace{\frac{N}{N_A}}_{=\nu} \frac{i}{2} \underbrace{N_A k}_{=R} T = \nu \frac{i}{2} RT$

$\nu C_V T = \frac{i}{2} \nu RT$

$\boxed{C_V = \frac{i}{2} R}$

$\boxed{C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2} R} \Rightarrow \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{2}$

Длина Максвелла длина свободного пробега молекул

Длина Максвелла.

Р-м след модель: Одна молекула движ. со средней скоростью и при столкновении ~~длины~~ величина скорости не меняется, а меняется только направление.

Молекула имеет вид шарика диаметром: $d$

За время $\Delta t$ она пройдёт путь: $l = v \Delta t$

и с ней столкнутся те молекулы, кот. попадут в ломанный цилиндр радиуса $d$ и объема: $\Delta V = \pi d^2 l = \pi d^2 v \Delta t$

Число молекул, кот. попадут в этот цилиндр:

$\Delta N = n \Delta V = n \pi d^2 v \Delta t$

[ длина свободного пробега – расстояние, кот. проходит молекула от столкновения до столкновения ]

$$\Rightarrow \lambda = \frac{l}{\Delta N} = \frac{\cancel{v \Delta t}}{n \pi d^2 \cancel{v \Delta t}} = \frac{1}{n \pi d^2}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}}$$ точная модель

т.к. $p = nkT \Rightarrow \lambda = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$

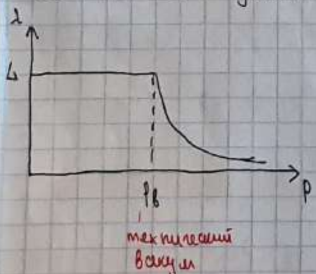
if $T = const \Rightarrow \lambda \sim \frac{1}{p}$

$\lambda \sim 0,1$ мкм

$d \sim 10^{-10}$ м

Ставим задачу: Возьмём сосуд с газом и будем его откачивать. Если откачивать воздух, то давление будет падать ($p \downarrow \Rightarrow \lambda \uparrow$)

$\Rightarrow \lambda \sim L$ – длина сосуда




$T = const$

$p = nkT \rightarrow \lambda = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} \rightarrow \lambda \sim 1/p$

— End —

Экз Распределение Максвелла.

Ставим задачу: Получить отношение числа молекул, имеющ. проекции скорости в пределах от $v_x$ до $v_x + dv_x$; $v_y$ до $v_y + dv_y$ к общему числу молекул. Это и будет распределение Максвелла по проекциям скоростей.

С другой стороны это вероятность того, что наугад взятая молекула имеет проекции скорости в этих пределах.

Имеем идеал. газ, кот. состоит из $N$ молекул. $m$ – масса мол. находится в сосуде объема $V$ с теплоизолированными стенками.

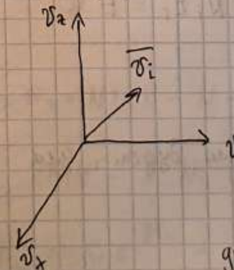
$V = const$.

Равновесное сост. харак-ется 2-мя параметрами. Это концентрация и температура. Для простоты р-м по отдельности неоднородные по темп., но однородные по концентрации и наоборот.

① случай.

$n = const$ $\quad T \neq const$

Следуя Больцману, зафиксируем газ. и найдём скорости всех молекул и построим в пространстве скоростей все скорости молекул. Конец вектора задаёт скорость данной молекулы.




Задав эти величины, мы задали микросостояние нашего газа. Для того, чтобы задать Макросостояние следуя Больцману, разобьём пространство на грубые ячейки одинакового размера, прилегающие друг к другу.

$w = dv_x dv_y dv_z$ ; $M$ – кол-во этих ячеек конечно и равно $M$

Каждая грубая ячейка характеризуется скоростью средней её частью.

и энергией каждой молекулы $\varepsilon_i = \frac{m}{2} (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2)$

и число молекул ($N_i$) кот. попали в ячейку

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = N$$

Вывод: т.е. макросостояние сис-мы будет характеризоваться числом молекул, кот. попадут в ячейку.

~~Понятие~~ Для того, чтобы однозначно задать ~~создать~~ макросостояние сис-мы Больцман ввёл термодин. постоянность — это число способов, ~~кот.~~ которыми можно $N$ молекул распределить по $M$ ячейкам.

в 1-ую — $N_1$ ; во 2-ую — $N_2$ ; в 3-ью — $N_3$ ... в $M$-ую — $N_M$.

$$W = \frac{N!}{N_1!\,N_2!\,\dots N_n!}$$

Не входит

Задача: Распределить 4 мяча по 2-ум ячейкам

Ус.: в каждой ячейке по 2 мяча

| I | II |
|---|---|
| 12 | 34 |
| 13 | 24 |
| 14 | 23 |
| 23 | 14 |
| 24 | 13 |
| 34 | 12 |

6 способов

$$W = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

т.к. газ изолированный $\sum_i N_i = N$ ① $\sum N_i \varepsilon_i = E$ ②

Задача по опр. равновесн. состояния сис-мы:

Больцман определил, что равновесн. состоянием будет для кот. $W$ принимает max значение.

$$N_i^0 \longrightarrow W_{max} \text{ и } (\ln W)_{max}$$

Задача. Ищем условный экстремум, т.к. $N_i$ удовлетвор. 2-ум усл. связи: ① и ②. Для этого воспользуемся методом неопр. множ. Лагранжа. Составим вариационное ур.-е.:

$$\delta(\ln W) - \lambda\,\delta\left(\sum_i N_i\right) - \beta\,\delta\left(\sum_i \varepsilon_i N_i\right) = 0 \quad \text{(I)}$$

Варьир. (I) выполняется при $\forall$ вариациях. $(\forall\,\delta N_i)$

$$\ln W = \ln N! - \sum_i \ln N_i!$$

т.к. $N_i$ - основное, воспользуемся ф-ой Стирлинга:

$$\boxed{\ln N! = N\ln N - N} \Rightarrow \ln W = N\ln N - N - \sum_i N_i \ln N_i + \sum_i N_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta \ln W = -\sum_i \delta N_i \ln N_i - \sum_i N_i \frac{1}{N_i}\delta N_i + \sum_i \delta N_i =$$

$$= -\sum_i \delta N_i \ln N_i \Rightarrow \text{в (I)} \Rightarrow -\sum_i \delta N_i \ln N_i^0 - \lambda \sum_i \delta N_i - \beta \sum_i \varepsilon_i \delta N_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \delta N_i (\ln N_i^0 + \lambda + \beta\varepsilon_i) = 0 \quad \text{т.к. } \forall\,\delta N_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln N_i^0 + \lambda + \beta\varepsilon_i = 0 \Rightarrow N_i^0 = e^{-\lambda - \beta\varepsilon_i} = C e^{-\beta\varepsilon_i}$$

т.к. $\sum_i N_i^0 = N \Rightarrow C = \dfrac{N}{\sum_i e^{-\beta\varepsilon_i}}$, т.к. $\sum_i \varepsilon_i N_i^0 = E \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_i \varepsilon_i\, C e^{-\beta\varepsilon_i} = \frac{N\sum_i \varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i}}{\sum_i e^{-\beta\varepsilon_i}} = E$$

$$\ln W_0 = N\ln N - \cancel{N} - \sum_i N_i^0 \ln N_i^0 + \cancel{\sum_i N_i^0} = N\ln N - \sum_i N_i^0 \ln(C e^{-\beta\varepsilon_i}) =$$

$$= N\ln N - \sum_i N_i^0 \ln C + \sum_i N_i^0 \beta\varepsilon_i \Rightarrow \boxed{\ln W_0 = N\ln N - N\ln C + \beta E} \quad \text{(II)}$$

$$N_i^0 = C e^{-\beta\varepsilon_i} = \frac{C}{\omega} e^{-\beta\varepsilon_i}\, dv_x\, dv_y\, dv_z$$

будем считать, что скорости молекул распределены непрерывно

$$\frac{N_i^0}{N} = \frac{dN}{N} = \frac{C}{N\omega} e^{-\beta\varepsilon}\, dv_x\, dv_y\, dv_z \quad ; \quad C_1 = \frac{C}{N\omega}$$

$$① \; \sum_i N_i^0 = N \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_i N_i^0 = 1 \Rightarrow \iiint_{-\infty}^{+\infty} C_1 e^{-\beta\varepsilon}\, dv_x\, dv_y\, dv_z = 1$$

условие нормировки

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} c\, e^{-\frac{\beta m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\, dv_x\, dv_y\, dv_z =$$

$$= C_1\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}\, dv_x\right]^3 = \left[\frac{\beta m}{2} = \gamma\right] = C_1\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma v_x^2}\, dv_x}_{\text{интеграл Пуассона}}\right]^3 =$$

$$= C_1\left(\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\right)^3 = C_1\frac{\pi^{3/2}}{\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{3/2}} = C_1\left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{3/2} = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2}}$$

(2) $\sum_i N_i \varepsilon_i = E$ ; $E = N K_{\text{пост}} = N\frac{3}{2}kT$

$$N_i^\circ \varepsilon_i = c\,\varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i} = \frac{c}{w}\varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i}\, dv_x\, dv_y\, dv_z = N\frac{c}{Nw}\varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i}\, dv_x dv_y dv_z =$$

$$= N C_1\, \varepsilon_i\, e^{-\beta\varepsilon_i}\, dv_x\, dv_y\, dv_z$$

Считаем, что скорости распределены непрерывно.

$$\sum \to \int \Rightarrow N C_1 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\, e^{-\beta\varepsilon}\, dv_x\, dv_y\, dv_z = E = N\frac{3}{2}kT$$

Р-м интеграл отдельно:

$$N C_1 \frac{m}{2}\iiint_{-\infty}^{+\infty}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\, e^{-\frac{\beta m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\, dv_x\, dv_y\, dv_z =$$

$$= N C_1 \frac{m}{2}\left\{\iiint_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta\varepsilon}\, dv_x\, dv_y\, dv_z + \iiint_{-\infty}^{+\infty} v_y^2 e^{-\beta\varepsilon}\, dv_x\, dv_y\, dv_z + \right.$$

$$\left. + \iiint_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 e^{-\beta\varepsilon}\, dv_x\, dv_y\, dv_z\right\} = \frac{N C_1 m}{2}\iiint_{-\infty}^{+\infty} v_x^2\, e^{-\frac{\beta m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\, dv_x\, dv_y\, dv_z =$$

$$= \frac{3}{2} m N C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\gamma v_x^2}\, dv_x \Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma v_y^2}\, dv_y}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}}\ \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma v_z^2}\, dv_z\right)}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}}\Bigg] =$$

интеграл Пуассона

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\gamma x^2}\, dx = -\frac{d}{d\gamma}\Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma x^2}\, dx}_{=+\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}}\Bigg] = -\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{1/2} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\gamma^{-\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= \frac{3}{2} m N C_1 \frac{\pi^{1/2}}{2}\gamma^{-\frac{3}{2}}\frac{\pi}{\gamma} = \frac{3}{2} m N C_1 \frac{\pi^{3/2}}{2\gamma^{5/2}} = \left[C_1 = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{3}{2} m N \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/2}\frac{\pi^{3/2}}{2\gamma^{5/2}} = \underbrace{\frac{3}{2} m N \frac{1}{2\gamma} = N\frac{3}{2}Tk}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{3}{2}}\, \cancel{mN}\frac{1\cdot 2}{2\beta m} = \cancel{N}\cancel{\frac{3}{2}}\, kT \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{kT}}$$

$$\Rightarrow \frac{dN_i^\circ}{N} = f(V_x, V_y, V_z)\, dV_x\, dV_y\, dV_z = C_1\, e^{-\beta\varepsilon}\, dV_x\, dV_y\, dV_z =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(V_x^2+V_y^2+V_z^2)}\, dV_x\, dV_y\, dV_z \ -$$

– это есть распределение Максвелла молекул по проекциям скоростей

С одной стороны, это относит. число молекул, имеющих проекции скорости в пределах: $v_x$ до $v_x + dv_x$ ; $v_y$ до $v_y + dv_y$ ; $v_z$ до $v_z + dv_z$.

С другой стороны, это вероятность того, что наугад взятая молекула имеет проекции скорости в этих пределах.

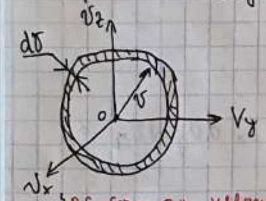
$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z)\, dv_y\, dv_z = \underbrace{\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mV_x^2}{2kT}}}_{\text{плотность молекул в 1-ом направлении}}$$

$\varphi(V_x)\, dV_x$ – вероятность того, что наугад взятая молекула будет иметь проекции скор. в пределах $V_x$ до $V_x + dV_x$, $V_y$ до $V_y + dV_y$, $V_z$ до $V_z + dV_z$


$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(V_x)\, dV_x = 1$$

## Распределение Максвелла – Больцмана по модулям скоростей

Поставим задачу. Р-м в пространстве скоростей шаровой слой, в кот. скорости молекул меняются от $v$ до $v + dv$.




$$F(v)\,dv = \iiint f(v_x, v_y, v_z)\,dv_x\,dv_y\,dv_z$$

т.к. в этом интервале всё это $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$

то $f(v_x, v_y, v_z) = \text{const}$

{P.S. Сфера т.к. неважно направ. скорости}

$$F(v)\,dv = f(v)\underbrace{\iiint dv_x\,dv_y\,dv_z}_{=4\pi v^2 dv} = \text{– объём нашего слоя.}$$

$$= f(v)\,4\pi v^2\,dv \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} &V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \Big|\, d \\ &dV = \tfrac{4}{3}\pi\, 3r^2 = \\ &= 4\pi r^2\,dr \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{mv}{2kT}\right] 4\pi v^2}$$

## Эксперимент Штерна (1920 г.)

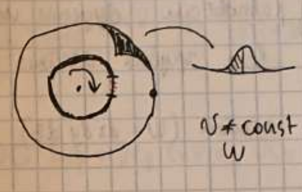
Пост. задачи: Модель опыта: Бралась тонкая платиновая нить, на кот. наносится слой серебра. Эта нить натянута и яв. осью 2ух коаксиальных цилиндров.


На внут. цилиндре делалась узкая щель. По нити пропускали ток, нить нагревалась на $T \sim 1200°C$. При такой темп. атомы серебра испарялись, они осаждались внутр. часть малого цилиндра и через щель на внутр. часть большого цилиндра.

if (вращаем) $\omega$ $\Rightarrow$ if $v = \text{const}$ $\quad \Delta t = \dfrac{R_2 - R_1}{v} = \dfrac{\Delta l}{v}$;

за $\Delta t$: $\Delta \varphi = \omega \Delta t = \dfrac{\omega l}{v}$


$v = \text{const}$, $\omega$




## (2) случай. Состояние сис-мы однород. по темп. и неоднор. по концентрации. $T = \text{const}$ $\quad n \neq \text{const}$

Пост. зад: Зафиксируем нашу сис-му, найдём коорд. всех молекул и зададим их в коорд. пространстве.

Разобьём прост-во на грубые ячейки с объёмом: $W = dx\,dy\,dz$

Число ячеек: $M = \dfrac{V}{W}$. Найдём число молекул, попадающих в каждую ячейку.

~~Опр~~ Больцман ввёл термодинамич. вероятность, т.е число способов, кот. можно разместить $N$ молекул по $M$ ячейкам, причём $\sum_i N_i = N$. Все макросостояния вкл. как неравновесное, так и равновесное сост-ие, попав в кот. сис-ма может находится в нём бескон. долго. По Больцману, равновесное состояние хар-ется max значением термодин. вероятностью.

$$W = \frac{N!}{N_1!\,N_2!\ldots N_M!}\ ; \quad \boxed{\sum_i N_i = N} \ (9) \qquad \ln W = \ln N! - \sum_i \ln N_i!$$

$$\ln N! = N \ln N - N \Rightarrow \boxed{\ln W = N \ln N - N - \sum_i N_i \ln N_i + \sum_i N_i} \ (9') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(\ln W) - \lambda\,\delta\Big(\sum_i N_i\Big) = 0} \ (\text{III})$$ где $\lambda$ – неопр. множ. Лагранжа, кот. будет находится из усл (9)

$$\delta(\ln W) = -\sum_i \delta N_i \ln N_i - \sum_i \cancel{N_i}\frac{1}{\cancel{N_i}}\delta N_i + \sum_i \delta N_i = -\sum_i \delta N_i \ln N_i$$

$$\to \text{в (III)} \Rightarrow -\sum_i \delta N_i \ln N_i - \lambda \sum_i \delta N_i = 0 \Rightarrow -\sum_i \delta N_i (\ln N_i + \lambda) = 0$$

т.к. $\delta N_i$ – любое, то $\ln N_i^0 + \lambda = 0 \Rightarrow N_i^0 = e^{-\lambda} = C$

мы получили ожидаемый рез, что равновесие будет тогда когда концентрация молекул один во всех грубых ячейках

$\sum_i N_i^\circ = \sum_i c = cM = N \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad M = \frac{V}{W}$, где $W$ - объем одной грубой ячейки $(W = dx\,dy\,dz)$

$\Rightarrow \quad c = \frac{N}{M} = \frac{NW}{V}$

## Формула Больцмана для энтропии термодин. сис-мы.

$(9') \Rightarrow \quad \ln W_0 = N\ln N - \cancel{N} - \sum_i N_i^\circ \ln N_i^\circ + \cancel{\sum_i N_i^\circ} =$

$= N\ln N - \sum_i N_i^\circ \ln(\text{const}) = N\ln N - N\ln\frac{NW}{V} =$

$= N\ln N - N\ln N - N\ln W + N\ln V \Rightarrow \boxed{\ln W_0 = -N\ln W + N\ln V}$ (IV)

~~Возьмем~~ из (II) $\ln W_0 = N\ln N - N\ln C + \beta E$

Вспомним, т.к. $E = \frac{3}{2}kTN$; $C = NWC_1 = NW\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$

$\Rightarrow \ln W_0 = N\ln - N\ln\left[NW\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right] + \frac{1}{\cancel{kT}}\cdot\frac{3}{2}\cancel{kT}N =$

$= N\ln + \frac{3}{2}N - N\ln\left[NW\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right] - N\ln T^{-\frac{3}{2}} =$

$= \underbrace{N\ln N + \frac{3}{2}N - N\ln\left[NW\left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{3/2}\right]}_{\text{Сумма} = \text{const}} + \frac{3}{2}N\ln T \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\ln W_0 = C_2 + \frac{3}{2}N\ln T}$ (V)

Т.к. вероятности иметь скорость $V$ и располагаться в пространстве независимы, то $P = P_1 + P_2$ (из теории вероятности искомой) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln P = \ln P_1 + \ln P_2$

(IV) + (V): $\ln W_0 = -N\ln W + C_2 + \frac{3}{2}N\ln T + N\ln V \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln W_0 = C_3 + \frac{3}{2}N\ln T + N\ln V \quad \Big|\cdot k$

$k\ln W_0 = kC_3 + \frac{3}{2}Nk\ln T + Nk\ln V = C_4 + \overbrace{\frac{N}{N_a}}^{\nu}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}N_a k}_{C_V}\ln T +$

$+ \underbrace{\frac{N}{N_a}}_{\nu}\underbrace{N_a k}_{R}\ln V \Rightarrow \boxed{k\ln W_0 = C_4 - \nu C_V\ln T + \nu R\ln V}$ (VI)

[вспомним $\Delta S = \nu C_V\ln\frac{p_2}{p_1} + \nu C_p\ln\frac{V_2}{V_1}$]

$S = \nu C_V\ln p + \nu C_p\ln V = \nu C_V\ln p - \nu C_V\ln V + \nu R\ln V =$

$= \nu C_V\ln(pV) + \nu R\ln V = \nu C_V\ln(\nu RT) + \nu R\ln V =$

$= \nu C_V\ln(\nu R) + \nu C_V\ln T + \nu R\ln V \Rightarrow \boxed{S = C_5 + \nu C_V\ln T + \nu R\ln V}$ (VII)

Сравнивая (VI) и (VII) (Энтропия определена с точностью до const)

$\Rightarrow$ правые части выражений $=$. $\Rightarrow \boxed{S = k\ln W_0}$

## Вывод.

Т.о. Больцман дал статистическое толкование энтропии, т.е. энтропия сис-мы задаётся термодин. вероятностью в равновесном состоянии.