1) Понятие пространства элементарных исходов. Примеры. Случайные события.

Пространство элементарных исходов — множество всех элементарных исходов. Элементарным исходом называют любой простейший (неделимый) исход.

При этом должны выполняться условия:

1) В результате опыта один из исходов обязательно должен произойти;
2) Появление одного исхода исключает появление другого.

Примеры:

1) При однократном бросании кости возможен один из 6 элементарных исходов $\omega_i,\ i=\overline{1,6}$, т.е. $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$

2) При однократном бросании монеты возможен один из 2 элементарных исходов $\omega_i,\ i=1,2$, т.е $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$

3) Предположим, что стрелок производит единственный выстрел по плоской мишени, в этом случае пространство элементарных исходов можно отождествить множеством точек на плоскости или множеством пар (x, y) действительных чисел, где x - абсцисса, y - ордината точки попадания пули в мишень в некоторой системе координат. Таким образом:

$$\Omega=\{(x,y),\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}$$

Случайное событие —произвольное подмножество пространства элементарных исходов.

Операции над событиями:

1) Пересечение(произведение): $C=A\cap B$
2) Объединение(сумма): $C=A\cup B$
3) Разность: $C=A\setminus B$
4) Дополонение: $\overline{A}=\Omega\setminus A$

События A и B называются несовместными, если $A\cap B=\varnothing$, в противном случае они называются совместными.

Основные свойства операций над событиями:

1) Коммутативность суммы и произведения:

$$AB=BA,\quad A\cup B=B\cup A$$

2) Ассоциативность суммы и произведения:

$$(AB)C=A(BC),\quad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

3) Дистрибутивность относительно сложения:

$$(A\cup B)C=AC\cup BC$$

4) Дистрибутивность относительно умножения:

$$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$$

5) $A\subset B \Rightarrow \overline{A}\supset \overline{B}$

6) $\overline{\overline{A}}=A$

7) $A\cup A=AA=A$

8) Законы де Моргана:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup \overline{B}$$

2) Классическое определение вероятности. Свойства вероятностей событий.

Вероятностью события А называют отношение числа N_A благоприятствующих событию А элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов. $P(A) = \frac{N_A}{N}$

Элементарные исходы в опыте называются равновозможными, если в условиях проведения опыта можем считать, что ни один из них не является объективно более возможным, чем другие.

Свойства вероятностей событий:

1) Для любого события А вероятность удовлетворяет неравенству:

$$P(A) \geqslant 0$$

Так как отношение $\frac{N_A}{N}$ не может выть отрицательным.

2) Для достоверного события: $P(\Omega) = 1$

$\square$ $P(\Omega) = \frac{N}{N} = 1$ $\blacksquare$

3) Если события А и В — несовместные, $(AB = \varnothing)$ то:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$\square$ $P(A+B) = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$ $\blacksquare$

Следствия:

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2) $P(A) < P(B)$, если $A \subset B$
3) $P(\varnothing) = 0$

3) Аксиоматическое определение вероятности. Доказать следствия из определения.

Пусть каждому событию А поставлено в соответствие число Р(А).
Числовую функцию Р называют вероятностью, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1) Аксиома неотрицательности: $P(A) \geq 0$

2) Аксиома нормированности: $P(\Omega) = 1$

3) Расширенная аксиома сложения (для любых попарно несовместных событий $A_1, A_2, A_3, \dots A_n, \dots$):

$$P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$$

Следствия из определения:

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

□ $\Omega = \bar{A} + A \Rightarrow$ [по акс. 3] $\Rightarrow P(\Omega) = P(\bar{A}) + P(A) \Rightarrow$ [по акс. 2 : $P(\Omega) = 1$] $\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ■

2) $P(\varnothing) = 0$

□ $A = A + \varnothing \Rightarrow$ [по акс. 3] $\Rightarrow P(A) = P(A) + P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing) = 0$ ■

3) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

□ $A \subset B \Rightarrow B = A + (B \setminus A) \Rightarrow$ [по акс. 3] $\Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ [по акс. 1] $\Rightarrow P(B \setminus A) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A)$ ■

4) $0 \leq P(A) \leq 1$

□ Т.к. $A \subset \Omega \Rightarrow$ [по след-ю 3 и по акс. 1] $\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq P(\Omega)$
$\Rightarrow$ [по акс. 2] $\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$ ■

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

□ Т.к. $A \cup B = A + (B \setminus A)$ и $B = (B \setminus A) + AB \Rightarrow$ [по акс. 3] $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) \\ P(B) = P(B \setminus A) + P(AB) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(AB) \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ■

6) $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \dots -$

$$- P(A_{n-1} A_n) + P(A_1 A_2 A_3) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \ldots A_n)$$

Эта формула выводится с помощью метода математической индукции:

$\square$ Для 3-х событий A, B, C:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A(B \cup C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB \cup AC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) \ \blacksquare$$

Иногда вместо аксиомы 3 удобно использовать 2 другие аксиомы:

Аксиома сложения: для любых попарно непересекающихся событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ справедливо равенство:

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Аксиома непрерывности: если последовательность событий $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ такова, что $A_n \subset A_{n+1}, n \in N$, и $A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = A$, то:

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A)$$

4) Вывести формулу полной вероятности и формулу Байеса

События $H_1, H_2, \ldots H_n$ называют гипотезами, если они удовлетворяют двум условиям:

1) Они являются попарно несовместным, т. е. $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$

2) Их объединение есть достоверное событие т. е. $H_1 \cup, \ldots, \cup H_n = \Omega$

Теорема о полной вероятности:
Пусть для некоторого события A и гипотез $H_1, H_2, \ldots H_n$ известны $P(H_1), \ldots P(H_n)$, которые положительные, и $P(A|H_1), \ldots, P(A|H_n)$. Тогда безусловную вероятность можно найти по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i}^{n} P(A|H_i) P(H_i)$$

□ Представим A в виде: $A = A\Omega = A(H_1 + \ldots + H_n) = AH_1 + \ldots + AH_n$

Т.к. $AH_1, \ldots, AH_n$ – несовместны: $P(A) = P(AH_1) + \ldots + P(AH_n)$

Из теор. об умножении вер-тей:

$$P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A|H_i) \Rightarrow \underbrace{P(A) = \sum_{i} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}_{(*)} \blacksquare$$

Формула Байеса:
Пусть для некоторого события A, $P(A) > 0$ и гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ известны $P(H_1), \ldots, P(H_n)$, которые положительные и $P(A|H_1), P(A|H_n)$. Тогда условная вероятность $P(H_i|A), i = \overline{1,n}$ гипотезы H_i при условии события A определяется формулой Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(H_1) P(A|H_1) + \ldots + P(H_n) P(A|H_n)}$$

□ Из определение усл. вер-ти: $P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)}$

Из ф-лы умножения вер-тей выражаем $P(AH_i)$ через $P(A|H_i)$ и $P(H_i)$, получаем:

$P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A|H_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(A)} \Rightarrow$ [подставим вместо $P(A)$ (*)]

$\Rightarrow$ ф-ла Байеса $\blacksquare$

5) Вывести формулу Бернулли и следствия из неё. (Для вероятности числа успехов от k до m и для вероятности 0 успехов).

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдёт ровно k успехов, определяется формулой:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□ Пусть „У" – удача, „Н" – неудача

Результат каждого опыта: УНН…У, n букв „У" и „Н"

Ω состоит из 2^n исходов.

$\forall \omega$ можно поставить в соот-ии: $P(\omega) = P(УНН...У)$

В силу независимости испытаний, события У, Н, Н, … У – независ. в совокупности

=> по теор. об умножении вер-тей:

$P(\omega) = p^i q^{n-i}$, $i = \overline{0,n}$, для события A_k ($i = k$):

$P(\omega) = p^k q^{n-k}$

Число таких исходов совпадает с C_n^k

Т.к. A_k – объединение всех указанных эл. исходов получаем:

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ■

Следствия из формулы Бернулли:

1) Из того, что события A_k при разных k являются несовместными следует, что вероятность появления успеха (события А) в n испытаниях не менее k_1 раз и не более k_2 раз равна:

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$

В частном случае при $k_1 = 1$ и $k_2 = n$ из предыдущей формулы получаем формулу для вычисления вероятности хотя бы одного успеха в n испытаниях:

$$P\{k \ge 1\} = 1 - q^n$$

6) Условная вероятность. Теорема умножения. Независимые события.

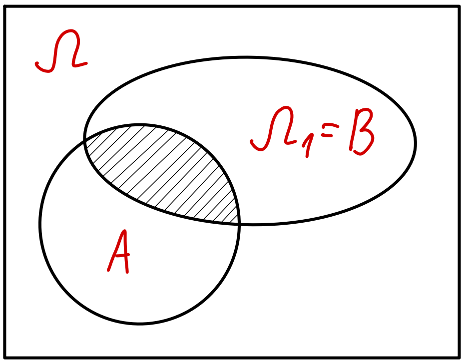
Условной вероятностью события A при условии (наступлении) события B называют отношение вероятности пересечения событий A и B к вероятности события B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

Условная вероятность $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности $P(A)$

Геометрическая интерпретация условной вероятности:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{S_{A\Omega}}{S_\Omega}, \quad P(A|B) = \frac{S_{AB}/\cancel{S_\Omega}}{S_B/\cancel{S_\Omega}} = \frac{S_{AB}}{S_B} = [\Omega_1 = B] = \frac{S_{A\Omega_1}}{S_{\Omega_1}}$$



Теорема умножения вероятностей:
Если $A = A_1 A_2, \ldots, A_n$ (т. е. A — пересечение n событий) и $P(A) > 0$, то справедливо равенство:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

□ Т.к. $P(A_1 \ldots A_n) > 0 \Rightarrow P(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$

По опр. условной вер-ти: $P(A_n|A_1\ldots A_{n-1}) = \dfrac{P(A_1\ldots A_n)}{P(A_1\ldots A_{n-1})}$

$\Rightarrow P(A_1 \ldots A_n) = P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})\,P(A_1\ldots A_{n-1})$

Аналогично находим $P(A_1\ldots A_{n-1})$

$P(A_1\ldots A_{n-1}) = P(A_{n-1}|A_1\ldots A_{n-2})\,P(A_1\ldots A_{n-2})$

Тогда $P(A_1\ldots A_n) = P(A_1\ldots A_{n-2})\,P(A_{n-1}|A_1\ldots A_{n-2})\,P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$

Продолжая, получим ф-лу умножения вер-тей ■

События A и B, имеющие ненулевую вероятность, называют независимыми, если:

$$\underbrace{P(A|B) = P(A)}_{(*)} \quad \text{или} \quad \underbrace{P(B|A) = P(B)}_{(*)}$$

7) Доказать критерий независимости двух случайных событий.

Теорема о независимости событий:
События A и B, имеющие ненулевую вероятность, являются независимыми тогда и только тогда, когда:

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (*)$$

□ =>: Пусть выполнено (*)

Из ф-лы умножения вер-тей для 2-х соб-й:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A)P(B).$$

Аналогично для (*).

<=: Пусть выполнено (*) => из опр. усл. вер-ти:

$$\left.\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \\ P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \text{ и } B \text{ — независимы} \ \blacksquare$$

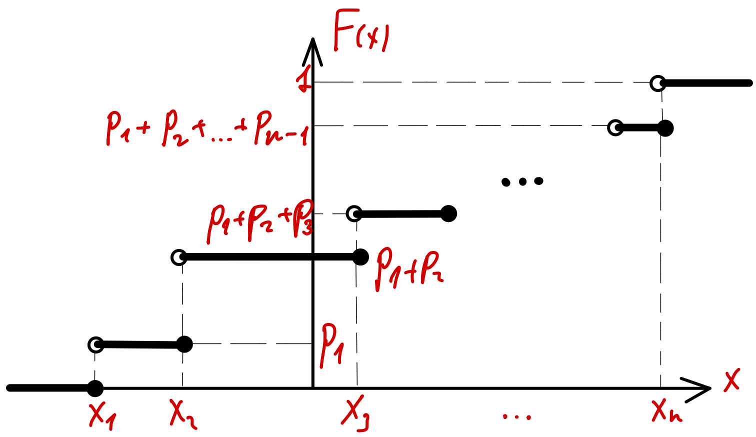
8) Сформулировать определение дискретной случайной величины, обосновать вид ее функции распределения.

Случайную величину ξ называют дискретной, если множество ее возможных значений конечно или счетно (ДСВ).

Случайная величина (СВ) — числовая величина, значение которой зависит от элементарного исхода в эксперименте.

Рядом распределения ДСВ ξ называют таблицу, состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в нижней — вероятности $p_n = P\{\xi = x_n\}, n = 1, 2 ..$ того, что случайная величина примет эти значения:

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...



Обоснование вида функции распределения ДСВ:

Пусть ξ — ДСВ, причём значения $x_1, x_2, ..., x_n...$ расположены в порядке возрастания, тогда:

Для всех $x \le x_1$ событие $\{\xi < x\}$ – невозможное $\Rightarrow$ [из опр. о ф-ции распред. ξ] $\Rightarrow F(x) = 0$

Если $x_1 < x \le x_2 \Rightarrow$ событие $\{\xi < x\}$ состоит из тех эл. исх. ω для которых $\xi(\omega) = x_1 \Rightarrow F(x) = p_1$

Аналогично при $x_2 < x \le x_3$ событие $\{\xi < x\}$ состоит из эл. исх-в ω, для которых:

$\{\xi < x\} = \{\xi = x_1\} + \{\xi = x_2\} \Rightarrow F(x) = p_1 + p_2$

При $x > x_n$ событие $\{\xi < x\}$ достоверно и $F(x) = 1$

9) Функция распределения СВ и ее свойства.

Функцией распределения случайной величины ξ называют функцию F(x), значение которой в точке x равно вероятности события $\{\xi < x\}$, т.е. события состоящего из тех и только тех элементарных исходов ω, для которых $\xi(\omega) < x$:

$$F(x) = P\{\xi < x\}$$

Функция распределения удовлетворяет следующим свойствам:

1) $0 \le F(x) \le 1$
2) $F(x) \le F(y)$ при $x < y$, т.е. $F(x)$ – неубыв. ф-ия
3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4) $P\{x \le \xi < y\} = F(y) - F(x)$
5) $F(x) = F(x-0)$, где $F(x-0) = \lim\limits_{y \to x-0} F(y)$; $F(x)$ – непр. слева

□ Для доказательства будем использовать следствия из аксиом для определения вероятности события, так как значение функции распределения в любой точке x является вероятностью.

1) Из следствия (4) $[0 \le P(A) \le 1]$ => утв. 1
2) Если $x < y$, то $\{\xi < x\} \subset \{\xi < y\}$ => из след-я (3) $[P(A) \le P(B)$, если $A \subset B]$ => $P\{\xi < x\} \le P\{\xi < y\}$ => утв. 2.
3) Пусть $x_1 \dots x_n, \dots$ – $\forall$ возраст. посл-ть, которая $\to +\infty$. Событие $\{\xi < +\infty\}$ – достоверное и представляет собой объединение соб-й $\{\xi < x_n\}$ => [из акс. непр-ти] => 2-е равенство в утв. 3. 1-е – аналогично.
4) Событие $\{\xi < y\}$ при $x < y$ представ. собой объединение 2-х непересек. событий: $\{\xi < x\}$ и $\{x \le \xi < y\}$ => => [из акс. сложения] => утв. 4.
5) Пусть $x_1, \dots, x_n$ – $\forall$ возраст. посл-ть чисел $\to x$. Событие $\{\xi < x\}$ – объединение соб-й $\{\xi < x_n\}$ => [по акс. непр-ти] => утв. 5 ■

10) Функция плотности вероятности и ее свойства.

Непрерывной называют случайную величину X, функцию распределения которой F(x) можно представить в виде:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)\,dy$$

Функцию p(x) называют плотностью распределения случайной величины X.

Функция распределения для непрерывной случайной величины является непрерывной на всей числовой оси и в точках непрерывности плотности распределения p(x) имеет место равенство:

$$p(x) = F'(x)$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1) $p(x) \geq 0$

2) $P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$

4) $P\{x \leq X < x+\Delta x\} \approx p(x)\Delta x$ в т-как непр-ти ф-ии $p(x)$

5) $P\{X = x\} = 0$

□ 1) Т.к. $p(x) = F'(x)$ и из св-ва 2 ф-ии распр-я $[F(x_1) \leq F(x_2)$ при $x_1 < x_2]$ $\Rightarrow F(x)$ – неубыв. $\Rightarrow p(x)$ – неотрицц. $\Rightarrow$ утв. 1.

2) Из св-ва 4 ф-ии распр-я $[P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)]$ $\Rightarrow$ из опр. непр-й СВ и св-ва аддитивности сход. НИ имеем:

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx \Rightarrow \text{утв. } 2.$$

3) При $x_1 = -\infty$ и $x_2 = +\infty$ $\{x_1 \leq X < x_2\}$ – достоверно $\Rightarrow$ утв. 3.

4) Из св-ва 4 ф-ии распр-я:

$$P\{x \leq X < x+\Delta x\} = F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta F(x)$$

Если Δx - мало $\Rightarrow \Delta F(x) \approx dF(x) = F'(x)\Delta x = p(x)\Delta x$ - утв. 4.

5) Т.к. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy \Rightarrow F(x)$ - непр-я $\Rightarrow$ утв. 5.

11) Дать определение биномиального закона распределения и закона распределения Пуассона. Установить связь между ними. (Биномиальный стремится к Пуассону при $n \to \infty$, $np \to \lambda$)

ДСВ называют биномиальной с параметрами $p \in (0, 1)$ и $n \in N$, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., n с вероятностями, заданными формулой:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p, \quad k = \overline{0, n}$$

или рядом распределения:

ξ	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
p	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

Говорят, что эта величина распределена по биномиальному закону или имеет биномиальное распределение.

ДСВ называют пуассоновской с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., n, ... с вероятностями заданным формулой:

$$P\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, \dots$$

или рядом рядом распределения:

ξ	0	1	2	$\dots$	n	$\dots$
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{2!} e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	$\dots$

Говорят, эта величина распределена по закону Пуассона.

Связь этих распределений:

Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, то:

$$P\{\xi = i\} \to \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, \dots$$

$\square$ $\lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$

$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \blacksquare$$

12) Случайные векторы. Функция распределения случайного вектора и ее свойства

Совокупность случайных величин $X_1 = X_1(\omega), \ldots, X_n = X_n(\omega)$ заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ называют многомерной СВ или n-мерным случайным вектором. При этом сами СВ называют координатами случайного вектора.

$(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \vec{X}$ – n-мерный случ. в-р.

Функция распределения

$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$

(n-мерного) случайного вектора $(X_1, \ldots X_n)$ называют функцию, значение которой в точке $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ равно вероятности совместного осуществления (пересечения) событий $\{X_1 < x_1\}, \ldots, \{X_n < x_n\}$ т.е.

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}$$

Эту функцию распределения также называют совместной (n-мерной) функции распределения СВ $X_1, \ldots, X_n$

Функция распределения случайного вектора обладает следующими свойствами:

1) $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$
2) $F(x_1, x_2)$ – неубыв. ф-ия по каждому из арг-в x_1 и x_2
3) $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$
4) $F(+\infty, +\infty) = 1$
5) $P\{a \le X_1 < b, c \le X_2 < d\} = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$

6) $F(x_1, x_2)$ - непр-е слева в $\forall$ т-ке $(x_1, x_2) \in R^2$ по каждому из арг-в x_1 и x_2 ф-ия
7) $F_{X_1,X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x)$, $F_{X_1,X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x)$

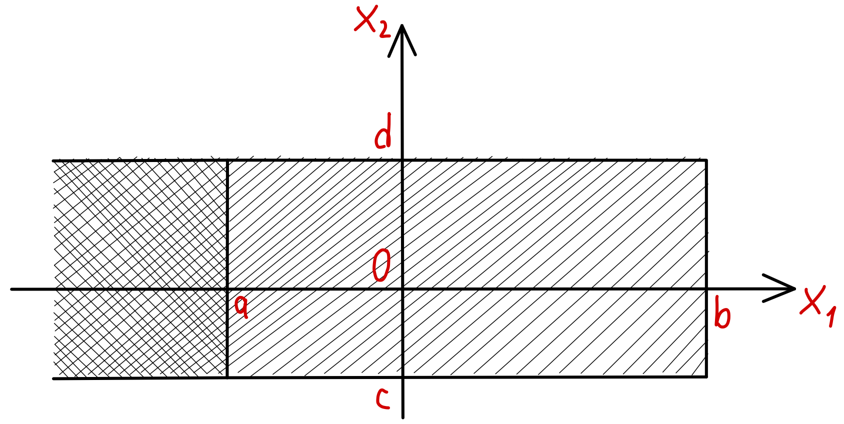
□ Утв-е 1, 2 доказываются как и св-ва 1, 2 ф-ии распределения СВ (вопрос 9)

3) События $\{X_1 < -\infty\}$ и $\{X_2 < -\infty\}$ - невозможные и их пересеч. – также невозм. событие, вероятность которого

$= 0 \Rightarrow$ с учетом опр. ф-ии расп-я случ. в-ра вытекает утв. 3.

4) Аналогично из того, что соб-я $\{X_1 < +\infty\}$ и $\{X_2 < +\infty\}$ и их пересеч. являются достоверными, т.е. их вер-ть $= 1 \Rightarrow$ утв. 4

5)



Чтобы найти вер-ть попадание случ. велич. (X_1, X_2) в прямоугольник $\{a \leq x_1 < b, c \leq x_2 < d\}$, сначала определим вер-ть попадание в полуполосу $\{x_1 < a, c \leq x_2 < d\}$

Но эта вер-ть представ. собой вер-ть попадание в квадрант $\{x_1 < a, x_2 < d\}$ за вычетом вер-ти попадание в квадрант $\{x_1 < a, x_2 < c\}$, т.е.:

$P\{X_1 < a, c \leq X_2 < d\} = F(a, d) - F(a, c)$

Аналогично: $P\{X_1 < b, c \leq X_2 < d\} = F(b, d) - F(b, c)$

Осталось заметить, что вер-ть попадание в $\{a \leq x_1 < b, c \leq x_2 < d\}$ совпадает с вер-тью попадания в $\{X_1 < b, c < X_2 \leq d\}$ с вычетом вер-ть поп-е в $\{X_1 < a, c \leq X_2 < d\} \Rightarrow$ утв. 5

6) Утв 6 доказывается как и св-во 5 ф-ии расп-е СВ

7) Соб-е $\{X_2 < +\infty\}$ - достоверно $\Rightarrow \{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < +\infty\} = \{X_1 < x_1\}$

Аналогично $\{X_1 < +\infty\} \cap \{X_2 < x_2\} = \{X_2 < x_2\} \Rightarrow$ утв. 7. ■

13) Плотность многомерного случайного вектора и ее свойства

Непрерывной двумерной случайной величиной (X, У) называют такую двумерную СВ, совместную функцию распределения которой $F(x_1,x_2)=P\{X<x_1,\ Y<x_2\}$ можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла:

$$F(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}p(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2$$

Функцию $p(x_1,x_2)=p_{XY}(x_1,x_2)$ называют совместной двумерной плотностью распределения случайных величин X и У или плотностью распределения случайного вектора (X, У)

$$F(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}dy_1\int_{-\infty}^{x_2}p(y_1,y_2)\,dy_2=\int_{-\infty}^{x_2}dy_2\int_{-\infty}^{x_1}p(y_1,y_2)\,dy_1$$

$$p(x_1,x_2)=\frac{\partial^2F(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2F(x_1,x_2)}{\partial x_2\,\partial x_1}$$

Аналогичный смысл имеет совместная n-мерная плотность распределения СВ $X_1,\dots,X_n$ или плотность распределения случайного вектора $(X_1,\dots,X_n)$

Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

1) $p(x_1,x_2)\geq 0$

2) $P\{a_1<X<b_1,\ a_2<Y<b_2\}=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}p(x_1,x_2)\,dx_2$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=1$

4) $P\{x_1<X<x_1+\Delta x,\ x_2<Y<x_2+\Delta x\}\approx p(x_1,x_2)\Delta x_1\Delta x_2$

5) $P\{X=x_1,\ Y=x_2\}=0$

6) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D p(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$

7) $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{X,Y}(x,y)\,dy$

8) $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{X,Y}(x,y)\,dx$

□ Св-ва 1-5 аналогичны св-м одномерной пл-ти (вопрос 10)

Св-во 6 является обобщением св-ва 2

Из св-ва 7 двумерной ф-ии расп-я и определения двумерной пл-ти вытекает:

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(y_1, y_2)\,dy_1\,dy_2$$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(y_1, y_2)\,dy_1\,dy_2$$

Из этого, дифферен-я инт-лы по перемен. верхнему пределу и учитывая ф-лу $[p(x) = F'(x)]$ получаем утв 7, 8 ■

14) Функциональные преобразования СВ. Определение закона распределения функции по известному закону распределения аргумента. Рассмотреть частный случай: $X_2 = \varphi(X_1)$, где φ - монотонная функция.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ задана СВ $X = X(\omega)$.
Рассмотрим действительную функцию:

$$y = Y(x)$$

СВ У которая каждому элементарному исходу ω ставит в соотвествии число:

$$Y(\omega) = Y(X(\omega))$$

называют функцией У(Х) (скалярной) от скалярной случайной величины Х.

Функция Y = Y(X) от непрерывной случайной величины X может быть как непрерывной, так и дискретной.

В силу определения функции распределения: $F_Y(y)$ представляет собой вероятность события $\{Y < y\}$, состоящую из тех элементарных исходов ω, для которых $Y(X(\omega)) < y$
Для этих элементарных исходов ω случайная величина $X(\omega)$ будет принимать свои возможные значения на некоторой совокупности $\{\Delta_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, непересекающихся промежутков числовой прямой R. Т.е. :

$$\{Y(X(\omega)) < y\} \sim \bigcup_k \{X(\omega) \in \Delta_k\}$$

Следовательно по расширенной аксиоме сложения вероятностей:

$$F_Y(y) = P\{Y(X(\omega)) < y\} = \sum_k P\{X(\omega_k) \in \Delta_k\}$$

Зная плотность распределения $p_X(x)$ СВ Х, имеем:

$$P\{X(\omega) \in \Delta_k\} = \int_{\Delta_k} p_X(x)\,dx$$

Следовательно, учитывая свойство аддитивности определённого интеграла, получаем:

$$F_Y(y) = \sum_k \int_{\Delta_k} p_X(x)\,dx = \int_{\Delta} p_X(x)\,dx, \quad \Delta = \bigcup_k \Delta_k$$, где сумма может быть и бесконечной

Для множества $\Delta = \bigcup_k \Delta_k$ принято обозначение $Y(x) < y$. Окончательно получаем:

$$F_Y(y) = \int_{Y(x) < y} p_X(x)\,dx$$

Если функция У(х) является монотонной или кусочно монотонной, то закон распределения СВ У = У(х) в виде функции распределения или плотности распределения можно получить без интегрирования.
Предположим, что У(х) — непрерывная, возрастающая или убывающая функция. В этом случае существует обратная функция:

$$\psi(y) = Y^{-1}(y)$$

Если $Y(x)\nearrow \Rightarrow \{Y(X(\omega))<y\} \sim \{X(\omega)<\psi(y)\}$

Если $Y(x)\searrow \Rightarrow \{Y(X(\omega))<y\} \sim \{X(\omega)>\psi(y)\}$

Таким образом, для возрастающей функции У(x):

$$P\{Y(X)<y\} = P\{X<\psi(y)\}$$

Для убывающий функции У(x):

$$P\{Y(X)<y\} = P\{X>\psi(y)\}$$

Т.к. $F_Y(y) = P\{Y<y\}$ – из опр. ф-ии распр-е,

а $P\{X<\psi(y)\} = F_X(\psi(y))$ и $P\{X>\psi(y)\} = 1-F_X(\psi(y)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_Y(y) = F_X(\psi(y)), & Y(x)\nearrow \\ F_Y(y) = 1-F_X(\psi(y)), & Y(x)\searrow \end{cases}$$

Для кусочно мономонотонной:

$Y=f(x)$, $X=\psi(y)$

$$F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{f(x)<y\} = P\{x<\psi(y)\} = F_X(\psi(y))$$

$$p_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = p_X(\psi(y))\cdot\psi'(y)$$

15) Вывод формулы для композиции законов распределения.

Если X_1, X_2 – независ. СВ, т.е.: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$, $Y = X_1 + X_2 \Rightarrow Y = Y(X_1, X_2)$, где: $Y(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Из ф-лы ф-ии распр-я двумерной СВ:

$$F_Y(y) = \iint\limits_{x_1+x_2<y} p_{X_1X_2}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \iint\limits_{x_1+x_2<y} p_{X_1}(x_1)\,p_{X_2}(x_2)\,dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1}(x_1)\,dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} p_{X_2}(x_2)\,dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_2}(y-x_1)\,p_{X_1}(x_1)\,dx_1$$ – дифф-ем по „y" под „$\int$" и $x = x_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_2}(y-x)\,p_{X_1}(x)\,dx = p_{X_2} p_{X_1}$$

В данном случае говорят, что плотность распределения $p_Y(y)$ случайной величины У является свёрткой (композицией) плотностей распределения $p_{X_1}(x_1)$, $p_{X_2}(x_2)$ или что закон распределения суммы двух независимых СВ является свёрткой (композицией) законов распределения слагаемых.

16) Числовые характеристики случайного вектора.

Математическим ожиданием (средним значением) MX дискретной СВ X называют сумму произведений значений x_i случайной величины и вероятностей $p_i = P\{X = x_i\}$, с которыми СВ принимает эти значения.

$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty$ – сх-ся абсолютно

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF_X(x); \quad MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, p(x) dx$$

Дисперсия DX СВ X— это математическое ожидание квадрата отклонения СВ X от среднего значения, т.е. :

$$DX = M(X - MX)^2 \qquad DX = M(X^2) - (MX)^2$$

Для дискретной СВ:

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i$$

Для непрерывной СВ:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 p(x) dx$$

Ковариация $cov(X_1, X_2)$ СВ X_1, X_2 — это математическое ожидание произведения СВ $\overset{\circ}{X}_1 = X_1 - MX_1$ и $\overset{\circ}{X}_2 = X_2 - MX_2$:

$$cov(X_1, X_2) = M(\overset{\circ}{X}_1 \cdot \overset{\circ}{X}_2) = M((X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2))$$

Для дискретных СВ:

$$cov(X_1, X_2) = \sum_{i,j} (x_i - MX_1)(y_j - MX_2) p_{ij}$$

Для непрерывных СВ:

$$cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX_1)(y - MX_2) p_{X_1, X_2}(x, y) dx dy$$

Начальным моментом k-го порядка m_k СВ X называют математическое ожидание k-й степени СВ.

Для дискретной СВ:

$$m_k = MX^k = \sum_i x_i^k p_i$$

Для непрерывной СВ:

$$m_k = MX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx$$

Центральным моментом k-го порядка $\overset{\circ}{m}_k$ СВ X называют математическое ожидание k-й степени СВ $\overset{\circ}{X} = X - MX$:

Для дискретной СВ:

$$\overset{\circ}{m}_k = M(X - MX)^k = \sum_i (x_i - MX)^k p_i$$

Для непрерывной СВ:

$$\overset{\circ}{m}_k = M(X - MX)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^k p(x) dx$$

17) Коэффициент корреляции и его свойства.

Коэффициент корреляции СВ X и У — это число $\rho = \rho(X, Y)$, определяемое равенством:

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}, \quad DX > 0 \text{ и } DY > 0$$

Коэффициент корреляции имеет следующие свойства:

1) $\rho(X, X) = 1$ (т.к. $cov(X,X) = DX$)

2) если X и Y – независ. (и $\exists$ $DX > 0$ и $DY > 0$) $\Rightarrow \rho(X,Y) = 0$

□ Т.к X, Y – н.з. $\Rightarrow cov(X,Y) = 0$ □

3) $\rho(a_1 X_1 + b_1, a_2 X_2 + b_2) = \pm \rho(X_1, X_2)$;

□ $cov(a_1 X_1 + b_1, a_1 X_2 + b_2) = M[(a_1 X_1 + b_1 - M(a_1 X_1 + b_1))(a_2 X_2 + b_2 - M(a_2 X_2 + b_2))] =$

$= M[(a_1 X_1 - a_1 M X_1)(a_2 X_2 - a_2 M X_2)] = a_1 a_2 M[(X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)]$ ■

4) $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$ (т.к. $-\sqrt{DXDY} \le cov(X,Y) \le \sqrt{DXDY}$)

5) $|\rho(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow$, когда СВ X и Y связаны лин-й зав-тью.

(т.к $|cov(X,Y)| = \sqrt{DXDY}$, если X и Y – лин. зав-мы)

18) Условные законы распределения. Вывести выражение для условной плотности $f(Y|X)$

Набор вероятностей $\pi_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$ характеризует условное распределение ДСВ X при условии $Y=y_i$

$$\pi_{ij}=P\{X=x_i \mid Y=y_i\}=\frac{P\{X=x_i;\ Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{Y_j}}$$

$$p_{Y_j}=\sum_i p_{ij};\quad p_{X_i}=\sum_j p_{ij}$$

$$p_{ij}=\pi_{ij}\cdot p_{Y_j}$$

Таблица распределения:

X	Y				
	y_1	y_2	...	y_m	p_X
x_1	π_{11}	π_{12}	...	π_{1m}	p_{X_1}
x_2	π_{21}	π_{22}	...	π_{2m}	p_{X_2}
...	...	...	...	...	...
x_n	π_{n1}	π_{n2}	...	π_{nm}	p_{X_n}
p_Y	p_{Y_1}	p_{Y_2}	...	p_{Y_m}	

Условная функция распределения СВ X :

$$F_X(x|Y=y)=\frac{P\{X<x, Y=y\}}{P\{Y=y\}}\ (\text{при } Y=y)$$

Условной плотностью распределения СВ X, являющейся координатой двумерного случайного вектора (X, У), при условии, что другая его координата пришла некоторое фиксированое значение y, т.е. У = y, называют функцию $p_X(x|y)$, определяемую соотношением:

$$p_X(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

Аналогично:

$$p_Y(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}$$

Приведённые понятия называют условными законами распределения.

Вывод выражения для условной плотности:

□ Т.к. для непр. $P\{Y=y\}=0$, будем вместо $\{Y=y\}$ – $\{y\le Y<y+\Delta y\}$, где $\Delta y\to 0$.

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy \text{ и } p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx;$$

$$P\{X<x \mid y\le Y<y+\Delta y\}=\frac{P\{X<x,\ y\le Y<y+\Delta y\}}{P\{y\le Y<y+\Delta y\}}=\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{F_Y(y+\Delta y)-F_Y(y)}=$$

$$=\frac{\int_y^{y+\Delta y}dV\int_{-\infty}^{x}p(U,V)dU}{\int_y^{y+\Delta y}p_Y(V)dV}$$

По теор. о среднем знач.: $\int_y^{y+\Delta y}dV\int_{-\infty}^{x}p(U,V)dU=\Delta y\int_{-\infty}^{x}p(U,\xi)dU,$

$$\int_y^{y+\Delta y} p_Y(V)dV = p_Y(\eta)\Delta y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\{X < x \mid y \le Y < y+\Delta y\} = \frac{\int_{-\infty}^{x} p(U,\xi)dU}{p_Y(\eta)}$$

η и ξ – нек-е числа, закл-нные между y и $y+\Delta y$

$$\Delta y \to 0 \Rightarrow F_X(x \mid Y=y) = \lim_{\Delta y \to 0} P\{X < x \mid y \le Y < y+\Delta y\} = \frac{\int_{-\infty}^{x} p(U,y)dU}{p_Y(y)}$$

$\Rightarrow$ имеем: $F_X(x \mid Y=y) = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} p(U,y)dU$

Т.к. в-р (X,Y) – непр-й $F_X(x \mid Y=y)$ имеет производную по $x \Rightarrow \exists$ усл. пл-ть распр-я СВ X при условии $Y=y$:

$p_X(x \mid Y=y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$; аналогично определяют $F_Y(y \mid X=x)$ и $p_Y(y \mid X=x)$:

$$F_Y(y \mid X=x) = \frac{1}{p_X(x)} \int_{-\infty}^{y} p(x,V)dV \Rightarrow p_Y(y \mid X=x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} \blacksquare$$

19) Математическое ожидание и его свойства.

Математическим ожиданием (средним значением) MX дискретной СВ X называют сумму произведений значений x_i случайной величины и вероятностей $p_i = P\{X_i = x_i\}$, с которыми СВ принимает эти значения.

$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty$ – сх-ся абсолютно | $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF_X(x)$; $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$

Математическое ожидание удовлетворяет следующим свойствам:

1) Если СВ X принимает всего 1 знач. „C" с вер-тью 1, то: $MC = C$
2) $M(aX + b) = aMX + b$, где $a, b = const$
3) $M(X_1 + X_2) = MX_1 + MX_2$
4) $M(X_1 X_2) = MX_1 \cdot MX_2$ – для независ. СВ X_1 и X_2

□ 1) Если X принимает только 1 знач. с вер-тью 1, то:
$MC = C \cdot 1 = C$

2) Найдем MY СВ $Y = aX + b$ $(Y(x) = ax + b)$:

$$MY = M(aX + b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) p_X(x)\, dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_X(x)\, dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\, dx = $$
$$= aMX + b \cdot 1 \Rightarrow \text{утв. 2.}$$

3) Пусть $Y = X_1 + X_2$ $(Y(x_1, x_2) = x_1 + x_2) \Rightarrow MY = M(X_1 + X_2) =$

$$= \sum_{i,j} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i,j} x_i p_{ij} + \sum_{i,j} y_j p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_i x_i p_{X_1 i} +$$
$$+ \sum_j y_j p_{X_2 j} = MX_1 + MX_2 \Rightarrow \text{утв. 3.}$$

4) Если X_1 и X_2 – независ. СВ, то для мат. ожидания их произвед. $Y = X_1 X_2$ (из ф-лы мат. ожид. 2-мерной СВ и из теор. о независ-ти непр. СВ):

$$MY = M(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 =$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 p_{X_1}(x_1)\, dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2 p_{X_2}(x_2)\, dx_2\right) = MX_1 MX_2 \ \blacksquare$$

20) Сформулировать ЗБЧ. Доказать теорему Чебышева.

Виды сходимости:

1) «Почти наверное»: если последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ СВ удовлетворяет условию $P(A)=1$, $A = \lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} X$$

$$P\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\} \underset{n\to\infty}{=} 1$$

2) «По вероятности»: Если последовательность $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ СВ для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \le \varepsilon\} = 1$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$$

3) «В среднем квадратичном»: если последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} MX_n^2 = MX^2$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{с.к.} X$$

4) «Слабая сходимость» последовательности функций распределения: последовательность функций распределения $F_1(x), \dots, F_n(x), \dots$ сходится к предельной функции распределения F(x), если $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ для любых x, являющихся точками непрерывности F(x).

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} F(x)$$

Последовательность $X_1, \dots, X_n$ удовлетворяет закону больших чисел (ЗБЧ) (слабому), если для любого $\varepsilon > 0$:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i\right| \ge \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Если последовательность $X_1, \dots X_n, \dots$ независимых СВ такова, что существуют $MX_i = m_i$ и $DX_i = \sigma_i^2$, причём дисперсии σ_i^2 ограничены в совокупности (т.е. $\sigma_i^2 \le C < +\infty$), то для последовательности $X_1, \dots X_n, \dots$ выполнен ЗБЧ. При этом говорят также, что к последовательности $X_1, \dots X_n, \dots$ применим ЗБЧ в форме Чебышева.

□ Данная теорема – следствие 2-го нер-ва Чебышева.

Из св-в мат. ожид. и дис-ии:

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \quad , \quad D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \le \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n}$$

Применим 2-е нер-во Чебышева к СВ $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{C}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

21) Доказать теорему Бернулли (как следствие теоремы Чебышева).

Пусть проводится n испытаний по схеме Бернулли и Y_n — общее число успехов в n испытаниях. Тогда наблюденная частота успехов:

$$r_n = \frac{Y_n}{n}$$

сходится по вероятности к вероятности p успеха в одном испытании, т.е. для любого $\varepsilon > 0$:

$$P\{|r_n - p| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□ Пусть X_i - число успехов в i-м испытании Бернулли => => частота успехов в n испытаниях: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Причем: $MX_i = p$ и $DX_i = pq$ => выполняются все условия следствия из теор. Чебышева [Следствие: если для СВ X_i $m_i = m$ и $\sigma_i^2 = \sigma^2$ => $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$] => $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} m = p$ ■

Эту теорему называют теоремой Бернулли или ЗБЧ в форме Бернулли

Из хода доказательства теоремы видно, что ЗБЧ в форме Бернулли является частным случаем ЗБЧ в форме Чебышева.

22) Сформулировать центральную предельную теорему и вывести (как следствие) теорему Муавра-Лапласа.

Центральная предельная теорема:
Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных СВ $MX_n = m$, $DX_n = \sigma^2$. Тогда:

$$P\left\{\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$$

Где $\Phi(x)$ — функция стандартн нормального распределения.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа:
Обозначим S_n — суммарное число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q = 1—p. Тогда с ростом n последовательность функций распределения СВ $(S_n - np)/\sqrt{npq}$ сходится к функции стандартного нормального распределения, т.е. :

$$P\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$$

□ Пусть X_i - число успехов в i-м испытании. Тогда:

$MX_i = p$, $DX_i = pq$

Представим S_n в виде: $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Используем центр. пред-ю теор. :

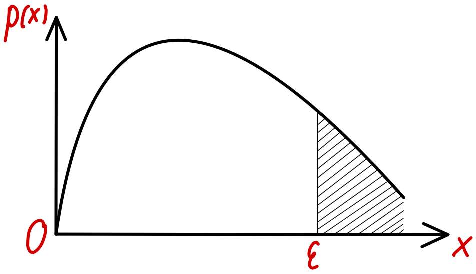
$$P\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) \ \blacksquare$$

23) Вывести неравенства Чебышева и сформулировать ЗБЧ в форме Чебышева.

Для каждой неотрицательной СВ X, имеющей математическое ожидание MX, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение:

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$ — первое неравенство Чебышева.

□ Доказывать будем для непр-й СВ X с пл-тью распр-я $p(x)$



Т.к. СВ X - неотриц $\Rightarrow MX = \int\limits_0^{+\infty} x p(x) dx$

Т.к. подинтегр-е выраж. $\geq 0 \Rightarrow$ при ↓ обл-ти интегр-ия интеграл может лишь ↘ $\Rightarrow$

$\Rightarrow MX = \int\limits_0^{\varepsilon} x p(x) dx + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} x p(x) dx \geq \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} x p(x) dx$

Заменим x на ε в подинтегр-м выраж:

$\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} x p(x) dx \geq \varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} p(x) dx$

$\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} p(x) dx$ (площадь заштрих. обл-ти) $= P\{X \geq \varepsilon\} \Rightarrow MX \geq \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}$

$\Rightarrow P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$, аналогично для ДСВ ■

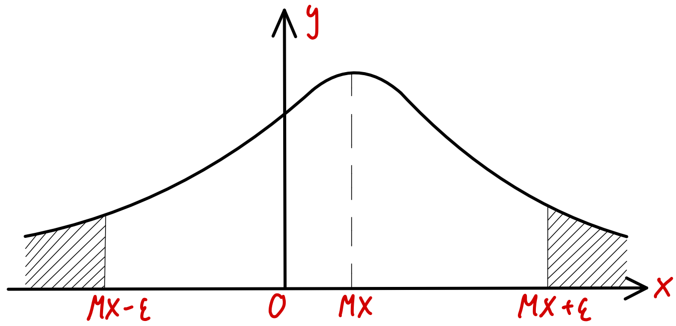
Для каждой СВ X, имеющей дисперсию $DX = \sigma^2$ при любом $\varepsilon > 0$ справедливо второе неравенство Чебышева:

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

□ Для доказательства используем 1-е нер-во Чебышева.

Применяя к СВ $Y = (X - MX)^2$ это нер-во, в котором ε заменено на ε^2, получаем: $P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} = P\{(X - MX)^2 \geq \varepsilon^2\} =$

$= P\{Y \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{MY}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ ■



Если последовательность $X_1, \ldots X_n, \ldots$ независимых СВ такова, что существуют $MX_i = m_i$ и $DX_i = \sigma_i^2$, причём дисперсии σ_i^2 ограничены в совокупности (т.е. $\sigma_i^2 \leq C < +\infty$), то для последовательности $X_1, \ldots X_n, \ldots$ выполнен ЗБЧ. При этом говорят также, что к последовательности $X_1, \ldots X_n, \ldots$ применим ЗБЧ в форме Чебышева.

24) Выборочная и эмпирическая функции распределения. Их свойства.

Функцию

$$\hat{F}(x, \vec{X}_n) = \frac{n(x, \vec{X}_n)}{n}$$

где n — объём случайной выборки, называют выборочной функцией распределения.

Ее можно записать иначе. Эмпирической функцией распределения называют скалярную функцию $F_n(x)$, которая определена для любого $x \in R$ следующим образом:

$$F_n(x) = \frac{n(x)}{n}$$

$F_n(x)$ обладает всеми свойствами функции распределения. При этом она кусочно постоянна и изменяется скачками в каждой точке $x_{(i)}$ (i-й член вариационного ряда).

1) $0 \leq F_n(x) \leq 1$

2) $F_n(x) \leq F_n(y)$ при $x < y$, т.е. $F_n(x)$ — неубыв. ф-ия

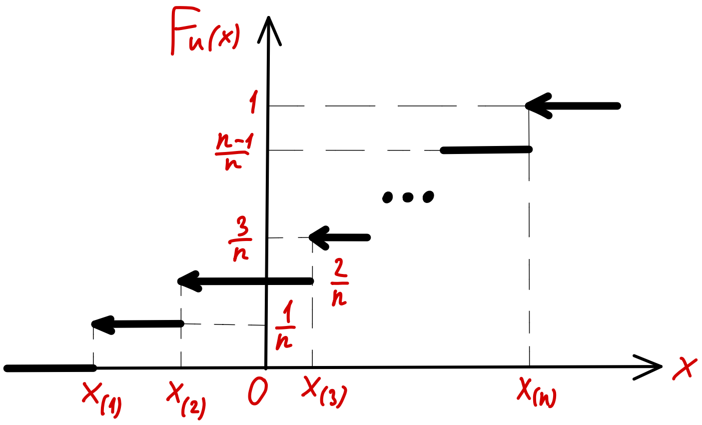
3) $F_n(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F_n(x) = 0$; $F_n(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = 1$

? 4) $P\{x \leq \xi < y\} = F_n(y) - F_n(x)$

5) $F_n(x) = F_n(x-0)$, где $F_n(x-0) = \lim\limits_{y \to x-0} F_n(y)$; $F_n(x)$ — непр. слева

Если все выборочные значения $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — различны, то функцию $F_n(x)$ можно записать в следующем виде:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{(1)} \\ \frac{i}{n}, & x_{(i)} < x \leq x_{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1} \\ 1, & x > x_{(n)} \end{cases}$$



Кроме того, при фиксированном x выборочная функция распределения $\hat{F}_n(x)$ является частотой $\frac{\nu_n}{n}$, для которой: $M\left(\frac{\nu_n}{n}\right) = p = F(x)$

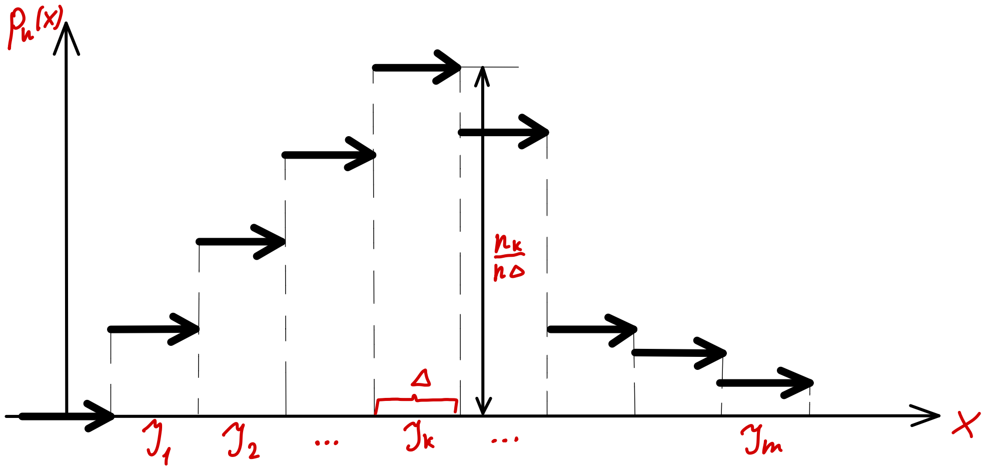
25) Эмпирическая плотность распределения и ее свойства.

Эмпирической плотностью распределения, соответствующей реализации $\vec{x}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$ из генеральной совокупности X, называют функцию $p_n(x)$ которая во всех точках интервала $J_i, i=\overline{1,m}$ принимает значение $\frac{n_i}{n\Delta}$, а вне интервала J равна 0, т.е. :

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta}, & x \in J_i \\ 0, & x \notin J \end{cases}$$

Свойства:

1) График эмпирической плотности называют гистограммой.

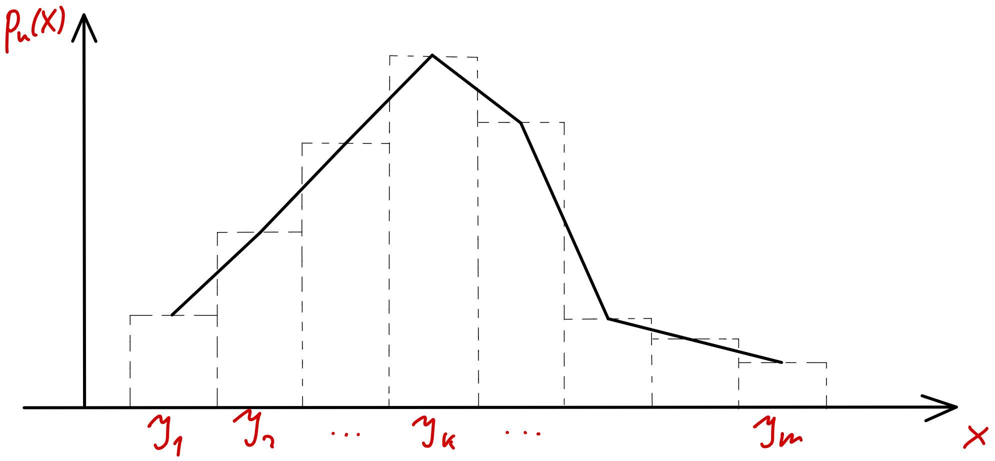


$\frac{n_i}{n\Delta}$ – высота

Δ – ширина

2) При $\Delta \to 0$ и $n \to \infty$ $p_n(x) \approx p(x)$

3) Ломанная через середины высот столбцов диаграмм — полигон частот.



26) Оценка параметров распределения. Точечные оценки. Требования, предъявляемый к точечным оценкам.

Оценка параметров бывает точечной и интервальной.

Точечной оценкой параметра $\theta \in \Theta$ называют любую функцию от наблюдений $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$

Оценку $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ параметра $\theta \in \Theta$ называют состоятельной, если с ростом объёма выборки n она сходится по вероятности к оцениваемому параметру θ т.е. :

$$\hat{\theta}(\vec{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$$

Оценку $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ параметра $\theta \in \Theta$ называют несмещенной, если ее математическое ожидание совпадает с θ:

$$M\hat{\theta}(\vec{X}_n) = \theta \text{ для } \forall n$$

Требования:

1) Состоятельность — важнейшее свойство любой оценки.
2) Несмещенность — желательное, но необязательное свойство. Часто вместо несмещенности распределённые оценки обладают асимптотической несмещенностью, т.е. смещение стремится к 0 с ростом числа наблюдений, т.е. $M\hat{\theta}(\vec{X}_n) - \theta \to 0$, при $n \to \infty$
3) Эффективность.

Если в некотором классе несмещённых оценок параметра θ, имеющих конечную дисперсию, существует такая оценка $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$, что неравенство $D\hat{\theta}(\vec{X}_n) \leq D\tilde{\theta}(\vec{X}_n)$ выполняется для всех оценок $\tilde{\theta}(\vec{X}_n)$ из этого класса, то говорят, что оценка $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ является эффективной в данном классе оценок.

$\tilde{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ – две несмещенные оценки.

27) Показать, что $\overline{X}$ является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой в классе всех линейных оценок.

Оценка $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ (выборочное среднее) математического ожидания $\theta=MX=\mu$ генеральной совокупности X с конечной дисперсией является несмещенной, состоятельной и эффективной в классе всех линейных оценок, т.е. оценок вида:

$$\tilde{\theta}(\vec{X}_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$$

где $\sum_{i}^{n}\alpha_i=1$ для произвольной параметрической модели.

□ 1) X_i, $i=\overline{1,n}$ – независ. СВ и распр-ны как и генеральная сов-ть $X \Rightarrow MX_i=MX=\mu$ и $DX_i=DX=\sigma^2$

Из св-в мат. ожид.:

$$M\overline{X}=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}MX_i=\frac{1}{n}n\mu=\mu \Rightarrow \text{несмещенность.}$$

2) Т.к $X_1,\dots,X_n$ состоит из независ. одинаково распр-х СВ с кон-й дисп-ей $\Rightarrow$ [ЗБЧ в форме Чебышева] $\Rightarrow$ для $\forall\,\varepsilon>0$:

$$P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}\to 1,\ n\to\infty$$

т.е оценка $\overline{X}$ сх-ся по вер-ти к оцениваемому парам-ру $\left(\overline{X}\xrightarrow[n\to\infty]{P}\mu\right) \Rightarrow$ состоятельность.

3) Покажем, что: $D\tilde{\theta}(\vec{X}_n)=D\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i=\sum_{i=1}^{n}D(\alpha_i X_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\,DX_i=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$ достигает своего min знач. при $\alpha_i=\frac{1}{n}$, т.е., когда оценка $\tilde{\theta}(\vec{X}_n)=\overline{X} \Rightarrow$ эффективность.

Для поиска усл. min ф-ии $g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$ при ограничении $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ составим ф-ию Лагранжа: $L(\alpha_1,\dots,\alpha_n;\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)$, где λ – мн-ль Лагранжа. Необх. усл. $\exists$-я усл. extr имеют вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial \alpha_i}=2\alpha_i+\lambda=0, & i=\overline{1,n}\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1=0\end{cases}$$

Решив систему, находим $\lambda=-\frac{2}{n}$ и $\alpha_i=\frac{1}{n}$, $i=\overline{1,n}$ и убеждаемся, что $g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ имеет усл. min. ■

28) Доказать, что $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$ является смещённой оценкой дисперсии.

Если $\vec{X}_n$ — случайная выборка из генеральной совокупности X с конечной дисперсией σ^2, то выборочная дисперсия $\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ — смещённая состоятельная оценка σ^2

$$\square\ \hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu))^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)^2+\frac{1}{n}n(\bar{X}-\mu)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-(\bar{X}-\mu)^2$$

Из св-в мат. ожид.:

$$M\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)=\frac{1}{n}M\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-M(\bar{X}-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i-\mu)^2-M(\bar{X}-\mu)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}DX_1-D\bar{X}=\frac{1}{n}n\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2\Rightarrow$$

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ — смещенная оценка для дис-ии $\blacksquare$

29) Метод максимального правдоподобия.

Одним из наиболее универсальным методов оценивания параметров является метод максимального правдоподобия.

Суть метода:
Рассмотрим функцию правдоподобия случайной выборки $\vec{X}_n$ из генеральной совокупности X, распределение $p(x,\theta)$ которой известно с точностью до параметра $\vec{\theta} \in \Theta$:

$$L(X_1, \dots, X_n; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i, \theta)$$

Оценкой максимального правдоподобия параметра Θ называют статистику $\hat{\vec{\theta}}(\vec{X}_n)$, значения $\hat{\theta}$ которой для любой выборки $\vec{x}_n$ удовлетворяют условию:

$$L(\vec{x}_n, \hat{\vec{\theta}}) = \max_{\vec{\theta} \in \Theta} L(\vec{x}_n, \vec{\theta})$$

Если функция $L(\vec{x}_n, \vec{\theta})$ дифференцируема как функция аргумента $\vec{\theta}$ при любом значении $\vec{x}_n$ из множества X_n значений случайной выборки $\vec{X}_n$ и максимум $L(\vec{x}_n, \vec{\theta})$ достигается во внутренней точке из Θ, то значение точечной оценки максимального правдоподобия в случае скалярного параметра удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial L(\vec{x}_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \ln L(\vec{x}_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \qquad (1)$$

Если распределение СВ X зависит от вектора параметров $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, то второе уравнение из (1) заменяется системой уравнений:

$$\frac{\partial \ln L(\vec{x}_n, \theta)}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = \overline{1, r} \qquad (2)$$

(1) и (2) — уравнения правдоподобия.

30) Найти методом максимального правдоподобия оценку параметров нормального распределения.

Для общей нормальной модели $N(\theta_1,\theta_2^2)$ методом максимального правдоподобия найдём оценку вектора параметров $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2)$.

$$L(\vec{X}_n;\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{(\theta_2\sqrt{2\pi})^n}\exp\left(-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2\right)$$ – ф-ия правдоподобия

$$\Rightarrow \ln L(\vec{x}_n;\theta_1,\theta_2)=-n\ln\sqrt{2\pi}-n\ln\theta_2-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2$$

Т.к. $r=2$ (2 неизв-х парам-ра) система у-й пр-бия:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\ln L=\dfrac{1}{\theta_2^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta_2}\ln L=-\dfrac{n}{\theta_2}+\dfrac{1}{\theta_2^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2=0\end{cases}$$

Решая систему получим:

$\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\hat{\theta}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ $\Rightarrow$ оценками $MX=\theta_1$ и $DX=\theta_2^2$ СВ, распр-й по норм. закону явл-ся: $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ – выборочное среднее и $\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ – выборочная дис-ия.

31) Найти методом максимального правдоподобия оценку параметра экспоненциального распределения

Пусть наблюдаемая в эксперименте СВ X — время работы прибора до отказа — имеет экспоненциальное распределения с плотностью:

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \lambda \text{ - неизвестный парам-р}$$

Используя ММП найдем точечную оценку для λ.

Пусть $\vec{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$ - $\forall$-я реализация случ. выборки $\vec{X}_n$ из ген. сов-ти X.

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda \cdot e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \text{ - ф-ия правд-я}$$

$$\ln L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial \ln L(\vec{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1}$$

Точечной оценкой λ явл-ся: $\hat{\lambda}(\vec{X}_n) = \dfrac{1}{\overline{X}}$

32) Найти методом максимального правдоподобия оценку параметра биномиального распределения.

Применим метод максимального правдоподобия для оценки параметра $\theta = p$ в биномиальной модели, где p — вероятность успеха в любом из n независимых повторных испытаний, в которых было зафиксировано k успехов.

$$L(k,p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$ – ф-ия правд-я

$$\ln L(k,p) = \ln C_n^k + k \ln p + (n-k)\ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln(k,p)}{\partial p} = \frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} = 0$$ – у-е правд-я =>

=> $\hat{p} = \frac{k}{n}$, $\hat{p}$ – т-ка max $L(k,p)$, т.е. оценка макс. правд-я вер-ти p совпадает с относит. частотой успеха в n испытаниях.

33) Определение доверительного интервала (ДИ). Его вероятностный смысл.

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}_n) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X}_n)\} = \gamma,$$ $\underline{\theta}(\vec{X}_n), \overline{\theta}(\vec{X}_n)$ — функции случайной выборки $\vec{X}_n$, также называют нижней и верхней границами интервальной оценки.

γ — коэффициент доверия.

Интервальная оценка $(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \overline{\theta}(\vec{X}_n))$ представляет собой интервал со случайными границами, который с заданной вероятностью γ накрывает истинное значение параметра θ.
При этом вероятностной характеристикой точности оценивания параметра θ является СВ $l(\vec{X}_n) = \overline{\theta}(\vec{X}_n) - \underline{\theta}(\vec{X}_n)$, которая для любом реализации $\vec{x}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$ — есть длина интервала $(\underline{\theta}(\vec{x}_n), \overline{\theta}(\vec{x}_n))$.
Интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}_n), \overline{\theta}(\vec{x}_n))$ называют доверительным интервалом для параметра θ с коэффициентом доверия γ.
Иногда при рассмотрении дискретных СВ удаётся обеспечить лишь неравенство:

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}_n) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X}_n)\} \geq \gamma$$

Иногда требуется оценить параметр θ только снизу или сверху:

$P\{\underline{\theta}(\vec{X}_n) < \theta\} = \gamma$, $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ — односторонняя нижняя γ-доверительная граница для параметра θ

$P\{\theta < \overline{\theta}(\vec{X}_n)\} = \gamma$, $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ — односторонняя верхняя γ-доверительная граница для параметра θ

Можно дополнить, расписав последовательность действий построения ДИ:

1) Построение центральной статистики $T(\vec{X}_n, \theta)$ с известной функцией распределения $F(t)$.
2) Представление заданного коэффициента доверия в виде $\gamma = 1 - \alpha - \beta$.
3) Нахождение квантилей $h_\alpha, h_{1-\beta}$ уровня α и $1-\beta$ функции распределения $F_T(t)$.
4) Нахождение значений нижней $\underline{\theta}(\vec{x}_n)$ и верхней $\overline{\theta}(\vec{x}_n)$ границ исковой интервальной оценки путём решения уравнений:

$T(\vec{x}_n, \underline{\theta}) = h_\alpha$; $T(\vec{x}_n, \overline{\theta}) = h_{1-\beta}$ — если $T(\vec{x}_n, \theta)$ — возраст.

$T(\vec{x}_n, \underline{\theta}) = h_{1-\beta}$; $T(\vec{x}_n, \overline{\theta}) = h_\alpha$ — если $T(\vec{x}_n, \theta)$ — убыв.

34) Построить ДИ для мат. ожидания нормально распределенной СВ при известном с.к.о.

$$T(\vec{X}_n, \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \text{ – статистика}$$

Имеет парам-ры: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, т.е. центр-я стат.

Ф-ия $T(\vec{X}_n, \mu)$ – убыв. по μ

Получим систему у-й:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \underline{\mu}(\vec{x}_n))}{\sigma} = U_{1-\beta} \\ \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \bar{\mu}(\vec{x}_n))}{\sigma} = U_{\alpha} \end{cases}$$

, U_q – квантиль уровня q станд. норм. распр-я

Т.к. для норм. распр-я $U_{1-\alpha} = -U_{\alpha}$ => [при $\gamma = 1 - \alpha - \beta$]:

$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{1-\beta} \quad ; \quad \bar{\mu}(\vec{x}_n) = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{1-\alpha}$$

35) Построить ДИ для мат. ожидания нормально распределённой СВ при неизвестном с.к.о.

$T(\vec{X}_n, \mu) = \frac{\overline{X} - \mu}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}$ – центр-я стат. т.к. имеет распр-е Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, которое не зависит от μ и σ^2. Также $T(\vec{X}_n, \mu)$ – убыв. по μ

Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \underline{\mu}(\vec{X}_n))}{S(\vec{X}_n)} = t_{1-\beta}(n-1) \\ \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \overline{\mu}(\vec{X}_n))}{S(\vec{X}_n)} = t_{\alpha}(n-1) \end{cases}$$

, $t_q(n-1)$ – квантиль уровня q распр-я Стьюдента с $n-1$ степенями свободы

Т.к. пл-ть распр-я Стьюдента – чет. ф-ия, то:

$t_\alpha(n-1) = -t_{1-\alpha}(n-1) \Rightarrow$ [при $\gamma = 1-\alpha-\beta$] :

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\beta}(n-1); \quad \overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)$$

36) Построить ДИ для мат. Ожидания при неизвестной дисперсии и неизвестном законе распределения.

Пусть $\exists$ конечные $\mu = MX$ и $\sigma^2 = DX$.

Рассм. стат. $T(\vec{X}_n) = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$ => [из центр. пред-й теор. при $n \to \infty$ имеет закон расп-я близкий к норм.] =>

=> при $n \to \infty$: $-u_{1-\beta} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha}$ (*) — выполняются с вер-тью, близкой к величине $\gamma = 1 - \alpha - \beta$.

u_q - квантиль уровня q станд. норм. расп-я.

(*) эквив-ны:

$$\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\beta}$$

Вместо σ подставим его оценку $S(\vec{X}_n)$:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} u_{1-\beta}; \quad \overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}$$

37) Вывести выражение для ДИ для дисперсии и с.к.о. нормально распределенной СВ.

Расм. стат.: $T(\vec{X}_n, \sigma) = \dfrac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2}$ – центр-я, т.к. имеет χ^2-распр-е с $n-1$ степенями свободы, которое не зависит от μ и σ^2. $T(\vec{X}_n, \sigma)$ – убыв. ф-ия парам-ра σ => с коэф. доверия $\gamma = 1-\alpha-\beta$ находим:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{S(\vec{X}_n)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{1-\beta}(n-1)}} \; ; \quad \overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{S(\vec{X}_n)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha}(n-1)}}$$

$\chi^2(n-1)$ – квантиль уровня q для χ^2-распр-я с $n-1$ степенями свободы.

38) Построение оптимального критерия для мат. ожидания нормально распределенной генеральной совокупности при известной дисперсии для случая двух простых гипотез.

Простые гип-зы: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu = \mu_1$; $\mu_0 < \mu_1$

$L(X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right)$ - ф-ия правд-я

$$\varphi(\vec{X}_n) = \frac{L(X_1, \dots, X_n; \mu_1)}{L(X_1, \dots, X_n; \mu_0)} = [\text{преобразуем}] = \exp\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \cdot$$
$$\cdot \exp\left(-\frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right)$$

В данном случае $\varphi(\vec{x}_n) \geq C_\varphi \iff \sum_{i=1}^{n} x_i \geq C$

$C = const$ выбирают из усл. обеспечения заданного уровня значимости α:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geq C \mid \mu = \mu_0\right\} = \alpha \quad (*)$$

$$\ln \varphi(\vec{x}_n) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \geq \ln C_\varphi$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0}\left(\ln C_\varphi + \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right) = C$$

СВ $X_1 + \dots + X_n$ имеет норм. расп-е с мат. ожид. $n\mu$ и дис-ей $n\sigma^2$ => $(*)$:

$$1 - \Phi\left(\frac{C - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \alpha \quad \text{или} \quad \frac{C - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} = u_{1-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = n\mu_0 + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}$$

При этом вер-ть совершения ошибки 2-го рода:

$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i < C \mid \mu = \mu_1\right\} = \Phi\left(\frac{C - n\mu_1}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ - мин. возможная при α

39) Проверка статистических гипотез. Ошибки 1 и 2 рода. Понятие критерия проверки гипотез. Критическая область, уровень значимости.

Статистические гипотезы относительно неизвестного истинного значения параметра θ называют параметрическими гипотезами.
Виды статистических гипотез:
Статистическую гипотезу называют простой, если она имеет вид: $H: \vec{\theta} = \vec{\theta}_0$.

Статистическую гипотезу называют сложной, если она имеет вид: $H: \vec{\theta} \in D$

Случай, когда проверяются 2 простые статистические гипотезы вида:

$H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta = \theta_1$; θ_1, θ_2 — 2 заданных (различных) параметра.
H_0 называют основной гипотезой, а H_1 — конкурирующей.

Критерием поверки гипотез называют правило, по которому по данным выборки $\vec{X}_n$ принимается решение о справедливости либо первой, либо второй гипотезы.
Этот критерий задают с помощью критического множества W, являющегося подмножеством выборочного пространства $\mathcal{X}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$.
Решение принимается следующим образом:
1) Если выборка $\vec{x}_n$ принадлежит критическому множеству W, то отвергают основную гипотезу и принимают конкурирующую.
2) Если выборка $\vec{x}_n$ не принадлежит критическому множеству W, то отвергают конкурирующую гипотезу и принимают основную.

При использовании любого критерия возможны ошибки следующих видов:
1) Принять гипотезу H_1, когда верна H_0 — ошибка первого рода.
2) Припять гипотезу H_0, когда верна H_1 — ошибка второго рода.
Вероятности совершения ошибок первого и второго рода:

$$\alpha = P\{\vec{X}_n \in W \mid H_0\}, \quad \beta = P\{\vec{X}_n \in \overline{W} \mid H_1\}$$

Эти вероятности вычисляют с помощью функции плотности распределения СВ $\vec{X}_n$ следующим образом:

$$\alpha = \int_{W} \dots \int \prod_{k=1}^{n} p(t_k; \theta_0) dt_1 \dots dt_n; \quad \beta = \int_{\overline{W}} \dots \int \prod_{k=1}^{n} p(t_k, \theta_1) dt_1 \dots dt_n$$

Вероятность совершения ошибки первого рода называют уровнем значимости критерия.
Величину $1-\beta$, равную вероятности отвергнуть основную гипотезу H_0, когда она неверна, называют мощностью критерия.

$\overline{W}$ – дополнение, не путать с вектором!

40) Правило Неймана-Пирсона построения наилучшей критической области. Привести пример.

Будем считать, что $\vec{X}_n$ — случайная выборка объёма n из генеральной совокупности непрерывной СВ X, плотность распределения вероятностей которой $p(t,\theta)$ зависит от неизвестного параметра θ, и рассмотрим две простые гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta = \theta_1$
Введём функцию случайной выборки $\vec{X}_n$:

$$\varphi(\vec{X}_n) = \frac{L(\vec{X}_n, \theta_1)}{L(\vec{X}_n, \theta_0)}$$ — отношение правдоподобия. $$L(\vec{X}_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i, \theta)$$

Для построения оптимального (наиболее мощного) при заданном уровне значимости α критерия Неймана-Пирсона в критическое множество W включают те элементы $\vec{x}_n$ выборочного пространства $\mathcal{X}_n$ случайной выборки $\vec{X}_n$, для которых выполняется неравенство: $\varphi(\vec{x}_n) \geq C_\varphi$, где C — выбирают из условия: $P\{\varphi(\vec{X}_n) \geq C_\varphi | H_0\} = \alpha$, которое обеспечивает заданное значение уровня значимости α и может быть записано в виде:

$$\underset{\varphi(t_1, \ldots, t_n) \geq C_\varphi}{\int \ldots \int} L(t_1, \ldots, t_n; \theta_0) dt_1 \ldots dt_n = \alpha$$

При этом вероятность ошибки второго рода не может быть уменьшена при данном значении вероятности ошибки первого рода α.

Пример (как и в 38 вопросе):

Простые гип-зы: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu = \mu_1$; $\mu_0 < \mu_1$

$$L(X_1, \ldots, X_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right)$$ - ф-ия правд-я

$$\varphi(\vec{X}_n) = \frac{L(X_1, \ldots, X_n; \mu_1)}{L(X_1, \ldots, X_n; \mu_0)} = [\text{преобразуем}] = \exp\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right)$$

В данном случае $\varphi(\vec{x}_n) \geq C_\varphi \iff \sum_{i=1}^{n} x_i \geq C$

C=const выбирают из усл. обеспечения заданного уровня значимости α:

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geq C | \mu = \mu_0\right] = \alpha \quad (*)$$

$$\ln \varphi(\vec{x}_n) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \geq \ln C_\varphi$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0}\left(\ln C_\varphi + \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right) = C$$

СВ $X_1+\ldots+X_n$ имеет норм. расп-е с мат. ожид. $n\mu$ и дис-ей $n\sigma^2 \Rightarrow (*)$:

$$1-\Phi\left(\frac{C-n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\alpha \quad \text{или} \quad \frac{C-n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}=u_{1-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C=n\mu_0+u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}$$

При этом вер-ть совершения ошибки 2-го рода:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i<C \,\middle|\, \mu=\mu_1\right\}=\Phi\left(\frac{C-n\mu_1}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$ – мин. возможная при α

41) Критерий проверки гипотезы о равенстве двух средних НГС при известных с.к.о.

Пусть определены 2 случ. выборки $(X_1, \dots, X_n)$ и $(Y_1, \dots, Y_m)$ объемов n и m из ген. сов-й независ. СВ:

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, σ_1^2, σ_2^2 – известны:

$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 > \mu_2$

$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 < \mu_2$

$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$\bar{X} - \bar{Y}$ – разность выб-х средних (не в-р!) – имеет норм. распр-е с мат. ожид. $\mu_1 - \mu_2$ и дис-ей $\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}$

$\Rightarrow$ при H_0 (т.е. при $\mu_1 = \mu_2$), стат.:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$$ – имеет станд. норм. распр-е $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ крит. мн-ва:

1) $$\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \geq u_{1-\alpha}$$

2) $$\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \leq -u_{1-\alpha}$$

3) $$\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

42) Проверка гипотезы о величине дисперсии НГС, о равенстве двух дисперсий НГС.

1) Известны: n, $\vec{X}$, S^2, σ_0^2

Решение:

известно

Проверим $H_0: \sigma_0^2 = \sigma_0'^2$ и выберем $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$.

Назначим $\alpha = 0{,}05$

Статистика: $V = \frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2}$ – имеет расп-е χ^2 с числом степеней свободы $n-1$ => крит. мн-во:

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$, вычисляем выб-е знач. стат. и подставляем в нер-во. Затем проверяем гипотезы.

2) Известны: S_1^2, S_2^2, n, m

Решение:

Проверим $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при $H_2: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Назначим $\alpha = 0{,}05$

Статистика:

$F = S_1^2(\vec{X}_n) / S_2^2(\vec{X}_n)$ – имеет расп-е Фишера со степенями свободы $\vartheta_1 = n-1$ и $\vartheta_2 = m-1$

По табл. квантилей расп-я Фишера находим $F_{1-\alpha}(\vartheta_1, \vartheta_2)$. => Крит. мн-во:

$$\frac{S_1^2(\vec{X}_n)}{S_2^2(\vec{X}_n)} > f_{1-\alpha}(\vartheta_1, \vartheta_2)$$

После вычисления F проверяем гипотезы.

43) Понятие критерия согласия. Критерий согласия Пирсона и его применение.

Критериями согласия называют статистические критерии, предназначенные для обнаружения расхождений между гипотетической статистической моделью и реальными данными, которые эта модель призвана описывать.

Теорема Пирсона:
Распределение случайной величины

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{(n_k(\vec{X}_n)-np_k)}{np_r}$$

при $n\to\infty$ сходится к χ^2-распределению с r—1 степенями свободы (сходится слабо).
Может применяться для проверки простой гипотезы:

$H_0: p_1=p_{10},\dots, p_r=p_{r0}$, где $p_1,\dots p_r$, - известные, против конк-й гип-зы

$H_1: \exists k: p_k\neq p_{k0},\ k=\overline{1,r}$

Если H_0 - истина => [теор. Пирсона при $n\to\infty$]:

$$\chi^2(\vec{X}_n)=\sum_{k=1}^{r}\frac{(n_k(\vec{X}_n)-np_{k0})^2}{np_{k0}}=n\sum_{k=1}^{r}\frac{\left(\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n}-p_{k0}\right)^2}{p_{k0}}\longrightarrow$$ к распр-ю χ^2 с r-1 степенями свободы

Если H_0 - не истина => [ЗБЧ при $n\to\infty$]:

$$\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n}\longrightarrow p_k,\ k=\overline{1,r}$$ => при $n\to\infty$:

$$\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n}-p_{k0}=\left(\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n}-p_k\right)+(p_k-p_{k0})\to p_k-p_{k0}$$ => если $p_k-p_{k0}\neq 0$

для $k=\overline{1,r}$, то стат. $\chi^2(\vec{X}_n)$ принимает большие знач., чем в случ. истинности H_0

Т.о.: 1) Если $\chi^2(\vec{x}_n)$ (реал-ия СВ) $>\chi^2_{1-\alpha}(r-1)$ => критерий согл. χ^2 откл. H_0 в пользу H_1

2) Если $\chi^2(\vec{x}_n)\leq\chi^2_{1-\alpha}(r-1)$ => принимаем H_0