1) Понятие пространства элементарных исходов. Примеры. Случайные события.

Пространство элементарных исходов — множество всех элементарных исходов. Элементарным исходом называют любой простейший (неделимый) исход.

При этом должны выполняться условия:
1) В результате опыта один из исходов обязательно должен произойти;
2) Появление одного исхода исключает появление другого.

Примеры:
1) При однократном бросании кости возможен один из 6 элементарных исходов $\omega_i,\ i=\overline{1,6}$, т.е. $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$

2) При однократном бросании монеты возможен один из 2 элементарных исходов $\omega_i,\ i=1,2$, т.е $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$

3) Предположим, что стрелок производит единственный выстрел по плоской мишени, в этом случае пространство элементарных исходов можно отождествить множеством точек на плоскости или множеством пар (x, y) действительных чисел, где x - абсцисса, y - ордината точки попадания пули в мишень в некоторой системе координат. Таким образом:

$$\Omega=\{(x,y),\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}$$

Случайное событие —произвольное подмножество пространства элементарных исходов.

Операции над событиями:
1) Пересечение(произведение): $C=A\cap B$
2) Объединение(сумма): $C=A\cup B$
3) Разность: $C=A\setminus B$
4) Дополонение: $\overline{A}=\Omega\setminus A$

События A и B называются несовместными, если $A\cap B=\varnothing$, в противном случае они называются совместными.

Основные свойства операций над событиями:
1) Коммутативность суммы и произведения:

$$AB=BA,\quad A\cup B=B\cup A$$

2) Ассоциативность суммы и произведения:

$$(AB)C=A(BC),\quad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

3) Дистрибутивность относительно сложения:

$$(A\cup B)C=AC\cup BC$$

4) Дистрибутивность относительно умножения:

$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$$

5) $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \supset \bar{B}$

6) $\bar{\bar{A}} = A$

7) $A \cup A = AA = A$

8) Законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A}\,\bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

2) Классическое определение вероятности. Свойства вероятностей событий.

Вероятностью события A называют отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов. $P(A) = \frac{N_A}{N}$

Элементарные исходы в опыте называются равновозможными, если в условиях проведения опыта можем считать, что ни один из них не является объективно более возможным, чем другие.

Свойства вероятностей событий:

1) Для любого события A вероятность удовлетворяет неравенству:

$P(A) \geqslant 0$

Так как отношение $\frac{N_A}{N}$ не может выть отрицательным.

2) Для достоверного события: $P(\Omega) = 1$

$\square$ $P(\Omega) = \frac{N}{N} = 1$ $\blacksquare$

3) Если события A и B — несовместные, $(AB = \varnothing)$ то:

$P(A+B) = P(A) + P(B)$

$\square$ $P(A+B) = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$ $\blacksquare$

Следствия:

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2) $P(A) < P(B)$, если $A \subset B$

3) $P(\varnothing) = 0$

3) Аксиоматическое определение вероятности. Доказать следствия из определения.

Пусть каждому событию A поставлено в соответствие число P(A).
Числовую функцию P называют вероятностью, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1) Аксиома неотрицательности: $P(A) \geq 0$

2) Аксиома нормированности: $P(\Omega) = 1$

3) Расширенная аксиома сложения (для любых попарно несовместных событий $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n, \ldots$):

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

Следствия из определения:

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

□ $\Omega = \bar{A} + A \Rightarrow$ [по акс. 3] $\Rightarrow P(\Omega) = P(\bar{A}) + P(A) \Rightarrow$ [по акс. 2: $P(\Omega) = 1$] $\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ■

2) $P(\varnothing) = 0$

□ $A = A + \varnothing \Rightarrow$ [по акс. 3] $\Rightarrow P(A) = P(A) + P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing) = 0$ ■

3) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

□ $A \subset B \Rightarrow B = A + (B \setminus A) \Rightarrow$ [по акс. 3] $\Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ [по акс. 1] $\Rightarrow P(B \setminus A) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A)$ ■

4) $0 \leq P(A) \leq 1$

□ Т.к. $A \subset \Omega \Rightarrow$ [по след-ю 3 и по акс. 1] $\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq P(\Omega)$
$\Rightarrow$ [по акс. 2] $\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$ ■

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

□ Т.к. $A \cup B = A + (B \setminus A)$ и $B = (B \setminus A) + AB \Rightarrow$ [по акс. 3] $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) \\ P(B) = P(B \setminus A) + P(AB) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(AB) \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ■

6) $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \ldots -$

$$- P(A_{n-1} A_n) + P(A_1 A_2 A_3) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \ldots A_n)$$

Эта формула выводится с помощью метода математической индукции:

□ Для 3-х событий A, B, C:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A(B \cup C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB \cup AC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$$ ■

Иногда вместо аксиомы 3 удобно использовать 2 другие аксиомы:

Аксиома сложения: для любых попарно непересекающихся событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ справедливо равенство:

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Аксиома непрерывности: если последовательность событий $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ такова, что $A_n \subset A_{n+1}, n \in N$, и $A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = A$, то:

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A)$$

4) Вывести формулу полной вероятности и формулу Байеса

События $H_1, H_2, \dots H_n$ называют гипотезами, если они удовлетворяют двум условиям:

1) Они являются попарно несовместным, т. е. $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$

2) Их объединение есть достоверное событие т. е. $H_1 \cup, \dots, \cup H_n = \Omega$

Теорема о полной вероятности:
Пусть для некоторого события A и гипотез $H_1, H_2, \dots H_n$ известны $P(H_1), \dots P(H_n)$, которые положительные, и $P(A|H_1), \dots, P(A|H_n)$. Тогда безусловную вероятность можно найти по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i}^{n} P(A|H_i)\, P(H_i)$$

□ Представим A в виде: $A = A\Omega = A(H_1 +, \dots, + H_n) = AH_1 + \dots + AH_n$

Т.к. $AH_1, \dots, AH_n$ – несовместны: $P(A) = P(AH_1) + \dots + P(AH_n)$

Из теор. об умножении вер-тей:

$$P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A|H_i) \Rightarrow \underbrace{P(A) = \sum_i P(H_i) \cdot P(A|H_i)}_{(*)}\ ■$$

Формула Байеса:
Пусть для некоторого события A, $P(A) > 0$ и гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ известны $P(H_1), \dots, P(H_n)$, которые положительные и $P(A|H_1), P(A|H_n)$. Тогда условная вероятность $P(H_i|A)$, $i = \overline{1,n}$ гипотезы H_i при условии события A определяется формулой Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)}$$

□ Из определение усл. вер-ти: $P(H_i|A) = \dfrac{P(AH_i)}{P(A)}$

Из ф-лы умножения вер-тей выражаем $P(AH_i)$ через $P(A|H_i)$ и $P(H_i)$, получаем:

$P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A|H_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(H_i|A) = \dfrac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} \Rightarrow$ [подставим вместо $P(A)$ $(*)$]

$\Rightarrow$ ф-ла Байеса ■

5) Вывести формулу Бернулли и следствия из неё. (Для вероятности числа успехов от k до m и для вероятности 0 успехов).

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдёт ровно k успехов, определяется формулой:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□ Пусть „У" – удача, „Н" – неудача

Результат каждого опыта: УНН…У, n букв „У" и „Н"

Ω состоит из 2^n исходов.

$\forall \omega$ можно поставить в соот-ии: $P(\omega) = P(УНН...У)$

В силу независимости испытаний, события У, Н, Н, … У – независ. в совокупности

=> по теор. об умножении вер-тей:

$P(\omega) = p^i q^{n-i}, \; i = \overline{0,n}$, для события A_k $(i = k)$:

$P(\omega) = p^k q^{n-k}$

Число таких исходов совпадает с C_n^k

Т.к. A_k – объединение всех указанных эл. исходов получаем:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \; ■$$

Следствия из формулы Бернулли:

1) Из того, что события A_k при разных k являются несовместными следует, что вероятность появления успеха (события А) в n испытаниях не менее k_1 раз и не более k_2 раз равна:

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$

В частном случае при $k_1 = 1$ и $k_2 = n$ из предыдущей формулы получаем формулу для вычисления вероятности хотя бы одного успеха в n испытаниях:

$$P\{k \ge 1\} = 1 - q^n$$

6) Условная вероятность. Теорема умножения. Независимые события.

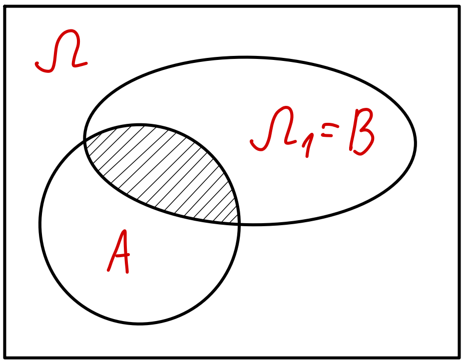
Условной вероятностью события A при условии (наступлении) события B называют отношение вероятности пересечения событий A и B к вероятности события B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

Условная вероятность $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности $P(A)$

Геометрическая интерпретация условной вероятности:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{S_{A\Omega}}{S_\Omega}, \quad P(A|B) = \frac{S_{AB}/\cancel{S_\Omega}}{S_B/\cancel{S_\Omega}} = \frac{S_{AB}}{S_B} = [\Omega_1 = B] = \frac{S_{A\Omega_1}}{S_{\Omega_1}}$$



Теорема умножения вероятностей:

Если $A = A_1 A_2, \ldots, A_n$ (т. е. A — пересечение n событий) и $P(A) > 0$, то справедливо равенство:

$$P(A) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

□ Т.к. $P(A_1 .. A_n) > 0 \Rightarrow P(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$

По опр. условной вер-ти: $P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1}) = \frac{P(A_1 \ldots A_n)}{P(A_1 \ldots A_{n-1})}$

$\Rightarrow P(A_1 \ldots A_n) = P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1}) P(A_1 \ldots A_{n-1})$

Аналогично находим $P(A_1 \ldots A_{n-1})$

$P(A_1 \ldots A_{n-1}) = P(A_{n-1}|A_1 \ldots A_{n-2}) P(A_1 \ldots A_{n-2})$

Тогда $P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1 \ldots A_{n-2}) P(A_{n-1}|A_1 \ldots A_{n-2}) P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})$

Продолжая, получим ф-лу умножения вер-тей ■

События A и B, имеющие ненулевую вероятность, называют независимыми, если:

$$\underbrace{P(A|B) = P(A)}_{(*)} \quad \text{или} \quad \underbrace{P(B|A) = P(B)}_{(*)}$$

7) Доказать критерий независимости двух случайных событий.

Теорема о независимости событий:
События A и B, имеющие ненулевую вероятность, являются независимыми тогда и только тогда, когда:

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (*)$$

□ =>: Пусть выполнено (*)

Из ф-лы умножения вер-тей для 2-х соб-й:
$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A)P(B).$

Аналогично для (*).

<=: Пусть выполнено (*) => из опр. усл. вер-ти:

$$\left.\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \\ P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \text{ и } B \text{ — независимы} \ \blacksquare$$

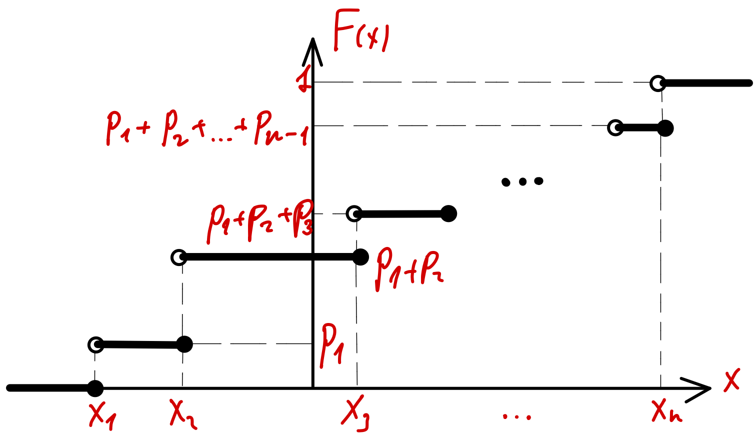
8) Сформулировать определение дискретной случайной величины, обосновать вид ее функции распределения.

Случайную величину ξ называют дискретной, если множество ее возможных значений конечно или счетно (ДСВ).

Случайная величина (СВ) — числовая величина, значение которой зависит от элементарного исхода в эксперименте.

Рядом распределения ДСВ ξ называют таблицу, состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в нижней — вероятности $p_n = P\{\xi = x_n\}, n = 1, 2 ..$ того, что случайная величина примет эти значения:

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...



Обоснование вида функции распределения ДСВ:

Пусть ξ — ДСВ, причём значения $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ расположены в порядке возрастания, тогда:

Для всех $x \le x_1$ событие $\{\xi < x\}$ – невозможное $\Rightarrow$ [из опр. о ф-ции распред. ξ] $\Rightarrow F(x) = 0$

Если $x_1 < x \le x_2 \Rightarrow$ событие $\{\xi < x\}$ состоит из тех эл. исх. ω для которых $\xi(\omega) = x_1 \Rightarrow F(x) = p_1$

Аналогично при $x_2 < x \le x_3$ событие $\{\xi < x\}$ состоит из эл. исх-в ω, для которых:

$\{\xi < x\} = \{\xi = x_1\} + \{\xi = x_2\} \Rightarrow F(x) = p_1 + p_2$

При $x > x_n$ событие $\{\xi < x\}$ достоверно и $F(x) = 1$

9) Функция распределения СВ и ее свойства.

Функцией распределения случайной величины ξ называют функцию F(x), значение которой в точке x равно вероятности события $\{\xi < x\}$, т.е. события состоящего из тех и только тех элементарных исходов ω, для которых $\xi(\omega) < x$:

$$F(x) = P\{\xi < x\}$$

Функция распределения удовлетворяет следующим свойствам:

1) $0 \le F(x) \le 1$
2) $F(x) \le F(y)$ при $x < y$, т.е. $F(x)$ – неубыв. ф-ия
3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4) $P\{x \le \xi < y\} = F(y) - F(x)$
5) $F(x) = F(x-0)$, где $F(x-0) = \lim\limits_{y \to x-0} F(y)$; $F(x)$ – непр. слева

□ Для доказательства будем использовать следствия из аксиом для определения вероятности события, так как значение функции распределения в любой точке x является вероятностью.

1) Из следствия (4) $[0 \le P(A) \le 1]$ => утв. 1
2) Если $x<y$, то $\{\xi < x\} \subset \{\xi < y\}$ => из след-я (3) $[P(A) \le P(B)$, если $A \subset B]$ => $P\{\xi<x\} \le P\{\xi<y\}$ => утв. 2.
3) Пусть $x_1 \dots x_n, \dots$ – $\forall$ возраст. посл-ть, которая $\to +\infty$. Событие $\{\xi < +\infty\}$ – достоверное и представляет собой объединение соб-й $\{\xi < x_n\}$ => [из акс. непр-ти] => 2-е равенство в утв. 3. 1-е – аналогично.
4) Событие $\{\xi < y\}$ при $x<y$ представ. собой объединение 2-х непересек. событий: $\{\xi < x\}$ и $\{x \le \xi < y\}$ => => [из акс. сложение] => утв. 4.
5) Пусть $x_1, \dots, x_n$ – $\forall$ возраст. посл-ть чисел $\to x$. Событие $\{\xi < x\}$ – объединение соб-й $\{\xi < x_n\}$ => [по акс. непр-ти] => утв. 5 ■

Если Δx - мало $\Rightarrow \Delta F(x) \approx dF(x) = F'(x)\Delta x = p(x)\Delta x$ - утв. 4.

5) Т.к. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(y)dy \Rightarrow F(x)$ - непр-я $\Rightarrow$ утв. 5.

(10) Ф-ия плотности вероятности и её св-ва.

Опр. Непрерывной наз. СВ X, ф-ию распред. кот. F(x):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)\,dy$$

Ф-ию $p(x)$ наз. плотностью распределения (вероятностей) СВ X.

Ф-ия распред. для непрерывной СВ явл. непрерывной на всей числовой оси и в точках непрер-ти распределения $p(x)$ имеет место равенство:

$$p(x) = F'(x)$$

Св-ва:

1) $p(x) \geq 0$

2) $P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$

4) $P\{x \leq X < x + \Delta x\} \approx p(x)\Delta x$ в точках непрер. ф-ции $p(x)$

5) $P\{X = x\} = 0$

□

1) Т.к. $p(x) = F'(x)$ и из св-ва ф-ции распр-я $[F(x_1) \leq F(x_2)$ при $x_1 < x_2]$ $\Rightarrow$ $F(x)$ – неуб $\Rightarrow$ $p(x)$ – неотр..

2) Из св-ва 4 распр. $[P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)] \Rightarrow$ по опр. непр-й СВ и св-ва адаптивности сход. НИ:

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx \Rightarrow \text{утв. 2}$$

3) При $x_1 = -\infty$, $x_2 = +\infty$ $\{x_1 \leq X < x_2\}$ – достов $\Rightarrow$ утв 3

4) Из св-ва 4 ф-ции распред: $P\{x \leq X \leq x + \Delta x\} = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x)$

if Δx – мало $\Rightarrow \Delta F(x) \approx dF(x) = F'(x)\Delta x = p(x)\Delta x$

5) Т.к. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)\,dy \Rightarrow F(x)$ – непр-я $\Rightarrow$ утв. 5 ▨

11) Дать определение биномиального закона распределения и закона распределения Пуассона. Установить связь между ними. (Биномиальный стремится к Пуассону при $n \to \infty$, $np \to \lambda$)

ДСВ называют биномиальной с параметрами $p \in (0, 1)$ и $n \in N$, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., n с вероятностями, заданными формулой:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p, \quad k = \overline{0, n}$$

или рядом распределения:

ξ	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

Говорят, что эта величина распределена по биномиальному закону или имеет биномиальное распределение.

ДСВ называют пуассоновской с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., n, ... с вероятностями заданным формулой:

$$P\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, \dots$$

или рядом рядом распределения:

ξ	0	1	2	$\dots$	n	$\dots$
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{2!} e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	$\dots$

Говорят, эта величина распределена по закону Пуассона.

Связь этих распределений:

Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, то:

$$P\{\xi = i\} \to \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, \dots$$

$\square$ $\lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$

$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \blacksquare$$

13) Плотность многомерного случайного вектора и ее свойства

Непрерывной двумерной случайной величиной (X, У) называют такую двумерную СВ, совместную функцию распределения которой $F(x_1, x_2) = P\{X < x_1, Y < x_2\}$ можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла:

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p(y_1, y_2)\,dy_1\,dy_2$$

Функцию $p(x_1, x_2) = p_{XY}(x_1, x_2)$ называют совместной двумерной плотностью распределения случайных величин X и У или плотностью распределения случайного вектора (X, У)

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} dy_1 \int_{-\infty}^{x_2} p(y_1, y_2)\,dy_2 = \int_{-\infty}^{x_2} dy_2 \int_{-\infty}^{x_1} p(y_1, y_2)\,dy_1$$

$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Аналогичный смысл имеет совместная n-мерная плотность распределения СВ $X_1, \ldots, X_n$ или плотность распределения случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$

Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

1) $p(x_1, x_2) \geq 0$

2) $P\{a_1 < X < b_1,\ a_2 < Y < b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} p(x_1, x_2)\,dx_2$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1$

4) $P\{x_1 < X < x_1 + \Delta x,\ x_2 < Y < x_2 + \Delta x\} \approx p(x_1, x_2)\Delta x_1 \Delta x_2$

5) $P\{X = x_1,\ Y = x_2\} = 0$

6) $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D p(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$

7) $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y)\,dy$

8) $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y)\,dx$

□ Св-ва 1-5 аналогичны св-м одномерной пл-ти (вопрос 10)

12) Случайные векторы. Функция распределения случайного вектора и ее свойства

Совокупность случайных величин $X_1 = X_1(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega)$ заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ называют многомерной СВ или n-мерным случайным вектором. При этом сами СВ называют координатами случайного вектора.

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) = \vec{X} \text{ — n-мерный случ. в-р.}$$

Функция распределения

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

(n-мерного) случайного вектора $(X_1, \dots X_n)$ называют функцию, значение которой в точке $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ равно вероятности совместного осуществления (пересечения) событий $\{X_1 < x_1\}, \dots, \{X_n < x_n\}$ т.е.

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\}$$

Эту функцию распределения также называют совместной (n-мерной) функции распределения СВ $X_1, \dots, X_n$

Функция распределения случайного вектора обладает следующими свойствами:

1) $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$

2) $F(x_1, x_2)$ – неубыв. ф-ия по каждому из арг-в x_1 и x_2

3) $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$

4) $F(+\infty, +\infty) = 1$

5) $P\{a \le X_1 < b, c \le X_2 < d\} = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$

6) $F(x_1, x_2)$ – непр-я слева в $\forall$ т-ке $(x_1, x_2) \in R^2$ по каждому из арг-в x_1 и x_2 ф-ия

7) $F_{X_1, X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x)$, $F_{X_1, X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x)$

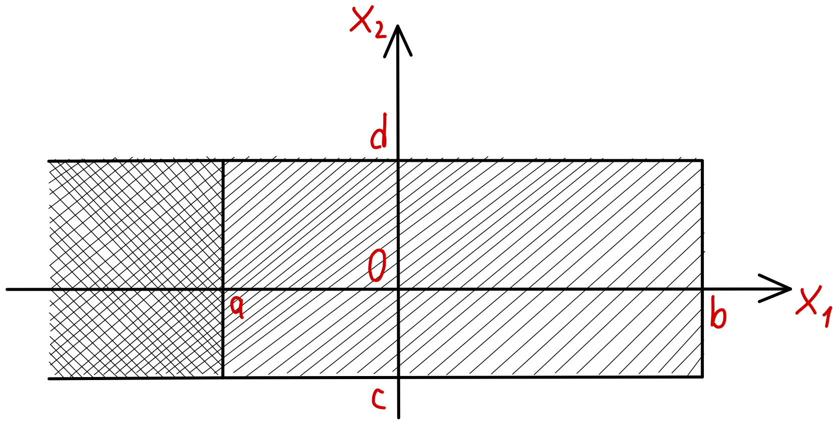
□ Утв-е 1, 2 доказываются как и св-ва 1, 2 ф-ии распределения СВ (вопрос 9)

3) События $\{X_1 < -\infty\}$ и $\{X_2 < -\infty\}$ – невозможные и их пересеч. – также невозм. событие, вероятность которого

$= 0 \Rightarrow$ с учетом опр. ф-ии расп-я случ. в-ра вытекает утв. 3.

4) Аналогично из того, что соб-я $\{X_1 < +\infty\}$ и $\{X_2 < +\infty\}$ и их пересеч. являются достоверными, т.е. их вер-ть $= 1 \Rightarrow$ утв. 4

5)



Чтобы найти вер-ть попадание случ. велич. (X_1, X_2) в прямоугольник $\{a \le x_1 < b,\ c \le x_2 < d\}$, сначала определим вер-ть попадание в полуполосу $\{x_1 < a,\ c \le x_2 < d\}$

Но эта вер-ть представ. собой вер-ть попадание в квадрант $\{x_1 < a,\ x_2 < d\}$ за вычетом вер-ти попадание в квадрант $\{x_1 < a,\ x_2 < c\}$, т.е.:

$P\{X_1 < a,\ c \le X_2 < d\} = F(a, d) - F(a, c)$

Аналогично: $P\{X_1 < b,\ c \le X_2 < d\} = F(b, d) - F(b, c)$

Осталось заметить, что вер-ть попадание в $\{a \le x_1 < b,\ c \le x_2 < d\}$ совпадает с вер-тью попадания в $\{X_1 < b,\ c < X_2 \le d\}$ с вычетом вер-ть поп-е в $\{X_1 < a,\ c \le X_2 < d\} \Rightarrow$ утв. 5

6) Утв 6 доказывается как и св-во 5 ф-ии расп-е СВ

7) Соб-е $\{X_2 < +\infty\}$ - достоверно $\Rightarrow \{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < +\infty\} = \{X_1 < x_1\}$

Аналогично $\{X_1 < +\infty\} \cap \{X_2 < x_2\} = \{X_2 < x_2\} \Rightarrow$ утв. 7. ■

13) Плотность многомерного случайного вектора и ее свойства

Непрерывной двумерной случайной величиной (X, У) называют такую двумерную СВ, совместную функцию распределения которой $F(x_1,x_2)=P\{X<x_1,\ Y<x_2\}$ можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла:

$$F(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}p(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2$$

Функцию $p(x_1,x_2)=p_{XY}(x_1,x_2)$ называют совместной двумерной плотностью распределения случайных величин X и У или плотностью распределения случайного вектора (X, У)

$$F(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}dy_1\int_{-\infty}^{x_2}p(y_1,y_2)\,dy_2=\int_{-\infty}^{x_2}dy_2\int_{-\infty}^{x_1}p(y_1,y_2)\,dy_1$$

$$p(x_1,x_2)=\frac{\partial^2F(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2F(x_1,x_2)}{\partial x_2\,\partial x_1}$$

Аналогичный смысл имеет совместная n-мерная плотность распределения СВ $X_1,\dots,X_n$ или плотность распределения случайного вектора $(X_1,\dots,X_n)$

Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

1) $p(x_1,x_2)\geq 0$

2) $P\{a_1<X<b_1,\ a_2<Y<b_2\}=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}p(x_1,x_2)\,dx_2$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=1$

4) $P\{x_1<X<x_1+\Delta x,\ x_2<Y<x_2+\Delta x\}\approx p(x_1,x_2)\Delta x_1\Delta x_2$

5) $P\{X=x_1,\ Y=x_2\}=0$

6) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D p(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$

7) $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{X,Y}(x,y)\,dy$

8) $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{X,Y}(x,y)\,dx$

□ Св-ва 1-5 аналогичны св-м одномерной пл-ти (вопрос 10)

Св-во 6 является обобщением св-ва 2

Из св-ва 7 двумерной ф-ии распр-я и определения двумерной пл-ти вытекает:

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2$$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2$$

Из этого, диффер-я инт-лы по перемен. верхнему пределу и учитывая ф-лу $[p(x) = F'(x)]$ получаем утв 7, 8 ■

$\boxed{14}$ Функциональное преобразование СВ. Определение закона распределения ф-ции по известному з-ну распределения аргумента. Рассмотреть частный случай: $X_2 = \varphi(X_1)$, φ — монотонная ф-ция.

Пусть ф-ция $Y = Y(X)$ от непрер. СВ X мб как непрерывной, так и дискретной.

$$F_Y(y) = P\{Y(X(\omega)) < y\} = \sum_k \underbrace{P\{X(\omega_k) \in \Delta_k\}}_{= \int\limits_{\Delta k} p_x(x)\,dx} = \sum_k \int\limits_{\Delta k} p_x(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Delta} p_x(x)\,dx \quad \text{где } \Delta = \bigcup_k \Delta k$$

сумма мб Δ

$$\Rightarrow F_Y(y) = \int\limits_{Y(x)<y} p_x(x)\,dx$$

if $Y(x)$ — монотонная или кусочно-монотонная:

$$\Psi(y) = Y^{-1}(y)$$

if $Y(x) \nearrow \Rightarrow \{Y(X(\omega)) < y\} \sim \{X(\omega) < \Psi(y)\}$

if $Y(x) \searrow \Rightarrow \{Y(X(\omega)) < y\} \sim \{X(\omega) > \Psi(y)\}$

Т. о. для возраст. ф-ции: $P\{Y(X) < y\} = P\{X < \Psi(y)\}$

для убывающей: $P\{Y(X) < y\} = P\{X > \Psi(y)\}$

Т.к. $F_Y(x) = P\{Y < y\}$ — из опр., а $P\{X < \Psi(y)\} = F_X(\Psi(y))$,

$P\{X > \Psi(y)\} = 1 - F_X(\Psi(y)) \Rightarrow \begin{cases} F_Y(y) = F_X(\Psi(y)), & Y(x) \nearrow \\ F_Y(y) = 1 - F_X(\Psi(y)), & Y(x) \searrow \end{cases}$

15) Вывод формулы для композиции законов распределения.

Если X_1, X_2 - независ. СВ, т.е.: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$, $Y = X_1 + X_2 \Rightarrow Y = Y(X_1, X_2)$, где: $Y(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Из ф-мы ф-ии распр-я двумерной СВ:

$$F_Y(y) = \iint\limits_{x_1+x_2<y} p_{X_1 X_2}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \iint\limits_{x_1+x_2<y} p_{X_1}(x_1)\, p_{X_2}(x_2)\,dx_1 dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1}(x_1)\,dx_1 \int\limits_{-\infty}^{y-x_1} p_{X_2}(x_2)\,dx_2$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{X_2}(y-x_1)\, p_{X_1}(x_1)\,dx_1$$ - дифф-ем по „y" под „$\int$" и $x = x_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{X_2}(y-x)\, p_{X_1}(x)\,dx = p_{X_2} p_{X_1}$$

В данном случае говорят, что плотность распределения $p_Y(y)$ случайной величины У является свёрткой (композицией) плотностей распределения $p_{X_1}(x_1), p_{X_2}(x_2)$ или что закон распределения суммы двух независимых СВ является свёрткой (композицией) законов распределения слагаемых.

16) Числовые характеристики случайного вектора.

Математическим ожиданием (средним значением) MX дискретной СВ X называют сумму произведений значений x_i случайной величины и вероятностей $p_i = P\{X = x_i\}$, с которыми СВ принимает эти значения.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty \text{ – сх-ся абсолютно}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF_X(x); \quad MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$$

Дисперсия DX СВ X— это математическое ожидание квадрата отклонения СВ X от среднего значения, т.е. :

$$DX = M(X - MX)^2 \qquad DX = M(X^2) - (MX)^2$$

Для дискретной СВ:

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i$$

Для непрерывной СВ:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 p(x)\, dx$$

Ковариация $cov(X_1, X_2)$ СВ X_1, X_2 — это математическое ожидание произведения СВ $\overset{\circ}{X}_1 = X_1 - MX_1$ и $\overset{\circ}{X}_2 = X_2 - MX_2$:

$$cov(X_1, X_2) = M(\overset{\circ}{X}_1 \cdot \overset{\circ}{X}_2) = M((X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2))$$

Для дискретных СВ:

$$cov(X_1, X_2) = \sum_{i,j} (x_i - MX_1)(y_j - MX_2) p_{ij}$$

Для непрерывных СВ:

$$cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX_1)(y - MX_2)\, p_{X_1, X_2}(x, y)\, dx\, dy$$

Начальным моментом k-го порядка m_k СВ X называют математическое ожидание k-й степени СВ.

Для дискретной СВ:

$$m_k = MX^k = \sum_i x_i^k p_i$$

Для непрерывной СВ:

$$m_k = MX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)\, dx$$

Центральным моментом k-го порядка $\overset{\circ}{m}_k$ СВ X называют математическое ожидание k-й степени СВ $\overset{\circ}{X} = X - MX$:

Для дискретной СВ:

$$\overset{\circ}{m}_k = M(X - MX)^k = \sum_i (x_i - MX)^k p_i$$

Для непрерывной СВ:

$$\overset{\circ}{m}_k = M(X - MX)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^k p(x)\, dx$$

17 Коэф. корреляции и его св-ва.

$$\rho = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX\,DY}} \qquad DX > 0, \; DY > 0$$

1. $\rho(X, X) = 1$
2. if X, Y – н/з $\Rightarrow \rho(X, Y) = 0$
3. $\rho(a_1 X_1 + b_1, a_2 X_2 + b_2) = \pm \rho(X_1 X_2)$

   if знаки a_1 и a_2 – совпали, то $\oplus$ else $\ominus$.
4. $-1 \le \rho(XY) \le 1$
5. $|\rho(X, Y)| = 1$ if X, Y – ЛЗ (лин. завис)

□

1. т.к $cov(X, X) = DX$.
2. т.к X, Y – н/з $\to cov(X, Y) = 0$
3. $cov(a_1 X_1 + b_1, a_2 X_2 + b_2) = M[(a_1 X_1 + \cancel{b_1} - a_1 MX_1 - \cancel{b_1})(a_2 X_2 + \cancel{b_2} - a_2 MX_2 - \cancel{b_2})] = a_1 a_2 M[(X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)]$
4. т.к. $-\sqrt{DXDY} \le cov(X, Y) \le \sqrt{DXDY}$
5. т.к. $|cov(X, Y)| = \sqrt{DXDY}$, if X, Y – лин. зав. ■

(*)

Св-ва ковариации:

1. $cov(X, X) = DX$
2. $cov(X_1 X_2) = 0$ if $X_1 X_2$ – н/з
3. $cov(Y_1, Y_2) = a_1 a_2 cov(X_1 X_2)$

   if $Y_1 = a_1 X_1 + b_1$

   $Y_2 = a_2 X_2 + b_2$
4. $-\sqrt{DX_1 DX_2} \le cov(X_1 X_2) \le \sqrt{DX_1 DX_2}$
5. $|cov(X_1 X_2)| = \sqrt{DX_1 DX_2}$
6. $cov(X_1 X_2) = M(X_1 X_2) - MX_1 MX_2$

□

1. $cov(X, X) = M(X - MX)^2$
2. if $X_1 X_2$ – н/з $\Rightarrow cov(X_1 X_2) = M((X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)) = (M(X_1 - MX_1))(M(X_2 - MX_2)) \Rightarrow$ утв 2
3. см. п.3↑. ■
4.

18 Условные законы распределения. Вывести выражение для усл. плотности $f(Y|X)$

$$\Pi_{ij} = P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{Y_j}}$$

$p_{Y_j} = \sum_i p_{ij}$

$p_{X_i} = \sum_j p_{ij}$

$p_{ij} = \Pi_{ij} \cdot p_{Y_j}$

Табл. распред:

X \ Y	y_1	...	y_m	p_X
x_1	Π_{11}	Π_{12}...	Π_{1m}	p_{X_1}
...	...	...	...	...
x_n	Π_{n1}	...	Π_{nm}	p_{X_n}
p_Y	p_{Y_1}	...	p_{Y_m}	

Усл. ф-ция распр. СВ X (не дискр):

$$F_X(x \mid Y=y) = \frac{P\{X<x, Y=y\}}{P\{Y=y\}}$$

$$p_X(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}$$

– усл. законы распред.

☐ Вывод выраж. для усл. плот.:

$$P\{X<x \mid y \le Y \le y+\Delta y\} = \frac{P\{X<x, y \le Y < y+\Delta y\}}{P\{y \le Y < y+\Delta y\}} = \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{F_Y(y+\Delta y) - F_Y(y)} =$$

$$= \frac{\int_y^{y+\Delta y} dv \int_{-\infty}^{x} p(u,v)\,du}{\int_y^{y+\Delta y} p_Y(v)\,dv} = |\text{т. о среднем}| = \frac{\Delta y \int_{-\infty}^{x} p(u,\xi)\,du}{\Delta y \; p_Y(\eta)}$$, где $y<\xi$ и $\eta<y+\Delta y$

$$\Rightarrow \boxed{F_X(x \mid Y=y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} p(u,y)\,du}{p_Y(y)}}$$

$\xRightarrow{\text{аналог}}$ $F_Y(y \mid X=x) = \frac{1}{p_X(x)} \int_{-\infty}^{y} p(x,v)\,dv$

■

19) Математическое ожидание и его свойства.

Математическим ожиданием (средним значением) MX дискретной СВ X называют сумму произведений значений x_i случайной величины и вероятностей $p_i = P\{X_i = x_i\}$, с которыми СВ принимает эти значения.

$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty$ – сх-ся абсолютно | $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF_X(x)$; $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$

Математическое ожидание удовлетворяет следующим **свойствам**:

1) Если СВ X принимает всего 1 знач. „С" с вер-тью 1, то: $MC = C$
2) $M(aX+b) = aMX + b$, где $a, b = const$
3) $M(X_1+X_2) = MX_1 + MX_2$
4) $M(X_1X_2) = MX_1 \cdot MX_2$ – для независ. СВ X_1 и X_2

□ 1) Если X принимает только 1 знач. с вер-тью 1, то:
$MC = C \cdot 1 = C$

2) Найдем MY СВ $Y = aX + b$ $(Y(x) = ax + b)$:

$$MY = M(aX+b) = \int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b)p_X(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx =$$

$= aMX + b \cdot 1 \Rightarrow$ утв. 2.

3) Пусть $Y = X_1 + X_2$ $(Y(x_1, x_2) = x_1 + x_2) \Rightarrow MY = M(X_1 + X_2) =$

$$= \sum_{i,j}(x_i + y_j)p_{ij} = \sum_{i,j} x_i p_{ij} + \sum_{i,j} y_j p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_i x_i p_{X_1 i} +$$

$+ \sum_j y_j p_{X_2 j} = MX_1 + MX_2 \Rightarrow$ утв. 3.

4) Если X_1 и X_2 – независ. СВ, то для мат. ожидания их произвед. $Y = X_1X_2$ (из ф-лы мат. ожид. 2-мерной СВ и из теор. о независ-ти непр. СВ):

$$MY = M(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 p_{X_1}(x_1)dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2 p_{X_2}(x_2)dx_2\right) = MX_1 MX_2 \ ■$$

20 Сформулировать ЗБЧ. Д-ть теорему Чебышева.

Опр Послед-ть $X_1 \dots X_n$ удовлетворяет ЗБЧ (слабому), if: (при $\forall \varepsilon > 0$:)

$$P\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i \right| \geq \varepsilon \right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

#

Т if послед-ть $X_1 \dots X_n \dots$ н/з СВ такова, что $\exists\, MX_i = m_i$ и $DX_i = \sigma_i^2$, причем $(\sigma_i^2 \leq C < +\infty)$, то для $\forall$ посл-ти $X_1 \dots X_n \dots$ выполнен ЗБЧ. (При этом говорят также, что к пос-ти применим ЗБЧ Чеб)

□ из II нер-ва Чеб.

$$M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i \; ; \; D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \leq \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n}$$

$\Rightarrow$ |II нер-во Чеб| $\Rightarrow$ $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\to$ для $\forall \varepsilon > 0$: $P\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ ■

Виды сх-ти;

$P(A) = 1 \quad A = \lim X_n = X$

1. „Почти наверное" $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{п.н.}} X$ if ~~$\forall \varepsilon > 0$ $P\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$~~

2. „По вероятности" $\lim\limits_{n \to \infty} P\{|X_n - X| \leq \varepsilon\} = 1$; $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} X$

3. „В среднем квадр." $\lim\limits_{n \to \infty} MX_n^2 = MX^2$ $\quad X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{с.к.}} X$

4. „Слабая сх-ть" if $\lim F_n(x) = F(x)$

$$F_n(x) \underset{n \to \infty}{\Rightarrow} F(x)$$

21 Д-ть теор. Бернулли.

$\exists$ проводится n испытаний по схеме Бернулли и Y_n — общее число успехов в n испытаниях. Тогда наблюденная частота успехов:

$$r_n = \frac{Y_n}{n} \qquad P\{|r_n - p| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\square$ $\exists$ X_i — число успехов в i-м испытании Бернулли

$$\Rightarrow r_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{причем} \quad MX_i = p \quad DX_i = pq$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{if} \quad m_i = m \quad \sigma_i^2 = \sigma \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} m \\ \text{следствие Чебышева} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} m = p$$

$\blacksquare$

22 Сформулировать центр. пред. теор. и вывести теор. Муавра-Лапласа.

(Т) Центральная предельная теорема:

$\exists$ $X_1 \dots X_n$ — послед-ть н/з ~~свободных~~ одинаково распрост. СВ $MX_n = m$ $DX_n = \sigma^2$:

$$P\left\{\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$$

(Т) Интегральная теор. Муавра-Лапласа:

S_n - суммарное число успехов. в n испыт. по схеме Бернулли с вероят. успеха p и неудачи $q = 1-p$ $\Rightarrow$

$$P\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$$

$\square$ $\exists$ X_i — число успехов в i-ом испыт. $\Rightarrow MX_i = p \quad DX_i = pq$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \Rightarrow P\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$$

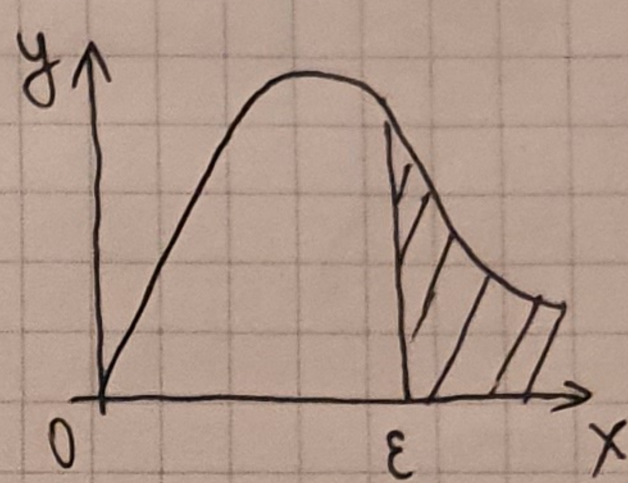
$\blacksquare$

23 Нер-ва I и II Чебышева и сформулировать СБЧ в форме Чебышева.

I $\boxed{P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}}$ для $\forall$ неотр. СВ X, имеющей мат. ожид. при $\forall \varepsilon > 0$

□ $MX = \int_0^{+\infty} x\, p(x)\, dx \Rightarrow MX = \int_0^{\varepsilon} x\, p(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, p(x)\, dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$

$\rightarrow |x \leftrightarrow \varepsilon| \rightarrow \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, p(x)\, dx \geq \varepsilon \underbrace{\int_{\varepsilon}^{+\infty} p(x)\, dx}_{(*)}$



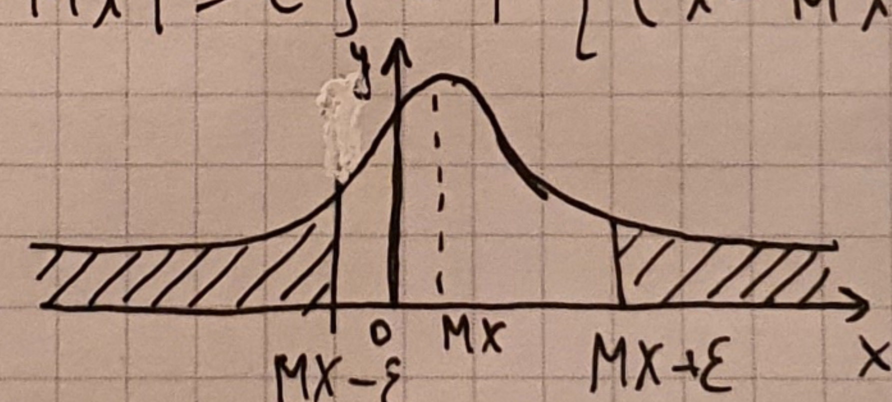
Заметим, что (*) представляет собой $X \geq \varepsilon \Rightarrow$
$MX \geq \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}$ ■

II $\boxed{P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$ для $\forall$ СВ X, имеющ. $DX = \sigma^2$ при $\forall \varepsilon > 0$

□ $Y = (X - MX)^2$

$\rightarrow |I \text{ нер-во Чеб}| \rightarrow P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} = P\{(X - MX)^2 \geq \varepsilon^2\} = P\{Y \geq \varepsilon^2\} \leq$

$\leq \frac{MY}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ ■



T if $X_1 \dots X_n \dots$ — н/з СВ такова, что $\exists\, MX_i = m_i$ и $DX_i = \sigma_i^2$, причём $\sigma_i^2 \leq C < +\infty$, то для послед.-ты $X_1 \dots X_n \dots$ выполнен ЗБЧ.

При этом говорят также, что к посл-ти $X_1 \dots X_n \dots$ применим ЗБЧ Чебышева.

24 Выборочная и эмпирическая ф-ия распределения

$$\boxed{\hat{F}(x, \bar{X}_n) = \frac{n(x, X_n)}{n}}$$

n - объём случайной выборки

- выборочная ф-ция распределения

Её можно записать иначе. Эмпирической ф-ей распределения наз. скалярную ф-цию $F_n(x)$, которая определена для $\forall x \in \mathbb{R}$:

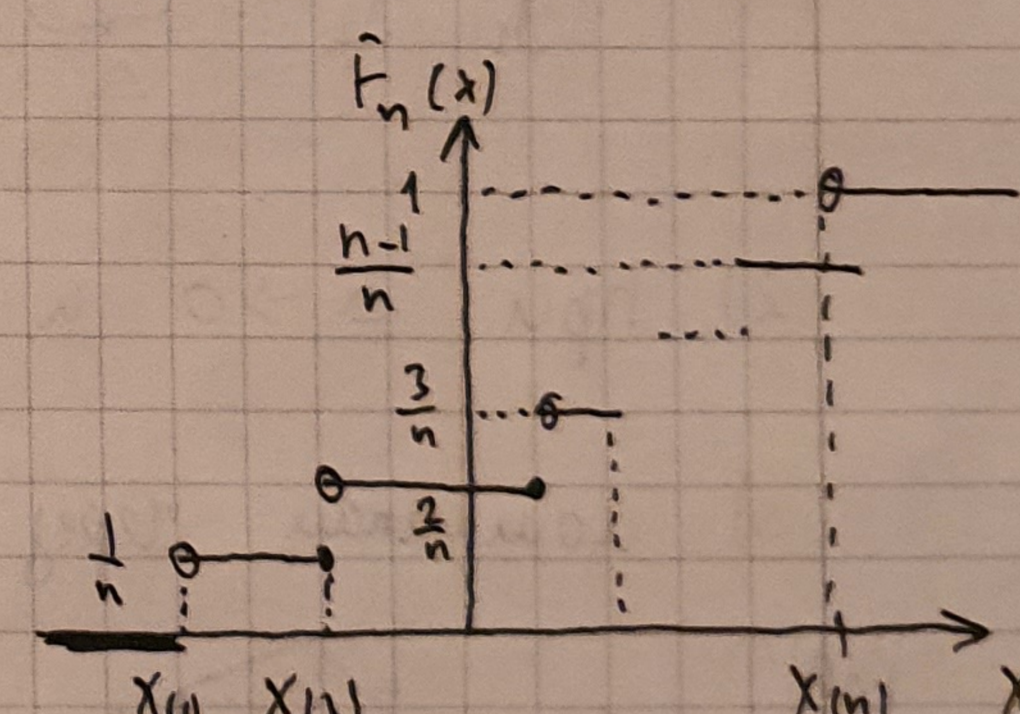
$$\boxed{F_n(x) = \frac{n(x)}{n}}$$

$F_n(x)$ обладает всеми св-вами ф-ции распределения. При этом она кусочно-постоянная и изм. скачками в каждой точке $x_{(i)}$

1. $0 \le F_n(x) \le 1$
2. $F_n(x) \le F_n(y)$ при $x < y$, т.е. $F_n(x)$ – неуб.
3. $F_n(-\infty) = \lim\limits_{n \to -\infty} F_n(x) = 0$ $\quad F_n(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = 1$
4. $P\{x \le \xi < y\} = F_n(y) - F_n(x)$
5. $F_n(x) = F_n(x-0)$ $\quad F_n(x-0) = \lim\limits_{y \to x-0} F_n(y)$ $\quad F_n(y)$ – непр. слева

if все выборочные $X_1 \dots X_n$ различны, то:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_{(1)} \\ \frac{i}{n}, & x_{(i)} < x \le x_{(i+1)} \quad i = \overline{1, n-1} \\ 1, & x > x_{(n)} \end{cases}$$



Кроме того, при фиксированном x выборочная ф-ия распред. $\hat{F}_n(x)$ явл. частотой $\frac{\nu_n}{n}$, для кот: $M\left(\frac{\nu_n}{n}\right) = p = F(x)$

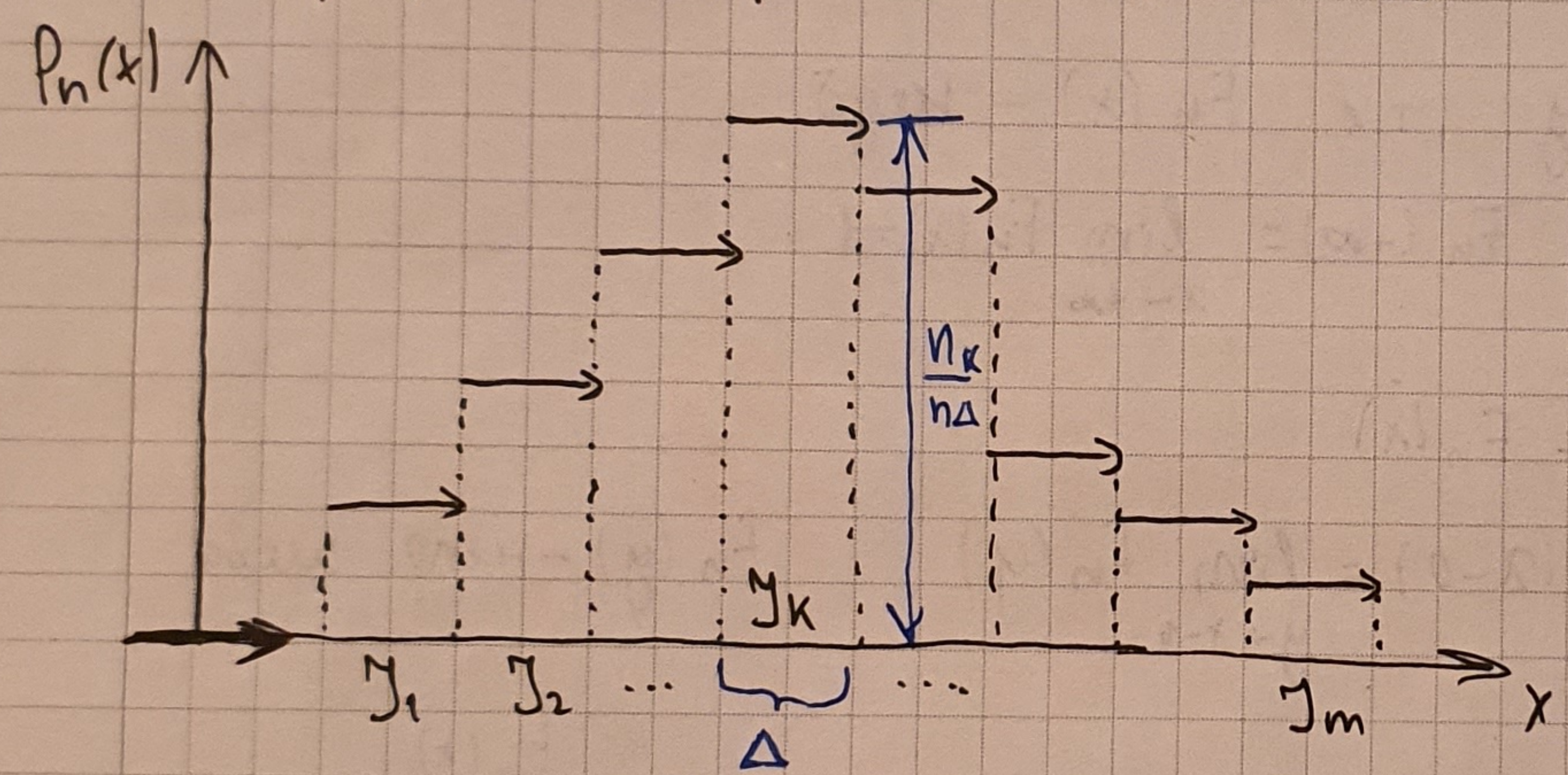
25 Эмпирическая плотность распределения и её св-ва.

Эмпирической плотностью распределения, соответствующей реализации $\overline{x}_n$ случ. выборки $\overline{X}_n$ из генеральной совокупности X, наз ф-цию $p_n(x)$ кот. во всех точках интервала J_i, $i=\overline{1,m}$ принимает значение $\frac{n_i}{n\Delta}$, а вне — 0.

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta} & x \in J_i \\ 0 & x \notin J \end{cases}$$

Св-ва:

1) График эмпирической плотности наз. гистограммой

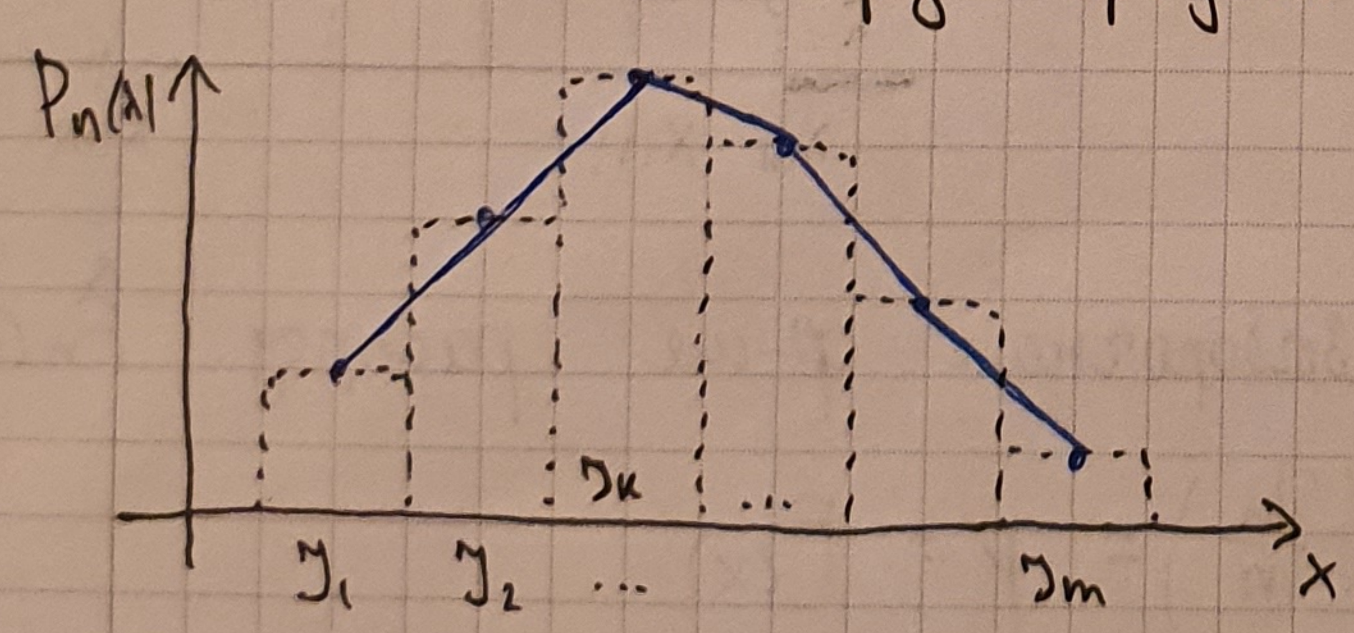


$\frac{n_i}{n\Delta}$ — высота

Δ — ширина

2) при $\Delta \to 0$ и $n \to \infty$ $p_n(x) \approx p(x)$

3) ломаная через середины столбцов диаграмм — полигон частот.



26 Оценка параметров распределения. Точечные оценки. Требования, предъявляемые к точечным оценкам.

Оценка параметров бывает: точечной и интервальной.

Точечной оценкой $\theta \in \Theta$ наз. $\forall$ ф-цию от наблюдения $\hat{\theta}(\overline{X_n})$

Оценку $\hat{\theta}(\overline{X_n})$ параметра $\theta \in \Theta$ наз. состоятельной, if с ростом объёма выборки n она сх по вероят-ти к оцениваемому параметру θ:

$$\hat{\theta}(\overline{X_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$$

$\hat{\theta}(\overline{X_n})$ парам. $\theta \in \Theta$ наз. несмещенной, if мат. ожид. $M\,\hat{\theta}(\overline{X_n}) = \theta$ для $\forall n$

Требования:

1) Состоятельность
2) Несмещенность
3) Эффективность

Опр. if в некот. классе несмещенных оценок θ, имеющих конеч. диспер., $\exists\ \hat{\theta}(\overline{X})$, что $D\,\hat{\theta}(\overline{X_n}) \le D\,\tilde{\theta}(\overline{X_n})$ выполняется для всех оценок $\tilde{\theta}(\overline{X_n})$ из этого класса, то говорят, что оценка $\hat{\theta}(\overline{X_n})$ явл. эффективной в данном классе.

27 Показать, что $\bar{X}$ явл. несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой в класса линейных оценок.

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $\qquad \theta = MX = \mu$

$\tilde{\theta}(\bar{X}_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ $\qquad$ где $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Оценка $\bar{X}$ мат. ожид. θ генеральной совокуп. X с конечной дисперсией явл. несмещ., состоятельной и эффективной в классе всех лин. оценок

$\square$

1) X_i случайной выборки $\bar{X}_n$ явл. н/з СВ и распредел. также как и сама генеральная совокупность. X.

$\Rightarrow MX_i = MX = \mu$ и $DX_i = DX = \sigma^2$ $\qquad i = \overline{1,n}$

$$M\bar{X} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n} n\mu = \mu \Rightarrow \text{несмещ.}$$

2) т.к. $X_1 \dots X_n$ - состоит из н/з один. распр. СВ с конеч. диспер.

$\Rightarrow$ [ЗБЧ в форме Чебышева] для $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\} \to 1, \quad n \to \infty, \quad \text{т.е.} \left(\bar{X} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu\right) \Rightarrow \text{состоят.}$$

3) $$D\tilde{\theta}(\bar{X}_n) = D\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^{n} D(\lambda_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 DX_i = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

достиг min при $\lambda = \frac{1}{n}$, т.е. when $\tilde{\theta}(\bar{X}_n) = \bar{X} \Rightarrow$ эффект.

Для отыскания условного min ф-ции:

$$g(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \quad \text{при огр.} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$\Rightarrow$ сост. ф-ю Лагранжа: $\quad L(\lambda_1 \dots \lambda_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{решив сис-му:} \quad \begin{matrix} \lambda = -2/n \\ \lambda_i = 1/n \end{matrix} \Rightarrow g(\lambda_1 \dots \lambda_n) \text{ имеет усл. min}$$

$\blacksquare$

28 Д-ть, что $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ явл. смещённой оценкой дисперсии.

if $\bar{X}_n$ – случайная выборка из генеральной совокупности X с конечной дисперсией σ^2, то выборочная дисп. $\hat{\sigma}^2(\bar{X}_n)$ – смещ. сост. оценка σ^2

□ $\hat{\sigma}^2(\bar{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\mu)-(\bar{x}-\mu)\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-$

$-2(\bar{x}-\mu)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2-2(\bar{x}-\mu)^2+\frac{1}{n}n(\bar{x}-\mu)^2=$

$=\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2-(\bar{x}-\mu)^2$

из св-в мат. ожидания:

$M\hat{\sigma}^2(\bar{X}_n)=\frac{1}{n}M\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-M(\bar{x}-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i-\mu)^2-M(\bar{x}-\mu)^2=$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}DX_i-DX=\frac{1}{n}n\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2\Rightarrow\hat{\sigma}^2(\bar{X}_n)$ – смещ. оценка для дисперсии ■

29 Метод максимального правдоподобия

$$L(X_1\ldots X_n;\bar{\Theta})=\prod_{i=1}^{n}p(X_i,\Theta)$$

Оценкой макс. правдоподобия Θ наз $\hat{\bar{\Theta}}(\bar{X}_n)$: $L(\bar{X}_n,\hat{\bar{\Theta}})=\max\limits_{\bar{\Theta}\in\Theta}L(\bar{X}_n\bar{\Theta})$

if ф-ция $L(\bar{X}_n,\hat{\bar{\Theta}}_n)$ дифф-ма как ф-ция арг-та $\bar{\Theta}$ при $\forall\bar{x}_n$ из множ-ва X_n знач. случайной выборки $\bar{X}_n$ и максимум $L(\bar{x}_n\bar{\Theta})$ достигается в о внут. точке из Θ, то значение точечной оценки максимального правдоподобия в случае скалярного парам-ра удовл. ур-ю:

$$\boxed{\frac{\partial L(\bar{X}_n\ \Theta)}{\partial\Theta}=0}\quad\text{или}\quad\boxed{\frac{\partial\ln L(\bar{X}_n\ \Theta)}{\partial\Theta}=0}\quad\left(\frac{\partial\ln L(\bar{X}_n\ \Theta)}{\partial\Theta_k}=0\quad k=\overline{1,r}\right)$$

ур-я правдоподобия

30 Найти методом максимального правдоподобия оценку парам-ров нормального распределения

Для общей нормальной модели $N(\theta_1, \theta_2^2)$ методом макс. правд. найдем оценку вектора $\bar{\theta} = (\theta_1; \theta_2)$

$$L(\bar{X}_n; \theta_1 \theta_2) = \frac{1}{(\theta_2 \sqrt{2\pi})^n} \exp\left[-\frac{1}{2\theta_2^2} \sum (X_i - \theta_1)^2\right]$$

$$\Rightarrow \ln L(\bar{X}_n; \theta_1 \theta_2) = -n \ln \sqrt{2\pi} - n \ln \theta_2 - \frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1)^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = \frac{-n}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$ – выборочное среднее

$$S^2(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$ – выборочная дисперсия.

31 Найти методом максимального правдоподобия оценку параметра экспоненц. распред.

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$ λ – неизв. парам.

Используя ММП найдем точечную оценку для λ.

$$L(x_1 \ldots x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda \cdot e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \exp\left[-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right]$$

$$\ln L(x_1 \ldots x_n; \lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1 \ldots x_n; \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \rightarrow \hat{\lambda} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1}$$

Точечная оценка: $\hat{\lambda}(\bar{X}_n) = \frac{1}{\bar{X}}$

32. Найти методом максимального правдоподобия оценку параметра биномиального распределения. $\theta = p$

$$L(k, p) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} \;\rightarrow\; \ln L(k,p) = \ln C_n^k + k \ln p + (n-k)\ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln(k,p)}{\partial p} = \frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} = 0$$

$\Rightarrow \hat{p} = \frac{k}{n}$ – т-ка $\max L(k,p)$, т.е. Оценка макс. правд. в-ти p совпадает с относит. частотой успеха в n испытаниях.

33. Определение ДИ. Его вероятностный смысл.

$$\boxed{P\{\underline{\theta}(\bar{X}_n) < \theta < \bar{\theta}(\bar{X}_n)\} = \gamma}$$

Интервал $(\underline{\theta}(\bar{X}_n), \bar{\theta}(\bar{X}_n))$ – наз. <u>интервальной оценкой</u> для парам. θ с коэф. доверия γ.

Интервальная оценка с заданной $\overset{\text{вер-тью}}{\gamma}$ накрывает неизвестное истинное значение парам. θ.

$\boxed{l(\bar{X}_n) = \bar{\theta}(\bar{X}_n) - \underline{\theta}(\bar{X}_n)}$ – <u>длина интервала</u>

Иногда удается обеспечить лишь неравенство:

$$P\{\underline{\theta}(\bar{X}_n) < \theta < \bar{\theta}(\bar{X}_n)\} \geq \gamma$$

$$\boxed{\begin{aligned} &P\{\underline{\theta}(\bar{X}_n) < \theta\} = \gamma \\ &P\{\theta < \bar{\theta}(\bar{X}_n)\} = \gamma \end{aligned}}$$ односторонние

34. Построить ДИ для мат ожидания норм. распред. СВ при изв. с.к.о.

$$T(\bar{X}_n, \mu) = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \qquad \mu = 0 \quad \sigma^2 = 1 \;\Rightarrow\; T(\bar{X}_n, \mu) \downarrow \text{ по } \mu$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \underline{\mu}(\bar{X}_n))}{\sigma} = u_{1-\beta} \\ \dfrac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \bar{\mu}(\bar{X}_n))}{\sigma} = u_{\alpha} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ [т.к. для норм распред. $u_{1-\alpha} = -u_{\alpha}$ $\Rightarrow$ при $\gamma = 1 - \alpha - \beta$] $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\mu}(\bar{X}_n) &= \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\beta} \\ \bar{\mu}(\bar{X}_n) &= \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \end{aligned}}$$

34 Построить ДИ для мат. ожидания нормально распределенной СВ при известном с.к.о.

$X \sim N(\cdot\,,\ \sigma^2)$ $\qquad [\underline{\mu}\ \ \bar{\mu}]$ – ?

$$T(\mu) = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\sum x_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \sim N(0;1)$$

$$T(\mu)\downarrow \ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\beta} \\ \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \underline{\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\beta};\ \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha}\right]}$$

35 Построить ДИ для мат. ожидание норм. распр. СВ при неизв. ско.

$X \sim N(\cdot\,,\cdot)$

$$T(\mu) = \frac{\bar{x}-\mu}{S}\sqrt{n} = \frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\ \sqrt{n-1}}{\sqrt{(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}}} \sim \frac{N(0;1)}{\sqrt{\chi^2(n-1)}}\sqrt{n-1} \sim t(n-1)$$

центральная стат., т.к. имеет распр-е Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, кот. н/з от μ и σ^2

$$T(\mu) \sim t(n-1)\downarrow \ \Rightarrow \begin{cases} T(\underline{\mu}) = t_{1-\beta}(n-1) \\ T(\bar{\mu}) = t_{\alpha}(n-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\beta}(n-1);\ \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}(n-1)\right]}$$

36 Построить ДИ для мат. ожидание при неизв. дисперсии и неизв. законе распред.

$\exists$ Закон распред – неизв., $\mu = MX$ $\quad \sigma^2 = DX < \infty$

$$\Rightarrow \exists\ T(x) = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0;1)$$

ЦПТ

$$T(x)\downarrow \ \Rightarrow \ \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\beta} \le \mu \le \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha} \Rightarrow$$ [подставим выбор. дисп]

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}}u_{1-\beta} \le \mu \le \bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha}}$$

37 Вывести выражение для ДИ для дисперсии и ско норм. распр. СВ.

$X \sim N(\cdot\,,\cdot)$ $\qquad (\underline{\sigma}\ \ \bar{\sigma})$ – ?

$$T(x,\sigma) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \to T\downarrow \Rightarrow \boxed{\frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{1-\beta}(n-1)}} \le \sigma \le \frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha}(n-1)}}}$$

$$\frac{n\cdot\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

38 Построение оптимального критерия для мат. ожидание нормально распределённой генеральной совокупности при известной дисперсии для случая двух простых гипотез.

$H_0: \mu_0 = \mu \qquad H_1: \mu = \mu_1 \qquad \mu_0 < \mu_1$

$$L(x_1 \dots x_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$ – ф-ия правдопод.

$$\varphi(\bar{X}_n) = \frac{L(X_1 \dots X_n, \mu_1)}{L(X_1 \dots X_n, \mu_0)} = \exp\left[\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\cdot \exp\left[\frac{-n(\mu_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\varphi(\bar{X}_n) \geq C_\varphi \iff \sum_{i=1}^{n} X_i \geq C$$

$C = \text{const} \Rightarrow$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geq C \mid \mu = \mu_0\right\} = \alpha \quad (*)$$

$$\ln\left[\exp\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma^2}\sum X_i\right)\cdot \exp\left(\frac{-n(\mu_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)\right] = \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n(\mu_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2} \geq \ln C_\varphi$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{\sigma^2}{\mu_1-\mu_0}\left(\ln C_\varphi + \frac{n(\mu_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right) = C$$

СВ $X_1 + \dots + X_n$ имеет норм. распред., μ и $n\sigma^2 \Rightarrow (*)$

$$1 - \Phi\left(\frac{C - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \alpha \quad \text{или} \quad \frac{C - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} = U_{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow C = n\mu_0 + U_{1-\alpha}\,\sigma\sqrt{n}$$

При этом вероятность совершения ошибки второго рода:

$$P\left\{\sum X_i < C \mid \mu = \mu_1\right\} = \Phi\left(\frac{C - n\mu_1}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$ – минимально возмож. при данном знач. α.

39 Проверка статистических гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Понятие критерия проверки гипотез. Критическая область, уровень значимости.

Критерием или статическим критерием проверки гипотез наз. правило, по которому по данной выборки $\overline{X}_n$ принимается решение о справедливости одной из гипотез.

Критерий задают с помощью критического множ-ва W, являющегося подмножеством выборочного пространства X_n случайной выборки $\overline{X}_n$.

Реш. принимают след. образом:

if $(x_1 \dots x_n) \in W \Rightarrow \cancel{H_0}$ H_1 — Sinus

if $(x_1 \dots x_n) \notin W \Rightarrow \cancel{H_1}$ H_0 — Sinus

Вероятность ошибки I рода: $P\{(x \dots x_n) \in W \mid H_0\} = \alpha$

II рода: $P\{(x \dots x_n) \in W \mid H_1\} = \beta$

$$\alpha = \int \dots \int_W \prod_{k=1}^{n} p(t_k; \Theta_0)\, d\overline{t}$$

α — уровень значимости критерия

$$\beta = \int \dots \int_{\overline{W}} \prod_{k=1}^{n} p(t_k; \Theta_1)\, d\overline{t}$$

$1-\beta$ — мощность критерия

Ошибки I рода: Приняли H_1 (альтернат.) при верной H_0

II рода: Приняли H_0 при верной H_1.

Стат. гипотезу наз. простой if: $H: \overline{\Theta} = \overline{\Theta}_0$

сложной if: $H: \overline{\Theta} \in D$

40) Правило Неймана – Пирсона. построение наилучшей критической области. Пример.

$\bar{X}_n$ – случайная выборка.

$p(t\ \Theta)$ – плотность распред.

$H_0:\ \Theta=\Theta_0 \qquad H_1:\ \Theta=\Theta_1$

$\varphi(\bar{X}_n)=\dfrac{\mathcal{L}(\bar{X}_n\ \Theta_1)}{\mathcal{L}(\bar{X}_n,\Theta_2)}$ – отнош. правдопод. $\qquad \mathcal{L}(\bar{X}_n\ \Theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(X_i\ \Theta)$

$\varphi(\bar{X}_n)\geq C_\varphi$, $P\{\varphi(\bar{X}_n)\geq C_\varphi\ |H_0\}=\alpha \Rightarrow$ if true: включают во множ-во W.

$$\alpha=\int\limits_{\varphi(t_1\ldots t_n)\geq C_\varphi}\!\!\ldots\int\mathcal{L}(t_1\ldots t_n\ ;\Theta_0)\,dt_1\ldots dt_n *$$

Пр: см вопрос 38//

41) Критерий проверки гипотезы о равенстве 2ух средних НГС при изв. ско.

$\rceil\ \exists\ (X_1\ldots X_n)$ и $(Y_1\ldots Y_m)$; объемом n и m

и генер. совоп. н/з СВ: $X\sim N(\mu_1\ \sigma_1^2)$; $Y\sim N(\mu_2\ \sigma_2^2)$

σ_1 и σ_2 – извест.

$H_0:\ \mu_1=\mu_2 \qquad H_1:\ \mu_1>\mu_2$

$H_0:\ \mu_1=\mu_2 \qquad H_1:\ \mu_1<\mu_2 \Rightarrow$ $\bar{X}-\bar{Y}$ – имеет норм. распред. с $\mu_1-\mu_2$, $\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m} \Rightarrow$

$H_0:\ \mu_1=\mu_2 \qquad H_1:\ \mu_1=\mu_2$

$\Rightarrow$ при $\mu_1=\mu_2\ (H_0)$

$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$ имеет стандарт. норм. распред. $\Rightarrow$ Критерий множ-ва:

1) $\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\geq u_{1-\alpha}$

2) $\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}\leq -u_{1-\alpha}$

3) $\dfrac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

42 Проверка гипотезы о величине дисперсии нормальной генеральной совокупности (НГС), о равенстве 2ух НГС.

1) Известно: $n \quad \bar{x} \quad s^2 \quad \sigma_0^2$

Реш:

Проверим: $H_0: \sigma_0^2 = \sigma_0'^2$ и выберем $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

$\alpha = 0{,}05$

Статистика: $V = \dfrac{(n-1)\, s^2}{\sigma^2}$ – выбор. дисперсии имеет распред-е χ^2 с числом свободы $n-1$

Критич. мн-во:

$$\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2} > \chi_{1-\alpha}(n-1)$$

$\cancel{H_1: \sigma_1^2 = \sigma_2^2}$ $\cancel{H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$

2) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\qquad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Статистика:

$$F = \frac{S_1^2(\bar{X}_n)}{S_2^2(\bar{X}_n)}$$ – имеет распред. Фишера с $\nu_1 = n-1$ $\nu_2 = m-1$

Крит. мн-во: $$\frac{S_1^2(\bar{X}_n)}{S_2^2(\bar{X}_n)} > f_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$$

43) Понятие критерия согласия. Критерий согласия Пирсона и его применение.

Критериями согласия называют статистические критерии, предназначенные для обнаружения расхождений между гипотетической статистической моделью и реальными данными, которые эта модель призвана описывать.

Теорема Пирсона:
Распределение случайной величины

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k(\vec{X}_n) - np_k)}{np_r}$$

при $n \to \infty$ сходится к χ^2-распределению с r—1 степенями свободы (сходится слабо).
Может применяться для проверки простой гипотезы:

$H_0: p_1 = p_{10}, \ldots, p_r = p_{r0}$, где $p_1, \ldots p_r$, - известные, против конк-й гип-зы

$H_1: \exists k: p_k \neq p_{k0}, k = \overline{1,r}$

Если H_0 - истина => [теор. Пирсона при $n \to \infty$]:

$$\chi^2(\vec{X}_n) = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k(\vec{X}_n) - np_{k0})^2}{np_{k0}} = n \sum_{k=1}^{r} \frac{\left(\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n} - p_{k0}\right)^2}{p_{k0}} \longrightarrow$$ к распр-ю χ^2 с $r-1$ степенями свободы

Если H_0 - не истина => [ЗБЧ при $n \to \infty$]:

$\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n} \to p_k, k = \overline{1,r}$ => при $n \to \infty$:

$\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n} - p_{k0} = \left(\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n} - p_k\right) + (p_k - p_{k0}) \to p_k - p_{k0}$ => если $p_k - p_{k0} \neq 0$ для $k = \overline{1,r}$, то стат. $\chi^2(\vec{X}_n)$ принимает большие знач., чем в случ. истинности H_0

Т.о.: 1) Если $\underbrace{\chi^2(\vec{x}_n)}_{\text{реал-ия СВ}} > \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$ => критерий согл. χ^2 откл. H_0 в пользу H_1

2) Если $\chi^2(\vec{x}_n) \leq \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$ => принимаем H_0