Пермиков.

Электростатика.

Л-1 07.08.22.

размер атома = 10^{-10} м (Å)

размер ядра = 10^{-15} м (Ф)

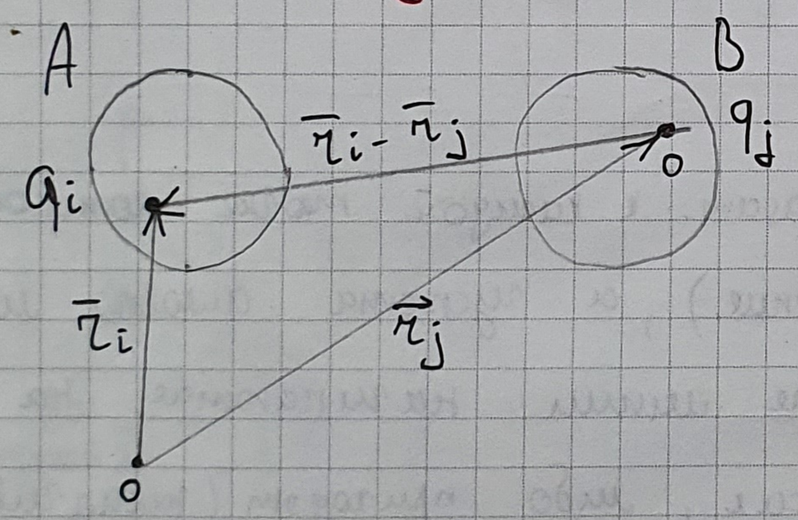
1 Закон Кулона.

Два электр-ки заряженных тела (мат. точки) действуют др. на др. с силами, направл-ми вдоль одной линии и прямо пропорцион. произвед. этих зарядов и обратно пропорц-ми ~~произведению этих зарядов~~ квадрату расст-я между ними.

$$|\bar{F}_{AB}| = |\bar{F}_{BA}| = k\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{Ф}{м}$$

if $\varepsilon \neq 1$, то $|\bar{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}$

1.3 Принцип суперпозиции.



$$\bar{F}_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}^2}\cdot\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |r_i - r_j|$$

$$\bar{F}_{AB} = \sum_i F_i = \sum_{ij}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}^2}\cdot\frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{r_{ij}}$$

• Взаимодействие 2-ух эл-ов тел A и B никак не зависит от других эл-ов

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad [\lambda] = \frac{Кл}{м}$$

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad [\sigma] = \frac{Кл}{м^2}$$

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad [\rho] = \frac{Кл}{м^3}$$

Сила Кулона – это сила дальнодействия

1.2 Напряжённость эл. поля.

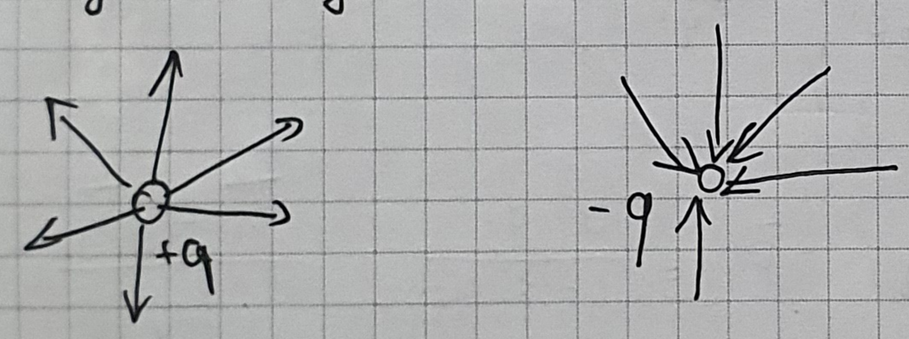
∃ тело B создаёт вокруг себя эл. поле, и уже поле будет действовать на тело A. Эта сила действие есть сила близкодействия.

$$\bar{F}_{AB} = \sum_i q_i \bar{E}(\bar{r}_i), \text{ где } \bar{E}(\bar{r}_i) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 \bar{r}_{ij}^2} \cdot \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{r_{ij}}$$

напряжённость

$\bar{E}(\bar{r}_i)$ наз. напряжённостью эл. поле

- Напряж. эл. поля – это силовая хар-ка, численно равная силе, действующей на ед-й положит. заряда, помещённой в данную точку поле.

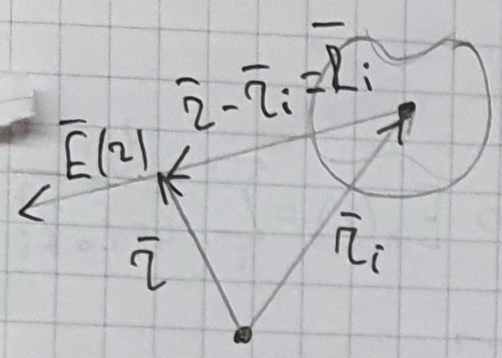


- силовая линия – это линия, касат. в каждой точке которой показывает напряжение (его направление), а густота силовых линий хар-ет модуль напр-ти. Силовые линии начинаются на плюсах, заканчиваются на минусах, либо приходят (заканчиваются на бескон-ях) (это только для электростатич. поля)
- силовые линии не пересекаются
- Для напр-ти эл. поля тоже действ. принцип суперпозиции.

$\bar{E} = \sum_i E_i$

I вопрос Д/З 1

②



$$\bar{E}(r)=\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^3}(\bar{r}-\bar{r}_i)$$

Поле вектора электрич. индукции для густоты матем. вводится таким образом:

$$\bar{D}(r)=\varepsilon_0\bar{E}(r)$$

Ⓣ Гаусса.

Поток вектора эл. индук-ции через $\forall$ замкнутую пов-ть наружу этой пов-ти равен суммарному заряду, заключённому внутри этой пов-ти.

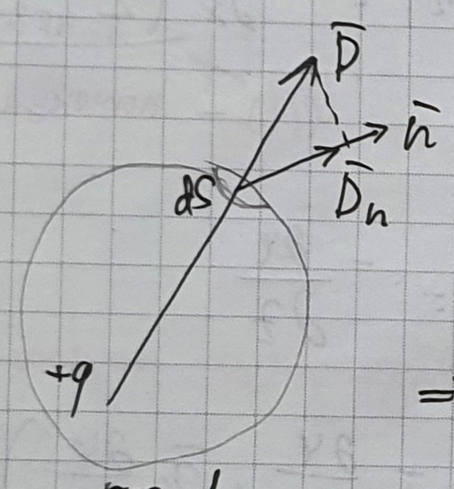


рис. 1.

$D_n\,dS=d\Phi$ – элементарный поток век-ра электростат. инд-ции через площадку dS в направлении внеш. нормали.

$$\Rightarrow \boxed{\Phi=\oint d\Phi=\oiint_S D_n\,dS}$$

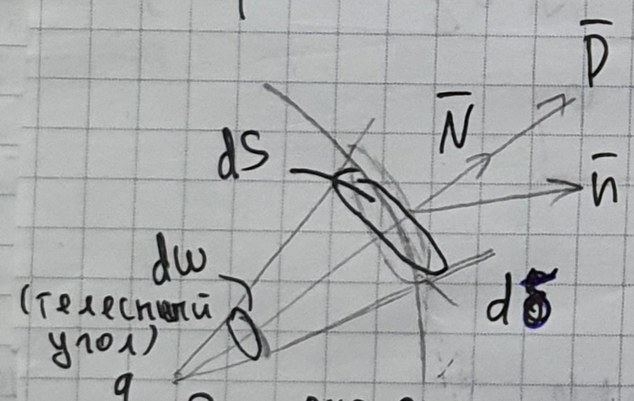


рис. 2.

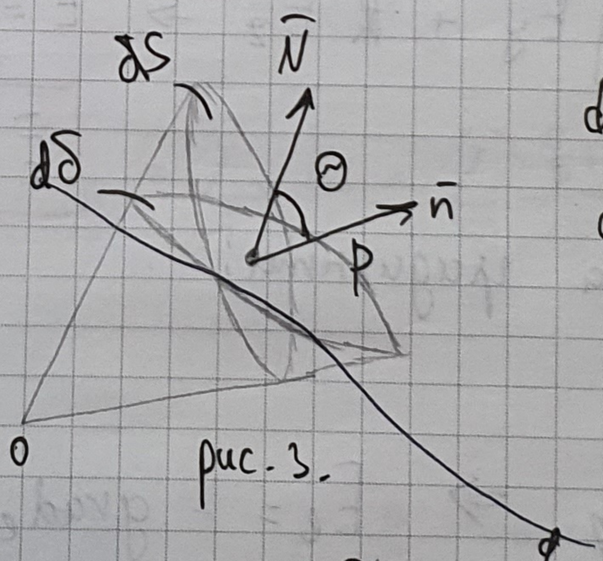


рис. 3.

$d\sigma=dS\cos\Theta$

$d\sigma=|OP|^2\cdot d\omega$

$$D=\frac{q}{4\pi|OP|^2}\Rightarrow d\Phi=\frac{q}{4\pi|OP|^2}\cos\Theta\,dS=$$

$$=\frac{q}{4\pi|OP|^2}\cdot|OP|^2\cdot d\omega=\frac{q\,d\omega}{4\pi}\Rightarrow\Phi=\oint\frac{q\,d\omega}{4\pi}=\frac{q}{4\pi}\cdot4\pi=q$$

if $q_1, q_2\ldots\Rightarrow\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\ldots=\sum_i q_i$

(на защите можно только 2ой рис)

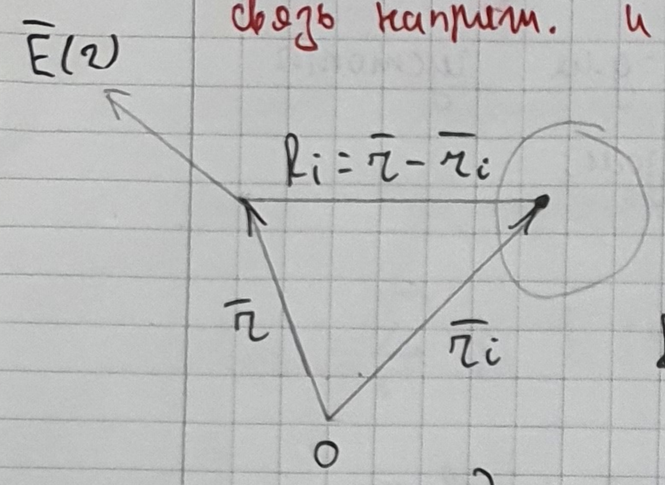
конец защиты

3.2

II защита ДЗ

Потенциал эл. поля.

Связь напряж. и потенциала.



$$\bar{E}(r) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^3}(\bar{r} - \bar{r}_i) \Rightarrow E_x(r) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^3}(x - x_i)$$

$$R_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_i}\right) = -\frac{1}{R_i^2}\frac{\partial R_i}{\partial x} = -\frac{1}{R_i^2}\cdot\frac{1}{R_i}(x - x_i) = -\frac{(x-x_i)}{R_i^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_x(r) = -\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_i}\right) \Rightarrow E_x(r) = -\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i}\right)}_{\varphi(r)\ -\ \text{потенциал}}$$

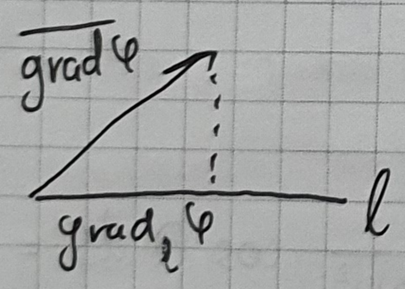
Аналог. другие компоненты (y и z)

$$\Rightarrow E_x(r) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y(r) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad E_z(r) = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\bar{E} = \bar{i}E_x + \bar{j}E_y + \bar{k}E_z \Rightarrow \bar{E} = -\left(\bar{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi}$$

Важные св-ва градиента:



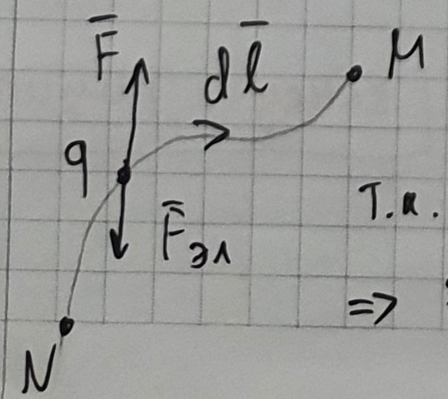
$$\Rightarrow E_l = -\operatorname{grad}_l \varphi = -\frac{d\varphi}{dl}$$

конец защиты

4.2

Физ. смысл потенциала.

] Мы тащем заряд в эл. поле и перемещаем его из 1-й точки в другую квазиравновесным способом.



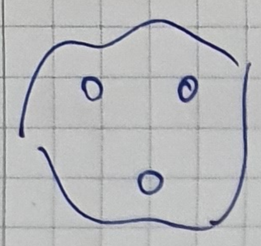
$$\delta A = (\bar{F}\,d\bar{l}) = F_l\,dl$$

Т.к. $\bar{F} + \bar{F}_{эл} = 0 \Rightarrow \bar{F} = -\bar{F}_{эл} = -q\bar{E} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_{эл.l} = -q\operatorname{grad}_l\varphi = -q\frac{d\varphi}{dl}$$

4.3

Потенц. энергия заряж. тела:



$q_1, q_2 \dots q_n$; $\sum_i q_i = Q$

Исходя из принципа суперпозиции, два эл-та действ-ют др. на др. по закону Кулона, не зависимо от др. эл-ов.

$\Rightarrow W = \sum_{\substack{ij \\ i<j}} W_{ij}$; q_i и q_j, Пусть q_i - зафиксирован, а

q_j - мы перемещ. из беск. в данную точку поля, тогда

$A = q_j \varphi(r_{ij})$, где $\varphi(r_{ij})$ - потенциал, созданный i-ым зарядом, вместе располож. j-ого заряда.

Очевидно, $\varphi(r_{ij}) = \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$, тогда затраченная работа и есть потенц. энергия этих 2-ух зарядов

$$\Rightarrow W_{ij} = q_j \varphi(r_{ij}) = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \Rightarrow \boxed{W = \sum_{\substack{ij \\ i<j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}$$

Некот. сведения:

~~Вектор Набла~~

1. $\vec{\nabla}\varphi = \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}$

2. $(\vec{\nabla}, \bar{a}) = \operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$

$\vec{\nabla} = \left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}, \bar{j}\frac{\partial}{\partial y}, \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$; $\bar{a} = (\bar{i}a_x, \bar{j}a_y, \bar{k}a_z)$

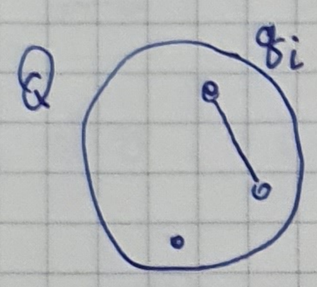
3. $[\vec{\nabla}\,\vec{a}] = \operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$

4. Т. Гаусса - Остроградского

для $\forall$ в-ного поля, кот. удовл. усл. непрерывности и дифф-ти, для $\forall$ замкнутой поверх. с внеш. нормалью $\bar{n}$, окружающей объём V справедливо соотнош:

$$\oiint_S a_n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a} \, dV$$

Нахождение условий равновесного распределения зарядов на примере заряж. проводника. (3-я защита ДЗ-1) 6



Для нахожд. равновесного распредел-я будем использ. принцип виртуал.-ых перемещений.

Для этого необх. д-ть физ. величину, кот. имеет стационарное (min/max) значение в усл. равновесия.

Такой величиной у нас будет – потенц. энерг. проводника.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}, \text{ где } r_{ij} = |\bar{r}_i - \bar{r}_j|, \quad \boxed{\sum_i q_i = Q} \; (1)$$

– усл. связи; $q_i + \delta q_i$, ... – провариируемые соост.

→ подставим: $\sum_i (q_i + \delta q_i) = Q \Rightarrow \boxed{\sum_i \delta q_i = 0}$

Принцип для нахожд. равновесного сост-ия:

Для того, чтобы $\forall$ заряж. тело находилось в равновесии $\Leftrightarrow$ чтобы при $\forall$ виртуал. перемещ. из данного равн. сост-я, вариация потенц. энергии $= 0$ при доп. усл. связи

Задача: Найти усл. экстремума W; для этого использ. метод неопр. множ. Лагранжа. Сост. вариационное ~~усл.~~ усл:

$$\boxed{\delta W - \lambda \, \delta\left(\sum_i q_i\right) = 0} \; (2)$$

, где λ – неопр. множ., кот. находится из усл. 1.

$$\delta W = \delta\left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \frac{\delta q_i \, q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \frac{q_i \, \delta q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = [i \rightleftarrows j]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \frac{\delta q_i \, q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{ji \\ i \neq j}} \frac{q_j \, \delta q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \frac{q_j \, \delta q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \sum_i \left(\sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\right) \delta q_i =$$

$= \sum_i \varphi(r_i)\,\delta q_i$, подставим $\delta W \to$ ② :

$\sum_i \delta q_i\, \varphi(r_i) - \alpha \sum_i \delta q_i = 0 \Rightarrow$ вынесем $\sum_i \delta q_i (\varphi(r_i) - \alpha) = 0$

т.к. это усл. выполняется при $\forall$ вариациях $\delta q_i \Rightarrow \boxed{\varphi(r_i) = \alpha = const}$

— конец —

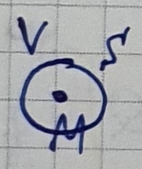
7 Св-ва равновесного распределения (4 Дз-1)

① Напряжённость эл. поля в $\forall$ т. проводника $= 0$.

$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, т.к. $\varphi = const \Rightarrow \vec{E} = 0$

② Объёмная плотность эл. заряда проводника в усл. равновес. $= 0$.

M – $\forall$ т. внутри провод.



По Т. Гаусса $\Rightarrow \oiint_S D_n\, dS \overset{(...)}{=} \iiint_V \rho\, dV$,

$\rho = \frac{dq}{dV}$

$dq = \rho\, dV$ (...)

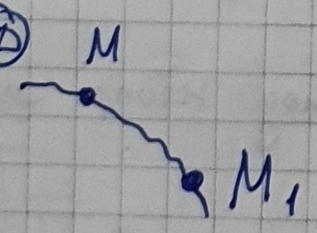
т.к. $\bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \bar{E} \Rightarrow \bar{D} = 0 \Rightarrow \oiint_S D_n\, dS = 0 \Rightarrow \iiint_V \rho\, dV = 0$

V – мал $\Rightarrow \iiint_V \rho\, dV = \rho \cdot V = 0$. Но $V \neq 0 \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$

③ Напряжённость эл. поля при равновесном распределении заряда, в $\forall$ т. поверх-ти проводника $\perp$-а его внеш. поверх.

Δ

M близко к M_1

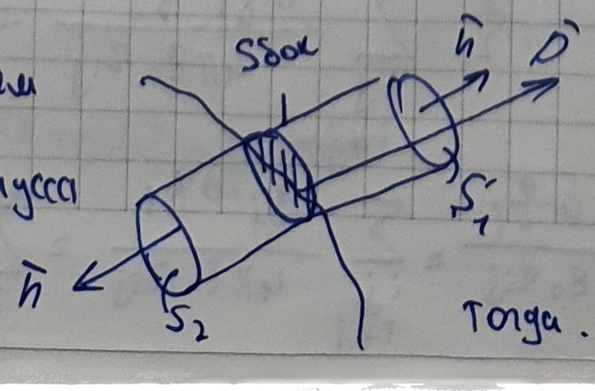


т.к. $\varphi = const \Rightarrow \varphi(M) = \varphi(M_1) = const \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = 0$ or $\frac{d\varphi}{dl} = 0$

$\frac{d\varphi}{dl} = (\operatorname{grad}\varphi)_l$; $\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi \Rightarrow \vec{E}_l = 0 \Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{n}$

④ Напряж. поле в $\forall$ т. поверх. проводника (в вакуум) $= E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

для этого выбираем кусок поверх и прим. Т. Гаусса



σ – поверх. плот. заряда.

тогда ..

0, т.к. $\bar{D}=0$ 0, т.к. $\bar{n}_{бок} \perp \bar{D}$

$$\oiint_S D_n\,dS = \iint_{S_1} D_n\,dS + \iint_{S_2} D_n\,dS + \iint_{S_{бок}} D_n\,dS = q \Rightarrow \iint_{S_1} D_n\,dS = D_n S_1 = q$$

$$q = \sigma S_1 \Rightarrow D_n S_1 = \sigma S_1 \Rightarrow D = \sigma \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

— конец —

Сведение из в-ного анализа:

$$\boxed{\operatorname{div}(\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \vec{a})} \rightarrow \text{раскроем}$$

$$\operatorname{div}(\varphi \bar{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi a_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi a_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi a_z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} a_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_z +$$

$$+ \varphi \frac{\partial a_x}{\partial x} + \varphi \frac{\partial a_y}{\partial y} + \varphi \frac{\partial a_z}{\partial z} = \varphi \underbrace{\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div} \bar{a}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} a_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_z$$

$$= \operatorname{div} \bar{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \bar{a})$$

Первая ф-ла Грина:

φ, ψ – скалярные ф-ции $\quad \bar{a} \equiv \operatorname{grad}\psi \rightarrow \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi) =$

$$= \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad}\psi + (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi) = \varphi \nabla^2 \psi + (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)$$

$$\oiint_S a_n\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\bar{a}\,dV \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi)\,dV = \iiint_V \varphi \nabla^2 \psi\,dV + \iiint_V (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)\,dV$$

$$\iiint_V \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi)\,dV = \oiint_S (\varphi \operatorname{grad}\psi)_n\,dS = \oiint \varphi \operatorname{grad}_n \psi\,dS = \oiint \varphi \frac{d\psi}{dn}\,dS$$

$$\oiint_S \varphi \frac{d\psi}{dn}\,dS = \iiint_V \varphi \nabla^2 \psi\,dV + \iiint_V (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)\,dV$$

Лекция 53.

83 Ур-е Лапласа и Пуассона.

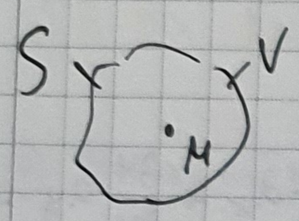
Краевая задача электростатики.

$$\oint\!\!\oint_S D_n\, dS = Q = \iiint_V \rho\, dV$$

$$\oint\!\!\oint_S D_n\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \bar{D}\, dV = \iiint_V \rho\, dV \Rightarrow \operatorname{div} \bar{D} \cdot \cancel{V} = \rho \cdot \cancel{V} \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

Т. Гаусса в дифф.-ой виде



Пусть объём очень мал

~~Т. Гаусса в дифф. виде~~:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} \Rightarrow -\varepsilon_0 \operatorname{grad} \varphi \Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = -\varepsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi = \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ – ур-е Пуассона

if $\rho = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$ – ур-е Лапласа

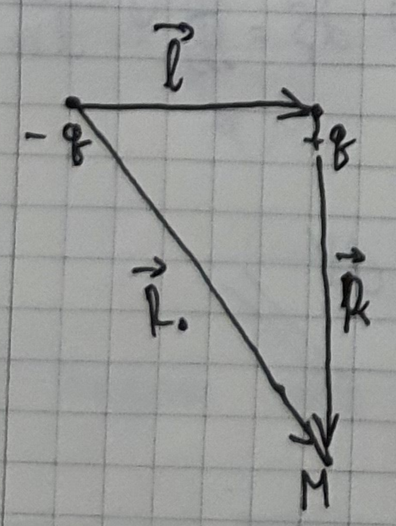
Для однозначного реш. этих ДУ необх. указать доп. усл., кот. удовлетворяет потенциал.

Задание граничных усл. и нахожд. ед. реш. в этом случае наз. краевой задачей.

Защита 5 031

9

Поле созданное точ~~ечным~~ ными диполем:



Диполь наз. точечным, когда $\vec{l} \to 0$, $q \to \infty$

$$\vec{p} = \lim_{\substack{l \to 0 \\ q \to \infty}} q \vec{l} \qquad |R| \gg |l|$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}; \quad \bar{R}_0 = \bar{R} + \bar{l} \Rightarrow$$

$$\bar{R} = \bar{R}_0 - \bar{l} \Rightarrow R^2 = (\bar{R}_0 - \bar{l})^2 = R_0^2 - 2(\bar{R}_0 \bar{l}) + l^2 \simeq R_0^2 - 2(\bar{R}_0 \bar{l})$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 - 2(\bar{R}_0 \bar{l})}} = \frac{1}{R_0\sqrt{1 - 2\cdot\frac{(\bar{R}_0 \bar{l})}{R_0^2}}} = \left(1 + \frac{(\bar{R}_0 \bar{l})}{R_0^2}\right)\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_0} + \frac{(\bar{R}_0 \bar{l})}{R_0^3}$$

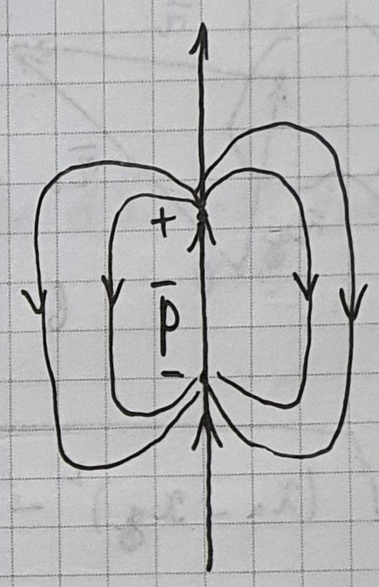
$$\varphi = \frac{\cancel{q}}{4\pi\varepsilon_0 L_0} + \frac{q(\bar{R}_0 \bar{l})}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3} - \frac{\cancel{q}}{4\pi\varepsilon_0 R_0} = \frac{(\bar{p}\,\bar{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

— почему зависит —

$$E = -\operatorname{grad}\varphi = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\bar{p}}{r^3} - \frac{3(\bar{p}\,\bar{r})\,\bar{r}}{r^5}\right]$$

$\operatorname{grad}(\bar{p}\,\bar{r}) = \bar{p}$ убедиться дома

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^4}\operatorname{grad}\bar{r} = \frac{-3\bar{r}}{r^5}$$



$\boxed{10}$

Поле в диэлектриках

Вещества, заряды могут быть 2ух типов: свободные заряды, кот. могут перемещаться по в-ву, и связанные кот. могут двигаться только в пределах атомов или молекул.

Разница между свобод. и связанными только в мех. мобильности.

В феноменологической электростат. поляризованной среды. описывается полем ~~поле~~ эл. поляриз. $\vec{P}$.

Вектор поляр. ~~ди~~ можно определить: произв. в-ра на объём.

$\boxed{\bar{P}\cdot dV}$ – дипольный момент беск. малого объёма dV.

$\bar{P}$ – объёмная плотность дипольного момента

$$\boxed{\bar{P}\,dV = \sum_i \bar{p}_i}$$

$$\vec{P} = \underset{(\text{свобод})}{\vec{P}_0} + \bar{P}_{инд} \quad ; \quad \bar{P}_0 = 0 \rightarrow \bar{P} = \bar{P}_{инд}.$$

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\vec{E} \quad ; \quad \vec{D}(\bar{r}) = \varepsilon_0\vec{E}(\bar{r}) + \bar{P}(r) = \cancel{\varepsilon_0\bar{E}(r)} + \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}(\bar{r}) - \cancel{\varepsilon_0\bar{E}(r)} \Rightarrow \vec{D}(\bar{r}) = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})$$

11

— защита Дз 1 —

Т об эквивалентности

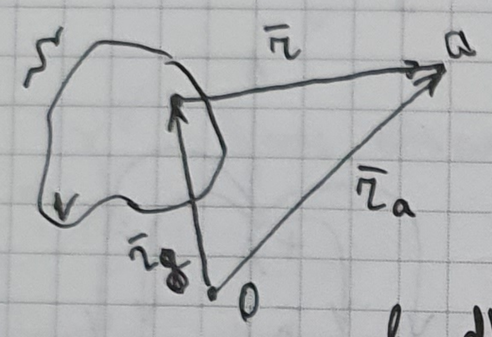
Эквивалентные данные поляризации ед. заряды вычисляются по ф-лам

$\bar{n}$ – внеш. нормаль в диэлектрике

$$\rho'_{(\rho_d)} = -\operatorname{div}\vec{P} \qquad \sigma'_{(\sigma_d)} = P_n$$

~~Используем~~ Пусть диэлектр. наход. в вакууме.

Д



$$\varphi_{1q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\bar{P}\,\bar{r})}{r^3};$$

в dV: $d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\bar{P}\,\bar{r})}{r^3}dV \to \varphi = \iiint\limits_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\bar{P}\,\bar{r})}{r^3}dV$

$$r = \sqrt{(x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_q} = \frac{x_a - x_q}{r^3}, \text{ аналог. } y_q;\ z_q.$$

$$\bar{r}_a = \bar{r}_q + \bar{r} \to \operatorname{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\bar{r}}{r^3} \Rightarrow \frac{(\bar{P}\,\bar{r})}{r^3} = \left(\bar{P}\operatorname{grad}_q\frac{1}{r}\right), \text{ т.к.}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\bar{a}) = \varphi\operatorname{div}\bar{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \bar{a})$$

$$\varphi \equiv \frac{1}{r} \qquad \bar{a} \equiv \bar{P} \qquad \operatorname{div}\frac{\bar{P}}{r} = \frac{1}{r}\operatorname{div}\bar{P} + \left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}, \bar{P}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}, \bar{P}\right) = \operatorname{div}\frac{\bar{P}}{r} - \frac{1}{r}\operatorname{div}\bar{P}$$

Подставим:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_V \operatorname{div}\frac{\bar{P}}{r}dV - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_V \frac{\operatorname{div}\bar{P}}{r}dV =$$

$\Rightarrow$ Т. Гаусса $\Rightarrow$ $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint\limits_S \frac{P_n}{r}dS - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_V \frac{\operatorname{div}\bar{P}}{r}dV =$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint\limits_S \frac{\sigma_{cb}^{F}}{r}dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_V \frac{\rho_{cb}^{F}}{r}dV; \quad \sigma_{cb}^{F} = P_n \quad \rho_{cb}^{F} = -\operatorname{div}\bar{P}$$

— Конец —

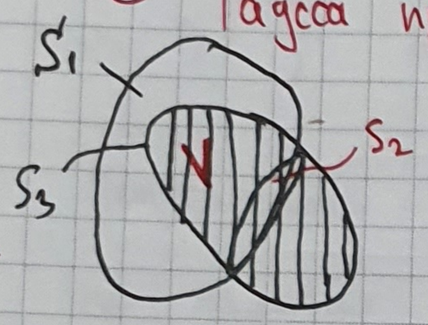
$$Q_{cb} = \iiint_V \rho_{cb}\, dV + \oiint_S \sigma_{cb}\, dS = -\iiint_V \operatorname{div} \vec{P}\, dV + \oiint_S P_n\, dS = 0$$

$$= -\oiint_S P_n\, dS + \oiint_S P_n\, dS = 0$$

12

— Дз1 защита —

Т Гаусса при наличии диэлектрика



$$\oiint_S \varepsilon_0 E_n\, dS = Q + Q_{cb} \quad ; \quad Q_{cb} = \iiint_V \rho_{cb}\, dV + \iint_{S_3} \sigma_{cb}\, dS \ \ominus$$

$$S = S_1 + S_2 \qquad \ominus \left| \begin{matrix} \text{теор. об} \\ \text{эквивал} \end{matrix} \right| = -\iiint_V \operatorname{div} \vec{P}\, dV + \iint_{S_3} P_n\, dS = -\oiint_{S_2+S_3} P_n\, dS + \iint_{S_3} P_n\, dS =$$

$$= -\iint_{S_2} P_n\, dS - \Big[\underbrace{\iint_{S_1} P_n\, dS = 0}_{\text{хитрость}} \Big] = -\oiint_{S_1+S_2} P_n\, dS$$

$$\oiint_S \varepsilon_0 E_n\, dS = Q - \oiint_S P_n\, dS \Rightarrow \oiint_S \underbrace{(\varepsilon_0 E_n + P_n)}_{D_n}\, dS = Q \Rightarrow \boxed{\oiint_S D_n\, dS = Q}$$

вакуум

$$\oint D_n\, dS = Q$$

$$\operatorname{div} D = \rho$$

$$\oint E_n\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\oint P\, dS = 0$$

$$\operatorname{div} \bar{P} = 0$$

в-во.

$$\oint D_n\, dS = Q$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho$$

$$\oint E_n\, dS = \frac{Q_\varepsilon + Q_{cb}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho + \rho_{cb}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

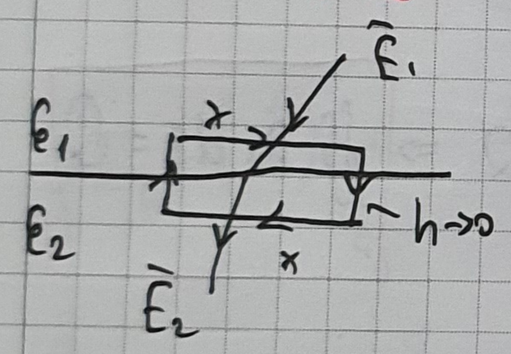
$$\oint P_n\, dS = -Q_{cb}$$

$$\operatorname{div} \bar{P} = -\rho_{cb}$$

— защита Оз1 — (14)

Поведение нормальных и тангенсальных состав. в-ров $\bar{D}$, $\bar{E}$ на границе раздела двух диэлектриков

1)

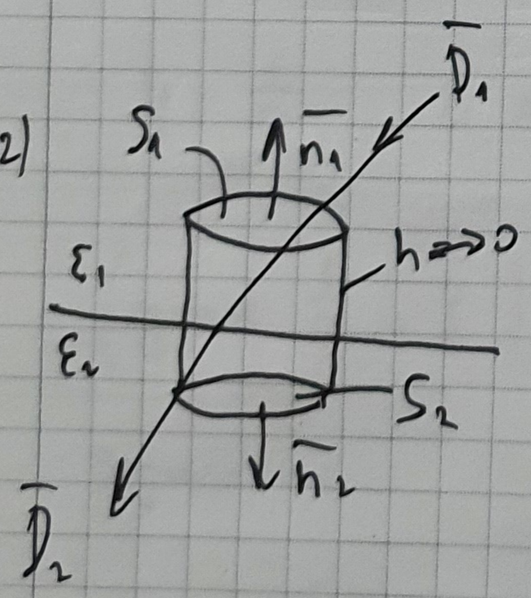


$$\oint_L E_l\, dl = 0 \qquad \int_h E_l\, dl = 0$$

$$-E_{1\tau}\, x + E_{2\tau}\, x = 0 \rightarrow \boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$$

$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

2)



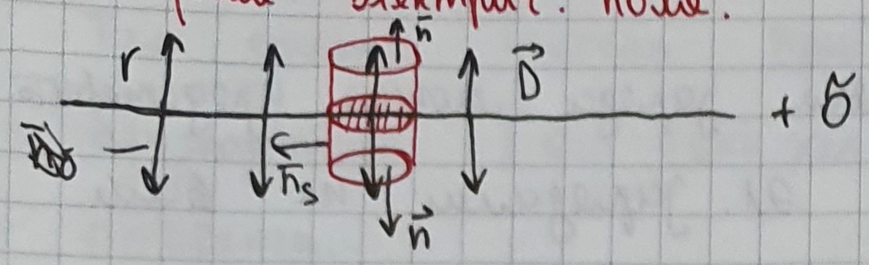
$$S_1 = S_2 = S; \quad \oint_{S_0} D_n\, dS = 0 \rightarrow -D_{1n} S + D_{2n} S = 0$$

$$\boxed{D_{1n} = D_{2n}} \qquad \varepsilon_1 \cancel{\varepsilon_0} E_{1n} = \varepsilon_2 \cancel{\varepsilon_0} E_{2n}$$

$$\boxed{\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

13

Энергия электрич. поля.



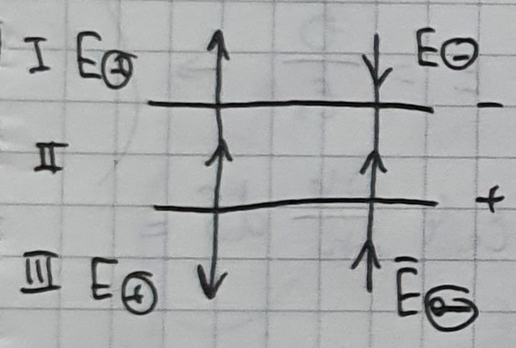
$$\oiint_{S_0} D_n dS = 2\iint_{осн} D_n dS + \iint_{бок} \cancel{D_n} dS = 2D_n S = \sigma S$$

$$\Rightarrow D = \frac{\sigma}{2} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Конденсатор - это такая сис-ма провод-ов, емкость кот. не зависит от наличия других тел.

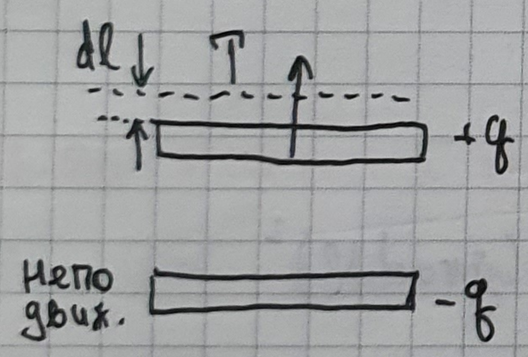
Емкость проводника - отнош. заряда проводника к его потенц. $\boxed{C = \frac{q}{\varphi}}$

Емкость конденсатора - отнош. заряда к разности потенц. $\boxed{C = \frac{q}{U}}$



I и III: $\bar{E} = \bar{E}_{\oplus} + \bar{E}_{\ominus} = 0$; II: $\bar{E} = \bar{E}_{\oplus} + \bar{E}_{\ominus} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$



$$F = E \cdot q = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} q = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$$

$\delta A = T dl \Rightarrow$ т.к. сила постоянна, то на всём перемещ.

$$\Rightarrow A_{12} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} \Delta l$$

работа потратилась на изм. потенц. энергии

$$A_{12} = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}(l_2 - l_1) \Rightarrow W = \frac{q^2 l}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{q^2 (l \cdot S)}{2\varepsilon_0 \varepsilon S^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} V =$$

$$= \frac{(\varepsilon\varepsilon_0 E)^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} V \Rightarrow W = \frac{E^2 \varepsilon_0 \varepsilon}{2} V$$

$$\Rightarrow w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$ - объемная плотность энергии

if поле неоднородно, то энергию эл. поле : $\boxed{W = \iiint_V w \, dV}$

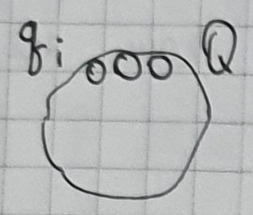
– защита –

15

(Т) Томсона.

Потенциальную энергию взаимодействия заряда можно представить как энергию эл. поля, созданного эл. зарядами на всём бескон. прост-ве.

(Д) (на примере 1-го провод-ка)



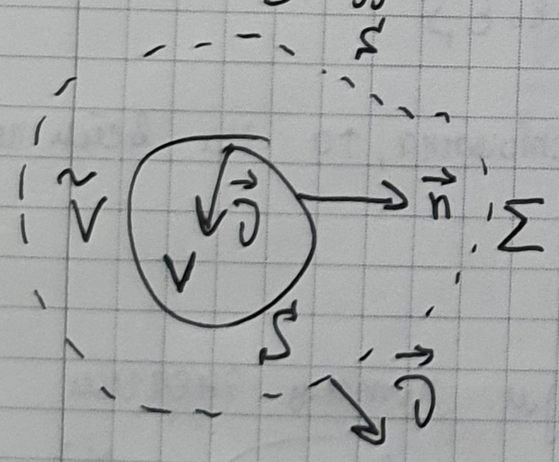
$$W = \frac{1}{2}\sum_{\substack{ij\\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_j q_j \overbrace{\sum_{\substack{i\\ i\neq j}} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}^{\varphi(r_j)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j q_j \varphi(r_j) \; ; \text{ т.к. } \varphi(r_j) = const \to W = \frac{\varphi}{2}\sum_j q_j = \frac{Q\varphi}{2}$$

[из опр. поверх. плотн-ти $dQ = \sigma dS$] $\Rightarrow W = \frac{1}{2}\oiint_S \sigma\varphi dS$ т.к. $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \to$

$$W = \frac{1}{2}\oiint_S \varepsilon_0 E_n \varphi dS \quad \text{т.к. } E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \to W = -\frac{1}{2}\oiint_S \varepsilon_0 \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\oiint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS$$



$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi) = \varphi\nabla^2\varphi + (\operatorname{grad}\varphi)^2$$

$$\oiint_{S+\Sigma} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} dS = \iiint_{\tilde{V}} \varphi\nabla^2\varphi dV + \iiint_{\tilde{V}} (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV$$

$$\iint_\Sigma \to 0 \quad \text{т.к. } \varphi \to 0 \; ; \; \underbrace{\nabla^2\varphi = 0}_{\text{ур-е Лапласа}}$$

$$\oiint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} dS = \iiint_{\tilde{V}} (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV \quad \text{, т.к. } \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oiint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} dS = -\oiint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS \Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{2}\left(-\oiint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\varphi dS\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{\tilde{V}} (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV$$

$$\text{т.к. } E = -\operatorname{grad}\varphi \Rightarrow W = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{\tilde{V}} (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV = \iiint_{\tilde{V}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \iiint_{\tilde{V}} w\, dV$$

Вывод:

Тем самым Томсон привёл теорию дальнодействия к теор. близкодейств. Т.о. доказал ∃-е эл. поля, как самостоят. сущ. объекта.

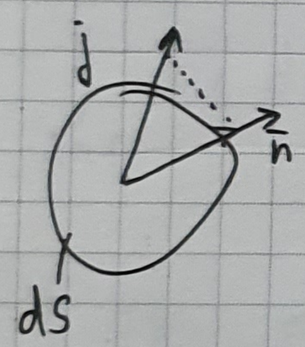
16 17

Постоянный эл. ток.

Эл. ток – направл. движ. эл. зарядов.

Сила тока – кол-во положит. электрич., пересекающее сечение проводника в ед. времени.

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad [I] = \left[\frac{Кл}{с}\right] = [A]$$

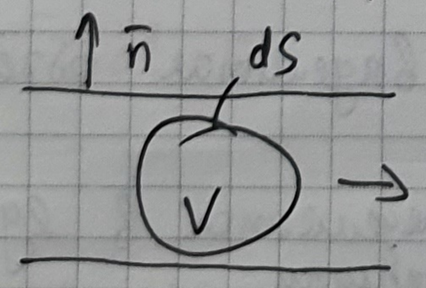


Плотность тока – кол-во электр. за ед. времени, через ед. поверх., ⊥ этой поверх.

$$dq = j_n \, dS \, dt \rightarrow I = \iint_S j_n \, dS$$

Св-ва плотности тока:

- Т.к. мы рассматрив. постоянный ток, то если внутри проводника рассмотреть замкнут. поверх., то сколько заряда войдёт в этот объём, столько же заряда и вытечет.



$$\oiint_S j_n \, dS = 0 \quad \text{т.к.} \quad \oiint_S j_n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV \rightarrow$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV = 0, \; V\text{-мал} \rightarrow \operatorname{div} \vec{j} \cdot V = 0 \rightarrow [V \neq 0]$$

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j} = 0} \text{ – I св-во}$$

Ток не выходит из проводника по нормалям к поверх. провод.

$$\boxed{j_n \Big|_{S_{бок}} = 0} \quad [j] = \left[\frac{A}{м^2}\right]$$

16 Основные диф. законы пост. тока

Если рассмотр. некий замкнут. контур, сост. из источ. тока и проводника, то и через проводник и через источник потечёт пост. эл. ток.

$$\boxed{\oint_L E_l \, dl = 0}$$

св-во электростатич. поля

I. диф. закон Ома в проводнике, за пределами источника (эксперим. устан)

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ $\quad$ σ - коэф. электропровод.

$\rho = \frac{1}{\sigma}$ - удельное сопротивл. $\quad [\rho] = [Ом \cdot м]$

II Закон Ома внутри источника тока (экспер)

$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_0)$ $\quad$ $\vec{E}$ - обычное поле

E_0 - сила неэлектр. происхожд., действ. на единич. полож. эл. заряд внутри источ. тока.

III Закон Джоуля-Ленца

В $\forall$ объёмчике проводника за время dt выделится объём

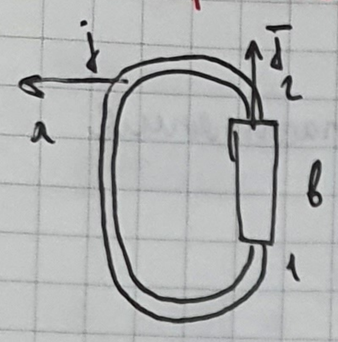
$q \cdot dV \cdot dt = \frac{j^2}{\sigma} dV \, dt$ $\quad$ q - тепло, кот. выделяется в ед. объёма в ед. времени

$$[q] = \left[\frac{Дж}{м^2 с}\right]$$

$$\delta Q = P dt = \iiint_V \frac{j^2}{\sigma} dt \, dV$$

17

Интегральный закон Ома и понятие ЭДС источника тока.



По внеш: 2a1: $j = \sigma \vec{E}$;

1в2: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_0)$; $j_l = \sigma E_l$ и $j_l = \sigma(E_l + E_{0l})$

① Сечение проводника может меняться, но ток через ∀ сечен. const.

$$I = j_l S = \text{const}$$

② $\oint_L E_l \, dl = 0$

Циркуляция:

$$\int_{2a1} E_l \, dl = \int_{2a1} \frac{j_l}{\sigma} dl = \int_{2a1} \frac{j_l S}{\sigma S} dl = I \int_{2a1} \frac{dl}{\sigma S}$$

$$\int_{1в2} (E_l + E_{0l}) dl = \int_{1в2} \frac{j_l}{\sigma} dl = I \int_{1в2} \frac{dl}{\sigma S}$$

⇒ сложим ⇒

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{2a1} E_l \, dl + \int_{1в2} E_l \, dl}_{\oint E_l \, dl = 0} + \underbrace{\int_{1в2} E_{0l} \, dl}_{\mathcal{E},\ \text{электродвиж. сила источ. тока}} = \underbrace{I \int_{2a1} \frac{dl}{\sigma S}}_{R} + \underbrace{I \int_{1в2} \frac{dl}{\sigma S}}_{r}$$

$\boxed{I(R + r) = \mathcal{E}}$ – закон Ома для замкнут. цепи.

if $j = 0$ 1в2: $0 = \sigma(E_l + E_{0l}) \Rightarrow E_l = -E_{0l} \rightarrow$

$$\int_{1в2} E_l \, dl = \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{1в2} E_{0l} \, dl \rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1}$$

18

Ⓣ Друде – Лоренца эл. тока в металах.

Введём l – длина свободного пробега (т.е. средне расстояние между двумя столкнов. электрона с решёткой

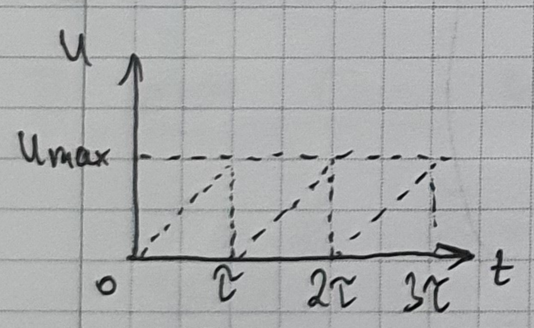
τ – время свободного пробега.

Электроны движ. хаотично (тепловое движ.)

При наличии эл. поля электроны ~~элект~~. получают допол. направленную скорость (дрейфовое) (порядка 1 мм/с)

Т.к. скорость очень мала, Друде предположили, что после каждого столкновения электрон полностью теряет скорость направл-е движ-я.

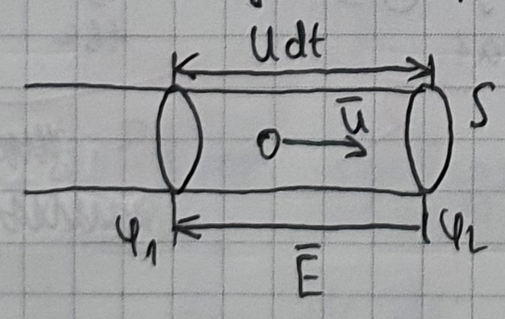
1) $ma = eE \rightarrow a = \frac{eE}{m} \rightarrow U_{max} = a\tau = \frac{eE\tau}{m}$



$$\bar{U}_{max} = \frac{e\bar{E}\tau}{m}$$

$$U = \frac{U_{max}}{2} = \frac{a\tau}{2} = \frac{e\tau}{2m}E$$

Что электрон движ. равномерно и плавно против. направл. в эл. поле.



$\varphi_2 > \varphi_1$ $\quad dt : S \div dN = n\,dV = nSUdt$ ⇒

dN – кол-во эл-ов, кот. пройдут через dS за t.

⇒ $dq = enSUdt$

по опред. плотности тока: $j\frac{dS}{S}dt = dq = enSUdt \rightarrow \boxed{j = enU}$ $\boxed{\bar{j} = -en\bar{U}}$

$$j = enU = en\frac{e\tau}{2m}E = \frac{ne^2\tau}{2m}E \quad ; \quad \sigma = \frac{ne^2\tau}{2m} \rightarrow j = \sigma E$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2m}{ne^2\tau}$$

2) При каждом столкновении электрон теряет энергию $\frac{mU_{max}^2}{2}$. Эта энергия передаётся ионам кист. решётки, т.е. переходит в тепло. В объёме dV число элект-ов ndV, число столкновений $\nu = \frac{dt}{\tau} \rightarrow$

$$q\,dVdt = \frac{mU_{max}^2}{2} n\,dV \cdot \frac{dt}{\tau} = \frac{ma^2\tau^2}{2}\frac{n}{\tau}\,dV\,dt \rightarrow q = \frac{m\tau n e^2 E^2}{2m^2} \rightarrow$$

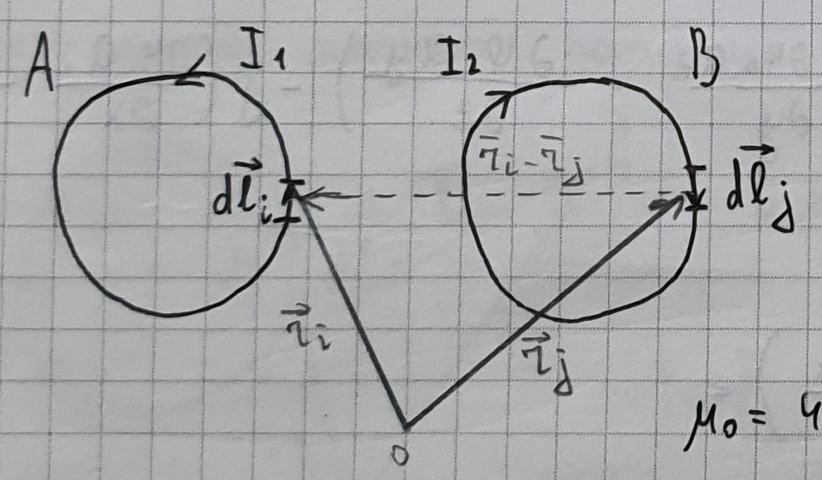
$$q = \frac{ne^2\tau}{2m} E^2 \rightarrow \boxed{q = \sigma E^2}$$ Закон Джоуля - Ленца в диф. форме.

-end-

19 Закон Ампера. Понятие магнитного поля, индукция магнит. поля. Закон Био-

Источником магнит. поля явл. движ. заряды и магнитная поляризация (намагниченность)

∃ сила взаимодейств. 2ух проводников с током по аналогии с кулоновским взаимодейств. Это сила пропорц. произвед-ю сил токов и обратно пропорц. квадрату расстояния между ними, причём эта сила слож. образом зависит от ориентации токов.



$\bar{F}_{AB} = -\bar{F}_{BA}$

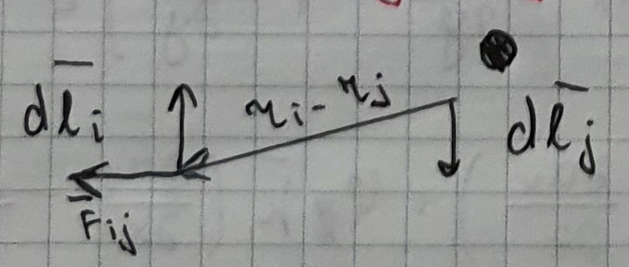
Сила, с кот. контур B действ на контр A: $\bar{F}_{AB} = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\sum_{ij}\frac{[d\bar{l}_i[d\bar{l}_j(\bar{r}_i-\bar{r}_j)]]}{r_{ij}^3}$

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{Гн}{м}$

$r_{ij} = |\bar{r}_i - \bar{r}_j|$

$$\boxed{\bar{F}_{ij} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} I_1 I_2 \frac{[d\bar{l}_i[d\bar{l}_j(\bar{r}_i-\bar{r}_j)]]}{r_{ij}^3}}$$

Закон Ампера
сила дальнодейств.



$\otimes[d\vec{l}_j(\bar{r}_i - \bar{r}_j)]$

Если ввести понятие магнитного поля, т.е. контур B создаёт вокруг себя и внутри себя магнитное поле, то на контур A будет действ. не контур B, а магнитное поле, созданное этим контуром.

IA - будет сила близкодейств.

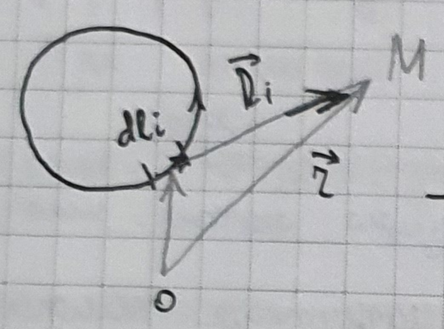
Введём 2 хар-ки: ① Напрят. эл. поля $\bar{H}_i = I_2 \sum_j \frac{[d\bar{l}_j (\bar{r}_i - \bar{r}_j)]}{4\pi r_{ij}^3}$

$B_i = \mu\mu_0 \vec{H}_i$

$\Rightarrow \bar{F}_{AB} = \sum_i I_1 [d\vec{l}_i, \bar{B}_i]$

$\Rightarrow$ Закон Ампера можно записать через 2-а закона:

1) Закон Био-Савара



$\bar{H}(r) = I \sum_i \frac{[d\bar{l}_i \ \bar{R}_i]}{4\pi R_i^3} \to \bar{B}(r) = \mu\mu_0 I \sum \frac{[d\bar{l}_i \ \bar{R}_i]}{4\pi R_i^3} \to$

$\to \bar{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{[d\bar{l}_i, \bar{R}_i]}{R_i^3}$

2) Закон Ампера

$\vec{F} = I \sum_i [d\bar{l}_i, \bar{B}_i]$ или $\bar{F} = I \int [d\vec{l}, \vec{B}]$

— end —

① $\mathrm{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \, \mathrm{rot}\, \vec{a} + [\mathrm{grad}\, \varphi, \bar{a}]$

$$\mathrm{rot}(\varphi \bar{a}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi a_x & \varphi a_y & \varphi a_z \end{vmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial \varphi a_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi a_y}{\partial z}\right) - \bar{j}\left(\frac{\partial \varphi a_z}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi a_x}{\partial z}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial \varphi a_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi a_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \bar{i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} a_z + \frac{\varphi \partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi a_y}{\partial z} - \varphi \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) - \bar{j}\left(a_z \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial a_z}{\partial x} - a_x \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \right.$$

$$\left. - \varphi \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) + \bar{k}\left(a_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial a_y}{\partial x} - a_x \frac{\partial a_x}{\partial y} - \varphi \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \vec{i}\varphi\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) - \varphi \bar{j}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) + \varphi \bar{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) +$$

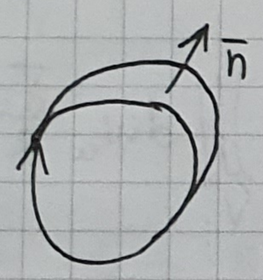
$$+ \square = \varphi \, \mathrm{rot}\, \bar{a} + \square$$

$$[\operatorname{grad}\varphi, \bar a] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \bar i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}a_y\right) - \bar j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}a_x\right) +$$

$$+ \bar k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}a_x\right) = \square$$

② $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec a = -\nabla^2\bar a + \operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar a)$

③ Т. Стокса



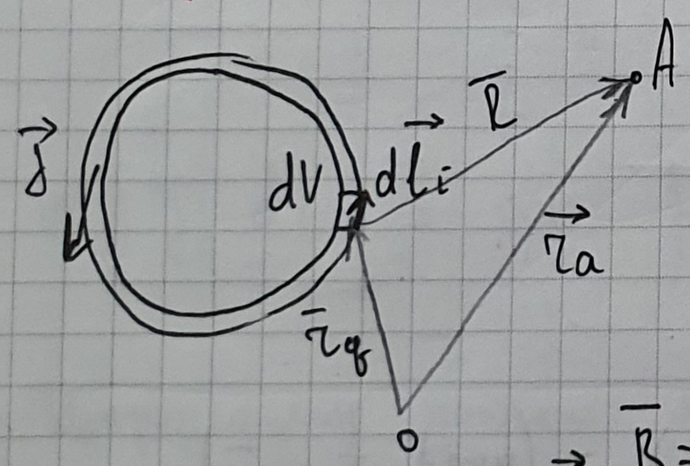
Пусть есть какой-то замкнутый контур и мы натягиваем на этот контур некот. поверх. таким образом, что обход по контору и направл. нормали к поверх. были синхроним. по правилу правого буравчика.

$$\boxed{\oint_L a_l\, dl = \iint_S (\operatorname{rot}\vec a)_n\, dS}$$

Циркуляция вектор. поля по замкнут. контуру = ротору контура этого вект. поля через поверх., кот. огранич. этот контур.

20

Векторный магнит. потенциал — Дз2 3.1 —



$$\bar B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \sum \frac{[d\bar l_i\ \bar R_i]}{R_i^3}$$

$$I d\bar l_i = j S d\bar l_i = \vec j S dl_i = \vec j\, dV \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar B = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{[\vec j\ \vec R]}{R^3}\, dV, \quad R = \sqrt{(x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2}$$

$$\operatorname{grad}_a \frac{1}{R} = -\frac{\bar R}{R^3} = -\operatorname{grad}_q \frac{1}{R}$$

$$\bar B = \frac{-\mu_0}{4\pi}\iiint_V [\bar j, \operatorname{grad}_a \tfrac{1}{R}]\, dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V [\operatorname{grad}_a \tfrac{1}{R}, \bar j]\, dV$$

$$R = \bar r_a - \bar r_q$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\bar a) = \varphi \operatorname{rot}\bar a + [\operatorname{grad}\varphi, \bar a] \qquad \varphi = \frac{1}{R} \quad \bar a = \bar j$$

$$[\operatorname{grad}_a \tfrac{1}{R}, \vec j] = \operatorname{rot}_a\left(\frac{\bar j}{R}\right) - \frac{1}{R}\underbrace{\operatorname{rot}_a \bar j}_{0} \rightarrow \bar B = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \operatorname{rot}_a \frac{\bar j}{R}\, dV = \operatorname{rot}_a \overbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\bar j}{R}\, dV\right)}^{\vec A}$$

Т.к. q не зависит от точки наблюд, то $\operatorname{rot}_a \bar j = 0$ $\Rightarrow \bar B = \operatorname{rot}_a \bar A \Rightarrow$

т.к. точка наблюд. взята произв. образом, то индекс a можно опустить $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}}$

— начало Дз 2 —

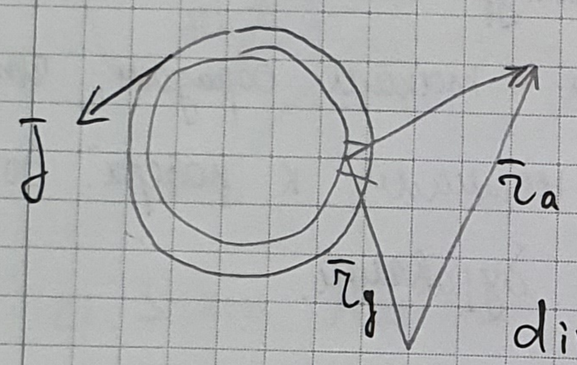
21

Важное св-во векторного магнит. потенциала:

в $\forall$ точке простр-ва $\operatorname{div} \bar{A} = 0$

(b)

По св-ва плотности тока: $\operatorname{div} \bar{j} = 0$ $\quad j_n = 0$



$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\bar{j}}{R} dV \rightarrow \operatorname{div} \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div}_a \frac{\bar{j}}{R} dV$$

$$\operatorname{div}(\varphi \bar{a}) = \varphi \operatorname{div} \bar{a} + (\operatorname{grad} \varphi, \bar{a}) \quad ; \quad \bar{a} \equiv \bar{j}$$

$$\varphi = 1/R \rightarrow \operatorname{div}_a \frac{\bar{j}}{R} = \frac{1}{R} \cancel{\operatorname{div}_a \bar{j}}^{\,0} + \left(\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \bar{j}\right) \textcircled{=}$$

|т.к. $\bar{j}$ не зависит от коорд. точки набл.|

$$\textcircled{=} \left(\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \bar{j}\right)$$

$$\left(\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \bar{j}\right) = -\left(\operatorname{grad}_q \frac{1}{R}, \bar{j}\right)$$

$$\rightarrow \operatorname{div}_a \frac{\bar{j}}{R} = -\left(\operatorname{grad}_q \frac{1}{R}, \bar{j}\right)$$

$$\operatorname{div}_q \left(\frac{\bar{j}}{R}\right) = \frac{1}{R} \underbrace{\cancel{\operatorname{div}_q \bar{j}}}_{0} + \left(\operatorname{grad}_q \frac{1}{R}, \bar{j}\right) = \left(\operatorname{grad}_q \frac{1}{R}, \bar{j}\right)$$

св-во плотности тока

$$\rightarrow \operatorname{div}_a \frac{\bar{j}}{R} = -\operatorname{div}_q \frac{\bar{j}}{R} \rightarrow \operatorname{div} \bar{A} = \frac{-\mu_0}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div}_q \left(\frac{\bar{j}}{R}\right) dV =$$

$$= [\text{по т. О-Г}] = \frac{-\mu_0}{4\pi} \oiint_S \frac{j_n}{R} dS = [\text{используя } j_n = 0] = 0 \;//$$

— end —

Теорема Стокса (т. о циркуляции дифф. и интеграл. форме

$\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A}$; $\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{\bar{j}}{R}\,dV$; $\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$ →

$\mu_0 \bar{H} = \text{rot}\,\bar{A}$ | rot ⇒ $\mu_0\,\text{rot}\,\bar{H} = \text{rot}\,\text{rot}\,\bar{A}$

$\text{rot}\,\text{rot}\,\bar{A} = -\nabla^2 A + \text{grad}\,\cancel{\text{div}}^{\,0}\,\bar{A}$ → $\mu_0\,\text{rot}\,\bar{H} = -\nabla^2 \bar{A}$

$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, где $\varphi = \iiint\limits_V \frac{\rho\,dV}{4\pi\varepsilon_0 R}$, хитрость: $A_x = \mu_0 \iiint\limits_V \frac{j_x\,dV}{4\pi R}$

$\frac{\rho}{\varepsilon_0} \longleftrightarrow \mu_0 j_x$ → $\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x$ → также для всех других компонентов

⇒ $\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{j}$; $\mu_0\,\text{rot}\,\bar{H} = -\nabla^2 \bar{A} = \mu_0 \bar{j}$ → $\boxed{\text{rot}\,\bar{H} = \bar{j}}$

т. Стокса в диф. виде

По т. Стокса (из векторного анализ.) : $\iint\limits_S (\text{rot}\,\bar{a})_n\,dS = \oint\limits_L a_l\,dl$ → $\oint\limits_L H_l\,dl = \iint\limits_S (\text{rot}\,\bar{H})_n\,dS =$

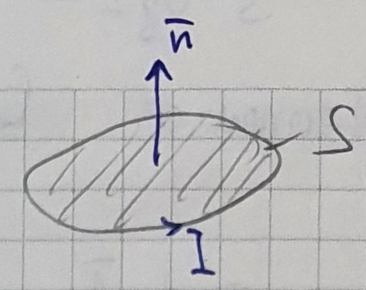
$= \iint\limits_S j_n\,dS = I$; $\oint\limits_L H_l\,dl = \sum\limits_i I_i$

Циркуляция напряж. магнит. поля по ∀ замкнут. контуру = суммарному току, кот. охватывает этот контур, причём направл. обхода и направл. токов связано правилом правого винта.

— end —

Магнитный диполь – ток, протек. по плоскому контуру, причём размеры контура << расстояние контура до точки, где мы исследуем магнит. поле, созданного этим диполем

Магнитный момент диполя: $\bar{m} = IS\,\bar{n}$



$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{[\bar{m}\,\bar{R}]}{R^3}$$

23

Магнитное поле в вещ-ве

∀ в-во состоит из атомов, в кот. есть электрона. Эл-ы вращ. по замкнут. орбитам ⇒ это есть магнит. диполь.

$$\sum_i \bar{m}_i = \bar{M}\,dV$$

, $\bar{M}$ – вектор намагнич.

$\bar{m}$ – магнит. момент в ед. объёма магнетика

$$\bar{M} = \bar{M}_0 + \bar{M}_{инд}$$

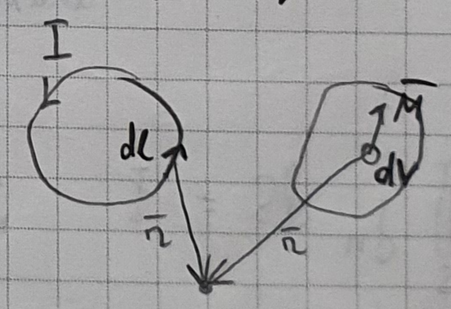
$$\bar{M} = (\mu - 1)\,\bar{H}$$

, μ – магнитная проницаемость в-ва.

Для диамагнетиков: $\mu < 1$
Для парамагнетиков: $\mu > 1$
} но $\mu \sim 1$, $|\mu - 1| \sim 10^{-4} - 10^{-6}$

Для феромагн: $\mu \gg 1 \sim 10^4$ ферро $\mu \gg 1 \sim 10^4$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \rightarrow \bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}) = \underline{\mu\mu_0\bar{H}}$$



$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\bar{j}}{r}\,dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{[\bar{M}\,\bar{r}]}{r^3}\,dV \;;\; \bar{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

Сведение из векторного анализа.

$$\iiint_V \mathrm{rot}\,\bar{a}\,dV = \oiint_S [\bar{n}\,\bar{a}]\,dS$$

24

— 4 Дз —

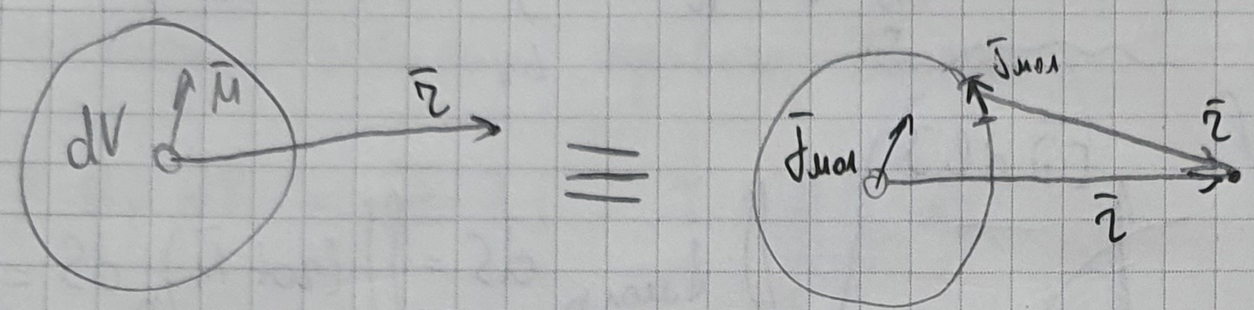
Т Эквивалентности в магнитном поле.

Эквивалентные вектору магнит. поляризации магнит. токи считаются по фор-ам:

$$\bar{j}_{мол} = \mathrm{rot}\,\bar{M} \quad ; \quad i_{мол} = [\bar{M}\ \bar{n}]$$

$[A/м]$?

$\bar{n}$ - нормаль к поверх. в той точке, где ищем $i_{молекулярное}$



$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{[\bar{M}\ \bar{r}]}{r^3}\,dV$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\bar{j}_{мол}}{r}\,dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_S \frac{\vec{i}_{мол}}{r}\,dS$$

Д

$$\frac{\bar{r}}{R^3} = \mathrm{grad}_q \frac{1}{R} = [\bar{M}, \mathrm{grad}_q \frac{1}{R}] = -[\mathrm{grad}_q \frac{1}{R}, \bar{M}]$$

вспомним: $\mathrm{rot}\,(\varphi\bar{a}) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\bar{a} + [\mathrm{grad}\,\varphi, \bar{a}]$ $\quad \varphi = 1/R \quad \bar{a} \equiv \bar{M}$

$$[\bar{M}, \mathrm{grad}_q \frac{1}{R}] = -\mathrm{rot}_q \frac{\bar{M}}{R} + \frac{1}{R}\mathrm{rot}_q \bar{M} \quad ;$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{1}{R}\mathrm{rot}_q \bar{M}\,dV - \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \mathrm{rot}_q\left(\frac{\bar{M}}{R}\right)dV$$

$$\iiint_V \mathrm{rot}_q\left(\frac{M}{R}\right)dV = \oiint_S \frac{[\bar{n}\ \bar{M}]}{R}\,dS \rightarrow \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathrm{rot}_q \bar{M}}{R}\,dV - \frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_S \frac{[\bar{n}\ \bar{M}]}{R}\,dS$$

$$\bar{j}_{мол} = \mathrm{rot}\,\bar{M}$$

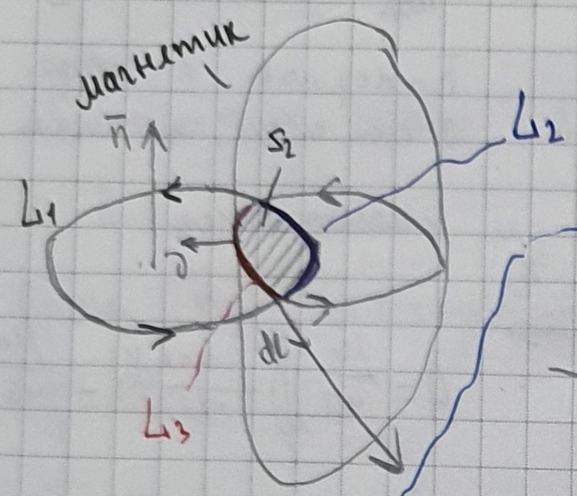
$$i_{мол} = -[\bar{n}\ \bar{M}] = [\bar{M}\ \bar{n}]$$

— end —

25

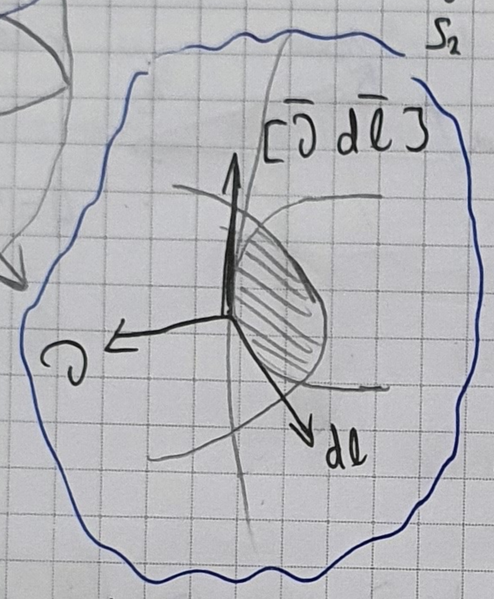
Т Стокса (т. о циркуляции) в присутствии магнетика.

$\oint_L H_l\, dl = I$; $\frac{1}{\mu_0}\oint_L B_l\, dl = I + I_{мол}$ – согласно принципу суперпозиции



$L = L_1 + L_2$

$I_{мол} = \iint_{S_2} j_{мол\,n}\, dS + \int_{L_3} (i_{мол}\, [\vec\partial\, d\bar l])$



(увеличено)

$\iint_{S_2} j_{мол\,n}\, dS = \iint_{S_2} (\mathrm{rot}\,\bar M)_n\, dS = [\text{по ст. т.}] = \oint_{L_2+L_3} M_l\, dl$

$\int_{L_3} (i_{мол}\, [\vec\partial, d\vec l]) = \int_{L_3} (d\bar l\, [i_{мол}\, \bar\partial]) = \int_{L_3} [i_{мол}\, \bar\partial]_l\, dl =$

$= -\int_{L_3} [\bar\partial, i_{мол}]_l\, dl = -\int_{L_3} [\partial\, [\bar M, \vec\partial]]_l\, dl = [[\bar a, [\bar b\, \bar c]]] =$

$= \bar b\,(\bar a\, \bar c) - \bar c\,(\bar a\, \bar b)] = -\int_{L_3} M_l\, (\partial, \partial)\, dl + \int_{L_3} \partial_l\, (\bar\partial\, \bar M)\, dl$ ($\to 0$)

$\to \int_{L_3} (i_{мол}\, [\vec\partial\, d\bar l] = -\int_{L_3} M_l\, dl$ $\left\{ I_{мол} = \oint_{L_2+L_3} M_l\, dl - \int_{L_3} M_l\, dl = \oint_{L_1+L_2} M_l\, dl \right\}$

$\frac{1}{\mu_0}\oint_L B_l\, dl = I + \oint_L M_l\, dl \to \oint_L \left(\frac{\bar B}{\mu_0} - \bar M\right)_l dl = I$

$\oint_L H_l\, dl = I$

26

Элементарные св-ва магнитностатич. поля.

Т. Стокса.

Для ∀ замкнут. контура поля циркул. напряж. магнитостатич. поля = сумме токов, протекающих через поверх., кот. охватывает этот контур, причём направл. обхода циркуляции и направ. токов связаны правилом правого винта.

I $\oint_L H_l \, dl = \sum_i I_i = I = \iint_S j_n \, ds$

$\mathrm{rot}\, \bar{H} = \bar{j}$

$\oint_L B_l \, dl = \mu\mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 \sum_i (I_i + I_i^{мол})$

$\mathrm{rot}\, \bar{B} = \mu\mu_0 \bar{j} = \mu_0 (\bar{j} + \bar{j}_{мол})$

II $\bar{B} = \mathrm{rot}\, \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \bar{j}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

$\mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \bar{A} = (\vec{\nabla}, \mathrm{rot}\, \bar{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\, \bar{B} = 0}$

$V: \iiint_V \mathrm{div}\, \bar{B} \, dV = 0 \to |\text{Т. Гаусса-Ос.}| \to \iiint_V \mathrm{div}\, \bar{B} \, dV = \oiint_S B_n \, dS = 0 \Rightarrow$

$\boxed{\oiint_S B_n \, dS = 0}$

Поток в-ра магнит. индукции через ∀ замкнут. поверх. наружу этой поверх. = 0.

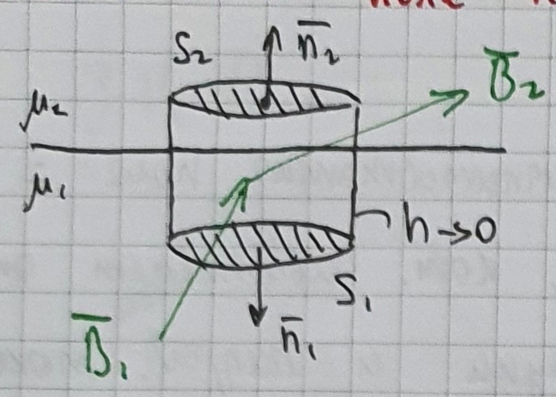
Это св-во справедливо для ∀ магнит. полей!

28

Дз-2.

Магнитное поле на границе раздела 2-ух магнетиков

1



$$\oint_S B_n \, dS = 0 \qquad \oint_S B_n \, dS = \iint_{S_2} B_{2n} \, dS + \iint_{S_1} B_{1n} \, dS +$$

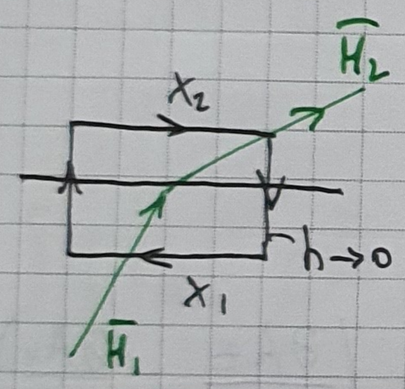
$$+ \iint_{бок} \cancel{B_n} \, dS = \iint_S (B_{2n} - B_{1n}) \, dS = 0 \qquad S - мал$$

$$\iint_S (B_{2n} - B_{1n}) \, dS = (B_{2n} - B_{1n}) S \to \boxed{B_{2n} = B_{1n}}$$

$$\mu_2 \mu_0 H_{2n} = \mu_1 \mu_0 H_{1n} \to \boxed{\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

$S = S_1 \mp S_2$ $\qquad x_1 = x_2 = x$

2



$$\oint_L H_l \, dl = \int_{x_2} H_{2l} \, dl + \int_{x_1} H_{1l} \, dl + 2 \int_h \cancelto{0}{H_l} \, dl =$$

$$= \int_x (H_{2\tau} - H_{1\tau}) \, dl = (H_{2\tau} - H_{1\tau}) x = 0 \to$$

$$\boxed{H_{2\tau} = H_{1\tau}} \qquad \frac{B_{2\tau}}{\mu_2 \mu_0} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1 \mu_0} \to \frac{B_{2\tau}}{B_{1\tau}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

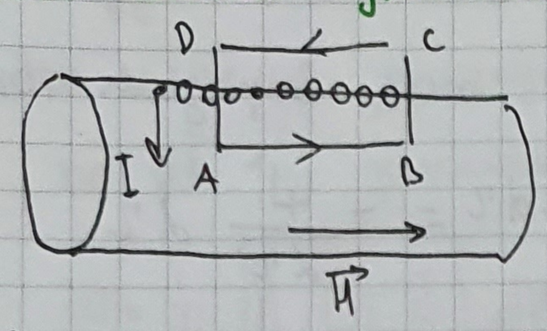
— end —

27.2

Энергия магнитного поля.

Р-м катушку длиной l, радиусом r $(r \ll l)$, число витков N, погрузим катушку в среду μ, переведем катушку в сверхпроводящее состояние и по ней протекает ток I. Будем удерживать катушку от её расширения. Наша цель: найти работу внеш. сил при расширении катушки от r_1 до r_2. Будем считать что при расшир. провод. очень гибкие и на их движ. энергия не тратится

поле бескон. длинного соленоида. (краевыми дифф. пренебрегаем)



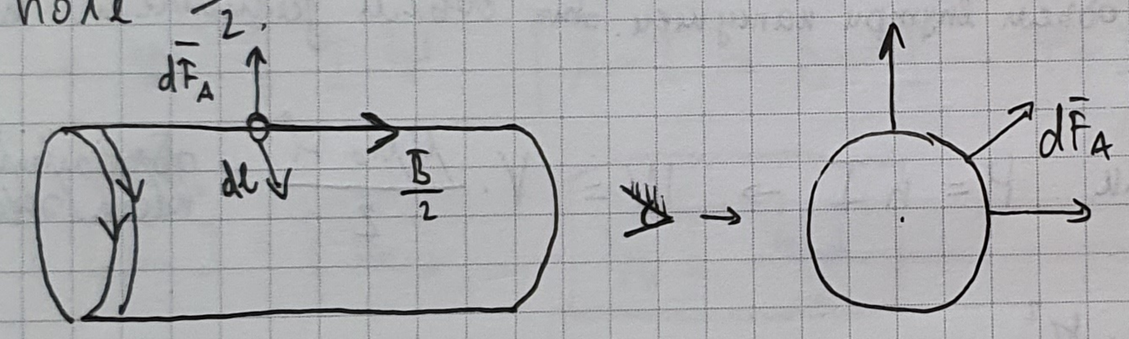
$$\oint_L H_l\,dl = \int_{AB} \underbrace{H_l}_{H\cos 0^\circ} dl + \int_{BC} \underbrace{H_l}_{H\cos\frac{\pi}{2}} dl + \int_{CD} \underbrace{H_l}_{=0} dl + \int_{DA} \underbrace{H_l}_{H\cos\frac{\pi}{2}} dl = H\cdot x$$

|поле будет только внутри|

if $n = \frac{N}{l} \to Hx = I\cdot n\cdot x \to \boxed{H = In}$

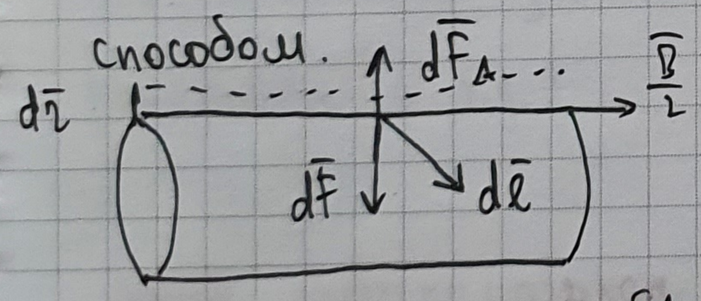
$B = \mu\mu_0 H \to B = \mu\mu_0 n I$

На толщине провода магнитное поле меняется от B внутри до 0 ~~снаружи~~ снаружи ⇒ будем считать, что провода наход. в среднем магнит. поле $\frac{B}{2}$.



$$d\bar{F}_A = I\left[d\bar{l}\ \frac{\bar{B}}{2}\right]$$

Найдём работу по расширению катушки от r_1 до r_2 квазиравновес. способом.



Наша сила dF соверш. работу при движ. эл-та dl на расстояние dr.

$d\bar{F}_A + d\bar{F} = 0$; $\delta A = (d\bar{F}, d\bar{r}) = -dF\,dr = -dF_A\,dr$

тогда элем. работа по расшир. всей катушки на dr

$$\delta A = -I\frac{B}{2}dr\int dl = -I\frac{B}{2}N\,2\pi r\,dr = -IBN\pi r\,dr = -\mu\mu_0\pi n^2 l I^2 r\,dr$$

$|L = \mu\mu_0\pi n^2 l| \to \delta A = -L I^2 r\,dr$

Магнитное поле в сверхпровод. имеет важное св-во: if есть виток с током, то магнитный поток этого витка в сверхпровод. состоянии не меняется. $\Psi = \iint_S B_n\,dS = const$