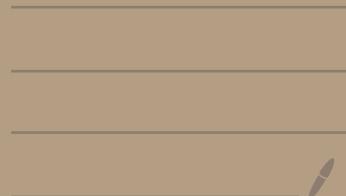


# Физика ЭКЗ

## 3 class

Автор: <https://vk.com/g.ashurov>



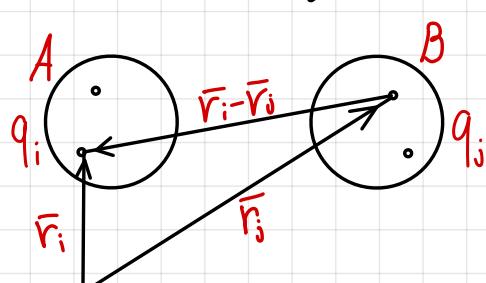
1) Закон Кулона. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции.

2 Электрически заряженное тело (мат.м-ки) действует друг на друга силами, направленными вдоль линии, соединяющей эти тела, и пропорциональны произведению этих зарядов, и обратнопропорциональны квадрату расстояния между ними - закон Кулона.

$$|\bar{F}_{AB}| = |\bar{F}_{BA}| = k \cdot \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}; \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}; \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$$

Если  $\epsilon \neq 1$ , то  $|\bar{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}$

Принцип суперпозиции:



$$\bar{F}_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \cdot \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\bar{r}_i - \bar{r}_j|$$

$$\bar{F}_{AB} = \sum_i \bar{F}_i = \sum_{ij} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \cdot \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{r_{ij}}$$

Взаимодействие 2-х эл-ков тел A и B никак не зависит от других эл-ков

1) Линейное распределение зарядов:  $\lambda = \frac{dq}{dx}$ ;  $[\lambda] = \text{КН/м}$

2) По поверхности:  $\sigma = \frac{dq}{dS}$ ;  $[\sigma] = \text{КН/м}^2$

3) По объему:  $\rho = \frac{dq}{dV}$ ;  $[\rho] = \text{КН/м}^3$

Напряженность эл.стационарного поля:

Лучше тело B создает вокруг себя эл.стационарное поле, и это поле будет действовать на тело A. Эта сила действия - есть сила ближкодействия:

$$\bar{F}_{AB} = \sum_i q_i \bar{E}(\bar{r}_i), \text{ где } \bar{E}(\bar{r}_i) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \cdot \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{r_{ij}} \quad - \text{ Напряженность}$$

эл. стат. поля.

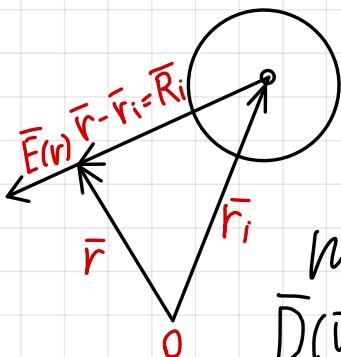
Напряженность эл. стат. поля - статическая характеристика, численно равная силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.

Статическая линия - линия, касательная в каждой точке к которой, показывает направление напряженности, а густота статических линий характеризует модуль напряженности.

Две напр-тии действуют притяж. суперпозиции:

$$\bar{E} = \sum_i \bar{E}_i$$

## 2) Теорема Гаусса в векторном виде



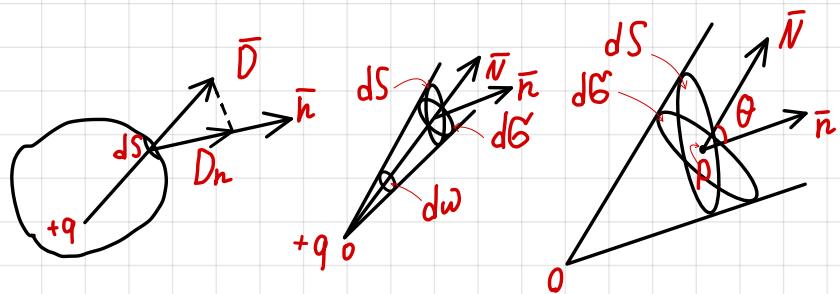
$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} (\bar{r} - \bar{r}_i),$$

Поле вектора эл. зарядов можно выразить векторной формулой математически:

$$\bar{D}(\bar{r}) = \epsilon_0 \bar{E}(\bar{r})$$

Формулировка:

Поле вектора эл. зарядов можно выразить через  $\epsilon_0$  и единичную нормальную к сфере поверхности этой сферы, равен суммарному заряду, заключенному внутри этой сферы



$D_n dS = d\varphi$ ;  $\varphi$  - эл. поток в-ра эл. зарядов через плоскость  $dS$  в направлении единичной нормали  
 $\varphi = \oint d\varphi = \oint D_n dS$ ,

$$d\varphi = dS \cos\theta; dS = |OP|^2 d\omega$$

$$D = \frac{q}{4\pi|OP|^2} \Rightarrow d\varphi = \frac{q}{4\pi|OP|^2} \cos\theta dS = \frac{q}{4\pi|OP|^2} d\tilde{\omega} = \frac{q d\omega}{4\pi}$$

$$= \oint \frac{q d\omega}{4\pi} = \frac{q}{4\pi} \cdot 4\pi = q$$

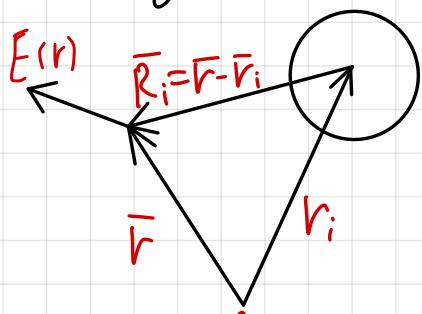
наибольший угол

$$\text{Сумма } q_1, q_2, \dots \Rightarrow \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \dots = \sum_i q_i$$

### 3) Потенциал электростатического поля.

Связь напряженности и потенциала

Связь:



$$\bar{E}(r) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} (\bar{r} - \bar{r}_i) \Rightarrow E_x(r) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} (x - x_i)$$

$$R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R_i} \right) = - \frac{1}{R_i^2} \frac{\partial R_i}{\partial x} = - \frac{1}{R_i^2} \cdot \frac{1}{R_i} (x - x_i) =$$

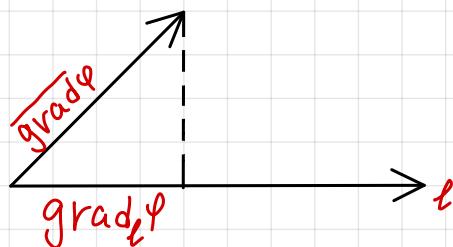
$$= - \frac{(x - x_i)}{R_i^3} \Rightarrow E_x(r) = - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R_i} \right) \Rightarrow E_x(r) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} \right), \\ = \varphi(r)$$

аналогично другие компоненты

$$\varphi(r) - \text{потенциал} \Rightarrow E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\bar{E} = \bar{i} E_x + \bar{j} E_y + \bar{k} E_z \Rightarrow \bar{E} = - \left( \bar{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Rightarrow \bar{E} = - \text{grad} \varphi$$

Важное свойство градиента:



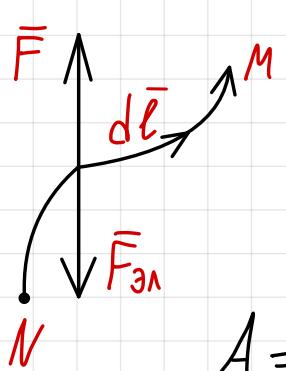
$$E_l = - \text{grad}_l \varphi = - \frac{d \varphi}{d l}$$

4) Потенциал электростатического поля.

Физический смысл потенциала. Потенциальная энергия заряженного тела

Рис. Смысл:

Пусть мы имеем заряд в эл. поле и перемещаем его из одной т-ки в другую квазигравитационным способом:



$$S A = (\bar{F} d \bar{\ell}) = F_e d \ell$$

$$\text{м.к. } \bar{F} + \bar{F}_{\partial A} = 0 \Rightarrow \bar{F} = -\bar{F}_{\partial A} = -q \bar{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\partial A} \ell = -q \operatorname{grad}_\ell \varphi = -q \frac{d \varphi}{d \ell} \Rightarrow F_\ell = q \frac{d \varphi}{d \ell}$$

$$A = \int_N^M q \cdot \frac{d \varphi}{d \ell} d\ell = q \int_N^M d\varphi = q(\varphi_M - \varphi_N);$$

$$A_{\partial A} = q(\varphi_N - \varphi_M)$$

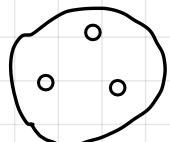
1) Если  $N=M \Rightarrow A_{\partial A}=0 \Rightarrow$  эл. ст. смыс - консервативные

2) Если  $M \rightarrow \infty \Rightarrow A_{\partial A} = q \varphi$

Потенциал - энергетическая кар-ка эл. поля, чи-лого равная работе поля по перемещению заряда из данной т-ки на  $\infty$ -го

3)  $W = q\varphi$  - потенциальная эн-ия заряда в данной т-ке поле. Если  $\bar{F} + \bar{F}_{\partial A} \neq 0 \Rightarrow A = \Delta W + \Delta k$

Потенциалы от эн-ий заряженного тела:



$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_N; \sum_i q_i = Q$$

Исходя из принципа суперпозиции, 2 эл-ма

действуют друг на друга по закону Кулона независимо от других эл-тов  $\Rightarrow W = \sum_{\substack{ij \\ i < j}} W_{ij}; q_i \text{ и } q_j$

Пусть  $q_i$  - заряженный, а  $q_j$  мы можем из  $\infty$  в данную т-ку拿来:

$$A = q_j \underbrace{\varphi(r_{ij})}_{(*)} ; \quad \varphi(r_{ij}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

При замене радиуса и есть пометка. Это же  
это 2-х зарядов.

$$W_{ij} = q_j \varphi(r_{ij}) = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

$$W = \sum_{\substack{ij \\ i < j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

(\*) - константа  $q_i$  в виде  $q_j$  (константа, созданная  $i$ -м зарядом в месте расположения  $j$ -го заряда).

5) Два фундаментальных свойства электростатического поля в пустоте

①  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ . к. Эл. стат. силы консервативны, то их работа по замкнутой траектории равна 0.

$$\oint A = (\bar{F}, d\ell) \Rightarrow \oint_L A = \oint_{\bar{L}} (\bar{F}, d\bar{\ell}) = \oint_L (q\bar{E}, d\bar{\ell}) = q \oint_L \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \oint_L \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = \oint_L E_\ell d\ell = 0$$

Циркуляция вектора напряженности по  $\neq$  замкнутой контуру = 0.

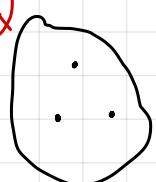
②  $\iint_S (\bar{D}, d\bar{S}) = \iint_S D_n dS = Q$

Понок Эл. индукции через замкнутую поверхность = суммарному заряду, заключенному в этой поверхности.

**Важно!** В этом вопросе нужно также доказать теорему Гаусса

## 6) Условие равновесного распределения зарядов на примере заряженного проводника

Q



$q_i$

Для нахождения равновесного распределения будем использовать принцип виртуального перемещения. Для этого необходимо указать физическую величину, которая имеет стационарное значение в условии равновесия:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}, \text{ где } r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|,$$

Условие связи:  $\sum_i q_i = Q$ ,  $q_i + \delta q_i$  — проварырующее состояние.

$$\sum_i (q_i + \delta q_i) = Q \Rightarrow \sum_i \delta q_i = 0$$

Принцип дислокации равновесного состояния: Для того, чтобы  $\delta q_i$  заряженное тело находилось в равновесии  $\Leftrightarrow$  член  $\delta W$  в виртуальном перемещении из данного равновесного состояния вариационной потенциальной функции  $= 0$  при доп. условии связи.

Ищем условный extr. Для этого используем метод неопределенного множителя Лагранжа

Составим вариационное условие:  $\delta W - d \delta (\sum_i q_i) = 0 (*)$ , где  $d$  — неопределенный множитель.

$$\delta W = \delta \left( \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{\delta q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i \delta q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{\delta q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} +$$

$$+ [i \leftrightarrow j] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,i \\ j \neq i}} \frac{q_j \delta q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_j \delta q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_i \left( \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right) \delta q_i = \sum_i \varphi(r_i) \delta q_i$$

$$\delta W \rightarrow (*):$$

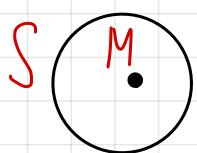
$\sum_i \delta q_i (\varphi(r_i) - \alpha) = 0 \Rightarrow \sum_i \delta q_i (\varphi(r_i) - \alpha) = 0$  т. к. это условие  
бесконечное и не зависит от  $\delta q_i \Rightarrow (\varphi(r_i) - \alpha) = 0 \Rightarrow \varphi(r_i) =$   
 $= \alpha = \text{const}$

## 7) Свойства равновесного распределения зарядов в проводнике

1) Напряженность эл. поля в т.м-ке проводника (внутри) = 0

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \text{т.к. } \varphi = \text{const} \Rightarrow \bar{E} = 0.$$

2) Общая плотность эл. заряда проводника в условиях равновесия = 0.



М-т.м-ка внутри проводника

$$\text{по теореме Гаусса: } \oint_S D_n dS = \iiint_V \rho dV, \text{ м.к.}$$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} \Rightarrow \bar{D} = 0 \Rightarrow \oint_S D_n dS = 0 \Rightarrow \iiint_V \rho dV = 0$$

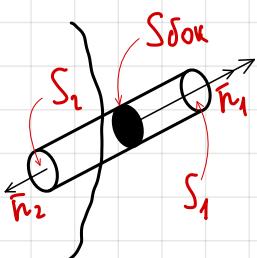
Берем V-маленький  $\Rightarrow \iiint_V \rho dV = \rho V = 0$ , но  $V \neq 0 \Rightarrow \rho = 0$

3) Напряженность эл. поля при равновесном распределении зарядов в т.м-ке поверхности проводника  $\perp$  ею внешней поверхности.



$$\text{м.к. } \varphi = \text{const}, \text{ но } \varphi(M) = \varphi(M_1) = \text{const} \Rightarrow \frac{\Delta \varphi}{\Delta r} = 0 \text{ или} \\ \frac{d\varphi}{dr} = 0; \frac{d\varphi}{dr} = (\operatorname{grad} \varphi)_r; \bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi \Rightarrow E_r = 0 \Rightarrow \bar{E} \parallel \bar{n}$$

4) Напряженность эл. поля в т.м-ке поверхности проводника равна:  $E = \frac{G}{\epsilon_0}$ , где G-поверхностная плотность.



$$\oint_S D_n dS = \iint_{S_1} D_n dS + \iint_{S_2} D_n dS + \iint_{S_{\text{окр}}} D_n dS \Rightarrow \\ \text{ОТ.К. } \bar{D} = 0 \Rightarrow \text{нормаль } S_{\text{окр}} \perp \bar{D}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} D_n dS = D_n S_1 = q, q = G S_1 = D_n S_1 \Rightarrow D = G \Rightarrow E = \frac{D}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{G}{\epsilon_0}$$

## 8) Уравнение Лапласа и Пуассона. Краевые задачи на электростатике

$$\oint_S D_n dS = Q = \iiint_V \rho dV$$

$$\oint_S D_n dS = \iiint_V \rho dV \Rightarrow \begin{cases} \text{если } V - \text{очень маленькое} \neq 0, \\ \text{то в каждой точке } \operatorname{div} \bar{D} \text{ и } \rho \\ = \text{const} \end{cases}$$

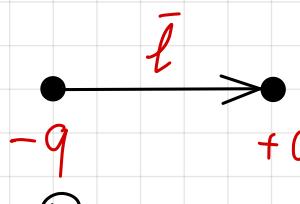
$\left. \begin{array}{l} S \\ M \\ V \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{div} \bar{D} V = \rho V \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \bar{D} = \rho} - \text{напр. Пуассон в} \\ \text{других видах}$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} = -\epsilon_0 \operatorname{grad} \varphi \Rightarrow \operatorname{div} \bar{D} = -\epsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\epsilon_0 \nabla^2 \varphi = \rho \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} - \text{у-е Пуассона}$$

Если в пространстве нет зарядов, то получаем у-е Лапласса:  $\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$

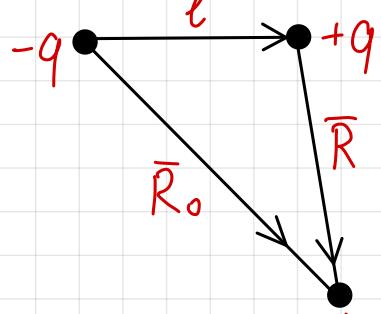
Две однозначные решения этих ДУ необходимо указать доп. условия, которые удовлетворят поставленным. Задание граничных условий и нахождение единственного решения в этом случае называется краевой задачей.

## 9) Плоское, симметрическое движение гироцентра.

 Динамо когерентное движение гироцентра, когда  $\bar{l} \rightarrow 0$ , а  $q \rightarrow \infty$

Динамотропный момент:

$$\bar{P} = \lim_{\substack{\ell \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} q \bar{l}, \quad |R| > |\ell|$$

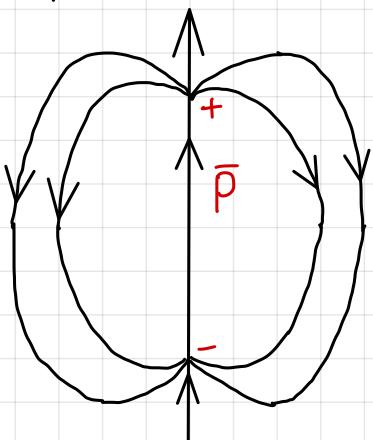


$$= \frac{1}{R_0} + \frac{(\bar{R}_0 \bar{l})}{R_0^3}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{q(\bar{R}_0 \bar{l})}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0} = \frac{(\bar{p}, \bar{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi; \quad \boxed{\operatorname{grad}(\bar{p}, \bar{r}) = \bar{p}} \quad (\ast) ; \quad \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^4} \operatorname{grad} \bar{r} =$$

$$= -\frac{3\bar{r}}{r^5} \Rightarrow \bar{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\bar{p}}{r^3} - \frac{3(\bar{p}\bar{r})\bar{r}}{r^5} \right]$$



$$(\ast): \quad (\bar{p}, \bar{r}) = p_x x + p_y y + p_z z = \chi$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} \chi = (p_x, p_y, p_z) = \bar{p}$$

10) Электростатическое поле в диэлектрике.  
Вектор электрической поляризации. Связь электрических векторов.

Диэлектрик описывается полем электрической поляризации  $\bar{P}$ .

Вектор поляризации можно определить так:

$\bar{P} \perp V$  - это дипольный момент со-фаз малого объема  $dV$ .

$\frac{\bar{P}}{V} = \sum_i \bar{p}_i$ ;  $\bar{P} = \bar{P}_0 + \bar{P}_{\text{вн}}$ ;  $\bar{P}_0$  - собственное,  $\bar{P}_0 = 0 \Rightarrow \bar{P} = \bar{P}_{\text{вн}}$   
 $\bar{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \bar{E}$ ;  $\bar{D}(\bar{r}) = \epsilon_0 \bar{E}(\bar{r}) + \bar{P}(\bar{r}) = \epsilon_0 \bar{E}(\bar{r}) + \epsilon \epsilon_0 \bar{E}(\bar{r}) - \epsilon_0 \bar{E}(\bar{r}) \Rightarrow$   
 $\bar{D}(\bar{r}) = \epsilon \epsilon_0 \bar{E}(\bar{r})$

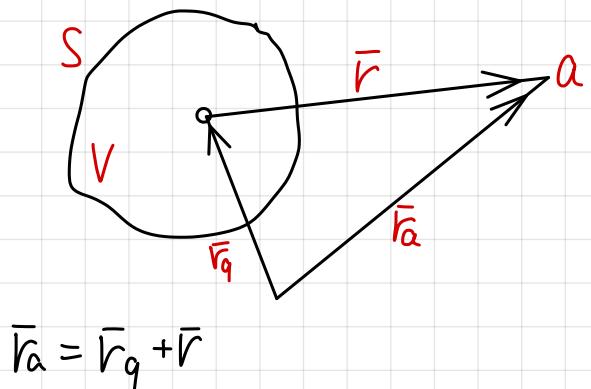
Можно добавить определения:

Свободные заряды - заряды, которые могут перемещаться по в-ву.

Связанные заряды - заряды, которые могут двигаться только в пределах атомов или мол-л.

11) Связь величина электрической помехи связана с объемной и поверхностной плотностью связанным зарядом

Пусть диэлектрик находится в вакуме.



$$\begin{aligned} \varphi_{1q} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\bar{P}, \bar{r})}{r^3} \\ (\text{B dV: } d\varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\bar{P}, \bar{r})}{r^3} dV \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\bar{P}, \bar{r})}{r^3} dV \\ r &= \sqrt{(x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_q} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_q} = \frac{x_a - x_q}{r^3} \quad (\text{аналогично для } y_q, z_q) \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{\bar{r}}{r^3} \Rightarrow \frac{(\bar{P}, \bar{r})}{r^3} = (\bar{P} \cdot \text{grad}_q \frac{1}{r}) \end{aligned}$$

$$\text{III. k. } \text{div}(\varphi \bar{a}) = \varphi \text{div} \bar{a} + (\text{grad} \varphi, \bar{a}) : \varphi = \frac{1}{r} ; \bar{a} = \bar{P}$$

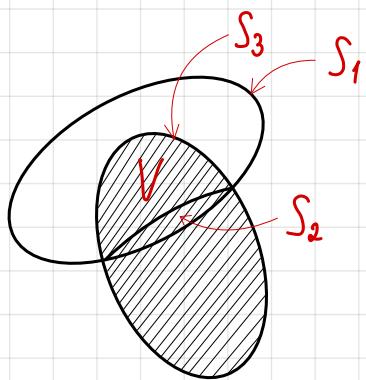
$$\text{div} \frac{\bar{P}}{r} = \frac{1}{r} \cdot \text{div} \bar{P} + (\text{grad}_q \frac{1}{r}, \bar{P}) \Rightarrow (\text{grad}_q \frac{1}{r}, \bar{P}) = \text{div} \frac{\bar{P}}{r} - \frac{1}{r} \text{div} \bar{P}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint_V \frac{\bar{P}}{r} dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\text{div} \bar{P}}{r} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_S \frac{P_n}{r} dS - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot$$

$$\cdot \iiint_V \frac{\text{div} \bar{P}}{r} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_S \frac{G_{cb}}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{P_{cb}}{r} dV$$

$$G_{cb} = P_n ; P_{cb} = -\text{div} \bar{P}$$

## 12) Теорема Гаусса при начальном диполе



$$S = S_1 + S_2$$

$$\oint\limits_S \epsilon_0 E_n dS = Q + Q_{CB};$$

$$Q_{CB} = \iiint_V \rho_{CB} dV + \iint_{S_3} \hat{\rho}_{CB} dS = - \iiint_V \operatorname{div} \bar{P} dV + \iint_{S_3} P_n dS =$$

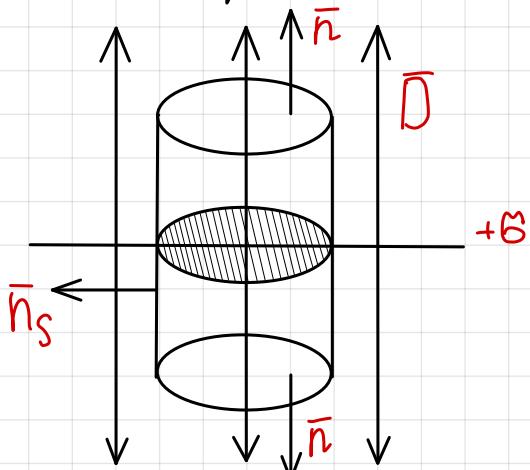
$$= - \iint_{S_1 + S_3} P_n dS + \iint_{S_3} P_n dS = - \iint_{S_2} P_n dS = \left[ \iint_{S_1} P_n dS = 0 \right] = - \iint_{S_1 + S_2} P_n dS$$

$$\oint\limits_S \epsilon_0 E_n dS = Q - \iint_{S_1 + S_2} P_n dS \Rightarrow \iint_S (\epsilon_0 E_n + P_n) dS = Q \Rightarrow \iint_S D_n dS = Q //$$

Формулировка:

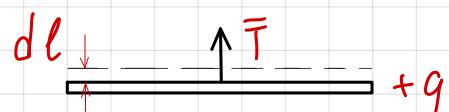
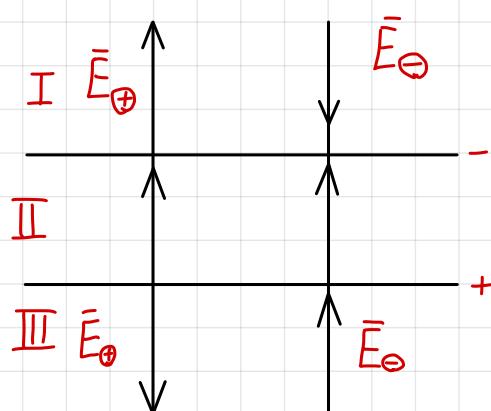
Поток вектора ЭМ индукции через замкнутую поверхность равен заряду, замкнутому внутри этой поверхности.

### 13) Энергия электрического поля. Конденсаторы.



$$\iint_{S_0} D_n dS = 2 \iint_{OCH} D_n dS + \iint_{\partial k} D_n dS = 2 D_n S =$$

$$= Q/S \Rightarrow D = \frac{Q}{2S} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$$



НЕП -  $-q$

$$I \cup III : E_+ + E_- = 0; II : E = E_+ + E_- \Rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

$$F = Eq = \frac{Q}{2\epsilon_0 S} q = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}; \quad \delta A = Tdl \Rightarrow A_{12} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} \delta l$$

$$A_{12} = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} (l_2 - l_1) \Rightarrow W = \frac{q^2 l}{2\epsilon_0 S} = \frac{q^2 l S}{2\epsilon_0 S^2} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad V = \frac{(\epsilon_0 E)^2}{2\epsilon_0 S} V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} V \Rightarrow U = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} ; \quad W = \iiint_V \omega dV - \text{если поле неоднородно, то это что-то иное}$$

Конденсатор - это такая система проводников, емкость которого не зависит от наличия других полей.

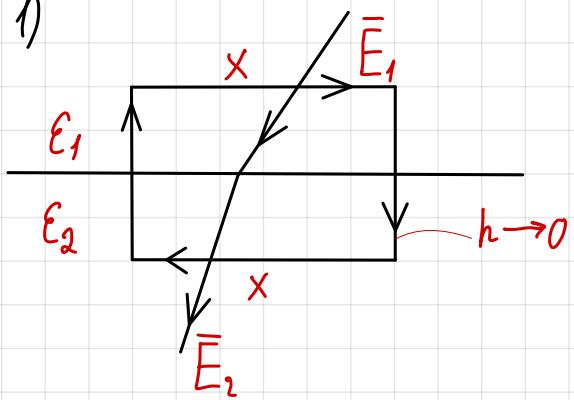
Емкость проводника - отношение заряда проводника к его потенциалу:  $C = \frac{q}{\varphi}$

Емкость конденсатора - отношение заряда к разности потенциалов:  $C = \frac{q}{U}$

14) Численные электростатические векторов на

границе разделов двух диэлектриков.

1)

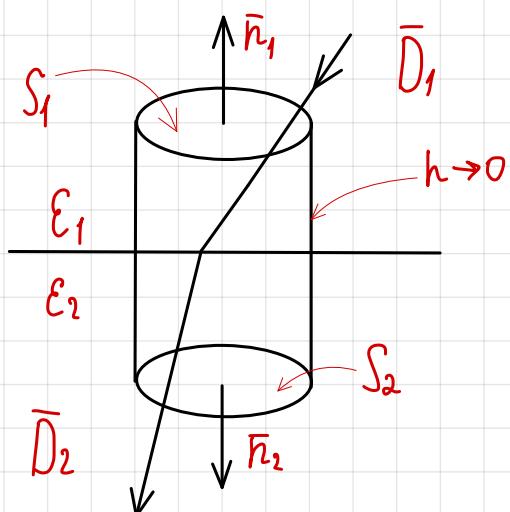


$$\oint_L E_d l = 0; \int_h E_d l = 0;$$

$$-E_{1r}x + E_{2r}x = 0 \Rightarrow E_{1r} = E_{2r}$$

$$\frac{D_{1r}}{\epsilon_1 \epsilon_0} = \frac{D_{2r}}{\epsilon_2 \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\frac{D_{1r}}{D_{2r}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$$

2)



$S_1 = S_2 = S$ ;  $S_0$ -мощность всего цилиндра

$$\oint_S D_n dS = 0 \Rightarrow -D_{1n}S + D_{2n}S = 0 \Rightarrow$$

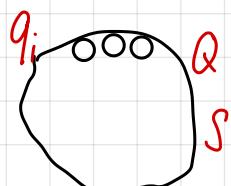
$$\Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$\epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n} = \epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n} \Rightarrow \boxed{\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

## 15) Теорема Пойнкара в электростатике

Потенциальную энергию взаимодействия зарядов можно представить как энергию поля, созданного этими зарядами на всем бесконечном пространстве.

Докажем на примере одномерного заряженного проводника:



$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_j q_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \left[ \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \varphi(r_j) \right] =$$

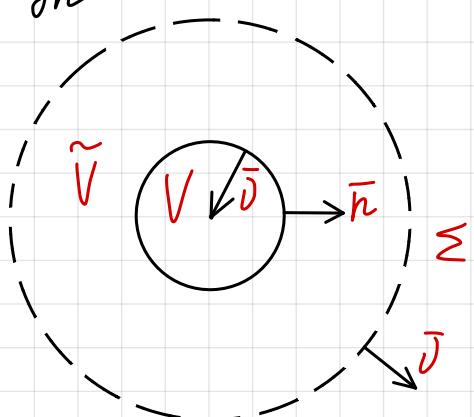
$$= \frac{1}{2} \sum_j q_j \varphi(r_j); \text{ m.k. } \varphi(r_j) = \text{const} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \sum_j q_j = \frac{Q\varphi}{2};$$

$$dQ = G dS \Rightarrow W = \frac{1}{2} \oint_S G \varphi dS; \text{ m.k. } E = \frac{G}{\epsilon_0} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \oint_S \epsilon_0 E_n \varphi dS;$$

$$\text{m.k. } E_n = - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Rightarrow W = - \frac{1}{2} \oint_S \epsilon_0 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = - \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) = \varphi \nabla^2 \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2$$

$$\oint_{S+\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \iiint_V \varphi \nabla^2 \varphi dV + \iiint_V (\operatorname{grad} \varphi)^2 dV;$$



Приложение:

Интеграл по поверхности  $\Sigma \rightarrow 0$ , м.к.

на бесконечности  $\varphi \rightarrow 0$ ;

$\nabla^2 \varphi = 0$  - уравнение Лапласа

$$\text{Таким образом: } \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \iiint_V (\operatorname{grad} \varphi)^2 dV$$

$$\text{м.к. } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Rightarrow \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = - \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \Rightarrow \frac{\epsilon_0}{2} \left( - \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \varphi dS \right) =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V (\operatorname{grad} \varphi)^2 dV, \text{ м.к. } E = - \operatorname{grad} \varphi \Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V (\operatorname{grad} \varphi)^2 dV =$$

$$= \iiint_{\tilde{V}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \iiint_{\tilde{V}} \omega dV$$

Тем самым Пойнок привел теорию дальнодействия в теорию близкодействия. Таким образом доказал существование Эл. поля как самостоятельного физического объекта.

16) Постоянный электрический ток. Основные дифференциальные законы постоянного тока.

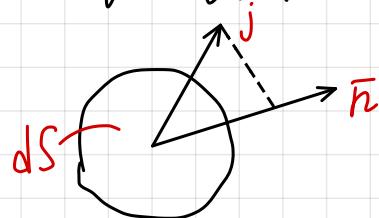
Эл. ток - направленное движение эл. зарядов.

Сила тока - кол-во неподвижного электричества, пересекающее сечение проводника в ед. времени:

$$I = \frac{dq}{dt}, [I] = [C/s] = [A]$$

Плотность тока - кол-во электричества за ед. времени через единицу поверхности перпендикулярно этой поверхности:

$$dq = j_n dS dt \Rightarrow I = \iint_S j_n dS$$

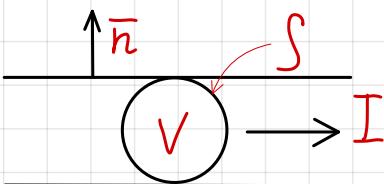


Свойства плотности тока:

1) В постоянном токе, если внутри проводника будет замкнутая поверхность, то сколько зарядов будет в этом объеме, столько и будет, поэтому:

$$\iint j_n dS = 0 \Rightarrow \text{м.к.} \iint j_n dS = \iiint_V \operatorname{div} j dV \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div} j dV = 0, V - \text{маленький} \\ \Rightarrow \operatorname{div} j \cdot V = 0 \Rightarrow [V \neq 0] \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} j = 0}$$

2) Ток не выходит из проводника по нормали к поверхности проводника  $\Rightarrow \boxed{j_n|_{\text{сок}} = 0}$



Основные диф. законы постоянного тока:

Если рассмотреть некий замкнутый контур состоящий из источника тока и проводника, то через проводник и через источник пойдет постоянный эл. ток :  $\oint_L E_l \, dl = 0$

1) Дир. закон Ома в проводнике за пределами источника. Экспериментально установлено :  $\bar{J} = G \bar{E}$ , где  $G$  - коэф. электропроводности;  $\rho = \frac{1}{G}$  - удельное сопротивление,  $[G] = [\text{Ом} \cdot \text{м}]$

2) Второй дир. закон Ома внутри источника тока:

$\bar{J} = G(\bar{E} + \bar{E}_0)$ ,  $\bar{E}$  - эл. поле,  $\bar{E}_0$  - сила кулоновского отталкивания, действующая на ед. положительного эл. заряда внутри источника тока.

3) Закон Дюарне - Ленца:

В  $\nabla$  объеме проводника  $dV$  за время  $dt$  возникает тепло  $qdVdt = \frac{j^2}{\rho} dVdt$ ;  $q$  - тепло, которое выделяется в ед. объема в ед. времени.  $[q] = \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}} \right]$

$$\delta Q = Pdt = \iiint_V \frac{j^2}{\rho} dt dV$$

## 17) Постоянный электрический ток. Интегральные законы постоянного тока. Потенциал ЭДС источника тока.

Эл. ток - направленное движение эл. зарядов.

Ампера тока - кол-во нейтрального электричества, пересекающее сечение проводника в eq. времени:

$$I = \frac{dq}{dt}, [I] = [C/s] = [A]$$

Плотность тока - кол-во электричества за eq. времени через eq. поверхность перпендикулярно этой поверхности:

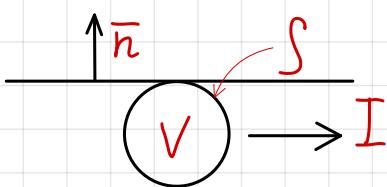
$$dq = jndS dt \Rightarrow I = \iint_S jndS$$

Свойства плотности тока:

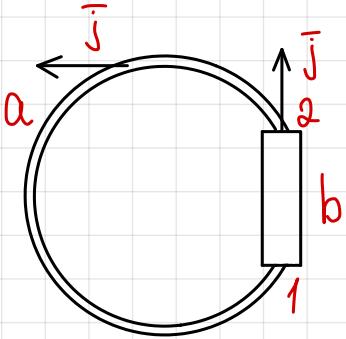
1) В постоянном токе, если внутри проводника взять замкнутую поверхность, то сколько зарядов будет в этом объеме, столько и выйдет, поэтому:

$$\iint_S jndS = 0 \Rightarrow \text{н.к. } \iint_S jndS = \iiint_V \operatorname{div}_j dV \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div}_j dV = 0, V\text{- маленький} \Rightarrow \operatorname{div}_j V = 0 \Rightarrow [V \neq 0] \Rightarrow \boxed{\operatorname{div}_j = 0}$$

2) Ток не выходит из проводника по нормали к поверхности проводника  $\Rightarrow \boxed{j_n |_{S_{\text{док}}} = 0}$



Основные интегральные законы постоянного тока:



$$2a_1: \bar{j} = G \bar{E}, 1b_2: \bar{j} = G (\bar{E} + \bar{E}_o)$$

$$j_e = G E_e \text{ и } j_o = G (E_e + E_{oe})$$

1) Сечение проводника имеет константный, но неконстантный ток  $I = j_e S = \text{const}$

$$2) \oint_L E_e d\ell = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_{2a_1} E_e d\ell &= \int_{2a_1} \frac{j_e}{G} d\ell = \int_{2a_1} \frac{j_e S}{GS} d\ell = I \int_{2a_1} \frac{d\ell}{GS} \\ \int_{1b_2} (E_e + E_{oe}) d\ell &= \int_{1b_2} \frac{j_e}{G} d\ell = I \int_{1b_2} \frac{d\ell}{GS} \end{aligned} \quad \Rightarrow \int_{2a_1} E_e d\ell + \int_{1b_2} E_e d\ell +$$

$$+ \int_{1b_2} E_{oe} d\ell = I \underbrace{\int_{2a_1} \frac{d\ell}{GS}}_{=R} + I \underbrace{\int_{1b_2} \frac{d\ell}{GS}}_{=r} \Rightarrow I(R+r) = \mathcal{E} - \text{закон Ома для замкнутого цепи.}$$

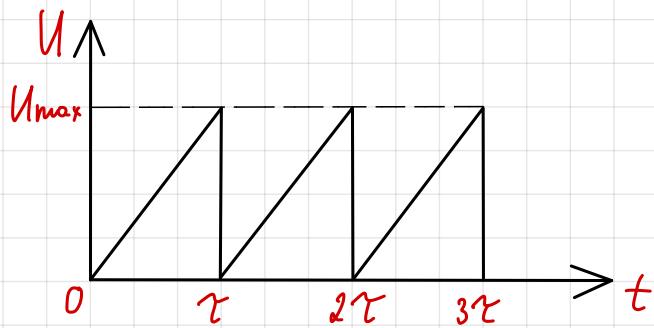
$$\text{Если } j=0, \text{ то } \int_{1b_2} E_{oe} d\ell = 0 \Rightarrow \int_{1b_2} E_e d\ell = \mathcal{E}$$

$$= \varphi_1 - \varphi_2 = - \int_{1b_2} E_{oe} d\ell \Rightarrow \mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1$$

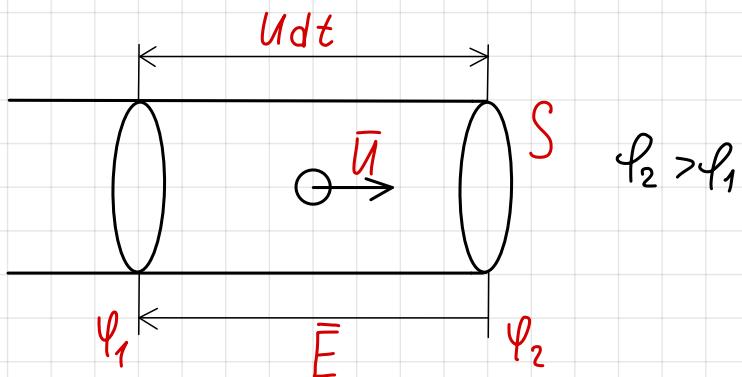
## 18) Теория Друде-Боренга электрического тока

Введем  $l$  - длина свободного пробега - среднее расстояние между 2-мя столкновениями электрона с решеткой. Электроны движутся хаотически. При наличии эл-го поля электроны получают доп. направленную скорость порядка  $1 \text{ м/с}$ . П.к. эта очень мало Друде предположил, что после каждого столкновения электрон полностью теряет скорость направления движения.  $\tau$  - время свободного пробега.

$$1) \text{ДЛЯ 2 З.Н.: } ma = eE \Rightarrow a = \frac{eE}{m} \Rightarrow U_{\max} = \frac{eE\tau}{m}; \bar{U}_{\max} = \frac{eE\tau}{m}$$



$$U = \frac{U_{\max}}{2} = \frac{a\tau}{2} = \frac{e\tau}{2m} E$$



будем считать, что электрон движется равномерно и плавно против напряженности эл. поля.

$d\tau : S : dN = n dV = n S U dt$  - кол-во электронов, которые проходят через площадку  $dS$  за время  $d\tau$ .  
 $\Rightarrow dq = en S U dt$

По определению плотности тока :

$$\underline{j} dS dt = dq = en S U dt \Rightarrow \boxed{j = en U} \quad - \text{пл-ть тока электронов в металле.}$$

В векторном виде :  $\bar{j} = -en \bar{U}$

Поставим скорость :

$$[j = enV = en \frac{e\tau}{2m} E = \frac{ne^2\tau}{2m} E = [g = \frac{ne^2\tau}{2m}] = gE] - \text{диф. з-и Ома}$$

$$P = \frac{1}{6} = \frac{2m}{ne^2\tau}$$

2) При каждом столкновении электрон теряет энергию  $\frac{mU_{\max}^2}{2}$ . Эта энергия передается ионам кристаллической решетки, т.е. переходит в тепло. В объеме  $dV$  число электронов  $dV \cdot n$ , а число столкновений  $D = \frac{dt}{\tau} \Rightarrow q dV dt = \frac{mU_{\max}^2}{2} n dV \cdot \frac{dt}{\tau} =$

$$= \frac{ma^2\tau^2}{2} \frac{n}{\tau} dV dt \Rightarrow q = \frac{m\tau ne^2 E^2}{2m^2} \Rightarrow q = \frac{ne^2\tau}{2m} E^2 \Rightarrow$$

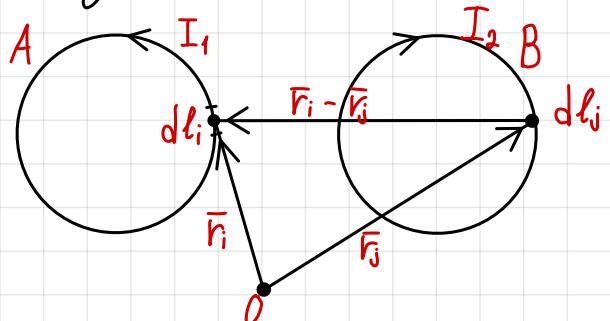
$\Rightarrow q = gE^2$  - закон Дюоуэ-Ленга в диф-й форме.

(\*) - тепло, которое выделяется в  $dV$  за  $dt$

19) Закон Ампера. Понятие магнитного поля, индуцируемое магнитным полем. Закон Био-Савара

Источником магнитного поля (м.п.) являются движущиеся заряды и магнитная индукция.

Если взаимодействия 2-х проводников с токами по аналогии с Кулонаовским взаимодействием. Эта сила пропорциональна произведению силы токов и обратнопропорциональна квадрату расстояния между ними. Причем эта сила может образом зависеть от ориентации токов. Оно называется силой Ампера.



$$\bar{F}_{AB} = -\bar{F}_{BA} \text{ по ЗЗ.Н.}$$

Сила, с которой контур B действует на контур A:

$$\bar{F}_{AB} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} I_1 I_2 \sum_{ij} \frac{[d\bar{l}_i][d\bar{l}_j, (\bar{r}_i - \bar{r}_j)]}{r_{ij}^3}, \text{ где } r_{ij} = |\bar{r}_i - \bar{r}_j|; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{A}$$

$$\bar{F}_{ij} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} I_1 I_2 \frac{[d\bar{l}_i][d\bar{l}_j, (\bar{r}_i - \bar{r}_j)]}{r_{ij}^3} \quad - \text{закон Ампера. Эта сила-} \\ \text{действия}$$



Если ввести понятие магнитного поля, т.е. контур B создает вокруг себя и внутри себя м.п., то на контур A будет действовать не контур B, а м.п., со з-

данные координаты В. Такая сила уже будет иной динкодействия.

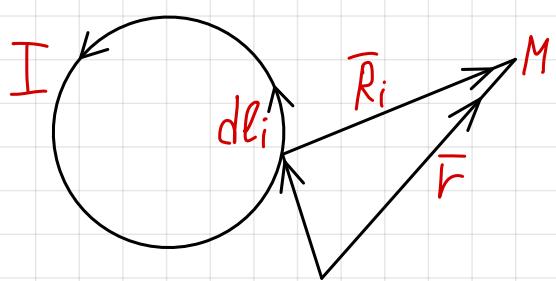
Введен:

Напряженность м.н.:  $\bar{H}_i = I_2 \sum_j \frac{[d\bar{l}_i, (\bar{r}_i - \bar{r}_j)]}{4\pi r_{ij}^3}$  в месте расположения элемента  $d\bar{l}_i$ ;  $B_i = \mu_1 \mu_0 H_i$

Сила Ампера:  $\bar{F}_{AB} = \sum_i I_1 [d\bar{l}_i, \bar{B}_i]$

Польза закона Ампера можно записать через 2 закона:

① Закон Био-Савара:



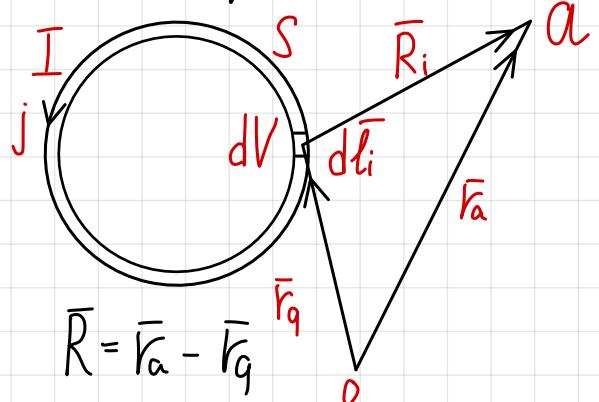
$$\begin{aligned}\bar{H}(r) &= I \sum_i \frac{[d\bar{l}_i, \bar{R}_i]}{4\pi R_i^3} \Rightarrow \bar{B}(r) = \mu_1 \mu_0 I \sum_i \frac{[d\bar{l}_i, \bar{R}_i]}{4\pi R_i^3} \\ &\Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_1 \mu_0 I}{4\pi} \int \frac{[d\bar{l}_i, \bar{R}_i]}{R_i^3}\end{aligned}$$

② Закон Ампера в другом виде:

$$\bar{F} = I \sum_i [d\bar{l}_i, \bar{B}_i] \text{ или } \bar{F} = I \int [d\bar{l}, \bar{B}]$$

20) Векторний магнітний потенціал. Свяжчи індукцію магнітного поля з векторним магнітним потенціалом

Векторний магнітний потенціал:



$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \sum_i \frac{[d\bar{l}_i \bar{R}_i]}{R_i^3}$$

$$I d\bar{l}_i = j S d\bar{l}_i = j S d\bar{l}_i = \int dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{[j \bar{R}]}{R^3} dV$$

$$R = \sqrt{(x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2}; \quad \text{grad}_a \frac{1}{R} = -\frac{\bar{R}}{R^3} = -\text{grad}_q \frac{1}{R}$$

Таким образом:

$$\bar{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V [j, \text{grad}_a \frac{1}{R}] dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V [\text{grad}_a \frac{1}{R}, j] dV$$

Используем сведения из векторного анализа:

$$\text{rot}(\varphi \bar{a}) = \varphi \text{rot} \bar{a} + [\text{grad} \varphi, \bar{a}]; \quad \varphi = \frac{1}{R}, \bar{a} = j$$

Получим:

$$[\text{grad}_a \frac{1}{R}, j] = \text{rot}_a \left( \frac{j}{R} \right) - \frac{1}{R} \text{rot}_a j \quad (*)$$

$$= \text{rot}_a \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{j}{R} dV \right) \Rightarrow \bar{B} = \text{rot}_a \bar{A}$$

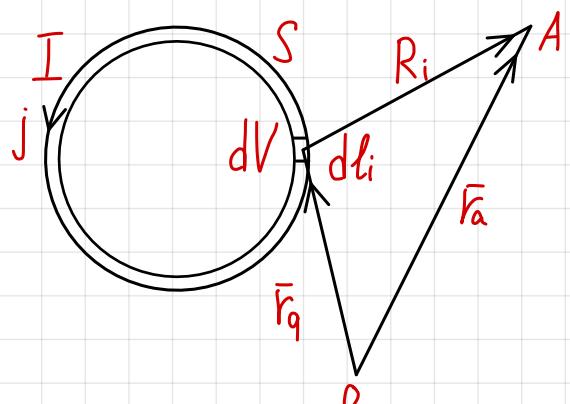
$= \bar{A}$  - векторний магнітний потенціал

Л.к. можна наблюдеши вузла прописані образом, індекс „a“ можна опустити:

$$\bar{B} = \text{rot} \bar{A} - \text{свяж} \bar{B} \text{ и } \bar{A}$$

(\*) - м.к.  $j$  незалежний від м-ки наблюдения, то  $\text{rot}_a j = 0$

## 2.1) Свойство векторного магнитного потенциала.



$$\beta + m\text{-ve нр-ва} \operatorname{div} \bar{A} = 0.$$

Dok-bo:

По свойствам плотности тока:  $\operatorname{div} \bar{j} = 0$  и  $j_n = 0$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\bar{j}}{R} dV \Rightarrow \operatorname{div} \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div}_a \frac{\bar{j}}{R} dV$$

$$\operatorname{div}(\varphi \bar{a}) = \varphi \operatorname{div} a + (\operatorname{grad} \varphi, \bar{a}) ; \quad \bar{a} = \bar{j} ; \quad \varphi = \frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}_a \frac{\bar{j}}{R} = \frac{1}{R} \operatorname{div}_a \bar{j} + (\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \bar{j}) = (\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \bar{j}) ; \quad (\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \bar{j}) =$$

$$= -(\operatorname{grad}_q \frac{1}{R}, \bar{j}) \Rightarrow \operatorname{div}_a \frac{\bar{j}}{R} = -(\operatorname{grad}_q \frac{1}{R}, \bar{j}) ; \quad \operatorname{div}_q \frac{\bar{j}}{R} = \frac{1}{R} \operatorname{div}_q \bar{j} +$$

$$+ (\operatorname{grad}_q \frac{1}{R}, \bar{j}) = (\operatorname{grad}_q \frac{1}{R}, \bar{j}) \Rightarrow \operatorname{div}_a \frac{\bar{j}}{R} = -\operatorname{div}_q \frac{\bar{j}}{R} \Rightarrow \operatorname{div} \bar{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot$$

$$\cdot \iiint_V \operatorname{div}_q \frac{\bar{j}}{R} dV = [\text{ном. Осторн.-Ляусса}] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{j_n}{R} dS = [j_n = 0] = 0$$

(\*) - по свойствам плотности тока.

22) Піоренія Стокса в пустоте в інтегральній  
і диференціальній формах.

$$\bar{B} = \text{rot} \bar{A}; \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\bar{j}}{R} dV; \bar{B} = \mu_0 \bar{H} \Rightarrow \mu_0 \bar{H} = \text{rot} \bar{A} \quad | \text{rot} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_0 \text{rot} \bar{H} = \text{rot} \text{rot} \bar{A}; \text{rot} \text{rot} \bar{A} = -\nabla^2 \bar{A} + \text{grad}(\text{div} \bar{A}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_0 \text{rot} \bar{H} = -\nabla^2 \bar{A}$$

По уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ где } \varphi = \iiint_V \frac{\rho dV}{4\pi \epsilon_0 R}; A_x = \mu_0 \iiint_V \frac{j_x dV}{4\pi R}$$

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} \leftrightarrow \mu_0 j_x \Rightarrow \nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x \Rightarrow \nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{j}$$

$\mu_0 \text{rot} \bar{H} = -\nabla^2 \bar{A} = \mu_0 \bar{j} \Rightarrow \boxed{\text{rot} \bar{H} = \bar{j}}$  - магн. Стокса в  
груп-м буже.

По магн. Стокса (з векторного аналіза):

$$\iint_S (\text{rot} \bar{a})_n dS = \oint_L a_\ell dl \Rightarrow \oint_L H_\ell dl = \iint_S (\text{rot} \bar{H})_n dS =$$

$$= \iint_S j_n dS = I$$

$$\boxed{\oint_L H_\ell dl = \sum_i I_i} \quad - \text{магн. Стокса в інт-м буже.}$$

23) Магнитное поле вещества. Вектор наполненности. Связь вектора наполненности с напряженностью магнитного поля.

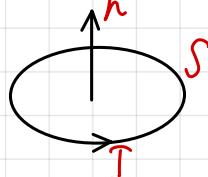
М. н. в в-ве:

Ч в-во состоит из атомов, в которых есть электрона. Они врачаются по замкнутым орбитам,  $\Rightarrow$  это есть магнитный диполь:  $\sum \bar{m}_i = \bar{M} dV$   
 $\bar{M}$  - вектор наполненности

$\bar{m}$  - магнитный момент в ед. объема магнетика  
 Магнитный диполь - ток, протекающий по тонкому контуру, приведенный размером к радиусу ядра и имеющий рас-л  $d$  от центра, где  $\bar{m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I, R]}{R^3}$ , где  $I$  - ток, создающий МП, соударяясь с ним.

Маг. мом:  $\bar{m} = IS\bar{n}$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\bar{m}, R]}{R^3}, \quad \bar{M} = \bar{M}_0 + \bar{M}_{\text{магн}}$$



Экспериментально доказано, что для большинства магнетиков:

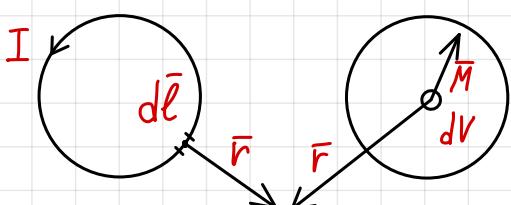
$\bar{M} = (\mu - 1) \bar{H}$ , где  $\mu$  - магнитная проницаемость в-ва - связь наполн-ти с напр-ю м. н.

Диэлектриков:  $\mu < 1$

Диэлектриков:  $\mu > 1$

Ферромагнетиков:  $\mu > 1 \sim 10^4$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \Rightarrow \bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) = \mu \mu_0 \bar{H}$$



$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\bar{j}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\bar{M}, \bar{r}]}{r^3} dV; \quad \bar{B} = \text{rot} \bar{A}$$

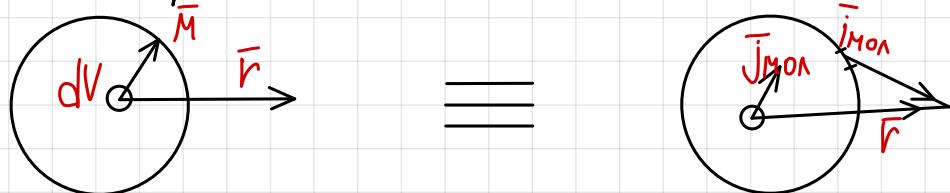
24) Теорема о связи вектора напряженности и  
макрокурентных токов напряженности.

Следствие из векторного анализа:  $\iiint_V \operatorname{rot} \bar{a} dV = \oint_S [\bar{n}, \bar{a}] dS$

Эквивалентное вектору магнитной полеризации  
макрокурентные токи схематизированы формулами:

$$\bar{j}_{\text{мол}} = \operatorname{rot} \bar{M}, \quad \bar{i}_{\text{мол}} = [\bar{M}, \bar{n}]$$

$\bar{n}$  - нормаль к поверхности тела в точке  $V$ , где лежит  $i_{\text{мол}}$



$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\bar{M}, \bar{r}]}{r^3} dV; \quad \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\bar{j}_{\text{мол}}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\bar{i}_{\text{мол}}}{r} dS$$

Доказ-бо:

$$\frac{\bar{R}}{R^3} = \operatorname{grad}_q \frac{1}{R} = [\bar{M}, \operatorname{grad}_q \frac{1}{R}] = -[\operatorname{grad}_q \frac{1}{R}, \bar{M}]; \quad \operatorname{rot}_q (\varphi \bar{a}) = \varphi \operatorname{rot} \bar{a} +$$

$$+ [\operatorname{grad} \varphi, \bar{a}]; \quad \varphi = \frac{1}{R}, \quad \bar{a} = \bar{M}$$

$$[\bar{M}, \operatorname{grad}_q \frac{1}{R}] = -\operatorname{rot}_q \frac{\bar{M}}{R} + \frac{1}{R} \operatorname{rot}_q \bar{M}; \quad \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\bar{M}, \bar{R}]}{R^3} dV =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{R} \operatorname{rot}_q \bar{M} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \operatorname{rot}_q \frac{\bar{M}}{R} dV$$

$$\iiint_V \operatorname{rot}_q \frac{\bar{M}}{R} dV = \oint_S \frac{[\bar{n}, \bar{M}]}{R} dS \Rightarrow \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\operatorname{rot}_q \bar{M}}{R} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{[\bar{n}, \bar{M}]}{R} dS$$

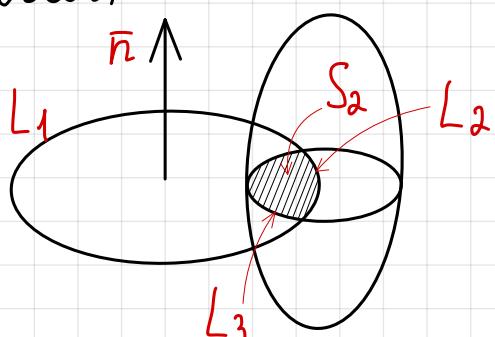
$$\bar{j}_{\text{мол}} = \operatorname{rot} \bar{M}$$

$$\bar{i}_{\text{мол}} = -[\bar{n}, \bar{M}] = [\bar{M}, \bar{n}]$$

## 25) Піорема Стокса при наявності магнітника.

$\oint H_\ell dl = I ; \frac{1}{\mu_0} \oint B_\ell dl = I + I_{MON}$  (на приступу суперпозиції)

магнітник:



$$I_{MON} = \iint_{S_2} j_{MONn} dS + \int_{L_3} (\bar{i}_{MON}, [\bar{J}, d\bar{l}])$$

$J$  - вектор - нормаль к  
роботи магнітника

$$\iint_{S_2} j_{MONn} dS = [норм. Стокса] =$$

$$= \oint_{L_2+L_3} M_\ell dl$$

$$\int_{L_3} (\bar{i}_{MON}, [\bar{J}, d\bar{l}]) = \int_{L_3} (d\bar{l}, [\bar{i}_{MON}, \bar{J}]) =$$

$$= \int_{L_3} [\bar{i}_{MON}, \bar{J}]_\ell dl = - \int_{L_3} [\bar{J}, \bar{i}_{MON}]_\ell dl =$$

$$= - \int_{L_3} [\bar{J}, [\bar{M}, \bar{J}]]_\ell dl = - \int_{L_3} M_\ell (\bar{J}, \bar{J}) dl + \int_{L_3} J_\ell (\bar{J}, \bar{M}) dl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{L_3} (\bar{i}_{MON} [\bar{J}, d\bar{l}]) = - \int_{L_3} M_\ell dl$$

$$I_{MON} = \oint_{L_2+L_3} M_\ell dl - \int_{L_3} M_\ell dl = \int_{L_1} M_\ell dl = \oint_{L_1+L_2} M_\ell dl, \text{ m.k. } \int_{L_1} M_\ell dl = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint B_\ell dl = I + \oint M_\ell dl \Rightarrow \oint_L \left( \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \right)_\ell dl = I \Rightarrow \oint H_\ell dl = I$$

## 26) Два фундаментальных свойства магнитомагнитического поля.

Для начала сформулируем теорему Стокса:  
 Для + замкнутого контура циркуляция напряженности маг. стат. поля равна сумме токов, протекающих через поверхность, которую охватывает этот контур. Причем направление обхода циркуляции и направление токов связаны правилом правого винта.

$$\textcircled{I} \quad \oint L H_d l = \sum_i I_i = I = \iint_S j_n dS$$

В диф-и форме:  $\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}$

$$\oint L B_d l = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 \sum_i (I_i + I_{i\text{mon}})$$

$$\operatorname{rot} \bar{B} = \mu_0 \bar{j} = \mu_0 (\bar{j} + \bar{j}_{\text{mon}})$$

$$\textcircled{II} \quad \bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \bar{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \bar{j} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) +$$

$$+ \bar{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} = (\bar{\nabla}, \operatorname{rot} \bar{A}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} =$$

$$= 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \bar{B} = 0} \quad - 2-\text{e} \text{ формула} \text{ div-го в диф-м виде.}$$

$$V: \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0$$

По теореме Гаусса - Острогрица:

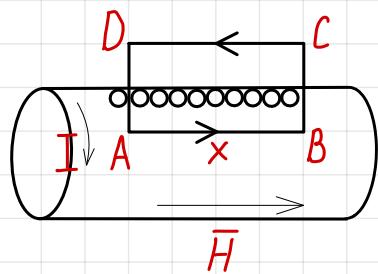
$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \Rightarrow \boxed{\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0} \quad - \text{внешний вид}$$

Поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность наружу этой поверхности равен 0.

## 27) Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии магнитного поля.

Рассмотрим катушку длиной  $l$ , радиусом  $r$  ( $r \ll l$ ), числом витков  $N$ . Погружим в среду с  $\mu$ . Перевели ее в сверхпроводящее состояние и по кей протекает ток  $I$ . Будем удерживать катушку от ее расширения цилиндром поверх витков. Цель - найти работу внешних сил при расширении катушки от  $r_1$  до  $r_2$ . Будем считать, что при расширении проводники очень тонкие, и движение энергии не тратится.

Поле  $\infty$ -но длинного соленоида (краевые эффекты пренебрегаем)



Поле будет только внутри.

$$\oint H_d l = \int_{AB} H_d l + \int_{BC} H_d l + \int_{CD} H_d l + \int_{DA} H_d l = H \cos 0^\circ l + H \cos 90^\circ l + H \cos 90^\circ l + H \cos 0^\circ l = H l + 0 + 0 + H l = 2Hl$$

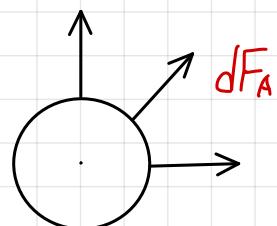
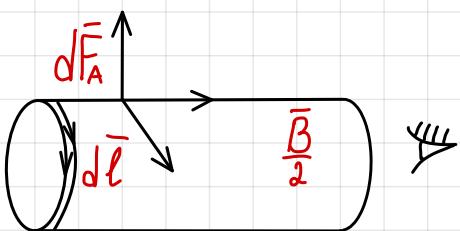
$$= H \cdot x$$

Согласно теореме о циркуляции:

$$\text{Если } n = \frac{N}{l} \Rightarrow Hx = Inx \Rightarrow H = In$$

$$B = \mu_0 H = \mu_0 n I$$

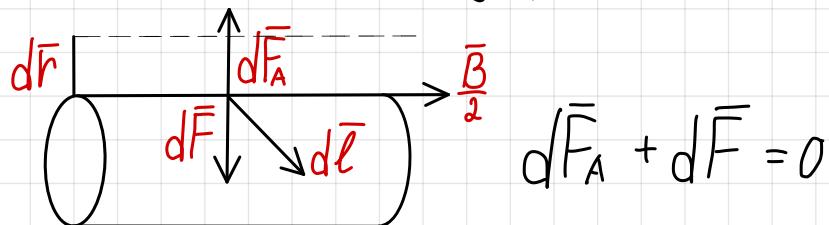
На тонущие провода м.н. меняется от  $B$  внутри до  $0$  снаружи  $\Rightarrow$  будем считать, что провод находиться в среднем м.н.  $\frac{B}{2}$



$$\bar{F}_A = I [d\bar{l}, \bar{B}],$$

$$d\bar{F}_A = I [d\bar{l}, \frac{\bar{B}}{2}]$$

Наиболее радому по расширению катушки от  $r_1$  до  $r_2$  квазигравитационным способом.



Сумма  $dF$  совершает работу при движении элемента  $dl$  на расстояние  $dr$

$$\oint A = (dF, dr) = -(dF_A dr) = -dF_A dr$$

При этом элементарные работы по расширению всей катушки на  $dr$ :

$$\oint A = -I \frac{\beta}{2} dr \oint dl = -I \frac{\beta}{2} N \cdot 2\pi r dr = -IBN\pi r dr = -\mu \mu_0 \cdot \pi r^2 l I^2 dr; d = \mu \mu_0 \pi r^2 l \Rightarrow dA = -dI^2 r dr$$

М.н. сверхпроводника имеет постоянное сб-бо:  
Если есть виток с током, то магнитный  
поток этого витка в сверхпроводнике со временем  
не меняется

$$\text{Поток: } \Psi = \iint_S B_n dS = \text{const}$$

$$\Psi = B \pi r^2 N = nl \pi r^2 \mu \mu_0 n I = \pi \mu \mu_0 n^2 l I r^2 = dI r^2 = \text{const}$$

$$I = \frac{\Psi}{\alpha r^2} \Rightarrow \oint A = -dI^2 r dr = -d \frac{\Psi^2}{\alpha^2 r^4} r dr = -\frac{\Psi^2}{\alpha r^3} dr$$

$$A_{12} = -\frac{\psi^2}{d} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^3} = \frac{\psi^2}{d \cdot 2} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) = \frac{\psi^2}{2d r_2^2} - \frac{\psi^2}{2d r_1^2} \Rightarrow$$

Эта работа заменена на изменение м.к. катушки. П.к.  $r_1$  и  $r_2$  введены произвольно, можно записать:

$$\Rightarrow W = \frac{\psi^2}{2d r^2}; \quad \psi = d I r^2 \Rightarrow W = \frac{d^2 I^2 r^4}{2d r^2} = \frac{d I^2 r^2}{2} =$$

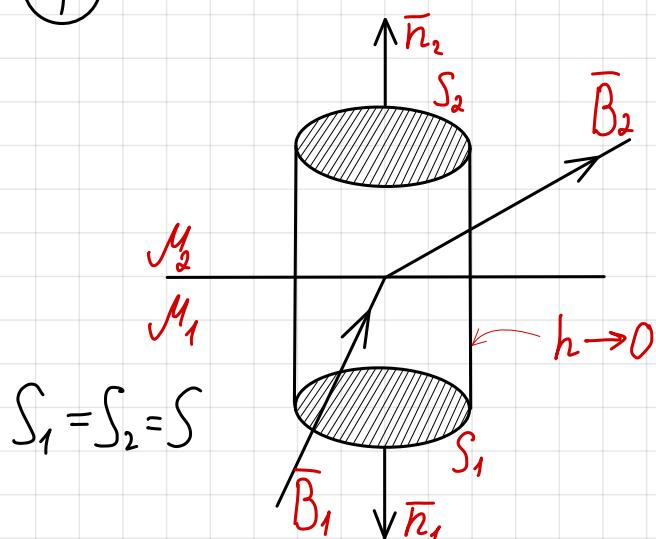
$$= \frac{\pi M_0 n^2 l I^2 r^2}{2} = \left[ V = \pi r^2 l \right] = V \cdot \frac{M_0 n^2 I^2}{2} \quad \text{м.к. } H = n I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = V \cdot \frac{M_0 H^2}{2} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{M_0 H^2}{2}} - \text{одинаковая пл-ть эл-ки м.н.}$$

$$\text{Если } \omega = \text{const} \Rightarrow W = \iiint_V \omega dV = \iiint_V \frac{M_0 H^2}{2} dV$$

28) Использование магнитостатических векторов  
на границе раздела двух материалов.

①



$$\oint \bar{B}_n dS = 0; \quad \oint \bar{B}_n dS = \iint_{S_2} \bar{B}_{2n} dS +$$

$$+ \iint_{S_1} \bar{B}_{1n} dS + \iint_{\text{ок}} \bar{B}_n dS = \iint_S (\bar{B}_{2n} - \bar{B}_{1n}) dS$$

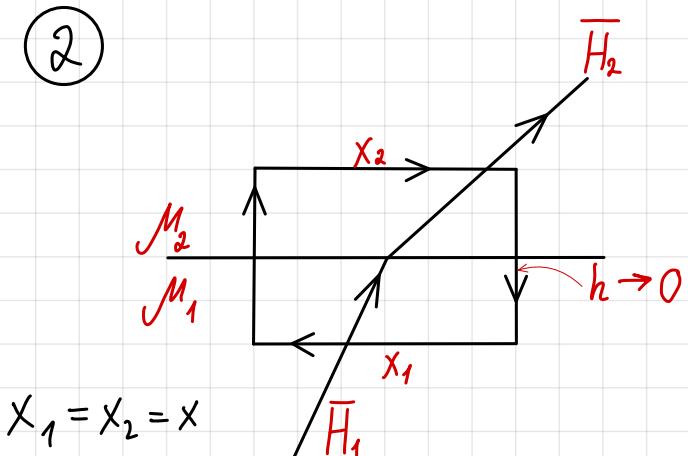
$$dS = 0; \quad S - \text{мала}$$

$$\iint_S (\bar{B}_{2n} - \bar{B}_{1n}) dS = (\bar{B}_{2n} - \bar{B}_{1n}) S$$

$$S - \text{мала}, \mu_0 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\bar{B}_{2n} = \bar{B}_{1n}}$$

$$\cancel{M_2 \mu_0 H_{2n}} = M_1 \mu_0 H_{1n} \Rightarrow \boxed{\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{M_1}{M_2}}$$

②



$$\Rightarrow \boxed{H_{2r} = H_{1r}}$$

$$\cancel{\frac{B_{2r}}{M_2 \mu_0}} = \frac{B_{1r}}{M_1 \mu_0} \Rightarrow \boxed{\frac{B_{2r}}{B_{1r}} = \frac{M_2}{M_1}}$$

$$\oint H_r d\ell = \int_{x_2} H_{2r} d\ell + \int_{x_1} H_{1r} d\ell +$$

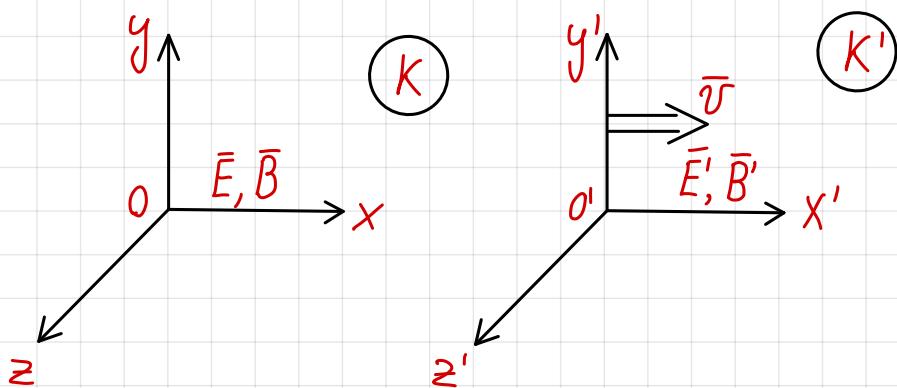
$$+ 2 \int_h^x H_r d\ell = \int_x (H_{2r} - H_{1r}) d\ell = 0,$$

$$x - \text{мала}$$

$$\int_x (H_{2r} - H_{1r}) d\ell = (H_{2r} - H_{1r}) x = 0 \Rightarrow$$

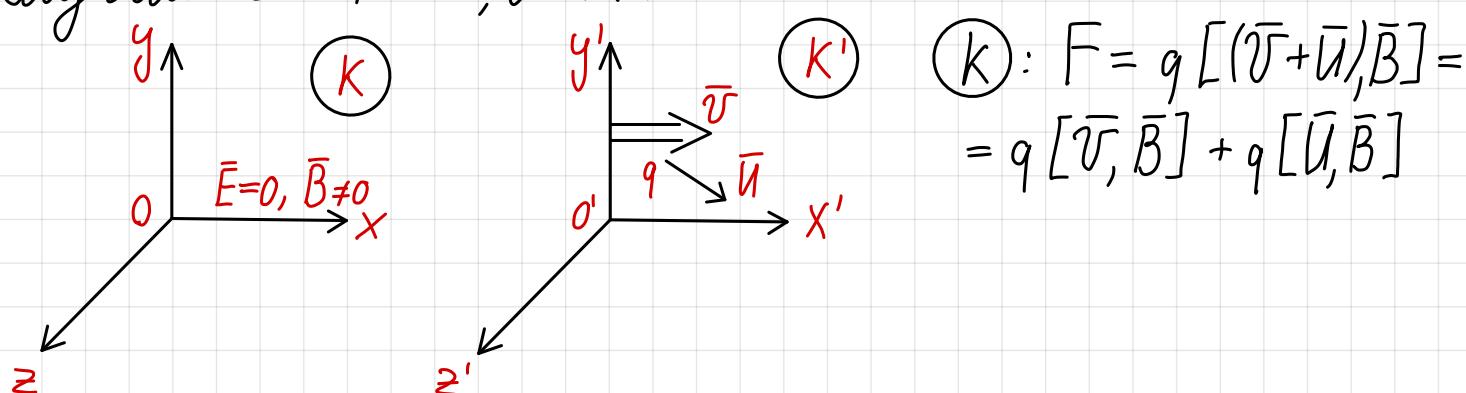
29) Преобразование полей при переходе из одной системы отсчета в другую.

Разделяем задачу по напоминанию напр. мы  
з.п. и инд-ции м.п. при переходе от 1-й С.О. к другой  
на две:



Нашли связь  $\bar{E}'$  и  $\bar{B}'$  с  $\bar{E}$  и  $\bar{B}$

1 случай: з.п. нет, м.п.  $\neq 0$



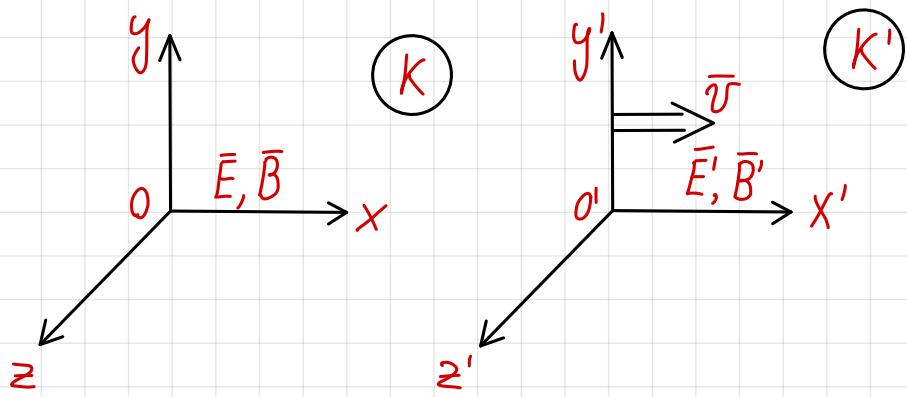
Сила не зависит от выбора с.о.:  $\bar{F} = \bar{F}'$

$$\bar{F}' = q\bar{E} + q[\bar{U}, \bar{B}'] \Rightarrow q\bar{E}' + q[\bar{U}, \bar{B}'] = q[\bar{V}, \bar{B}] + q[\bar{U}, \bar{B}]$$

$$\bar{B}' = \bar{B}, \bar{E} = [\bar{V}, \bar{B}]$$

В 1 случае, когда в системе  $K$  нет з.п., в движущейся С.О.  $(K')$  наливается з.п.  $\neq 0$ .

2 случай: в  $(K')$  движется  $q$  со скоростью  $\bar{V} \Rightarrow$  она создает вокруг себя м.п.



$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\bar{l}, \bar{r}]}{r^3}$$

$$I d\bar{l} = j S d\bar{l} = j S d\ell = j dV$$

$$\bar{j} = en\bar{v} \Rightarrow d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} endV \frac{[\bar{v}, \bar{r}]}{r^3}$$

$$dq = endV \Rightarrow d\bar{B} = \mu_0 \epsilon_0 \left[ \bar{v}, \frac{dq \bar{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \right] \Rightarrow d\bar{B} = \mu_0 \epsilon_0 [\bar{v}, d\bar{E}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{B} = \mu_0 \epsilon_0 [\bar{v}, \bar{E}]}$$

$$\text{М.к. скорость } (-\bar{v}) \Rightarrow \bar{B} = -\mu_0 \epsilon_0 [\bar{v}, \bar{E}]; \quad \bar{E} = \bar{E}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \bar{E}' &= \bar{E} + [\bar{v}, \bar{B}] \\ \bar{B}' &= \bar{B} - \mu_0 \epsilon_0 [\bar{v}, \bar{E}] \end{aligned}} \quad - \text{однозначно 2 случая}$$

30) Закон электромагнитной индукции Гаусса.

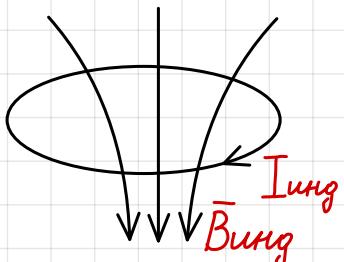
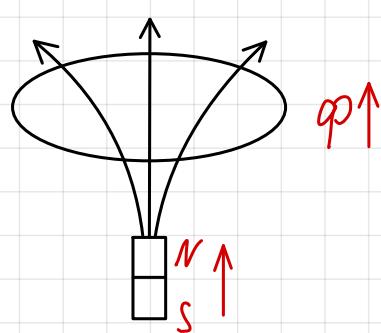
1-й фундаментальный закон Максвела. Правило Ленца.

$$E_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Закон Гаусса:

При изменении магнитного потока в проводящем контуре возникает ток, причем направление этого тока и изменение магнитного потока связанны по правилам Ленца.

Низкий ток в контуре течет в таком направлении, что его собственное м.п. стремится уменьшить изменение внешнего магнитного потока.



ЭДС индукции направле с ЭДС источника подчиняется всем правилам Кирхгофа  $\Rightarrow$  по Гауссу для отсчета ЭДС индукции тоже вводим наше створки сим, которые создают эту ЭДС:

$$E_{\text{инд}} = \oint E_{\text{фр}} dl; E_{\text{инд}} = \oint E'_l dl = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S B_n dS$$

Ноое эл. поле - неоднородное м.к.  $\oint E'_l dl \neq 0$

$$\bar{E} = \bar{E}' + \bar{E}^{\text{эм}} \Rightarrow \oint E_l dl = -\frac{d}{dt} \iint_S B_n dS$$

Максвелл предположил, что вихревое э. поле, возникающее при переносном магнитном, имеется не только в контуре, но и во всем пространстве. т.е. переменное м. н. оказывается эл. м. н. Таким образом, контур является индикатором Э-я вихревого э. н.

1 п.з. Максвеля:

Для физически замкнутого контура  $L$ , который ограничивает поверхность  $S$ , справедливо следующее соотношение:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} n dS$$

Рез. смысл: переменное м. н. всегда порождает вихревое электромагнитное.

Пом. Стокса:  $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \iint_S (\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}})_n dS \Rightarrow \iint_S (\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}})_n dS = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} n dS$

Если  $S$ -мала  $\Rightarrow (\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}})_n S = - \frac{\partial \mathbf{B}_n}{\partial t} S$

Ит. к.  $S \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} = - \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}$  - 1 п.з. в друг-м виде.

$\bar{\mathbf{J}} = \epsilon_0 (\bar{\mathbf{E}}^{\text{cm}} + \bar{\mathbf{E}}_0 + \bar{\mathbf{E}}')$ , где  $\bar{\mathbf{E}}^{\text{cm}}$ -помехозависимое эл. поле.

31) Закон электромагнитной индукции Фарадея.

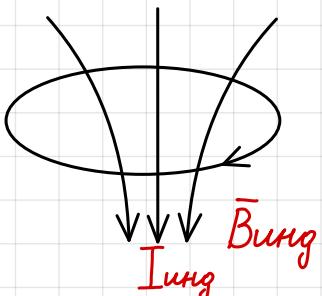
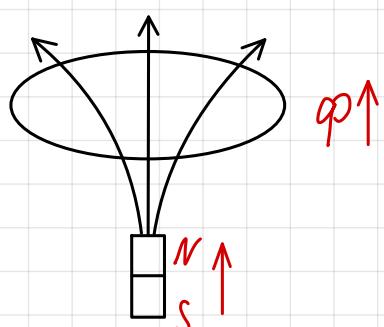
Возникновение ЭДС индукции при движении проводника в м.н.

$$E_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

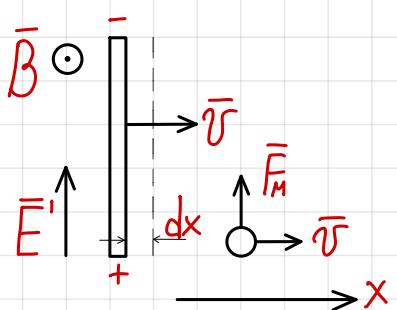
Закон Фарадея:

При изменении магнитного потока в проводящем контуре возникает ток, причем направление этого тока и изменение магнитного потока связанны по правилам Ленца.

Нид-й ток в контуре течет в таком направлении, что его собственное м.н. стремится уменьшить изменение внешнего магнитного потока.



Случай движущегося проводника в постоянном м.н.:



$\bar{F}_m = -e [\bar{v}, \bar{B}]$  - магнитная составляющая силы Лоренца

$\bar{F}_{ЭЛ} = -e \bar{E}$  - электрическая составляющая

Электроны перестанут протекать по проводнику, когда  $\bar{F}_m$  и  $\bar{F}_{ЭЛ}$  уравновесят друг друга:

$$\bar{F}_{\exists A} + \bar{F}_M = 0 \Rightarrow \bar{E}' = -[\bar{U}, \bar{B}]$$

$$U = E l = V l B \Rightarrow E_{\text{наг}} = V B l$$

$$E_{\text{наг}} = B l V = B l \frac{dx}{dt} = [S = x l] = B \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = \frac{d^4}{dt}$$

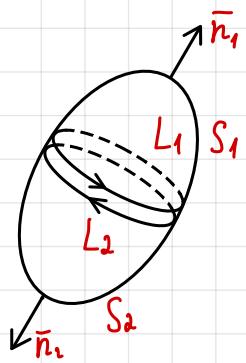
$$\bar{J} = G(E^{\text{cm}} + E_0 - [\bar{U}, \bar{B}])$$

2 приз. причина возникновение  $E_{\text{наг}}$ :

1) 1-й гр. з. Электродинамики, т.е. переменное м.н. всегда порождает вихревое поле.

2) При движении проводников в постоянном м.н. возникает  $E_{\text{наг}}$  за счет силы Лоренца, действующей на движущиеся заряды в м.н.

### 32) Уравнение непрерывности для электрического тока.



$$\oint_{L_1} \mathbf{H}_e d\ell = \iint_{S_1} \mathbf{j}_n dS$$

$$\oint_{L_2} \mathbf{H}_e d\ell = \iint_{S_2} \mathbf{j}_n dS +$$

$$\oint_{L_1} \mathbf{H}_e d\ell + \oint_{L_2} \mathbf{H}_e d\ell = \iint_{S_1} \mathbf{j}_n dS + \iint_{S_2} \mathbf{j}_n dS$$

$$\oint_{L_1} \mathbf{H}_e d\ell = - \oint_{L_2} \mathbf{H}_e d\ell$$

$$\iint_{S_1} \mathbf{j}_n dS + \iint_{S_2} \mathbf{j}_n dS = \boxed{\iint_S \mathbf{j}_n dS = 0}$$

$$\iint_S \mathbf{j}_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \bar{\mathbf{J}} dV = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \bar{\mathbf{J}} = 0}$$

Получим у-е непрерывности для норм. тока.

Если внутри поб-ми есть заряд, то:  $\iint_S \mathbf{j}_n dS = - \frac{dQ}{dt}$

$$Q = \iiint_V \rho dV \Rightarrow \iint_S \mathbf{j}_n dS = [\text{н.м. } \Gamma - 0] = \iiint_V \operatorname{div} \bar{\mathbf{J}} dV = - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = \\ = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\text{Если } V-\text{н.м.} \Rightarrow \operatorname{div} \bar{\mathbf{J}} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\widetilde{\Pi} \text{л. к. } V \neq 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \bar{\mathbf{J}} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}} - у-е непрерывности.$$

33) 2-й фундаментальный закон Максвела.

Переменное электрическое поле. Поток смещения.

Чт. у-я непрерывности:  $\iint_S j_n dS = -\frac{dQ}{dt}$

$$\iint_S D_n dS = Q \Rightarrow \iint_S j_n dS = -\frac{d}{dt} \iint_S D_n dS$$

$$\iint_{S_1} j_n dS + \iint_{S_2} j_n dS = \boxed{\iint_S j_n dS = 0} \quad \iint_S j_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j} = 0}$$

$$\iint_{S_1} j_n dS + \iint_{S_2} j_n dS = - \iint_{S_1} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS - \iint_{S_2} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS,$$

$$\iint_{S_1} j_n dS + \iint_{S_2} j_n dS = - \iint_{S_1} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS - \iint_{S_2} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS + \oint_{L_1} H_e dl + \oint_{L_2} H_e dl$$

$$\iint_{S_1} j_n dS = - \iint_{S_1} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS + \oint_{L_1} H_e dl$$

$$\iint_{S_2} j_n dS = - \iint_{S_2} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS + \oint_{L_2} H_e dl \quad (\text{Если } \frac{\partial D_n}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{смущ})$$

Для  $\vec{t}$  замкнутого контура (неподвижного) и под-ми, ограниченной этим контуром, справедливо.

$$\oint_L H_e dl = \iint_S j_n dS + \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS \quad \text{или} \quad \boxed{\oint_L H_e dl = I + \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS} \quad - 2-й грз. Максвела$$

$$3-го тока смещения: I_{an} = \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

Максвела  
в кум. виде

$\frac{\partial D_n}{\partial t}$  - плотность тока смещения

$$\text{Если } I = 0 \Rightarrow \oint_L H_e dl = \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS \Rightarrow B \neq 0$$

Рез. вывод: переменное во времени э.п. всегда порождает вихревое магнитное

$$\oint_L H_e dl = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{H})_n dS = \iint_S j_n dS + \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS, \quad S - \text{мако} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\operatorname{rot} \bar{H})_n S = j_n S + \frac{\partial D_n}{\partial t} S \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}} - 2 \text{ г.з.}$$

б. дуп. буж.

В этом вопросе лучше еще вспомнить ур-е  
непрерывности!

### 34) Уравнения Максвелла и материальные соотношения

$$1) \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$2) \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$3) \operatorname{div} \bar{B} = 0$$

$$4) \operatorname{div} \bar{D} = \rho$$

$$5) \bar{B} = M M_0 H$$

$$6) \bar{D} = \epsilon \epsilon_0 \bar{E}$$

$$7) \bar{j} = \sigma \bar{E}$$

Переменные в этих у-ях:

$$\bar{E}, \bar{D}, \bar{H}, \bar{B}, \bar{j}$$

Векторное уравнение 7, но  
векторное переменное 5  $\Rightarrow$  2 у-я  
не являются независимыми.

$$\bullet \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \mid \operatorname{div} \Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{E} = -\operatorname{div} \left( \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{E} = 0 \Rightarrow -\operatorname{div} \left( \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{B}) = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \bar{B} = \text{const}$$

Если возьмем в нач. мом. времени  $\operatorname{div} \bar{B} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \bar{B} = 0$   
во все остальное время

$$\bullet \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \mid \operatorname{div} \Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} = \operatorname{div} \bar{j} + \operatorname{div} \left( \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \bar{j} + \operatorname{div} \left( \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{у-е непрерывности})$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{D}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{D} - \rho) = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \bar{D} - \rho = \text{const}$$

Возьмем мом. времени, когда  $\text{const} = 0 \Rightarrow \text{const} = 0$   
в течение всего времени  $\Rightarrow \operatorname{div} \bar{D} = \rho$ .

Среда наименее насыщена, т.е. нет спонтанной намагничивости, нет спонтанной насыщивости и  
нет стационарных  $E$  источников, тогда будем работать с системой у-й.

### 35) Пуассона Гюйгенса для электромагнитного поля.

$$\bar{P}_0 = 0, \bar{M}_0 = 0, \bar{E}_0 = 0$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}; \quad \bar{B} = \mu \mu_0 \bar{H}; \quad \bar{D} = \epsilon \epsilon_0 \bar{E}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} | \cdot \bar{H} \\ \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} | \cdot \bar{E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\bar{H}, \operatorname{rot} \bar{E}) = -\mu \mu_0 (\bar{H}, \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}) \\ (\bar{E}, \operatorname{rot} \bar{H}) = \epsilon \epsilon_0 (\bar{E}, \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}) + (\bar{J}, \bar{E}) \end{cases}$$

$$(\bar{H}, \operatorname{rot} \bar{E}) - (\bar{E}, \operatorname{rot} \bar{H}) = -\mu \mu_0 (\bar{H}, \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}) - (\bar{J}, \bar{E}) - \epsilon \epsilon_0 (\bar{E}, \frac{\partial \bar{E}}{\partial t})$$

$$(\bar{H}, \operatorname{rot} \bar{E}) - (\bar{E}, \operatorname{rot} \bar{H}) = \operatorname{div} [\bar{E}, \bar{H}]$$

$$\operatorname{div} [\bar{E}, \bar{H}] = -(\bar{J}, \bar{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} + \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \right)$$

$(\bar{J}, \bar{E}) = 6E^2 = q$  - мониторингメニュー, выделяется в eq. объема, т.е. это j-ое меню, выделяется в eq. времени в eq. объема.

$$[\bar{E}, \bar{H}] = \bar{S} - \text{ベクトル Гюйгенса.}$$

$$\operatorname{div} \bar{S} = -q - \frac{\partial \omega}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial \omega}{\partial t} = q + \operatorname{div} \bar{S} - \text{мерене Гюйгенса в}$$

$$\iiint_V -\frac{\partial \omega}{\partial t} dV = \iiint_V q dV + \iiint_V \operatorname{div} \bar{S} dV \text{ итм формуле.}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \omega dV = \frac{dQ}{dt} + \iint_S S_n dS \Rightarrow -\frac{d\omega}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \iint_S S_n dS - \text{мерене}$$

на Пойнтинга в им. единице.

Формулировка теоремы:

Убыль энергии Э.М.Н. в объеме  $V$  за ед. времени = сумма мощности Диссипативного тепла, выделяющегося в этом объеме и потока Эн-ии Э.М.Н., вышедшему из объема  $V$  за ед. времени.

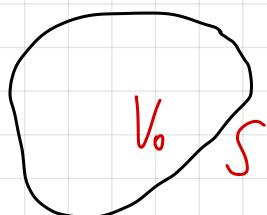
$\bar{S}$  - мощность потока Эн-ии Э.М.Н. (это Эн-ия, пересекающая ед. поверхность  $L$  за ед. времени)

$$(*) : \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{M_M H^2}{2} \right) = \frac{M_M \cancel{2H} \cdot \partial H}{\cancel{2} \cdot \partial t}$$

(\*) : Объемная ин-ть Э.М.Н. и м.н. :  $\omega = \omega_{\text{ЭЛ}} + \omega_M$  - объемная ин-ть Эн-ии Э.М.Н.

36) Релаксация электрического заряда в проводниках. Время релаксации.

$V_0$  - объем проводника,  $Q_0$  - заряд в нач. мом. времени. Вокруг проводника идеальный диэлектрик, проводимость  $j = 0$



$$-\frac{dQ}{dt} = \iint_S j_n dS$$

Поток возникает за счет того, что заряд создает внутри проводника эл. поле.

$$j_n = \sigma E_n = \left[ E_n = \frac{D_n}{\epsilon \epsilon_0} \right] = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} D_n \Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \iint_S D_n dS;$$

$$\iint_S D_n dS = Q \Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \cdot Q \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{Q(t)}{Q_0} = -\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \cdot t \Rightarrow Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} t}$$

-  $y$  - е релаксацием эл. заряда.

Здесь  $\tau = \frac{\epsilon \epsilon_0}{\sigma}$  - время релаксации (это время, за которое заряд уменьшается в  $e$  раз.)

Для обычного проводника:  $\sigma \sim 10^7$ ,  $\epsilon \sim 1$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$   $C/V \cdot m$   $\Rightarrow \tau \sim 10^{-18} \div 10^{-19} s$ .

37) Уравнения Максвелла в пустоте. Вывод базового уравнения, скорость распространения электромагнитных волн.

Имеем однородный изотропный незаряженный диэлектрик:  $\sigma = 0, E_0 = 0$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \bar{D} = 0$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}; \quad \bar{B} = \mu \mu_0 \bar{H}$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0; \quad \bar{D} = \epsilon \epsilon_0 \bar{E}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \bar{H} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \operatorname{rot} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0}.$$

$$\cdot \operatorname{rot} \left[ -\frac{1}{\mu \mu_0} \operatorname{rot} \bar{E} \right] = -\frac{1}{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}.$$

$$\cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{E}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{E} = -\nabla^2 \bar{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{E} = \left[ \text{м.к. } \operatorname{div} \bar{D} = 0 \right] = -\nabla^2 \bar{E}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0} \nabla^2 \bar{E} \Rightarrow \nabla^2 \bar{E} = \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \text{из прошлого семестра} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \bar{E} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}}, \text{ где } v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}}; \mu = 1, \epsilon = 1$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow v = \frac{C}{\sqrt{\mu \epsilon}} // - \text{скорость распространения}$$

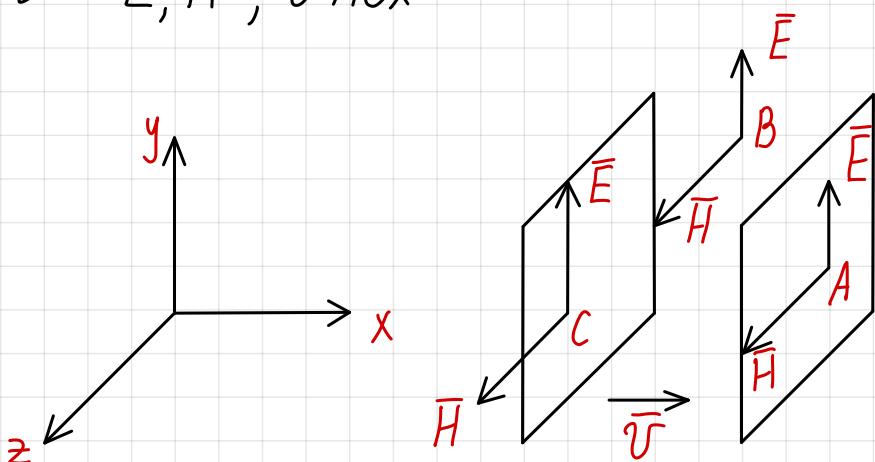
электромагнитных волн.

38) Распространение суперка Хевисайда в идеальном диэлектрике. Связь между напряженностью электрического и магнитного полей. Скорость распространения суперка.

Рассмотрим частный случай распространения эл. маг. волн в виде троского суперка Хевисайда. Пусть в нач. времени  $t = 0$  имеется ото троска в некоторой области троского слоя, ограниченного 2-мя ||-ми троскостями, которое будем называть передним и задним. При этом  $E \parallel H$  внутри слоя - однородны, т.е. одинаковы по величине и направлению во всех т-ках внутри слоя. Их направление || границами троскостей и  $E \perp H$ .

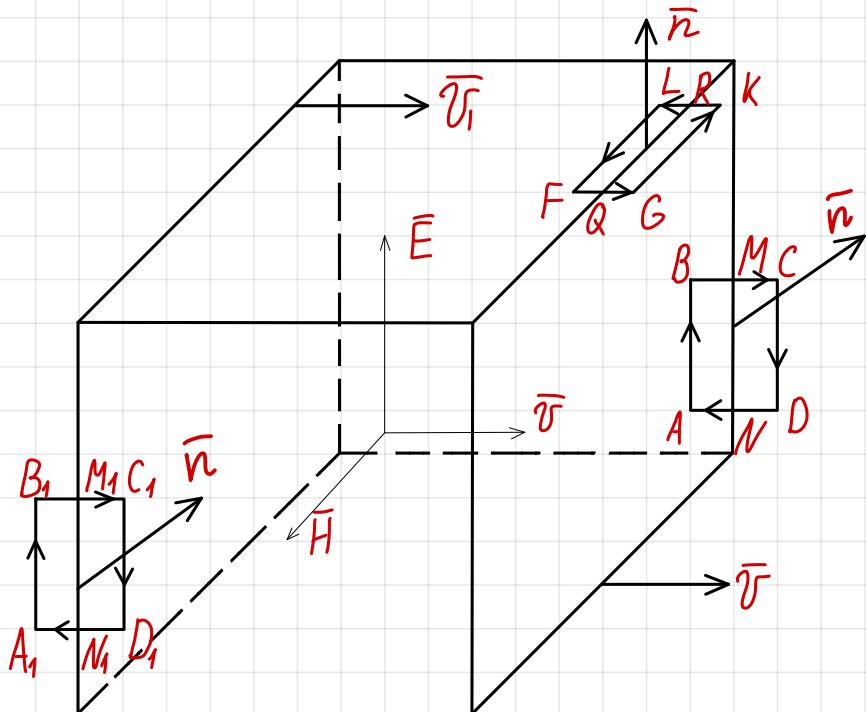
Пусть этот суперок движется с  $V = \text{const}$  в направлении  $\perp$ -и его троскости

$$t : E, H, V \parallel O_x$$



$$\bar{E}_A = \bar{E}_B = \bar{E}_C = \bar{E}$$

$$\bar{H}_A = \bar{H}_B = \bar{H}_C = \bar{H}$$



Рассмотрим покоящиеся контур  $ABCD$  и применим к нему 19.з. Максвеля:

$$ABCD : \oint E_d l = - \frac{d}{dt} \left( \iint_S B_n dS \right)$$

$$\iint_S B_n dS = -\mu\mu_0 H |AB| |BM| \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \iint_S B_n dS \right) = -\mu\mu_0 H |AB| \frac{d}{dt} |BM|$$

$$\oint_L E_d l = E |AB| \Rightarrow E |AB| = \mu\mu_0 H |AB| \frac{d}{dt} |BM| \Rightarrow E = \mu\mu_0 H \dot{U} \quad (1)$$

$A_1B_1C_1D_1$ :

$$\iint_S B_n dS = -\mu\mu_0 H |M_1C_1| |C_1D_1|$$

$$\frac{d}{dt} \left( \iint_S B_n dS \right) = -\mu\mu_0 H |C_1D_1| \cdot \frac{d}{dt} |C_1M_1| = \mu\mu_0 H |C_1D_1| \dot{U}_1 \Rightarrow \oint_L E_d l = -\dot{U}_1$$

$$= -E |C_1D_1| \Rightarrow -E |C_1D_1| = -\mu\mu_0 H |C_1D_1| \dot{U}_1 \Rightarrow E = \mu\mu_0 H \dot{U}_1 \quad (2)$$

$$(1) \text{ и } (2) \Rightarrow U = U_1!$$

т.е. передний и задний фрагмент спуска движутся с одной ск-той  $\dot{U}_1$ , т.е. только одна спуска не меняет-

а в процессе распределения  $\Rightarrow$  он не меняет свою форму. т.е. нет дисперсии при распределении струйки в идеальной изотропной непроводящей среде.

$$FGKL \cdot \oint H d\ell = \frac{d}{dt} \left( \iint D_n dS \right)$$

$$\oint H d\ell = H |LF|$$

$$\iint_S D_n dS = \epsilon \epsilon_0 E |LF| |FQ| \Rightarrow H |LF| = \epsilon \epsilon_0 E |LF| \frac{d}{dt} |FQ| \Rightarrow$$

$\underbrace{\phantom{H |LF|} = \gamma}$

$$\Rightarrow H = \epsilon \epsilon_0 E \gamma \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow f \quad (1) \Rightarrow E = \mu \mu_0 \gamma H = \mu \mu_0 \gamma \epsilon \epsilon_0 E \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow f \quad (3) \Rightarrow H = \epsilon \epsilon_0 E \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} \Rightarrow \sqrt{\epsilon \epsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H$$

39) Уравнения Максвела и электромагнитные волны. Доказательство непрерывности электромагнитных волн.

Уравнения Максвела:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \bar{D} = 0 \\ \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \bar{B} = 0 \\ \bar{B} = \mu \mu_0 \bar{H} \\ \bar{D} = \epsilon \epsilon_0 \bar{E} \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{array} \right| = \bar{i} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) =$$

$$= -\bar{i} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \bar{j} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \bar{k} \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = 0 \Rightarrow \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial D_x}{\partial x} = 0$$

$\swarrow 0 \quad \searrow 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

(1)

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \bar{i} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) =$$

$$= \bar{i} \frac{\partial D_x}{\partial t} + \bar{j} \frac{\partial D_y}{\partial t} + \bar{k} \frac{\partial D_z}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \beta = 0 \Rightarrow \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\partial \beta_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial D_z}{\partial t} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial D_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\partial D_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial D_z}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

(2)

Из (1) и (2):

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{E} \perp O_x; \bar{H} \perp O_x \Rightarrow \exists \text{ м. вак-}$$

на поперечная

$$(3) \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \bar{E} \perp \bar{H}$$

т.е. переменное м. н. вдоль оси Oz приводит к возникновению поперечного э. н. вдоль оси Oy и

наоборот.

Найдем связь между  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ :

$$\bar{E} = f \left( t - \frac{x}{v} \right) = f(\alpha)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{d E_y}{d \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{d E_y}{d \alpha} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{d E_y}{d \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{d E_y}{d \alpha} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{d H_z}{d \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{d H_z}{d \alpha} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{d H_z}{d \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{d H_z}{d \alpha} \end{cases} \Rightarrow \text{уравнение } 3$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{v} \cdot \frac{d E_y}{d \alpha} = -\mu \mu_0 \cdot \frac{d H_z}{d \alpha} \\ -\frac{1}{v} \cdot \frac{d H_z}{d \alpha} = -\epsilon \epsilon_0 \cdot \frac{d E_y}{d \alpha} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\epsilon \epsilon_0} d E_y = \sqrt{\mu \mu_0} d H_z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E_y = \sqrt{\mu \mu_0} H_z}$$

## 40) Интерференция света. Основ Пуна.

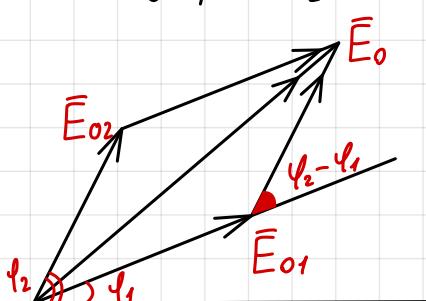
Интерференция - сложение волн вир-бе, при котором происходит перераспределение энергии. При разных частотах иници-ии нет.

$$E = E_0 \cos[\omega t \pm (\bar{k}, \bar{r})]$$

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$E_2 = E_{02} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Если  $\omega_1 = \omega_2$ :



$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\text{Если } \varphi_2 - \varphi_1 = \text{const} \Rightarrow E_{\min} =$$

$$= |E_{01} - E_{02}| \text{ при } \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1,$$

$$\text{т.е. } \Delta \varphi = \pi, 3\pi, \dots = (2n+1)\pi, n=0,1,\dots$$

$$E_{\max} = |E_{01} + E_{02}| \text{ при } \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1; \Delta \varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots = 2n\pi$$

$$\Delta \varphi = (\bar{k}, \bar{r}_2) - (\bar{k}, \bar{r}_1) = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)$$

$$\delta = r_2 - r_1 = \frac{\Delta \varphi \lambda}{2\pi} = n\lambda - \underline{\text{условие max}}$$

$$\delta = \frac{(2n+1)}{2}\lambda - \underline{\text{условие min}}$$

$$\text{Если } \Delta \varphi = \Delta \varphi(t) \Rightarrow \langle \cos \Delta \varphi \rangle = 0 \Rightarrow E_{\text{пог}}^2 = E_1^2 + E_2^2 \Rightarrow$$

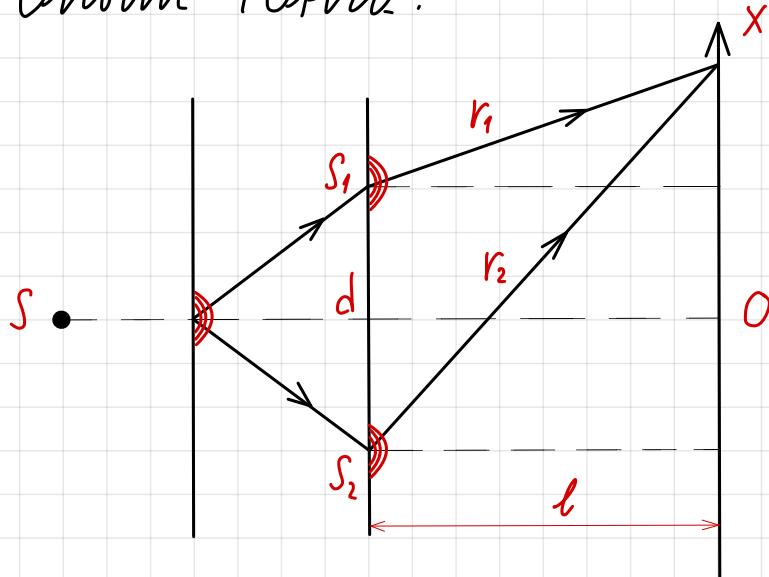
$$\Rightarrow I_{\text{пог}} = I_1 + I_2 \quad //$$

Для иници-ии необходимо условие когерентности волн:

1) Частоты складывающихся волн равны.

2) Разность фаз не зависит от времени.

Основное Правило:



$$r_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$$

$$r_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 2dx$$

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2dx$$

Причины Голографии - Пренам:

Каждая  $m$ -я волновая норма является источником вторичных колебаний сферических волн, а огибаяющая этих волн является новой волновой фронтами.

$$r_1 + r_2 \sim 2l, r_2 - r_1 = f \Rightarrow f = \frac{dx}{l}$$

$$f = m\lambda - \max, f = \frac{2m+1}{2} \lambda - \min$$

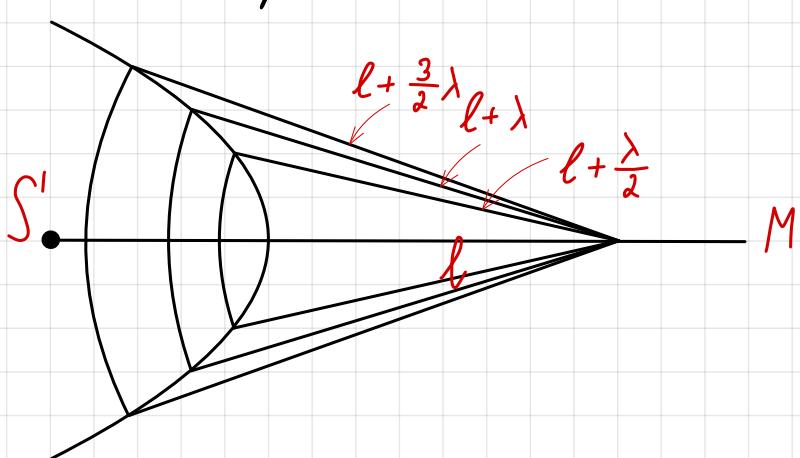
$$x_{\max} = \frac{l\lambda}{d} m, \Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{l\lambda}{d}$$

$$\text{Ex: } \lambda = \frac{d\Delta x}{l} \sim \frac{10^{-3} \cdot 10^{-2}}{10} \sim 10^{-6} \mu \text{ //}$$

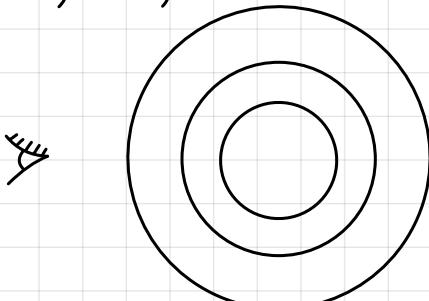
## 41) Дифракция света. Метод зон Грина. Принцип наложения распространения света.

Дифракция - отклонение от прямолинейного распространения волн, т.е. отбрасывание препятствий и продолжение в областях геометрической тени.

Зоны Грина:

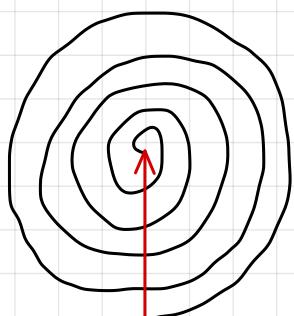


$A_1, A_2, A_3$



Разность хода между 2-ми соседними зонами отличается на  $\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$  в m-ку подбрасывание от соседних зон приходится в противовес

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}; \quad A_p = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2} \Rightarrow I_p \sim A_p^2 \sim \frac{A_1^2}{4}$$



- спираль Грина

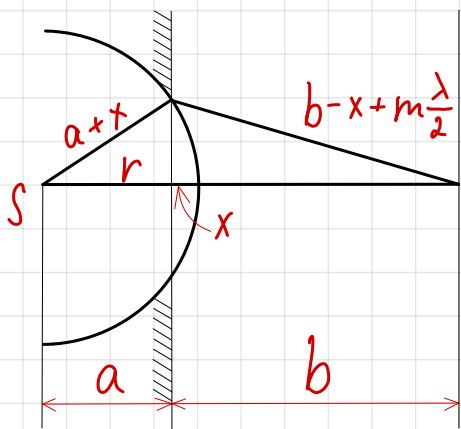
По этой теории можно увидеть принцип наложения распространения света. т.е. интенсивность задается

только половина аммиака первой зоны.

Размеры этой половины мало отличаются

от них.

42) Дифракция света на круглом отверстии и непрозрачном диске. Панно Пуассона.



$$r^2 = (b - x + m \frac{\lambda}{2})^2 - b^2 = -2bx + b^2 - m\lambda x \approx b^2\lambda - 2bx$$

$$r^2 = (a + x)^2 - a^2 = 2ax \Rightarrow 2ax = b^2\lambda - 2bx \Rightarrow x = \frac{b^2\lambda}{2(a+b)} \Rightarrow r^2 = \frac{ab^2\lambda}{a+b}$$

Если получаемое членое число зон, то б M минимум, иначе - максимум.

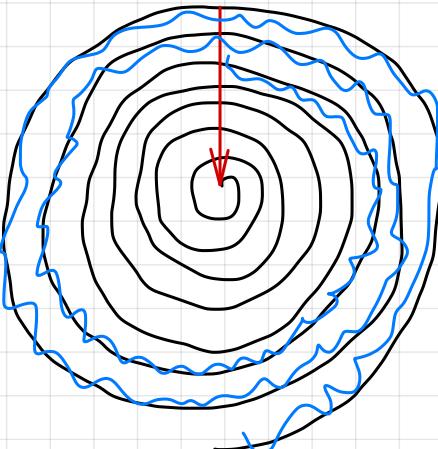
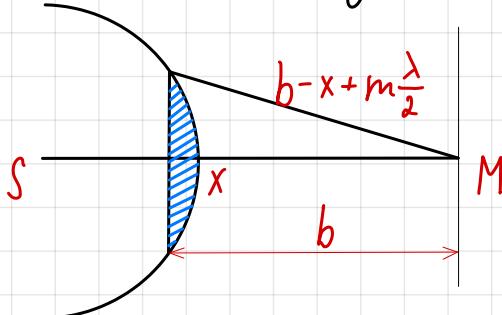
Если  $a$  и  $b$  const, то можно  $r$ , можно достичь min или max. Если  $a \rightarrow \infty$ , то на отверстие падает прямая волна.  $r^2 = b^2\lambda$

Остаются 2 параметра  $r$  и  $b$ .

Если  $b$  уменьшается, то увеличивается  $m$ , и если  $m > 8 \div 10$  зон, то мы переходим в область нелинейной оптики

Если  $b$  увеличивается, то  $m$  уменьшается:  
 $m \ll 1$  дифракция Граунтгофера

Панно Пуассона:



— закраинные зон  
центр

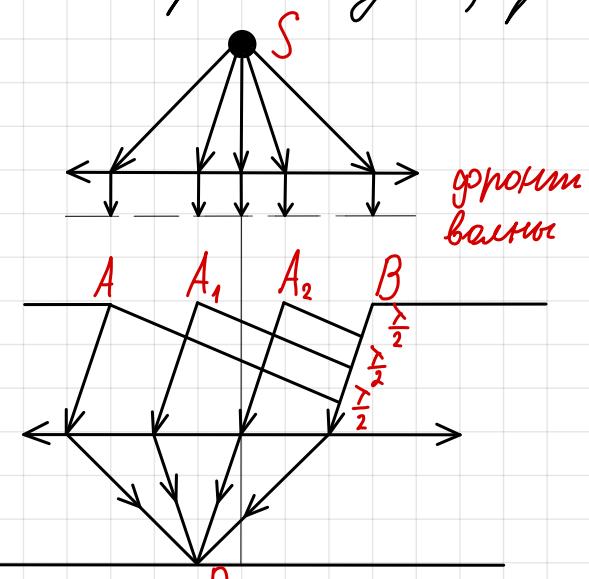
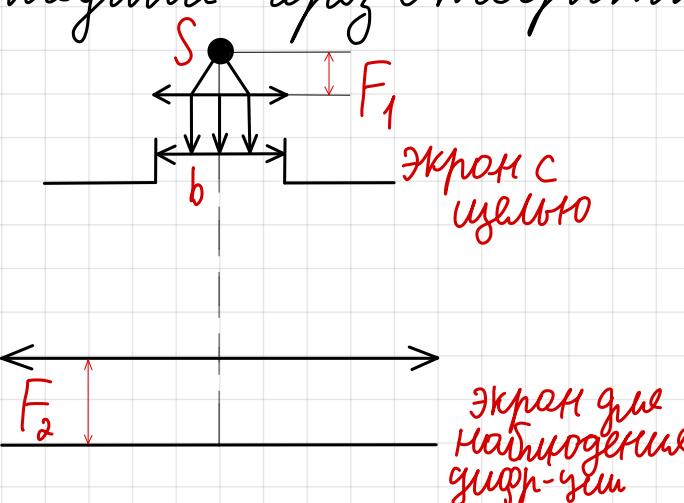
43) Дифракция Граунтгейра. Условие максимумов и минимумов при дифракции Граунтгейра.

Дифракция Граунтгейра получается, когда угол много меньше, чем 1 зоны Грина.

2 способа получения:

1) Удаление экрана на  $\infty$

2) либо за отверстие на концах собираются между, а в ее фокальной плоскости экран, тогда на экране будут собираться параллельные лучи, прошедшие через отверстия.



Луч собирает лучи в фокальной плоскости, при этом не менять разность хода.

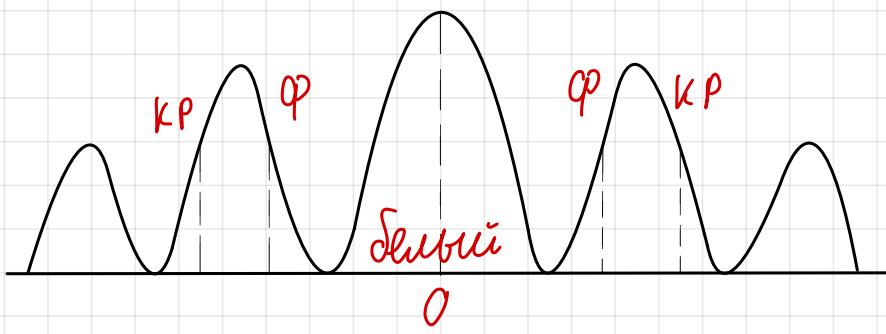
П.к. фокальні волни - плоскости, то все они в сумме в итоге однократно разделяются.

Луч в м-ке D:

$$\max: b \sin \varphi = (2n+1) \frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, \dots$$

$$\min: b \sin \varphi = n\lambda, n = 1, 2, \dots$$

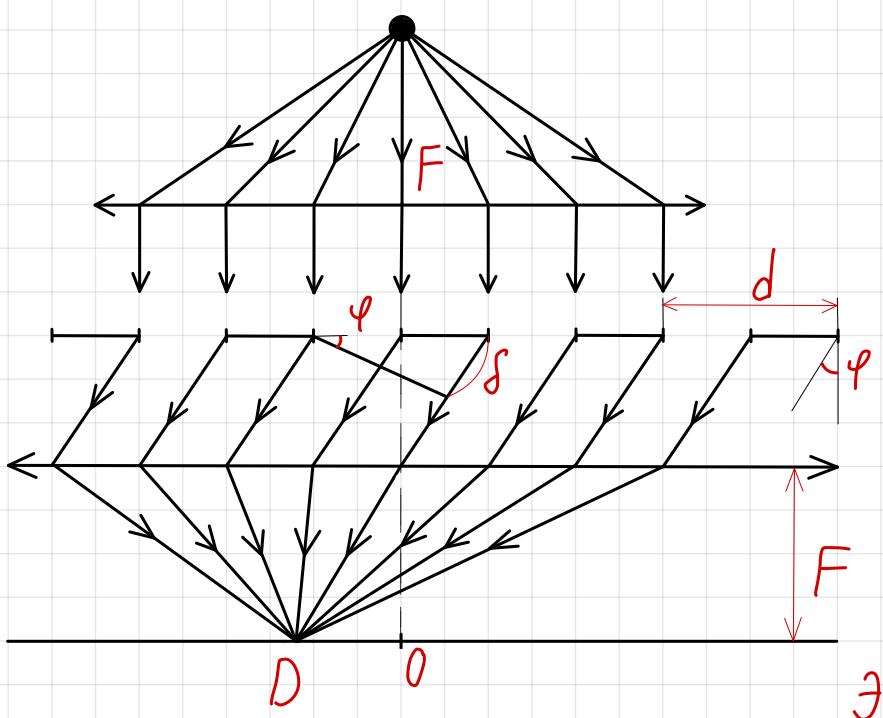
$n=0$ : наблюдается центральный максимум, т.к. разность хода для  $F-x$  в м-ке  $= 0$ .



#### 44) Дифракционная решетка. Условие главных максимумов и дополнительных минимумов.

Дифр. решетка - это квадратная матовая пластинка, на которую нанесены параллельные линии.

Период (номерок дифр. решетки)  $d \approx 1,5 \text{ мкм}$   
 Постоянная решетки (период) - расстояние между 2-мя симметричными симметричными м-ми.



Все условия, которые были получены для 1-й главной справедливы и для дифр. решетки.

$$I_{\min} : b \sin \varphi_1 = \lambda \Rightarrow \sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{b}, \quad \lambda \sim 0,6 \text{ мкм}, \quad b \sim 0,7 \text{ мкм}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 \sim 70^\circ - 80^\circ$$

$$d \sin \varphi = m\lambda$$

- условие главных максимумов.

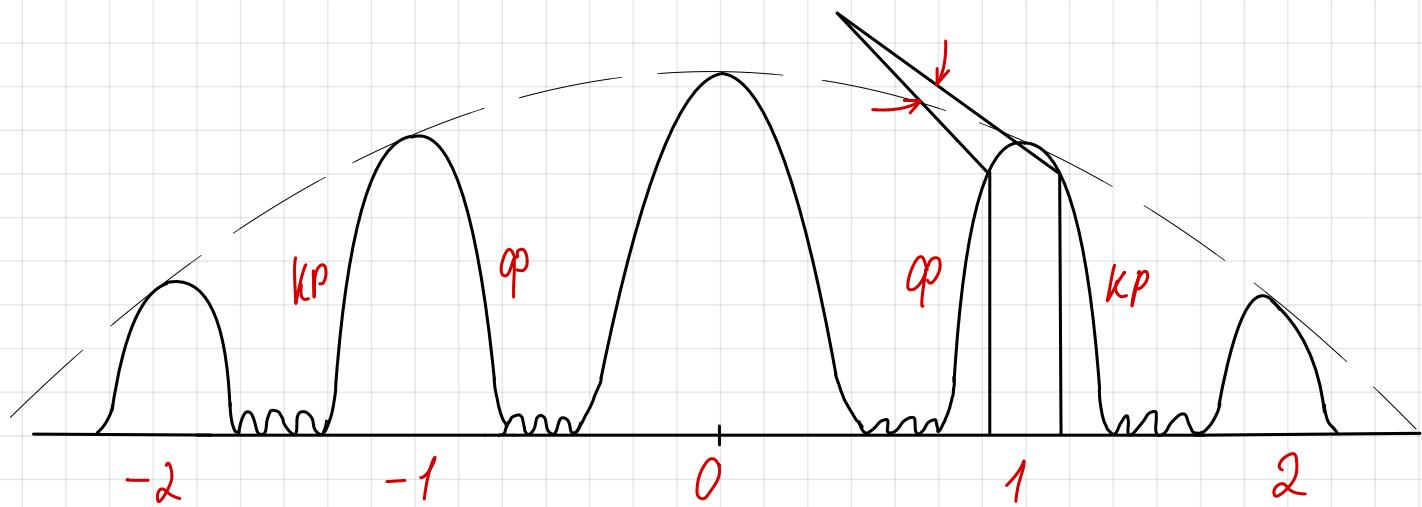
Излучение от ближних световых точек соседних щелей придет в м-ку D в одинаковой фазе

$$\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{d}; \lambda \approx 0,6 \text{ мкм}; d \approx 1,5 \text{ мкм} \Rightarrow \varphi_1 \approx 20^\circ$$

Рассмотрим все дифр. решетки, и будем считать, что они являются целого числа  $\ell = Nd$ , где  $N$  - число имитиков на решетке.

$\ell \sin \varphi = n\lambda$  - условие дополнительных максимумов

$$dN \sin \varphi = n\lambda \Rightarrow d \sin \varphi = \frac{n}{N} \lambda, \quad n = 1, \dots, N-1, \dots, N+1, \\ 2N-1, 2N+1, \dots$$



#### 45) Дифракционная решетка. Разрешающая способность и условие дисперсии.

Дифр. решетка - это кварцевая тонкая пластина, на которую нанесены параллельные насечки.

Условие дисперсии  $D$  - это условие расположение между 2-мя спектральными линиями, которые отличаются по длине волн на 1.

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$$

$$d \sin \varphi = m\lambda \quad | \quad d(\varphi)$$

$$d \cos \varphi \delta\varphi = m \delta\lambda \Rightarrow \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi} = D$$

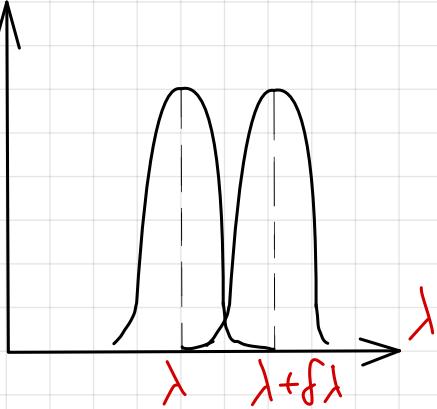
Для увеличения угла между 2-мя спектральными линиями нужно либо увеличить период дифр. решетки, либо увеличивать порядок, в котором эти линии различны.

Разрешающая способность  $R$  - это наименьшая разность длин волн 2-х спектральных линий, которые можно видеть раздельно. Он работает, когда интенсивности 2-х линий одинаковы

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

# Критерий Релея:

I



Чтобы 2 максимума виделись раздельно нужно, чтобы  $\max \lambda$  и  $\min \lambda$  совпадали с  $\min$  другой

$$\max \lambda + \delta\lambda : d \sin \varphi = (\lambda + \delta\lambda)m$$

$$\min \lambda : d \sin \varphi = (m + \frac{1}{N})\lambda$$

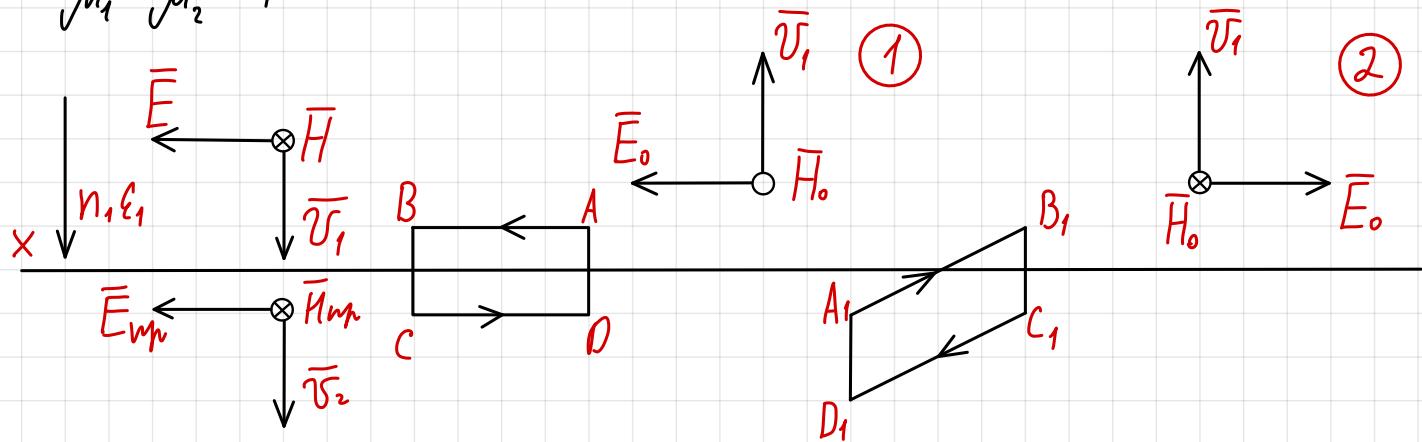
$$m(\lambda + \delta\lambda) = \frac{mN+1}{N} \lambda \Rightarrow \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN} \Rightarrow \boxed{\frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN = R}$$

Т.е., чтобы получить большую  $R$ , нужно либо больший порядок наблюдения, либо увеличение числа измерений.

46) Нормальное падение электромагнитной волны на границу раздела 2-х сред.

$$E = E_m \cos(\omega t - kx), H = H_m \cos(\omega t - kx)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 1$$



$$BC \cup AD \rightarrow 0$$

Чтобы когнитр охватывал только границу раздела.

$ABCD$ : применение I гр. з Максвела:

$$\oint_E dl = - \frac{d}{dt} \iint_S B_n dS$$

$$m. \kappa S \rightarrow 0 \Rightarrow \iint_S B_n dS = 0 \Rightarrow E \cdot AB + E_o \cdot AB -$$

$$- E_{tp} \cdot CD = 0 \Rightarrow AB = CD \Rightarrow E + E_o = E_{tp} \quad (1)$$

$A, B, C, D_1$ : применение II гр. з. Максвела

$$\oint_H dl = \frac{d}{dt} \left( \iint_S D_n dS \right)$$

$$m. \kappa S \rightarrow 0 : \iint_S D_n dS = 0$$

$$H \cdot A_1 B_1 - H_o A_1 B_1 - H_{tp} C_1 D_1 = 0 ; H - H_o = H_{tp} \quad (2)$$

III. к. борна московой, где все величины выражены  
в сантиметрах:

$$\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H; \quad \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_0} E_{\text{up}} = \sqrt{\mu_0} H_{\text{up}}; \quad \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0$$

Из ① и ②:

$$\begin{cases} E + E_0 = E_{\text{up}} \\ H - H_0 = H_{\text{up}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E + E_0 = E_{\text{up}} \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_0}} (E - E_0) = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_0}} E_{\text{up}} \end{cases}$$

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_1}; \quad n_2 = \sqrt{\epsilon_2} \Rightarrow \begin{cases} n_1 (E - E_0) = n_2 E_{\text{up}} \\ E + E_0 = E_{\text{up}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\text{up}} = \frac{2n_1 E}{n_1 + n_2} \quad ③ \quad \text{и} \quad E_0 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E \quad ④$$

Также  $n_1$  и  $n_2$  сравниваются с направлением  $\bar{E}$   
Если  $n_1 > n_2 \Rightarrow \bar{E}_0$  не меняет знак  $\Rightarrow \bar{E}_0 \uparrow \uparrow \bar{E}$  и  
это именуется случаем ① (из рисунка)

Если  $n_1 < n_2 \Rightarrow \bar{E}_0 \downarrow \bar{E}$  и это именуется случаем ②

$\text{б-р Токмаков}$

$$S = EH = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0 \mu_0}} E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0 \mu_0}} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Средний б-р Токмакова:

$$\langle S \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0 \mu_0}} E_m^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle$$

$$\text{и.к. } \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow \langle S \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0 \mu_0}} E_m^2 =$$

$$= [\mu = 1] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n E_m^2$$

$$\gamma = \langle S \rangle s \sim n E_m^2 - \text{интенсивность}$$

$\rho = \frac{\gamma_{\text{поп}}}{\gamma_{\text{наг}}} - \text{коэф. отражения}$

$r = \frac{\gamma_{\text{проп}}}{\gamma_{\text{наг}}} - \text{коэф пропускания}$

$$\rho = \frac{n_1 E_o^2}{n_1 E^2} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$\gamma = \frac{n_2 E_{\text{поп}}^2}{n_1 E^2} = \frac{n_2 4 n_1^2}{n_1 (n_1 + n_2)^2} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

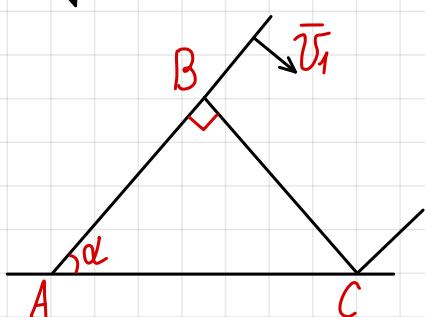
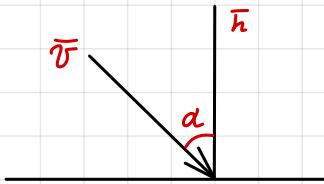
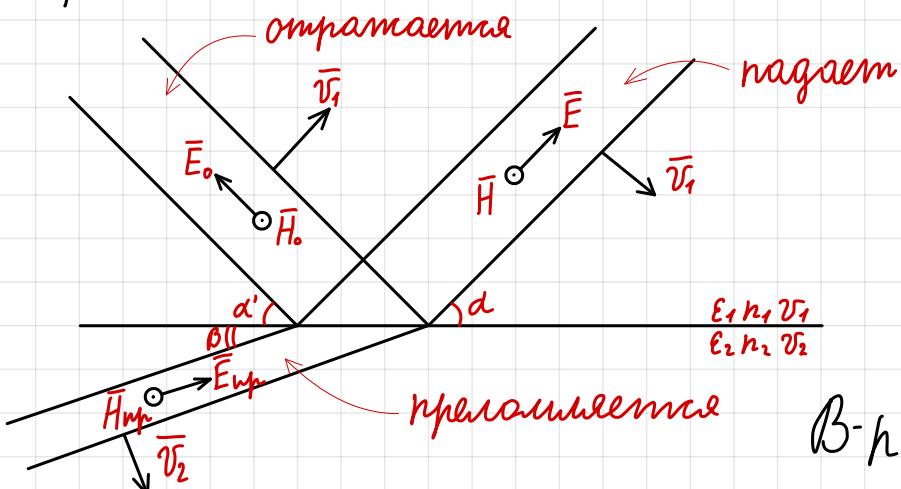
П.к. в средах нет поглощения, то часть падающего излучения отражается, а часть проходит, т.е.:

$$\rho + \gamma = 1$$

$$\left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 + \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{n_1^2 - 2 n_1 n_2 + n_2^2 + 4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \\ = \frac{(n_1 + n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 //$$

47) Дорожковая преграда. Выход дорожковой волны  $P$ -волны. Рассеяние талейков.

$P$ -волнка:



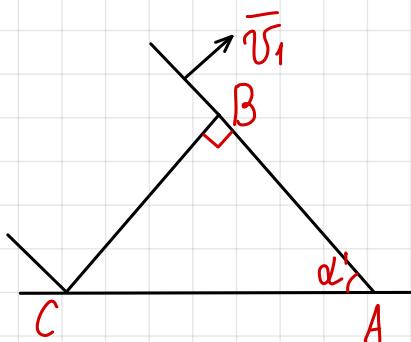
$B$ -и  $E$  лежат в плоскости  
падения спуска

$$BC = V_1 t$$

$$AC = U t$$

$$U t = \frac{V_1 t}{\sin \alpha} \Rightarrow U = \frac{V_1}{\sin \alpha}$$

(1)



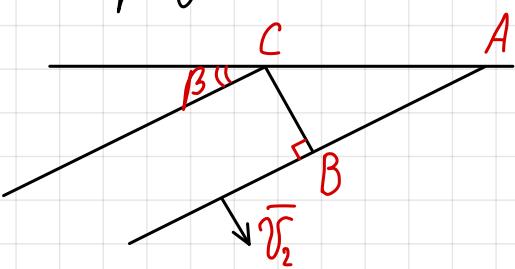
$$BC = V_1 t$$

$$AC = U t$$

$$U t = \frac{V_1 t}{\sin \alpha'} \Rightarrow U = \frac{V_1}{\sin \alpha'}$$

(2)

Волнойкой фронт пропадающей со ск-шего  $V_1$  вдоль отрезка  $BC$



$$BC = V_2 t$$

$$AC = U_{up} t$$

$$U_{up} = \frac{V_2}{\sin \beta}$$

(3)

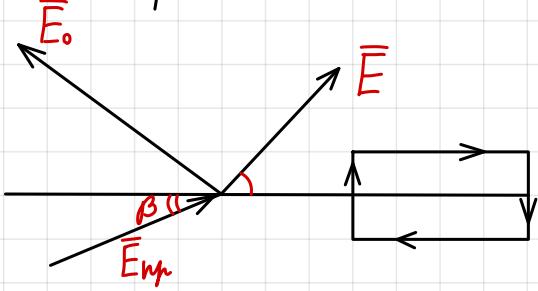
$$\text{ПЛ. к. } U = U_0 = U_{up} \cdot \frac{V_1}{\sin \alpha} = \frac{V_1}{\sin \alpha'} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

(4)

Ит.е. your настороне падет зеркальное отражение

$$\frac{V_1}{\sin \alpha} = \frac{V_2}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5)$$

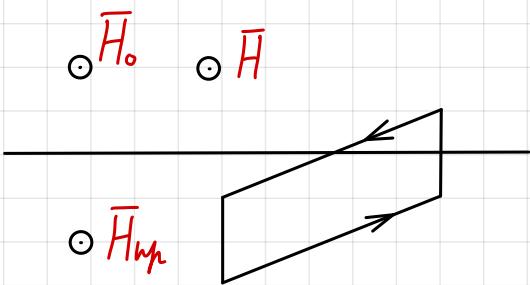
Для p-бумов:



$$\text{To 193. : } \oint_L E_t dl = 0$$

$$E \cos \alpha - E_o \cos \alpha - E_{up} \cos \alpha = 0$$

$$E \cos \alpha - E_o \cos \alpha = E_{up} \cos \alpha \quad (6)$$



$$\text{To 293. : } \oint_L H_t dl = 0$$

$$H + H_o - H_{up} = 0$$

$$H + H_o = H_{up} \quad (7)$$

$$\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H ; \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0} E_o = \sqrt{\mu_0} H_o ; \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_0} E_{up} = \sqrt{\mu_0} H_{up} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\text{ногтмабин б (7)}] \Rightarrow \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_0}} (E + E_o) = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_0}} E_{up} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\epsilon_1} (E + E_o) = \sqrt{\epsilon_2} E_{up} \quad (8)$$

Из (6) и (8):

$$\begin{aligned} E \cos \alpha - E_o \cos \alpha &= E_{up} \cos \beta \\ \sqrt{\epsilon_1} E + \sqrt{\epsilon_1} E_o &= \sqrt{\epsilon_2} E_{up} \end{aligned}$$

|                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| $\cdot \sqrt{\epsilon_1}$ | $\cdot \sqrt{\epsilon_2}$ |
| $+ \cdot \cos \alpha$     | $\cdot \cos \beta$        |

$$2 \sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha E = E_{up} (\sqrt{\epsilon_2} \cos \alpha + \sqrt{\epsilon_1} \cos \beta)$$

$$E_{up} = \frac{2 \sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha E}{\sqrt{\epsilon_1} (\sqrt{\epsilon_2} \cos \alpha + \cos \beta)} = \frac{2 \cos \alpha E}{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta E}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta} =$$

$$= \frac{4 \cos \alpha \sin \beta E}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$$

$$\text{m.k. } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\text{up}} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)} E \quad (9)$$

$$E \cos \alpha \sqrt{\epsilon_2} - E_0 \cos \alpha \sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1} E \cos \beta - \sqrt{\epsilon_1} \cos \beta E_0 = 0$$

$$E_0 \cos \alpha \sqrt{\epsilon_2} + E_0 \sqrt{\epsilon_1} \cos \beta = E \cos \alpha \sqrt{\epsilon_2} - E \sqrt{\epsilon_1} \cos \beta$$

$$E_0 = \frac{\cos \alpha \sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1} \cos \beta}{\cos \alpha \sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1} \cos \beta} E = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \left( \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} \cos \alpha - \cos \beta \right)}{\sqrt{\epsilon_1} \left( \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} \cos \alpha + \cos \beta \right)} E =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} E$$

$$\text{m.k. } \sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right) \Rightarrow$$

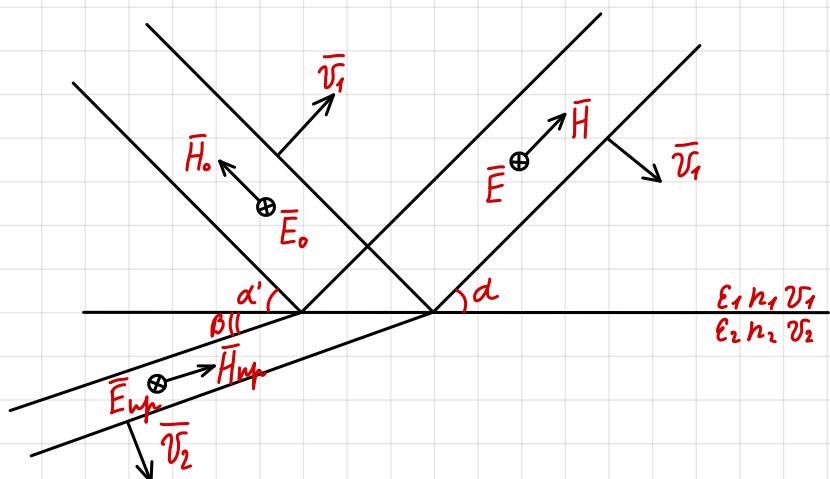
$$\Rightarrow E_0 = \frac{\sin(\alpha-\beta) \cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)} E \Rightarrow E_0 = \frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan(\alpha+\beta)} \quad (10) - \varphi - MZ$$

множесов.

Условие фокусира:

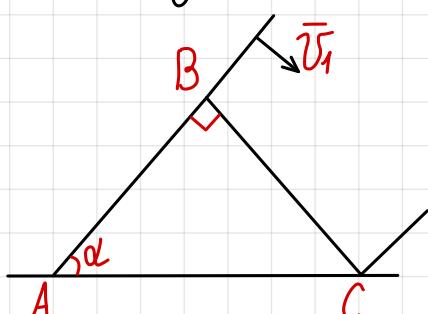
$$\text{Если } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \infty \Rightarrow E_0 = 0$$

48) Решение задачи. Вывод формулы для  
S-волны. Решение силузов.



$\beta$ -р  $E \perp$  плоскости  
надения Э.М. волны.

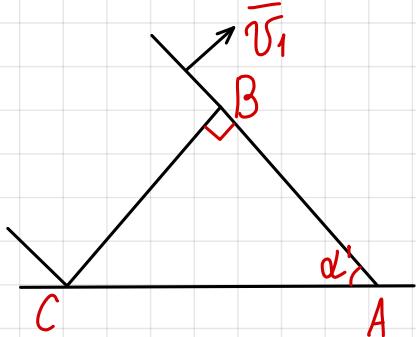
Все 3 силуза (наг, отр, прел.) граничат между собой общими отрезками на границе раздела и все 3 силуза выступают как единое целое вдоль границы раздела с общей скоростью  $U$ .  
Н.е. м-ка A движется с одной и той же скоростью для всех 3-х силузков.



$$BC = v_1 t$$

$$AC = Ut$$

$$Ut = \frac{v_1 t}{\sin \alpha} \Rightarrow U = \frac{v_1}{\sin \alpha} \quad (1)$$

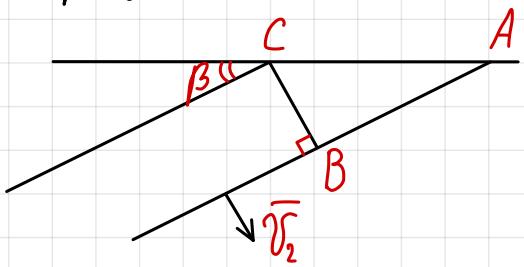


$$BC = v_1 t$$

$$AC = U_0 t$$

$$U_0 t = \frac{v_1 t}{\sin \alpha'} \Rightarrow U_0 = \frac{v_1}{\sin \alpha'} \quad (2)$$

Волновой фронт проходит прямолинейно со ск-м от  $V_1$  вдоль отрезка  $BC$



$$BC = V_1 t$$

$$AC = U_{hyp} t$$

$$U_{hyp} = \frac{V_1}{\sin \alpha}$$

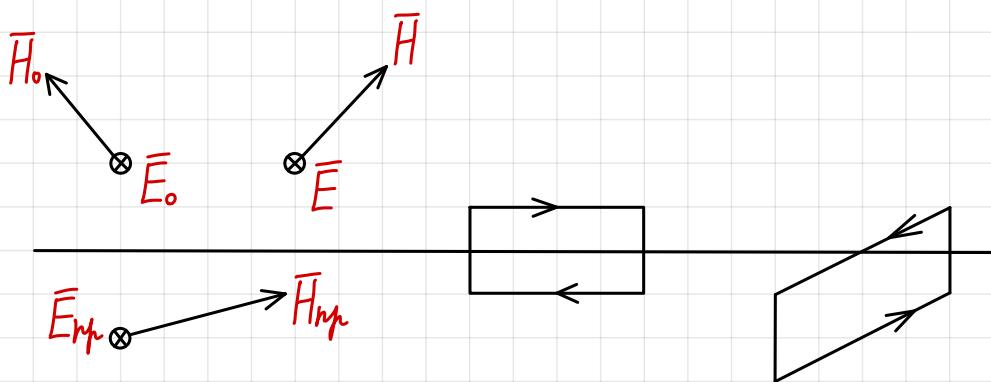
(3)

$$\text{Пл. к. } U = U_0 = U_{hyp} : \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{V_1}{\sin \alpha'} \Rightarrow \alpha = \alpha' \quad (4)$$

Пл. в. угол падения равен углу отражения

$$\frac{V_1}{\sin \alpha} = \frac{V_2}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5)$$

S - форма:



$$\oint H d\ell = 0$$

$$H_e - H_{o\ell} - H_{hyp\ell} = 0 = H \cos \alpha - H_0 \cos \alpha - H_{hyp} \cos \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H \cos \alpha - H_0 \cos \alpha = H_{hyp} \cos \beta \quad (6)$$

$$\oint E_\ell d\ell = 0$$

$$-E - E_0 + E_{hyp} = 0 \Rightarrow E + E_0 = E_{hyp} \quad (7)$$

$$\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H ; \quad \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0 ; \quad \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0} E_{hyp} = \sqrt{\mu_0} H_{hyp}$$

$$u \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow \begin{cases} E + E_0 = E_{up} \\ E \cos \alpha - E_0 \cos \alpha = E_{up} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cos \alpha \sin \beta - E_0 \cos \alpha \sin \beta = E \sin \alpha \cos \beta + E_0 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\Rightarrow E(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = E_0(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)$$

$$\text{m. k. } \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0 \sin(\alpha + \beta) = -E \sin(\alpha - \beta) \Rightarrow E_0 = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} E \quad (8)$$

$$E_{up} = E - E \left( \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right) = E \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{E \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{up} = \frac{2E \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (9)$$

49) Анализ формул Рэлея. Падение плюской  
электромагнитной волны из менее плотной в  
более оптически плотную среду.

$$\frac{n_2}{n_1} = n > 1$$

$$r = \frac{I_o}{I} = \left| \frac{E_o}{E} \right|^2 \text{ (коэф. отражения)}$$

$$r_p = \left| \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \right|^2 ; \quad r_s = \left| \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right|^2$$

Угол падения  $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ; угол преломления  $\beta \in [0; \beta_{\text{нр}}]$   
Если  $\alpha_{\text{нр}} \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_{\text{нр}} \approx 60^\circ$  (всегда меньше)  
 $\beta_{\text{нр}}$  находит из закона преломления.

$$\frac{1}{\sin \beta_{\text{нр}}} = n \Rightarrow \sin \beta_{\text{нр}} = \frac{1}{n}$$

$$\text{Ex: } n = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin \beta_{\text{нр}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta_{\text{нр}} \approx 41^\circ \text{ (зап синтеза)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \mp \beta) \approx \alpha \mp \beta ; \quad \sin(\alpha \mp \beta) \approx \alpha \mp \beta \Rightarrow r_p = r_s = \\ = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 = \left[ \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} = n \right] = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2$$

$$\text{Ex: } n = \frac{3}{2} \Rightarrow r_p = r_s = 0,04 \text{ (зап синтеза)}$$

При  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta \rightarrow \beta_{\text{нр}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_p = \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_{\text{нр}}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta_{\text{нр}}\right)} \right|^2 = \left| - \frac{c \operatorname{tg} \beta_{\text{нр}}}{c \operatorname{tg} \beta_{\text{нр}}} \right|^2 = 1$$

$$r_s = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_{\text{нр}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta_{\text{нр}}\right)} \right|^2 = \left| - \frac{\cos \beta_{\text{нр}}}{\cos \beta_{\text{нр}}} \right|^2 = 1$$

П.т.е. при скользящем падении оде волновой нормали отражение от границы раздела.

При преломлении угол падения коэф. отражения для S-волн ниже не образуется во и расстет с увеличением угла до 1.

Коэф. отражения для p-волн образуется во при некотором угле падения, при котором  $d_5 + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}(d_5 + \beta) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty \Rightarrow r_p = 0$

$d_5$  - угол Брюстера.

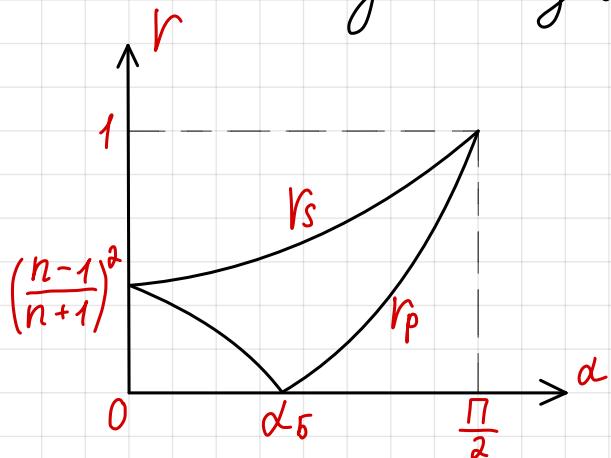
При  $\alpha = d_5$  p-волну не отражается и полностью пропадает во 2-ю среду.

Если при угле падения  $\alpha = d_5$  на границу раздела падает тонкая генерализованная волна суперпозиции p и S-волн, то в отраженной волне будет только S-компоненты

Закон преобразования:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin d_5}{\sin(\frac{\pi}{2} - d_5)} = \frac{\sin d_5}{\cos d_5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} d_5 = n$  - закон Брюстера

П.т.к.  $d_5 + \beta = \frac{\pi}{2}$ , то отраженный и преломленный лучи взаимоперпендикулярные.



r - коэф. отражения  
 $\alpha$  - угол падения

50) Анализ формулы Френеля. Падение плюской  
электромагнитной волны из более плотной в  
менее оптически плотную среду.

$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}} = \frac{1}{n} < 1$$

Закон преломления:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \beta > \alpha$

$\beta$ - угол преломления

Этоткой предельный угол падения  $\alpha = \alpha_{up}$ , при  
котором  $\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sin \alpha_{up}}{1} = \frac{1}{n}$

При  $\alpha = \alpha_{up}$  преломленный луч идет вдоль  
границы 2-х сред.

При  $\alpha > \alpha_{up}$  преломленный луч не возникает  
и имеется только отраженный луч, т.е. Эта  
волна не выходит излучу из оптически  
более плотной среды.

При нормальном падении для  $r_p$  и  $r_s$  получим:

$$r_p = r_s = \left( \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n} + 1} \right)^2 = \left( \frac{n - 1}{n + 1} \right)^2$$

$$\alpha \approx \alpha_{up}, \beta = \frac{\pi}{2}$$

Для  $p$ -волны коэффициент отражения:

$$r_p = \left[ \frac{\tan(\alpha_{up} - \frac{\pi}{2})}{\tan(\alpha_{up} + \frac{\pi}{2})} \right]^2 = 1$$

Для  $s$ -волны:

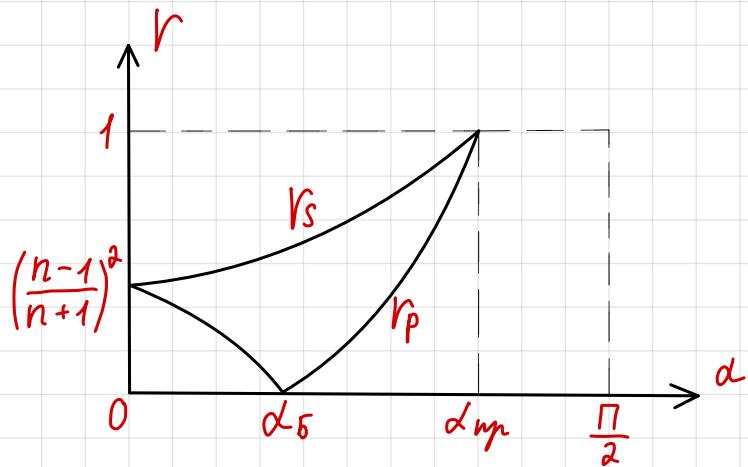
$$r_s = \left[ \frac{\sin(\alpha_{up} - \frac{\pi}{2})}{\sin(\alpha_{up} + \frac{\pi}{2})} \right]^2 = 1$$

П.т.е. при  $\alpha = \alpha_{up}$  оде волна отражается полностью

При изменении угла падения от 0 до  $\alpha_{up}$  коэф. отражения для S-волны возрастает до 1, а для P-волны  $\exists$  угол Брюстера, при котором  $\alpha_5 < \alpha_{up}$ .

$$\operatorname{tg} \alpha_5 = \frac{1}{n}; \sin \alpha_{up} = \frac{1}{n} \Rightarrow \alpha_5 < \alpha_{up}$$

График  $\operatorname{tg} \alpha$  и его выше графика  $\sin \alpha$  на интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$  и  $\operatorname{tg} \alpha_5 = \frac{1}{n}$  наступают равные, как  $\sin \alpha_{up} = \frac{1}{n} \Rightarrow \alpha_5 < \alpha_{up}$



51) Анализ схемы Френеля. Изменение разога волны при преломлении и отражении от границы 2-х сред.

S-волна (амплитудное значение):

$$\frac{E_o}{E} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad \frac{E_{op}}{E} = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

p- волна

$$\frac{E_o}{E} = \frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan(\alpha+\beta)}, \quad \frac{E_{op}}{E} = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

Из отношения преломленной волны к падающей видим, что преломл-я волна всегда имеет разогу как и падающая, т. е. не происходит никакого изменения разога преломл-я волн.

При отражении от оптически более плотной среды ( $\alpha > \beta$ ) разог отраженной S-волны меняется на  $\Pi$ , а разог отраженной p-волны при углах падения от  $0^\circ$  до  $\alpha$  не меняется, а при углах  $\alpha_0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  меняется на  $\Pi$ .

При отражении от оптически менее плотной среды ( $\alpha < \beta$ ) разог отраженной S-волны не меняется. Разог отраженной p-волны изменяется на  $\Pi$  при углах  $0^\circ < \alpha < \alpha_0$  и не изменяется при  $\alpha_0 < \alpha < \alpha_{op}$ .