

Matte

Jakob Tigerström/Eric Johansson

September 17, 2015

Contents

1	TODO	3
2	Föreläsning 1	3
2.1	Värdesiffror	3
2.2	Addition och Subtraktion	3
2.3	Uppskatta storleksordning	3
3	Föreläsning 2	4
4	Föreläsning 3	6
4.1	Vektorer	6
5	Föreläsning 4	7
5.1	Grundläggande algebra och prioriteringsregler	7
5.2	Bråkräkning	7
6	Föreläsning 5	8
6.1	Algebra - uppställning och förenkling	8
7	Föreläsning 7	10
7.1	Polynom	10
7.2	Multiplitera polynom	10
7.3	Regler	10
7.3.1	Konjugat regeln	10
7.3.2	Kvadrerings regelerna	10
7.4	Uppgifter	10
7.4.1	EX1	10
7.4.2	EX2	10
7.4.3	EX3	10
7.4.4	EX4	10
7.4.5	EX5	11
7.4.6	EX6	11

7.4.7	EX7	11
7.4.8	EX8	11
7.4.9	EX9	11
8	Föreläsning 11	12
8.1	Logaritmer och logaritmlagar	12
8.2	Logaritmlagarna	12
8.2.1	1:a lagen	12
8.2.2	2:a lagen	12
8.2.3	3:e lagen	12
8.3	Logoritm exempel	13
9	Föreläsning 12	14
9.1	Uppgifter	14
9.1.1	EX1	14
9.1.2	EX2	14
9.1.3	EX3 KONTOLLERA	15
9.1.4	EX4	15
9.1.5	EX5	15
9.1.6	EX6	16
10	Föreläsning 13	16
10.1	Likformighet	16
10.1.1	Definition likformighet	17
10.1.2	Likformiga trianglar	17
10.1.3	Likbelägningsvinklar	17
10.1.4	Transversalsatsen	17
10.2	Uppgifter	17
10.2.1	EX1	17

1 TODO

1. Skriv fler föreläsningar
2. Kolla stavning
3. Fixa warnings

2 Föreläsning 1

2.1 Värdesiffror

Ex1: Hur många värdesiffror har talen

1. 251 3 st
2. 0,251 3 st
3. 0,001 1 st
4. 250 2 eller 3 st
 $2,5 * 10^2$ 2 st
 $2,50 * 10^2$ 3 st
5. 2500 2,3 eller 4 st $2,5 * 10^3$
 $2,50 * 10^3$
 $2,500 * 10^3$
6. 250,0 4 st

Multiplikation och division: Svara med lika många värdesiffror som det värde som har minst värdesiffror.

$$5,22 * 3,1 = 16,182 = 16.$$

2.2 Addition och Subtraktion

Minst antal decimaler avgör.

$$23,52 + 12,4 = 35,92 \approx 35,9$$

$$23,56 + 12,4 = 35,96 \approx 36,0$$

2.3 Uppskatta storleksordning

$$\frac{2,8 * 10^5}{3,2 * 10^3}$$

Storleksordningen på svaret är 10^2

3 Föreläsning 2

Omskrivning av formler

Densitet: $\rho = m/v$

EX:1 Beräkna densiteten för en sten som har volymen $12cm^3$ och väger $36g$.

$$\rho = \frac{m}{v} = \frac{36}{12} = 3,0g/cm^3$$

EX:2 Beräkna volymen av ett okänt föremål med densiteten $0,8g/cm^3$ och väger $24g$.

$$\rho = \frac{m}{v}$$

$$\rho * V = \frac{m}{V} * V$$

$$\frac{\rho * V}{\rho} = m$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$V = m/\rho = 24/0,8 = 30cm^3$$

Hooke lag

$$F = k * \Delta l$$

F - kraft

k - fjäderkonstant

Δl - fjäderns förlängning

EX:3 Bestäm konstanten för en fjäder som sträcks ut $18cm$ när den belastas med kraften $37N$.

$$F = k * \Delta l$$

$$\frac{F}{\Delta l} = k$$

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{37}{0,18} = 205,55... \approx 2,1 * 10^2 N/m$$

Formel för rörelse energi: $w = \frac{mv^2}{2}$

w - energi(J)

m - massa(kg)

h - höjd(m)

g - gravitationskonstant. $9,82m/s^2$

v - hastighet(m/s)

EX4:

Beräkna rörelseenergin för en bil som väger $1200kg$ och kör $90km/h$

$$w = \frac{mv^2}{2} = \frac{1200 * 25^2}{2} = 375000 \approx 4 * 10^5 J = 400kJ = 0,4MJ$$

$$90km = 90000m$$

$$1h = 3600s$$

$$\frac{90000}{3600} = \frac{90}{3,6} = 25m/s$$

4 Föreläsning 3

4.1 Vektorer

Storhet som har både storlek och riktning.

Storheter där riktningen ej är relevant kallas skalärer.

Att skriva vektorer:

F, (f)

Att rita vektorer:

→

Pilens riktning är vektorens riktning.

Pilens längd är vektorens storlek.

Att addera två vektorer:

Parallelogrammetoden.

Polygonmetoden

Att multiplicera/dividera en vektor med en skalär(ett tal):

Multiplicera vektorn v (med tak) med talet $k, k > 0$.

Sammar riktning ,storleken påverkas av $k, k < 0$.

Motsatta riktningen storleken påverkas av k .

Komposanter(att dela upp en vektor)

$$(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$

5 Föreläsning 4

5.1 Grundläggande algebra och prioriteringsregler

När vi beräknar värdet av ett uttryck måste vi ta hänsyn till prioriteringsreglerna.

1. Paranteser
2. Potenser
3. Multiplikation och division
4. Addition och subtraktion

$$\mathbf{EX:1} \quad \underbrace{20/4}_3 + \underbrace{8-6}_4 * \underbrace{2}_3 = \underbrace{5+8}_3 - \underbrace{12}_3 = 1$$

$$\mathbf{EX:2} \quad \underbrace{2*5}_3 = \underbrace{2*125}_3 = 250$$

$$\mathbf{EX:3} \quad \underbrace{(8+5)}_1 \underbrace{^2}_2 \underbrace{(16+14)}_1 = \underbrace{13^2}_2 \underbrace{*30}_3 = \underbrace{169*30}_3 = 5070$$

Addition $term + term = summa$ Subtraktion $term - term = differens$

Multiplikation $faktor * faktor = produkt$ Division $\frac{täljare}{nämnamre} = kvot$

5.2 Bråkräkning

Multiplikation $\frac{3}{5} * \frac{8}{7} = \frac{24}{35}$

Täljare multipliceras till en täljare.

nämnamre multipliceras till en nämnamre.

Addition och subtraktion.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{8*1}{8*3} + \frac{1*3}{8*3} = \frac{8}{24} + \frac{3}{24} = \frac{11}{24}$$

6 Föreläsning 5

6.1 Algebra - uppställning och förenkling

EX1

Emil hyr en bil. Dygnsavgiften är 250kr och milkostnaden är 8kr/mil.

A) Hur mycket kostar det ifall Emil hyr bilen i ett dygn och kör 12 mil.

$$\underbrace{250}_{\text{Dygnsavg.}} + \underbrace{8 * 12}_{\text{mil kost.}} = 250 + 96 = 346kr \text{ Svar: Det kostar honom } 346kr$$

B) Hur mycket ska Emil betala om han hyr bilen i k dygn och kör x mil?

$$\underbrace{250k}_{\text{Dygnsavg.}} + \underbrace{8k}_{\text{mil kost.}} <- \text{Algebraiskt uttryck}$$

EX2

Annika lånar 15000kr för att köpa bil. Hon får betala 3% i ränta.

A) Hur stor är hennes skuld efter 5år om hon ej har betalt tillbaka något.

$$\underbrace{15000}_{\text{Lån}} + \underbrace{1,03^5}_{\text{Förändringsfaktor}} \approx 17389kr$$

5 = antalår

Svar: Hon är skyldig ca 17389kr och är fast i lyxfällan

B) Hur stor är skulden efter x år?

$$\underbrace{15000}_{\text{Lån}} + \underbrace{1,03^x}_{\text{Förändringsfaktor}}$$

EX3

Förenkla: $4x + 3x + 6 - 2$.

$$\underbrace{4x + 3x}_{\text{Addera}} + \underbrace{6 - 2}_{\text{subtrahera}} = 7x + 4$$

EX4

Förenkla: $\frac{5}{4}a - \frac{a}{2}$.

$$\frac{5}{4}a - \underbrace{\frac{1}{2}a}_{\frac{a}{2}} = \frac{5}{4}a - \underbrace{\frac{1 * 2}{2 * 2}a}_{\text{Multiplitera}} = \frac{5}{4}a - \frac{2}{4}a = \frac{3}{4}a$$

EX5

Förenkla: $a(a + b) - b(a - 7b)$.

$$\underbrace{a(a+b)}_{a^2+ab} - \underbrace{b(a+7b)}_{ab-7b^2} = a^2 + ab - ab - 7b^2 = a^2 - 7b^2$$

7 Föreläsning 7

7.1 Polynom

Ett polynom är en summa av termer där variabelernas exponenter är positiva heltal.

$$\underbrace{x^3 + \overbrace{2}^{\text{Koefficient}} x - \underbrace{4}_{\text{Konstant term}}}_{\text{Variabel term}}$$

7.2 Multiplicera polynom

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

7.3 Regler

7.3.1 Konjugat regeln

$$\underbrace{(x + 2)(x - 2)}_{\text{Konjugat regeln}} = x^2 - 2x + 2x - 4 = x^2 - 4$$

7.3.2 Kvadrerings regelerna

$$\underbrace{(a + b)^2 = (a + b)(a + b)}_{\text{Kvadrerings regel}} = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\underbrace{(a - b)^2 = (a - b)(a - b)}_{\text{Kvadrerings regel}} = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

7.4 Uppgifter

7.4.1 EX1

$$(a + 5)(a - 5) = a^2 - 5a + 5a - 25 = a^2 - 25$$

7.4.2 EX2

$$(a + 3)^2 = (a + 3)(a + 3) = a^2 + 6a + 9$$

7.4.3 EX3

$$(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 2 * 3x * 4y + 16y^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$$

7.4.4 EX4

$$\text{Faktorisera: } 2xy^2 + x^2y = xy(2y + x)$$

7.4.5 EX5

Faktorisera: $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

7.4.6 EX6

Faktorisera: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

7.4.7 EX7

Faktorisera: $2x^2 + 10x + 50 = 2(x^2 + 5x + 25)$

7.4.8 EX8

Faktorisera: $5^x + 5^{x+1} = 5^x + 5^x * 5 = 5^x(1 + 5 = 6 * 5^x$

7.4.9 EX9

Faktorisera: $a^{2x+2} - a^{2x} = a^{2x}a^2 - a^{2x} = a^{2x}(a^2 - 1) = a^{2x}(a + 1)(a - 1)$

8 Föreläsning 11

8.1 Logaritmer och logaritmlagar

"Logaritmen av 2000 är det tal vi måste upphöja 10 med för att få 2000".

Definition: Om $\underbrace{10^x = y}_{\text{potensform}}$ så är $\underbrace{x = \log y}_{\text{logaritmform}}$

Hur löser vi $10^x = 1000$? Detta är lätt att lösa, antingen vet man att $x = 3$ eller så testar man olika värden på x tills man kommer till något i närheten. Man kan även använda en grafritande räknare och kolla vart x skär 1000

Hur löser vi $10^x = 2000$? Detta är ett mycket svårare tal att lösa och görs lättast genom att använda logaritm, men man kan även använda en grafritande räknare.

$\underbrace{10^x = 2000}_{\text{potensform}} \rightarrow \underbrace{x = \log 2000}_{\text{logaritmform}}$
Svaret blir: $x \approx 3,301$

8.2 Logaritmlagarna

$$a = 10^{\log a}$$

Vi härleder logaritmlagarna med hjälp av potenslagarna

8.2.1 1:a lagen

$$AB = 10^{\log A} * 10^{\log B} = 10^{\log A + \log B}$$

$$AB = 10^{\log AB}$$

Lagen säger att " $\log AB = \log A + \log B$ "

8.2.2 2:a lagen

$$\frac{A}{B} = 10^{\log A} / 10^{\log B} = 10^{(\log A - \log B)}$$

$$\frac{A}{B} = 10^{\log A/B}$$

Lagen säger att " $\log A/B = \log A - \log B$ "

8.2.3 3:e lagen

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{A * A * A \dots * A}_{k \text{ st}} = \underbrace{10^{\log A} * 10^{\log A} * 10^{\log A} \dots 10^{\log A}}_{k \text{ st}} = \\ &= (10^{\log A})^k = 10^{k * \log A} \end{aligned}$$

Lagen säger att " $\log(A^k) = k * \log A$ "

8.3 Logoritm exempel

EX1

Lös ekvationen $10^x = 67$

$$\underbrace{10^x = 67}_{\text{potensform}} \rightarrow \underbrace{x = \log 67}_{\text{logaritmform}}$$

Svaret blir: $x \approx 1,8$

EX2 - KONTROLLERA

Skriv talet 7 (exakt) som en potens med 10 som bas.

Svar: $7 = 10^{\log 7}$

EX3

Lös ekvationen $2 * \log x = 12$

$$2 * \log x = \underbrace{\frac{2 * \log x}{2}}_{\text{Dividera med 2}} = \underbrace{\frac{12}{2}}_{\text{Dividera med 2}} = \log x = 6$$

Svar: $x = 10^6$

EX4 - FIXA

Lös exakt $3^x = 8$

Alt1.

Alt2.

Svar: $x = 1,9$

EX5

Lös: $\log x = \log 5 + \log 12$

Lösning med 1:a lagen.

$$\log x = \log 5 + \log 12$$
$$\log x = \underbrace{\log 5 * 12}_{\text{Gör om log12 till 12}}$$

$$\underbrace{\log x}_{\text{Ta bort log}} = \underbrace{\log 60}_{\text{Ta bort log}}$$

$$x = 60$$

Svar: $x = 60$

EX6

Lös: $\log x = 2 * \log 3$

Lösning med 3:e lagen.

$$\log x = 2 * \log 3$$

$$\log x = \log 3^2$$

$$x = 3^2$$

Svar: $x = 9$

EX7

Lös: $\log x^2 = 8$

Lösning med 3:e lagen.

$$2 * \log x = 8$$

$$\underbrace{\frac{2 * \log x}{2}}_{\text{Dividera med 2}} = \underbrace{\frac{8}{2}}_{\text{Dividera med 2}}$$

$$\log x = 4$$

Svar: $x = 10^4$

9 Föreläsning 12

9.1 Uppgifter

9.1.1 EX1

$$\lg x = 2\lg 3 + 4\lg 2$$

$$\lg x = \lg(3^2) + \lg(2^4)$$

$$\lg x = \lg 9 + \lg 16$$

$$\lg x = \lg(9 * 16)$$

$$x = 144$$

9.1.2 EX2

Lös ekvationen:

$$2 * 3^x = 4^x$$

$$\lg(2 * 3^x) = \lg(4^x)$$

$$\lg 2 + \lg(3^x) = x\lg 4$$

$$\lg 2 + x\lg 3 = x\lg 4$$

$$\lg 2 = x\lg 4 - x\lg 3$$

$$\lg 2 = x(\lg 4 - \lg 3)$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 4 - \lg 3}$$

9.1.3 EX3 KONTOLLERA

Antag att vi vet att $10^{0,6} \approx 4$

Vad är då $\lg 400$?

$$10^{0,6} \approx 4$$

$$10^{0,6} * 10^2 \approx 400$$

$$10^{2,6} \approx 400$$

9.1.4 EX4

Lös ekvationen:

$$\lg(x+4) + \lg(x+2) = \lg(x-1) + \lg(x-10)$$

$$\lg((x+4)(x+2)) = \lg((x-1)(x-10))$$

$$(x+4)(x+2) = (x-1)(x-10)$$

$$x^2 + 2x + 4x + 8 = x^2 - 10x - x + 10$$

$$\cancel{x^2} + 6x + 8 = \cancel{x^2} - 11x + 10$$

$$6x + 8 = -11x + 10$$

$$17x = 2$$

$$x = \frac{2}{17}$$

$\lg(x-1)$ och $\lg(x-10)$ ej det, när $x = \frac{2}{17}$ uppgiften saknar lösningar.

9.1.5 EX5

Jordens folkmängd var år 2008 6,68 miljarder. Tillväxten var då 1,2% per år.

1. Ställ upp en formel som ger jordens folkmängd om vi antar att den årliga procentuella ökningen ej ändras.

$$y = 6,68 * 10^9 * 1,012^x$$

x är anta år efter 2008. y är folkmängden x antal år efter 2008

2. När är folkmängden 9 miljarder enligt denna modell?

$$9 * 10^9 = 6,68 * 10^9 * 1,012^x$$

$$9 * \cancel{10^9} = 6,68 * \cancel{10^9} * 1,012^x$$

$$\frac{9}{6,68} = 1,012^x$$

$$\lg\left(\frac{9}{6,68}\right) = \lg 1,012^x$$

$$\lg\left(\frac{9}{6,68}\right) = x \lg 1,012$$

$$x = \frac{\lg(9/6,68)}{\lg 1,012} = 24,99$$

Svar: År 2033 är folkmängden på jorden 9 miljarder.

9.1.6 EX6

I en kärnreaktor bildas bland annat plutonium-239 med en halveringstid på 24000 år.

1. Ställ upp och berätta hur mycket av 400 mg plutonium-239 finns kvar efter 100000 år.

$$400 * 0,5^{x/24000}$$

x är antalet år efter sönderfallets början. y är mängden

plutonium-239 efter x är $y = 400 * 0,5^{x/24000}$

$$y(100000) = 400 * 0,5^{100000/24000} \approx 22mg$$

Svar: Det är 22 mg plutonium-239 kvar efter 100000 år.

2. Hur länge måste man vänta om man vill att mängden plutonium ska gå ner till 1 promille av den ursprungliga mängden?

$$y = A * 0,5^{x/24000}$$

A är den ursprungliga mängden och x är antalet år sedan

sönderfallets början, y är återstående mängd plutonium-239 vid tiden

$$x \text{ år. } \frac{A}{1000} = A * 0,5^{x/24000}$$

$$lg(\frac{1}{1000}) = lg(0,5^{x/24000})$$

$$lg(\frac{1}{1000}) = \frac{x}{24000} lg 0,5$$

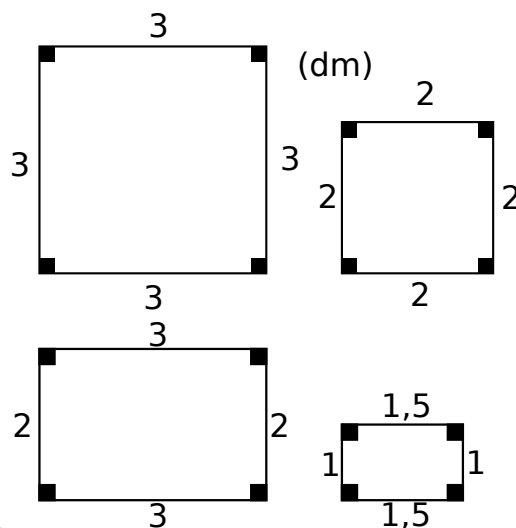
$$24000 lg(1/1000) = x lg 0,5$$

$$x = \frac{24000 lg(1/1000)}{lg 0,5} = 240000 \text{ år}$$

Svar: Det tar 240000 år innan mängden minskat till en promille.

10 Föreläsning 13

10.1 Likformighet



Alla kvadrater är likformiga

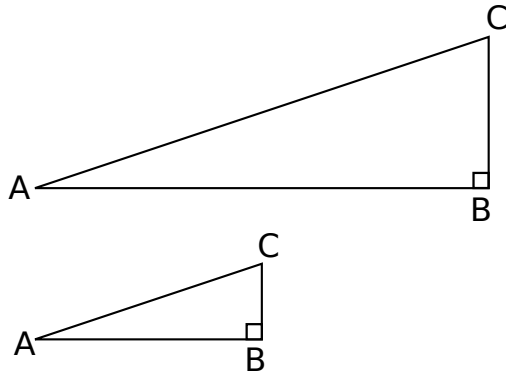
Dessa rektanglar är likformiga eftersom förhållandet mellan motsvarande

sidor är lika.

10.1.1 Definition likformighet

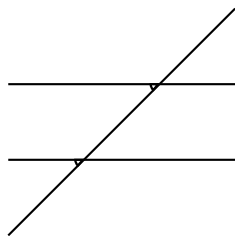
Motsvarande vinklar är lika stora och förhållandet mellan motsvarande sidor är lika.

10.1.2 Likformiga trianglar



Man behöver känna till två vinklar i varje triangel för att kunna jämföra dem och se om de är likformiga.

10.1.3 Likbelägningsvinklar



Likbelägna vinklar är lika stora.

10.1.4 Transversalsatsen

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

10.2 Uppgifter

10.2.1 EX1

Triangelarna är likformiga. Beräkna x och y $\frac{19,0}{12,0} = \frac{24,0}{y} = \frac{32,0}{x}$
 $y = \frac{19,0}{12,0} = 24,0$

$$y = \frac{24,0 \cdot 12,0}{19,0} \approx 15,2 cm$$