

Matte

Jakob Tigerström/Eric Johansson

September 24, 2015

Contents

1	TODO	4
2	Föreläsning 1	4
2.1	Värdesiffror	4
2.2	Addition och Subtraktion	4
2.3	Uppskatta storleksordning	4
3	Föreläsning 2	5
3.1	Uppgifter	5
3.1.1	EX1	5
3.1.2	EX2	5
3.1.3	EX3	5
3.1.4	EX4	5
4	Föreläsning 3	7
4.1	Vektorer	7
5	Föreläsning 4	7
5.1	Grundläggande algebra och prioriteringsregler	7
5.2	Uppgifter	7
5.2.1	EX1	7
5.2.2	EX2	7
5.2.3	EX3	8
5.3	Bråkräkning	8
6	Föreläsning 5 - uppställning och förenkling	8
6.1	Uppgifter	8
6.1.1	EX1	8
6.1.2	EX2	8
6.1.3	EX3	9
6.1.4	EX4	9
6.1.5	EX5	9

7	Föreläsning 7	9
7.1	Polynom	9
7.2	Multiplitera polynom	9
7.3	Regler	9
7.3.1	Konjugat regeln	9
7.3.2	Kvadrerings regelerna	10
7.4	Uppgifter	10
7.4.1	EX1	10
7.4.2	EX2	10
7.4.3	EX3	10
7.4.4	EX4	10
7.4.5	EX5	10
7.4.6	EX6	10
7.4.7	EX7	10
7.4.8	EX8	10
7.4.9	EX9	10
8	Föreläsning 11	10
8.1	Logaritmer och logaritmlagar	10
8.2	Logaritmlagarna	11
8.2.1	1:a lagen	11
8.2.2	2:a lagen	11
8.2.3	3:e lagen	11
8.3	Logoritm exempel	11
8.3.1	EX1	11
8.3.2	EX2 - KONTROLLERA	12
8.3.3	EX3	12
8.3.4	EX4 - FIXA	12
8.3.5	EX5	12
8.3.6	EX6 - KONTROLLERA SVAR	12
8.3.7	EX7	13
9	Föreläsning 12	13
9.1	Uppgifter	13
9.1.1	EX1	13
9.1.2	EX2	13
9.1.3	EX3 KONTOLLERA	13
9.1.4	EX4	14
9.1.5	EX5	14
9.1.6	EX6	14
10	Föreläsning 13	15
10.1	Likformighet	15
10.1.1	Definition likformighet	15
10.1.2	Likformiga trianglar	15
10.1.3	Likbelägnavinklar	16
10.1.4	Transversalsatsen	16
10.2	Uppgifter	16
10.2.1	EX1	16
10.2.2	EX2	16

11 Föreläsning 14	17
11.1 Uppgifter	17
11.1.1 EX1	17
11.1.2 EX2	17
11.1.3 EX3	18
11.1.4 EX4	18
11.1.5 EX5	18
11.1.6 EX6	18
12 Föreläsning 15	18
12.1 Uppgifter	19
12.1.1 EX1	19
13 Föreläsning 16	19
13.1 Parallella linjer	19
13.2 Uppgifter	19
13.2.1 EX1	19
13.2.2 EX2	20
13.2.3 EX3	20
13.2.4 EX4	20
13.2.5 EX5	20
14 Föreläsning 17	21
14.1 Uppgifter	21
14.1.1 EX1	21
14.1.2 EX2	21
14.1.3 EX3	22
14.1.4 EX3	22

1 TODO

1. Skriv fler föreläsningar
2. Kolla stavning
3. Fixa warnings
4. Skriv in föreläsnings ämne i section
5. ~~Överstrykning~~
6. Gör om bilder i geogebra eller liknande.

2 Föreläsning 1

2.1 Värdesiffror

Ex1: Hur många värdesiffror har talen

1. 251 3 st
2. 0,251 3 st
3. 0,001 1 st
4. 250 2 eller 3 st
 $2,5 * 10^2$ 2 st
 $2,50 * 10^2$ 3 st
5. 2500 2,3 eller 4 st $2,5 * 10^3$
 $2,50 * 10^3$
 $2,500 * 10^3$
6. 250,0 4 st

Multiplikation och division: Svara med lika många värdesiffror som det värde som har minst värdesiffror.

$$5,22 * 3,1 = 16,182 = 16.$$

2.2 Addition och Subtraktion

Minst antal decimaler avgör.

$$23,52 + 12,4 = 35,92 \approx 35,9$$

$$23,56 + 12,4 = 35,96 \approx 36,0$$

2.3 Uppskatta storleksordning

$$\frac{2,8 * 10^5}{3,2 * 10^3}$$

Storleksordningen på svaret är 10^2

3 Föreläsning 2

Omskrivning av formler

Densitet: $\rho = m/v$

3.1 Uppgifter

3.1.1 EX1

Beräkna densiteten för en sten som har volymen 12cm^3 och väger 36g .

$$\rho = \frac{m}{v} = \frac{36}{12} = 3,0\text{g/cm}^3$$

3.1.2 EX2

Beräkna volymen av ett okänt föremål med densiteten $0,8\text{g/cm}^3$ och väger 24g .

$$\rho = \frac{m}{v}$$

$$\rho * V = \frac{m}{V} * V$$

$$\rho * V = m$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$V = m/\rho = 24/0,8 = 30\text{cm}^3$$

Hooke lag

$$F = k * \Delta l$$

F - kraft

k - fjäderkonstant

Δl - fjäderns förlängning

3.1.3 EX3

Bestäm konstanten för en fjäder som sträcks ut 18cm när den belastas med kraften 37N .

$$F = k * \Delta l$$

$$\frac{F}{\Delta l} = k$$

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{37}{0,18} = 205,55... \approx 2,1 * 10^2 \text{N/m}$$

Formel för rörelse energi: $w = \frac{mv^2}{2}$

w - energi(J)

m - massa(kg)

h - höjd(m)

g - gravitationskonstant. $9,82\text{m/s}^2$

v - hastighet(m/s)

3.1.4 EX4

Beräkna rörelseenergin för en bil som väger 1200kg och kör 90km/h

$$w = \frac{mv^2}{2} = \frac{1200 * 25^2}{2} = 375000 \approx 4 * 10^5 \text{J} = 400\text{kJ} = 0,4\text{MJ}$$

$$90km = 90000m$$

$$1h = 3600s$$

$$\frac{90000}{3600} = \frac{90}{3,6} = 25m/s$$

4 Föreläsning 3

4.1 Vektorer

Storhet som har både storlek och riktning.

Storheter där riktningen ej är relevant kallas skalärer.

Att skriva vektorer:

F, (f)

Att rita vektorer:

\longrightarrow

Pilens riktning är vektorens riktning.

Pilens längd är vektorens storlek.

Att addera två vektorer:

Parallellogrammetoden.

Polygonmetoden

Att multiplicera/dividera en vektor med en skalär(ett tal):

Multiplicera vektorn v (med tak) med talet $k, k > 0$.

Sammar riktning ,storleken påverkas av $k, k < 0$.

Motsatta riktningen storleken påverkas av k .

Komposanter(att dela upp en vektor) $(x1; y1) + (x2; y2) = (x1 + x2; y1 + y2)$

5 Föreläsning 4

5.1 Grundläggande algebra och prioriteringsregler

När vi beräknar värdet av ett uttryck måste vi ta hänsyn till prioriteringsreglerna.

1. Paranteser
2. Potenser
3. Multiplikation och division
4. Addition och division

5.2 Uppgifter

5.2.1 EX1

$$\underbrace{20/4}_3 + \underbrace{8-6}_4 * \underbrace{2}_3 = \underbrace{5+8}_3 - \underbrace{12}_3 = 1$$

5.2.2 EX2

$$\underbrace{2*5^3}_3 = \underbrace{2*125}_3 = 250$$

5.2.3 EX3

$$\underbrace{(8+5)}_1 \underbrace{^2}_{\underbrace{(16+14)}_1} = \underbrace{13^2}_2 \underbrace{*30}_3 = \underbrace{169*30}_3 = 5070$$

Addition $term + term = summa$

Subtraktion $term - term = differens$

Multiplikation $faktor * faktor = produkt$

Division $\frac{täljare}{nämnare} = kvot$

5.3 Bråkräkning

Multiplikation $\frac{3}{5} * \frac{8}{7} = \frac{24}{35}$

Täljare multipliceras till en täljare.

nämnare multipliceras till en nämnare.

Addition och subtraktion.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{8*1}{8*3} + \frac{1*3}{8*3} = \frac{8}{24} + \frac{3}{24} = \frac{11}{24}$$

6 Föreläsning 5 - uppställning och förenkling

6.1 Uppgifter

6.1.1 EX1

Emil hyr en bil. Dygnsavgiften är 250kr och milkostnaden är 8kr/mil.

A) Hur mycket kostar det ifall Emil hyr bilen i ett dygn och kör 12 mil.

$$\underbrace{250}_{\text{Dygnsavg.}} + \underbrace{8*12}_{\text{mil kost.}} = 250 + 96 = 346kr \text{ Svar: Det kostar honom 346kr}$$

B) Hur mycket ska Emil betala om han hyr bilen i k dygn och kör x mil?

$$\underbrace{250k}_{\text{Dygnsavg.}} + \underbrace{8k}_{\text{mil kost.}} <- \text{Algebraiskt uttryck}$$

6.1.2 EX2

Annika lånar 15000kr för att köpa bil. Hon får betala 3% i ränta.

A) Hur stor är hennes skuld efter 5år om hon ej har betalt tillbaka något.

$$\underbrace{15000}_{\text{Lån}} + \underbrace{1,03^5}_{\text{Förändringsfaktor}} \approx 17389kr$$

$5 = \text{antalår}$

Svar: Hon är skyldig ca 17389kr och är fast i lyxfällan

B) Hur stor är skulden efter x år?

$$\underbrace{15000}_{\text{Lån}} + \underbrace{1,03^x}_{\text{Förändringsfaktor}}$$

6.1.3 EX3

Förenkla: $4x + 3x + 6 - 2$.

$$\underbrace{4x + 3x}_{\text{Addera}} + \underbrace{6 - 2}_{\text{subtrahera}} = 7x + 4$$

6.1.4 EX4

Förenkla: $\frac{5}{4}a - \frac{a}{2}$.

$$\frac{5}{4}a - \underbrace{\frac{1}{2}a}_{\frac{a}{2}} = \frac{5}{4}a - \underbrace{\frac{1 * 2}{2 * 2}a}_{\text{Multiplicera}} = \frac{5}{4}a - \frac{2}{4}a = \frac{3}{4}a$$

6.1.5 EX5

Förenkla: $a(a + b) - b(a - 7b)$.

$$\underbrace{a(a + b)}_{a^2 + ab} - \underbrace{b(a - 7b)}_{ab - 7b^2} = a^2 + ab - ab - 7b^2 = a^2 - 7b^2$$

7 Föreläsning 7

7.1 Polynom

Ett polynom är en summa av termer där variablernas exponenter är positiva heltal.

$$\underbrace{x^3 + \overbrace{2}^{\text{Koefficient}} x}_{\text{Variabel term}} - \underbrace{4}_{\text{Konstant term}}$$

7.2 Multiplicera polynom

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

7.3 Regler

7.3.1 Konjugat regeln

$$\underbrace{(x + 2)(x - 2)}_{\text{Konjugat regeln}} = x^2 - 2x + 2x - 4 = x^2 - 4$$

7.3.2 Kvadrerings regelerna

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kvadrerings regel

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Kvadrerings regel

7.4 Uppgifter

7.4.1 EX1

$$(a+5)(a-5) = a^2 - 5a + 5a - 25 = a^2 - 25$$

7.4.2 EX2

$$(a+3)^2 = (a+3)(a+3) = a^2 + 6a + 9$$

7.4.3 EX3

$$(3x+4y)^2 = 9x^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4y + 16y^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$$

7.4.4 EX4

$$\text{Faktorisera: } 2xy^2 + x^2y = xy(2y + x)$$

7.4.5 EX5

$$\text{Faktorisera: } x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$$

7.4.6 EX6

$$\text{Faktorisera: } x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

7.4.7 EX7

$$\text{Faktorisera: } 2x^2 + 10x + 50 = 2(x^2 + 5x + 25)$$

7.4.8 EX8

$$\text{Faktorisera: } 5^x + 5^{x+1} = 5^x + 5^x \cdot 5 = 5^x(1 + 5) = 6 \cdot 5^x$$

7.4.9 EX9

$$\text{Faktorisera: } a^{2x+2} - a^{2x} = a^{2x}a^2 - a^{2x} = a^{2x}(a^2 - 1) = a^{2x}(a+1)(a-1)$$

8 Föreläsning 11

8.1 Logaritmer och logaritmlagar

"Logaritmen av 2000 är det tal vi måste upphöja 10 med för att få 2000".

Definition: Om $\underbrace{10^x = y}_{\text{potensform}}$ så är $\underbrace{x = \log y}_{\text{logaritform}}$

Hur löser vi $10^x = 1000$? Detta är lätt att lösa, antingen vet man att $x = 3$ eller så testar man olika värden på x tills man kommer till något i närheten. Man kan även använda en grafritande räknare och kolla vart x skär 1000
Hur löser vi $10^x = 2000$? Detta är ett mycket svårare tal att lösa och görs lättast genom att använda logaritm, men man kan även använda en grafritande räknare.

$\underbrace{10^x = 2000}_{\text{potensform}} \rightarrow \underbrace{x = \log 2000}_{\text{logaritform}}$
Svaret blir: $x \approx 3,301$

8.2 Logaritmlagarna

$$a = 10^{\log a}$$

Vi härleder logaritmlagarna med hjälp av potenslagarna

8.2.1 1:a lagen

$$AB = 10^{\log A} * 10^{\log B} = 10^{\log A + \log B}$$

$$AB = 10^{\log AB}$$

Lagen säger att " $\log AB = \log A + \log B$ "

8.2.2 2:a lagen

$$\frac{A}{B} = 10^{\log A} / 10^{\log B} = 10^{(\log A - \log B)}$$

$$\frac{A}{B} = 10^{\log A/B}$$

Lagen säger att " $\log A/B = \log A - \log B$ "

8.2.3 3:e lagen

$$A^k = \underbrace{A * A * A \dots * A}_{k \text{ st}} = \underbrace{10^{\log A} * 10^{\log A} * 10^{\log A} \dots 10^{\log A}}_{k \text{ st}} =$$

$$= (10^{\log A})^k = 10^{k * \log A}$$

Lagen säger att " $\log(A^k) = k * \log A$ "

8.3 Logoritm exempel

8.3.1 EX1

Lös ekvationen $10^x = 67$

$\underbrace{10^x = 67}_{\text{potensform}} \rightarrow \underbrace{x = \log 67}_{\text{logaritform}}$
Svaret blir: $x \approx 1,8$

8.3.2 EX2 - KONTROLLERA

Skriv talet 7 (exakt) som en potens med 10 som bas.

Svar: $7 = 10^{\log 7}$

8.3.3 EX3

Lös ekvationen $2 * \log x = 12$

$$2 * \log x = \underbrace{\frac{2 * \log x}{2}}_{\text{Dividera med 2}} = \underbrace{\frac{12}{2}}_{\text{Dividera med 2}} = \log x = 6$$

$$\log x = 6$$

$$x = 10^6$$

Svar: $x = 10^6$

8.3.4 EX4 - FIXA

Lös exakt $3^x = 8$

Alt1.

Alt2.

Svar: $x = 1,9$

8.3.5 EX5

Lös: $\log x = \log 5 + \log 12$

Lösning med 1:a lagen.

$$\log x = \log 5 + \log 12$$

$$\log x = \underbrace{\log 5 * 12}_{\text{Gör om log12 till 12}}$$

$$\underbrace{\log x}_{\text{Ta bort log}} = \underbrace{\log 60}_{\text{Ta bort log}}$$

$$x = 60$$

Svar: $x = 60$

8.3.6 EX6 - KONTROLLERA SVAR

Lös: $\log x = 2 * \log 3$

Lösning med 3:e lagen.

$$\log x = 2 * \log 3$$

$$\log x = \log 3^2$$

$$x = 3^2$$

Svar: $x = 60$

8.3.7 EX7

Lös: $\log x^2 = 8$

Lösning med 3:e lagen.

$$2 * \log x = 8$$

$$\underbrace{\frac{2 * \log x}{2}}_{\text{Dividera med 2}} = \underbrace{\frac{8}{2}}_{\text{Dividera med 2}}$$
$$\log x = 4$$

Svar: $x = 4$

9 Föreläsning 12

9.1 Uppgifter

9.1.1 EX1

$$\begin{aligned}lgx &= 2lg3 + 4lg2 \\lgx &= lg(3^2) + lg(2^4) \\lgx &= lg9 + lg16 \\lgx &= lg(9 * 16) \\x &= 144\end{aligned}$$

9.1.2 EX2

Lös ekvationen:

$$\begin{aligned}2 * 3^x &= 4^x \\lg(2 * 3^x) &= lg(4^x) \\lg2 + lg(3^x) &= xlg4 \\lg2 + xlg3 &= xlg4 \\lg2 &= xlg4 - xlg3 \\lg2 &= x(lg4 - lg3) \\x &= \frac{lg2}{lg4 - lg3}\end{aligned}$$

9.1.3 EX3 KONTOLLERA

Antag att vi vet att $10^{0,6} \approx 4$

Vad är då $lg 400$?

$$10^{0,6} \approx 4$$

$$10^{0,6} * 10^2 \approx 400$$

$$10^{2,6} \approx 400$$

9.1.4 EX4

Lös ekvationen:

$$\lg(x+4) + \lg(x+2) = \lg(x-1) + \lg(x-10)$$

$$\lg((x+4)(x+2)) = \lg((x-1)(x-10))$$

$$(x+4)(x+2) = (x-1)(x-10)$$

$$x^2 + 2x + 4x + 8 = x^2 - 10x - x + 10$$

$$\cancel{x^2} + 6x + 8 = \cancel{x^2} - 11x + 10$$

$$6x + 8 = -11x + 10$$

$$17x = 2$$

$$x = \frac{2}{17}$$

$\lg(x-1)$ och $\lg(x-10)$ ej det, när $x = \frac{2}{17}$ uppgiften saknar lösningar.

9.1.5 EX5

Jordens folkmängd var år 2008 6,68 miljarder. Tillväxten var då 1,2% per år.

1. Ställ upp en formel som ger jordens folkmängd om vi antar att den årliga procentuella ökningen ej ändras.

$$y = 6,68 * 10^9 * 1,012^x$$

x är anta år efter 2008. y är folkmängden x antal år efter 2008

2. När är folkmängden 9 miljarder enligt denna modell?

$$9 * 10^9 = 6,68 * 10^9 * 1,012^x$$

$$9 * \cancel{10^9} = 6,68 * \cancel{10^9} * 1,012^x$$

$$\frac{9}{6,68} = 1,012^x$$

$$\lg(\frac{9}{6,68}) = \lg 1,012^x$$

$$\lg(\frac{9}{6,68}) = x \lg 1,012$$

$$x = \frac{\lg(9/6,68)}{\lg 1,012} = 24,99$$

Svar: År 2033 är folkmängden på jorden 9 miljarder.

9.1.6 EX6

I en kärnreaktor bildas bland annat plutonium-239 med en halveringstid på 24000 år.

1. Ställ upp och berätta hur mycket av 400 mg plutonium-239 finns kvar efter 100000 år.

$$400 * 0,5^{x/24000}$$

x är antalet år efter sönderfallets början. y är mängden plutonium-239 efter x är $y = 400 * 0,5^{x/24000}$

$$y(100000) = 400 * 0,5^{100000/24000} \approx 22mg$$

Svar: Det är 22 mg plutonium-239 kvar efter 100000 år.

2. Hur länge måste man vänta om man vill att mängden plutonium ska gå ner till 1 promille av den ursprungliga mängden?

$$y = A * 0,5^{x/24000}$$

A är den ursprungliga mängden och x är antalet år sedan sönderfallets början, y är återstående mängd plutonium-239 vid tiden x år.

$$\frac{A}{1000} = A * 0,5^{x/24000}$$

$$\lg(\frac{1}{1000}) = \lg(0,5^{x/24000})$$

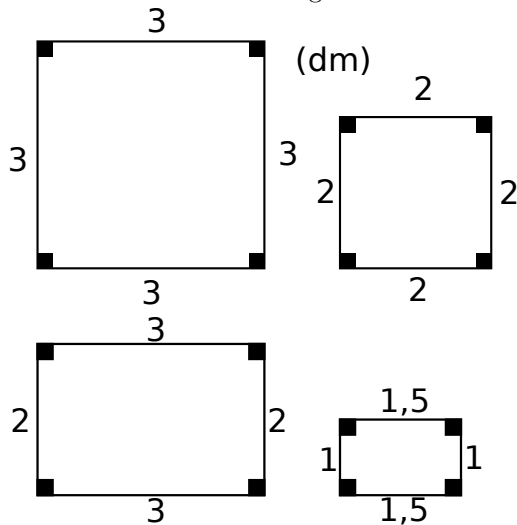
$$\begin{aligned}
 \lg\left(\frac{1}{1000}\right) &= \frac{x}{24000} \lg 0,5 \\
 24000 \lg(1/1000) &= x \lg 0,5 \\
 x &= \frac{24000 \lg(1/1000)}{\lg 0,5} = 240000 \text{år}
 \end{aligned}$$

Svar: Det tar 240000 år innan mängden minskat till en promille.

10 Föreläsning 13

10.1 Likformighet

Alla kvadrater är likformiga

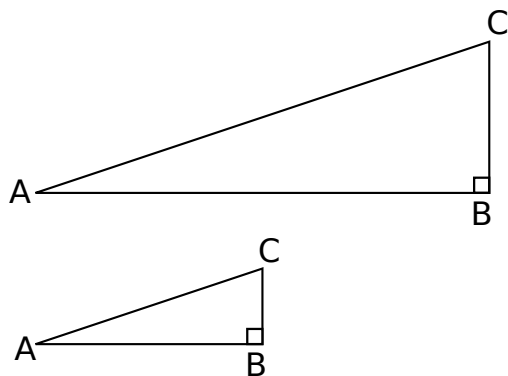


Dessa rektanglar är likformiga eftersom förhållandet mellan motsvarande sidor är lika.

10.1.1 Definition likformighet

Motsvarande vinklar är lika stora och förhållandet mellan motsvarande sidor är lika.

10.1.2 Likformiga trianglar

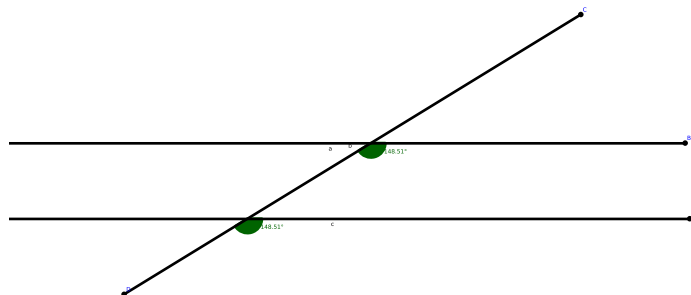


Man behöver känna till två vinklar i varje triangel för att kunna jämföra dem

och se om de är likformiga.

10.1.3 Likbelägningsvinklar

00.48, 5.50



Likbelägna vinklar är lika stora.

01.28, 8.00

10.1.4 Transversalsatsen

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

10.2 Uppgifter

10.2.1 EX1

Triangelarna är likformiga. Beräkna x och y $\frac{19,0}{12,0} = \frac{24,0}{y} = \frac{32,0}{x}$

$$y = \frac{19,0}{12,0} = 24,0$$

$$y = \frac{24,0 \cdot 12,0}{19,0} \approx 15,2cm$$

$$\frac{19,0}{12,0} = \frac{32,0}{x}$$

$$x = \frac{32,0 \cdot 12,0}{19,0} \approx 20,2cm$$

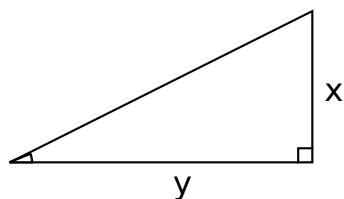
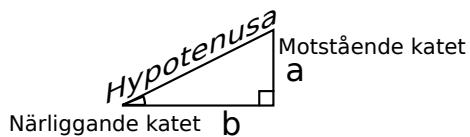
10.2.2 EX2

DE är parallell med AB. Bestäm y (sträckan CE) $\frac{3,0}{5,0} = \frac{y}{6,0}$

$$y = \frac{3,0 \cdot 6,0}{5,0} = 3,6cm$$

Svar: $y = 3,6cm$

11 Föreläsning 14



$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} = \tan v \text{ (uttalas "tangens" } v)$$

Räknaren måste vara inställd på "degree" i mode.

11.1 Uppgifter

11.1.1 EX1

$$\frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} = \tan v$$

$$\text{motstående katet} = \tan v * \text{närliggande katet}$$

$$x = 15,0 * \tan 38^\circ$$

$$x \approx 12$$

Svar: Sidan x är 12cm.

11.1.2 EX2

Bestäm y

$$\tan 28^\circ = \frac{z}{18}$$

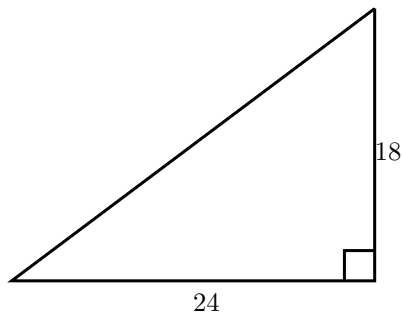
$$\tan 36^\circ = \frac{y+z}{18}$$

$$y + 018 \tan 36^\circ$$

$$y = 18 \tan 36^\circ - z = 18 \tan 36^\circ - 18 \tan 28^\circ \approx 3,5$$

Svar: Sidan y är 3,5 cm.

11.1.3 EX3



Skriv in från mobil bild.

11.1.4 EX4

Skriv in från mobil bild.

11.1.5 EX5

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{26}$$

$$a = 26 * \sin 45^\circ$$

$$\sin 35^\circ = \frac{a}{x}$$

$$x = \frac{a}{\sin 35^\circ} = \frac{26 \sin 45^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 32cm$$

Svar Sidan x är 32cm

11.1.6 EX6

Bestäm $\sin u$, $\sin v$, $\cos u$, $\cos v$. Ser vi något samband?

$$\sin u = \frac{12}{27}$$

$$\sin v = \frac{\sqrt{585}}{27}$$

$$\cos u = \frac{\sqrt{585}}{27}$$

$$\cos v = \frac{12}{27}$$

$$v + u = 90^\circ$$

$$v = 90^\circ - u$$

$$\sin u = \cos v = \cos(90^\circ - u)$$

$$\sin v = \cos u = \cos(90^\circ - v)$$

12 Föreläsning 15

Medelvärde: Addera alla värden och dividera med antalet värden.

Medianvärde: Storleksordna alla värden, välj det mittersta värdet.

Typvärde: Det värde som förekommer flest gånger.

12.1 Uppgifter

12.1.1 EX1

1. Dygnets maxtemperatur under en sommarvecka var
24, 28, 27, 24, 25, 30, 24
Bestäm medelvärde, median och typvärde.
Medelvärde: $\frac{24+28+27+24+25+30+24}{7} = \frac{182}{7} = 26$
Median: 24, 24, 24, (25), 27, 28, 30 median = 25
Typvärde: Förekommer 3 gånger.

13 Föreläsning 16

Räta linjens ekvation och grafisklösning av ekvationssystem.

En rät linje kan skrivas på formen $y=kx+m$
 x, y är koordinater. k, m är konstanter

13.1 Parallella linjer

Två linjer är parallella om de har samma k -värde.

Två linjer är parallella om $k_1 * k_2 = -1$

<bild på parallell linje>

$$y = k_1x + m_1$$

$$y = k_2x + m_2$$

13.2 Uppgifter

13.2.1 EX1

Rita ett koordinatsystem och bestäm k och m värde.

X	Y	
0	-4	
2	0	<bild>
4	4	
6	8	

m = vart den räta linjen skär y -axeln vid $x: 0$

k = antal y per x steg framåt.

Vad händer med linjens utseende när vi följer olika värden på k och m ?

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + 3 \\ y = x + 3 \end{array} \right\} \text{Positiv lutning. } k > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + 3 \\ y = -x + 3 \end{array} \right\} \text{Negativ lutning. } k < 0$$

Det som är gemensamt för dessa är att samtliga linjer skär genom $y = 3$.

Att beräkna k:

Vi behöver 2 st koordinater att utgå ifrån. x_1 , x_2 och y_1 , y_2 .

Formeln för att räkna ut detta är;

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 8$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 4$$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Svar: $k = \frac{1}{2}$

13.2.2 EX2

Bestäm ekvationen för den rätta linje som går genom punkterna (2,8) och (4,14).

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14-8}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = 3x + m$$

$$8 = 3 \cdot 2 + m$$

$$8 = 6 + m$$

$$8-6 = m$$

$$m = 2$$

Svar: Linjens ekvation är $y=3x+2$

13.2.3 EX3

Bestäm ekvationen som går genom punkten (3,5) och har k-värdet 4.

Rätalinjens ekvation i enpunktsform

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 5 = 4(x - 3)$$

$$\Rightarrow y - 5 = 4x - 12$$

$$\Rightarrow y = 4x - 7 \text{ Svar: } y = 4x-7$$

13.2.4 EX4

Ange k-värde för en linje som är vinkelrät mot linjen $y=2x+7$, vi söker

k-värdet sådant att $2 \cdot k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

Svar: $y = -\frac{1}{2}x + 3$

13.2.5 EX5

Hitta skärningspunkten mellan linjerna $y=2x-5$

$$y=-x+7$$

Genom att rita upp båda linjerna i samma koordinatsystem med hjälp av grafitaren.

<bild på detta>

14 Föreläsning 17

Att lösa ekvationssystem med substitutionsmetoden.

Även att det går att lösa ett ekvationssystem genom att rita en graf och räkna utifrån det. Problemet blir när k är ett decimalvärde, det blir svårt att räkna. Då kan man använda substitutionsmetoden som går ut på att man bryter ut variablerna. Denna lösning använder 5 steg.

1. Bryt ut x eller y
2. Ersätter x eller y med 1.
3. Löser ekvationen
4. Räknar ut värdet på den andra variabeln
5. Skriv svar

14.1 Uppgifter

14.1.1 EX1

$$\begin{cases} 1y - 3z = -2 \\ 2y = 4 - 2x \end{cases}$$

I den andra ekvationen så är y redan utbruten (y står ensamt), vi sätter in y :s värde i den första ekvationen. (substitueras)

$$y - 3x = -2$$

$$\underbrace{4 - 2x}_{y \text{ värde}} - 3x = -2$$

$$4 - 5x = -2$$

$$\underbrace{4 + 2 = 5x}$$

Flyttar 2 och $5x$

$$x = \frac{6}{5}$$

Nu när vi vet x så kan vi lösa ut y med hjälp av den andra ekvationen

$$y = 4 - 2x$$

$$y = 4 - 2 * \frac{6}{5}$$

$$y = 4 - \frac{12}{5}$$

$$\underbrace{y = \frac{20}{5} - \frac{12}{5}}$$

Gör om 4 till bråktal

$$y = \frac{8}{5}$$

Svar;

$$\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$$

14.1.2 EX2

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 13y - 4z = 17 \\ 2y - 5z = 2 \end{cases}$$

Den andra ekvationen är lättare att bryta ut då vi har $1y$.

$$y - 5z = 2$$

$$y = 5z + 2$$

Nu när vi vet z så kan vi lösa ut y med hjälp av den första ekvationen

$$3y - 4z = 17x$$

$$3(5z + 2) - 4z = 17$$

$$15z + 6 - 4z = 17$$

$$\underbrace{11z = 11}$$

Flyttar 6 och förenklar

$$z = 1$$

Nu ska vi använda andra ekvationen och använda $z = 1$ för att lösa. $y = 5z + 2$

$$y = 5(1) + 2$$

$$y = 7$$

Svar;

$$\begin{cases} z = 1 \\ y = 7 \end{cases}$$

14.1.3 EX3

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1x + 3y + 3 = 0 \\ 2x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Vi börjar med att bryta ut x ur den andra ekvationen.

$$x - 3y + 2 = 0$$

$$x = 3y - 2$$

Nu när vi vet x så kan vi lösa ut y med hjälp av den första ekvationen

$$x + 3y + 3 = 0$$

$$3y - 2 + 3y + 3 = 0$$

$$6y + 1 = 0$$

$$y = -\frac{1}{6}$$

Nu ska vi använda andra ekvationen och sätta in värdet på y i $x = 3y - 2$.

$$x = 3y - 2$$

$$x = 2(-\frac{1}{6}) - 2$$

$$x = -\frac{3}{6} - 2 \quad x = \underbrace{-\frac{3}{6} - \frac{12}{6}}$$

$$x = -\frac{3}{6} - \frac{12}{6} \overset{\text{Gör om 2 till bråktal}}{=} -\frac{5}{2}$$

Svar;

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

14.1.4 EX3

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1\frac{x}{2} + 4y = 35 \\ 22x + \frac{y}{4} = 14 \end{cases}$$

Vi börjar med att bryta ut x ur den första ekvationen.

$$\frac{x}{2} + 4y = 35$$

$$x = -\frac{x}{2} + 4y = 35$$

Multipluera med 2

$$x + 8y = 70 \quad x = 70 - 8y$$

Nu när vi vet x så kan vi lösa ut y med hjälp av den andra ekvationen

$$2x + \frac{y}{4} = 14$$

$$2(70 - 8y) + \frac{y}{4} = 14$$

$$140 - 16y + \frac{y}{4} = 14$$

Multipluera med 4

$$560 - 64y + y = 56$$

$$63y = 504$$

$$y = \frac{504}{63} = 8$$

Nu ska vi använda andra ekvationen och sätta in värdet på y i $x = 70 - 8y$.

$$x = 70 - 8y$$

$$x = 70 - 8(8)$$

$$x = 70 - 64$$

$$x = 8$$

Svar;

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 8 \end{cases}$$