

# Matte

Jakob Tigerström/Eric Johansson

September 17, 2015

## Contents

<b>1</b>	<b>TODO</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Föreläsning 1</b>	<b>3</b>
2.1	Värdesiffror . . . . .	3
2.2	Addition och Subtraktion . . . . .	3
2.3	Uppskatta storleksordning . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Föreläsning 2</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Föreläsning 3</b>	<b>6</b>
4.1	Vektorer . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Föreläsning 4</b>	<b>7</b>
5.1	Grundläggande algebra och prioriteringsregler . . . . .	7
5.2	Bråkräkning . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Föreläsning 5</b>	<b>8</b>
6.1	Algebra - uppställning och förenkling . . . . .	8
<b>7</b>	<b>Föreläsning 7</b>	<b>10</b>
7.1	Polynom . . . . .	10
7.2	Multiplitera polynom . . . . .	10
7.3	Regler . . . . .	10
7.3.1	Konjugat regeln . . . . .	10
7.3.2	Kvadrerings regelerna . . . . .	10
7.4	Uppgifter . . . . .	10
7.4.1	EX1 . . . . .	10
7.4.2	EX2 . . . . .	10
7.4.3	EX3 . . . . .	10
7.4.4	EX4 . . . . .	10
7.4.5	EX5 . . . . .	11
7.4.6	EX6 . . . . .	11

7.4.7	EX7	11
7.4.8	EX8	11
7.4.9	EX9	11
<b>8</b>	<b>Föreläsning 11</b>	<b>12</b>
8.1	Logaritmer och logaritmlagar	12
8.2	Logaritmlagarna	12
8.2.1	1:a lagen	12
8.2.2	2:a lagen	12
8.2.3	3:e lagen	12
8.3	Logoritm exempel	13
<b>9</b>	<b>Föreläsning 12</b>	<b>14</b>
9.1	Uppgifter	14
9.1.1	EX1	14
9.1.2	EX2	14
9.1.3	EX3 KONTOLLERA	15
9.1.4	EX4	15
9.1.5	EX5	15
9.1.6	EX6	16
<b>10</b>	<b>Föreläsning 13</b>	<b>17</b>
10.1	Likformighet	17
10.1.1	Definition likformighet	17
10.1.2	Likformiga trianglar	17
10.1.3	Likbelägningsvinklar	18
10.1.4	Transversalsatsen	18
10.2	Uppgifter	18
10.2.1	EX1	18
10.2.2	EX2	18

# 1 TODO

1. Skriv fler föreläsningar
2. Kolla stavning
3. Fixa warnings

## 2 Föreläsning 1

### 2.1 Värdesiffror

Ex1: Hur många värdesiffror har talen

1. 251 3 st
2. 0,251 3 st
3. 0,001 1 st
4. 250 2 eller 3 st  
 $2,5 * 10^2$  2 st  
 $2,50 * 10^2$  3 st
5. 2500 2,3 eller 4 st  $2,5 * 10^3$   
 $2,50 * 10^3$   
 $2,500 * 10^3$
6. 250,0 4 st

Multiplikation och division: Svara med lika många värdesiffror som det värde som har minst värdesiffror.

$$5,22 * 3,1 = 16,182 = 16.$$

### 2.2 Addition och Subtraktion

Minst antal decimaler avgör.

$$23,52 + 12,4 = 35,92 \approx 35,9$$

$$23,56 + 12,4 = 35,96 \approx 36,0$$

### 2.3 Uppskatta storleksordning

$$\frac{2,8 * 10^5}{3,2 * 10^3}$$

Storleksordningen på svaret är  $10^2$

### 3 Föreläsning 2

Omskrivning av formler

Densitet:  $\rho = m/v$

**EX:1** Beräkna densiteten för en sten som har volymen  $12\text{cm}^3$  och väger  $36\text{g}$ .

$$\rho = \frac{m}{v} = \frac{36}{12} = 3,0\text{g/cm}^3$$

**EX:2** Beräkna volymen av ett okänt föremål med densiteten  $0,8\text{g/cm}^3$  och väger  $24\text{g}$ .

$$\rho = \frac{m}{v}$$

$$\rho * V = \frac{m}{V} * V$$

$$\frac{\rho * V}{\rho} = m$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$V = m/\rho = 24/0,8 = 30\text{cm}^3$$

Hooke lag

$$F = k * \Delta l$$

F - kraft

k - fjäderkonstant

$\Delta l$  - fjäderns förlängning

**EX:3** Bestäm konstanten för en fjäder som sträcks ut  $18\text{cm}$  när den belastas med kraften  $37\text{N}$ .

$$F = k * \Delta l$$

$$\frac{F}{\Delta l} = k$$

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{37}{0,18} = 205,55... \approx 2,1 * 10^2 \text{N/m}$$

Formel för rörelse energi:  $w = \frac{mv^2}{2}$

w - energi(J)

m - massa(kg)

h - höjd(m)

g - gravitationskonstant.  $9,8\text{m/s}^2$

v - hastighet(m/s)

EX4:

Beräkna rörelseenergin för en bil som väger  $1200\text{kg}$  och kör  $90\text{km/h}$

$$w = \frac{mv^2}{2} = \frac{1200 * 25^2}{2} = 375000 \approx 4 * 10^5 \text{J} = 400\text{kJ} = 0,4\text{MJ}$$

$$90\text{km} = 90000\text{m}$$

$$1\text{h} = 3600\text{s}$$

$$\frac{90000}{3600} = \frac{90}{3,6} = 25m/s$$

## 4 Föreläsning 3

### 4.1 Vektorer

Storhet som har både storlek och riktning.

Storheter där riktningen ej är relevant kallas skalärer.

**Att skriva vektorer:**

**F**, (f)

**Att rita vektorer:**

→

Pilens riktning är vektorens riktning.

Pilens längd är vektorens storlek.

**Att addera två vektorer:**

Parallelogrammetoden.

Polygonmetoden

Att multiplicera/dividera en vektor med en skalär(ett tal):

Multiplicera vektorn  $v$ (med tak) med talet  $k, k > 0$ .

Sammar riktning ,storleken påverkas av  $k, k < 0$ .

Motsatta riktningen storleken påverkas av  $k$ .

Komposanter(att dela upp en vektor)

$$(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$

## 5 Föreläsning 4

### 5.1 Grundläggande algebra och prioriteringsregler

När vi beräknar värdet av ett uttryck måste vi ta hänsyn till prioriteringsreglerna.

1. Paranteser
2. Potenser
3. Multiplikation och division
4. Addition och subtraktion

$$\mathbf{EX:1} \quad \underbrace{20/4}_3 + \underbrace{8-6}_4 * \underbrace{2}_3 = \underbrace{5+8}_3 - \underbrace{12}_3 = 1$$

$$\mathbf{EX:2} \quad \underbrace{2*5}_3 = \underbrace{2*125}_3 = 250$$

$$\mathbf{EX:3} \quad \underbrace{(8+5)}_1 \underbrace{^2}_2 \underbrace{(16+14)}_1 = \underbrace{13^2}_2 \underbrace{*30}_3 = \underbrace{169*30}_3 = 5070$$

Addition  $term + term = summa$  Subtraktion  $term - term = differens$

Multiplikation  $faktor * faktor = produkt$  Division  $\frac{täljare}{nämnamre} = kvot$

### 5.2 Bråkräkning

Multiplikation  $\frac{3}{5} * \frac{8}{7} = \frac{24}{35}$

Täljare multipliceras till en täljare.

nämnamre multipliceras till en nämnamre.

Addition och subtraktion.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{8*1}{8*3} + \frac{1*3}{8*3} = \frac{8}{24} + \frac{3}{24} = \frac{11}{24}$$

## 6 Föreläsning 5

### 6.1 Algebra - uppställning och förenkling

#### EX1

Emil hyr en bil. Dygnsavgiften är 250kr och milkostnaden är 8kr/mil.

A) Hur mycket kostar det ifall Emil hyr bilen i ett dygn och kör 12 mil.

$$\underbrace{250}_{\text{Dygnsavg.}} + \underbrace{8 * 12}_{\text{mil kost.}} = 250 + 96 = 346kr \text{ Svar: Det kostar honom } 346kr$$

B) Hur mycket ska Emil betala om han hyr bilen i k dygn och kör x mil?

$$\underbrace{250k}_{\text{Dygnsavg.}} + \underbrace{8k}_{\text{mil kost.}} <- \text{Algebraiskt uttryck}$$

#### EX2

Annika lånar 15000kr för att köpa bil. Hon får betala 3% i ränta.

A) Hur stor är hennes skuld efter 5år om hon ej har betalt tillbaka något.

$$\underbrace{15000}_{\text{Lån}} + \underbrace{1,03^5}_{\text{Förändringsfaktor}} \approx 17389kr$$

$5 = \text{antalår}$

Svar: Hon är skyldig ca 17389kr och är fast i lyxfällan

B) Hur stor är skulden efter x år?

$$\underbrace{15000}_{\text{Lån}} + \underbrace{1,03^x}_{\text{Förändringsfaktor}}$$

#### EX3

Förenkla:  $4x + 3x + 6 - 2$ .

$$\underbrace{4x + 3x}_{\text{Addera}} + \underbrace{6 - 2}_{\text{subtrahera}} = 7x + 4$$

#### EX4

Förenkla:  $\frac{5}{4}a - \frac{a}{2}$ .

$$\frac{5}{4}a - \underbrace{\frac{1}{2}a}_{\frac{a}{2}} = \frac{5}{4}a - \underbrace{\frac{1 * 2}{2 * 2}a}_{\text{Multiplitera}} = \frac{5}{4}a - \frac{2}{4}a = \frac{3}{4}a$$

#### EX5

Förenkla:  $a(a + b) - b(a - 7b)$ .



$$\underbrace{a(a+b)}_{a^2+ab} - \underbrace{b(a+7b)}_{ab-7b^2} = a^2 + ab - ab - 7b^2 = a^2 - 7b^2$$

## 7 Föreläsning 7

### 7.1 Polynom

Ett polynom är en summa av termer där variabelernas exponenter är positiva heltal.

$$\underbrace{x^3 + \overbrace{2}^{\text{Koefficient}} x - \underbrace{4}_{\text{Konstant term}}}_{\text{Variabel term}}$$

### 7.2 Multiplicera polynom

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

### 7.3 Regler

#### 7.3.1 Konjugat regeln

$$\underbrace{(x + 2)(x - 2)}_{\text{Konjugat regeln}} = x^2 - 2x + 2x - 4 = x^2 - 4$$

#### 7.3.2 Kvadrerings regelerna

$$\underbrace{(a + b)^2 = (a + b)(a + b)}_{\text{Kvadrerings regel}} = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\underbrace{(a - b)^2 = (a - b)(a - b)}_{\text{Kvadrerings regel}} = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

### 7.4 Uppgifter

#### 7.4.1 EX1

$$(a + 5)(a - 5) = a^2 - 5a + 5a - 25 = a^2 - 25$$

#### 7.4.2 EX2

$$(a + 3)^2 = (a + 3)(a + 3) = a^2 + 6a + 9$$

#### 7.4.3 EX3

$$(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 2 * 3x * 4y + 16y^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$$

#### 7.4.4 EX4

$$\text{Faktorisera: } 2xy^2 + x^2y = xy(2y + x)$$

**7.4.5 EX5**

Faktorisera:  $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

**7.4.6 EX6**

Faktorisera:  $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

**7.4.7 EX7**

Faktorisera:  $2x^2 + 10x + 50 = 2(x^2 + 5x + 25)$

**7.4.8 EX8**

Faktorisera:  $5^x + 5^{x+1} = 5^x + 5^x * 5 = 5^x(1 + 5 = 6 * 5^x$

**7.4.9 EX9**

Faktorisera:  $a^{2x+2} - a^{2x} = a^{2x}a^2 - a^{2x} = a^{2x}(a^2 - 1) = a^{2x}(a + 1)(a - 1)$

## 8 Föreläsning 11

### 8.1 Logaritmer och logaritmlagar

"Logaritmen av 2000 är det tal vi måste upphöja 10 med för att få 2000".

Definition: Om  $\underbrace{10^x = y}_{\text{potensform}}$  så är  $\underbrace{x = \log y}_{\text{logaritmform}}$

Hur löser vi  $10^x = 1000$ ? Detta är lätt att lösa, antingen vet man att  $x = 3$  eller så testar man olika värden på  $x$  tills man kommer till något i närheten. Man kan även använda en grafritande räknare och kolla vart  $x$  skär 1000

Hur löser vi  $10^x = 2000$ ? Detta är ett mycket svårare tal att lösa och görs lättast genom att använda logaritm, men man kan även använda en grafritande räknare.

$\underbrace{10^x = 2000}_{\text{potensform}} \rightarrow \underbrace{x = \log 2000}_{\text{logaritmform}}$   
Svaret blir:  $x \approx 3,301$

### 8.2 Logaritmlagarna

$$a = 10^{\log a}$$

Vi härleder logaritmlagarna med hjälp av potenslagarna

#### 8.2.1 1:a lagen

$$AB = 10^{\log A} * 10^{\log B} = 10^{\log A + \log B}$$

$$AB = 10^{\log AB}$$

Lagen säger att " $\log AB = \log A + \log B$ "

#### 8.2.2 2:a lagen

$$\frac{A}{B} = 10^{\log A} / 10^{\log B} = 10^{(\log A - \log B)}$$

$$\frac{A}{B} = 10^{\log A/B}$$

Lagen säger att " $\log A/B = \log A - \log B$ "

#### 8.2.3 3:e lagen

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{A * A * A \dots * A}_{k \text{ st}} = \underbrace{10^{\log A} * 10^{\log A} * 10^{\log A} \dots 10^{\log A}}_{k \text{ st}} = \\ &= (10^{\log A})^k = 10^{k * \log A} \end{aligned}$$

Lagen säger att " $\log(A^k) = k * \log A$ "

### 8.3 Logoritm exempel

#### EX1

Lös ekvationen  $10^x = 67$

$$\underbrace{10^x = 67}_{\text{potensform}} \rightarrow \underbrace{x = \log 67}_{\text{logaritmform}}$$

Svaret blir:  $x \approx 1,8$

#### EX2 - KONTROLLERA

Skriv talet 7 (exakt) som en potens med 10 som bas.

Svar:  $7 = 10^{\log 7}$

#### EX3

Lös ekvationen  $2 * \log x = 12$

$$2 * \log x = \underbrace{\frac{2 * \log x}{2}}_{\text{Dividera med 2}} = \underbrace{\frac{12}{2}}_{\text{Dividera med 2}} = \log x = 6$$

$$\log x = 6$$
$$x = 10^6$$

Svar:  $x = 10^6$

#### EX4 - FIXA

Lös exakt  $3^x = 8$

Alt1.

Alt2.

Svar:  $x = 1,9$

#### EX5

Lös:  $\log x = \log 5 + \log 12$

Lösning med 1:a lagen.

$$\log x = \log 5 + \log 12$$

$$\log x = \underbrace{\log 5 * 12}_{\text{Gör om log12 till 12}}$$

$$\underbrace{\log x}_{\text{Ta bort log}} = \underbrace{\log 60}_{\text{Ta bort log}}$$

$$x = 60$$

Svar:  $x = 60$

### EX6 - KONTROLLERA SVAR

Lös:  $\log x = 2 * \log 3$

Lösning med 3:e lagen.

$$\log x = 2 * \log 3$$

$$\log x = \log 3^2$$

$$x = 3^2$$

Svar:  $x = 60$

### EX7

Lös:  $\log x^2 = 8$

Lösning med 3:e lagen.

$$2 * \log x = 8$$

$$\underbrace{\frac{2 * \log x}{2}}_{\text{Dividera med 2}} = \underbrace{\frac{8}{2}}_{\text{Dividera med 2}}$$

$$\log x = 4$$

Svar:  $x = 4$

## 9 Föreläsning 12

### 9.1 Uppgifter

#### 9.1.1 EX1

$$\lg x = 2\lg 3 + 4\lg 2$$

$$\lg x = \lg(3^2) + \lg(2^4)$$

$$\lg x = \lg 9 + \lg 16$$

$$\lg x = \lg(9 * 16)$$

$$x = 144$$

#### 9.1.2 EX2

Lös ekvationen:

$$2 * 3^x = 4^x$$

$$\lg(2 * 3^x) = \lg(4^x)$$

$$\lg 2 + \lg(3^x) = x\lg 4$$

$$\begin{aligned}
lg2 + xlg3 &= xlg4 \\
lg2 &= xlg4 - xlg3 \\
lg2 &= x(lg4 - lg3) \\
x &= \frac{lg2}{lg4 - lg3}
\end{aligned}$$

### 9.1.3 EX3 KONTOLLERA

Antag att vi vet att  $10^{0,6} \approx 4$

Vad är då  $lg\ 400$ ?

$$10^{0,6} \approx 4$$

$$10^{0,6} * 10^2 \approx 400$$

$$10^{2,6} \approx 400$$

### 9.1.4 EX4

Lös ekvationen:

$$lg(x+4) + lg(x+2) = lg(x-1) + lg(x-10)$$

$$lg((x+4)(x+2)) = lg((x-1)(x-10))$$

$$(x+4)(x+2) = (x-1)(x-10)$$

$$x^2 + 2x + 4x + 8 = x^2 - 10x - x + 10$$

$$\cancel{x^2} + 6x + 8 = \cancel{x^2} - 11x + 10$$

$$6x + 8 = -11x + 10$$

$$17x = 2$$

$$x = \frac{2}{17}$$

$lg(x-1)$  och  $lg(x-10)$  ej det, när  $x = \frac{2}{17}$  uppgiften saknar lösningar.

### 9.1.5 EX5

Jordens folkmängd var år 2008 6,68 miljarder. Tillväxten var då 1,2% per år.

1. Ställ upp en formel som ger jordens folkmängd om vi antar att den årliga procentuella ökningen ej ändras.

$$y = 6,68 * 10^9 * 1,012^x$$

x är anta år efter 2008. y är folkmängden x antal år efter 2008

2. När är folkmängden 9 miljarder enligt denna modell?

$$9 * 10^9 = 6,68 * 10^9 * 1,012^x$$

$$9 * \cancel{10^9} = 6,68 * \cancel{10^9} * 1,012^x$$

$$\frac{9}{6,68} = 1,012^x$$

$$lg(\frac{9}{6,68}) = lg1,012^x$$

$$lg(\frac{9}{6,68}) = xlg1,012$$

$$x = \frac{lg(9/6,68)}{lg1,012} = 24,99$$

Svar: År 2033 är folkmängden på jorden 9 miljarder.

### 9.1.6 EX6

I en kärnreaktor bildas bland annat plutonium-239 med en halveringstid på 24000 år.

1. Ställ upp och berätta hur mycket av 400 mg plutonium-239 finns kvar efter 100000 år.

$$400 * 0,5^{x/24000}$$

x är antalet år efter sönderfallets början. y är mängden

plutonium-239 efter x är  $y = 400 * 0,5^{x/24000}$

$$y(100000) = 400 * 0,5^{100000/24000} \approx 22mg$$

Svar: Det är 22 mg

plutonium-239 kvar efter 100000 år.

2. Hur länge måste man vänta om man vill att mängden plutonium ska gå ner till 1 promille av den ursprungliga mängden?

$$y = A * 0,5^{x/24000}$$

A är den ursprungliga mängden och x är antalet år sedan

sönderfallets början, y är återstående mängd plutonium-239 vid tiden

$$x \text{ år. } \frac{A}{1000} = A * 0,5^{x/24000}$$

$$\lg\left(\frac{1}{1000}\right) = \lg(0,5^{x/24000})$$

$$\lg\left(\frac{1}{1000}\right) = \frac{x}{24000} \lg 0,5$$

$$24000 \lg(1/1000) = x \lg 0,5$$

$$x = \frac{24000 \lg(1/1000)}{\lg 0,5} = 240000 \text{ år}$$

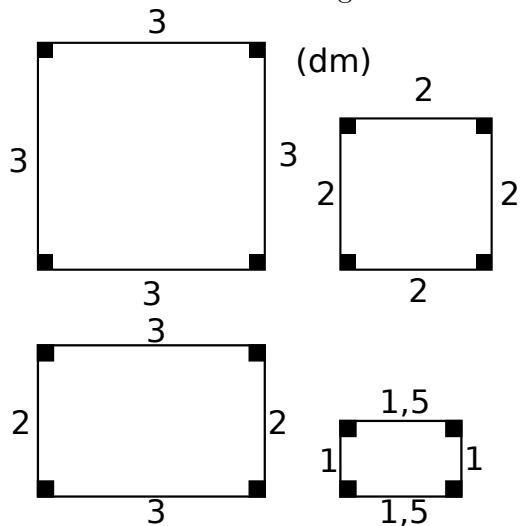
Svar: Det tar 240000 år innan mängden minskat till en promille.



## 10 Föreläsning 13

### 10.1 Likformighet

Alla kvadrater är likformiga

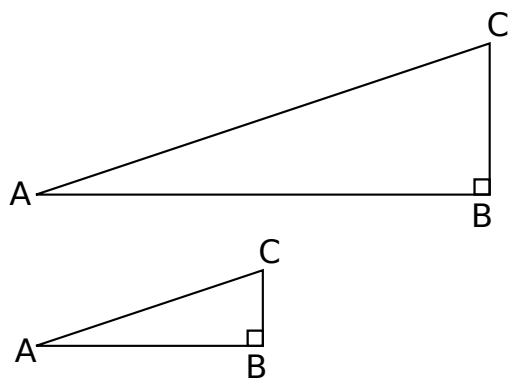


Dessa rektanglar är likformiga eftersom förhållandet mellan motsvarande sidor är lika.

#### 10.1.1 Definition likformighet

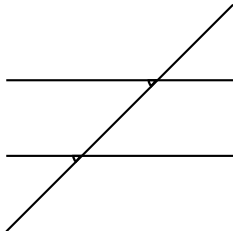
Motsvarande vinklar är lika stora och förhållandet mellan motsvarande sidor är lika.

#### 10.1.2 Likformiga trianglar



Man behöver känna till två vinklar i varje triangel för att kunna jämföra dem och se om de är likformiga.

### 10.1.3 Likbelägningsvinklar



Likbelägna vinklar är lika stora.

### 10.1.4 Transversalsatsen

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

## 10.2 Uppgifter

### 10.2.1 EX1

Triangelarna är likformiga. Beräkna  $x$  och  $y$   $\frac{19,0}{12,0} = \frac{24,0}{y} = \frac{32,0}{x}$

$$y = \frac{19,0}{12,0} = 24,0$$

$$y = \frac{24,0 \cdot 12,0}{19,0} \approx 15,2 \text{ cm}$$

$$\frac{19,0}{12,0} = \frac{32,0}{x}$$

$$x = \frac{32,0 \cdot 12,0}{19,0} \approx 20,2 \text{ cm}$$

### 10.2.2 EX2

DE är parallell med AB. Bestäm  $y$  (sträckan CE)  $\frac{3,0}{5,0} = \frac{y}{6,0}$

$$y = \frac{3,0 \cdot 6,0}{5,0} = 3,6 \text{ cm}$$

Svar:  $y = 3,6 \text{ cm}$