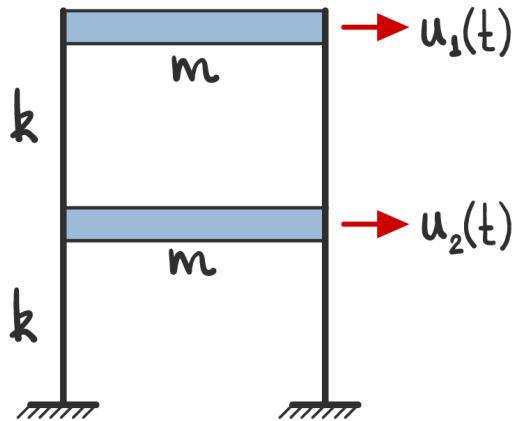


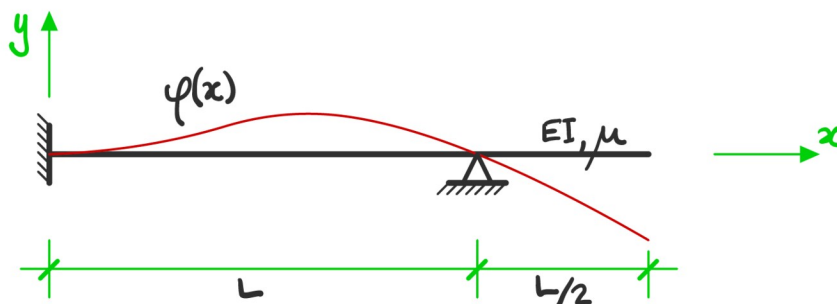
Nome: \_\_\_\_\_

**Questão 1:** Demonstre que para o sistema abaixo, com 2 g.d.l., a relação entre as frequências naturais do segundo e do primeiro modo é curiosamente  $f_2/f_1 = 1 + \varphi$ , onde  $\varphi$  é a razão áurea (ou *golden ratio*)! A razão áurea pode ser aproximada pela relação de dois números sucessivos da sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., e também é a raiz positiva da equação  $(2 - \varphi)(1 + \varphi) = 1$ .



**Questão 2:** Para a estrutura do problema anterior, calcule a máxima amplitude de deslocamento para uma carga aplicada no g.d.l. "1" com uma densidade espectral tipo ruído branco,  $S_1(f) = S_0$ . Considere a contribuição dos dois modos de vibração.

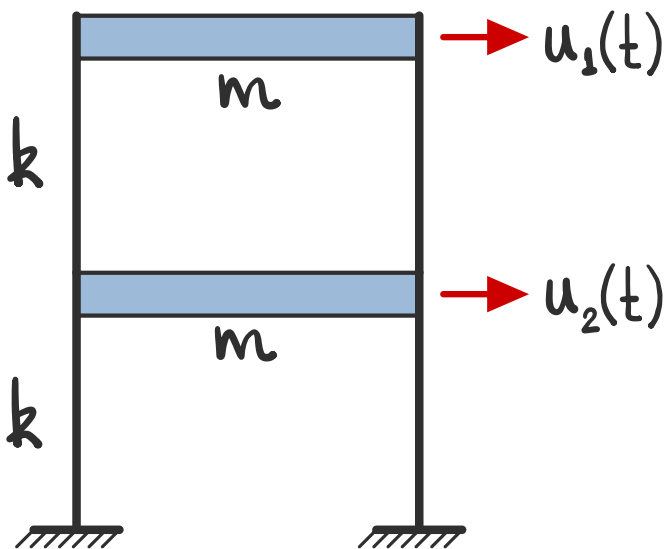
**Questão 3:** Para a viga com as restrições de apoio dadas abaixo, proponha uma forma aproximada para o primeiro modo de vibração,  $\varphi(x)$ , e calcule a respectiva frequência natural em função do vão,  $L$ , da massa por unidade de comprimento,  $\mu$ , e da rigidez à flexão,  $EI$ .



**Questão 4:** Para a viga do problema anterior, calcule a máxima amplitude de deslocamento para uma carga impulsiva tipo *Delta de Dirac*,  $\delta(t - t_0)$  com  $t_0 = 0$ , aplicada na extremidade do balanço.

Boa prova!!!

- ① A partir das informações dadas, calcule os modos de vibração e as frequências naturais.



$$f_2/f_1 = 1 + \varphi$$

$\varphi$ : "golden ratio"

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (Golden ratio)} \begin{cases} \lambda_2 = (m/k)(2-\varphi) \\ \lambda_1 = (m/k)(1+\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{1}{1+\varphi} (k/m) \\ \omega_2^2 = \frac{1}{2-\varphi} (k/m) \end{cases}$$

$$f_1/f_2 = \sqrt{\frac{2-\varphi}{1+\varphi}} \quad (=2-\varphi)$$

$$\begin{cases} \vec{\psi}_1 = [(1+\sqrt{5}), 2]^T \rightarrow [\varphi, 1]^T \rightarrow [1, 1-\varphi]^T \\ \vec{\psi}_2 = [(1-\sqrt{5}), 2]^T \rightarrow [1-\varphi, 1]^T \rightarrow [-1, \varphi]^T \end{cases}$$

Obs.:  $(2-\varphi)(1+\varphi) = 1$

$$2+2\varphi-\varphi-\varphi^2 = 1$$

$$2+\varphi-\varphi^2 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} 1/\varphi = \varphi - 1 \\ 1/1-\varphi = -\varphi \end{array} \right\} \varphi^2 - \varphi = 1$$

$$\therefore \omega_1 = (\varphi - 1) \sqrt{k/m}$$

$$\omega_2 = \varphi \sqrt{k/m}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi & -1 \\ 1 & \varphi \end{bmatrix}$$

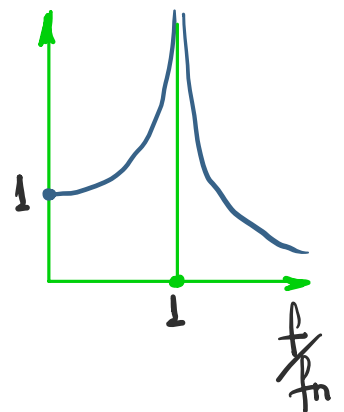
②

$$S_{F_j}(f) = S_0 = \text{cte. (white noise)}$$

$$S_{u_k}(f) = |H(f)|^2 S_0 \varphi_{jk}^2 \quad (\text{no mode } k)$$

$$|H(\beta, \zeta)|^2 = \left\{ K^2 [(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2] \right\}^{-1}$$

$$\int_0^\infty |H(\beta, \zeta)|^2 d\beta = \frac{1}{K^2} \cdot \frac{8100}{\pi \zeta^2}$$



$$\begin{pmatrix} f = \beta f_k \\ df = f_k d\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_{u_k}^2 = \frac{1}{K^2} \cdot \frac{8100}{\pi \zeta^2} \cdot S_0 \varphi_{jk}^2$$

$$K = (2\pi f_k)^2 M \quad (\text{rigid model e massa model})$$

$$M_k = \Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ -1 & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi & -1 \\ 1 & \varphi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1 = M_2 = m(1 + \varphi^2) = m(2 + \varphi)$$

$$K_1 = \underbrace{\frac{1}{1 + \varphi} (k/m)}_{\omega_k^2} \cdot \cancel{m}(2 + \varphi) \quad \therefore K_1 = \frac{2 + \varphi}{1 + \varphi} \cdot k$$

$$K_2 = \frac{1}{2 - \varphi} (k/m) \cdot \cancel{m}(2 + \varphi) \quad \therefore K_2 = \frac{2 + \varphi}{2 - \varphi} \cdot k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{u_1}^2 = \left( \frac{1 + \varphi}{2 + \varphi} \right)^2 \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \frac{8100}{\pi \zeta^2} \cdot S_0 \cdot \varphi^2 \\ \sigma_{u_2}^2 = \left( \frac{2 - \varphi}{2 + \varphi} \right)^2 \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \frac{8100}{\pi \zeta^2} \cdot S_0 \cdot 1 \end{array} \right.$$

$\sigma_{u_1} \approx 59,45 \frac{\sqrt{S_0}}{k \zeta}$
$\sigma_{u_2} \approx 5,36 \frac{\sqrt{S_0}}{k \zeta}$

Obs.: a resposta no segundo modo é apenas ~9% de resposta no primeiro modo!

Obs.: note a interessante (e coerente) dependência de  $\sigma_{uk}$  em relação a  $S_0$ ,  $k$  e  $\zeta$ .

O deslocamento máximo deve ocorrer na morse de cima (g.d.l. "1"). Esse deslocamento tem a contribuição de 2 modos, então pode ser feita uma combinação quadrática simples.

$$\sigma_u = \left[ (g_1 \sigma_{u_1} \varphi)^2 + (g_2 \sigma_{u_2} \cdot 1)^2 \right]^{1/2}$$

... onde  $g_1$  e  $g_2$  são os respectivos fatores de pico.

$$L = \sqrt{2 \ln vT} \quad \therefore g = L + 0,5772/L$$

... onde a taxa de ultrapassagem é  $v \approx f_k$  e o tempo de observação é arbitrário.

$vT = N$	2	10	100	1000	← número de períodos.
L	1,177	2,146	3,035	3,717	
g	1,67	2,41	3,22	3,87	

Adotando um fator de pico conservador,  $g = 4$ :

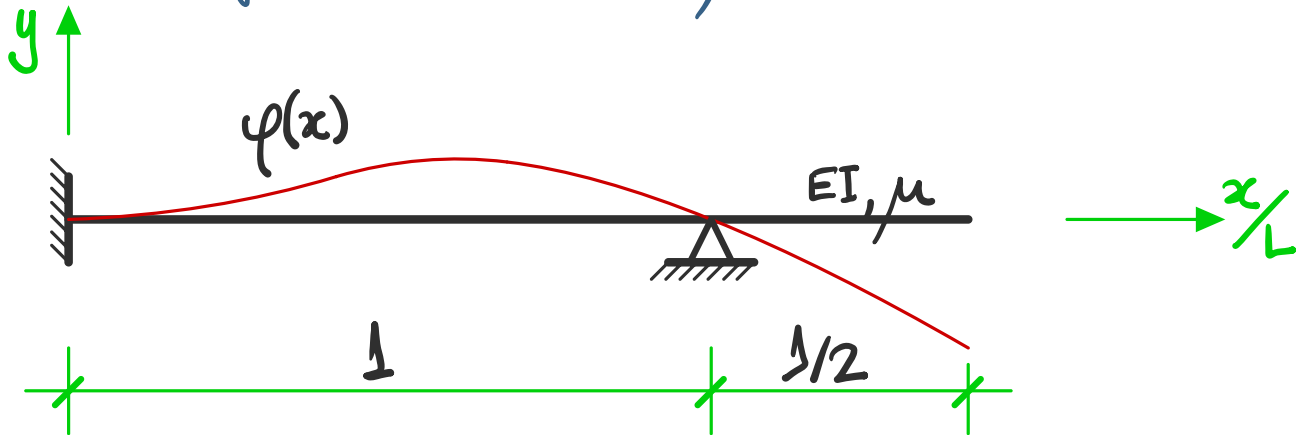
$$\sigma_u = 4 \cdot \frac{\sqrt{S_0}}{k\zeta} \left\{ (59,45 \cdot \varphi)^2 + [5,36 \cdot (-1)]^2 \right\}^{1/2}$$

g

$$\therefore \sigma_u \approx 385,4 \frac{\sqrt{S_0}}{k\zeta}$$

isso é o mais importante!

- ③ Propõe uma função  $\varphi(x)$  que represente de forma aproximada a forma modal desenhada abaixo, e calcule a respectiva frequência natural em função de  $L$ ,  $EI$  e  $\mu$ .



$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^4 c_k x^k = c_4 x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2$$

$$\varphi' : 4c_4 x^3 + 3c_3 x^2 + 2c_2 x$$

$$\varphi'' : 12c_4 x^2 + 6c_3 x$$

$$\varphi''' : 24c_4 x + 6c_3$$

$$\varphi'''' : 24c_4$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi' : 4c_4 x^3 + 3c_3 x^2 + 2c_2 x \\ \varphi'' : 12c_4 x^2 + 6c_3 x \\ \varphi''' : 24c_4 x + 6c_3 \\ \varphi'''' : 24c_4 \end{array} \right\} (0 \leq x \leq 3/2)$$

$$\varphi(0) = 0 \therefore c_n = 0$$

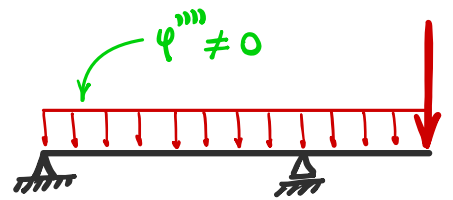
$$\varphi'(0) = 0 \therefore c_{n-1} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(0) = 0 \therefore c_n = 0 \\ \varphi'(0) = 0 \therefore c_{n-1} = 0 \end{array} \right\} \text{condições de esquerda}$$

$\varphi(1) = 0$	1	1	1	$c_4$	=	0	= $1/18$
$\varphi''(3/2) = 0$	27	9	0	$c_3$	=	0	= $-1/6$
$\varphi'''(3/2) = 1$	36	6	0	$c_2$	=	1	= $1/9$

FORMA MODAL ADOTADA:

$$\varphi(x) = \frac{16}{9}(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$$



(escale ajustada para que o deslocamento na ponta do balanço seja unitário!)

$$\varphi'(x) = \frac{16}{9}(4x^3 - 9x^2 + 4x) \cdot \frac{1}{L}$$

$$\varphi''(x) = \frac{16}{9}(12x^2 - 18x + 4) \cdot \frac{1}{L^2} \quad \text{unidade!}$$

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^{3/2} \left[ \frac{16}{9}(12x^2 - 18x + 4) \frac{1}{L^2} \right]^2 L dx$$

$$T^* = \frac{\mu}{2} \int_0^{3/2} \left[ \frac{16}{9}(x^4 - 3x^3 + 2x^2) \right]^2 L dx$$

$$V = \frac{EI}{2L^3} \cdot \frac{2752}{135}$$

$$T^* = \frac{\mu L}{2} \cdot \frac{33}{140}$$

$$\therefore \omega_n^2 = V/T^* = \frac{2752}{135} \cdot \frac{140}{33} \cdot \frac{EI}{\mu L^4}$$

$$\omega_n \approx \left( \frac{3,0495}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Um pouco menor do que bi-espiado!