

بخش ۱-۲: (MLE Estimation)

$$L(\lambda) = f(X|\lambda) = \prod_{i=1}^N (\lambda e^{-\lambda x_i}) = \lambda^N \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^N x_i\right) \Rightarrow$$

$$LL(\lambda) = \log\left(\lambda^N \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^N x_i\right)\right) = N \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^N x_i$$

برای پیدا کردن MLE باید مشتق عبارت بالا را برابر ۰ قرار دهیم:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(LL(\lambda)) = \frac{N}{\lambda} - \sum_{i=1}^N x_i = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{N}{\sum_{i=1}^N x_i}$$

بخش ۱-۳: (MAP Estimation)

توزیع پسین:

$$\begin{aligned} f(\lambda|X) &= \frac{f(X|\lambda) \cdot f(\lambda)}{f(X)} = \frac{(\lambda^N \exp(-\lambda \sum_{i=1}^N x_i)) \frac{1}{\Gamma(2)(0.5)^2} \lambda^1 \exp\left(-\frac{\lambda}{0.5}\right)}{f(X)} \\ &= \frac{4\lambda^{N+1} \exp\left(-\lambda(2 + \sum_{i=1}^N x_i)\right)}{\int (4\lambda^{N+1} \exp\left(-\lambda(2 + \sum_{i=1}^N x_i)\right))} \sim \text{Gamma}\left(N+2, \frac{1}{2 + \sum_{i=1}^N x_i}\right) \end{aligned}$$

برای پیدا کردن MAP باید مشتق لگاریتم $f(\lambda|X)$ را برابر ۰ قرار دهیم:

$$LG = \log\left(\frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k-1} e^{-\frac{1}{\theta}x}\right) = \log\left(\frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k}\right) + (k-1) \log x - \frac{1}{\theta}x$$

$$\frac{\partial LG}{\partial x} = 0 + \frac{k-1}{x} - \frac{1}{\theta} = 0 \Rightarrow x = \theta(k-1) = \frac{N+1}{2 + \sum_{i=1}^N x_i} = \lambda$$

بخش ۱-۴: (تحلیل و نتیجه گیری)

```
MLE for sample size = 10: 0.16239428390854876
MLE for sample size = 100: 0.24814278263141534
MLE for sample size = 500: 0.24765739533069606
MLE for sample size = 1000: 0.23966859912188798
```

```
MAP for sample size = 10: 0.17301440230574233
MAP for sample size = 100: 0.24938654105277627
MAP for sample size = 500: 0.24790712598893214
MAP for sample size = 1000: 0.23979332586003457
```

- ۱- همانطور که در بالا دیده می‌شود هر دو تخمینگر، تخمینگرهای خوبی برای λ هستند اما با یکدیگر تفاوت نیز دارند و این تفاوت به دلیل وجود prior در MAP ایجاد شده است.
- ۲- هر چه اندازه نمونه افزایش یابد تخمین هر دو تخمینگر به مقدار اصلی آن نزدیک تر می‌شود و این نشان می‌دهد که هم MAP و هم MLE با افزایش اندازه نمونه بهتر می‌شوند. به دلیل استفاده از prior در MAP زمانی که تعداد داده ها کمتر است MAP تخمین بهتری به ما می‌دهد.
- ۳- زمانی که اندازه نمونه کم باشد تفاوت بین MAP و MLE بیشتر دیده می‌شود اما با افزایش اندازه نمونه همانطور که از رابطه به دست آمده برای آنها نیز دیده می‌شود، مقدار این دو تخمینگر به یکدیگر نزدیک تر می‌شود. این موضوع نشان می‌دهد که زمانی که نمونه بزرگی داریم تفاوت زیادی بین MAP و MLE وجود نخواهد داشت و تفاوت این دو زمانی بهتر دیده می‌شود که اندازه نمونه کم باشد.

بخش ۱-۴: (تحلیل و نتیجه گیری)

از تست‌های مربوط به برابری در میابیم:

- وقتی آلفا 0.01 است تا حدود 0.2 اطراف میانگین difference by chance تشخیص داده می‌شود. اگر مقدار آلفا افزایش یابد این مقدار کاهش می‌یابد و فرضیه Null آسان تر رد می‌شود.
- آزمایشات انجام شده نمیتوانند تست های lte را رد کنند زیرا در تمام این آزمایشات مقدار فرض شده بزرگتر یا مساوی مقدار بدست آمده در نمونه است. بنابراین نمونه می‌نمیتواند این فرضیات را رد کند.

برای تست های g_{te} نیز در حالتی که مقدار فرض شده کمتر از مقدار مشاهده باشد فرض H_0 رد نخواهد شد. زمانی که آلفا را 0.05 در نظر بگیریم اگر مقدار فرض شده از مقدار مشاهده شده 0.2 یا بیشتر بزرگتر باشد. فرض null رد خواهد شد.

```
Null Hypothesis: The mean of the whole population is 8.2.  
alpha = 0.05 → H0 rejected? True  
alpha = 0.01 → H0 rejected? True  
  
Null Hypothesis: The mean of the whole population is at most 10.  
alpha = 0.05 → H0 rejected? False  
alpha = 0.01 → H0 rejected? False  
  
Null Hypothesis: The mean of the whole population is at least 9.2.  
alpha = 0.05 → H0 rejected? True  
alpha = 0.01 → H0 rejected? False
```

```
Null Hypothesis: The mean of the whole population is 8.8.  
alpha = 0.05 → H0 rejected? True  
alpha = 0.01 → H0 rejected? False  
  
Null Hypothesis: The mean of the whole population is at most 9.  
alpha = 0.05 → H0 rejected? False  
alpha = 0.01 → H0 rejected? False  
  
Null Hypothesis: The mean of the whole population is at least 8.4.  
alpha = 0.05 → H0 rejected? False  
alpha = 0.01 → H0 rejected? False
```