Umgekehrte Kurvendiskussion

Bei einer Kurvendiskussion haben wir eine Funktionsgleichung vorgegeben und versuchen ihre 'Besonderheiten' herauszufinden: Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Polstellen usw. Mit diesem Wissen und eventuell einer kleinen ergänzenden Wertetabelle können wir dann den Graph dieser Funktion zeichnen und alle diese besonderen Eigenschaften in einem Schaubild sichtbar machen.

Die 'umgekehrte Kurvendiskussion' denkt genau umgekehrt: Wie muss eine Funktion aussehen, die gewisse vorgegebene Eigenschaften besitzt. Wir designen eine Funktionsgleichung, um sie gewissen Forderungen anzupassen.

Du kennst einfache Fälle aus der Vektorrechnung. Die Aufgabe, eine Gerade zu finden, die durch die Punkte P(2/4) und Q(5/-2) verläuft, hat Dich zur Geradengleichung `g: 2x+y = 8` oder `g: y = -2x+8` geführt.

Als Designaufgabe umformuliert:

Finde eine lineare Funktion g(x), deren Graph durch die Punkte P_1(2/4) und P_2(5/-2) verläuft.

1.) Was wissen wir über die Funktionsgleichung: g soll eine lineare Funktion sein. Also besteht sie aus einem Term mit der Variablen x und einem konstanten Teil. 'Linear' bedeutet ja ein Polynom von Grad eins. Als Modell kommt also etwas wie g(x) = Ax+B in Frage. Die zwei reellen Zahlen A und B (die Koeffizienten im Polynom) müssen wir herausfinden.

2.) Wie interpretieren wir die Informationen über die Eigenschaften der Funktion?
Wenn der Graph durch einen Punkt (x/y) verläuft, muss y genau der Funktionswert an der Stelle x sein.
Wir erhalten die zwei Informationen g(2) = 4 und g(5) = -2.

3.) Diese Information setzen wir nun in unser Funktionsmodell ein:
P_1: g(2) = A·2+B = 4
P_2: g(5) = A·5+B = -2
Zwei Informationen in der Angabe führen zu zwei Gleichungen – das sollte lösbar sein!

4.) Obige Gleichungen schreiben wir als Gleichungssystem:
```
2A + B =  4
5A + B = -2
```
Ein solches System lösen wir mit schon längst bekannten Methoden – In einer Zeile eine Variable ausdrücken und in die andere einsetzen (Substitution) oder die zwei Zeilen vervielfachen und zusammenzählen, sodass eine Variable wegfällt (Elimination).
Ich rechne hier die zweite Zeile minus der ersten und erhalte `3A = -6` und damit `A = -2`. Nun setze ich in eine der Zeilen ein und bekomme `B = 8`.

5.) Wir haben die Lösung gefunden. Die Funktion mit den geforderten Eigenschaften lautet
g(x) = -2x + 8

Beruhigenderweise ist es das gleiche Ergebnis wie aus der Vektorrechnung...

Eigentlich nicht kompliziert. Diese Vorgehensweise kannst Du IMMER anwenden, egal wie schwierig die Aufgabe zu sein scheint:

- Funktion als Modell anschreiben
- Angabe mithilfe des Modells umformulieren
- Gleichungssystem lösen.

Die Anzahl der Variablen (unbekannten Koeffizienten) im Modell der Funktion ist genau so groß wie die Anzahl der Informationen, die Du dem Angabetext entnehmen musst (in den reellen Zahlen).

Wir werden hauptsächlich mit Polynomen oder einfachen rationalen Funktionen arbeiten. In der mathematischen Realität sind derartige Aufgaben häufig zu lösen, und oft mit komplexeren Funktionstypen (Spline-Interpolation, Curve-Fitting,...). Auch immer dann, wenn Einzeldaten in eine schöne Kurve verwandelt werden sollen (Autokarosserie, Mundpartie einer Zeichentrickfigur,...)

Welche Informationen können in der Angabe versteckt sein?

Die Funktion heiße f(x), ihre Ableitungen bezeichnen wir mit f '(x), die zweite Ableitung mit f "(x).

	Wofür zu verwenden?	speziell
f(x)	Funktionswerte	Nullstelle: Funktionswert = 0
f '(x)	Anstiege	Extremwert: erste Ableitung = 0
f "(x)	Krümmung	Wendepunkt: zweite Ableitung = 0

Beachte, dass Du für jede Information **zwei Werte** brauchst: **wo** gilt diese Information (der x-Wert) und **wie groß ist der Wert** (f, f ', f " an genau dieser Stelle x).

Was kann alles passieren:

f geht durch den Punkt (2/7)	Funktionswert gegeben	f(2) = 7
f hat eine Nullstelle bei x=3	Funktionswert 0 gegeben	f(3) = 0
f hat bei x=2 den Anstieg -5	Ableitung gegeben	f '(2) = -5
f hat bei x=-4 einen Extremwert	Ableitung = 0 gegeben	f '(-4) = 0
f hat bei x=6 ein Minimum	Ableitung = 0 gegeben	f '(6) = 0
f hat bei x=3 die Krümmung -4	Zweite Ableitung gegeben	f "(3) = -4
f hat bei x=-5 einen Wendepunkt	Zweite Ableitung = 0 gegeben	f "(-5) = 0

Mathelehrer haben einen legendären Hang zu Rätselaufgaben. Gerne erfreuen sie ihre Schüler, indem sie mehrere Informationen zu einem ganz kurzen Text verknüpfen:

'Die Funktion f besitzt den Extremwert E(3/9)':
Hier ist einmal der Funktionswert als Koordinate des Punktes gegeben: f(3) = 9, aber auch durch die Erwähnung des Extremwerts an dieser Stelle die erste Ableitung f '(3)=0.

'Im Wendepunkt W(4/5) hat die Funktion den Anstieg -3':
f(4) = 5 wegen der Punktkoordinate, f '(4) = -3 weil der Anstieg gegeben ist und f "(4) = 0 weil ein Wendepunkt vorliegt.

'… schneidet die x-Achse bei x=5 mit Anstieg 3...' : Nullstelle f(5)=0 und Anstieg f '(5)=3.

'… schneidet die y-Achse in der Höhe 4 mit Anstieg 3...' : Nullstelle f(0)=4 und Anstieg f '(0)=3.

Zusatzinfo – nur falls Ihr es im Unterricht besprochen habt:

f ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse	Keine ungeraden Potenzen im Polynom der Gleichung
f ist punktsymmetrisch zu (0/0)	Keine geraden Potenzen und keine Konstante im Polynom der Gleichung
Der Graph berührt ...	Gleicher Punkt und gleicher Anstieg

Ein Beispiel (nicht ausrechnen, es geht nur ums Verständnis):

Die Polynomfunktion fünften Grades f(x) enthält den Punkt P(3/2), hat den Extremwert E(1/7) und im Wendepunkt (-5/7) den Anstieg 4.

Daraus folgt:
$f(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$
$f(3) = 2$
$f(1) = 7$ und $f'(1) = 0$
$f(-5) = 7$ und $f'(-5) = 0$ und $f''(-5) = 0$

Alles klar? Wir haben 6 Informationen für die 6 Koeffizienten gefunden. Das passt.

$$f(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$
$$f'(x) = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E$$
$$f''(x) = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D$$

$f(3) = 2$	$f(3) = A\cdot 3^5 + B\cdot 3^4 + C\cdot 3^3 + D\cdot 3^2 + E\cdot 3 + F = 2$
$f(1) = 7$	$f(1) = A + B + C + D + E + F = 7$
$f'(1) = 0$	$f'(x) = 5A + 4B + 3C + 2D + E = 0$
$f(-5) = 7$	$f(x) = -A\cdot 5^5 + B\cdot 5^4 - C\cdot 5^3 + D\cdot 5^2 - E\cdot 5 + F = 7$
$f'(-5) = 0$	$f'(x) = 5A\cdot 5^4 - 4B\cdot 5^3 + 3C\cdot 5^2 - 2D\cdot 5 + E$
$f''(-5) = 0$	$f''(x) = -20A\cdot 5^3 + 12B\cdot 5^2 - 6C\cdot 5 + 2D$

Gewissenhaft einsetzen und die Vorzeichen richtig setzen (negativ hoch ungerade bleibt negativ, negativ hoch gerade wird positiv), dann ist es recht einfach. Aber lösen möchte ich dieses Gleichungssystem nicht.

Glücklicherweise bekommst Du Aufgaben mit 'schöneren' Zahlen, die sich leichter rechen lassen. Mit Computereinsatz ist aber auch ein solches System kein Problem.

Hier einige Beispiele. Zuerst jeweils die 'Designaufgabe', dann angehängt eine Diskussion der dabei aufgefundenen Funktion

Bsp. 1

Eine Funktion 3. Ordnung hat einen Extremwert in $E(-1 \mid 4)$ und schneidet in N $(-2 \mid 0)$ mit der Steigung $m = +9$ die x-Achse.

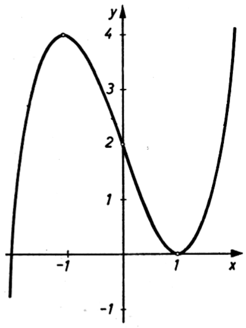
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 4 Bestimmungsgleichungen sind erforderlich.

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$	I. $(-1 \mid 4)$ ist Kurvenpt:	$4 = -a + b - c + d$
$y'' = 6ax + 2b$	II. bei $x = -1$ Extremstelle $(y' = 0)$:	$0 = +3a - 2b + c$
	III. $(2- \mid 0)$ ist Kurvenpunkt:	$0 = -8a + 4b - 2c + d$
	IV. bei $x = -2$ ist $m = 9$ (1. Abl. Wert 9)	$9 = 12a - 4b + c$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{III} - \text{I}: & -4 = -7a + 3b - c \\ (\text{III} - \text{I}) + \text{IV}: & 5 = 5a - b \\ (\text{III} - \text{I}) + \text{II}: & -4 = -4a - b \end{array}\right\} - \quad \begin{array}{l} a = 1; \quad b = 0; \\ c = -3; \quad d = 2 \end{array}$$

$y = x^3 - 3x + 2$

$y = x^3 - 3x + 2$	$y' = 3x^2 - 3$	$y'' = 6x$
$y = 0: x_{01} = -2;$	$y' = 0: x_{11} = +1;$	$y'' = 0: x_{21} = 0$
$x_{02} = 1$	$x_{12} = -1$	$W(0 \mid 2; -3)$
$N_1(-2 \mid 0)$	$f''(x_{11}) = +6 \Rightarrow T$	Wendetangente:
$N_2(1 \mid 0)\ T$	$f''(x_{12}) = -6 \Rightarrow H$	$y = -3x + 2$
Schnittpt. y-Achse	$H(-1 \mid 4);\quad T(1 \mid 0)$	
$(0 \mid 2)$		



Bsp. 2

Bei $x = 1$ berührt der Graph einer Funktion 3. Ordnung die X-Achse und hat in $W(3 \mid -16)$ einen Wendepunkt.

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad y' = 3ax^2 + 2bx + c \quad y'' = 6ax + 2b$

Es sind 4 Bestimmungsgleichungen erforderlich:

I. $(1 \mid 0)$ ist Kurvenpunkt: $0 = a + b + c + d$

II. Wenn bei $x = 1$ die x-Achse berührt wird, ist die x-Achse zugleich Tangente, d. h. bei $x = 1$ ist eine Extremstelle: $x = 1$, wenn $y' = 0$: $0 = 3a + 2b + c$.

III. $W(3 \mid -16)$ ist Kurvenpunkt: $-16 = 27a + 9b + 3c + d$

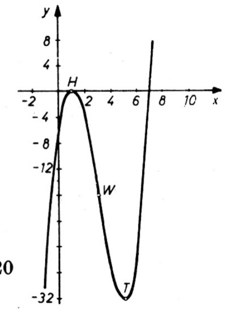
IV. Bei $x = 3$ ist eine Wendestelle: $x = 3$ u. $y'' = 0$:

$$0 = 18a + 2b$$

$$a = 1; \quad b = -9; \quad c = 15; \quad d = -7$$

$y = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

$y = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$	$y' = 3x^2 - 18x + 15$	$y'' = 6x - 18$
$y = 0:$	$y' = 0:$	$y'' = 0:$
$x_{01} = +1; \quad x_{02} = +7$	$x_{11} = +1; \quad x_{12} = +5$	$x_{21} = 3$
$N_1(1 \mid 0)\ H$	$f''(x_{11}) = -12 \Rightarrow H$	$W(3 \mid -16; -12)$
$N_2(+7 \mid 0)$	$f''(x_{12}) = +12 \Rightarrow T$	$W_{tg}: y = -12x + 20$
	$H(1 \mid 0) \quad T(5 \mid -32)$	



Bsp. 3

Eine Parabel 3. Ordnung ist punktsymmetrisch zu (0 | 3) und berührt die x-Achse in N (2 | 0).

Zentrisch symmetrisch zu 0 bedeutet, daß die Funktion nur Glieder mit ungeraden Potenzen von x besitzt und kein absolutes Glied hat. Punktsymmetrisch oder zentrisch symmetrisch zu (0|3) heißt, daß in (0|3) ein Wendepunkt vorhanden ist, außerdem, daß die Funktionsgleichung nur Glieder mit ungeraden Potenzen von x und das absolute Glied $+3$ enthält.

$y = ax^3+bx+3 \quad y' = 3ax^2+b \quad y'' = 6ax$

Es werden nur 2 Bestimmungsgleichungen benötigt:

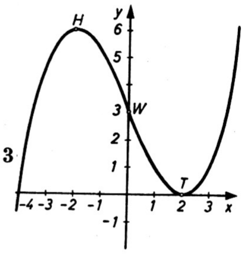
I. N (2|0) ist Kurvenpunkt: $0 = 8a+2c+3$

II. Da der Graph in (2|0) die x-Achse berührt, ist bei $x = 2$ eine Extremstelle: $0 = 12a+c$

$a = \frac{3}{16}; \; b = -\frac{9}{4}$

$y = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3$

$y = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3$	$y' = \frac{9}{16}x^2 - \frac{9}{4}$	$y'' = \frac{9}{8}x$
$y = 0 : x_{01} = +2;$	$y' = 0 : x_{11} = -2;$	$y'' = 0 : x_{21} = 0$
$x_{02} = -4$	$x_{12} = +2$	$W\left(0\,\vert\,3; -\frac{9}{4}\right)$
$N_1(+2\,\vert\,0)\ T$	$f''(x_{11}) = -\frac{9}{4} \Rightarrow H$	$W_{tg}: y = -\frac{9}{4}x + 3$
$N_2(-4\,\vert\,0)$	$f''(x_{12}) = +\frac{9}{4} \Rightarrow T$	
	$H(-2\,\vert\,6)$	
	$T(2\,\vert\,0)$	



Bsp. 4

Eine Parabel 3. Ordnung ist punktsymmetrisch zu 0, hat im Wendepunkt die Steigung -3 und im Hochpunkt einen Funktionswert von $+2$.

$$y = ax^3+bx \quad y' = 3ax^2+b \quad y'' = 6ax$$

I. Aus der zentrischen Symmetrie in 0 folgt: Wendestelle bei $x=0$, dort $m=-3$: $-3=0+b; b = -3.$

II. Die Lage der Extremstellen erhält man durch $y'=0$. $0 = 3ax^2-3; \; x_{11/12} = \pm\sqrt{+\frac{1}{a}}$

Den Funktionswert $+2$ erhält man, indem man in der Stammfunktion für $y = 2$ und für x den ermittelten Wert einsetzt.

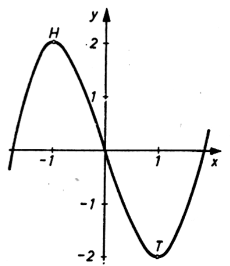
$$2 = a\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^3 - 3\sqrt{\frac{1}{a}}; \quad 2 = \sqrt{\frac{1}{a}} - 3\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}; \quad 2 = -2\sqrt{\frac{1}{a}}; \quad 1 = -\sqrt{\frac{1}{a}}; \quad a = 1$$

Gleichgültig, ob man für $x = +\sqrt{\frac{1}{a}}$ oder $-\sqrt{\frac{1}{a}}$ einsetzt, in jedem Fall erhält man für

$a = +1$

$y = x^3 - 3x$

$y = x^3 - 3x$	$y' = 3x^2 - 3$	$y'' = 6x$
$y = 0 : x_{01} = 0;$	$y' = 0 : x_{11} = +1;$	$y'' = 0 : x_{21} = 0$
$x_{02} = +\sqrt{3};$	$x_{12} = -1$	$W(0\,\vert\,0; -3)$
$x_{03} = -\sqrt{3}$	$f''(x_{11}) = +6 \Rightarrow T$	
$N_1(0\,\vert\,0)\ W$	$f''(x_{12}) = -6 \Rightarrow H$	
$N_2(+\sqrt{3}\,\vert\,0)$	$H(-1\,\vert\,2)$	
$N_3(-\sqrt{3}\,\vert\,0)$	$T(+1\,\vert\,-2)$	



Bsp. 5

Eine Parabel 4. Ordnung berührt die x-Achse in $(2\,|\,0)$, hat in 0 einen Wendepunkt. Die Wendetangente bildet mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel von 45°.

$$\begin{aligned} y &= a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e \\ y' &= 4\,a\,x^3 + 3\,b\,x^2 + 2\,c\,x + d \\ y'' &= 12\,a\,x^2 + 6\,b\,x + 2\,c \end{aligned}$$

Man benötigt fünf Bestimmungsgleichungen.

I. Wendepunkt in $(0\,|\,0)$ zugleich Kurvenpunkt führt zu $e = 0$.

II. Wendepunkt bei $x = 0$ $(y'' = 0) : 0 = 0 + 0 + c;\ c = 0$

III. $(2\,|\,0)$ ist Kurvenpunkt: $0 = 16\,a + 8\,b + 2\,d$

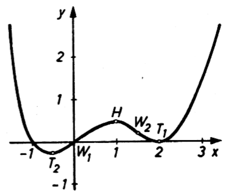
IV. Berührung der x-Achse in $(2\,|\,0)$: Extremstelle bei $x = 2$: $y' = 0 = 32\,a + 12\,b + d$

V. Wendetangente hat die Steigung: $\tan 45° = +1$; also y' hat den Wert $+1$ bei $x = 0$:
$1 = 0 + 0 + d$: $d = 1$

$$a = \frac{1}{4}; \qquad b = -\frac{3}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}\,x^4 - \frac{3}{4}\,x^3 + x$$

$y = \frac{1}{4}\,x^4 - \frac{3}{4}\,x^3 + x$	$y' = x^3 - \frac{9}{4}\,x^2 + 1$	$y'' = 3\,x^2 - \frac{9}{2}\,x$
$y = 0 : x_{01} = 0;$	$y' = 0 : x_{11} = +2;$	$y'' = 0 : x_{21} = 0;$
$x_{02} = -1;$	$x_{12/13} = \frac{1}{8}\,(1 \pm 33);$	$x_{22} = +\frac{3}{2}$
$x_{03} = +2$	$x_{12} \approx 0{,}843$	$W_1\,(0\,|\,0;\ 1)$
$N_1\,(0\,|\,0)\ W$	$x_{13} \approx -0{,}593$	$W_2\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{15}{64};\ -\frac{11}{16}\right)$
$N_2\,(-1\,|\,0)$	$f''\,(x_{11}) = +3 \Rightarrow T;$	
$N_3\,(2\,|\,0)\ T$	$f''\,(x_{12}) \approx -1{,}7 \Rightarrow H;$	
	$f''\,(x_{13}) \approx 3{,}7 \Rightarrow T$	
	$T_1\,(2\|0$	
	$H\,(0{,}843\|0{,}520)$	
	$T_2\,(-0{,}593\|-0{,}41)$	



Bsp. 6

$P\,(2\,|\,0)$ ist Wendepunkt einer zur y-Achse symmetrischen Parabel 4. Ordnung. Die Wendetangente hat in P eine Steigung von $m = -2$.
Eine Symmetrie zur y-Achse ist dann vorhanden, wenn in der Funktionsgleichung nur gerade Potenzen von x vorkommen.

$$\begin{aligned} y &= a\,x^4 + b\,x^2 + c \\ y' &= 4\,a\,x^3 + 2\,b\,x \\ y'' &= 12\,a\,x^2 + 2\,b \end{aligned}$$

Es werden 3 Bestimmungsgleichungen benötigt:

I. $P\,(2\,|\,0)$ ist Kurvenpunkt: $0 = 16\,a + 4\,b + c$

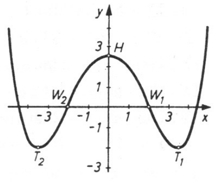
II. bei $x = 2$ Wendestelle $(y'' = 0) : 0 = 48\,a + 2\,b$

III. bei $x = 2$ Steigung $m = -2$; $y' = -2$; $-2 = 32\,a + 4\,b$

$$a = \frac{1}{32} \qquad b = -\frac{3}{4}; \qquad c = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{1}{32}\,x^4 - \frac{3}{4}\,x^2 + \frac{5}{2}$$

$y = \frac{1}{32}\,x^4 - \frac{3}{4}\,x^2 + \frac{5}{2}$	$y' = \frac{1}{8}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x$	$y'' = \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{3}{2}$
$y = 0 : \quad x_{01} = 2;$	$y' = 0 : x_{11} = 0;$	$y'' = 0 : x_{21} = +2;$
$x_{02} = -2;$	$x_{12} = +2\sqrt{3};$	$x_{22} = -2$
$x_{03} = +2\sqrt{5};$	$x_{13} = -2\sqrt{3}$	$W_1\,(+2\,|\,0;\ -2)$
$x_{04} = -2\sqrt{5}$	$f''\,(x_{11}) = -\frac{3}{2} \Rightarrow H$	$W_2\,(-2\,|\,0;\ +2)$
$N_1\,(2\,|\,0)\ W_1;$	$f''\,(x_{12}) = +3 \Rightarrow T$	Wendetangenten
$N_2\,(-2\,|\,0)\ W_2;$	$f''\,(x_{13}) = +3 \Rightarrow T$	$y = \mp 2\,x + 4$
$N_3\,(2\sqrt{5}\,\|\,0;\ +2\sqrt{5})$	$H\left(0\,\middle|\,\frac{5}{2}\right)\ T_1(2\sqrt{3}\,\|-2)$	
$N_4\,(-2\sqrt{5}\,\|\,0;\ -2\sqrt{5})$	$T_2\,(-2\sqrt{3}\,\|-2)$	



Bsp. 7

In $(0 \mid -4)$ hat eine zur y-Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung ihren Tiefpunkt. Sie berührt die x-Achse in $x = \pm 2$.

$$y = a\,x^4 + b\,x^2 + c$$
$$y' = 4\,a\,x^3 + 2\,b\,x$$
$$y'' = 12\,a\,x^2 + 2\,b$$

Es sind 3 Bestimmungsgleichungen notwendig.

I. $(0 \mid -4)$ ist Kurvenpunkt: $-4 = 0 + 0 + c$

$c = -4$

II. bei $x = 2$ Berührung x-Achse

Extremstelle $(y' = 0)$: $0 = 32\,a + 4\,b$

III. $(2 \mid 0)$ Kurvenpunkt: $0 = 16\,a + 4\,b - 4 \quad a = -\frac{1}{4} \quad b = 2$

$$y = -\frac{1}{4}x^4 + 2\,x^2 - 4$$

$y = -\frac{1}{4}x^4 + 2\,x^2 - 4$

$y' = 0: x_{01} = +2;$

$x_{02} = -2$

$N_1\,(2 \mid 0)\,H$

$N_2\,(-2 \mid 0)\,H$

$y' = -x^3 + 4\,x$

$y' = 0: x_{11} = 0;$

$x_{12} = +2; \quad x_{13} = -2$

$f''(x_{11}) = +4 \Rightarrow T$

$T\,(0 \mid -4)$

$f''(x_{12}) = -8 \Rightarrow H$

$H_1(2 \mid 0)$

$f''(x_{13}) = -8 \Rightarrow H$

$H_2\,(-2 \mid 0)$

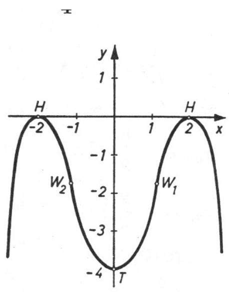
$y'' = -3\,x^2 + 4$

$y'' = 0: x_{21} = +\frac{2}{3}\sqrt{3};$

$x_{22} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$W_1\left(+\frac{2}{3}\sqrt{3} \,\middle|\, -\frac{16}{9}; -\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$

$W_2\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3} \,\middle|\, -\frac{16}{9}; +\frac{16}{9}\cdot\sqrt{3}\right)$



Bsp. 8

Eine gebrochene rationale Funktion der Form $y = \dfrac{a\,x^4 + b\,x^2 + c}{x^2}$ hat die Nullstelle $N_1\,(1 \mid 0)$ mit der Steigung $m_1 = +8$. Sie geht durch den Punkt $P\,(2 \mid 5{,}25)$.
Solche Aufgaben werden genau so gelöst wie jene im vorangegangenen Abschnitt.

$$y = \frac{a\,x^4 + b\,x^2 + c}{x^2} = \frac{u}{v} \qquad u' = 4\,a\,x^3 + 2\,b\,x \qquad v' = 2\,x$$

$$y' = \frac{4\,a\,x^5 + 2\,b\,x^3 - 2\,a\,x^5 - 2\,b\,x^3 - 2\,c\,x}{x^4} = \frac{2\,a\,x^5 - 2\,c\,x}{x^4} = 2\,\frac{a\,x^4 - c}{x^3}$$

I. Punkt $\left(2 \,\middle|\, \frac{21}{4}\right)$ ist Kurvenpunkt: $\frac{21}{4} = \frac{16\,a + 4\,b + c}{4} \Rightarrow 21 = 16\,a + 4\,b + c$

II. $(1 \mid 0)$ ist Kurvenpunkt: $0 = \frac{a + b + c}{1} \Rightarrow 0 = a + b + c$

III. Bei $x = 1$ Steigung $m_1 = 8$: $8 = 2\,\frac{a - c}{1} \Rightarrow 4 = a - c$

$a = +1; \quad b = 2; \quad c = -3$

$$y = \frac{x^4 + 2\,x^2 - 3}{x^2}$$

$y = \frac{x^4 + 2\,x^2 - 3}{x^2}$

$y = 0: x_{01} = +1;$

$x_{02} = -1$

$N_1\,(1 \mid 0)$

$N_2\,(-1 \mid 0)$

$y' = 2\,\frac{x^4 + 3}{x^3}$

$y' = 0$:

keine rellen Werte für x^2

$y'' = 2\,\frac{x^4 - 9}{x^4}$

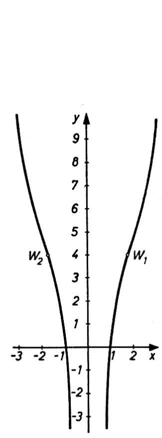
$y'' = 0: x_{21} = +\sqrt{3};$

$x_{22} = -\sqrt{3}$

$W_1\left(+\sqrt{3} \,\middle|\, 4; \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$

$W_2\left(-\sqrt{3} \,\middle|\, 4; -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$

As.: $x = 0$; Symmetrie z. y-Achse



Bsp. 9

Ermittle die gebrochene rationale Funktion der Form $y = \frac{a\,x^3+b\,x^2+c\,x+8}{4\,x}$ die mit $m = -\frac{3}{2}$ bei $N_1\,(-2\,|\,0)$ die x-Achse schneidet und durch $A\,(2\,|\,2)$ geht.

$$y = \frac{a\,x^3+b\,x^2+\,c\,x+8}{4\,x} \qquad y' = \frac{2\,a\,x^3+\,b\,x^2-8}{4\,x^2}$$

I. $A\,(2\,|\,2)$ Kurvenpunkt: $\quad 2 = \frac{8\,a+4\,b+2\,c+8}{8} \Rightarrow 4 = 4\,a+2\,b+c$

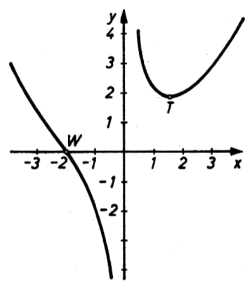
II. $N_1\,(-2\,|\,0)$ Kurvenpunkt: $\quad 0 = \frac{-8\,a+4\,b-2\,c+8}{-8} \Rightarrow -4 = -4\,a+2\,b-c$

III. Bei $x = -2$ ist $m = -\frac{3}{2}$: $\quad -\frac{3}{2} = \frac{-16\,a+4\,b-8}{16} \Rightarrow -16 = -16\,a+4\,b$

$a = 1; \quad b = 0; \quad c = 0$

$$y = \frac{x^3+8}{4\,x}$$

$y = \frac{x^3+8}{4\,x}$	$y' = \frac{x^3-4}{2\,x^2}$	$y'' = \frac{x^3+8}{2\,x^3}$
$y = 0: x_{01} = -2$	$y' = 0: x_{11} = \sqrt[3]{4}$	$y'' = 0: x_{21} = -2$
$N_1\left(-2\,\middle|\,0;\ \frac{3}{2}\right)\ W$	$f''(x_{11}) = +\frac{3}{2} \Rightarrow T$	$W\left(-2\,\middle|\,0;\ -\frac{3}{2}\right)$
	$T\left(\sqrt[3]{4}\,\middle|\,+\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$	



As.: $x = 0$; Näherungskurve: $y = \frac{x^2}{4}$

Bsp. 10

Welche Funktion der Form $y = \frac{a\,x^3+b\,x^2+c\,x+1}{2\,x^2}$ geht durch $A\,(1\,|\,1)$ und hat in $N_1\,(-1\,|\,0)$ eine Nullstelle mit $m_1 = +\frac{3}{2}$?

$$y = \frac{a\,x^3+b\,x^2+c\,x+1}{2\,x^2} = \frac{u}{v} \qquad u' = 3\,a\,x^2+2\,b\,x+c \qquad v' = 4\,x$$

$$y' = \frac{2\,x^2\,(3\,a\,x^2+2\,b\,x+c)-(a\,x^3+b\,x^2+c\,x+1)\cdot 4\,x}{4\,x^4} = \frac{a\,x^3-c\,x-2}{2\,x^3}$$

I. $A\,(1\,|\,1)$ ist Kurvenpunkt: $\quad 1 = \frac{a+b+c+1}{2} \Rightarrow 1 = a+b+c$

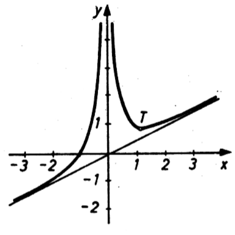
II. $N_1\,(-1\,|\,0)$ ist Kurvenpunkt: $\quad 0 = \frac{-a+b-c+1}{2} \Rightarrow -1 = -a+b-c$

III. Bei $x = -1$ ist $m = +\frac{3}{2}$ $\quad +\frac{3}{2} = \frac{-a\,+c-2}{-2} \Rightarrow -1 = -a+c$

$a = 1; \quad b = 0; \quad c = 0;$

$$y = \frac{x^3+1}{2\,x^2}$$

$y = \frac{x^3+1}{2\,x^2}$	$y' = \frac{x^3-2}{2\,x^3}$	$y'' = \frac{3}{x^4}$
$y = 0: x_{01} = -1$	$y' = 0: x_{11} = +\sqrt[3]{2}$	$y'' = 0$:
$N_1\,(-1\,\|\,0)$	$f''(x_{11}) = \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{4} \Rightarrow T$	kein Wendepunkt
	$T\left(\sqrt[3]{2}\,\middle|\,\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{2}\right)$	



As.: $y = \frac{1}{2}\,x^2$; $\quad x = 0$