AM SA-2

Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Grenzwert $g = \lim_{x \to \infty} f(x);\ \exists x_0 : x > x_0 \mid f(x) - g \mid < \varepsilon$

Stetigkeit

Unsere Ausgangsfunktion lautet $f(x) = x^2$ und wir versuchen herauszufinden ob diese stetig ist indem wir sehen wann sich f(x) an 4 annähert.
Dazu testen wir verschiedene mögliche (ganze) Zahlen welche sich immer weiter annähern aber die gegebene Zahl nie erreichen.

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = 4$$

$$x_2 = 2 \to f(2{,}1) = 4{,}41, f(2{,}01) = 4{,}0401, \dots$$

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = 4$$

$$x_2 = 2 \to f(1{,}9) = 3{,}61, f(1{,}99) = 3{,}9601, \dots$$

Durch das Einsetzen erkennen wir, ob die Funktion f(x) = x^2 an f(2) stetig ist was laut den obigen Ergebnissen zutrifft!

Diskret vs Stetig

Diskret >> Kann endlich viele Werte annehmen
Stetig >> Kann jeden beliebigen Wert eines bestimmten Intervalls annehmen

Eine stetige Funktion kann niemals diskret sein!

Asymptote

Eine Asymptote ist eine gerade, der sich eine Funktion $x \to \pm\infty$ annähert.
In dem Sinne ist sie ein Grenzwert als Funktion angegeben!

Generell ist eine Gerade a, genau dann Asymptote von f wenn gilt:

$$\lim_{x \to \pm\infty} |f(x) - a(x)| = 0$$

Eine Polstelle als Beispiele ist eine Vertikale Asymptote.

Grenzwertsätze

Existieren sowohl die Grenzwerte f(x) als auf g(x) gilt:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \pm \lim_{x \to \pm\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) * g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) * \lim_{x \to \pm\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) : g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) : \lim_{x \to \pm\infty} g(x)$$

Differenzengleichungen

Konstante Änderung:

$$\Delta y = C$$
$$y(t) = y(0) + t * C$$

Konstante Wachstumsrate:

$$\Delta y = r * y(t)$$
$$y(t) = y(0) * r^t$$

Konstante Wachstumsrate + Änderung:

$$\Delta y = C + r * y(t)$$
$$y(t) = y(0) * (1 + r)^t - C * \frac{(1 + r)^t - 1}{r}$$

Beschränktes Wachstum:

$$\Delta y = r * \left(G - y(t)\right)$$
$$y(t) = G + (1 - k)^t * (y(0) - G)$$

Logistisches Wachstum:

$$\Delta y = r * y(t) * \left(G - y(t)\right)$$
$$y(t) = \frac{G}{1 + e^{(-k)*G*t} * \left(\frac{G}{y(0)} - 1\right)}$$