Das unbestimmte Integral

Ist eine Funktion f(x) im Intervall (a,b) definiert und stetig und gilt $F'(x) = f(x)$ in a < x < b, so gilt:
$\int f(x)dx = F(x) + C$ in a < x < b, mit der Integrationskonstanten C.

Grundlegende Eigenschaften des unbestimmten Integrals:

$$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx \qquad \int d\Phi(x) = \Phi(x)$$

$$\int A\,f(x)dx = A\int f(x)dx \quad (A = const.,\ A \neq 0) \qquad \int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Tabelle einfachster Grundintegrale

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sqrt[n]{x}dx = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = Ar\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = Ar\sinh x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = Ar\cosh x = \ln\left|x \pm \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0;\ a \neq 1)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \log_a x dx = x(\log_a x - \log_a e) + C$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x dx = \ln\cosh x + C$$

$$\int \coth x dx = \ln\sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$\int Ar\sinh x dx = xAr\sinh x - \sqrt{x^2+1} + C$$

$$\int Ar\cosh x dx = xAr\cosh x - \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\int Ar\tanh x dx = xAr\tanh x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$$

$$\int Ar\coth x dx = xAr\coth x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + C$$

$$\int Arc\sin x dx = xArc\sin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int Arc\cos x dx = xArc\cos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int Arc\tan x dx = xArc\tan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int Arc\cot x dx = xArc\cot x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Einfache Integrationsregeln

- **Integration durch Zerlegung**

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

- **Integration durch Partialbruchzerlegung**

Wird angewandt bei der Integration gebrochener rationaler Funktionen der Form:

$\int R(x)dx = \int \frac{h(x)}{g(x)}dx$, worin $\mathrm{R}(\mathrm{x})$ als echt gebrochen angenommen werden kann, d.h. $h(x)$ sollte von geringerem Grad sein als $\mathrm{g}(\mathrm{x})$.
Im gegenteiligen Fall kann in der Regel durch Ausführen der Division ein ganzer Teil additiv abgespalten werden.

Im Beispiel bedeutet das, die Partialbruchzerlegung wird auf Funktionen

$\int \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n} dx$ angewandt, wenn **n > m** ist.

Die Methode besteht darin, eine Zerlegung der Funktion $\mathrm{R}(\mathrm{x})$ in eine Reihe einfacherer Brüche, sogenannter „Partialbrüche" vorzunehmen, deren Integration keine Schwierigkeiten mehr bereitet.
Dazu zerlegt man zunächst den Nenner in Linearfaktoren:

$$g(x) = a_n(x-a)(x-b)(x-c)....(x-n)$$

dabei sind *a,b,c,....n* die Nullstellen des Nenners

In Abhängigkeit von der Beschaffenheit dieser Nullstellen werden verschiedene Lösungsansätze genutzt:

- **Nullstellen des Nenners seien reell und voneinander verschieden**

Lösungsansatz: $$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{N}{x-n} = \frac{h(x)}{g(x)}$$

$\Rightarrow$ mittels Koeffizientenvergleich erfolgt die Bestimmung der Koeffizienten A, B, C .... N

$\Rightarrow$ das ursprüngliche Integral zerfällt dadurch in eine Summe einfacherer Integrale, deren Lösung möglich sein sollte.

Beispiel: $$\int \frac{x+2}{x^2 - 5x + 6} dx$$

- die Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren ergibt:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

- der Lösungsansatz lautet entsprechend:

$$\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{x+2}{x^2 - 5x + 6}$$

- nach dem Ausmultiplizieren und kürzen ergibt sich:

$$A(x-3)+B(x-2)=x+2$$
$$Ax-3A+Bx-2B=x+2$$

$$x(A+B)-3A-2B=x+2$$

- ein Vergleich der Koeffizienten bei den verschiedenen Potenzen von x ergibt:

bei x^1: A+B = 1 bei x^0: -3A-2B = 2

- das Lösen dieses Gleichungssystems ergibt:

A = -4; B = 5

- damit ergibt sich für das anfängliche Integral eine Summe von Partialbrüchen:

$$\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{-4}{x-2}dx + \int \frac{5}{x-3}dx$$

- die Integration sollte nun keine Schwierigkeit mehr bereiten:

$$\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}dx = -4\cdot \ln|x-2| + 5\cdot \ln|x-3| + C$$

- **Nullstellen des Nenners seien reell, aber nicht alle verschieden.**
  Tritt beispielsweise die Nullstelle $x = b$ doppelt auf, verwendet man folgenden

  Lösungsansatz: $$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}+\frac{D}{x-c}+\ldots+\frac{N}{x-n}=\frac{h(x)}{g(x)}$$

  Beispiel: $$\int \frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(2x+3)}dx$$

- **Nullstellen des Nenners seien nicht alle reell, sondern z.T. imaginär.**
  Imaginär Nullstellen treten stets paarweise, konjugiert komplex auf, wenn die Koeffizienten des Nenners alle reell sind. Der Nenner ist dann nicht immer in reelle Linearfaktoren, jedoch immer in reelle und quadratische Linearfaktoren zerlegbar.
  Diese Zerlegung erfolgt dann beispielsweise entsprechend folgendem

  Lösungsansatz: $$\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{(x^2+b)}=\frac{h(x)}{g(x)}$$

  Beispiel: $$\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

- **Ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen des Nenners tritt mehrfach auf.**
  Tritt z.B. $(x^2+x+1)^m$ auf, hat man hierfür in den <u>Ansatz</u>

  m Glieder der Form $\frac{Ax+B}{(x^2+x+1)^n}$ mit *n = 1,2,3,.....,m* aufzunehmen.

  Deren Behandlung erfolgt analog dem oben Gesagten. Man gelangt auf Integrale der Form:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n}dx$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(x^2-1)^{n-1}}$$

$$= \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

Die Operation führt zur Verringerung des Nennerexponenten um 1.
Mittels Rekursion läßt sich der Nennerexponent so weiter verringern, bis man schließlich auf eine Lösung mittels *arctan x* gelangt.

- **Partielle Integration**

Die Methode ist eigentlich bekannt: das Differenzieren eines Produkts. Hier wird diese Methodik umgekehrt und auf das Integrieren angewandt:

Kann man den Ausdruck unter einem Integral als Produkt der Ableitung einer Funktion $u'(x)$ mit einer Funktion $v(x)$ auffassen, so lässt sich folgende Formel anwenden:

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

Der sich ergebende Ausdruck enthält wiederum ein Integral, ist aber vielleicht einfacher zu lösen, als der ursprüngliche Ausdruck.

Beispiel 1:

$$\int x \cdot e^x dx = \int x d(e^x) = x \cdot e^x - \int e^x dx =$$
$$= x \cdot e^x - e^x + C$$

Beispiel 2:

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x d(\ln x) =$$
$$= x \cdot \ln x - x + C$$

- **Integration durch Substitution (Einführen einer neuen Veränderlichen)**

Setzt man $u = g(x)$, wobei $g(x)$ differenzierbar sein soll, so wird $du = g'(x)\, dx$.

Damit wird $f(u)\, du = f(g(x))\, g'(x)\, dx$.

Diese Beziehung lässt sich nutzen, um Integrale zu vereinfachen und zu lösen:

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)dx = \int f(u)du \qquad mit\ u = g(x),\ du = g'(x)dx$$

Sonderfall:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \qquad falls\ \ f(x) \neq 0\ im\ Definitionsbereich$$

Beispiel: $\int \cos(mx)dx \qquad m \neq 0$

Mit einer Substitution $mx = t; \qquad x = \frac{t}{m}; \qquad dx = \frac{dt}{m}$

ergibt sich: $\int \cos(mx)dx = \int \cos t \frac{dt}{m} = \frac{1}{m}\sin t + C = \frac{1}{m}\sin(mx) + C$