Porbeschularbeit - 2. Schularbeit

Name:

15. 12. 2015

1. Von einer streptococcus Bakterienkultur ist bekannt, dass sich ihre Anzahl binnen 12 Minuten verdreifacht beginnend von einer ursprünglichen Bakterienanzahl B_0. Eine zweite Kultur hat zwar die halbe ursprüngliche Bakterienanzahl der ersten Kultur. Bei ihr ist bekannt, dass eine Änderung um eine konstante Wachstumsrate von 0.65 pro Minute anzusetzen ist.
   Stelle die Wachstumsgesetze für die beiden Kulturen auf, wobei die Wachstumskonstante als vereinfachter logarithmischer Ausdruck angeschrieben werden sollen. Um welche Arten von Wachstum handelt es sich? Gib eine Formel mit Einsetzen aller bekannten Zahlen an, die den Zeitpunkt ausrechnet, wann beiden Bakterienkulturen gleich groß sind. Werte diese in Maxima aus.
   Plotte in Maxima die Entwicklung der *logarithmierten* Bakterienanzahl der beiden Kulturen für eine ursprüngliche Anzahl $B_0 = 100$, wobei nur zu jeder vollen Minute ausgewertet wird. (Hinweis: führe erst händisch das Logarithmieren durch und plotte dann die Funktion, wenn du ihre Struktur erkennen kannst. Benutze 'log' für die Berechnung des natürlichen Logarithmus.)

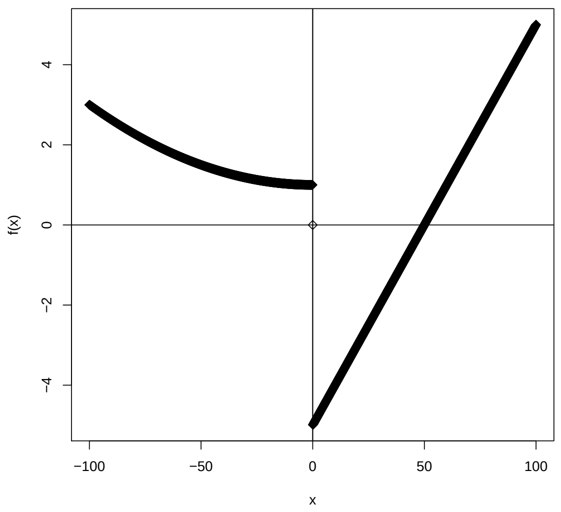
2. Gegeben sei die Folge $< f_n >= (-1)^n \cdot n \cdot sin(\frac{\pi}{2} \cdot n)$.
   Beantworte die folgenden Fragen und begründe deine Antworten:
   Skizziere den Verlauf der Folge für die ersten 6 Glieder.
   Gib an, ob es ein Supremum oder Infimum für die Folge gibt und wenn ja, welchen Wert dieses hat.
   Ist die Folge alternierend?
   Ist die Folge beschränkt?
   Gib an, ob es einen oder mehrere Häufungspunkte für die Folge gibt und wenn ja, welchen Wert diese haben.
   Bestimme den Grenzwert dieser Folge für $n \to \infty$, falls dieser existiert.

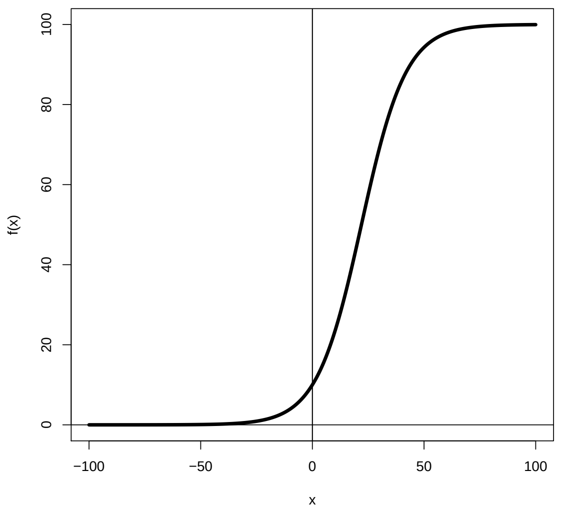
3. Die österreichische Rotwild-Population entwickelt sich pro Jahr nach dem folgenden Wachstumsgesetz, beschrieben durch die Differenzengleichung:

$$\Delta y = 0.00000012 \cdot y(t) \cdot (5000000 - y(t))$$

Nach 3 Jahren betrug die Populationsgröße 1.695.654. Um welche Art von Wachstum handelt es sich? Was sind die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty}$, $\lim_{t\to 0}$ dieses Prozesses? Bedenke beim Ermitteln der numerischen Lösungen mit Maxima, dass es sich hierbei um Tieranzahlen handelt! (Hinweis: Benutze die Funktion 'allroots' in sinnvoller Weise.)

4. Bestimme für die folgenden graphisch dargestellten Funktionen die Grenzwerte $\lim_{x\to-\infty}$, $\lim_{x\to 0}$, $\lim_{x\to 1}$, $\lim_{x\to\infty}$. Wo liegt Stetigkeit vor? Welche Grenzwerte existieren?





Multiple Choice Fragen

Notiere deine Gedankengänge und Überlegungen so viel wie möglich, um deine Entscheidung nachvollziehbar zu machen. Kreuze jeweils diejenigen Antworten an, die richtig sind, 0 bis 4 Antwortmöglichkeiten pro Beispiel können richtig sein. ☒

5. Welche der folgenden Aussagen gelten für Folgen und Funktionen?

- ☐ Eine untere Schranke der Folge
$$< a_n = (-1)^{2n}\frac{1}{n^2} >$$
ist 0.
- ☐ Die Folge
$$< b_n = \frac{2n^2 + 20n}{100n^3} >$$
ist eine Nullfolge.
- ☐ Die Folge
$$< c_n = cos(\frac{n}{2}\pi) >$$
ist alternierend.
- ☐ Der Grenzwert $\lim_{n\to-\infty} \dfrac{50 \cdot n^3 + 578 \cdot n - 478}{1000 \cdot n^2 + 4673 \cdot n}$ existiert nicht.
- ☐ Die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{100-x}{100} & 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & 100 \leq x \end{cases}$$
besitzt eine Unstetigkeitsstelle an $x = 0$, aber ist stetig an $x = 100$.

6. Für die Folge
$$< c_n >= \cos(n \cdot \frac{\pi}{2}), \quad n \in \mathbb{N}$$
gelten welche der folgenden Aussagen?

- ☐ Eine untere Schranke von $< c_n >$ ist 0.
- ☐ Die Folge $< c_n >$ ist eine Nullfolge.
- ☐ Die Folge $< c_n >$ ist alternierend.
- ☐ Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert nicht.
- ☐ Die Folge $< c_n >$ hat das Supremum ϵ, $\epsilon > 0$.

7. Welche der folgenden Aussagen gelten für dynamische Prozesse?

- ☐ Eine Bakterienkultur wächst mit konstanter Wachstumsrate 0.65 pro Stunde, mit einem Spatel wird stets die Hälfte der Kultur am Ende jeder Stunde entnommen. Das bedeutet, dass ihr Wachstumsprozess durch folgende Differenzengleichung beschrieben wird,

$$\Delta y = -0.15 \cdot y(t), \qquad t \in \mathbb{N}.$$

  Dieser Prozess ist ein beschränkter Wachstumsprozess.
- ☐ Ein Prozess mit konstanter Änderungsrate beschreibt stets eine geometrische Folge.
- ☐ Ein Prozess beschreibt das Wachstum von Fischbeständen als mit konstanter Rate proportional zum Abstand von einer Maximalgröße und zur momentanen Größe der Population anwachsend. Dieser Prozess ist ein beschränkter Wachstumsprozess.
- ☐ Logistisches Wachstum bedeutet, dass sich der Wachstumsprozess proportional zur momentanen Populationsgröße $y(t)$ und proportional zur Differenz der momentanen Populationsgröße von der GWachstumsgrenze $G - y(t)$ verändert.
- ☐ Ein technischer Prozess, bei dem minutenweise der Speicherverbrauch gemessen wird, wird durch die folgende Differenzengleichung beschrieben,

$$\Delta y = 0.057 \cdot (64 - y(t)), \qquad t \in \mathbb{N}.$$

  Dieser Prozess ist ein logistischer Wachstumsprozess.

8. Welche der folgenden Aussagen gelten für dynamische Prozesse?

- ☐ Ein technischer Prozess, bei dem minutenweise der Speicherverbrauch gemessen wird, wird durch die folgende Differenzengleichung beschrieben,

$$\Delta y = 0.003 \cdot y(t) \cdot (4 - y(t)).$$

  Dieser Prozess ist beschränkt. Der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} y(t)$ ist 4.
- ☐ Eine Bakterienkultur wächst mit konstanter Wachstumsrate 0.35. Das bedeutet, dass ihr Wachstumsprozess durch folgende Differenzengleichung beschrieben wird,

$$\Delta y = \frac{y(t)}{0.35}.$$

- ☐ Bei den Fischbeständen in der Nordsee wird halbjährlich der Tierbestand erhoben und durch die folgende Differenzengleichung beschrieben,

$$\Delta y = 0.05 \cdot (4000000 - y(t)).$$

  Dieser Prozess ist exponentielles Wachstum und daher unbeschränkt. Der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} y(t)$ ist ∞.
- ☐ Logistisches Wachstum bedeutet, dass sich der Wachstumsprozess proportional zur momentanen Populationsgröße $y(t)$ und proportional zur Differenz der momentanen Populationsgröße von der GWachstumsgrenze $G - y(t)$ verändert.
- ☐ Ein Prozess mit konstanter Änderung Δy ist stets eine arithmetische Folge.