数学及应用数学

一阶常微分方程初值问题的数值算法

张丽娟[1],张 翔[2],关天冶[3]

摘 要:利用MATLAB软件对常微分方程初值问题求解的欧拉法、改进欧拉法、经典龙格-库塔法进行了计算机编程及实现,通过数值结果的比较分析,欧拉法原理简单误差较大,改进欧拉法计算量较大,经典龙格-库塔法精确度高稳定性也很好.

关键词:常微分方程;初值问题;数值算法

中图分类号:O175 **文献标识码**:A **文章编号**:1008-7974(2017)04-0022-03

DOI:10.13877/j.cnki.cn22-1284.2017.08.006

在工程计算和科学研究中,经常会遇到常微分方程初值问题的求解,但是只有很少的一部分常微分方程初值问题能用初等解法求出解析解[1-6],多数情况只能利用近似方法求解,微分方程的数值解是一种离散的方法,对于初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y), x\in[a,b]\\ y(a)=y_0\end{cases} \quad (1)$$

如果要对其求解,具体求解过程为:首先,将区间 $[a,b]$ 分成 n 等份, $x_i=a+ih\ (i=0,1,2,\cdots,n)$,步长 $h=x_{i+1}-x_i$,然后,求解函数 $y(x)$ 在一系列离散等距节点 $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n$ 上的近似值 $y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n$.

1 基本理论

1.1 欧拉方法

欧拉法[7]是一种最基本最简单的算法,根据泰勒定理 $y(x)$ 在点 x_n 的泰勒展示,可得

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(\xi_n), \xi_n\in(x_n,x_{n+1}) \quad (2)$$

当 h 充分小时略去误差项 $R_n=\frac{h^2}{2!}y''(\xi_n)$, $\xi_n\in(x_n,x_{n+1})$,得到微分方程精确解的近似公式

$$y(x_{n+1})\approx y(x_n)+hy'(x_n), y'(x_n)=f(x_n,y_n) \quad (3)$$

即 $y(x_{n+1})\approx y(x_n)+hf(x_n,y_n)$.设 y_i 为 $y(x_i)$, $(i=1,2,\cdots,n)$ 的近似值,则

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad (4)$$

欧拉公式为

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n), x\in[a,b]\\ y(a)=y_0\end{cases} \quad (5)$$

欧拉方法是通过 y_n 计算出 y_{n+1} ,是一个单步法,局部截断误差为 $O(h^2)$,整体截断误差为 $O(h)$,即一阶收敛方法.

收稿日期:2017-02-21

基金项目:吉林省教育科学十二五规划课题(GH13366).

作者简介:1.张丽娟,女,吉林白城人,白城师范学院数学与统计学院教授(吉林 白城 137000).2.张翔,白城市引嫩入白工程建设管理局.3.关天冶,吉林省水利水电勘测设计研究院地岩分院.

1.2　改进欧拉法

为了得到更精确的方法，用梯形积分公式近似替代积分式 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t$，从而有

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t \approx \frac{h}{2}\{f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))\} \tag{6}$$

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t\ ,$$

$$y(x_{n+1})\approx y(x_n)+\frac{h}{2}\{f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))\} \tag{7}$$

用 y_n 代替 $y(x_n)$, y_{n+1} 代替 $y(x_{n+1})$，则

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\} \tag{8}$$

梯形公式是一个二阶收敛方法，比欧拉法高一阶，但其是一个隐式算法，为此进行改进，先用欧拉公式求出一个预测值 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$，然后再用梯形公式校正求得近似值 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\}$，即预估

$$\tilde{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \tag{9}$$

校正 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\tilde{y}_{n+1})\}$，改进欧拉公式为

$$\begin{cases}\tilde{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\tilde{y}_{n+1})\}\end{cases} \tag{10}$$

其局部截断误差为 $O(h^3)$，改进欧拉法[8]是一个二阶收敛方法.

1.3　经典龙格-库塔法

龙格-库塔法[9]对数据要求降低，若达到同样高精度无需计算高阶导数

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t\ .$$

由积分中值定理知

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t=f(x_n+\theta h,y(x_n+\theta h)),0\le\theta\le 1 \tag{11}$$

中值 $f(x_n+\theta h,y(x_n+\theta h))$ 用函数值的线性组合来近似，$y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{s}c_i f(x_i,y_i)$，则得到 S 级的龙格-库塔公式，根据精度的不同要求，可以求出待定系数，得到不同的龙格-库塔公式，在工程中广泛应用的经典四阶龙格-库塔公式，是一种绝对稳定的算法，局部截断误差为 $O(h^5)$.

经典四阶龙格-库塔公式为

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)\\ k_1=f(x_n,y_n)\\ k_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1)\\ k_3=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_2)\\ k_4=f(x_n+h,y_n+hk_3)\end{cases} \tag{12}$$

2　算法

2.1　欧拉法算法

```
Function [x,y]=ouler(dyfun,xspan,y0,h)
%dyfun为函数f(x,y),xspan为求解区间[a,b],y0为初值,h为步长,x为节点,y数值解
x=xspan(1):h:xspan(2);y(1)=y0;
for n=1:length(x)-1
y(n+1)=y(n)+h*feval(dyfun,x(n),y(n));
end
x,y;
```

2.2　改进欧拉法算法

```
Function [x,y]=gaijinouler(dyfun,x0,y0,h,n)
%dyfun为函数f(x,y),xspan为求解区间[a,b],x0,y0初值,h为步长,x为节点,y为数值解
x=zeros(1,n+1);y=zeros(1,n+1) x(1)=x(0);y(1)=y0;
for n=1:n
x(n+1)=x(n)+h;
ybar= y(n)+h*feval(dyfun,x(n),y(n));
y(n+1)=y(n)+h/2*(feval(dyfun,x(n),y(n))+ feval(dyfun,x(n+1),ybar);
end
x,y;
```

2.3　经典龙格-库塔法算法

```
Function [x,y]=Rungekutta(dyfun,x0,y0,h,n)
%dyfun为函数f(x,y),xspan为求解区间[a,b],x0,y0初值,h为步长,x,为节点,y为数值解
x=zeros(1,n+1);y=zeros(1,n+1) x(1)=x(0);y(1)=y0;
for n=1:n
x(n+1)=x(n)+h;
k1= h*feval(dyfun,x(n),y(n));
k2= h*feval(dyfun,x(n)+h/2,y(n)+h/2*k1);
k3= h*feval(dyfun,x(n)+h/2,y(n)+h/2*k2);
k4= h*feval(dyfun,x(n)+h,y(n)+h*k3);
y(n+1)=y(n)+h/6*(k1+2k2+2k3+k4);
end
x,y;
```

3 应用实例

考虑下面的常微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-\dfrac{2x}{y},x\in[0,1.4],h=0.2\\ y(0)=1\end{cases},$$

求得该方程的精确解为 $y=\sqrt{2x+1}$.

利用欧拉法、改进欧拉法、经典龙格-库塔法求解该微分方程数值解和误差图分别如图1、图2所示.程序如下.

```
dyfun=inline('y-2x/y','x','y');
[x,y]=ouler(dyfun,xspan,y0,h);
[x,y]=gaijinouler(dyfun,x0,y0,h,n);
[x,y]=Rungekutta(dyfun,x0,y0,h,n);
```

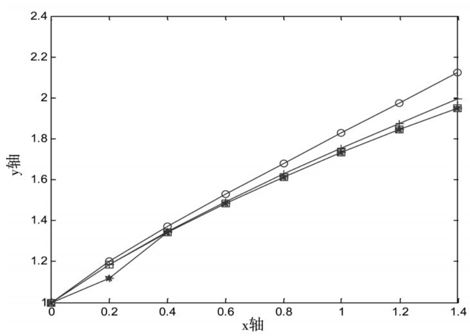

图1 欧拉法、改进欧拉法、经典龙格-库塔法

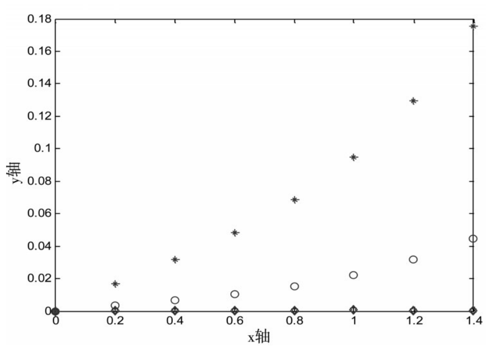

图2 欧拉法、改进欧拉法、经典龙格-库塔法误差

从图1可以看出,用改进的欧拉法比欧拉法精度高,而经典四阶龙格—库塔法明显好于欧拉法和改进欧拉法.从图2可以看出,欧拉法误差较大,改进欧拉法对于误差有一定地降低,经典四阶龙格—库塔法误差急剧降低,精确度提高很多,并且误差最小.

4 结论

本文利用MATLAB软件对常微分方程初值问题求解的欧拉法、改进欧拉法、经典龙格-库塔法进行了计算,从数值的比较分析看出,改进的欧拉法比欧拉法精度高,而经典四阶龙格—库塔法明显好于欧拉法和改进欧拉法.从误差角度分析看出,欧拉法误差较大,改进的欧拉法误差有一定地降低,经典四阶龙格—库塔法误差急剧降低,误差最小.从计算量看,经典四阶龙格—库塔法计算量是改进欧拉法的2倍,是欧拉法的4倍,因此,针对不同工程函数应该选择不同的算法,另外,常微分方程初值问题的数值解法还有许多,如外插法,多步法有待进一步探讨.

参考文献:

[1]霍晓程.常微分方程数值解法的研究[J].佳木斯教育学院学报,2011(5):167-168.

[2]曾闽丽,林智期.《微分方程数值解法》的实践教学改革与思考[J].兰州文理学院,2014,28(6):101-103.

[3]李荣华,刘播.微分方程数值解法[M].北京:高等教育出版社,2009.

[4]张德丰.MATLAB数值分析与应用[M].北京:国防工业出版社,2007.

[5]关治.数值分析基础[M].北京:高等教育出版社,1997.

[6]张淑娟.一阶常微分方程初值问题的算法与实现[J].荆门职业技术学院学报,2007,22(3):82-86.

[7]魏明强.一阶常微分方程数值解中四种算法的实例比较[J].中国传媒大学学报,2016,23(2):41-44.

[8]张秋生.单步法求解常微分方程初值问题[J].科技通报,2012,28(2):7-9.

[9]朱建新,李有法.数值计算方法引论[M].第三版.北京:高等教育出版社,2012.

(责任编辑:陈衍峰)