**Matemática discreta** | **Marca los parciales a los que te presentas** | **23 de enero de 2019**
**Recuperación/Primer parcial** | 1 | 2 | **2:30h horas**

---

En todas las cuestiones se han de justificar las respuestas.

Los estudiantes que recuperan los dos parciales han de resolver únicamente los ejercicios 1, 2, 4, 5, y 6

---

**Cuestión 1 (1.5 pt)** (a) Demuestra que la conclusión se deduce de las premisas en el siguiente argumento. (Indica en cada paso las tautologías que utilizas.)

P1. $P \to Q$

P2. $S \vee \rceil T \to \rceil Q$ $\quad\quad c: \rceil P$

P3. $T \to Q \wedge U$

P4. $\rceil U$

(b) Sabiendo que $\rceil[(P \to Q) \vee (R \wedge P)]$ es verdadera, ¿cuál sería el valor de verdad de la expresión lógica siguiente?:

$$\rceil[(Q \leftrightarrow R) \to \rceil P)]$$

**Cuestión 2 (2 pt)** (a) Escribe utilizando Lógica de Predicados las siguientes expresiones del lenguaje habitual. Tienes que utilizar el universo de las personas en todos los apartados.

a) Hay personas que no ven programas informativos pero ven muchas series.
b) Los alumnos de informática o ven muchas series o juegan a videojuegos.
c) No todos los alumnos de informática ven muchas series.
d) Pedro, que es alumno de informática, ve programas informativos y no juega a videojuegos.

(b) Demuestra el siguiente argumento de Lógica de Predicados indicando las propiedades aplicadas.

$$\begin{array}{l} P1.\ \forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \\ P2.\ \exists x\ (\neg Q(x)) \\ P3.\ \forall x\ (P(x) \to R(x)) \\ P4.\ \forall x\ (S(x) \to \neg R(x)) \\ \text{Conclusión}:\ \exists x\ (\neg S(x)) \end{array}$$

**Cuestión 3 (1 pt)** Simplifica la siguiente expresión de lógica proposicional. **Especifica** las propiedades que utilizas en cada paso.

$$(\rceil P \vee \rceil Q) \wedge (P \vee \rceil Q) \wedge R \to \rceil Q \wedge R$$

**Cuestión 4 (1.5 pt)** Demuestra por inducción que para todo número natural $n \geq 1$ se verifica que $8^n - 1$ es múltiplo de 7.

**Cuestión 5 (2 pt)** (a) Sean $A$, $B$ y $C$ tres conjuntos no vacíos. ¿Son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones? Demuestra las que sean ciertas y da un contraejemplo en caso contrario ($X^c$ denota el conjunto complementario de $X$).

(a-1) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$

(a-2) $(A \setminus B)^c \cap (A \setminus C)^c = A^c \cup (B \cap C)$.

(b) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, indica, de manera razonada, si las siguientes familias son recubrimientos y/o particiones de $A$.

(i) $\{\{1, 2, 4\}, \{3\}, \{5\}\}$

(ii) $\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}\}$

(iii) $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{5\}\}$

(iv) $\{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}\}$

**Cuestión 6 (1 pt)** Consideremos las aplicaciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \frac{x+5}{3}$ y $g(x) = 3x - 5$.

(a) Calcula $f \circ g$ y $g \circ f$.

(b) ¿Tienen $f$ y $g$ aplicación inversa? Razona tu respuesta. Calcula si es posible $f^{-1}$ y $g^{-1}$.

**Cuestión 7 (1 pt)** (a) Una correspondencia entre dos conjuntos $A$ en $B$ es una aplicación si ....

(b) Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Escribe un ejemplo, si es posible, de aplicación inyectiva de $A$ en $B$. En caso negativo, justifica la respuesta.

I

# Primer parcial

1.- (a) Método directo

P1. $P \to Q$
P2. $S \vee \neg T \to \neg Q$  C: $\neg P$
P3. $T \to Q \wedge U$
P4. $\neg U$

P5. $\neg U \vee \neg Q$ Adición (4)
P6. $\neg(U \wedge Q)$ L. Morgan (5)
P7. $\neg T$ M. Tollens (3, 6)
P8. $\neg T \vee S$ Adición (7)
P9. $\neg Q$ M. Ponens (2, 8)
P10. $\neg P$ Tollendo Ponens (1, 9)

Reducción al absurdo

P1. $P \to Q$
P2. $S \vee \neg T \to \neg Q$  C: $\neg P$
P3. $T \to Q \wedge U$
P4. $\neg U$

P5. $P$ Premisa aux. red. al absurdo
P6. $Q$ M. Ponens (1, 5)
P7. $\neg(S \vee \neg T)$ M. Tollens (2, 6)
P8. $\neg S \wedge T$ L. Morgan (7)
P9. $T$ Simplificación (8)
P10. $Q \wedge U$ M. Ponens (3, 9)
P11. $U$ Simp. (10)
P12. $\neg U \wedge U$ L. Unión (4, 11)
#

(b) Si $\neg[(P \to Q) \vee (R \wedge P)]$ es verdadera, como es una negación, tenemos que $(P \to Q) \vee (R \wedge P)$ es falsa. Una disyunción es falsa si ambas son falsas. Por tanto $P \to Q$ y $R \wedge P$ son ambas falsas. Como $P \to Q$ es falsa, $P$ es verdadera y $Q$ falsa y de aquí $R$ es falsa.
Por tanto $Q \leftrightarrow R$ es verdadera y $\neg P$ es falsa. Luego el condicional es falso y $\neg[(Q \leftrightarrow R) \to \neg P]$ es verdadera.

2.- (a) $U \equiv$ personas

$I(x)$: x ve programas informativos; $V(x)$: x juega a video juegos
$S(x)$: x ve muchas series ; $A(x)$: x es alumno de informática
Pedro: p

(a) $\exists x \quad \neg I(x) \wedge S(x)$
(b) $\forall x \quad A(x) \to S(x) \vee V(x)$
(c) $\neg \forall x \quad A(x) \to S(x)$
(d) $A(p) \wedge I(p) \wedge \neg V(p)$

(b) P1. $\forall x \quad P(x) \vee Q(x)$

P2. $\exists x \quad \neg Q(x)$ $\qquad$ C: $\exists x \quad \neg S(x)$

P3. $\forall x \quad P(x) \to R(x)$

P4. $\forall x \quad S(x) \to \neg R(x)$

P5. $\neg Q(a)$ E. Exitencial (2)

P6. $P(a) \vee Q(a)$ E. Universal (1)

P7. $P(a) \to R(a)$ E.U. (3)

P8. $S(a) \to \neg R(a)$ E.U. (4)

P9. $P(a)$ Tollendo Ponens (5,6)

P10. $R(a)$ M. Ponens (7,9)

P11. $\neg S(a)$ M. Tollens (8,10)

P12. $\exists x \quad \neg S(x)$ Gen. Existencial (11)

3.- $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge R \to \neg Q \wedge R \equiv$ Distributiva

$\equiv ((\neg P \wedge P) \vee \neg Q) \wedge R \to \neg Q \wedge R \equiv$ P. negación

$\equiv (\phi \vee \neg Q) \wedge R \to \neg Q \wedge R \equiv$ E. neutro

$\equiv \neg Q \wedge R \to \neg Q \wedge R \equiv$ Cond. - Disyunción

$\equiv \neg(\neg Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \equiv$ P. negación

$\equiv \tau$

4.- $\forall n \in \mathbb{N} \quad 8^n - 1$ es múltiplo de 7.

$n=1 \qquad 8^1 - 1 = 8 - 1 = 7$ ✓ $\qquad$ Hipótesis de inducción

Supongamos que $8^n - 1 = 7K$, $K \in \mathbb{N}$. Y veamos que $8^{n+1} - 1$ es múltiplo de 7. Por la hipótesis de inducción tenemos que $8^n = 7K + 1$.

Por tanto $8^{n+1} - 1 = 8^n \cdot 8 - 1 \underset{\text{Hip. de inducción}}{=} (7K+1) \cdot 8 - 1 = 7 \cdot 8 \cdot K + 8 - 1 =$

$= 7 \cdot 8 \cdot K + 7 = 7(8K + 1)$

que es múltiplo de 7.

5.- II

(a)

(a-1) Es falsa. Si $A=\{1,2\}$ $U=\{1,2,3,4\}$

$B=\{1,2,3\}$

$A\cap B=\{1,2\}$ $A^c=\{3,4\}$ $A^c\cap B^c=\{4\}\neq(A\cap B)^c$

$(A\cap B)^c=\{3,4\}$ $B^c=\{4\}$

(a-2) Verdadera

$$(A\setminus B)^c\cap(A\setminus C)^c\overset{\text{Def}^{\text{n}}\text{ de diferencia}}{=}(A\cap B^c)^c\cap(A\cap C^c)^c\overset{\text{L. Morgan}}{=}$$

$$=(A^c\cup B)\cap(A^c\cup C)\underset{\text{P. Distributiva}}{=}A^c\cup(B\cap C).$$

(b)

(i) $\{1,2,4\}\cup\{3\}\cup\{5\}=A$ y son disjuntos dos a dos, luego es una partición de A (y también un recubrimiento)

(ii) $\{1,2,3,4\}\cup\{5\}=A$ y son disjuntos, luego es una partición de A (y un recubrimiento)

(iii) $\{1,2\}\cup\{3\}\cup\{5\}\neq A$ luego no es recubrimiento y, por tanto no es partición de A.

(iv) $\{1,2\}\cup\{2,3,4\}\cup\{5\}=A$, luego tenemos un recubrimiento de A. Sin embargo $\{1,2\}\cap\{2,3,4\}=\{2\}\neq\emptyset$. Luego no es partición.

6.-

(a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-5)=\dfrac{3x-5+5}{3}=x$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{x+5}{3}\right)=\cancel{3}\cdot\left(\dfrac{x+5}{\cancel{3}}\right)-5=$

$=x+5-5=x$

(b) Como $f\circ g$ y $g\circ f$ es la aplicación identidad, f y g tienen aplicación inversa y $f^{-1}=g$, $g^{-1}=f$.

7.- (a) Todo elemento de A tiene imagen en B y dicha imagen es única.

(b) Como ha de ser aplicación todo elemento ha de tener imagen, luego dado que $cd(A)=4$ y $cd(B)=3$ no es posible encontrar una aplicación inyectiva de A en B, habrá dos elementos con la misma imagen.

**Matemática discreta** **Marca los parciales a los que te presentas** **23 de enero de 2019**
**Recuperación/Segundo parcial** | 1 | 2 |

---

En todas las cuestiones se han de justificar las respuestas.

Los estudiantes que recuperan los dos parciales han de resolver únicamente los ejercicios 2, 3, 4, 6 y 7

---

**Cuestión 1 (1 pt)** En el conjunto de los enteros, $\mathbb{Z}$, se considera la relación binaria

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 \equiv y^2 \pmod 4$$

a) Demuestra que $R$ es una relación binaria de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

b) Si consideramos la misma relación $R$ en el conjunto $A = \{-1, 1, 0, -2, 2\}$. Calcula las clases de equivalencia de los elementos de $A$ y el correspondiente conjunto cociente.

**Cuestión 2 (1 pt)** En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dos elementos están relacionados, $aRb$, si y sólo si $a - b \leq 3$. Justifica cuáles de las propiedades siguientes cumple: reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva.

**Cuestión 3 (2.5 pt)** Considera el conjunto $A = \{3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 27,\ 35, 45\}$ con la relación de divisibilidad.

**a)** Dibuja el diagrama de Hasse asociado a dicho conjunto ordenado.

**b)** Determina los maximales, minimales, máximo y mínimo, si existen, del conjunto $A$.

**c)** Considera el subconjunto $B = \{3,\ 5,\ 15\}$. Determina sus cotas superiores y supremo, si existen.

**d)** Considera el subconjunto $C = \{9,\ 15,\ 45\}$. ¿Tiene cotas inferiores? ¿Tiene ínfimo? **Justifica** la respuesta.

**e)** ¿El subconjunto $D = \{3,\ 9,\ 15,\ 45\}$ es un retículo de Boole? **Justifica** la respuesta.

**Cuestión 4 (2 pt)** **a)** Resuelve la ecuación en congruencias $54x \equiv 6 \pmod{34}$.

**b)** Calcula $\overline{2^{32}}$ en $\mathbb{Z}_6$.

**Cuestión 5 (1 pt)** Simplifica, especificando las propiedades del Álgebra de Boole que utilizas, la siguiente función booleana:

$$f(x, y, z) = \overline{(\bar{x}y)}(x\bar{z} + xy\bar{z})$$

**Cuestión 6 (1 pt)** Determina las formas canónicas de la función booleana de tres variables que toma el valor uno cuando un número par de variables es igual a 1, y vale 0 en otro caso.

**Cuestión 7 (1.5 pt)** (a) Si $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$ tales que $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$, ¿podemos deducir que $\bar{a} = \bar{0}$ o $\bar{b} = \bar{0}$? Justifica la respuesta.

(b) Una relación binaria en un conjunto $A$ es antisimétrica si: ....

(c) Escribe todas las posibles relaciones binarias de equivalencia que se pueden definir en el conjunto $A = \{a, b\}$

# Segundo parcial

**1-** $xRy \leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \pmod 4$

(a) - Reflexiva: ¿$xRx$? Sí $x^2 \equiv x^2 \pmod 4$, $x^2 - x^2 = 0$ que es múltiplo de 4.

- Simétrica: Si $xRy \to x^2 \equiv y^2 (4)$, luego $x^2 - y^2 = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\to y^2 - x^2 = -4k \to y^2 \equiv x^2 \pmod 4$

- Transitiva: Si $\left.\begin{array}{l} xRy \\ \wedge \\ yRz \end{array}\right| \begin{array}{l} x^2 \equiv y^2 \pmod 4 \\ y^2 \equiv z^2 \pmod 4 \end{array} \Bigg| \to \begin{array}{l} x^2 - \cancel{y^2} = 4k, \; k \in \mathbb{Z} \\ \cancel{y^2} - z^2 = 4s, \; s \in \mathbb{Z} \\ \hline x^2 - z^2 = 4(k+s) \end{array}$

$\to x^2 \equiv z^2 \pmod 4 \to xRz$.

Luego es R.B.E.

(b) $A = \{-1, 1, 0, -2, 2\}$

$(-1)^2 = 1 \quad 0^2 = 0 \quad 2^2 = 4 \equiv 0 \pmod 4$

$1^2 = 1 \quad (-2)^2 = 4 \equiv 0 \pmod 4$

Luego $[1] = \{1, -1\} = [-1]$

$[0] = \{0, 2, -2\} = [2] = [-2]$

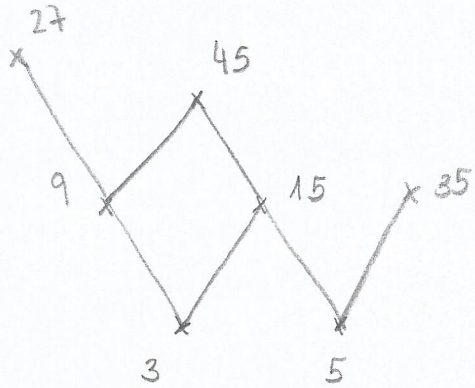
y el conjunto cociente es: $A/_R = \{[0], [1]\} = \{\{0, -2, 2\}, \{-1, 1\}\}$

**2-** $aRb \leftrightarrow a - b \leq 3$

- Reflexiva: ¿$aRa$? Sí $a - a = 0 \leq 3$.
- Simétrica: No, $1R5$ ya que $1 - 5 = -4 \leq 3$ pero $5 \not R 1$ ya que $5 - 1 = 4 \nleq 3$.
- Antisimétrica: No $1R2$ ya que $1 - 2 = -1 \leq 3$ y $2R1$ ya que $2 - 1 \leq 3$. Pero $1 \neq 2$.
- Transitiva: $5R4$ $(5-4=1\leq 3)$ y $4R1$ $(4-1=3\leq 3)$ pero $5 \not R 1$

3.-

(a)



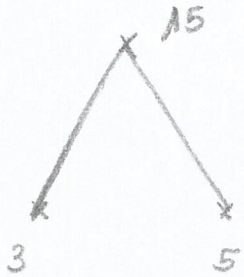

(b) Maximales (A) = {27, 45, 35}

minimales (A) = {3, 5}

∄ Max (A)

∄ mín (A)

(c) B = {3, 5, 15}



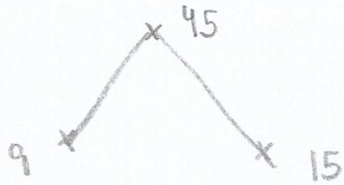

C. sup. de B en A = {15, 45}

sup. de B en A = 15

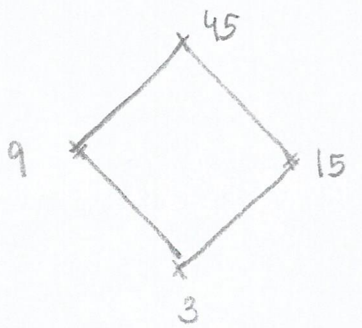
(d) C = {9, 15, 45}

C. inf. de C en A = {3}

ínf de C en A = 3




(e)




Para cada par de elementos existe el supremo y el ínfimo. Está acotado Máx (D) = 45 y mín (D) = 3. Es complementado $\overline{45} = 3$ y $\overline{3} = 45$ y $\overline{9} = 15$ y $\overline{15} = 9$. Además es distributivo ya que si consideramos 3 elementos de D, o dos son iguales, o uno de ellos es el máximo o el mínimo. Luego es un retículo de Boole. También podemos observar que las operaciones de supremo e ínfimo se corresponden con el m.c.m. y el m.c.d. que son distributivas unas respecto a otras.

4-

(a) $54x \equiv 6 \pmod{34}$

En primer lugar pasaremos 54 módulo 34. $\begin{array}{r|l} 54 & 34 \\ \hline 20 & 1 \end{array}$

Luego nos queda la ecuación $20x \equiv 6 \pmod{34}$.

Calculamos ahora $mcd(20, 34) = 2$

$\begin{array}{r|l} 34 & 20 \\ \hline 14 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 20 & 14 \\ \hline 6 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 14 & 6 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$ Luego $mcd(20,34) = 2$. Como

$2 | 6$ la ecuación es de Tipo 2 y tiene 2 soluciones en $\mathbb{Z}_{34}$.

Dividimos ahora la ecuación por $2 = mcd(20,34)$:

$10x \equiv 3 \pmod{17}$ esta ecuación transformada es de

tipo 1. Utilizaremos el algoritmo para resolverla:

$\begin{array}{r|l} 17 & 10 \\ \hline 7 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_i$ | | 1 | 1 | 2 | 3 |
| $p_i$ | 1 | 1 | 2 | 5 | 17 |

$p_{n-1}$

Luego la solución viene dada por $x = (-1)^{n-1} \cdot p_{n-1} \cdot b$ siendo n el nº de cocientes. De aquí:

$x = (-1)^3 \cdot 5 \cdot 3 = -15 = 2$

Por tanto las soluciones de la ecuación original serán:

$\{2,\ 2+17 = 19\}$

(b) $\overline{2^{32}}$ en $\mathbb{Z}_6$

observemos que: $\overline{2^2} = \overline{2 \cdot 2} = \overline{4}$ en $\mathbb{Z}_6$

$\overline{2^3} = \overline{4} \cdot \overline{2} = \overline{8} = \overline{2}$ en $\mathbb{Z}_6$

$\overline{2^4} = \overline{2^3} \cdot \overline{2} = \overline{4}$ en $\mathbb{Z}_6$

y por tanto $\overline{2^n} = \overline{2}$ si n es impar y $\overline{2^n} = \overline{4}$ si n es par. En particular, $\overline{2^{32}} = \overline{4}$ en $\mathbb{Z}_6$.

(5)-

$$f(x,y,z) = \overline{(\bar{x}y)}(x\bar{z} + xy\bar{z}) \underset{\text{P. Distributiva}}{=} \overline{(\bar{x}y)}\,(x\bar{z}(1+y)) \underset{\substack{\text{Absorbente}\\ \text{E. neutro}}}{=}$$

$$= \overline{(\bar{x}y)}\,x\bar{z} \underset{\text{L. Morgan}}{=} (x+\bar{y})\,x\bar{z} \underset{\substack{\text{P. Distributiva}\\ \text{Idempotencia}}}{=} x\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} \underset{\text{P. Distributiva}}{=} x\bar{z}(1+\bar{y}) \underset{\substack{\text{Absorbente}\\ \text{E. neutro}}}{=}$$

$$= x\bar{z}$$

(6)-

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

f.c. disyuntiva:

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

f.c. conjuntiva:

$$f(x,y,z) = (x+y+\bar{z})\cdot(x+\bar{y}+z)\cdot(\bar{x}+y+z)\cdot$$
$$\cdot(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$$

(7)-

(a) No, por ejemplo $\bar{2}\cdot\bar{3} = \bar{0}$ en $\mathbb{Z}_6$ y $\bar{2} \neq \bar{0}$, $\bar{3} \neq \bar{0}$.

(b) Dados $a, b \in A$ si $aRb$ y $bRa \Rightarrow a = b$.

(c) $R_1 = \{(a,a),(b,b)\}$

$R_2 = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}$