Matemática discreta | Marca los parciales a los que te presentas | 15 de enero de 2020

Recuperación/Primer parcial | 1 | 2

En todas las cuestiones se han de justificar las respuestas.

Los estudiantes que recuperan los dos parciales han de resolver únicamente los ejercicios 1, 2, 4, 5, y 6

Cuestión 1 (1.5 pt) (a) Demuestra que la conclusión se deduce de las premisas en el siguiente argumento. (Indica en cada paso las tautologías que utilizas.)

P1. $P \to Q \vee T$

P2. $\rceil P \vee S \to R$

P3. $\rceil Q$

C. $\rceil T \to R$

(b) ¿Para qué valores de verdad de P y R es verdadera la fórmula proposicional: $P \to P \wedge R$?

Cuestión 2 (2 pt) (a) Escribe utilizando Lógica de Predicados las siguientes expresiones del lenguaje habitual. Tienes que utilizar el universo de las personas en todos los apartados.(Lewis Carroll)

- "Todo el que no es un lunático puede hacer lógica".
- "Ningún lunático sirve para estar en un jurado".
- "Hay alumnos de informática no lunáticos que sirven para estar en un jurado".
- "Todos los alumnos de informática pueden hacer lógica y sirven para estar en un jurado".

(b) Demuestra el siguiente argumento de Lógica de Predicados indicando las propiedades aplicadas.

P1: $\forall x \ (E(x) \vee D(x))$

P2: $\exists x \ \neg D(x)$

P3: $\forall x \ (\rceil E(x) \vee L(x))$

P4: $\forall x \ (C(x) \to \neg L(x))$

C: $\exists x \ \neg C(x)$

Cuestión 3 (1 pt) Simplifica la siguiente expresión de lógica proposicional. Especifica las propiedades que utilizas en cada paso.

$$\big((p \to q) \to p\big) \to p$$

Cuestión 4 (1 pt) Demuestra por inducción que para todo número natural $n \geq 1$ se verifica que

$$2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2.$$

Cuestión 5 (2 pt) (a) Dados dos conjuntos cualesquiera A y B cumpliendo que $A \subseteq B$, comprueba, indicando las propiedades que utilizas, que es cierta la siguiente igualdad:

$$\big(A \cup (B \cap A)\big)^c \cup \big(B^c \cap (A^c \cap B)^c\big) = A^c.$$

(b) Consideremos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Justifica si las siguientes familias de conjuntos son particiones y/o recubrimientos de A:

1) $\{\{a, b, c\}, \{d, f\}, \{e, g\}\}$
2) $\{\{a, c\}, \{b, d\}, \{f, e\}\}$
3) $\{\{a, c, d\}, \{b, e\}\}$
4) $\{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{e, f\}\}$
5) $\{\{a, b, c, d, e, f\}\}$

Cuestión 6 (1.5 pt) Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$ dada por $f(x) = \frac{3x}{x-3}$.

(a) Demuestra que f es inyectiva.

(b) Calcula $f \circ f$.

(c) Calcula la aplicación inversa de f.

Cuestión 7 (1 pt) (a) Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ es suprayectiva cuando ...

(b) Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, escribe un ejemplo, si es posible, de aplicación suprayectiva de A en B. En caso negativo, justifica la respuesta.

- Cuestión 1

(a) P1. $P \to Q \vee T$
P2. $\neg P \vee S \to R$
P3. $\neg Q$

C: $\neg T \to R$

*Método Condicional

P4. $\neg T$ Premisa aux. de método condicional
P5. $\neg Q \wedge \neg T$ Ley Unión (3,4)
P6. $\neg(Q \vee T)$ L. Morgan (5)
P7. $\neg P$ Modus Tollens (1,6)
P8. $\neg P \vee S$ Adición (7)
P9. R Modus Ponens (2,8)

(b) Recordemos que el condicional es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Por tanto si P es falsa, la fórmula prop. es verdadera con independencia del valor de R. Si P es verdadera, la fórmula prop. será verdadera si R es también verdadera.

- Cuestión 2

$U \equiv$ personas

(a) $L(x)$: x es un lunático
$O(x)$: x puede hacer lógica
$A(x)$: x es alumno de informática
$J(x)$: x sirve para estar en un jurado

(i) $\forall x \; \neg L(x) \to O(x)$
(ii) $\neg \exists x \; L(x) \wedge J(x) \equiv \forall x \; L(x) \to \neg J(x)$
(iii) $\exists x \; A(x) \wedge \neg L(x) \wedge J(x)$
(iv) $\forall x \; A(x) \to O(x) \wedge J(x)$

(b) P1. $\forall x \quad E(x) \vee D(x)$

P2. $\exists x \quad \neg D(x)$

P3. $\forall x \quad \neg E(x) \vee L(x)$

P4. $\forall x \quad C(x) \rightarrow \neg L(x)$

C: $\exists x \ \neg C(x)$

P5. $\neg D(a)$ E. Existencial (2)

P6. $E(a) \vee D(a)$ Especificación universal (1)

P7. $\neg E(a) \vee L(a)$ E. Universal (3)

P8. $C(a) \rightarrow \neg L(a)$ E. Universal (4)

P9. $E(a)$ Tollendo Ponens (5,6)

P10. $L(a)$ Tollendo Ponens (7,9)

P11. $\neg C(a)$ Modus Tollens (8,10)

P12. $\exists x \ \neg C(x)$ Generalización existencial (11)

- Cuestión 3

$$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p \underset{\text{Cond. Disyunción}}{\equiv} \neg(\neg p \vee q) \vee p \rightarrow p \underset{\text{L. Morgan}}{\equiv} (p \wedge \neg q) \vee p \rightarrow p \equiv$$

$$\underset{\text{Simplificativa}}{\equiv} p \rightarrow p \underset{\text{Cond. Disyunción}}{\equiv} \neg p \vee p \underset{\text{Prop. Negación}}{\equiv} t$$

- Cuestión 4

$\forall n \geq 1 \quad 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

- Veamos que la propiedad es cierta para $n = 1$:

$$2 = 2^2 - 2 = 4 - 2$$

- Supongamos que la propiedad es cierta para un n (Hipótesis de inducción):

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

- Y veamos que es cierta para $n+1$, es decir que:

$$¿\ 2 + 2^2 + \dots + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 2\ ?$$

$2+2^2+\cdots+2^{n+1} = \underbrace{2+2^n+\cdots+2^n}+2^{n+1} \underset{\uparrow}{=} 2^{n+1}-2+2^{n+1} =$

Hipótesis de inducción

$= 2^{n+1}+2^{n+1}-2 = 2^{n+1}\cdot 2 -2 =$

$= 2^{n+2}-2$ ✓

- Cuestión 5 $A \subseteq B$

(a) $(A\cup(B\cap A))^c \cup (B^c\cap(A^c\cap B)^c) \underset{\uparrow}{=} A^c \cup (B^c \cap (A^c\cap B)^c) =$

$B\cap A \subseteq A$ y Idempotencia

$\underset{\uparrow}{=} A^c \cup (B^c\cap(A\cup B^c)) = A^c\cup B^c \underset{\uparrow}{=} A^c$ (o bien por la prop. simplificativa)

L. Morgan — Simplificativa — $B^c \subseteq A^c$

(b) $A=\{a,b,c,d,e,f\}$

1) $\{\{a,b,c\},\{d,f\},\{e,g\}\}$

$A \subseteq \{a,b,c\}\cup\{d,f\}\cup\{e,g\}$, luego se trata de un recubrimiento. Como $g\notin A$, no es partición.

2) $\{\{a,c\},\{b,d\},\{f,e\}\}$. Notad que $A=\{a,c\}\cup\{b,d\}\cup\{e,f\}$, luego es un recubrimiento. Por otro lado, los conjuntos son disjuntos dos a dos, luego la familia es una partición de A.

3) $\{\{a,c,d\},\{b,e\}\}$

Como $A \not\subseteq \{a,c,d\}\cup\{b,e\}$, ya que $f\notin\{a,c,d\}\cup\{b,e\}$, no es recubrimiento ni partición.

4) $\{\{a,b,c\},\{c,d,e\},\{e,f\}\}$.

Como $A\subseteq\{a,b,c\}\cup\{c,d,e\}\cup\{e,f\}$ es un recubrimiento, no es partición ya que por ejemplo $\{a,b,c\}\cap\{c,d,e\}=\{c\}\neq\emptyset$

5) $\{\{a,b,c,d,e,f\}\}$

Se verifican ambas condiciones, por tanto es partición de A.

- Cuestión 6 $\quad f: \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}\setminus\{3\} \quad f(x) = \dfrac{3x}{x-3}$

(a) Supongamos que $\exists\, x, y \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ con $f(x) = f(y)$ y veamos que $x = y$.

Si $f(x) = f(y) \to \dfrac{3x}{x-3} = \dfrac{3y}{y-3} \to 3x(y-3) = 3y(x-3) \to$

$\to \cancel{3xy} - 9x = \cancel{3xy} - 9y \to 9x = 9y \to x = y$ ✓

(b) $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\dfrac{3x}{x-3}\right) = \dfrac{3\left(\dfrac{3x}{x-3}\right)}{\dfrac{3x}{x-3} - 3} = \dfrac{\dfrac{9x}{\cancel{x-3}}}{\dfrac{\cancel{3x} - \cancel{3x} + 9}{\cancel{x-3}}} =$

$= \dfrac{9x}{9} = x$

luego $f\circ f$ es la aplicación identidad en $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

(c) Puesto que $f\circ f = Id_{\mathbb{R}\setminus\{3\}}$, obtenemos que $f^{-1} = f$.

- Cuestión 7

(a) Una aplicación $f: A \to B$ es suprayectiva cuando todo elemento de B tiene antiimagen en A, es decir, $\forall\, b \in B,\ \exists\, a \in A$ con $f(a) = b$, o de otro modo, $\mathrm{Im} f = B$.

(b) Como todo elemento de B ha de tener antiimagen y B tiene 4 elementos y A tiene 3, ello implicaría que algún elemento de A tendría 2 imágenes, luego no sería aplicación. Por tanto no es posible encontrar un ejemplo.

Matemática discreta | Marca los parciales a los que te presentas | 15 de enero de 2020

Recuperación/Segundo parcial | 1 | 2 |

En todas las cuestiones se han de justificar las respuestas.

Los estudiantes que recuperan los dos parciales han de resolver únicamente los ejercicios 2, 3, 4, 5 y 6

Cuestión 1 (1.5 pt) En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se define la relación R:

$$x \; R \; y \quad \text{si, y solo si,} \quad x + y \text{ es un número par.}$$

(a) Demuestra que R es un relación de equivalencia.

(b) Calcula $[0]$ y $[1]$, las clases de equivalencia del 0 y el 1, para la relación de equivalencia R, y el correspondiente conjunto cociente.

Cuestión 2 (1 pt) En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se define la relación R cuyo grafo es:

$$R = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (3,1), (3,4), (4,1), (4,3)\}.$$

Justifica cuáles de las propiedades siguientes cumple: reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva.

Cuestión 3 (2 pt) Considera el conjunto $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 12,\ 18,\ 36\}$ con la relación de divisibilidad.

a) Dibuja el diagrama de Hasse asociado a dicho conjunto ordenado.

b) Determina los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo, si existen, del subconjunto $B = \{2, 3, 6, 12, 18\}$ de A.

c) Considera el subconjunto $C = \{2,\ 3\}$ de A. Determina sus cotas superiores y supremo, si existen, en el conjunto A, y análogamente sus cotas inferiores e ínfimo, si existen, en el conjunto A.

d) ¿Es el subconjunto $D = \{1,\ 2,\ 3, 6\}$ de A un retículo acotado? Justifica la respuesta.

(e) ¿Qué elementos de D tienen complementario? ¿Es D un retículo de Boole? Justifica la respuesta.

Cuestión 4 (2 pt) a) Resuelve la ecuación en congruencias $80x \equiv 20 \pmod{115}$.

b) Resuelve la ecuación $x^2 = \bar{1}$ en $\mathbb{Z}_7$.

Cuestión 5 (2 pt) (a) Calcula $\overline{-13}$ y $\bar{3}^{-1}$ (el inverso de $\bar{3}$), en $\mathbb{Z}_4$.

(b) Una relación binaria en un conjunto A es antisimétrica si: ....

(c) Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, en caso de ser verdadera demuéstrala, y si es falsa encuentra un contraejemplo:

"Si R es una relación de equivalencia en un conjunto finito no vacío A, entonces todas las clases de equivalencia de la relación tienen el mismo número de elementos."

(d) Sea $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, y sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Se dice que a y b son congruentes módulo m si...

Cuestión 6 (1 pt) Simplifica la siguiente expresión en un Álgebra de Boole cualquiera indicando las propiedades utilizadas :

$$f(x, y, z) = \bar{x}(x + \bar{y}) + x\bar{y}(z\bar{y} + x\bar{y})$$

Cuestión 7 (0.5 pt) Resuelve la siguiente ecuación en el Álgebra de Boole de cuatro elementos $A = \{0, 1, a, b\}$:

$$(a + x^2) \cdot (b + x)^2 = 0.$$

Justifica la respuesta.

- Cuestión 1

$\mathbb{Z}$, $xRy \leftrightarrow x+y$ es un nº par

(a) - Reflexiva: ¿xRx? $x+x=2x$ par ✓

- Simétrica: Si $xRy \to x+y = \underset{K\in\mathbb{Z}}{2K}$ par $\to y+x = 2K$ par $\to yRx$ ✓

- Transitiva: Si $\left.\begin{array}{c} xRy \\ \wedge \\ yRz \end{array}\right| \to \begin{array}{l} x+y = 2K,\ K\in\mathbb{Z} \\ y+z = 2s,\ s\in\mathbb{Z} \end{array}$

$x+2y+z = 2K+2s \to x+z = \underbrace{2K+2s-2y}_{\text{par}}$

$\to xRz$ ✓

Luego R es R.B.E.

(b) $[0] = \{x\in\mathbb{Z} / x+0$ es par$\} = \{x\in\mathbb{Z}/x$ par$\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$

$[1] = \{x\in\mathbb{Z}/x+1 = 2K,\ K\in\mathbb{Z}\} = \{x\in\mathbb{Z}/x = 2K-1\} = \{\pm 1, \pm 3, \dots\}$

y por tanto el conjunto cociente $\mathbb{Z}/R = \{[0],[1]\}$

- Cuestión 2 $A = \{1,2,3,4\}$

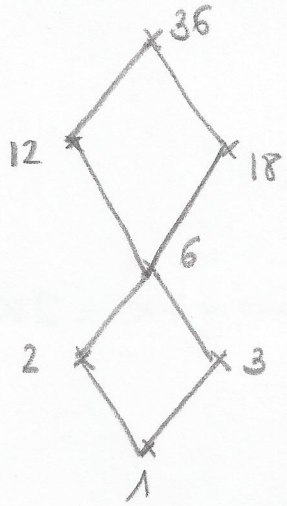
$R = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(3,1),(3,4),(4,1),(4,3)\}$

- No es reflexiva, por ejemplo $(3,3)\notin R$
- Es simétrica, si $(x,y)\in R \to (y,x)\in R$.
- No es antisimétrica, por ejemplo $(1,3)\in R$ y $(3,1)\in R$, $1\neq 3$.
- No es transitiva ya que $(4,1)\in R$ y $(1,4)\in R$, pero $(4,4)\notin R$.

Cuestión 3

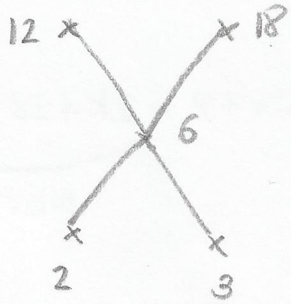
$A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18, 36\}$

(a)



(b)

B



maximales $(B) = \{12, 18\}$

minimales $(B) = \{2, 3\}$

$\nexists$ Máx (B)

$\nexists$ mín (B)

(c)

C

Cotas sup. de C en $A = \{6, 12, 18, 36\}$

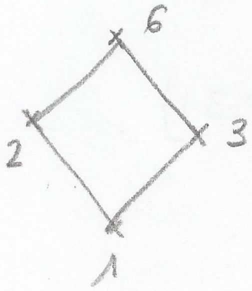
supremo de C en $A = 6$

Cotas inf. de C en $A = \{1\}$

ínfimo de C en $A = 1$

(d)

D



Está claro que $D = D_6$ es un retículo, puesto que cada par de elementos tiene supremo e ínfimo. Además es acotado Máx $(D) = 6$ y mín $(D) = 1$.

(e) $\bar{1} = 6$, $\bar{6} = 1$ y $\bar{2} = 3$, $\bar{3} = 2$, luego todo elemento tiene complementario. Como $D = D_6$, sabemos que sup $= + =$ m.c.m. y inf $= \cdot =$ mcd y sabemos que m.c.m. y m.c.d son distributivos uno respecto a otro, luego el retículo es distributivo y es un retículo de Boole.

- Cuestión 4

(a) $80x \equiv 20 \pmod{115}$ $\mathbb{Z}_{115}$

Calculamos en primer lugar $\text{mcd}(80, 115) = 5$

$\begin{array}{r|l} 115 & 80 \\ \hline 35 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 80 & 35 \\ \hline 10 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 35 & 10 \\ \hline 5 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$

Como $5 | 20$ la ecuación tiene 5 soluciones en $\mathbb{Z}_{115}$.

Dividimos la ecuación por 5:

$16x \equiv 4\ (23)$ Resolvemos la ecuación transformada que es de tipo 1

$\begin{array}{r|l} 23 & 16 \\ \hline 7 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 16 & 7 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$

$\begin{array}{c|ccccc} q_i & & 1 & 2 & 3 & 2 \\ P_i & 1 & 1 & 3 & 10 & 23 \\ \hline \end{array}$ $x = (-1)^3 \cdot 10 \cdot 4 = -40 = 6$ en $\mathbb{Z}_{23}$

Luego las soluciones de la ecuación original son:

$$\{6, \underset{29}{\underset{\parallel}{6+23}}, \underset{52}{\underset{\parallel}{29+23}}, \underset{75}{\underset{\parallel}{52+23}}, \underset{98}{\underset{\parallel}{75+23}}\}$$

(b) $x^2 = \bar{1}$ en $\mathbb{Z}_7$, puesto que $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

obtenemos $\bar{0}^2 = \bar{0} \neq 1$, $\boxed{\bar{1}^2 = \bar{1}}$, $\bar{2}^2 = \bar{4} \neq \bar{1}$, $\bar{3}^2 = \bar{9} = 2 \neq \bar{1}$,

$\bar{4}^2 = \overline{16} = \bar{2} \neq 1$, $\bar{5}^2 = \overline{25} = \bar{4} \neq \bar{1}$, $\boxed{\bar{6}^2 = \overline{36} = \bar{1}}$

Luego las soluciones son $\boxed{x = \bar{1} \ \text{ y } \ x = \bar{6}}$

Cuestión 5

(a) $\overline{-13} = \overline{-1} = \overline{3}$ en $\mathbb{Z}_4$

$\overline{13} = \overline{1}$

¿ $\overline{3}^{-1}$? $\quad 3x \equiv 1 \ (4)$ Como $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$

es claro que $3 \cdot 3 = 9 = 1$ en $\mathbb{Z}_4$.

luego $\overline{3}^{-1} = \overline{3}$

(b) Una relación binaria en un conjunto A es antisimétrica si dados $a, b \in A$ si aRb y $bRa \to a = b$.

(c) La afirmación es falsa, por ejemplo si $A = \{1,2,3\}$, la relación $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$ es R.B.E. Pero

$[1] = [2] = \{1,2\}$

$[3] = \{3\}$

luego las clases de equivalencia no tienen el mismo nº de elementos.

(d) $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ y sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces a y b son congruentes módulo m si $a - b$ es múltiplo de m.

Cuestión 6

$$f(x,y,z) = \bar{x}(x+\bar{y}) + x\bar{y}(z\bar{y}+x\bar{y}) = \overbrace{\bar{x}x}^{0} + \bar{x}\bar{y} + x\bar{y}(z\bar{y}+x\bar{y}) =$$

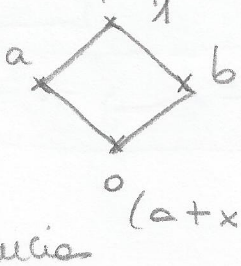
Prop. Distributiva

$$= \bar{x}\bar{y} + x\bar{y}(z\bar{y}+x\bar{y}) = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} = (\bar{x}+x)\bar{y} = 1 \cdot \bar{y} = \boxed{\bar{y}}$$

Prop. Complementario y e. neutro — Prop. Simplificativa — Prop. Distributiva — Prop. Complementario — E. neutro

Cuestión 7

$A = \{0, 1, a, b\}$



$$(a+x^2)\cdot(b+x)^2 = 0 \xrightarrow{\text{Idempotencia}} (a+x)(b+x) = 0 \xrightarrow{\text{Prop. distributiva}} a\cdot b + x = 0 \to$$

$$\xrightarrow[a\cdot b = 0]{} \boxed{x = 0}$$