UD 5

INFERENCIA

INFERENCIA

Parte 1: Distribuciones en el muestreo

Parte 2: Inferencia sobre una población

Comparación de dos poblaciones

Parte 3: ANOVA (Análisis de la varianza)

Parte 4: Regresión

UD 5 parte 1

Distribuciones en el muestreo

CONCEPTOS GENERALES

POBLACIÓN

Conjunto de objetos (individuos) sobre los que se desea obtener conclusiones.

Ejemplo: todas las piezas que se están fabricando en un cierto proceso.

MUESTRA

Subconjunto formado por parte de los objetos de una población.
Ejemplo: 10 piezas tomadas aleatoriamente del proceso.

La muestra debe ser "representativa" de la población.

Única forma de garantizar "representatividad": muestreo aleatorio.

CONCEPTOS GENERALES

Una muestra se dice que es aleatoria si puede considerarse que todos los individuos de la población han tenido la misma probabilidad de estar incluidos en la muestra y si, además, dichosindividuos han sido seleccionados independientemente unos de otros.

La muestra debe ser "representativa" de la población.

Única forma de garantizar "representatividad": muestreo aleatorio.

4'

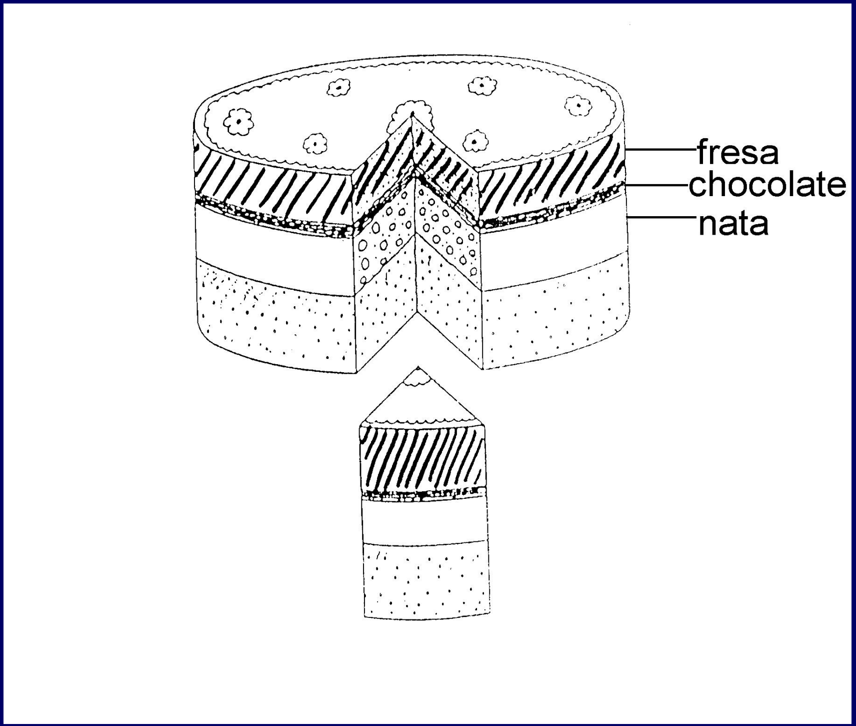
OBJETO DEL MUESTREO

Obtener conclusiones precisas y fiables sobre las características de la población (al menor coste), basadas en el análisis de la muestra.

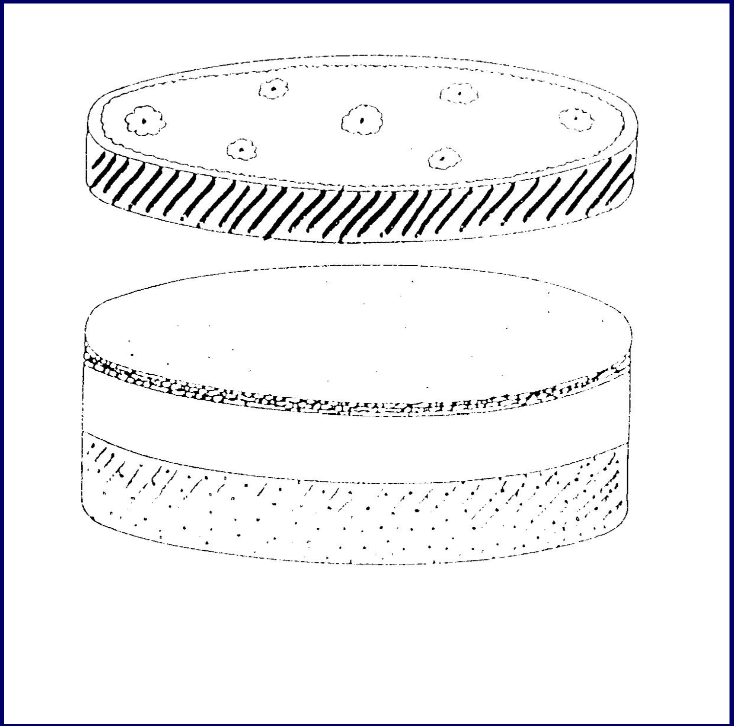
INFERENCIA ESTADÍSTICA

Proceso de razonamiento para obtener conclusiones sobre la población (con un margen de error conocido), basado en el análisis de muestras tomadas de la población.

REGLA DE ORO DEL MUESTREO



LA MUESTRA DEBE SER REPRESENTATIVA DE TODO EL CONJUNTO



EJEMPLO DE UN PÉSIMO MUESTREO

Muestreo para medir la audiencia en TV:

http://www.elmundo.es/elmundo/2011/06/12/television/1307893647.html

CARACTERÍSTICAS DEL MUESTREO

- **ALEATORIO**

  Cualquier individuo de la población debe tener la misma probabilidad de ser parte de la muestra.

- **TAMAÑO DE MUESTRA ADECUADO según:**

- Tamaño de la población a estudiar
- Variabilidad de la característica evaluada
- Error máximo de la estimación

EJEMPLO: ¿Cómo seleccionarías 100 personas para el programa: “Tengo una pregunta para usted”?

Diferencia entre: **muestreo aleatorio simple** (m.a.s.)
muestreo aleatorio estratificado (ej. estratos sociales)

CARACTERÍSTICAS DEL MUESTREO

Diferencia entre: **muestreo aleatorio simple** (m.a.s.)

muestreo aleatorio estratificado (ej. estratos sociales)

Es un muestreo que se utiliza cuando en la población se pueden distinguir subgrupos o subpoblaciones claramente identificables. Mediante este método de muestreo, la selección de los elementos que van a formar parte de la muestra se realiza para y dentro de cada estrato, sin dejar ningún estrato sin muestrear.

Cada individuo sólo puede pertenecer a un estrato.

El resultado de su estudio muestra cómo se comporta una característica o variable en una población en los distintos estratos en los que se ha dividido la población.

El tamaño de la muestra de cada estrato es proporcional al tamaño de la población del estrato si se compara con la población total.

7'

EJEMPLO:

Para estudiar si el proceso de fabricación de un cierto tipo de pieza funciona correctamente, se toman aleatoriamente 10 piezas, siendo la longitud (en mm) los siguientes valores:

348.3 378.9 329.6 379.3 348.8 367.7 358.4 378.2 377.9 341.8

La media muestral es: $\bar{x} = 360.89 \text{ mm}$

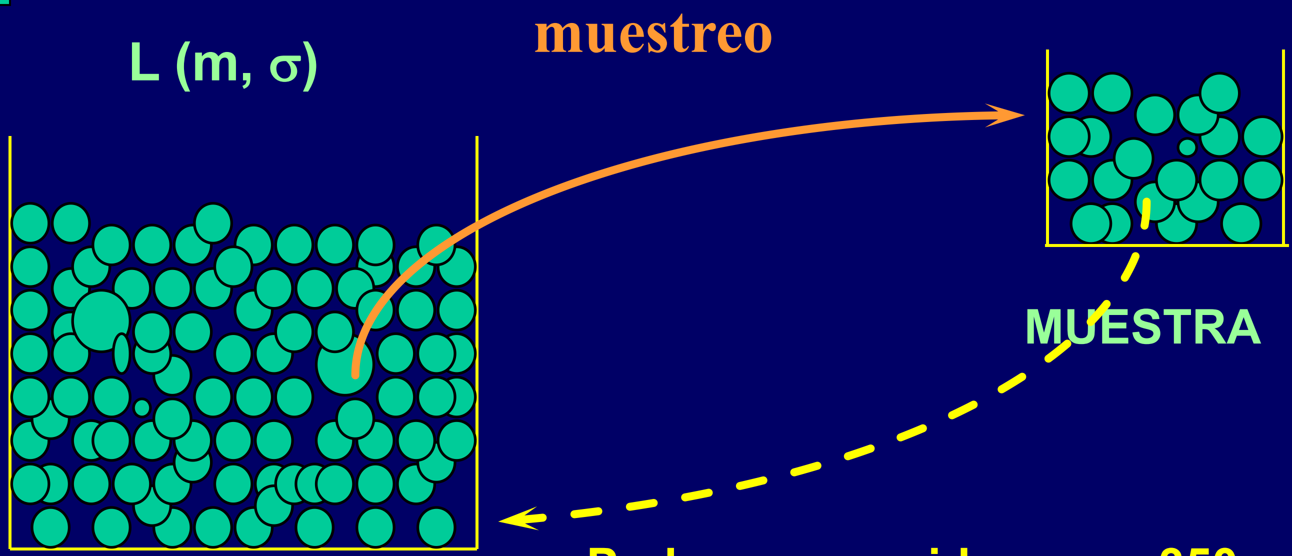
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

La desviación típica muestral es: $s = 18.11 \text{ mm}$

¿Podemos considerar que la media poblacional de la longitud de las piezas es 350 mm, que es el valor nominal?

$$S^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{X})^2}{N-1}$$

¿Podemos considerar que la desviación típica poblacional de la longitud de las piezas es 15 mm?



$\overline{x} = 360.89$ mm

$s = 18.11$ mm

POBLACIÓN DE PIEZAS

¿Podemos considerar m= 350 mm?

¿Podemos considerar σ = 15 mm?

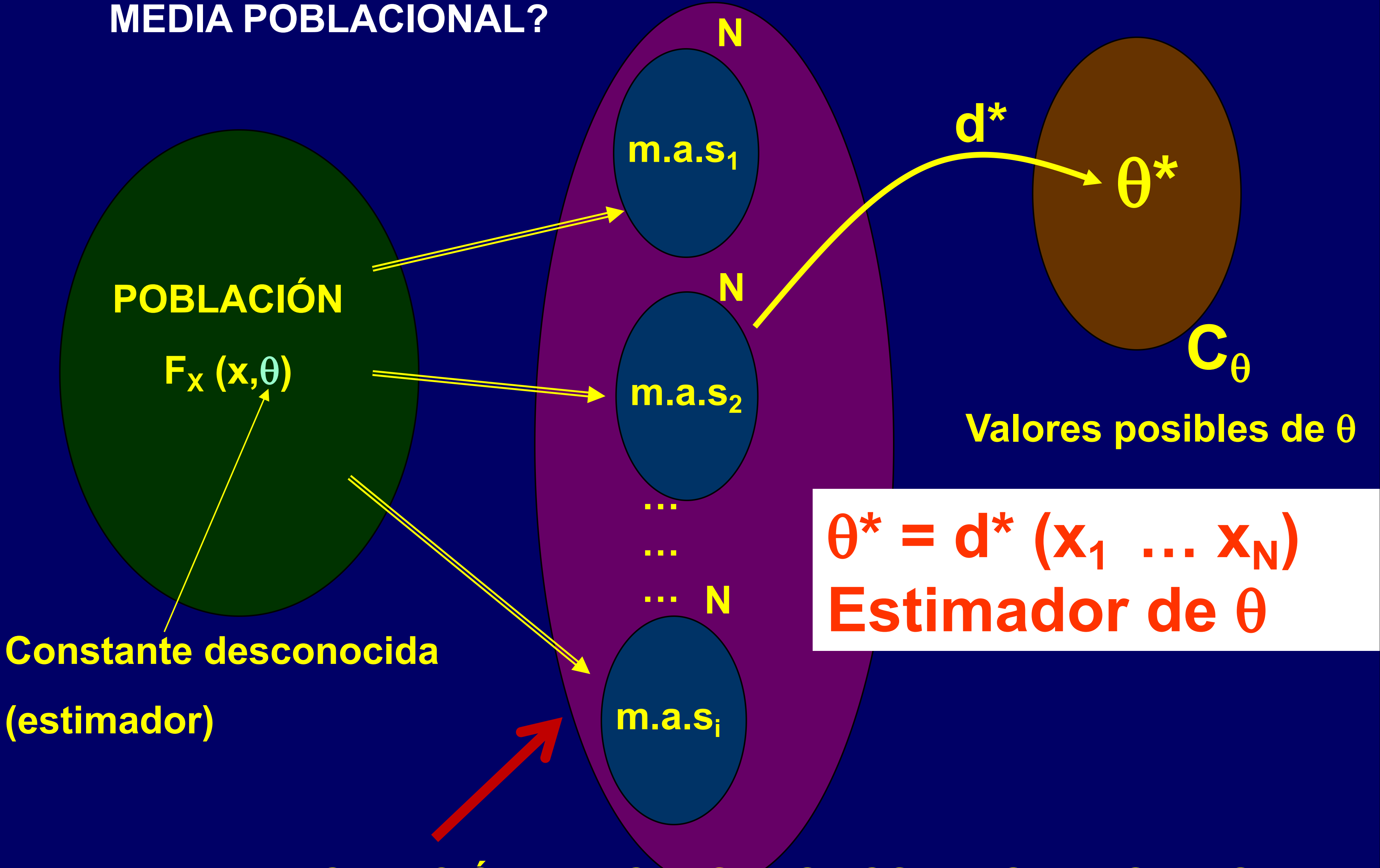
Dependerá de ...

En qué medida la media ($\overline{x}$) y la desviación típica (s) de una muestra difieran de la media (m) y la desviación típica (σ) de la población, respectivamente.

De una misma población es posible "a priori" obtener una gran cantidad de muestras diferentes de tamaño N (de hecho la cantidad es infinita si lo es la población original).
Existe por tanto una población de posibles muestras, o sea una nueva población cuyos individuos son dichas muestras.

A cada individuo de esta nueva población se le puede hacer corresponder una función o valores derivados de cálculos numéricos, por ejemplo la media muestral X o la desviación típica muestral S de la muestra considerada
Estas características muestrales (X y S) serán, por tanto, nuevas variables aleatorias.

¿ES LA MEDIA MUESTRAL EL MEJOR ESTIMADOR DE LA MEDIA POBLACIONAL?



E_X: POBLACIÓN DE TODAS LAS POSIBLES MUESTRAS DE TAMAÑO N EXTRAÍDAS DE LA POBLACIÓN

Es muy importante comprender bien esta idea: **Cualquier función o valor derivados de cálculos numéricos de los valores muestrales (como por ejemplo las características muestrales. X o S) obtenidos de cada muestra (denominado "estadístico"), es una nueva variable aleatoria* , variable cuya distribución dependerá de:**

- **La DISTRIBUCIÓN existente en la población muestreada**
- **Del tamaño de la muestra**

***cada uno de sus valores se obtendrá de una muestra de las N disponibles (población de muestras).**

Queremos saber cuál es la longitud media de las piezas fabricadas en cierto proceso. Para ello, se toma una muestra de 4 piezas y se mide la longitud de cada una (x_i).

¿Cuál es el mejor estimador de la media poblacional, m ?

θ^* (estimador de θ) es **insesgado** si: $E(\theta^*) = \theta$

$$m^* = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

Estimador insesgado, consistente de mínima varianza

$$m^* = \frac{x_{min} + x_{max}}{2}$$

$$m^* = mediana\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Estimadores insesgados
Pero, ¿cuál de todos es el "mejor" estimador?

Insesgado si la distrib. es Normal

$$m^* = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)^{1/4}$$

insesgado?

$$m^* = \min\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Estimador sesgado: si n es alto, aumenta la desviación respecto a m

Sesgo $(\theta^*, \theta) = E(\theta^*) - \theta$

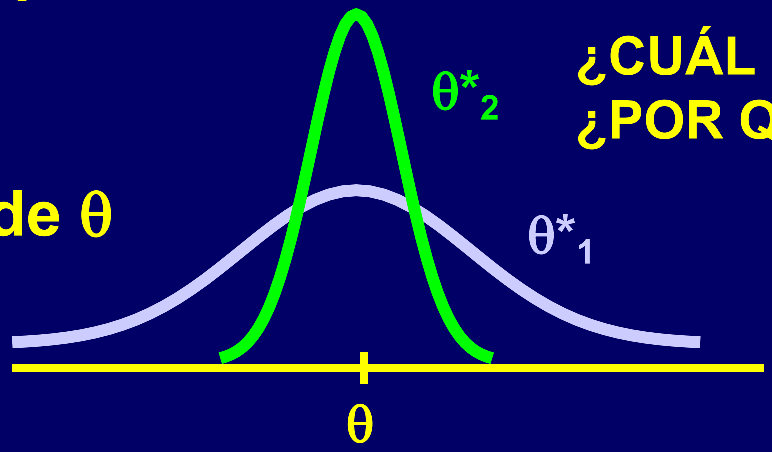
Sesgo $(\theta^* , \theta) = E(\theta^*) - \theta$

Se llama sesgo de un estimador a la diferencia entre su esperanza matemática y el valor numérico del parámetro que estima. Un estimador cuyo sesgo es nulo se llama insesgado o centrado. El no tener sesgo (VALOR NULO) es una propiedad deseable de los estimadores.

¿Cómo podemos evaluar la bondad de un estimador θ* usado para estimar θ?

Si θ^*_1 y θ^*_2

son 2 estimadores de θ



¿CUÁL ES MEJOR?
¿POR QUÉ?

El mejor es el estimador **insesgado**, de **mínima varianza** y **consistente**

$$\lim_{n\to\infty} \sigma^2(\hat{\theta}) = 0$$

- La media muestral es el mejor estimador de m
- La varianza muestral es el mejor estimador de σ^2

$$\hat{m} = \overline{X} \qquad \hat{\sigma}^2 = S^2_{n-1} \qquad \hat{P} = p$$

Si la población muestreada tiene de media m y de varianza σ^2 , cada una de las X_i que constituye una muestra cualquiera, será el valor observado de una variable aleatoria con dichas media y varianza.

Como la media de una suma de variables es la suma de las medias, y la constante 1/N puede salir fuera al hallar esperanza matemática, se obtiene inmediatamente el siguiente importante resultado:

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_N}{N}\right) = \frac{E(X_1) + \ldots + E(X_N)}{N} = \frac{m + \ldots + m}{N} = m$$

Por tanto, la esperanza = media de la media muestral es la media poblacional.

$$\boxed{E(\overline{X}) = m}$$

Por otra parte, aplicando las propiedades de la varianza vistas previamente*, se obtiene:

$$\mathrm{Var}\left(\overline{X}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_N}{N}\right) = \frac{\mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_N)}{N^2}$$

$$= \frac{\sigma^2 + \ldots + \sigma^2}{N^2} = \frac{N\sigma^2}{N^2} = \frac{\sigma^2}{N}$$

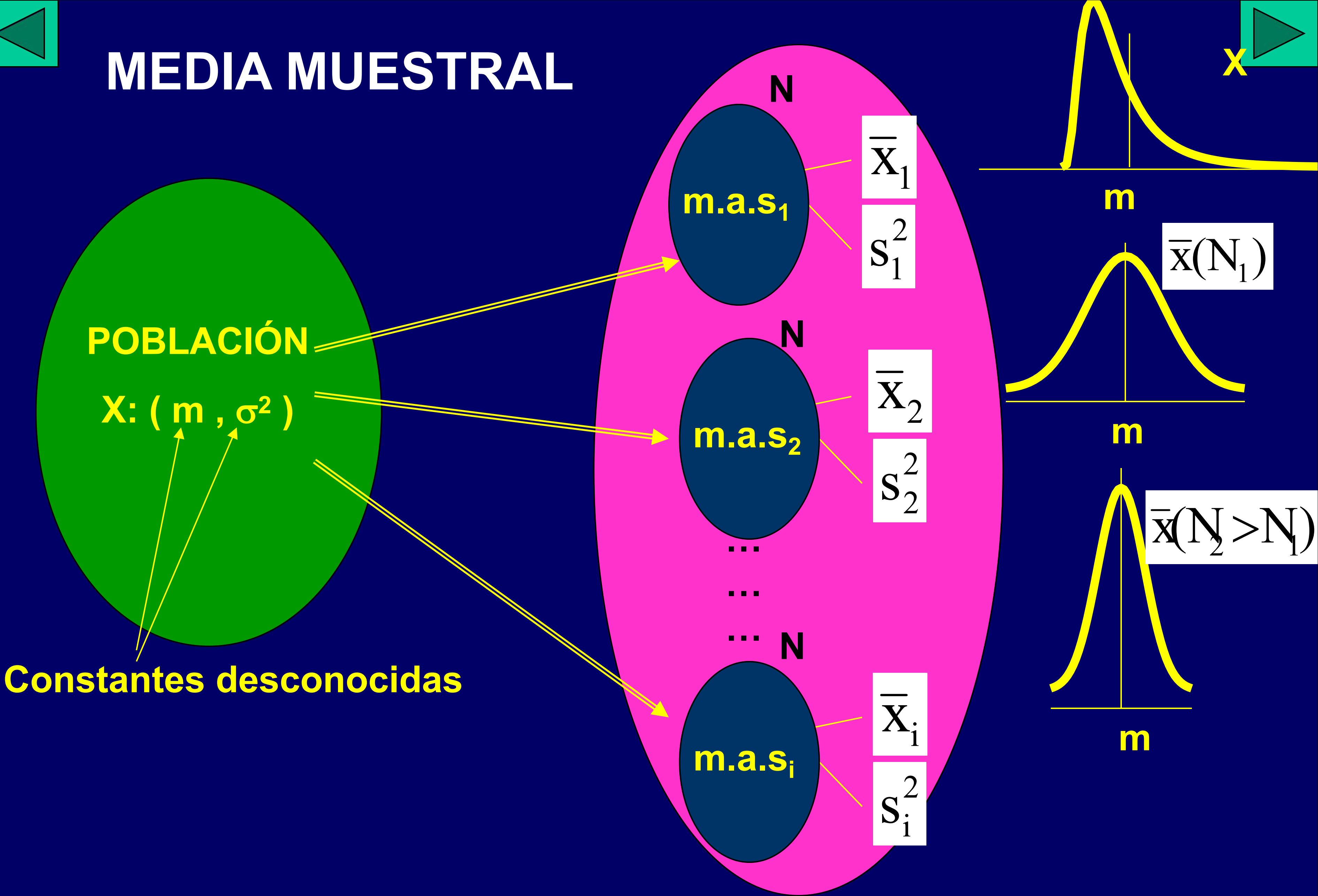
La varianza de la media muestral es la varianza de la población dividida por el tamaño N de la muestra.

$$\boxed{\sigma^2\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{N}}$$

A medida que aumenta N disminuirá la varianza de la media muestral y resultará más improbable dicha media muestral tome valores que difieran mucho de la media poblacional m (son más "fiables" las conclusiones obtenidas a partir de una muestra grande que las derivadas de una muestra pequeña).

* Si $Y = a_0 \pm a_1 \cdot X_1 \pm a_2 \cdot X_2 \Rightarrow \sigma^2_Y = a_1^2 . \sigma^2_{X_1} + a_2^2 . \sigma^2_{X_2} \pm 2.a_1.a_2.\mathrm{Cov}_{X_1 X_2}$

MEDIA MUESTRAL



POBLACIÓN DE TODAS LAS POSIBLES MUESTRAS

DISTRIBUCIÓN DE $\overline{X}$

LA MEDIA MUESTRAL SE CALCULA COMO:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} = \frac{\sum X_i}{N}$$

CADA UNO DE ESTOS X_i QUE CONSTITUYE LA MUESTRA, SERÁ EL VALOR OBSERVADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON MEDIA m Y VARIANZA σ^2.

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}\right) = \frac{m + m + \ldots + m}{N} = m$$

LA MEDIA DE LA MEDIA MUESTRAL ES LA MEDIA POBLACIONAL

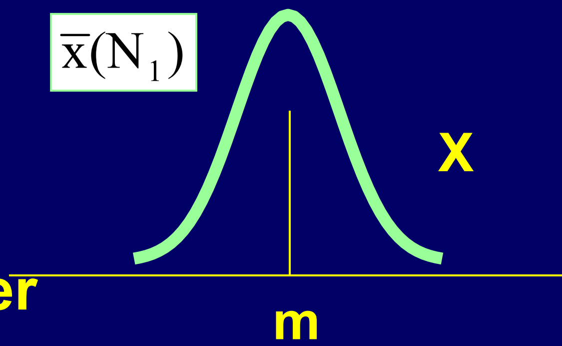
(para cualquier tipo de distribución de X)

$$\sigma^2(\overline{X})=\sigma^2\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_N}{N}\right)\underset{\text{independencia}}{=}\frac{1}{N^2}\left(\sigma^2(X_1)+\ldots+\sigma^2(X_N)\right)=\frac{N\sigma^2}{N^2}=\frac{\sigma^2}{N}$$

LA VARIANZA DE LA MEDIA MUESTRAL ES LA VARIANZA POBLACIONAL DIVIDIDA POR EL TAMAÑO MUESTRAL (para cualquier distribución)

$\overline{X}$ **es la suma de variables aleatorias independientes con la misma distribución**

Si la población es normal, la media muestral se distribuirá normalmente, sea cual sea el tamaño N de la muestra: por ser una transformada lineal de un conjunto (X 1 ,...,X N) de variables normales independientes no hace falta TCL y por tanto se puede tipificar.



$$\frac{\overline{x}-m}{\sigma/\sqrt{N}}\sim N(0,1)$$

$$\sigma^2(\overline{X}) = \sigma^2\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}\right) = \frac{1}{N^2}(\sigma^2(X_1) + \ldots + \sigma^2(X_N)) = \frac{N\sigma^2}{N^2} = \frac{\sigma^2}{N}$$

independencia

LA VARIANZA DE LA MEDIA MUESTRAL ES LA VARIANZA POBLACIONAL DIVIDIDA POR EL TAMAÑO MUESTRAL

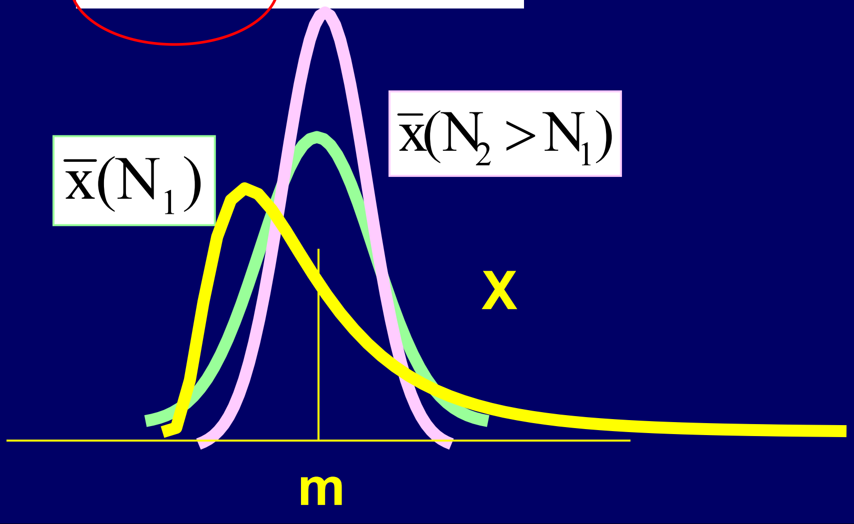
(para cualquier distribución)

$\overline{X}$ **es la suma de variables aleatorias independientes con la misma distribución**

$$\overline{X} \underset{\substack{N\to\infty \\ (CLT)}}{\approx} N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$$

Si la población NO es normal se puede aplicar con

N->infinito el TCL



EJERCICIO :

En un proceso de pintura de automóviles, el espesor de la capa de pintura sigue una distribución normal de media 100 μm y desviación típica 5 μm. El control de calidad de este proceso se lleva a cabo obteniendo la media de 4 medidas de 4 automóviles seleccionados aleatoriamente. El proceso se considera correcto si la media obtenida es > 95 μm. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar el proceso?

EJERCICIO :

En un proceso de pintura de automóviles, el espesor de la capa de pintura sigue una distribución normal de media 100 μm y desviación típica 5 μm. El control de calidad de este proceso se lleva a cabo obteniendo la media de 4 medidas de 4 automóviles seleccionados aleatoriamente. El proceso se considera correcto si la media obtenida es > 95 μm. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar el proceso?

SOLUCIÓN:

Media de las 4 medidas:

$$\overline{X} \equiv N\left(100, \frac{5}{\sqrt{4}}\right) \equiv N(100, 2.5)$$

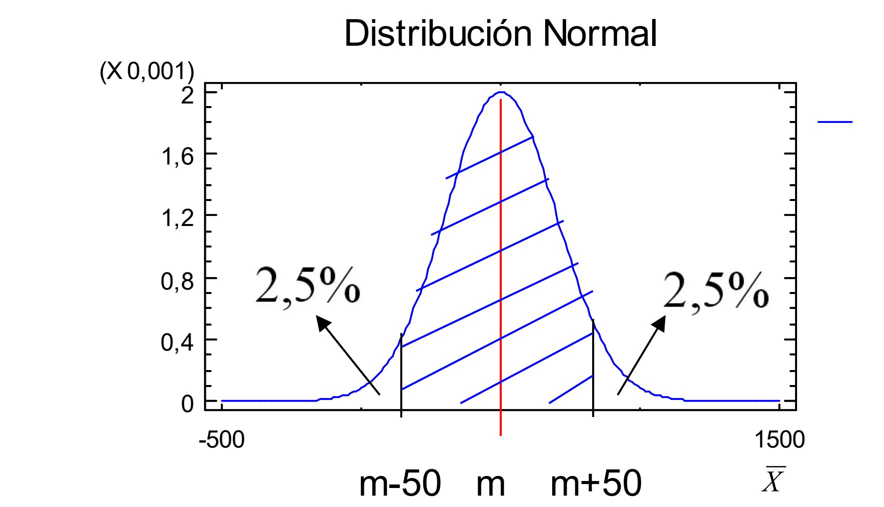
Probabilidad de rechazar el proceso:

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{X}} \leq 95\right) = \phi\left(\frac{95-100}{2.5}\right) = \phi(-2) = 0.0228$$

EJERCICIO :

Para conocer los gastos medios de las familias españolas en las vacaciones de verano, se eligen al azar N familias y se les pregunta por sus gastos. Se asume que la desviación típica poblacional es σ = 200 €.

¿Cuál debería ser N para que la diferencia (en valor absoluto) entre la media muestral obtenida y la media poblacional desconocida sea < 50 € con una probabilidad del 95%?



$$P\left(\left|\left(\bar{x}-m\right)\right| \leq 50\right) \geq 0{,}95 \quad \equiv \quad P\left(\bar{x} \leq m-50\right) \leq 0{,}025 \quad = \phi\left(\frac{(m-50)-m}{\frac{200}{\sqrt{n}}}\right) \leq 0{,}025$$

$$\left(\frac{(m-50)-m}{\frac{200}{\sqrt{n}}}\right) = -1{,}96 \quad \Rightarrow \frac{-50\sqrt{n}}{200} = -1{,}96 \Rightarrow n = 62{,}14 \approx 63 \quad \textit{familias}$$

El tiempo de transferencia de paquetes (ms) de un determinado tamaño a través de la red sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 4$.

a) Si se extrae una muestra aleatoria de tamaño 25, calcular la probabilidad de que la diferencia entre la media poblacional (m) y la media muestral ($\bar{X}$) sea mayor que 2 en valor absoluto.

b) Calcular cuánto debe valer como mínimo N si se desea una probabilidad inferior al 1% de que la diferencia en valor absoluto entre la media muestral y la media poblacional sea superior a 2.

σ =4. N=25

a) Si X es N(m, σ=4) $\Rightarrow$ La media muestral $\overline{X}$ de una muestra aleatoria simple de tamaño 25 es N(m, σ=4/5) , y $\overline{X}$-m será N(0, σ=4/5).

Por tanto:

$P(|\overline{X}-m|>2)= P(|N(0,4/5)|>2)=$

$=P(N(0, 4/5)>2)+P(N(0, 4/5)<-2)=$

$=2P(N(0,4/5)>2)=2\ P(N(0,1)>10/4)=$

$=2\ P(N(0,1)>2.5)=$

$=2 \times 0.0062=$**0.0124**

σ =4. N=25

b) Si la población es normal entonces $\overline{X}$ es $N(m, \frac{4}{\sqrt{N}})$.

$P(|\overline{X}-m|>2)<0{,}01 \Rightarrow 2\,P(\overline{X}-m>2)<0{,}01 \Rightarrow$

$P(\overline{X}-m>2)<0{,}005 \Rightarrow$

$P(N(0,1)>\frac{2}{4/\sqrt{N}})<0{,}005 \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{N}}{2} \geq 2{,}58 \Rightarrow$

$N \geq (2x2{,}58)^2 = 26{,}62$

por lo que el valor de **N mínimo es 27**.

DISTRIBUCIÓN DE s²

$$s^2_{n-1} = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N-1} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{N-1}$$

$$E(s^2_{n-1}) = E\left(\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{N-1}\right) = \frac{1}{N-1} E\left[\sum \left[(X_i - m) - (\overline{X} - m)\right]^2\right] = \ldots = \sigma^2$$

Estimador insesgado

$$E(s^2_n) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$$

Estimador asintóticamente insesgado

LA MEDIA DE LA VARIANZA MUESTRAL ES LA VARIANZA POBLACIONAL

$$\sigma^2(s^2_{n-1}) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

DISTRIBUCIÓN DE s^2

$$E(s_{n-1}^2) = E\left(\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{N-1}\right) = \frac{1}{N-1} E\left[\sum \left[(X_i - m) - (\overline{X} - m)\right]^2\right] = \ldots = \sigma^2$$

Se demuestra con relativa facilidad que la media de la varianza muestral es la varianza de la población

LA MEDIA DE LA VARIANZA MUESTRAL ES LA VARIANZA POBLACIONAL

DISTRIBUCIÓN DE s^2

cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito el sesgo tiende a cero, se dice que el estimador es asintóticamente insesgado o asintóticamente centrado

$$E(s_n^2) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$$

Estimador asintóticamente insesgado

LA VARIANZA DE LA VARIANZA MUESTRAL TIENDE A CERO CUANDO N TIENDE A INFINITO

$$\sigma^2(s_{n-1}^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

SUMA DE VARIABLES NORMALES

Si X_1, X_2, ..., X_n son variables aleatorias con distribución Normal de media m_x y desviación típica σ igual para todas ellas, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n \cdot m_x, \sqrt{n} \cdot \sigma\right)$$

Por tanto:

(para cualquier valor de n)

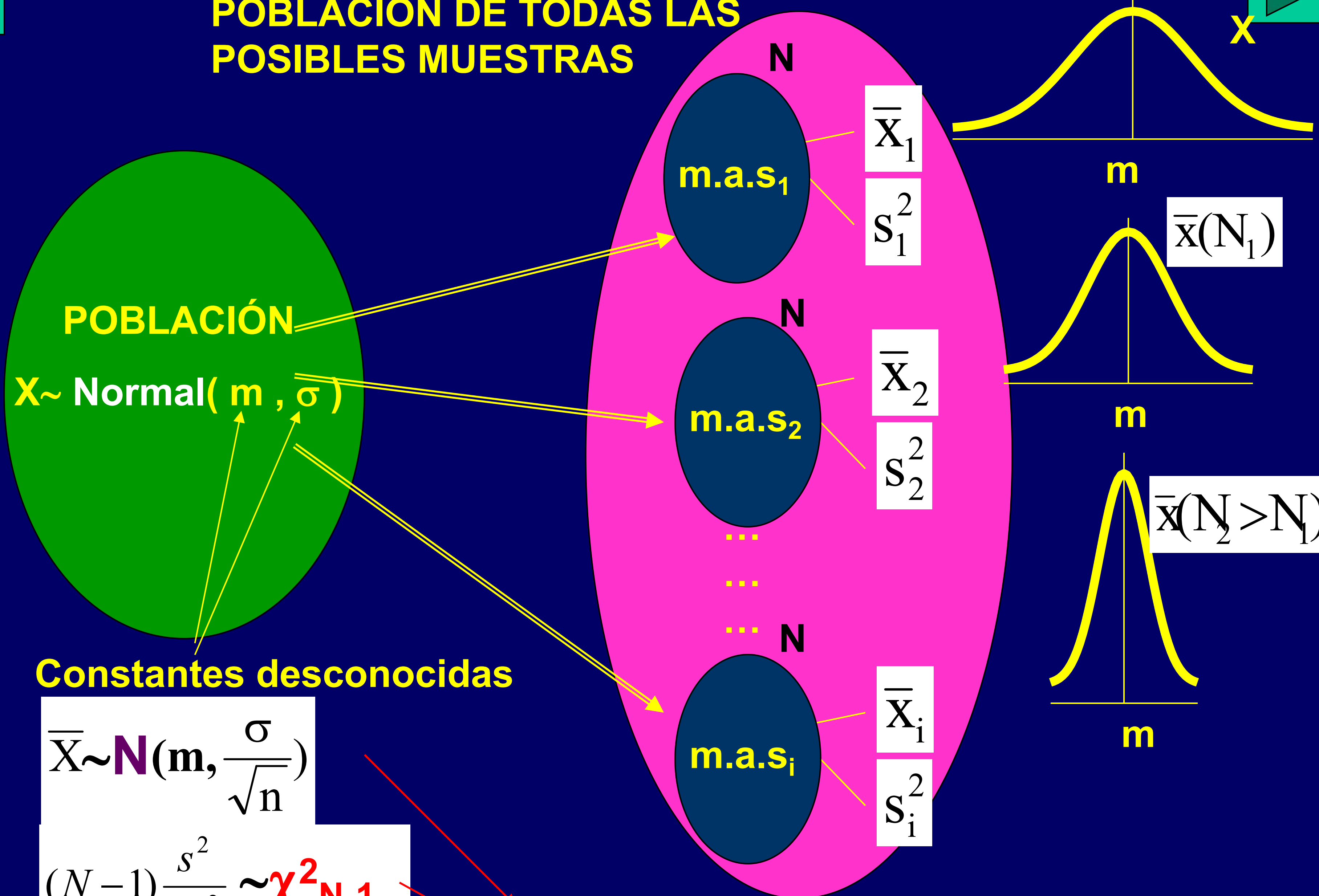
$$\overline{X}_n \sim N\left(m_x, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{\overline{x} - m}{\sigma / \sqrt{n}}_n \sim N(0; \ 1)$$

Si X no se distribuye Normalmente:

$$\overline{X} \underset{\substack{N \to \infty \\ (CLT)}}{\approx} N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$$

POBLACIÓN DE TODAS LAS POSIBLES MUESTRAS



$$\overline{X} \sim \mathbf{N}\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(N-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-1}$$

ES SÓLO CIERTO SI X ES NORMAL

Para estudiar la pauta de variabilidad de parámetros estadísticos que aparecen en el muestreo de variables normales,

Es necesario conocer 3 nuevas distribuciones de probabilidad:

- χ^2 (distribución gi-cuadrado de Pearson)
- t de Student
- F de Fisher (o F de Snedecor)

IMPORTANTE:

ESTAS DISTRIBUCIONES NO MODELIZAN LA PAUTA DE VARIABILIDAD DE NINGUNA VARIABLE REAL; APARECEN EN EL PROCESO DE INFERENCIA ESTADÍSTICA.

DISTRIBUCIÓN χ^2

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \ ; \ \mathrm{X_i} \sim N(0,1) \quad \text{independientes}$$

$$E(\chi_n^2) = n$$

$$\sigma^2(\chi_n^2) = 2n$$

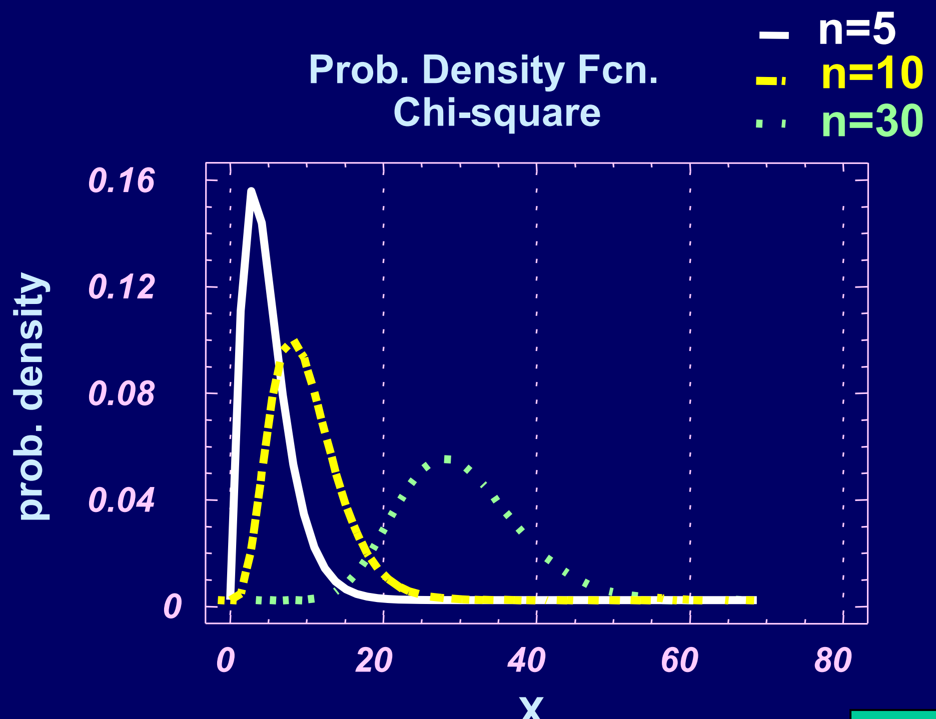
$$\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)$$

(para n>50, buena aproximación)

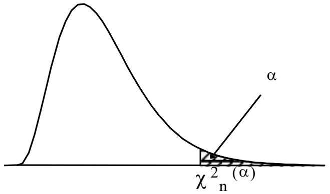
(en el formulario, hasta n = 600)

La distribución χ2 aparece en el estudio de la distribución de la varianza S^2 de una muestra de una población normal.

$$(N-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-1}$$



DISTRIBUCIÓN χ^2 DE PEARSON



n	0.9995	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.50	0.10	0.050	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.455	2.706	3.842	5.024	6.635	7.879	10.827	12.115
2	0.001	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	1.386	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597	13.815	15.201
3	0.015	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266	17.731
4	0.064	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466	19.998
5	0.158	0.210	0.412	0.554	0.831	1.146	1.610	4.352	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750	20.515	22.106
6	0.299	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457	24.102
7	0.485	0.599	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321	26.018
8	0.710	0.857	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124	27.867
9	0.972	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877	29.667
10	1.265	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588	31.419
11	1.587	1.834	2.603	3.054	3.816	4.575	5.578	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264	33.138
12	1.935	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909	34.821
13	2.305	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.527	36.477
14	2.697	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.124	38.109
15	3.107	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578	32.802	37.698	39.717
16	3.536	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	15.339	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252	41.308
17	3.980	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.791	42.881
18	4.439	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312	44.434
19	4.913	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.819	45.974
20	5.398	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.314	47.498
21	5.895	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	20.337	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.796	49.010
22	6.404	6.983	8.643	9.543	10.982	12.338	14.042	21.337	30.813	33.925	36.781	40.289	42.796	48.268	50.510
23	6.924	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	22.337	32.007	35.173	38.076	41.638	44.181	49.728	51.999
24	7.453	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	23.337	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558	51.179	53.478
25	7.991	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	24.337	34.382	37.653	40.647	44.314	46.928	52.619	54.948
26	8.537	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	25.337	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.051	56.407
27	9.093	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	26.336	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.475	57.856
28	9.656	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	27.336	37.916	41.337	44.461	48.278	50.994	56.892	59.299
29	10.227	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	28.336	39.088	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301	60.734
30	10.804	11.588	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	29.336	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.702	62.160
40	16.906	17.917	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	39.335	51.805	55.759	59.342	63.691	66.766	73.403	76.096
50	23.461	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	49.335	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.660	89.560
60	30.339	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	59.335	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.608	102.697
70	37.467	39.036	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	69.335	85.527	90.531	95.023	100.43	104.22	112.32	115.58
80	44.792	46.520	51.172	53.540	57.153	60.392	64.278	79.334	96.578	101.88	106.62	112.32	116.32	124.84	128.26
90	52.277	54.156	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	89.334	107.56	113.15	118.14	124.11	128.29	137.20	140.78
100	59.895	61.918	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	99.334	118.49	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45	153.16

EJERCICIOS:

1) Calcular la mediana de una χ^2_5 y de χ^2_{50}

2) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una varianza muestral >10 si se toma una muestra de tamaño 20 de una población Normal con $\sigma^2 = 5$?

3) ¿Cuál es la probabilidad de que la varianza muestral supere al triple de la varianza poblacional (de valor 4) de una población Normal si se toma una muestra de tamaño 18?

EJERCICIOS:

1) Calcular la mediana de una χ^2_5 y de χ^2_{50}

n	0.9995	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.50	0.10	0.050	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.455	2.706	3.842	5.024	6.635	7.879	10.827	12.115
2	0.001	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	1.386	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597	13.815	15.201
3	0.015	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266	17.731
4	0.064	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466	19.998
5	0.158	0.210	0.412	0.554	0.831	1.146	1.610	$\boxed{4.352}$	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750	20.515	22.106
6	0.299	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457	24.102
7	0.485	0.599	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321	26.018
8	0.710	0.857	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124	27.867
9	0.972	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877	29.667
10	1.265	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588	31.419
11	1.587	1.834	2.603	3.054	3.816	4.575	5.578	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264	33.138
12	1.935	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909	34.821
13	2.305	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.527	36.477
14	2.697	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.124	38.109
15	3.107	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578	32.802	37.698	39.717
16	3.536	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	15.339	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252	41.308
17	3.980	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.791	42.881
18	4.439	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312	44.434
19	4.913	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.819	45.974
20	5.398	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.314	47.498
21	5.895	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	20.337	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.796	49.010
22	6.404	6.983	8.643	9.543	10.982	12.338	14.042	21.337	30.813	33.925	36.781	40.289	42.796	48.268	50.510
23	6.924	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	22.337	32.007	35.173	38.076	41.638	44.181	49.728	51.999
24	7.453	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	23.337	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558	51.179	53.478
25	7.991	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	24.337	34.382	37.653	40.647	44.314	46.928	52.619	54.948
26	8.537	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	25.337	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.051	56.407
27	9.093	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	26.336	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.475	57.856
28	9.656	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	27.336	37.916	41.337	44.461	48.278	50.994	56.892	59.299
29	10.227	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	28.336	39.088	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301	60.734
30	10.804	11.588	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	29.336	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.702	62.160
40	16.906	17.917	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	39.335	51.805	55.759	59.342	63.691	66.766	73.403	76.096
50	23.461	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	$\boxed{49.335}$	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.660	89.560
60	30.339	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	59.335	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.608	102.697

EJERCICIOS:

2 y 3) Se resuelven a partir de:

$$(N-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-1}$$

El ratio varianza muestral / varianza poblacional y el dato de N permite obtener un valor de Chi cuadrado con el que consultar la probabilidad a partir de la tabla.

DISTRIBUCIÓN t-STUDENT

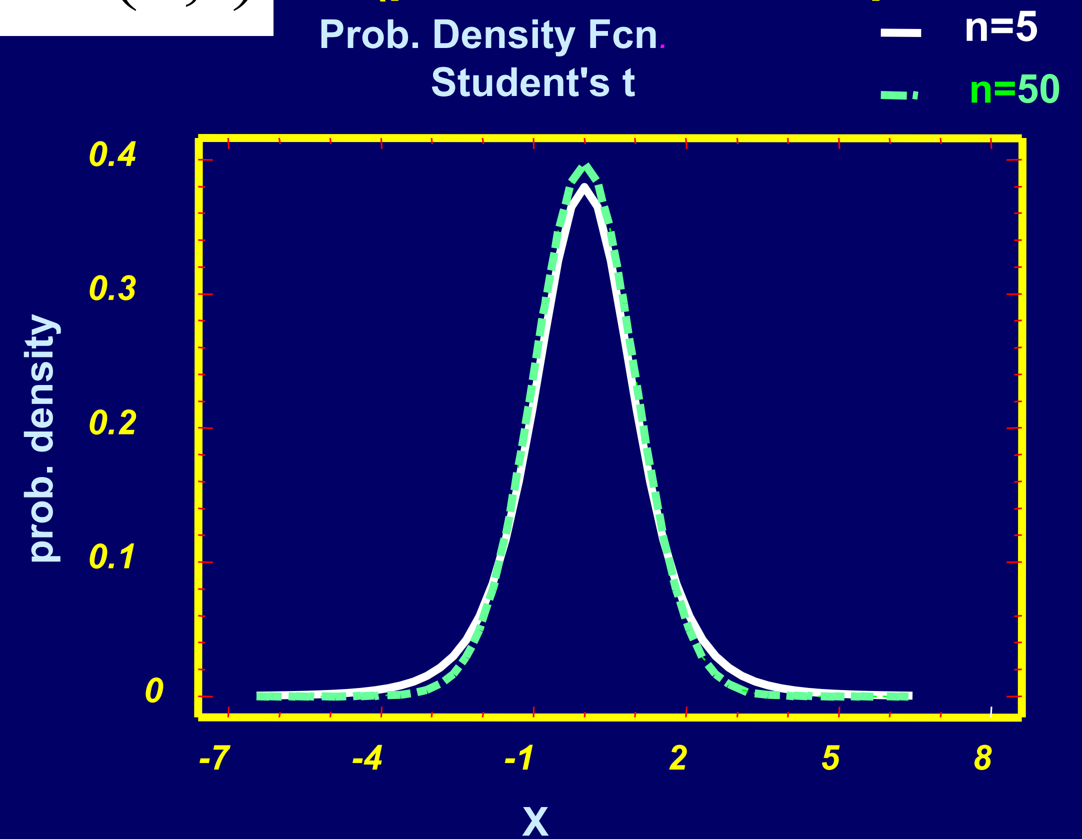
$$t_n = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}} \quad \text{independientes}$$

$$E(t_n) = 0$$

$$\sigma^2(t_n) = \frac{n}{n-2} \quad (\text{n} > 2)$$

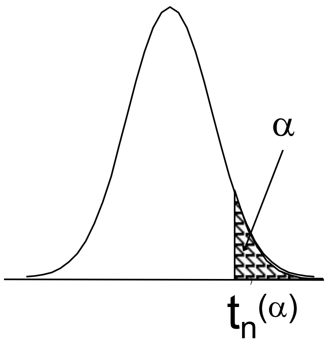
$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)$$

(para n>30, buena aproximación)



Distribución t de Student

	Probabilidad de una cola												
n	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.45	0.475
1	636.578	318.289	63.656	31.821	12.706	6.314	3.078	1.376	1.000	0.727	0.325	0.158	0.079
2	31.600	22.328	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	1.061	0.816	0.617	0.289	0.142	0.071
3	12.924	10.214	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.978	0.765	0.584	0.277	0.137	0.068
4	8.610	7.173	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.941	0.741	0.569	0.271	0.134	0.067
5	6.869	5.894	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.920	0.727	0.559	0.267	0.132	0.066
6	5.959	5.208	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.906	0.718	0.553	0.265	0.131	0.065
7	5.408	4.785	3.499	2.998	2.365	1.895	1.415	0.896	0.711	0.549	0.263	0.130	0.065
8	5.041	4.501	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.889	0.706	0.546	0.262	0.130	0.065
9	4.781	4.297	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.883	0.703	0.543	0.261	0.129	0.064
10	4.587	4.144	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.879	0.700	0.542	0.260	0.129	0.064
11	4.437	4.025	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.876	0.697	0.540	0.260	0.129	0.064
12	4.318	3.930	3.055	2.681	2.179	1.782	1.356	0.873	0.695	0.539	0.259	0.128	0.064
13	4.221	3.852	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.870	0.694	0.538	0.259	0.128	0.064
14	4.140	3.787	2.977	2.624	2.145	1.761	1.345	0.868	0.692	0.537	0.258	0.128	0.064
15	4.073	3.733	2.947	2.602	2.131	1.753	1.341	0.866	0.691	0.536	0.258	0.128	0.064
16	4.015	3.686	2.921	2.583	2.120	1.746	1.337	0.865	0.690	0.535	0.258	0.128	0.064
17	3.965	3.646	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.863	0.689	0.534	0.257	0.128	0.064
18	3.922	3.610	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.862	0.688	0.534	0.257	0.127	0.064
19	3.883	3.579	2.861	2.539	2.093	1.729	1.328	0.861	0.688	0.533	0.257	0.127	0.064
20	3.850	3.552	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.860	0.687	0.533	0.257	0.127	0.063
21	3.819	3.527	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.859	0.686	0.532	0.257	0.127	0.063
22	3.792	3.505	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.858	0.686	0.532	0.256	0.127	0.063
23	3.768	3.485	2.807	2.500	2.069	1.714	1.319	0.858	0.685	0.532	0.256	0.127	0.063
24	3.745	3.467	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.857	0.685	0.531	0.256	0.127	0.063
25	3.725	3.450	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127	0.063
26	3.707	3.435	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127	0.063
27	3.689	3.421	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.855	0.684	0.531	0.256	0.127	0.063
28	3.674	3.408	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.855	0.683	0.530	0.256	0.127	0.063
29	3.660	3.396	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127	0.063
30	3.646	3.385	2.750	2.457	2.042	1.697	1.310	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127	0.063
40	3.551	3.307	2.704	2.423	2.021	1.684	1.303	0.851	0.681	0.529	0.255	0.126	0.063
60	3.460	3.232	2.660	2.390	2.000	1.671	1.296	0.848	0.679	0.527	0.254	0.126	0.063
120	3.373	3.160	2.617	2.358	1.980	1.658	1.289	0.845	0.677	0.526	0.254	0.126	0.063
∞	3.290	3.090	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282	0.842	0.674	0.524	0.253	0.126	0.063
n	0.001	0.002	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	0.9	0.95



EJERCICIO

Obtener un valor x tal que $P\left(\left|t_{14}\right| > x\right) = 0.05$

El valor absoluto implica que debemos evaluar la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores por encima de x positivo, pero también de que tome valores menores de x negativo (t10 tendrá un valor negativo pero su valor absoluto será positivo).

Esto implica que habrá que valorar las dos colas de una distribución simétrica por lo que a cada cola le corresponde un valor de área (o probabilidad) de 0.025.

Haciendo la consulta en la tabla se obtiene un valor de t (con 14 grados de libertad) de 2.145.

EJERCICIO

	Probabilidad de una cola								
n	**0.0005**	**0.001**	**0.005**	**0.01**	**0.025**	**0.05**	**0.1**	**0.2**	**0.25**
1	636.578	318.289	63.656	31.821	12.706	6.314	3.078	1.376	1.000
2	31.600	22.328	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	1.061	0.816
3	12.924	10.214	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.978	0.765
4	8.610	7.173	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.941	0.741
5	6.869	5.894	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.920	0.727
6	5.959	5.208	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.906	0.718
7	5.408	4.785	3.499	2.998	2.365	1.895	1.415	0.896	0.711
8	5.041	4.501	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.889	0.706
9	4.781	4.297	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.883	0.703
10	4.587	4.144	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.879	0.700
11	4.437	4.025	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.876	0.697
12	4.318	3.930	3.055	2.681	2.179	1.782	1.356	0.873	0.695
13	4.221	3.852	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.870	0.694
14	4.140	3.787	2.977	2.624	$\boxed{2.145}$	1.761	1.345	0.868	0.692
15	4.073	3.733	2.947	2.602	2.131	1.753	1.341	0.866	0.691
16	4.015	3.686	2.921	2.583	2.120	1.746	1.337	0.865	0.690
17	3.965	3.646	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.863	0.689
18	3.922	3.610	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.862	0.688
19	3.883	3.579	2.861	2.539	2.093	1.729	1.328	0.861	0.688
20	3.850	3.552	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.860	0.687
21	3.819	3.527	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.859	0.686
22	3.792	3.505	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.858	0.686
23	3.768	3.485	2.807	2.500	2.069	1.714	1.319	0.858	0.685
24	3.745	3.467	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.857	0.685
25	3.725	3.450	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.856	0.684
26	3.707	3.435	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.856	0.684
27	3.689	3.421	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.855	0.684
28	3.674	3.408	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.855	0.683
29	3.660	3.396	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.854	0.683
30	3.646	3.385	2.750	2.457	2.042	1.697	1.310	0.854	0.683
40	3.551	3.307	2.704	2.423	2.021	1.684	1.303	0.851	0.681
60	3.460	3.232	2.660	2.390	2.000	1.671	1.296	0.848	0.679
120	3.373	3.160	2.617	2.358	1.980	1.658	1.289	0.845	0.677
∞	3.290	3.090	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282	0.842	0.674
n	**0.001**	**0.002**	**0.01**	**0.02**	**0.05**	**0.1**	**0.2**	**0.4**	**0.5**
	Probabilidad de dos colas								

IMPORTANCIA DE ESTA DISTRIBUCIÓN:

Si $\overline{X}$ y s son la media y la desviación típica de una muestra de tamaño N tomadas de una población Normal (m , σ) , el estadístico:

$$\frac{\overline{X}-m}{s/\sqrt{N}} \sim t_{N-1}$$

IMPORTANTE:

COMPROBAR LA ANALOGÍA ENTRE:

$$\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{N}} \sim N(0,1)$$

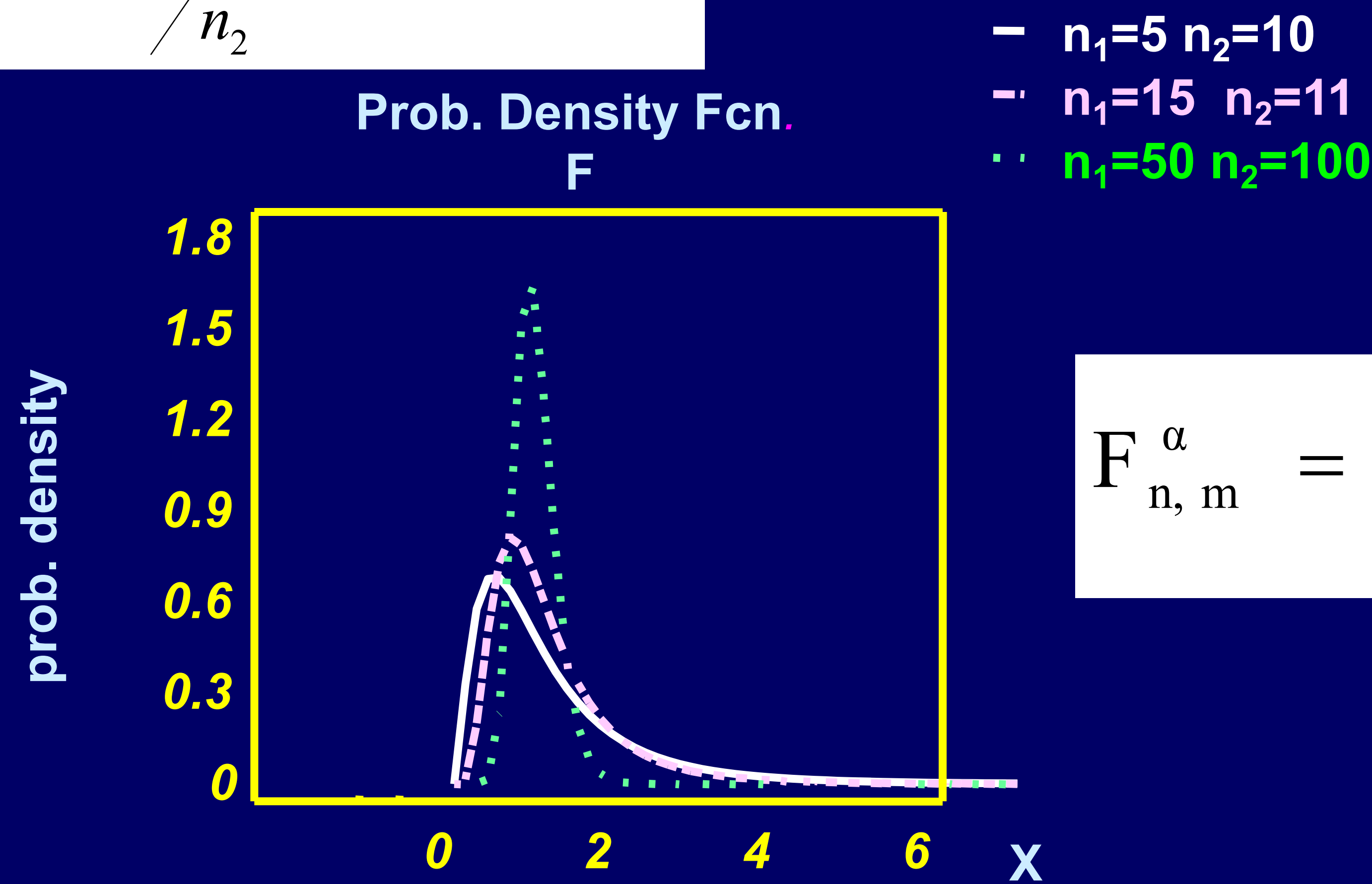
Y

$$\frac{\overline{X}-m}{s/\sqrt{N}} \sim t_{N-1}$$

Distribución F de Fisher

$$F_{n_1,n_2} = \frac{\chi^2_{n_1}/n_1}{\chi^2_{n_2}/n_2} \quad \text{independientes}$$

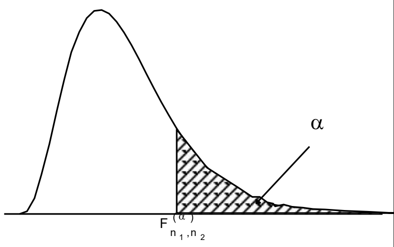
$$E(F_{n_1,n_2}) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad (n_2 > 2)$$



$$F^{\alpha}_{n,\,m} = \frac{1}{F^{1-\alpha}_{m,\,n}}$$

Distribución F de Fisher

	Grados de libertad de la varianza mayor															
	1		2		3		4		5		6		7		8	
p→	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01
1	161.45	4052.2	199.50	4999.3	215.71	5403.5	224.58	5624.3	230.16	5763.9	233.99	5858.9	236.77	5928.3	238.88	5980.9
2	18.51	98.50	19.00	99.00	19.16	99.16	19.25	99.25	19.30	99.30	19.33	99.33	19.35	99.36	19.37	99.38
3	10.13	34.12	9.55	30.82	9.28	29.46	9.12	28.71	9.01	28.24	8.94	27.91	8.89	27.67	8.85	27.49
4	7.71	21.20	6.94	18.00	6.59	16.69	6.39	15.98	6.26	15.52	6.16	15.21	6.09	14.98	6.04	14.80
5	6.61	16.26	5.79	13.27	5.41	12.06	5.19	11.39	5.05	10.97	4.95	10.67	4.88	10.46	4.82	10.29
6	5.99	13.75	5.14	10.92	4.76	9.78	4.53	9.15	4.39	8.75	4.28	8.47	4.21	8.26	4.15	8.10
7	5.59	12.25	4.74	9.55	4.35	8.45	4.12	7.85	3.97	7.46	3.87	7.19	3.79	6.99	3.73	6.84
8	5.32	11.26	4.46	8.65	4.07	7.59	3.84	7.01	3.69	6.63	3.58	6.37	3.50	6.18	3.44	6.03
9	5.12	10.56	4.26	8.02	3.86	6.99	3.63	6.42	3.48	6.06	3.37	5.80	3.29	5.61	3.23	5.47
10	4.96	10.04	4.10	7.56	3.71	6.55	3.48	5.99	3.33	5.64	3.22	5.39	3.14	5.20	3.07	5.06
11	4.84	9.65	3.98	7.21	3.59	6.22	3.36	5.67	3.20	5.32	3.09	5.07	3.01	4.89	2.95	4.74
12	4.75	9.33	3.89	6.93	3.49	5.95	3.26	5.41	3.11	5.06	3.00	4.82	2.91	4.64	2.85	4.50
13	4.67	9.07	3.81	6.70	3.41	5.74	3.18	5.21	3.03	4.86	2.92	4.62	2.83	4.44	2.77	4.30
14	4.60	8.86	3.74	6.51	3.34	5.56	3.11	5.04	2.96	4.69	2.85	4.46	2.76	4.28	2.70	4.14
15	4.54	8.68	3.68	6.36	3.29	5.42	3.06	4.89	2.90	4.56	2.79	4.32	2.71	4.14	2.64	4.00
16	4.49	8.53	3.63	6.23	3.24	5.29	3.01	4.77	2.85	4.44	2.74	4.20	2.66	4.03	2.59	3.89
17	4.45	8.40	3.59	6.11	3.20	5.19	2.96	4.67	2.81	4.34	2.70	4.10	2.61	3.93	2.55	3.79
18	4.41	8.29	3.55	6.01	3.16	5.09	2.93	4.58	2.77	4.25	2.66	4.01	2.58	3.84	2.51	3.71
19	4.38	8.18	3.52	5.93	3.13	5.01	2.90	4.50	2.74	4.17	2.63	3.94	2.54	3.77	2.48	3.63
20	4.35	8.10	3.49	5.85	3.10	4.94	2.87	4.43	2.71	4.10	2.60	3.87	2.51	3.70	2.45	3.56
21	4.32	8.02	3.47	5.78	3.07	4.87	2.84	4.37	2.68	4.04	2.57	3.81	2.49	3.64	2.42	3.51
22	4.30	7.95	3.44	5.72	3.05	4.82	2.82	4.31	2.66	3.99	2.55	3.76	2.46	3.59	2.40	3.45
23	4.28	7.88	3.42	5.66	3.03	4.76	2.80	4.26	2.64	3.94	2.53	3.71	2.44	3.54	2.37	3.41
24	4.26	7.82	3.40	5.61	3.01	4.72	2.78	4.22	2.62	3.90	2.51	3.67	2.42	3.50	2.36	3.36
25	4.24	7.77	3.39	5.57	2.99	4.68	2.76	4.18	2.60	3.85	2.49	3.63	2.40	3.46	2.34	3.32
26	4.23	7.72	3.37	5.53	2.98	4.64	2.74	4.14	2.59	3.82	2.47	3.59	2.39	3.42	2.32	3.29
27	4.21	7.68	3.35	5.49	2.96	4.60	2.73	4.11	2.57	3.78	2.46	3.56	2.37	3.39	2.31	3.26
28	4.20	7.64	3.34	5.45	2.95	4.57	2.71	4.07	2.56	3.75	2.45	3.53	2.36	3.36	2.29	3.23
29	4.18	7.60	3.33	5.42	2.93	4.54	2.70	4.04	2.55	3.73	2.43	3.50	2.35	3.33	2.28	3.20
30	4.17	7.56	3.32	5.39	2.92	4.51	2.69	4.02	2.53	3.70	2.42	3.47	2.33	3.30	2.27	3.17
31	4.16	7.53	3.30	5.36	2.91	4.48	2.68	3.99	2.52	3.67	2.41	3.45	2.32	3.28	2.25	3.15
32	4.15	7.50	3.29	5.34	2.90	4.46	2.67	3.97	2.51	3.65	2.40	3.43	2.31	3.26	2.24	3.13
33	4.14	7.47	3.28	5.31	2.89	4.44	2.66	3.95	2.50	3.63	2.39	3.41	2.30	3.24	2.23	3.11
34	4.13	7.44	3.28	5.29	2.88	4.42	2.65	3.93	2.49	3.61	2.38	3.39	2.29	3.22	2.23	3.09
38	4.10	7.35	3.24	5.21	2.85	4.34	2.62	3.86	2.46	3.54	2.35	3.32	2.26	3.15	2.19	3.02
42	4.07	7.28	3.22	5.15	2.83	4.29	2.59	3.80	2.44	3.49	2.32	3.27	2.24	3.10	2.17	2.97
46	4.05	7.22	3.20	5.10	2.81	4.24	2.57	3.76	2.42	3.44	2.30	3.22	2.22	3.06	2.15	2.93
50	4.03	7.17	3.18	5.06	2.79	4.20	2.56	3.72	2.40	3.41	2.29	3.19	2.20	3.02	2.13	2.89
60	4.00	7.08	3.15	4.98	2.76	4.13	2.53	3.65	2.37	3.34	2.25	3.12	2.17	2.95	2.10	2.82
80	3.96	6.96	3.11	4.88	2.72	4.04	2.49	3.56	2.33	3.26	2.21	3.04	2.13	2.87	2.06	2.74
100	3.94	6.90	3.09	4.82	2.70	3.98	2.46	3.51	2.31	3.21	2.19	2.99	2.10	2.82	2.03	2.69
200	3.89	6.76	3.04	4.71	2.65	3.88	2.42	3.41	2.26	3.11	2.14	2.89	2.06	2.73	1.98	2.60
1000	3.85	6.66	3.00	4.63	2.61	3.80	2.38	3.34	2.22	3.04	2.11	2.82	2.02	2.66	1.95	2.53
∞	3.84	6.63	3.00	4.61	2.60	3.78	2.37	3.32	2.21	3.02	2.10	2.80	2.01	2.64	1.94	2.51



EJERCICIO:

1) Calcular un valor k de modo que: $P(F_{4,8} > k) = 0{,}05$

	Grados de libertad de la varianza mayor											
	1		2		3		4		5		6	
p→	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01
1	161.45	4052.2	199.50	4999.3	215.71	5403.5	224.58	5624.3	230.16	5763.9	233.99	5858.9
2	18.51	98.50	19.00	99.00	19.16	99.16	19.25	99.25	19.30	99.30	19.33	99.33
3	10.13	34.12	9.55	30.82	9.28	29.46	9.12	28.71	9.01	28.24	8.94	27.91
4	7.71	21.20	6.94	18.00	6.59	16.69	6.39	15.98	6.26	15.52	6.16	15.21
5	6.61	16.26	5.79	13.27	5.41	12.06	5.19	11.39	5.05	10.97	4.95	10.67
6	5.99	13.75	5.14	10.92	4.76	9.78	4.53	9.15	4.39	8.75	4.28	8.47
7	5.59	12.25	4.74	9.55	4.35	8.45	4.12	7.85	3.97	7.46	3.87	7.19
8	5.32	11.26	4.46	8.65	4.07	7.59	$\boxed{3.84}$	7.01	3.69	6.63	3.58	6.37
9	5.12	10.56	4.26	8.02	3.86	6.99	3.63	6.42	3.48	6.06	3.37	5.80
10	4.96	10.04	4.10	7.56	3.71	6.55	3.48	5.99	3.33	5.64	3.22	5.39
11	4.84	9.65	3.98	7.21	3.59	6.22	3.36	5.67	3.20	5.32	3.09	5.07
12	4.75	9.33	3.89	6.93	3.49	5.95	3.26	5.41	3.11	5.06	3.00	4.82
13	4.67	9.07	3.81	6.70	3.41	5.74	3.18	5.21	3.03	4.86	2.92	4.62
14	4.60	8.86	3.74	6.51	3.34	5.56	3.11	5.04	2.96	4.69	2.85	4.46
15	4.54	8.68	3.68	6.36	3.29	5.42	3.06	4.89	2.90	4.56	2.79	4.32
16	4.49	8.53	3.63	6.23	3.24	5.29	3.01	4.77	2.85	4.44	2.74	4.20

IMPORTANCIA DE ESTA DISTRIBUCIÓN:

Permite comparar la variabilidad de distintas muestras:

Si s_1^2 es la varianza de una mustra de tamaño N_1 extraída de una población Normal (σ_1^2)
y s_2^2 es la varianza de una muestra de tamaño N_2 extraída de una población Normal (σ_2^2)

y las muestras son independientes:

$$\frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{N_1 - 1, N_2 - 1}$$

EJERCICIO:

2) Si se toman dos muestras de tamaño 10 de una misma población Normal, ¿cuál es la probabilidad de que la varianza de la segunda muestra sea más del doble que la primera?

Si son de la misma población, el cociente que representa la distrubición F queda directamente como el cociente de las dos varianzas muestrales, con N1=N2=10, siendo una $F_{9,9}$ ($F_{N1-1,N2-1}$). Por lo tanto el problema equivale a:

$P(F_{9,9} > 2)$ (2 y no 0.5 pues se toma en el numerador la varianza mayor). En la tabla deducimos (no llega) que sería > 0.05, en Statgraphics veríamos que es 0.158239

EJERCICIO:

3) Se desea estudiar la precisión de dos máquinas envasadoras de latas de refresco. Para ello:

- Se pesan 9 latas de la máquina 1, siendo $s_1^2 = 180$

- Se pesan 9 latas de la máquina 2, siendo $s_2^2 = 250$

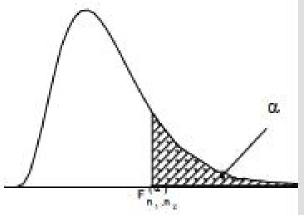
¿Podemos concluir que la precisión es distinta?

En este planteamiento, no se puede asumir que es la misma población (dos máquinas distintas), pero podemos plantear como hipótesis Ho que la varianza es la misma y ver si el cociente ofrece un valor probable o no. En tal caso (misma varianza) el cociente queda como cociente de varianzas muestrales (250/180=1,39) y se plantean las probabilidades de que dicho cociente sea superior e inferior.

EJERCICIO:

Distribución F de Fisher

	Grados de libertad de la varianza mayor															
	1		2		3		4		5		6		7		8	
p→	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01
1	161.45	4052.2	199.50	4999.3	215.71	5403.5	224.58	5624.3	230.16	5763.9	233.99	5858.9	236.77	5928.3	238.88	5980.9
2	18.51	98.50	19.00	99.00	19.16	99.16	19.25	99.25	19.30	99.30	19.33	99.33	19.35	99.36	19.37	99.38
3	10.13	34.12	9.55	30.82	9.28	29.46	9.12	28.71	9.01	28.24	8.94	27.91	8.89	27.67	8.85	27.49
4	7.71	21.20	6.94	18.00	6.59	16.69	6.39	15.98	6.26	15.52	6.16	15.21	6.09	14.98	6.04	14.80
5	6.61	16.26	5.79	13.27	5.41	12.06	5.19	11.39	5.05	10.97	4.95	10.67	4.88	10.46	4.82	10.29
6	5.99	13.75	5.14	10.92	4.76	9.78	4.53	9.15	4.39	8.75	4.28	8.47	4.21	8.26	4.15	8.10
7	5.59	12.25	4.74	9.55	4.35	8.45	4.12	7.85	3.97	7.46	3.87	7.19	3.79	6.99	3.73	6.84
8	5.32	11.26	4.46	8.65	4.07	7.59	3.84	7.01	3.69	6.63	3.58	6.37	3.50	6.18	3.44	6.03
9	5.12	10.56	4.26	8.02	3.86	6.99	3.63	6.42	3.48	6.06	3.37	5.80	3.29	5.61	3.23	5.47
10	4.96	10.04	4.10	7.56	3.71	6.55	3.48	5.99	3.33	5.64	3.22	5.39	3.14	5.20	3.07	5.06
11	4.84	9.65	3.98	7.21	3.59	6.22	3.36	5.67	3.20	5.32	3.09	5.07	3.01	4.89	2.95	4.74
12	4.75	9.33	3.89	6.93	3.49	5.95	3.26	5.41	3.11	5.06	3.00	4.82	2.91	4.64	2.85	4.50



Vemos que en la tabla con $F_{8,8}$ un valor de 3,44 ofrece a su derecha un área (probabilidad) de 0,05 y un valor de 6,03 ofrece a su derecha un área (probabilidad) de 0,01. Estos valores están bastante a la derecha de la distribución y por ejemplo un valor de 6,03 sería poco probable (si el cociente hubiera dado 6,03 sería arriesgado decir que las varianzas son iguales). Pero por la tabla no podemos conocer los valores del área (probabilidad) que hay a la derecha e izquierda de 1,39.

EJERCICIO:

Distribuciones de Probabilidad

Distribución Acumulada
Distribución: F (razón de varianzas)

Área Cola Inferior (<)

Variable	*Dist. 1*	*Dist. 2*	*Dist. 3*	*Dist. 4*	*Dist. 5*
1,39	0,673801				

Probabilidad de Densidad

Variable	*Dist. 1*	*Dist. 2*	*Dist. 3*	*Dist. 4*	*Dist. 5*
1,39	0,353174				

Área Cola Superior (>)

Variable	*Dist. 1*	*Dist. 2*	*Dist. 3*	*Dist. 4*	*Dist. 5*
1,39	0,326199				

El StatAdvisor
Esta ventana evalúa la distribución acumulada de la Distribución F (razón de varianzas). Calculará las áreas de colas para hasta 5 valores críticos de la distribución. También calculará la probabilidad de densidad ó la función de masa. Por ejemplo, el resultado indica que, para la primera distribución especificada, la probabilidad de obtener un valor menor que 1,39 es 0,673801. También, la probabilidad de obtener un valor mayor que 1,39 es 0,326199. La altura de la función de densidad de probabilidad en 1,39 es 0,353174.

Empleando Stagraphics vemos que el valor de 1,39 está bastante centrado en la distribución y es un valor muy probable (0,67 de probabilidad de que el valor quede a la izquierda y 0,33 de que quede a la derecha). Si tuviera que dar una respuesta, diría que la hipótesis Ho es cierta y que por tanto NO podemos concluir que la precisión es distinta.

UD 5 parte 2

Inferencia sobre una población

TEST DE HIPÓTESIS

Se usan para decidir si ciertas hipótesis establecidas a priori sobre la población son razonables o no.

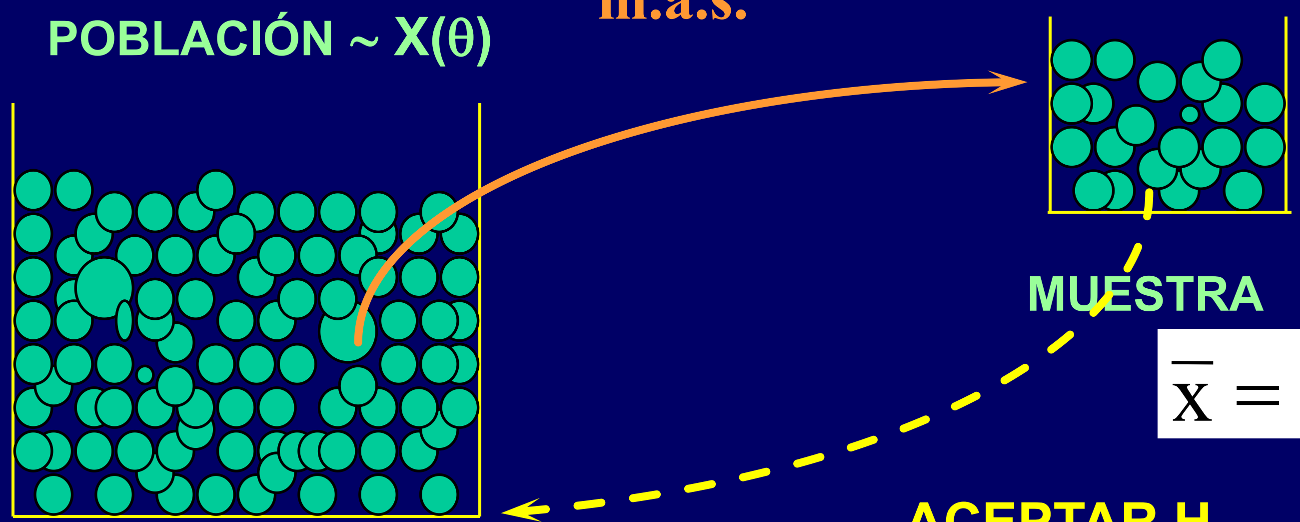
- Si las hipótesis son sobre los valores de los parámetros de la distribución: Tests paramétricos

- Si son sobre otros aspectos, como el tipo de distribución, independencia…: Tests no paramétricos

- **Hipótesis nula (H_0):** la que se quiere contrastar (generalmente asociada a la situación considerada correcta, usual o deseable).
- **Hipótesis alternativa (H_1):** la opuesta a H_0 (generalmente asociada a la situación considerada como incorrecta, inusual o indeseable).

TEST DE HIPÓTESIS

¿Podemos considerar que la longitud media poblacional de las piezas es 350 mm, que es el valor nominal?



$$\overline{x} = 360.89 \ \text{mm}$$

DECIDIR → **ACEPTAR H_0**

DECIDIR → **RECHAZAR H_0** → **ACEPTAR H_1**

$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad m = 350$

$H_1 : \theta \neq \theta_0 \qquad m \neq 350$

TIPOS DE HIPÓTESIS

HIPÓTESIS SIMPLES

H_0: m = 350

Corresponde a un solo punto $\theta = \theta_0$ del espacio paramétrico C_θ

Asumiendo que esta hipótesis es cierta, la distribución de la población queda completamente especificada

$X \sim N(350, \sigma)$

HIPÓTESIS COMPUESTAS

Corresponde a una región $\subset C_\theta$, que contiene más de un posible valor del parámetro.

Este tipo de hipótesis no especifican completamente la distribución de la población.

H_0: m $\leq$ 350

H_1: m > 350

En esta asignatura sólo consideraremos estos tests:

$H_0: m = 100$ $H_0: \sigma^2 = 5$ $H_0: m_1 = m_2$ $H_0: \sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$

$H_1: m \neq 100$ $H_1: \sigma^2 \neq 5$ $H_1: m_1 \neq m_2$ $H_1: \sigma^2{}_1 \neq \sigma^2{}_2$

Inferencia sobre una población Normal

Comparación de 2 poblaciones Normales

Cómo contrastar hipótesis compuestas:

$H_0: m \leq 100$

$H_1: m > 100$

1) Contrastar la hipótesis:

$H_0: m = 100$ $H_1: m \neq 100$

2) Pensar con lógica

Ej. $\overline{x} = 104 \longrightarrow$ aceptar $H_0: m=100 \longrightarrow$ aceptar $H_0: m \leq 100$

Ej. $\overline{x} = 109 \longrightarrow$ rechazar $H_0: m=100 \longrightarrow$ aceptar $H_1: m > 100$

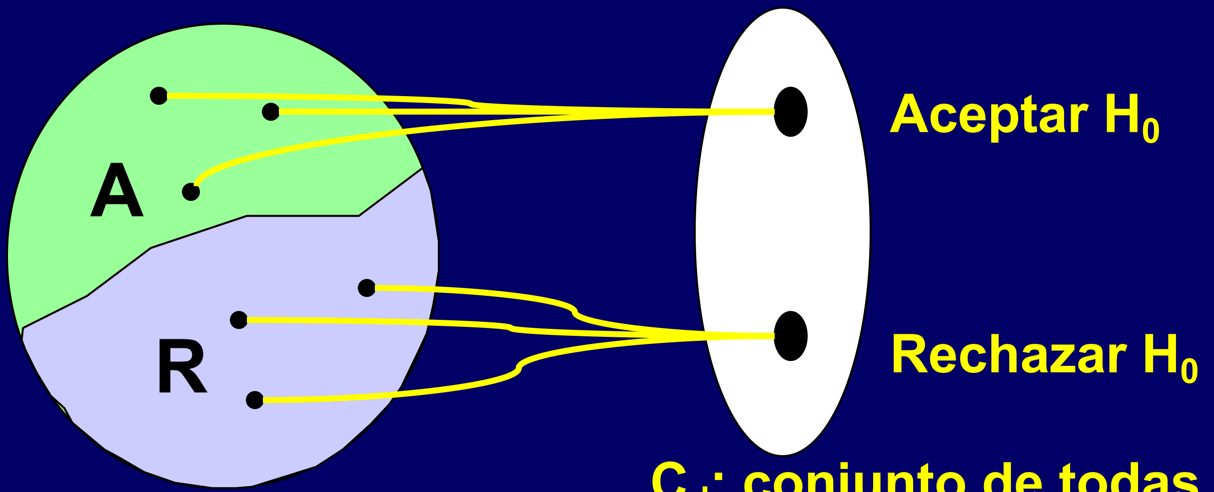
Ej. $\overline{x} = 92 \longrightarrow$ rechazar $H_0: m=100 \longrightarrow$ aceptar $H_0: m \leq 100$

CONSTRUCCIÓN DE TESTS DE HIPÓTESIS

Un contraste estadístico de hipótesis implica establecer una partición el espacio muestral E_x (es decir, del conjunto de todas las posibles muestras que pueden obtenerse) en dos regiones:

- Región R de rechazo: si la muestra $(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in R$, la hipótesis nula H_0 se rechaza.
- Región A de aceptación: si la muestra $(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in A$ la hipótesis nula H_0 se acepta.

siendo A la región complementaria de R en el espacio muestral E_X



E_X : ESPACIO MUESTRAL

C_d: conjunto de todas las posibles decisiones

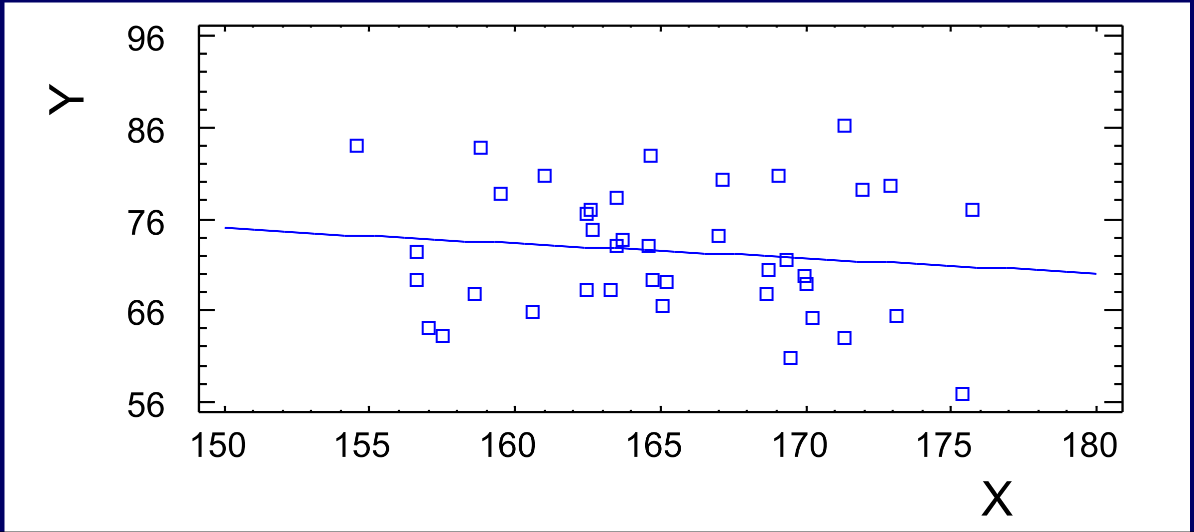
Un test de hipótesis queda determinado por:

- Tamaño muestral — Ej.: $n = 5$
- Tipo de muestreo — Ej.: muestreo aleatorio simple
- Parámetro estadístico θ^* usado — Ej.: $\bar{x}$
- Región de aceptación / rechazo

Ej.: si $\bar{x}$ € [2.8, 3.2] $\longrightarrow$ aceptar H_0: m=3

¿Cómo contrastaríamos esta hipótesis?

¿Hay una relación entre X e Y o son independientes ?



$Y = a + b \cdot X$

$H_0: b = 0$

$H_1: b \neq 0$

ERRORES DE TIPO I y TIPO II

Cuando se contrasta una hipótesis, hay dos posibles decisiones erróneas que se pueden tomar, llamadas:

- Error de tipo I: Rechazar H_0 si es correcta
  (α error, falso positivo, error de 1ª especie)
- Error de tipo II: Aceptar H_0 cuando es falsa (siendo cierta H_1)
  (β error, falso negativo, error de 2ª especie)

Definiciones:

- Riesgo de tipo I o de 1ª especie (α): probabilidad de cometer un error de tipo I. *(nivel de significación)*

- Riesgo de tipo II o de 2ª especie (β): probabilidad de cometer un error de tipo II.

$1-\alpha$ = nivel de confianza $1-\beta$ = potencia

Nivel de significación observado: p-valor (probabilidad de haber obtenido un estadístico de contraste más desfavorable, siendo cierta H_0)

EJERCICIO

Var. aleatoria X: Nº de defectos en una pieza $X \sim Ps(\lambda)$

λ = número medio de defectos en una pieza

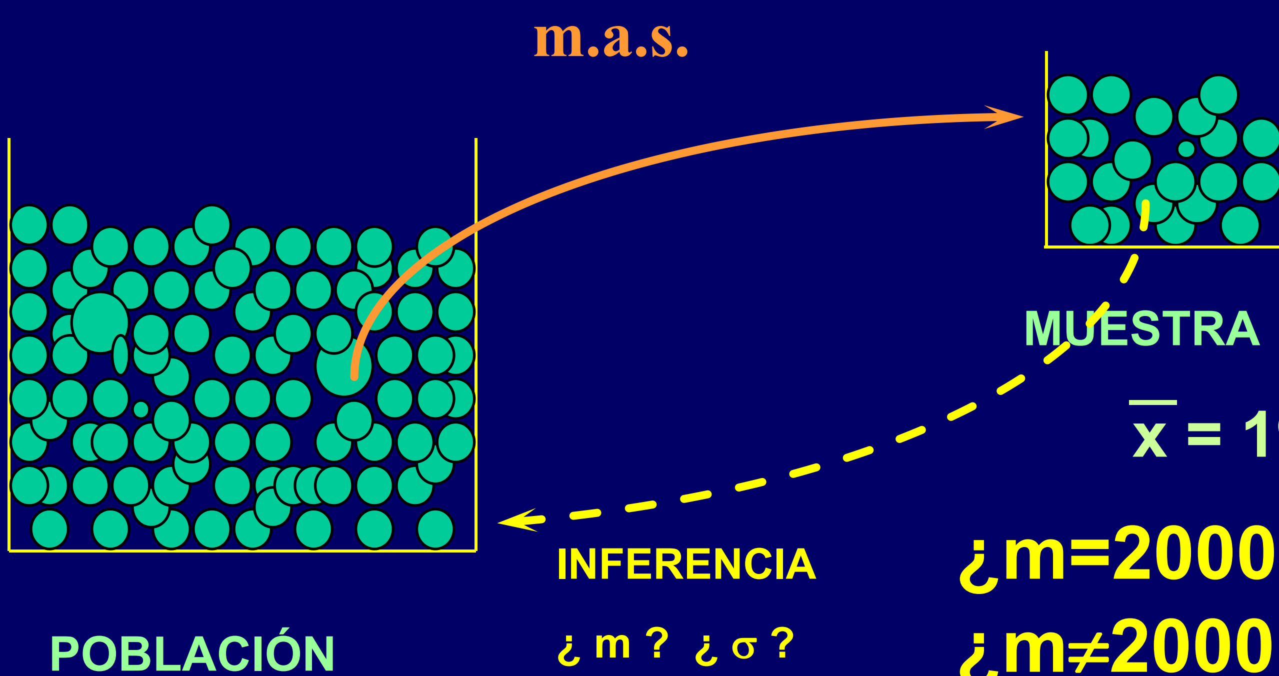
A partir de una muestra de tamaño 10, se desea contrastar la hipótesis de que el parámetro λ de una distribución de Poisson es 2 frente a la alternativa de que es > 2. Se aceptará H_0 si la media muestral es ≤ 2,5 y se rechazará en caso contrario.

A) Calcular el riesgo de tipo I de este test

B) Calcular el riesgo de tipo II si λ realmente vale 3

C) Calcular el riesgo de tipo II si λ realmente vale 4

INFERENCIA SOBRE UNA POBLACIÓN NORMAL



$\overline{x} = 1993,6$

¿m=2000? o

¿m≠2000?

EJEMPLO:

Una máquina que llena botellas de refresco de 2 litros está ajustada para llenar en promedio 2000 ml. Para controlar su funcionamiento, se toma una muestra aleatoria de 15 botellas, resultando los siguientes datos (ml llenados):

1989 2015 1962 2013 1983 1989 1992 2011 1958
2023 1980 1977 1994 2017 2001

1) Estimar a partir de la muestra el valor de la media m y desviación típica σ de la población objeto de estudio.

2) ¿Hay suficiente evidencia para afirmar que m difiere significativamente de 2000 y que la máquina debería ser reajustada?

3) ¿Entre qué límites está comprendido el valor de m, con una razonable confianza?

4) ¿Entre qué límites está comprendido el valor de σ, con una razonable confianza?

PASOS EN LA INFERENCIA SOBRE UNA POBLACIÓN NORMAL

1) Análisis descriptivo de la muestra (parámetros de posición y dispersión).

2) Normalidad de los datos y detección de datos anómalos (Histogramas, papel probabilístico Normal).

3) Test de hipótesis: m=2000 (t de Student).

4) Intervalo de confianza para m (t de Studen).

5) Intervalo de confianza para σ (Chi²).

6) Análisis con with Statgraphics (Describe $\Rightarrow$ Numeric Data $\Rightarrow$ One-Variable Analysis).

1) ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LA MUESTRA:

Variable:	VOLUMEN
Sample size	15
Average	**1993.6**
Median	1992
Mode	1989
Geometric mean	1993.51
Variance	391.971
Standard deviation	**19.7983**
Standard error	5.11189
Minimum	1958
Maximum	2023
Range	65
Lower quartile	1980
Upper quartile	2013
Interquartile range	33
Skewness	-0.256502
Standardized skewness	**-0.405564** $\in (-2,2) \Rightarrow$ CA=0
Kurtosis (CC-3)	-0.750953
Standardized kurtosis	**-0.593681** $\in (-2,2) \Rightarrow$ CC=3

Como $\bar{x}$ = 1993,6 que es distinto de 2000, ¿se debería reajustar la máquina?

NO NECESARIAMENTE !

La diferencia entre $\bar{x}$ y 2000 puede ser debida al azar del muestreo

De hecho, $\bar{x}$ nunca será exactamente 2000

2) NORMALIDAD DE LOS DATOS:

La mayoría de las técnicas de inferencia estadística para variables continuas asumen que las poblaciones muestreadas son Normales.

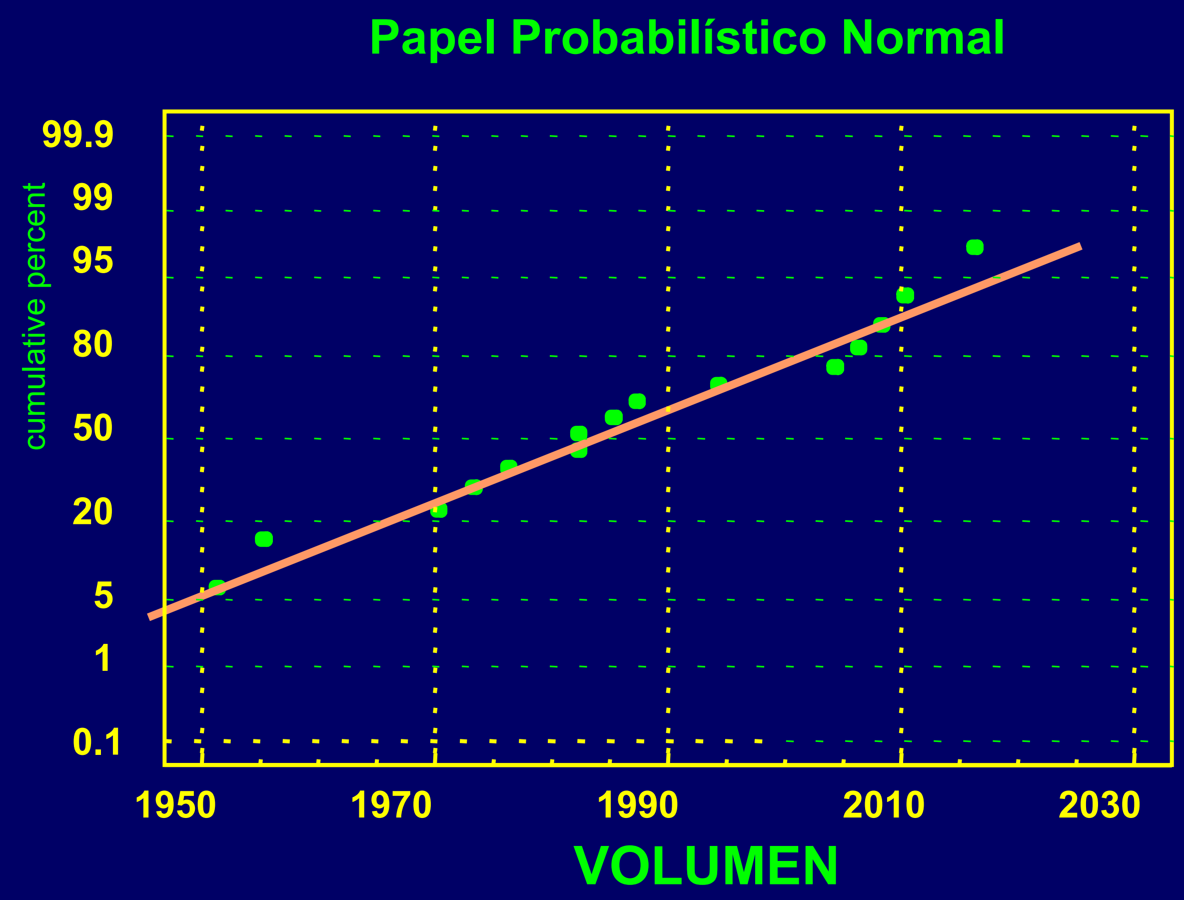
¿Cómo podemos comprobar si esta hipótesis previa es aceptable?

Tres formas posibles:

- Usando tests estadísticos formales (requieren muchos datos en general; son poco útiles en la práctica).
- Dibujando un histograma (requiere como mínimo 40-50 datos).
- Dibujando los datos en un Papel Probabilístico Normal.

También es conveniente comprobar los valores de los coeficientes de asimetría y curtosis.

¿PUEDE CONSIDERARSE QUE LOS DATOS SON NORMALES?



NO SE OBSERVAN DATOS ANÓMALOS

3) TEST DE HIPÓTESIS m=2000:

La Hipótesis Nula es m (media de la población) = 2000

Razonamiento intuitivo: si m=2000 (H_0 cierta), $\bar{x}$ como variable aleatoria (muestras extraídas de esa población) debe tener una probabilidad alta de ser "similar" a 2000.

Recuerda que ...¡¡¡Resulta que este cociente se comporta como t_{N-1} !!!

$$\frac{\bar{X} - 2000}{s/\sqrt{N}}$$

-Como t_{N-1} es una distribución conocida, puedo calcular el intervalo donde (expresiones equivalentes):

a) Estén el 95% de los valores posibles de t_{N-1}.

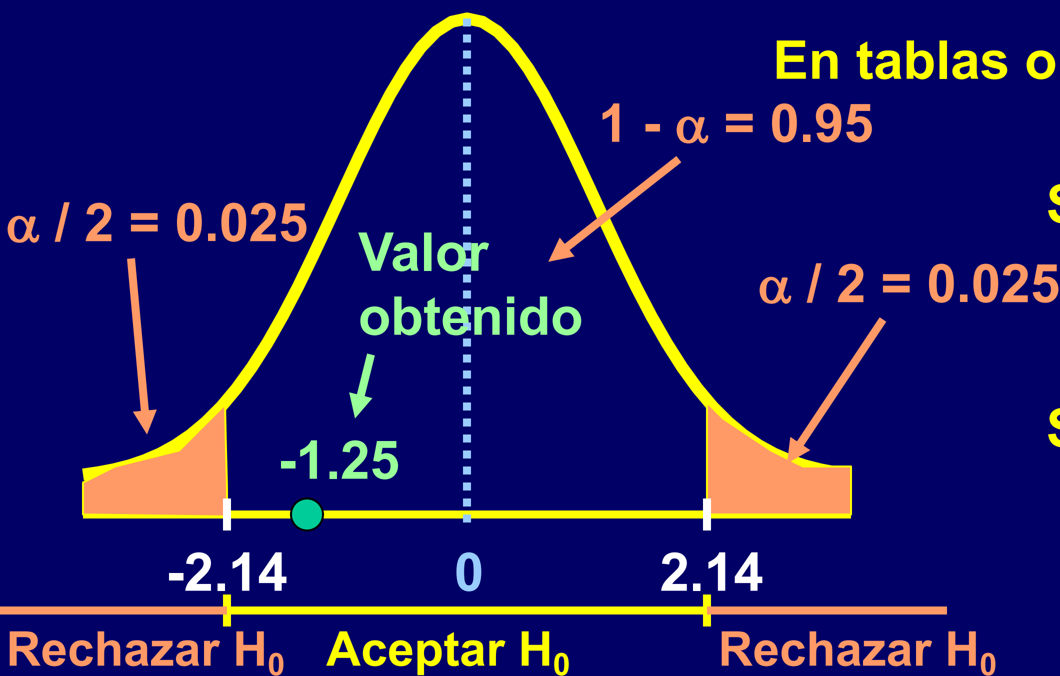
b) Haya una probabilidad del 95% de que al materializarse t_{N-1} su valor se encuentre en dicho intervalo.

Si el resultado PARA UNA MUESTRA de $\boxed{\frac{\bar{X} - 2000}{s/\sqrt{N}}}$ está en el intervalo ACEPTO H_0

$H_0 : m = 2000$ $\qquad$ $H_1 : m \neq 2000$

Sabemos que: $\dfrac{\overline{X} - m}{s/\sqrt{N}} \sim t_{N-1}$ **Si H_0 es cierta (m=2000)** $\Longrightarrow$ $\dfrac{\overline{X} - 2000}{s/\sqrt{N}} \sim t_{N-1}$

En tablas obtenemos: $P(|t_{14}| > 2.14) = 0.05$



Si H_0 es cierta: $\left|\dfrac{\overline{X} - 2000}{s/\sqrt{N}}\right| \leq 2.14$

Si H_0 es falsa: $\left|\dfrac{\overline{X} - 2000}{s/\sqrt{N}}\right| > 2.14$

Por tanto, si: $\left|\dfrac{\overline{X} - 2000}{s/\sqrt{N}}\right|$ > 2.14 **Rechazar H_0** / ≤ 2.14 **Aceptar H_0**

$$\frac{1993.6 - 2000}{19.8/\sqrt{15}} = -1.25$$

Conclusión: ¡ la hipótesis m=2000 es aceptable !

(no hay suficiente evidencia para rechazar H_0)

RESUMEN DEL TEST:

$H_0 : m = m_0$

$H_1 : m \neq m_0$

Si $\left| \dfrac{\bar{X} - m_0}{s / \sqrt{N}} \right| > t_{N-1}(\alpha/2)$ → **Rechazar H_0**

LÍMITE O VALOR CRÍTICO

Si $\left| \dfrac{\bar{X} - m_0}{s / \sqrt{N}} \right| \leq t_{N-1}(\alpha/2)$ → **Aceptar H_0**

Siendo $t_{N-1}^{\alpha/2}$ el valor en la tabla de la t de Student que cumple:

P(t_{N-1} en colas fuera de límite)

$$P\left(\left| t_{N\text{-}1} \right| > t_{N\text{-}1}^{\alpha/2} \right) = \alpha$$

P(t_{N-1} en intervalo dentro de límite)

$$P(-t_{N-1}(\alpha/2) < t_{N-1} < +t_{N-1}(\alpha/2)) = 1 - \alpha$$

$$t_{N-1}(\alpha/2) = t_{N\text{-}1}^{\alpha/2}$$

En forma de intervalo, la expresión:

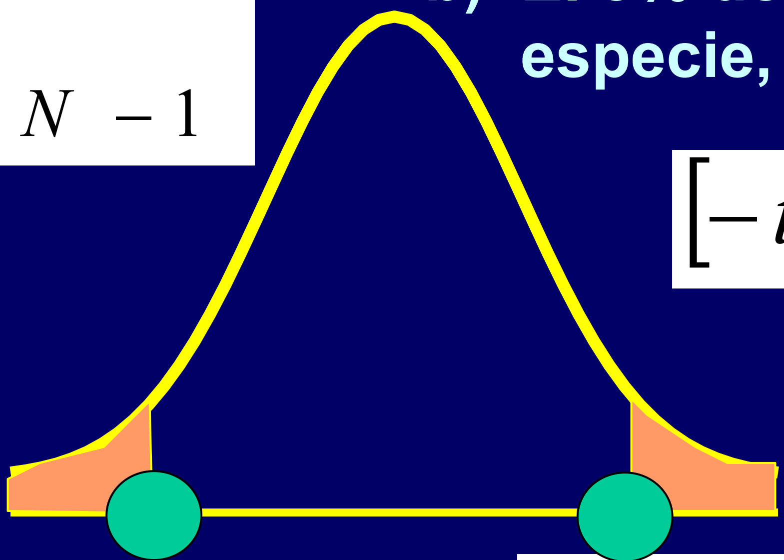
$$\frac{\overline{X} - m}{s/\sqrt{N}}$$

Se encontrará:

a) El 95% de las veces (nivel de confianza, 1 - alfa) dentro del intervalo:

b) El 5% de las veces (error de 1ª especie, alfa) fuera del intervalo:

$$t_{N-1}$$



$$\left[-t_{N-1}(\alpha/2), +t_{N-1}(\alpha/2)\right]$$

$$-t_{N-1}(\alpha/2) \qquad t_{N-1}(\alpha/2)$$

- Si se acepta H_0 no implica que sea necesariamente cierta, implica que no hay suficiente evidencia para rechazarla.

- En otras palabras podemos calcular para un nivel de confianza (1-alfa) con t_{N-1} el intervalo dentro del cual debería encontrarse el parámetro que es combinación del valor de la media poblacional de la hipótesis H_0 y los valores muestrales de la muestra obtenida. Si dicha combinación está dentro, aceptamos H_0

$$\frac{\overline{X} - m}{s / \sqrt{N}}$$

4) INTERVALO DE CONFIANZA PARA m:

¿Cómo calcular, a partir de la muestra, un intervalo que contenga con alta probabilidad (1-α) el valor desconocido m de la media poblac.?

Dado que: $\dfrac{\overline{X}-m}{s/\sqrt{N}} \sim t_{N-1}$

$$P(-t_{N-1}(\alpha/2) < t_{N-1} < +t_{N-1}(\alpha/2)) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{N-1}(\alpha/2) < \frac{\overline{X}-m}{s/\sqrt{N}} < +t_{N-1}(\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

Por tanto:

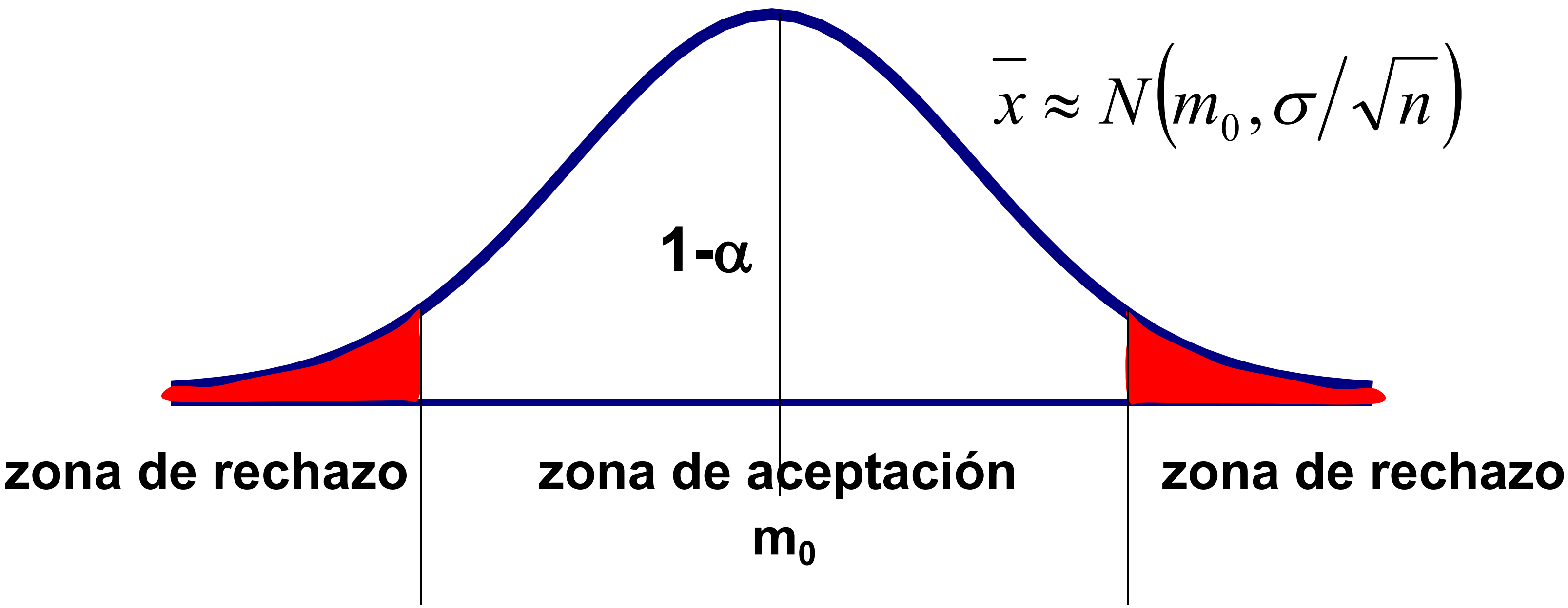
$$P\left(\underbrace{\overline{X} - t_{N-1}(\alpha/2)\frac{s}{\sqrt{N}}} < m < \underbrace{\overline{X} + t_{N-1}(\alpha/2)\frac{s}{\sqrt{N}}}\right) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza con una probabilidad (1-α) de contener m

1-α: nivel de confianza

Si σ es conocida: usar $z_{\alpha/2}$ en lugar de $t_{\alpha/2}$

Si σ es conocido: PODEMOS TIPIFICAR LA MEDIA MUESTRAL (¡¡¡MEDIA MUESTRAL ES V.A./DISTRIBUCIÓN NORMAL!!!) y empleamos la tabla N(0; 1) (última fila de la tabla t). Igual que antes: Cuando H_0 es cierta, seleccionamos una región donde es bastante probable (probabilidad $1-\alpha$) encontrar dicho parámetro estadístico. Ésta es la región de aceptación del test, y la complementaria, la región crítica. El intervalo de aceptación queda:



$$\bar{x} \approx N\left(m_0, \sigma/\sqrt{n}\right)$$

$$m_0 - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \qquad\qquad m_0 + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

siendo $z_{\alpha/2}$ el valor crítico de N(0;1)

Al realizar un CONTRASTE existen dos posibles decisiones erróneas que pueden cometerse, a las que se denomina errores de 1ª y 2ª especie:

Error de 1ª especie =

Rechazar H_0 SI FUERA CIERTA

$\alpha \rightarrow$ RIESGO 1ª ESPECIE =

probabilidad de cometer un error de 1ª especie

Error de 2ª especie =

Aceptar H_0 cuando es falsa

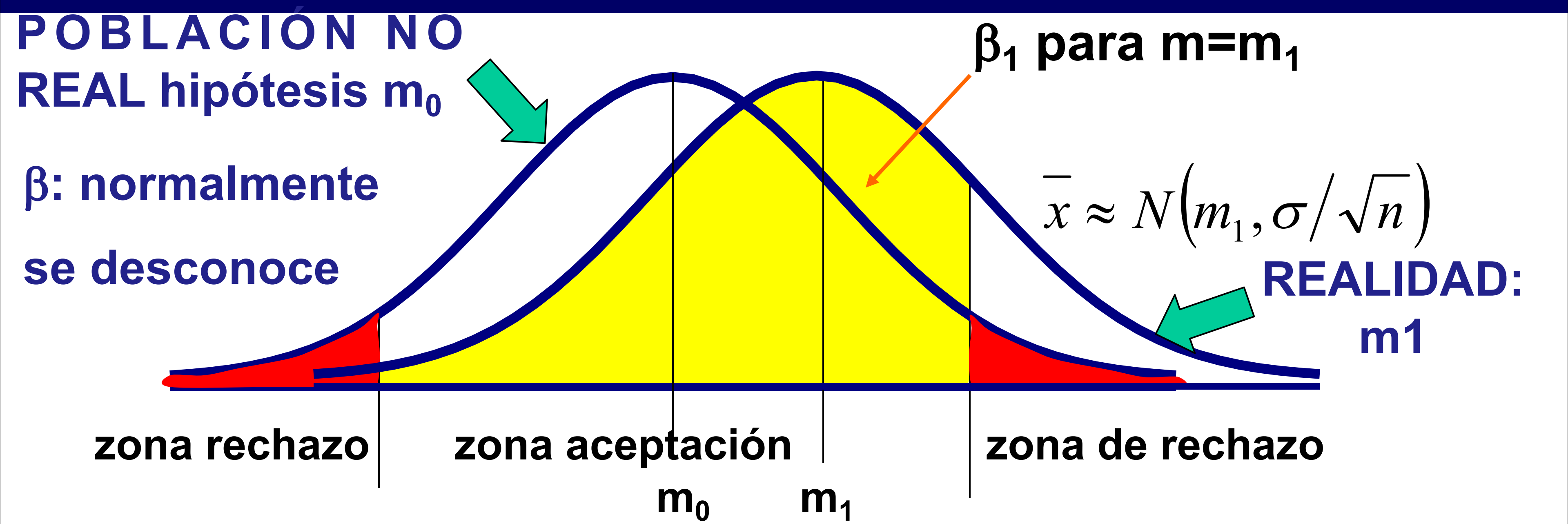
$\beta \rightarrow$ RIESGO 2ª ESPECIE =

probabilidad de cometer un error de 2ª especie

$\alpha \rightarrow$ Nivel de Significación del Test

$1-\alpha$= nivel de confianza= Probabilidad de aceptar H_0 SI FUERA CIERTA

Auque en realidad $m \neq m_0$ también se aceptará H_0 porque la media muestral cae en la región de aceptación con una probabilidad β_1 (probab. del error de tipo II para $m=m_1 \neq m_0$)



α debería ser bajo, pero si α disminuye, β aumenta (y viceversa)

Para disminuir α y β se debería aumentar el tamaño muestral (al tener más información sobre la población se reducirá la probabilidad de elegir la decisión errónea).

α : normalmente se fija en 0.05 o 0.01 (nunca, α > 0.1)

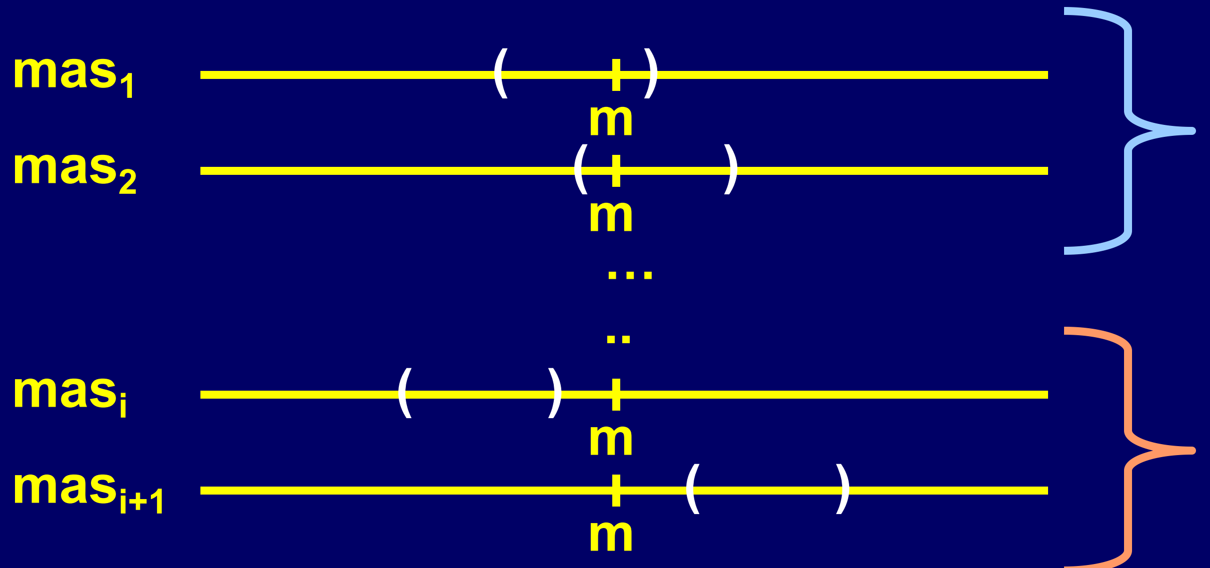
EJEMPLO:

$$1993.6 \pm 2.14 \frac{19.8}{\sqrt{15}} \rightarrow \begin{cases} 1982.7 \\ 2004.5 \end{cases}$$

INTERVALO DE CONFIANZA PARA m (95%) (1982.7 , 2004.5)

PREGUNTA:

¿Qué interpretación práctica tiene esta probabilidad 1-α asociada a cierto intervalo de confianza?



(1-α) ·100 (%) CONTENDRÁ m

α ·100 (%) NO CONTENDRÁ m

¿Qué puede concluirse por tanto en este caso para el intervalo calculado (1982.7 , 2004.5)?

TEST DE HIPÓTESIS para m USANDO INTERVALOS DE CONFIANZA:

$H_0 : m = m_0$ $\qquad$ $H_1 : m \neq m_0$

Si $m_0 \in$ Intervalo de conf. → Aceptar H_0

Si $m_0 \notin$ I.C. → Rechazar H_0 → Aceptar H_1

m_0=1990 $\quad$ m_0=2000 $\quad$ m_0=2003

(1982.7 $\qquad$ 2004.5)

Aceptar H_0 →

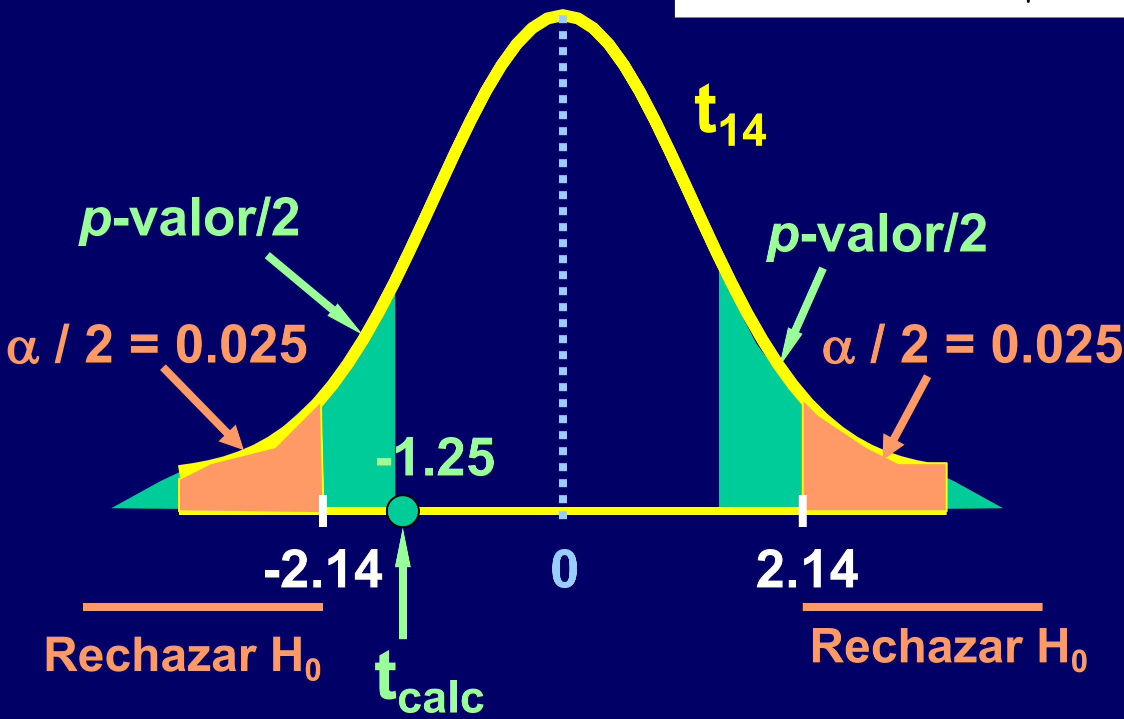
- **Es razonable que m=2000** → **No reajustar la máquina**
- **Es razonable que m=1990** → **Reajustar la máquina porque llena <2000**
- **Es razonable que m=2003** → **Reajustar la máquina porque llena >2000**

¿Se ha demostrado que m=2000 ?

El intervalo de confianza contiene todas las hipótesis nulas coherentes con la media MUESTRAL obtenida.

P-VALOR (NIVEL DE SIGNIFICACIÓN OBSERVADO)

En este test: *p*-value: $$p = \mathrm{P}\left(t_{n-1} > \left|t_{calc}\right|\right)$$



Si p-valor $< \alpha$: rechazar H_0

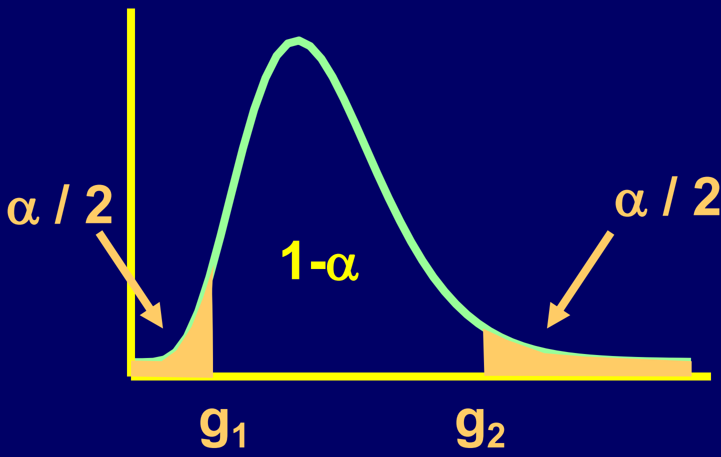
Si p-valor $> \alpha$: aceptar H_0

Para otros tests, el *p*-valor se calcula de otro modo pero esta regla siempre es válida.

p-valor: probabilidad de haber obtenido un estadístico de contraste calculado más desfavorable, siendo cierta H_0

5) INTERVALO DE CONFIANZA PARA σ^2:

Se sabe que: $$(N-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-1}$$ $$(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \in [g_1,\ g_2]$$



En la tabla χ^2 es posible encontrar dos valores g_1, g_2 de modo que:

$$P(g_1 < \chi^2_{N-1} < g_2) = 1-\alpha \quad (1)$$

Por ejemplo: $P(5.63< \chi^2_{14}<26.1)=1-0.05 = 0.95$

A partir de (1) se deduce: $$P\left(\frac{(N-1)\cdot s^2}{g_2} < \sigma^2 < \frac{(N-1)\cdot s^2}{g_1}\right) = 1-\alpha$$

Por tanto: $$\sigma^2 \in \left[\frac{(N-1)\cdot s^2}{g_2}, \frac{(N-1)\cdot s^2}{g_1}\right]$$ $$\sigma \in \left[\sqrt{\frac{(N-1)\cdot s^2}{g_2}}, \sqrt{\frac{(N-1)\cdot s^2}{g_1}}\right]$$

En este ejemplo:

$$\sqrt{\frac{14\ \cdot 392}{5.63}} = 31.2$$ $$\sqrt{\frac{14\ \cdot 392}{26.1}} = 14.5$$

[14.5 , 31.2] es un intervalo de confianza para σ

6) ANÁLISIS CON STATGRAPHICS

OPCIÓN: “ONE-VARIABLE ANALYSIS”

```
Hypothesis Tests for VOLUME

Sample mean = 1993.6   Sample median = 1992.0

t-test

Null hypothesis: mean = 2000
Alternative: not equal

Computed t statistic = -1.25198
P-Value = 0.231089

Do not reject the null hypothesis for alpha =0.05
```

```
Confidence Intervals for VOLUME

95% confidence interval for mean:
1993.6 +/- 10.9639   [1982.64; 2004.56]

95% confidence interval for standard deviation:
[14.4948; 31.2238]
```

COMPARACIÓN DE 2 POBLACIONES NORMALES

Dos programas informáticos (A, B) pueden utilizarse para buscar ficheros en un disco duro. Para determinar cuál es más rápido, se buscan 10 ficheros con cada programa, y se registra el tiempo requerido para encontrar cada fichero.

OBJETO DEL ESTUDIO, comparar dos poblaciones:

- Ficheros buscados con el programa A
- Ficheros buscados con el programa B

Se realizan 20 ensayos: → 10 con programa A; → 10 con programa B

¿Qué se mide en cada ensayo experimental?

RESULTADOS:

											$\vec{x}$	s
prog. A.	3.4	3.7	2.9	2.5	1.6	2.8	3.7	5.9	4.8	4.3	3.56	1.23
prog. B	2.7	3.2	1.8	1.9	1.1	2.2	2.8	4.8	4.3	3.4	2.82	1.15

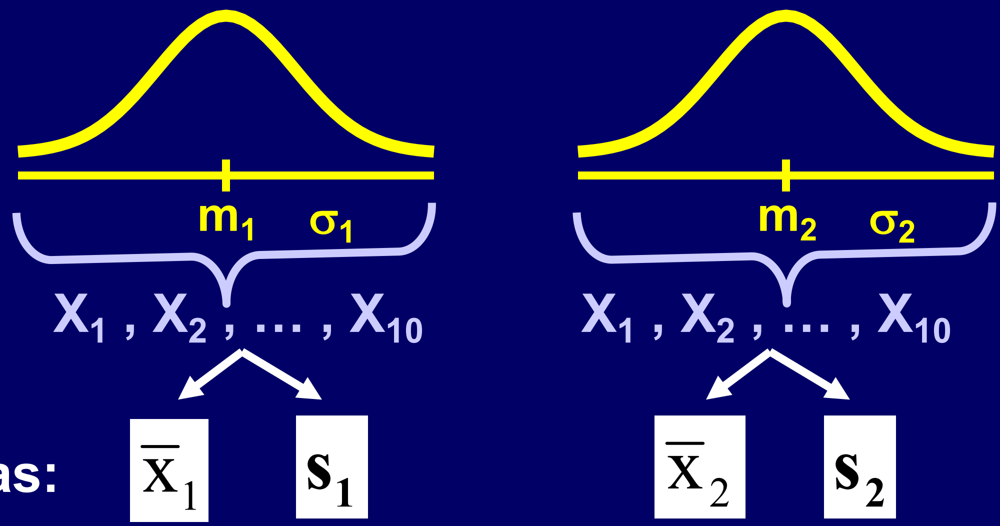
¿CÓMO DEBERÍAN ANALIZARSE ESTOS DATOS ESTADÍSTICAMENTE?

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO:

2 Poblaciones estudiadas: ficheros en el disco duro que pueden buscarse con los programas A o B.

Variable aleatoria: tiempo requerido para encontrar un fichero.

Se asume que la variable se distribuye normalmente:



Muestreo:

Parámetros estadísticos calculados de las muestras:

$$¿\ m_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} m_2\ ?$$

$$¿\ \sigma_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} \sigma_2\ ?$$

COMPARACIÓN DE VARIANZAS

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Si la hipótesis nula es cierta:

- s_1^2 será "similar" a s_2^2
- El cociente s_1^2 / s_2^2 será similar a 1. La hipótesis nula se rechazará si este cociente es claramente distinto de 1.

Pero... ¿qué debe considerarse como ser "similar" o no?

Si H_0 es cierta: $s_1^2 / s_2^2 \sim F_{N_1-1, N_2-1}$

PASOS: 1) Si $s_1 > s_2$: dividir $s^2{}_1 / s^2{}_2$. Si $s_2 > s_1$: dividir $s^2{}_2 / s^2{}_1$

2) Ver si este ratio es "demasiado alto" para ser una $F_{n1-1,n2-1}$

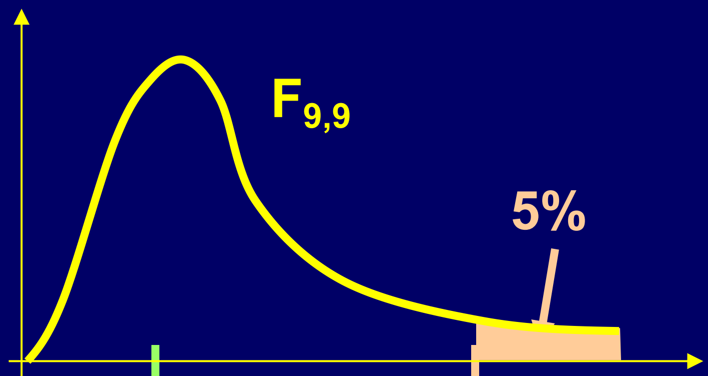
PROCEDIMIENTO ALTERNATIVO:

1) Obtener un intervalo de conf. para $\sigma^2{}_1 / \sigma^2{}_2$ (ver fórmula)

2) Si 1 pertenece a este intervalo: aceptar H_0

EJEMPLO:

$P(F_{9,9} > f) = 0.05 \longrightarrow f = 3.18$



SI LA HIPÓTESIS NULA ES CIERTA: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{N_1-1,\,N_2-1}$$

$$\frac{1.23^2}{1.15^2} = 1.14$$

COMO $F_{9,9}(5\%) = 3.18 > 1.14$

$\longrightarrow$ SE ACEPTA LA HIPÓTESIS NULA

NO HAY SUFICIENTE EVIDENCIA PARA AFIRMAR QUE LA VARIANZA DEL TIEMPO DE BÚSQUEDA CON LOS PROGRAMAS A o B SEA DISTINTA.

Si $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ el siguiente test de comparación de medias es aproximado, aunque es bastante “robusto” si el nº de observaciones en ambas muestras es similar.

COMPARACIÓN DE MEDIAS

$H_0 : m_1 = m_2$

$H_1 : m_1 \neq m_2$

Si H_0 es cierta:

- $\overline{X}_1$ será "similar" a $\overline{X}_2$
- $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ será "similar" a cero.

¿Qué debe considerarse como "ser similar"?

Sabemos que: $\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (m_1 - m_2)}{S_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}} \sim t_{N_1+N_2-2}$ (considerando que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

Si $m_1 = m_2$: $\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}} \sim t_{N_1+N_2-2}$

$$S_{(\overline{x}_1-\overline{x}_2)} = S \cdot \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}} = \sqrt{\frac{(N_1-1)\cdot s_1^2 + (N_2-1)\cdot s_2^2}{N_1+N_2-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}$$

Si $N_1 = N_2$:

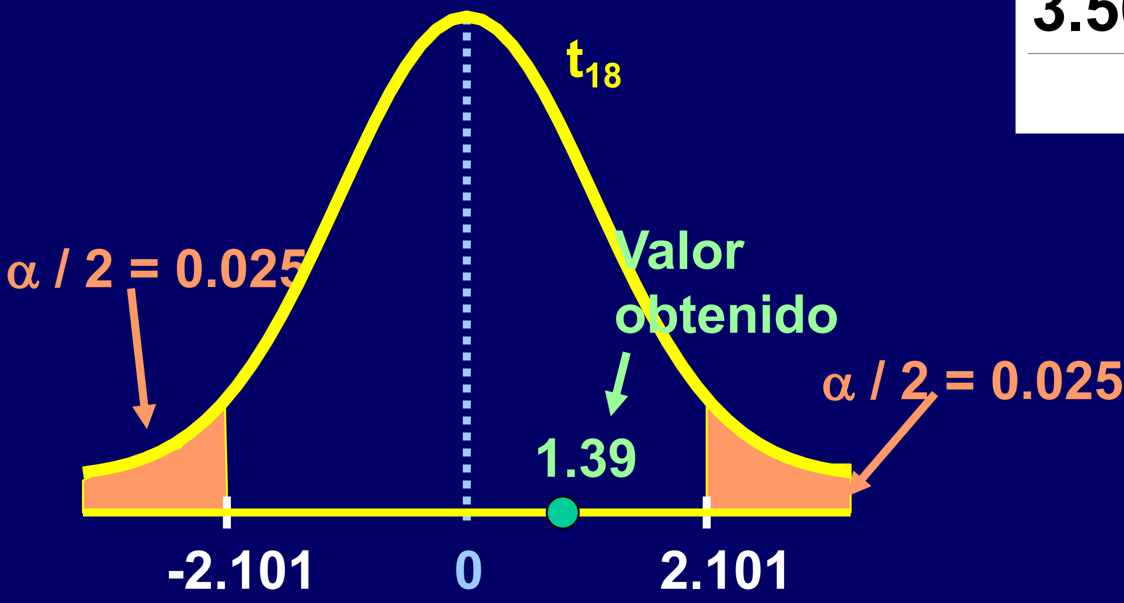
$$S_{(\overline{x}_1-\overline{x}_2)} = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{N}}$$

EJEMPLO:

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 3.56 - 2.82 = 0.74$$

$$S_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)} = \sqrt{\frac{1.23^2 + 1.15^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{10}} = 0.53$$

$$\frac{3.56 - 2.82}{0.53} = 1.39$$



Dado que $t_{18}(5\%)=2.101 > 1.39$

LOS RESULTADOS SON COMPATIBLES CON LA HIPÓTESIS $m_1=m_2$

INTERVALO DE CONFIANZA PARA m_1-m_2

Modo equivalente alternativo (aunque más informativo) de analizar los resultados de este experimento:

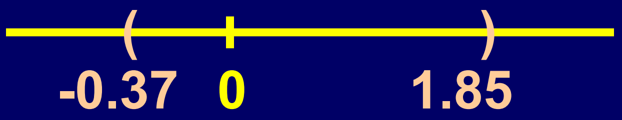
Intervalo para m_1-m_2 con un nivel de confianza $(1-\alpha) \times 100$:

$$\mathbf{m_1 - m_2} \in \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm \mathbf{t}^{\alpha/2}_{\mathbf{N_1+N_2-2}} \, \mathbf{S}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} \right]$$

En el ejemplo:

$$\mathbf{(3.56 - 2.82) \pm 2.101 \cdot 0.53 = [-0.37, 1.85]}$$

siendo 2.101 = $t_{18}(2.5\%)$ de la tabla t.



$$\mathbf{0} \in [\mathbf{-0.37,}\ 1.85] \Rightarrow m_1 - m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$$

Podemos afirmar con bastante confianza (95% de confianza) que la diferencia m_1-m_2 está comprendida entre -0.37 y 1.85

ANÁLISIS DE RESIDUOS

Definición general:

Resido = valor observado – valor estimado por un modelo

Residuo es la parte del valor observado debido a la variabilidad causada por factores no controlados en el experimento.

residuo = valor observado — valor estimado

MEDIA

EJEMPLO: Primera observación del programa A:

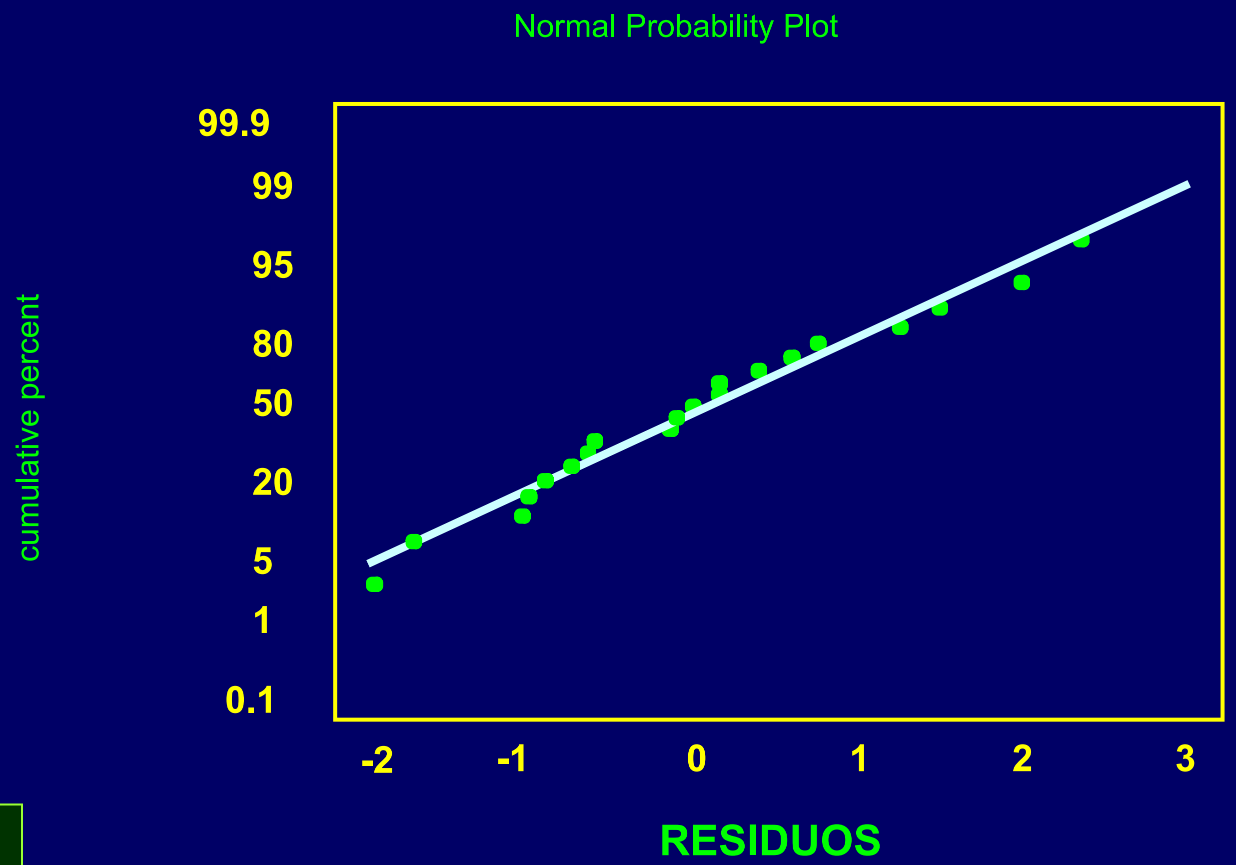
residuo = 3.4 — 3.56 = -0.16

UTILIDAD DEL ANÁLISIS DE RESIDUOS (MÉTODOS GRÁFICOS)

PAPEL PROBABILÍSTICO NORMAL DE LOS RESIDUOS :

* ESTUDIAR LA NORMALIDAD

* DETECTAR DATOS ANÓMALOS



La media de los residuos es 0

La media es estadísticamente distinta de 100

La diferencia entre ambas muestras es estadísticamente significativa

Hay suficiente evidencia para decir que:

- la media poblacional no es 100.

- Las medias poblac. son distintas.

Diferencias estadísticam. significativas ≠ diferencias importantes

Haciendo N suficientemente alto, podemos detectar como significativa CUALQUIER diferencia de medias, aunque en la práctica puede que no sea relevante.

De hecho, si n→∞ estamos comparando toda la población.

ANÁLISIS CON STATGRAPHICS:

COMPARE => 2 SAMPLES => TWO-SAMPLE COMPARISON

```
Comparison of Means

95,0% confidence interval for mean of time_A: 3,56 +/- 0,8795
95,0% confidence interval for mean of time_B: 2,82 +/- 0,82036
95,0% confidence interval for the difference between the means
   assuming equal variances: 0,74 +/- 1,117   [-0,377,1,857]

t test to compare means:
   Null hyp.: mean1 = mean2  Alt. hypothesis: mean1 NE mean2
   assuming equal variances: t = 1,39186   P-value = 0,180927
```

```
Comparison of Standard Deviations

Variance time_A: 1,51156  Variance time_B: 1,31511
Ratio of Variances = 1,14937

95,0% Confidence Intervals
     Ratio of Variances: [0,285488; 4,62738]

F-test to Compare Standard Deviations:

   H0: sigma1 = sigma2   Alt. hypothesis: sigma1 NE sigma2
   F = 1,14937   P-value = 0,839105
```

Conclusión del test: aceptar $m_A = m_B$ PERO...

En todos los ensayos: $tiempo_A > tiempo_B$

prog. A.	3.4	3.7	2.9	2.5	1.6	2.8	3.7	5.9	4.8	4.3
prog. B	2.7	3.2	1.8	1.9	1.1	2.2	2.8	4.8	4.3	3.4

Menor valor de A y B:

Mayor valor de A y B:

¿Es casualidad?

Por alguna razón este fichero fue más difícil de ser encontrado por ambos programas

En este caso (una variable bidimensional), es mejor aplicar otro test:

STATGRAPHICS: Compare => 2 samples => Two-sample comparison

Compare => 2 samples => Paired-sample comparison

Para comparar la media poblacional de dos características medidas de los mismos individuos, una comparación de datos apareados es más potente que una comparación de 2 medias.

Con un test de datos apareados: rechazar H_0: $m_A > m_B$ (tiene sentido!)