



Estrutura de dados: AVL

Professor Me. Felipe Borges

Introdução

As árvores binárias de busca permitem a organização da informação com o objetivo de otimizar as buscas.

Introdução

As árvores binárias de busca permitem a organização da informação com o objetivo de otimizar as buscas.

Ela permite o acesso mais rápido aos elementos dado que os elementos estão organizados na árvore, obedecendo uma certa propriedade.

- **Esquerda** são os menores que a raiz
- **Direita** são os maiores que a raiz

Introdução

As árvores binárias de busca permitem a organização da informação com o objetivo de otimizar as buscas.

Ela permite o acesso mais rápido aos elementos dado que os elementos estão organizados na árvore, obedecendo uma certa propriedade.

- **Esquerda** são os **menores** que a raiz
- **Direita** são os **maiores** que a raiz

Contudo, elas tem uma limitação que pode afetar o tempo necessário para recuperar um item armazenado.

Introdução

Insiram os seguintes valores em uma árvore binária de busca (ABB):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

4, 6, 2, 5, 1, 7, 3

Introdução

Insiram os seguintes valores em uma árvore binária de busca (ABB):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

4, 6, 2, 5, 1, 7, 3

O que vocês concluem com isso ?

Introdução

A limitação é que o desempenho da ABB depende da **ordem em que os elementos são inseridos.**

Introdução

A limitação é que o desempenho da ABB depende da **ordem em que os elementos são inseridos**.

Idealmente, deseja-se que a árvore esteja balanceada, para qualquer nó p da árvore.

Introdução

A limitação é que o desempenho da ABB depende da **ordem em que os elementos são inseridos**.

Idealmente, deseja-se que a árvore esteja balanceada, para qualquer nó p da árvore.

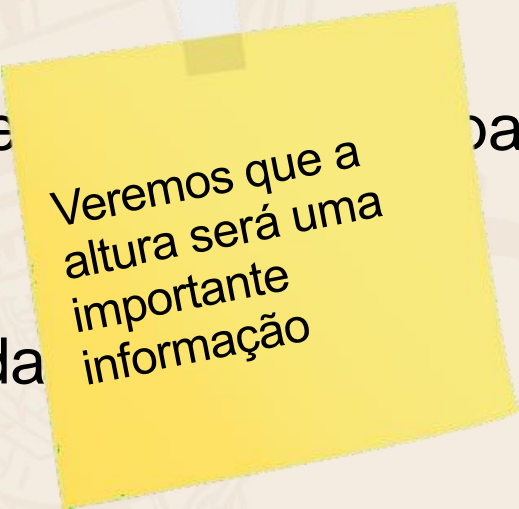
Como saber se a árvore está balanceada ?

Introdução

A limitação é que o desempenho da ABB depende da **ordem em que os elementos são inseridos**.

Idealmente, deseja-se que a árvore esteja balanceada para qualquer nó p da árvore.

Como saber se a árvore está balanceada

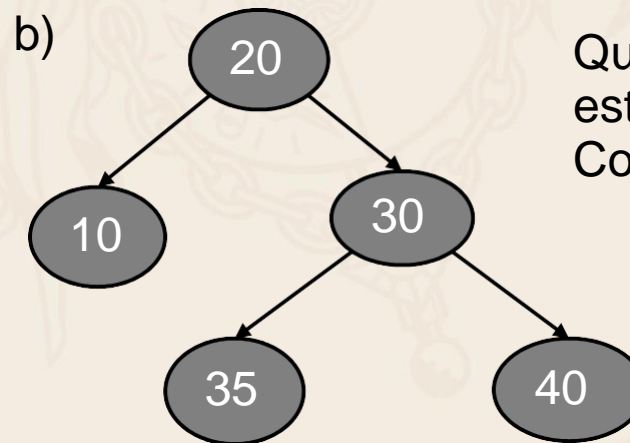
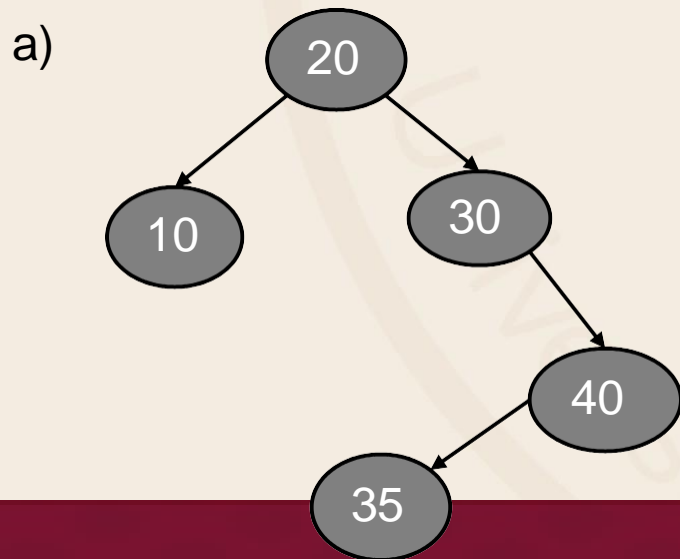
A yellow sticky note with a small white tab at the top, tilted slightly to the right. It contains black text.

Veremos que a altura será uma importante informação

AVL

Uma solução para essa limitação é dada pelas árvores AVL.

- O nome AVL vem de seus criadores Adelson Velsky e Landis (1962).
- Uma árvore binária de pesquisa T é denominada AVL se:
 - Para todos nós de T , as alturas de suas duas sub-árvores diferem no máximo de uma unidade.



Qual é AVL ? Que nó
está desbalanceado ?
Como calcular ?

AVL - Fator de balanceamento

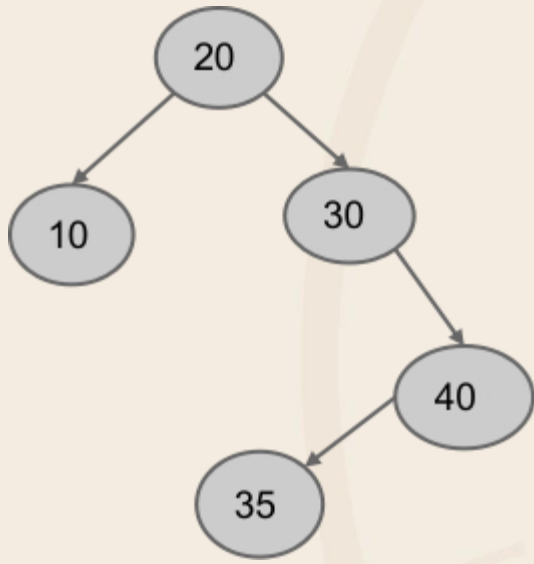
Para verificar se uma árvore está balanceada, é necessário calcular o fator de balanceamento.

O fator de balanceamento é dado por: $\text{altura (SAE)} - \text{altura(SAD)}$

Ou: $\text{altura (SAD)} - \text{altura(SAE)}$

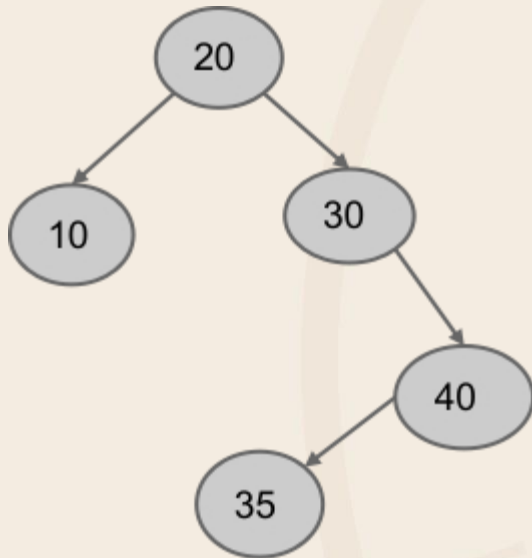
- O fator de balanceamento de um nodo é dado pelo seu peso em relação a sua sub-árvore.
- Um nodo pode ter um fator balanceado de 1, 0, ou -1.
- Um nodo com fator de balanceamento -2 ou 2 (diferença de 2 elementos) é considerado desbalanceado e requer um balanceamento.

AVL - Fator de balanceamento - Calculando ...



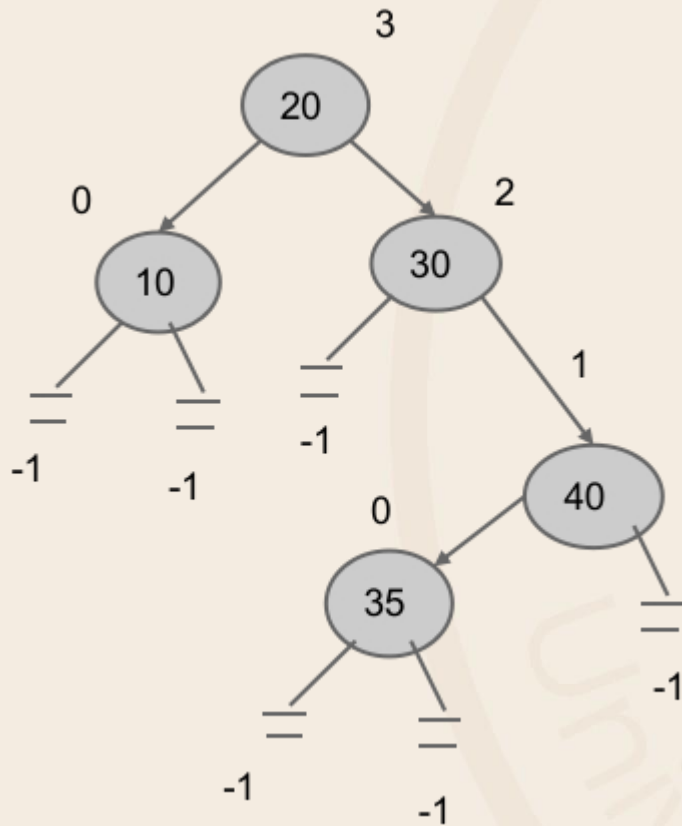
AVL - Fator de balanceamento - Calculando ...

Coloque as alturas de cada nó

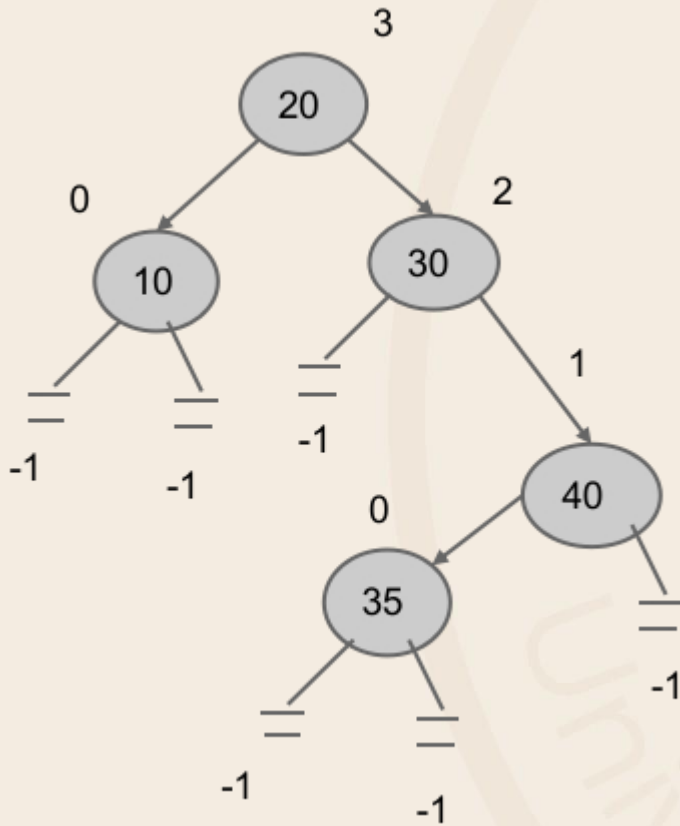


AVL - Fator de balanceamento - Calculando ...

Coloque as alturas de cada nó



AVL - Fator de balanceamento - Calculando ...

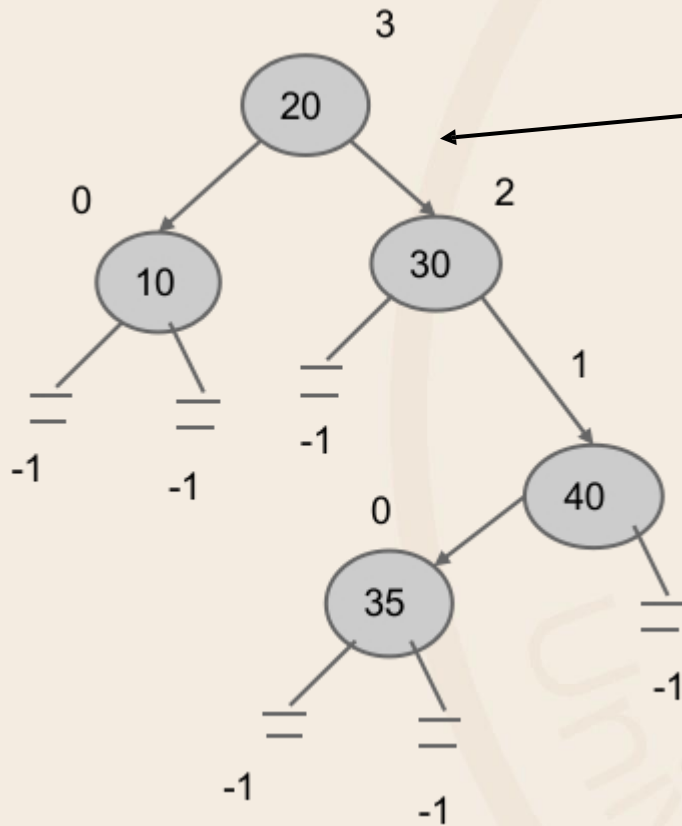


Coloque as alturas de cada nó

Calcule o fator de balanceamento

$\text{altura (SAE)} - \text{altura (SAD)}$

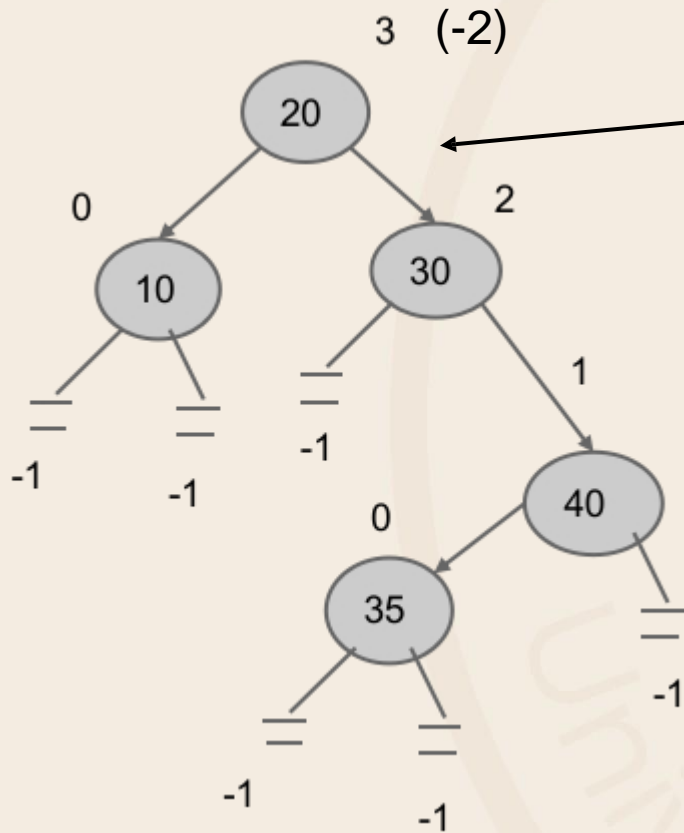
AVL - Fator de balanceamento - Calculando ...



$$0 - 2 = -2$$

altura (SAE) - altura (SAD)

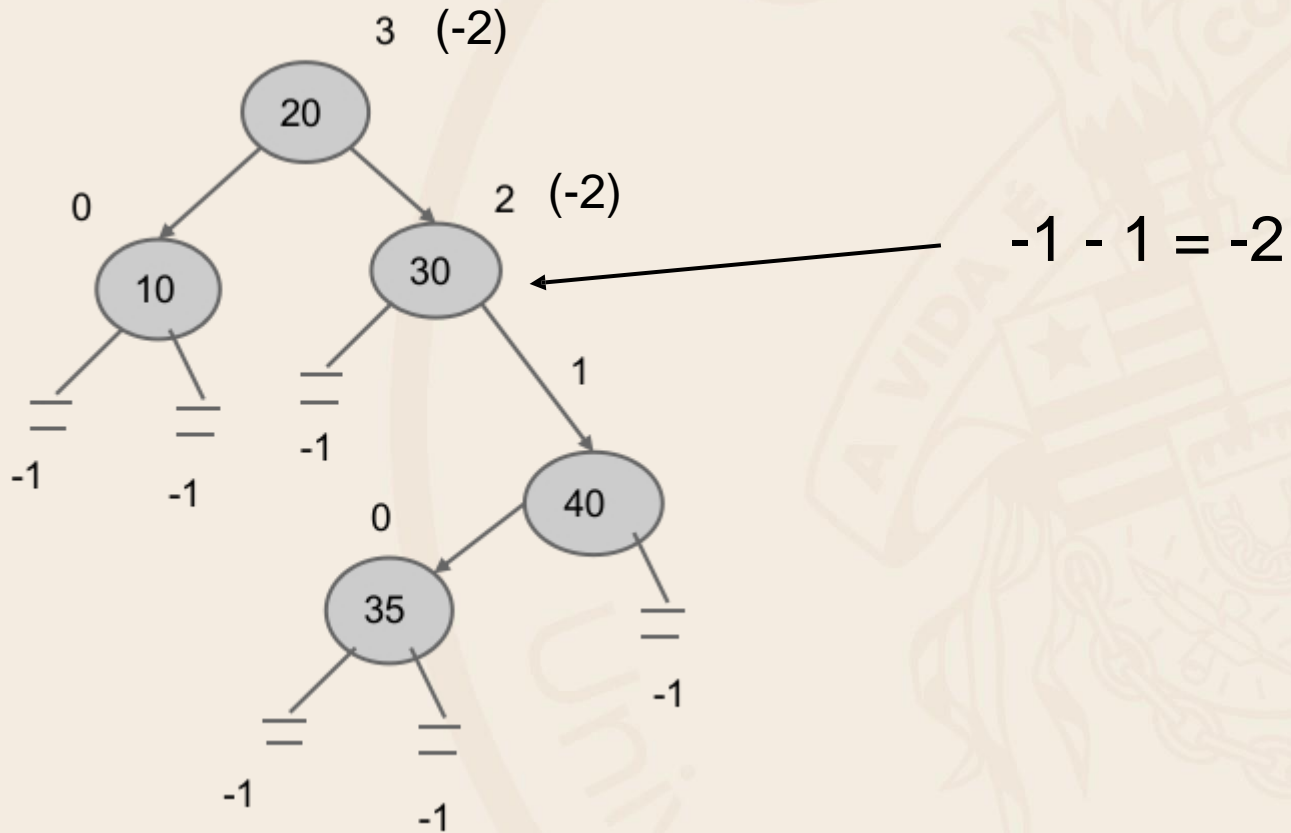
AVL - Fator de balanceamento - Calculando ...



$$0 - 2 = -2$$

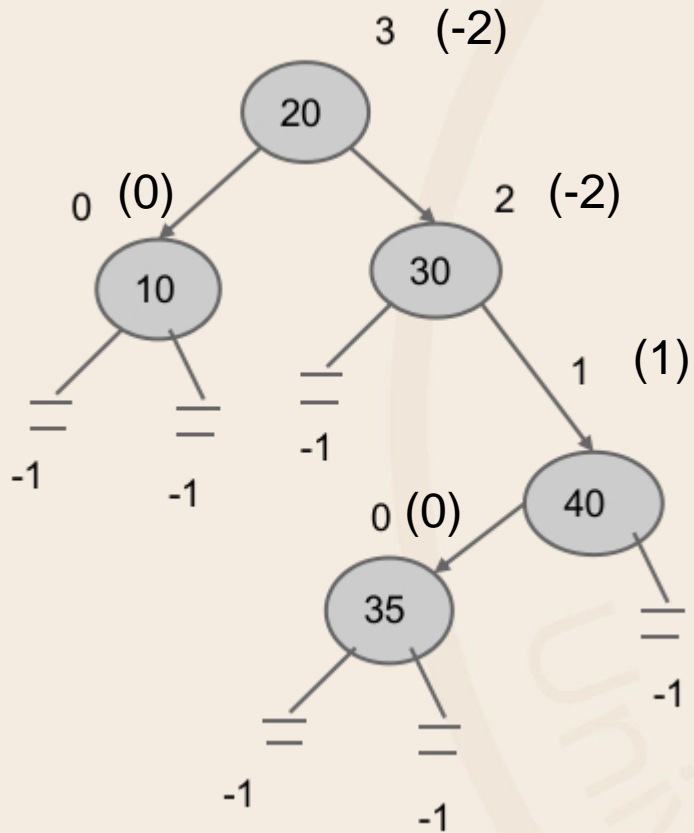
altura (SAE) - altura (SAD)

AVL - Fator de balanceamento - Calculando ...



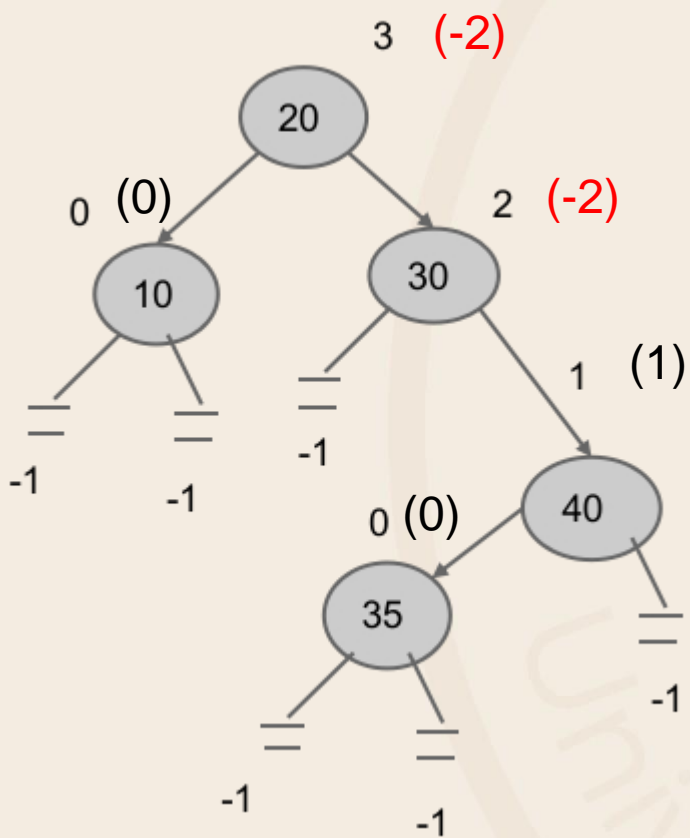
altura (SAE) - altura (SAD)

AVL - Fator de balanceamento - Calculando ...



altura (SAE) - altura (SAD)

AVL - Fator de balanceamento - Calculando ...



Uma árvore binária de pesquisa T é denominada AVL se:

- Para todos nós de T, as alturas de suas duas sub-árvores diferem no máximo de uma unidade.

altura (SAE) - altura (SAD)

Atividades

Insira os seguintes valores em uma árvore binária, coloque os fatores de balanceamento e diga se é ou não uma AVL e qual nó está desbalanceado:

- a) [30, 15, 50, 5, 10, 20]
- b) [80, 40, 100, 120, 90, 30]
- c) [10, 50, 4, 90, 20, 8]

Balanceamento

O algoritmo da AVL usa operações de rotações (na inserção e na remoção) para conseguir balancear uma árvore.

Existem quatro operações de rotações:

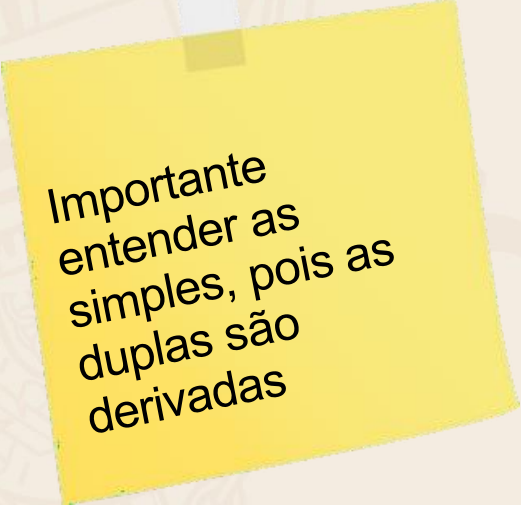
1. **Rotação simples à Esquerda**
2. **Rotação simples à Direita**
3. Rotação Dupla à Esquerda
4. Rotação Dupla à Direita

Balanceamento

O algoritmo da AVL usa operações de rotações (na inserção e na remoção) para conseguir balancear uma árvore.

Existem quatro operações de rotações:

1. **Rotação simples à Esquerda**
2. **Rotação simples à Direita**
3. Rotação Dupla à Esquerda
4. Rotação Dupla à Direita



Importante
entender as
simples, pois as
duplas são
derivadas

Rotação simples a direita

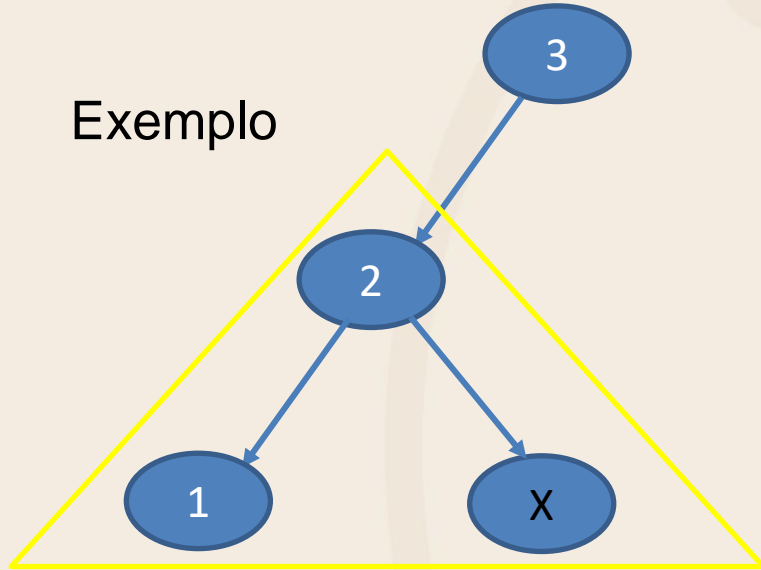
Exemplo



- Filho da Esquerda vira nova raiz
- A raiz original vira filho da direita da nova raiz

Rotação simples a direita

Exemplo



- Todos os elementos da sub-árvore da esquerda são menores que a raiz original

- Filho da Esquerda vira nova raiz
- A raiz original vira filho da direita da nova raiz

E se o Filho da Esquerda já tem um filho da Direita?

Rotação simples a direita

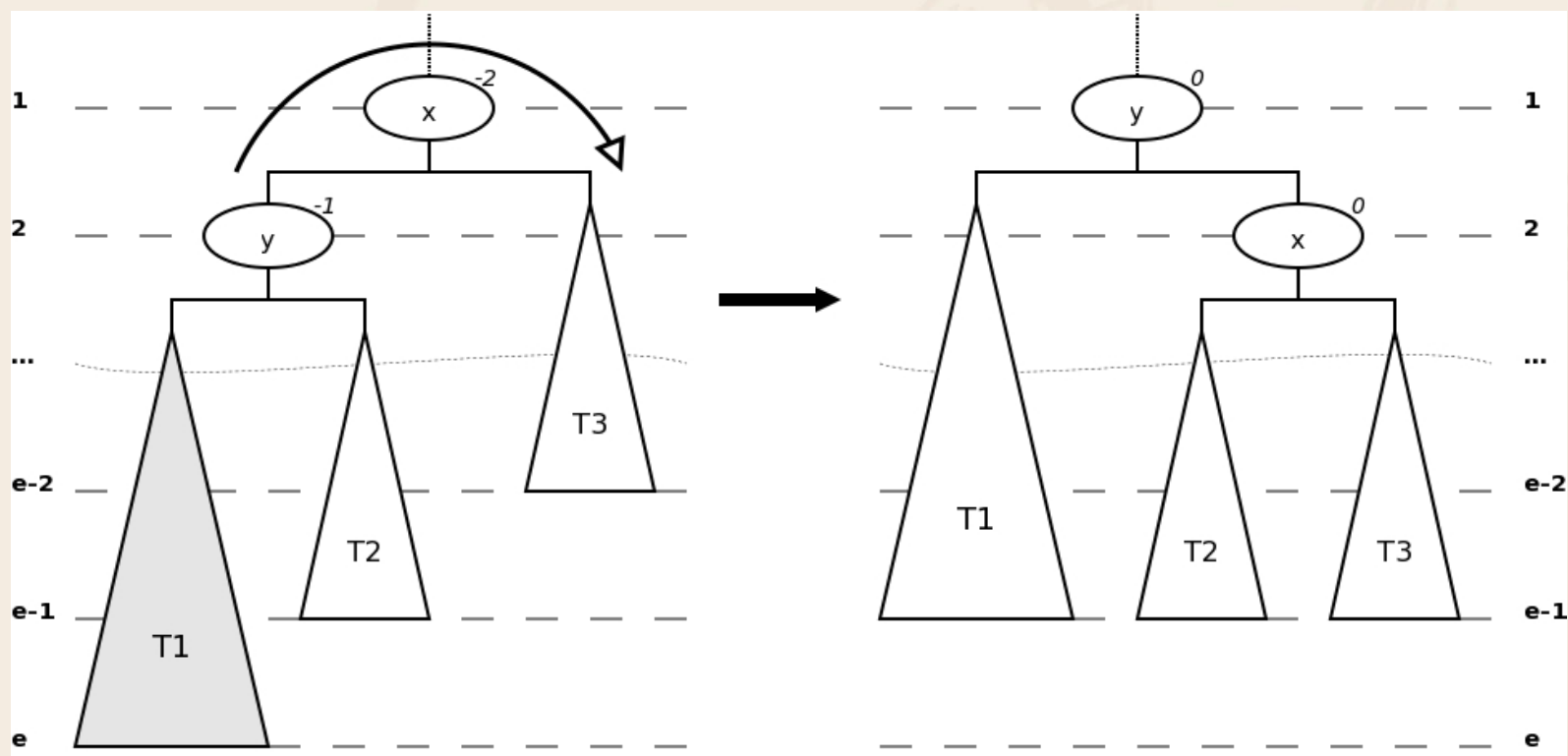
Exemplo



- Filho da Esquerda vira nova raiz
- A raiz original vira filho da direita da nova raiz
- O Filho da Direita do Filho da Esquerda vira Filho da Esquerda do Filho da Direita

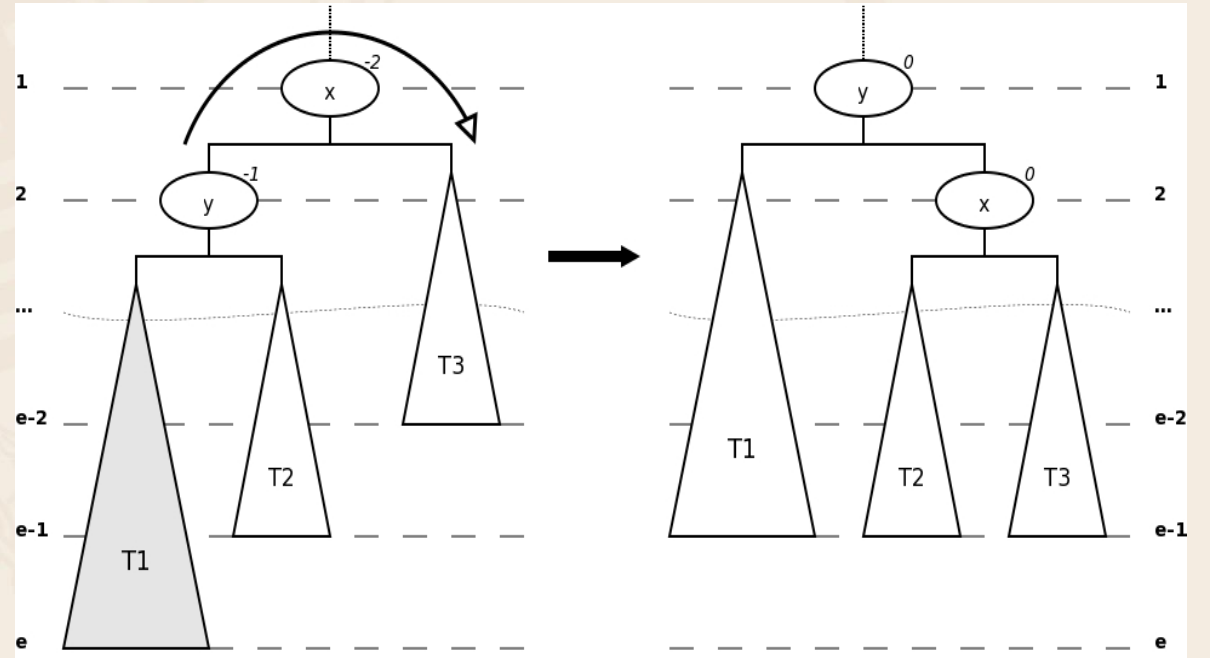
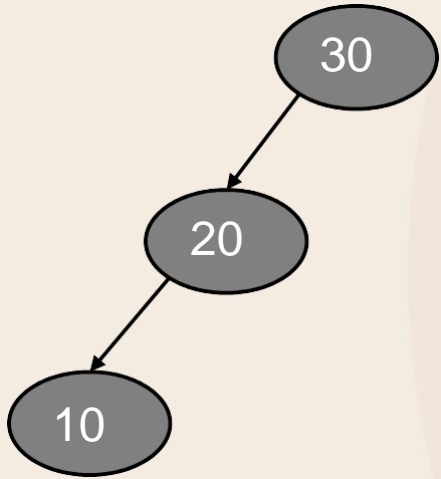
Rotação simples a direita

A figura a seguir descreve essa operação:



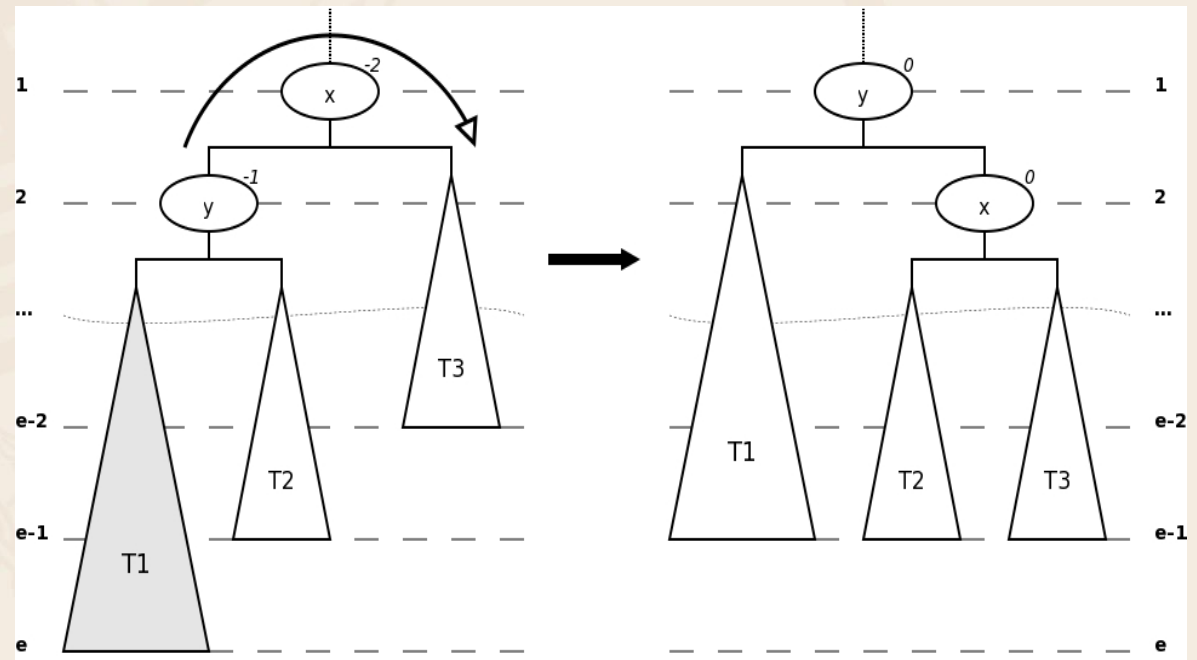
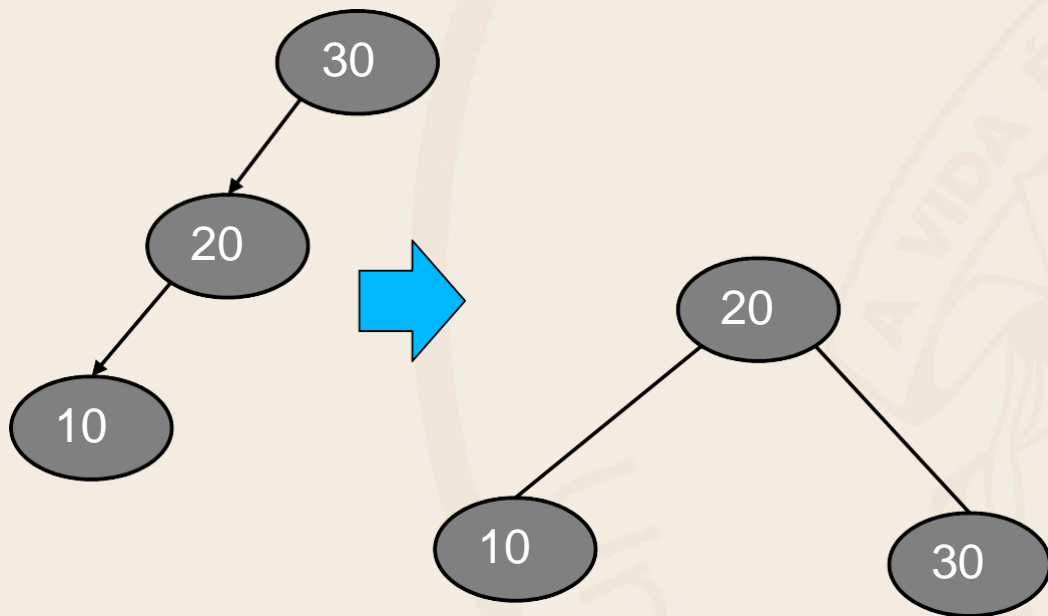
Rotação simples a direita

Exemplo

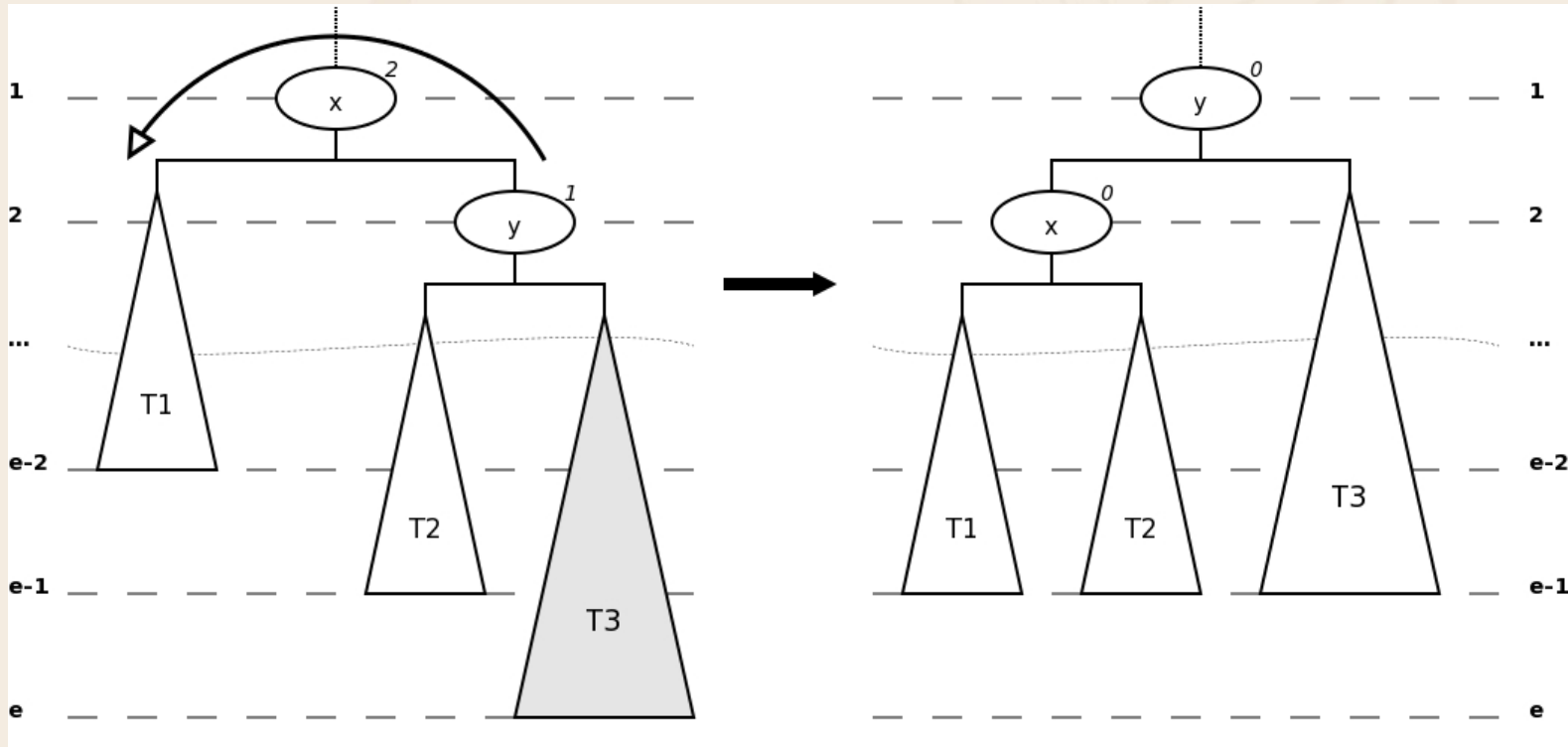


Rotação simples a direita

Exemplo

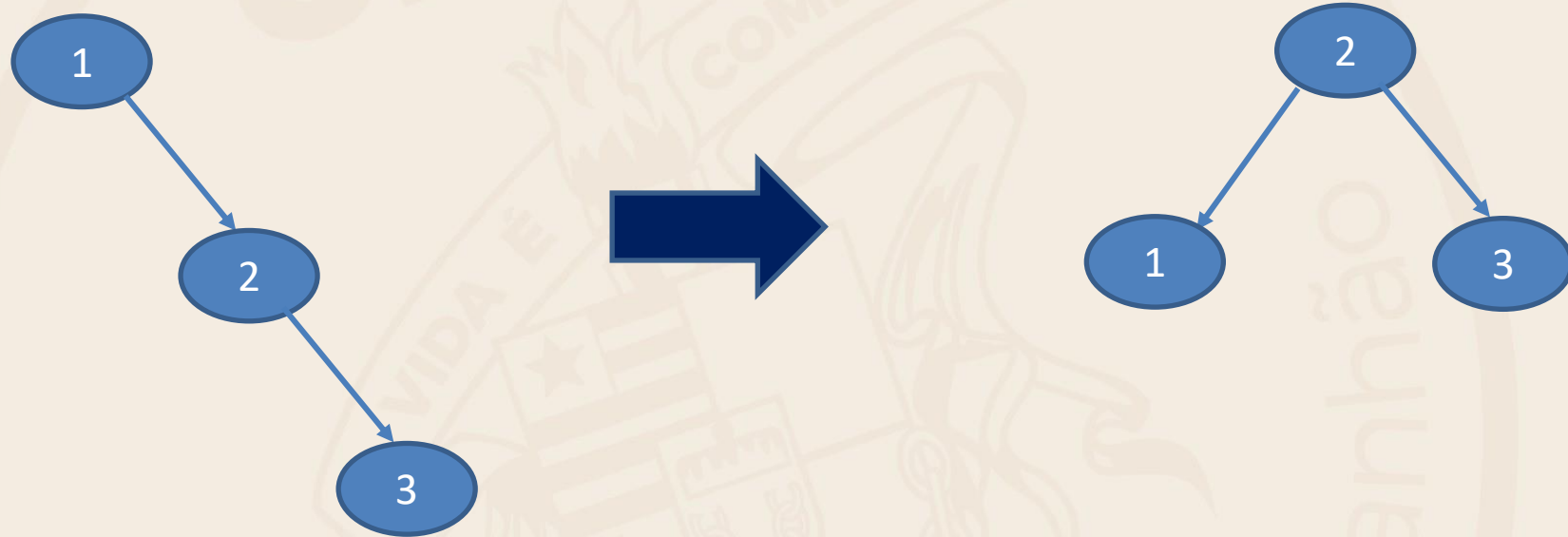


Rotação simples a esquerda



Rotação simples a esquerda

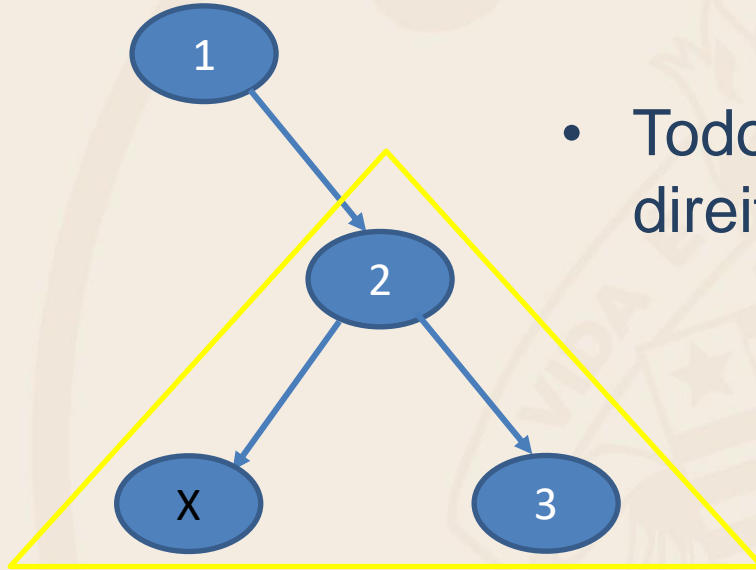
Exemplo



- Filho da Direita vira nova raiz
- A raiz original vira filho da esquerda da nova raiz

Rotação simples a esquerda

Exemplo



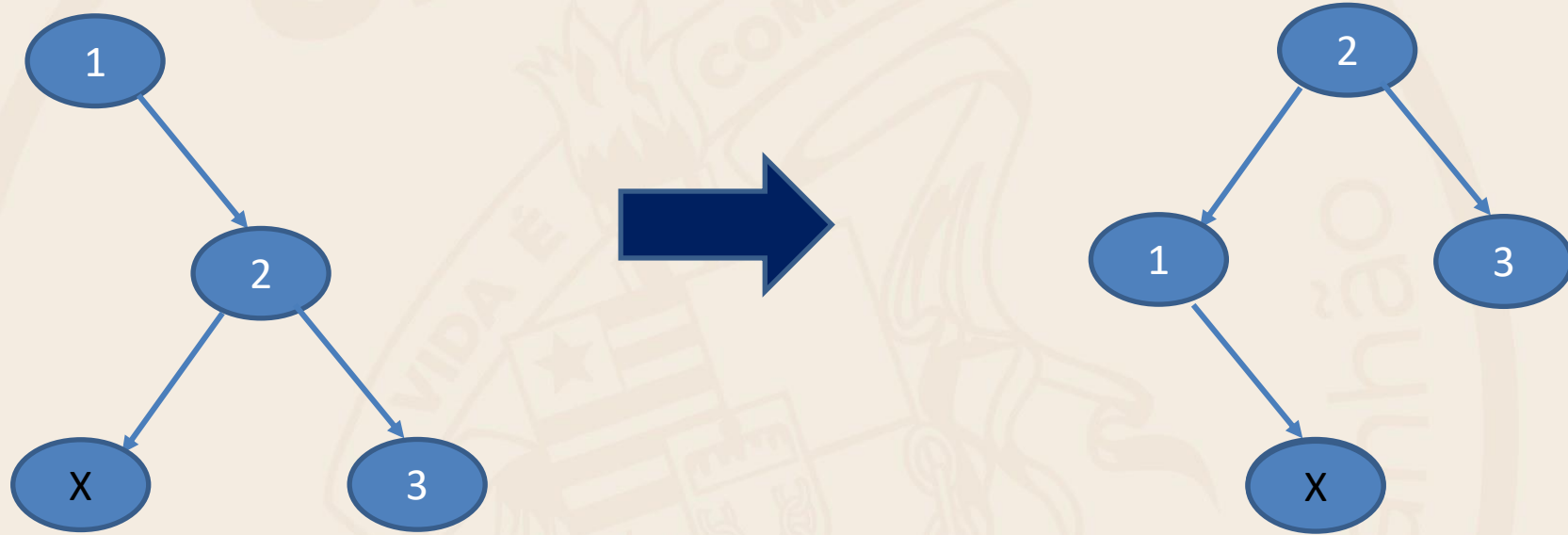
- Todos os elementos da sub-árvore da direita são maiores que a raiz original

- Filho da Direita vira nova raiz
- A raiz original vira filho da esquerda da nova raiz

E se o Filho da Direita já tem um filho da esquerda?

Rotação simples a esquerda

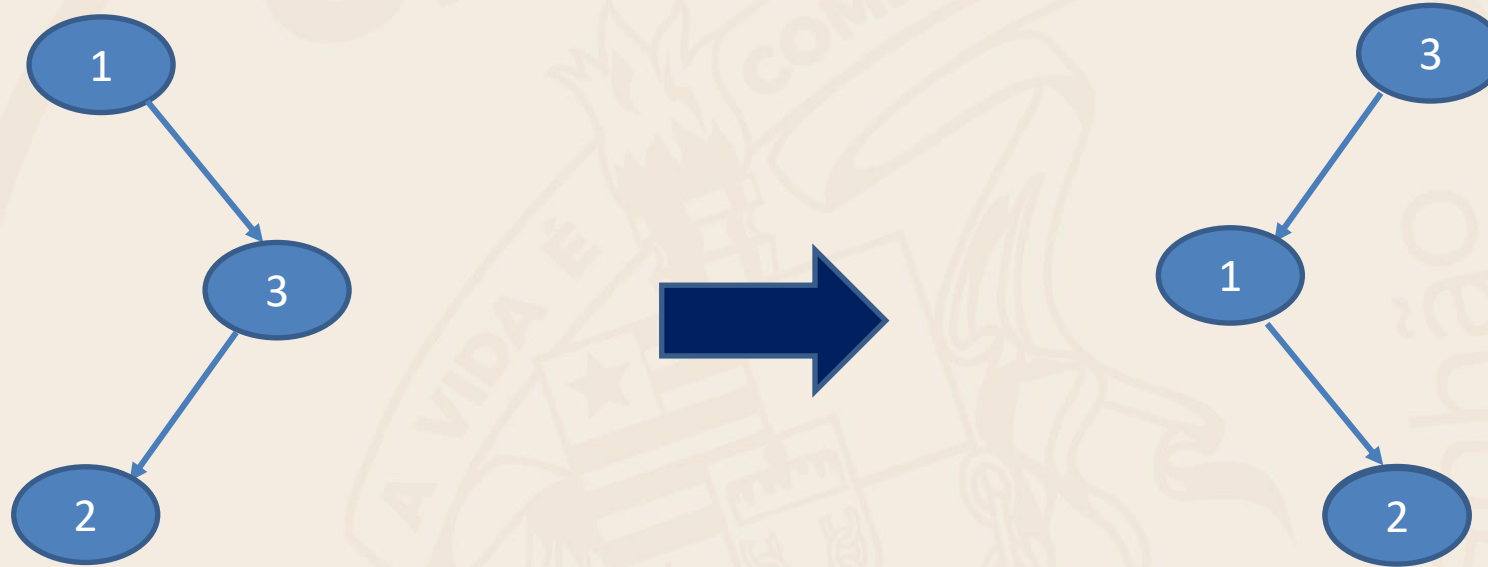
Exemplo



- Filho da Direita vira nova raiz
- A raiz original vira filho da esquerda da nova raiz
- O Filho da Esquerda do Filho da Direita vira Filho da Direita do Filho da Esquerda

Rotação dupla a esquerda

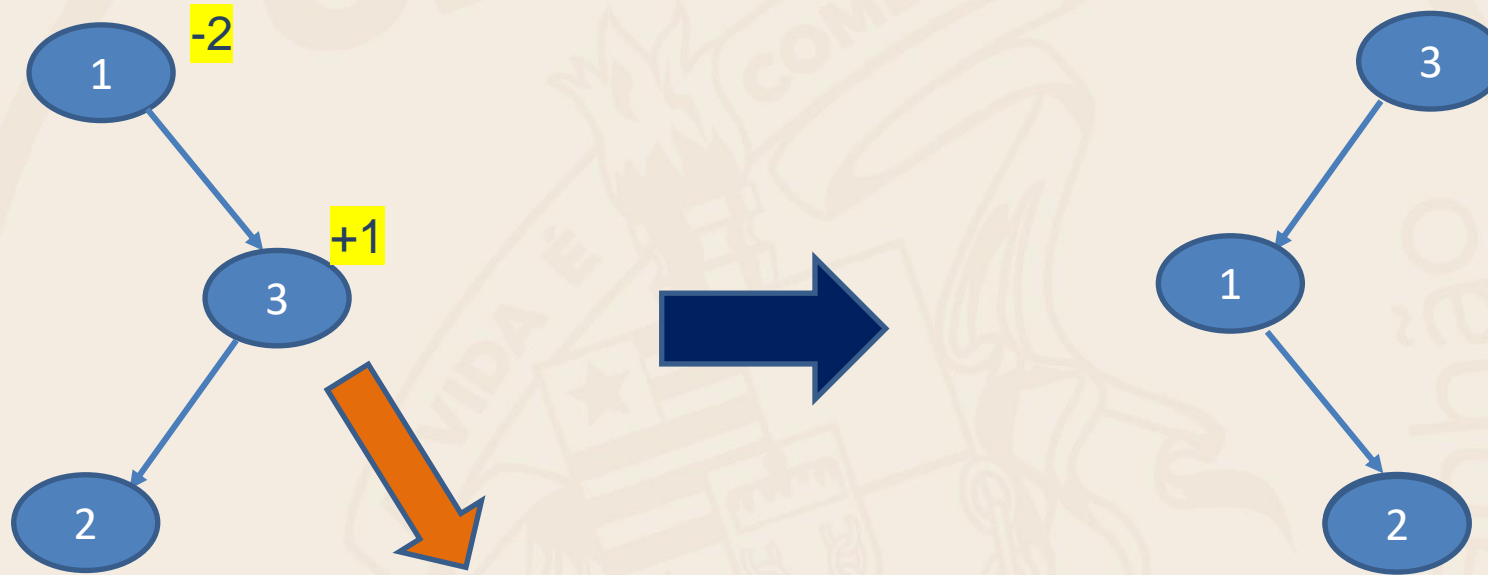
Considere
a seguinte
situação:



- Rotação à esquerda?
- Não Resolve.

Rotação dupla a esquerda

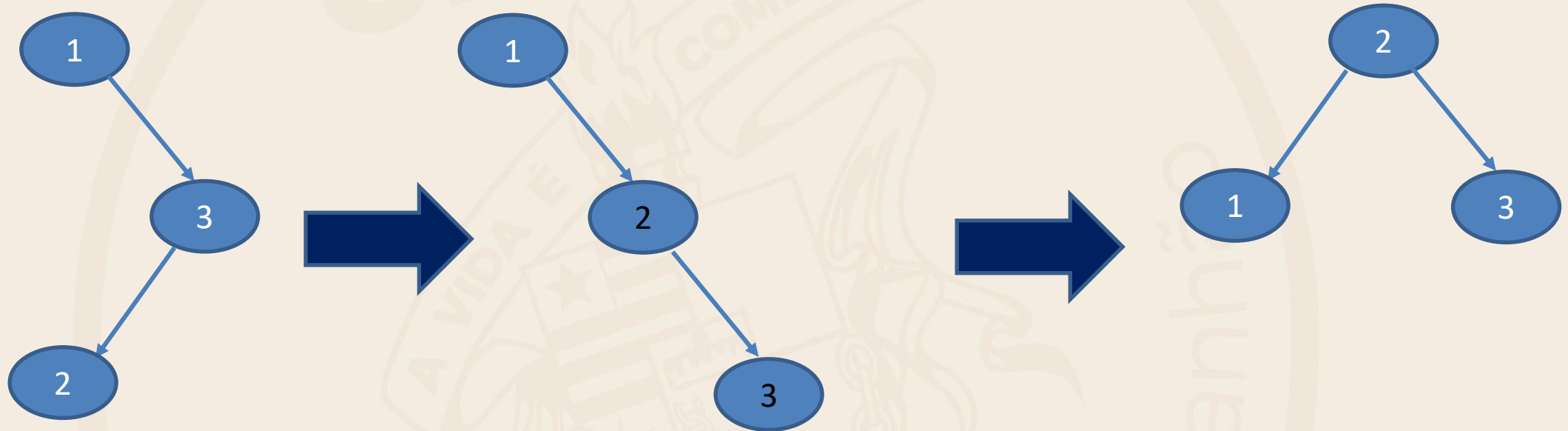
Considere a seguinte situação:



- Detectar: Sub-árvore da direita tem equilíbrio Positivo
- Rotação à esquerda?
- Não Resolve.

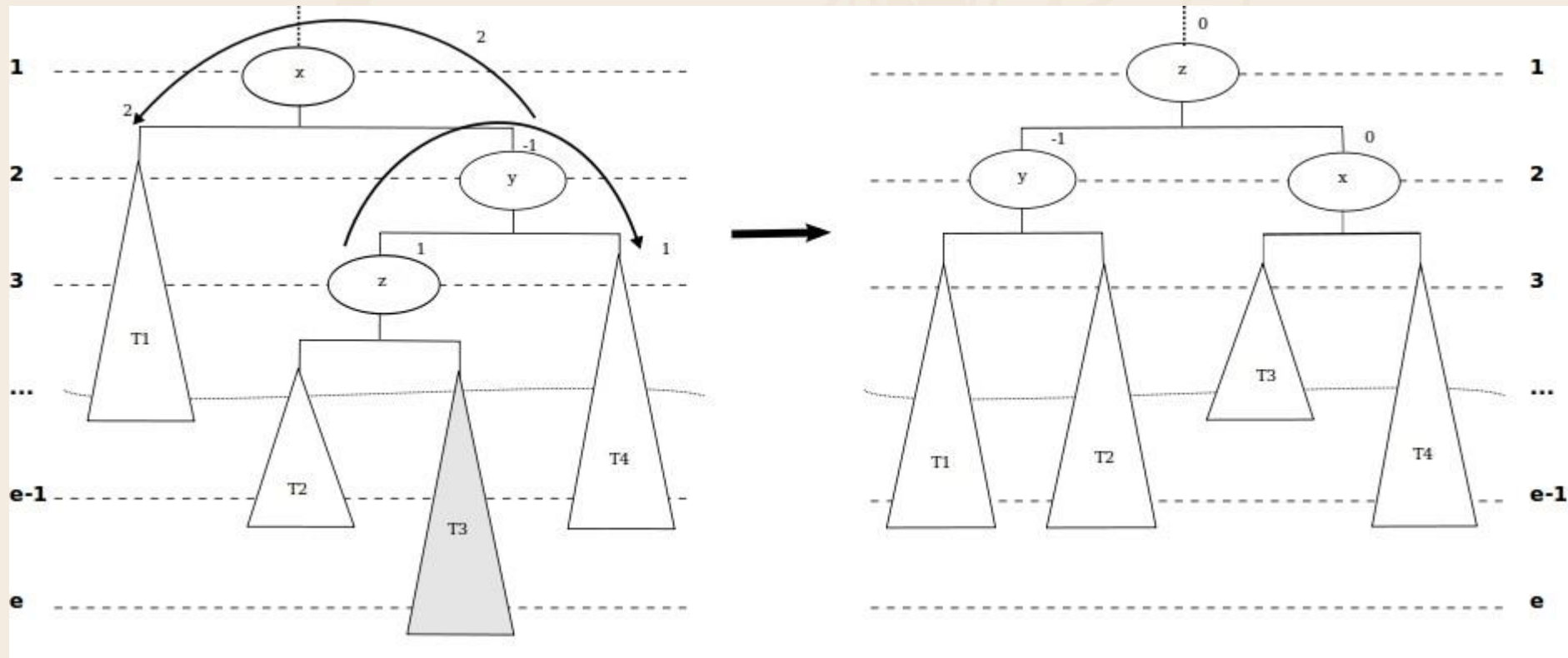
Rotação dupla a esquerda

Considere a seguinte situação:



- Solução:
 - 1) Rotação à direita na sub-árvore da direita
 - 2) Rotação à esquerda na sub-árvore original

Rotação dupla a esquerda



Rotação dupla a esquerda

Atividades

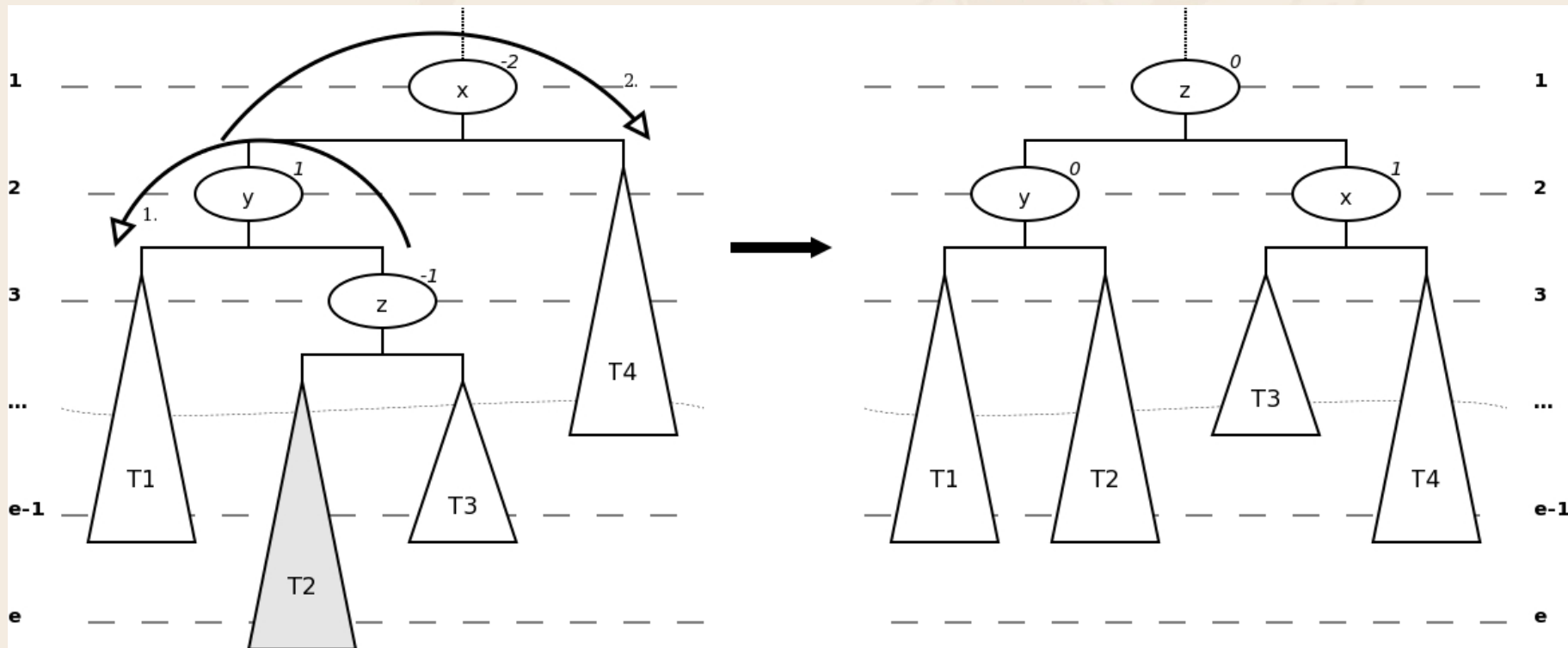
Insiram os seguintes valores e depois rotacione dupla a esquerda a partir da raiz:

a) [20, 40, 30]

b) [20, 40, 30, 50]

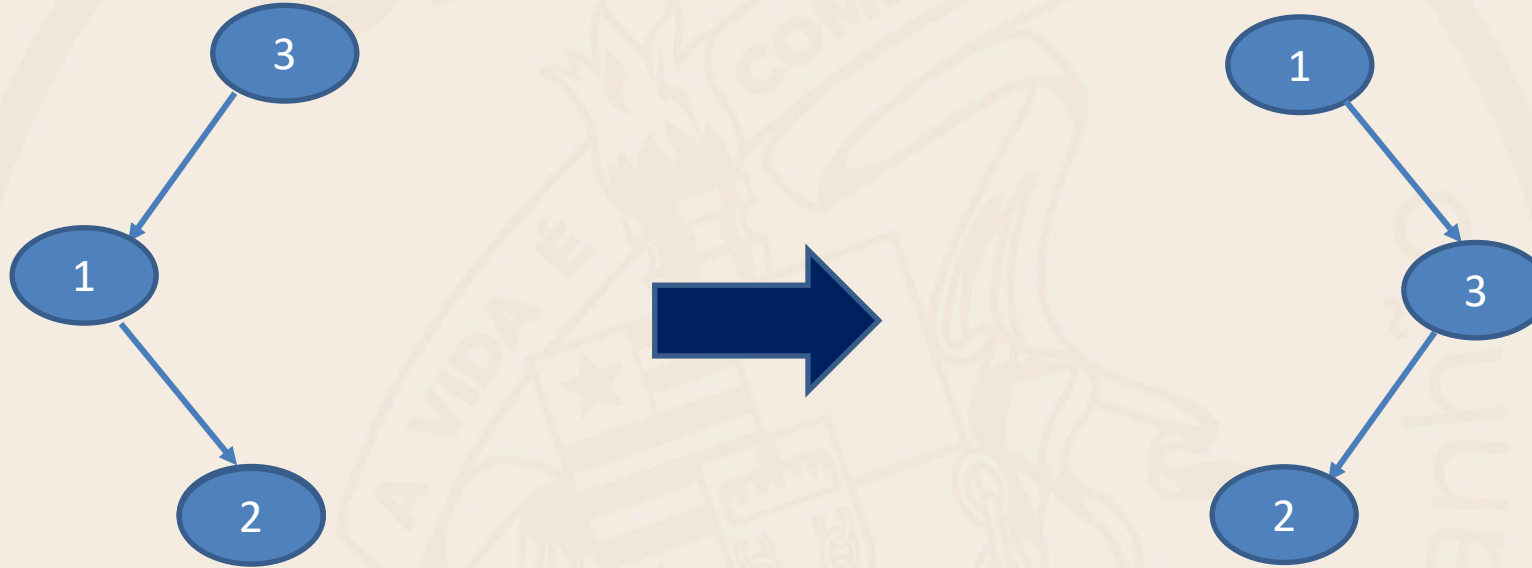
c) [20, 10, 40, 30, 50, 12]

Rotação dupla a direita



Rotação dupla a direita

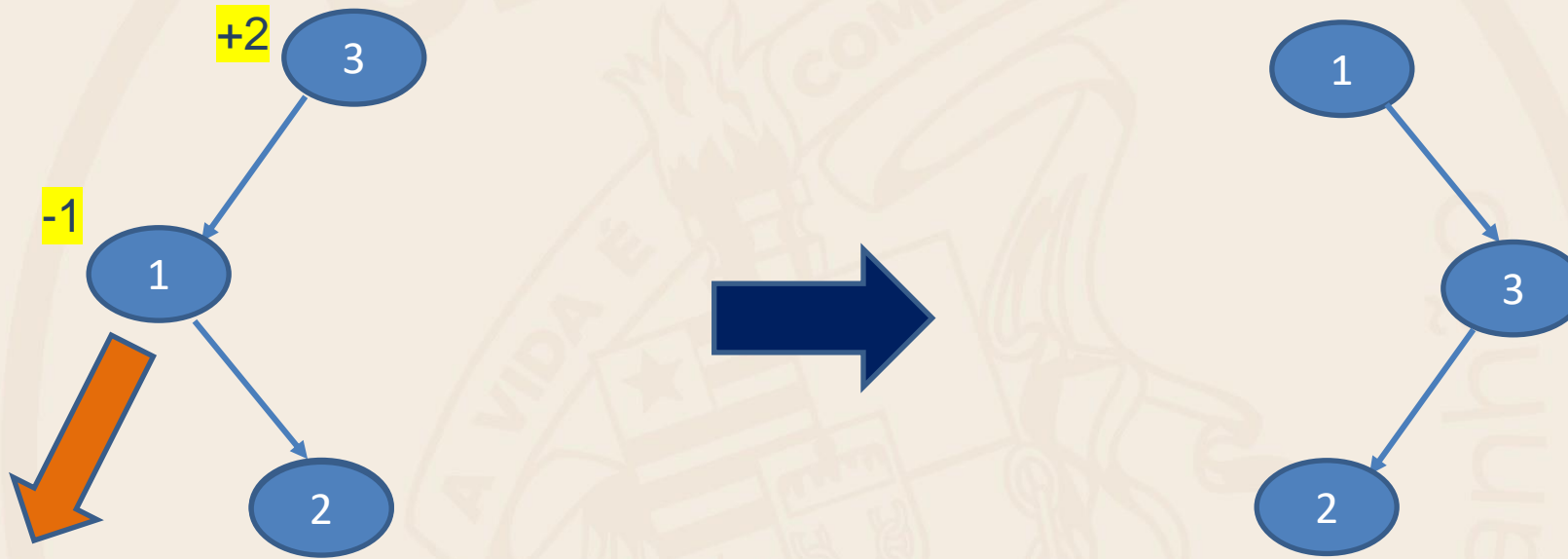
Considere a seguinte situação:



- Rotação à direita?
- Não Resolve.

Rotação dupla a direita

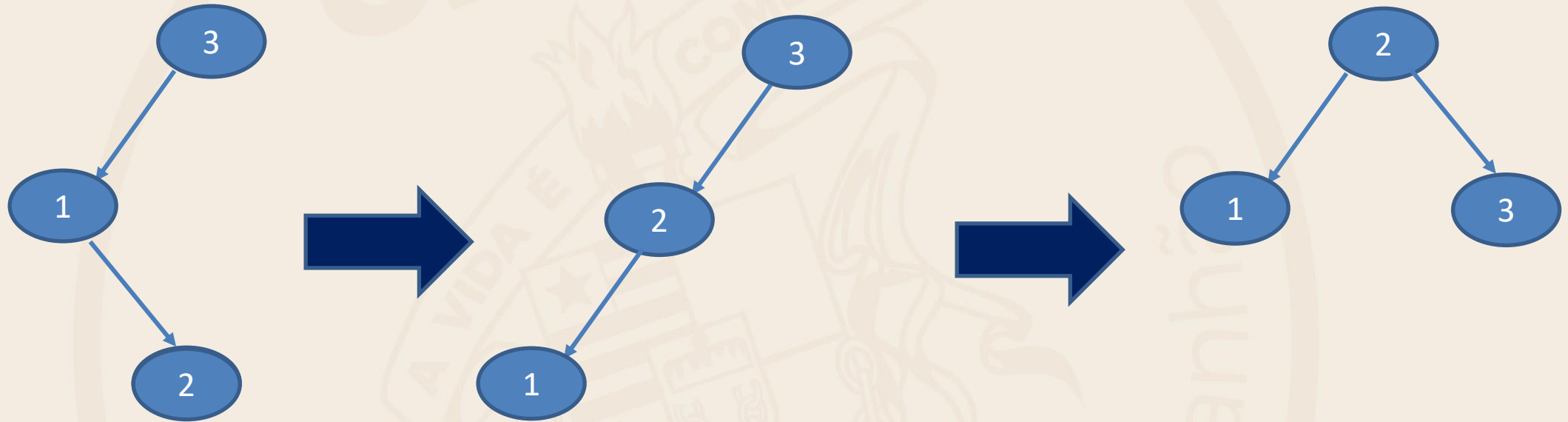
Considere a seguinte situação:



- Detectar: Sub-árvore da esquerda tem equilíbrio Negativo
- Rotação à direita?
- Não Resolve.

Rotação dupla a direita

Considere a seguinte situação:



- Solução:
 - 1) Rotação à esquerda na sub-árvore da esquerda
 - 2) Rotação à direita na sub-árvore original

Rotação dupla a direita

Atividades

Insiram os seguintes valores e depois rotacione dupla a direita a partir da raiz:

- a) [40, 20, 30]
- b) [40, 20, 30, 50]
- c) [40, 20, 30, 10, 50, 80]

O algoritmo

- Aplica-se, o mesmo algoritmo de inserção da árvore binária de busca.
- A cada inserção, checa-se os nós ascendentes.
- Caso o nó esteja desbalanceado, existem quatro diferentes configurações, como veremos a seguir.
- Para cada configuração, existe uma rotação indicada.
 - Desbalanceada a esquerda: rotação a direita
 - Desbalanceada a direita: rotação a esquerda
 - Desbalanceada a esquerda e direita: dupla a direita
 - Desbalanceada a direita e esquerda: dupla a esquerda

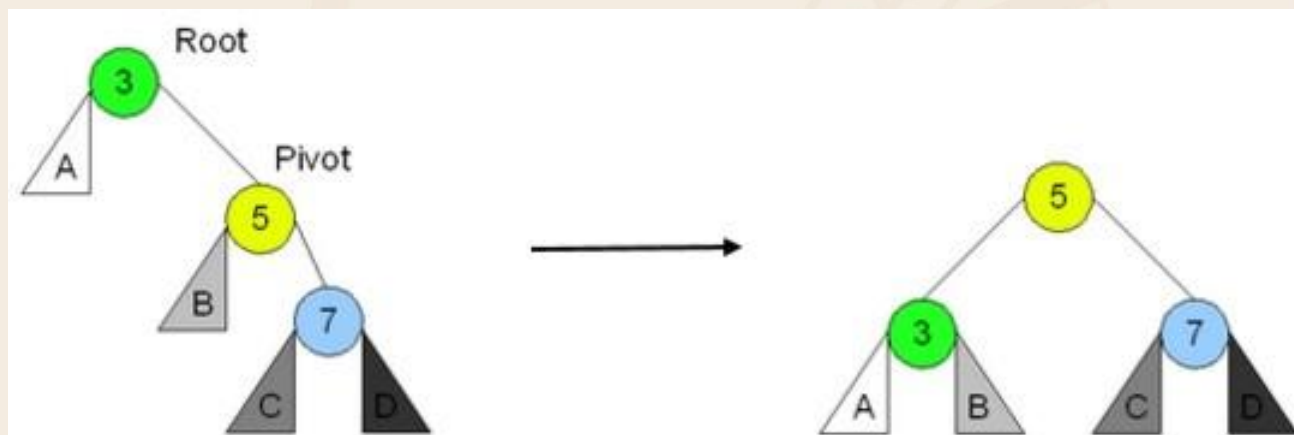
O algoritmo

Desbalanceada a esquerda: rotação a direita



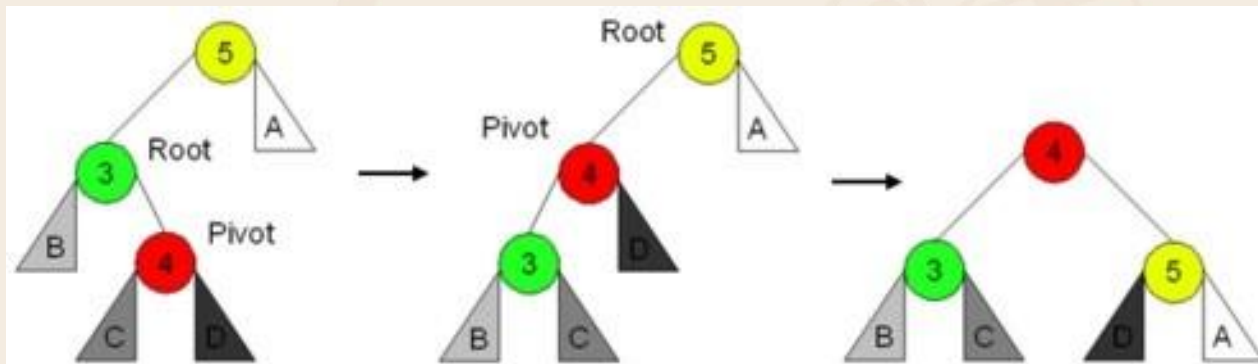
O algoritmo

Desbalanceada a direita: rotação a esquerda



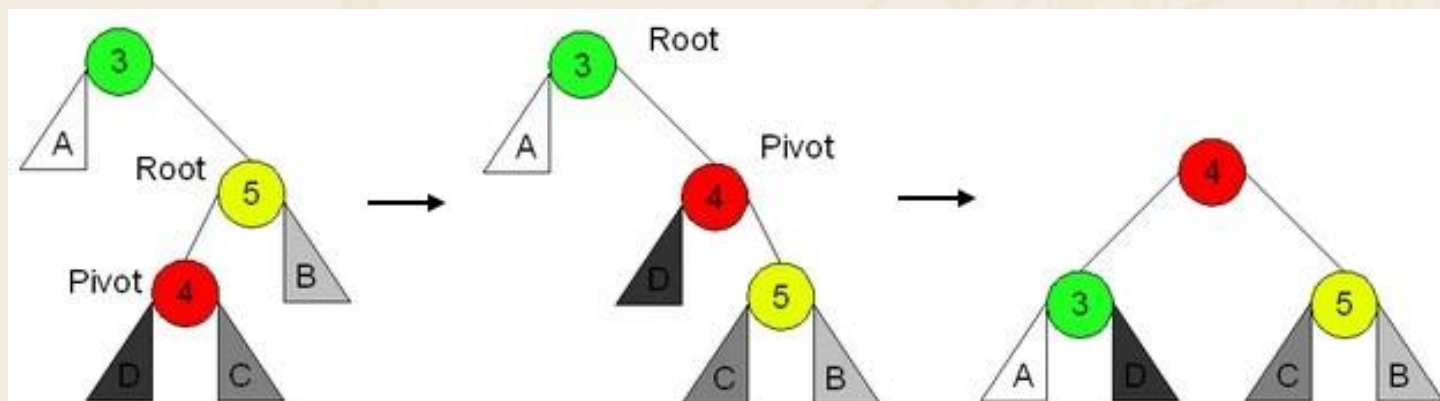
O algoritmo

Desbalanceada a esquerda e direita: dupla a direita



O algoritmo

Desbalanceada a direita e esquerda: dupla a esquerda



Exemplo

[10, 20, 30]

10

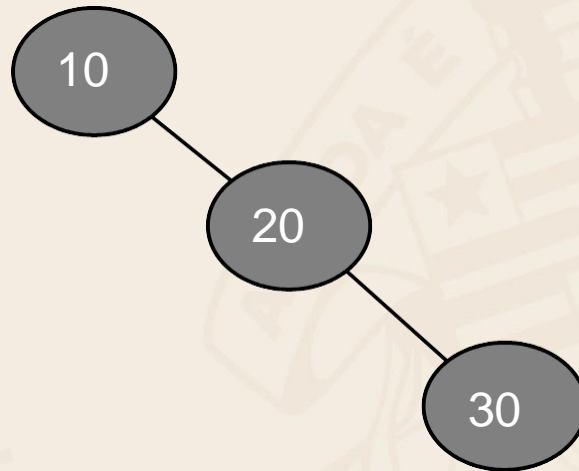
Exemplo

[10, **20**, 30]



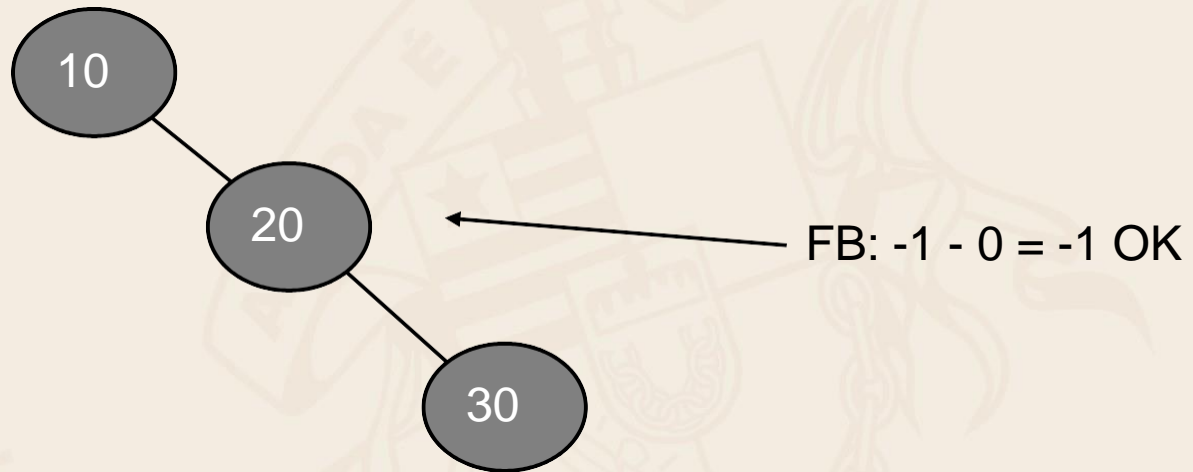
Exemplo

[10, 20, **30**]



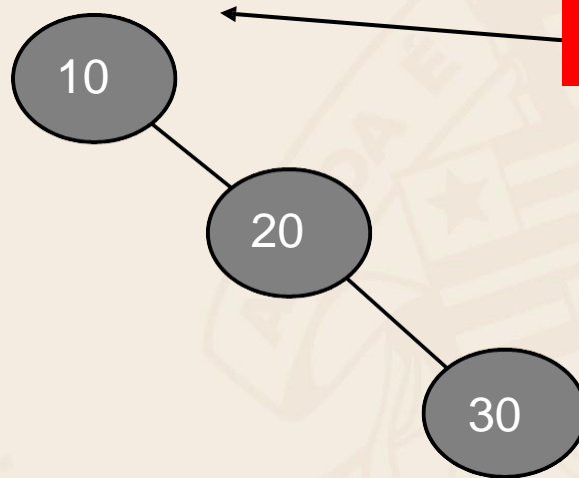
Exemplo

[10, 20, 30]



Exemplo

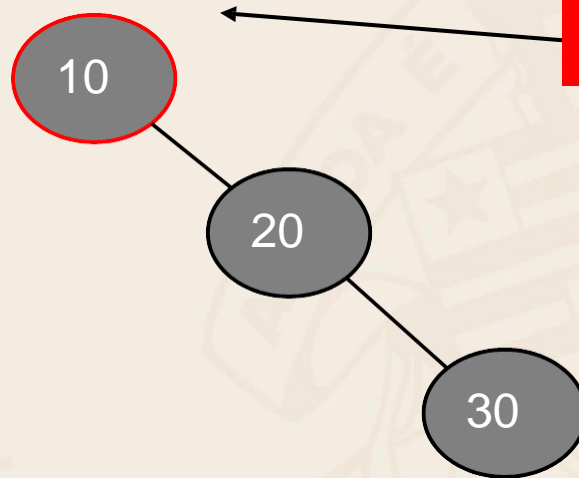
[10, 20, 30]



FB: $-1 - 1 = -2$ Perigo: desbalanceado

Exemplo

[10, 20, 30]

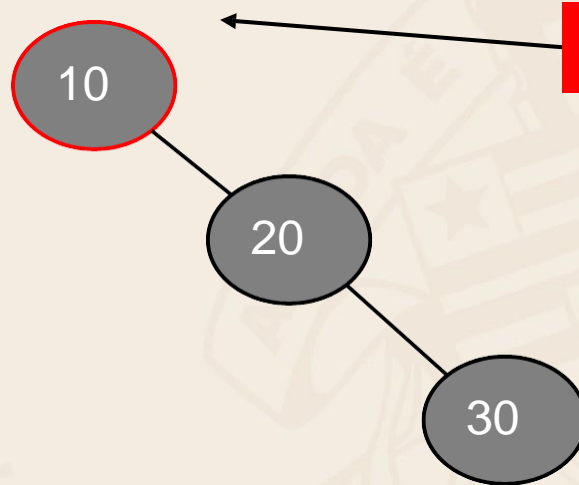


FB: $-1 - 1 = -2$ Perigo: desbalanceado

Qual a rotação indicada neste caso ?

Exemplo

[10, 20, 30]



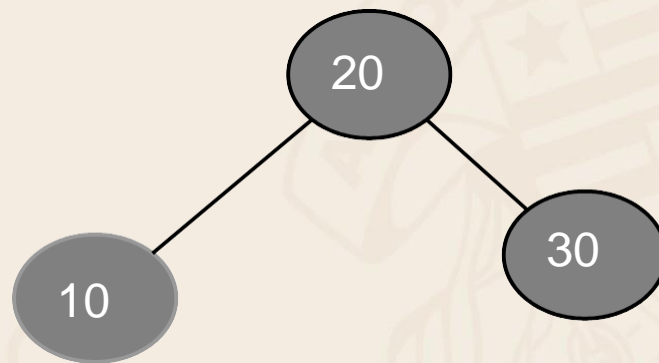
FB: $-1 - 1 = -2$ Perigo: desbalanceado

Qual a rotação indicada neste caso ?

Rotação simples a esquerda.

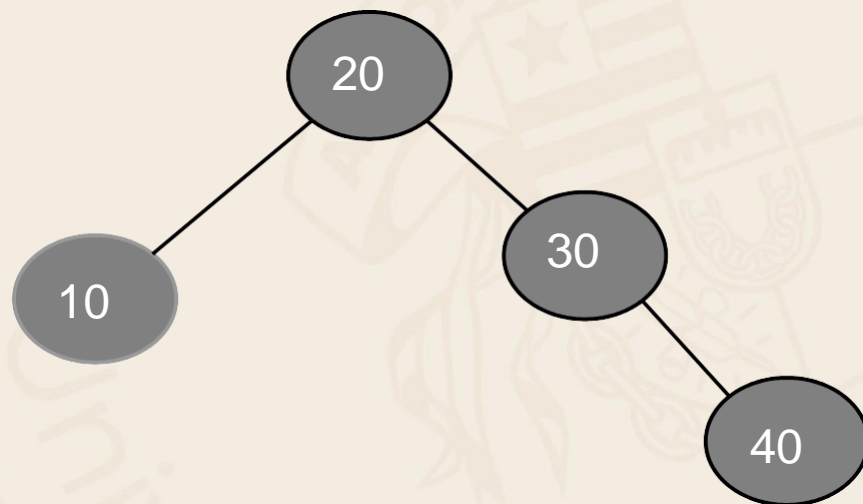
Exemplo

[10, 20, 30]



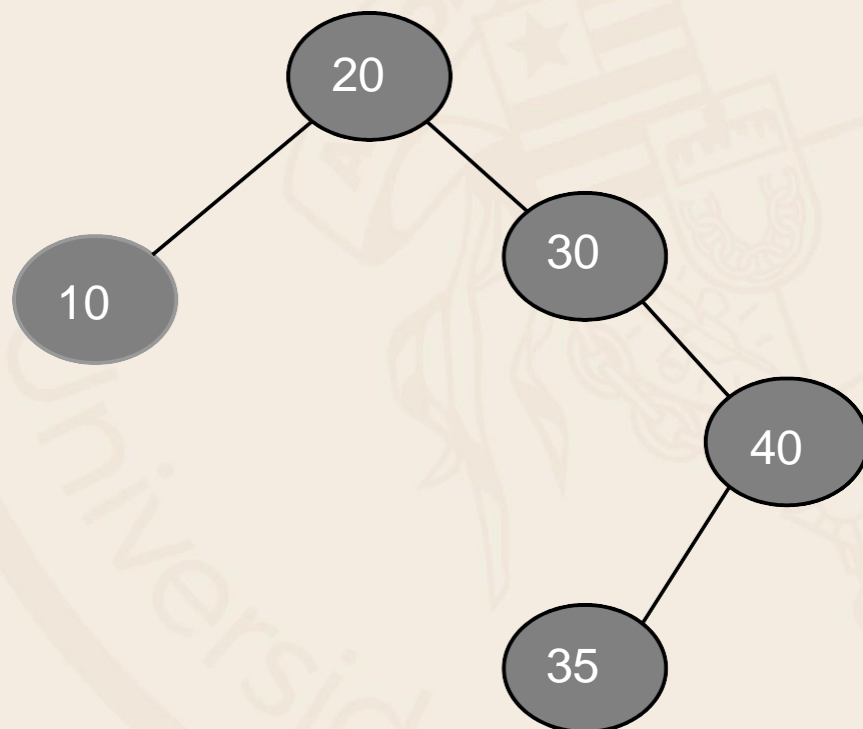
Exemplo

[10, 20, 30, **40**]



Exemplo

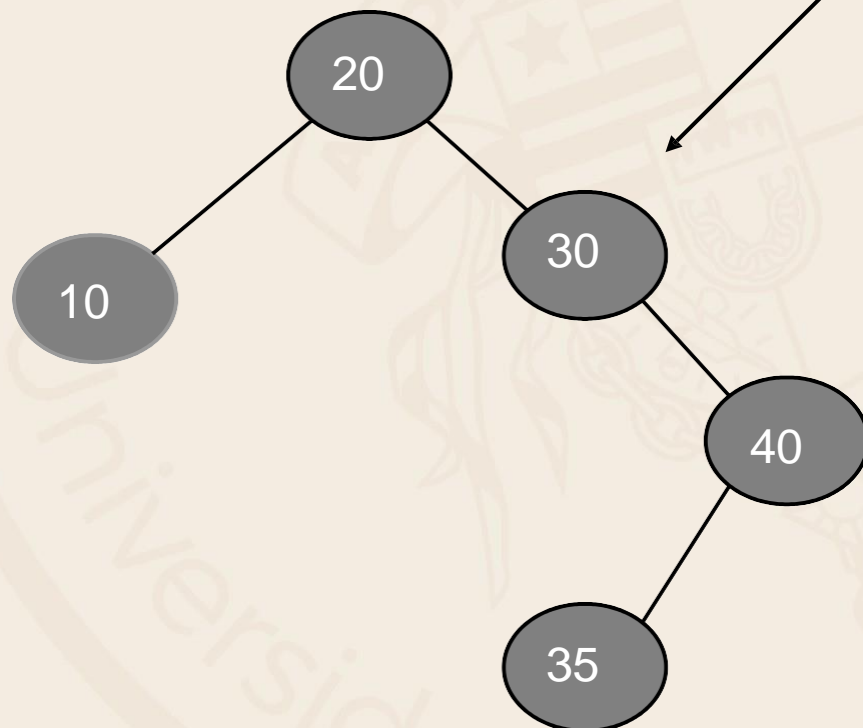
[10, 20, 30, 40, **35**]



Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]

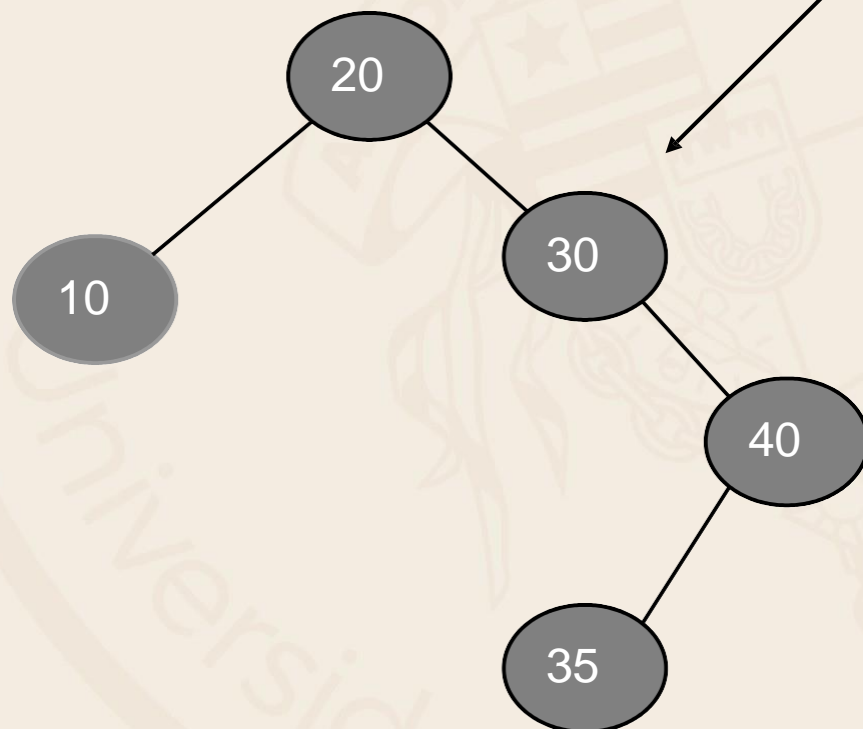
FB: $-1 - 1 = -2$ Perigo: desbalanceado



Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]

FB: $-1 - 1 = -2$ Perigo: desbalanceado

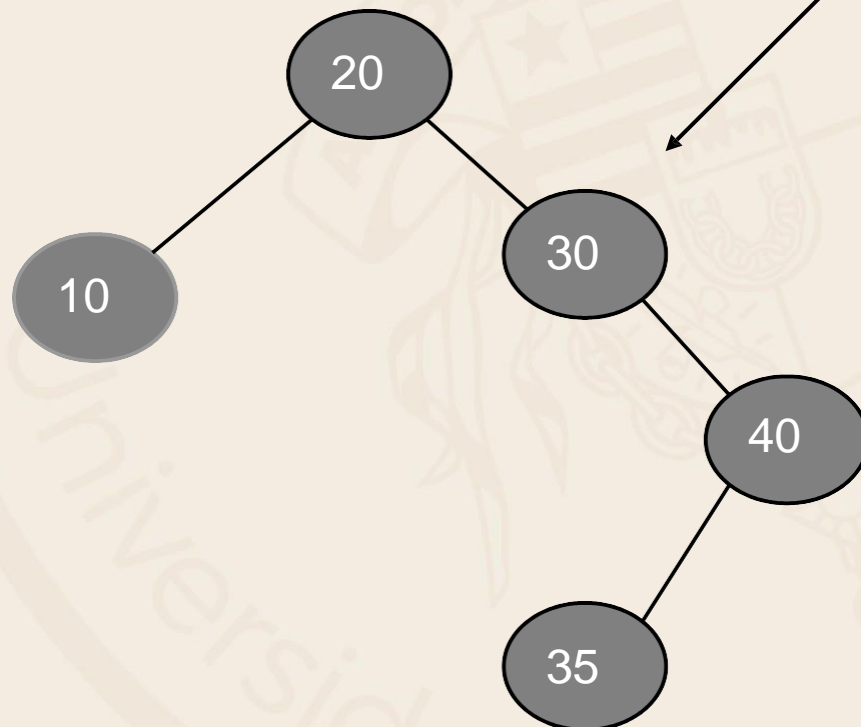


Qual a rotação indicada neste caso ?

Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]

FB: $-1 - 1 = -2$ Perigo: desbalanceado

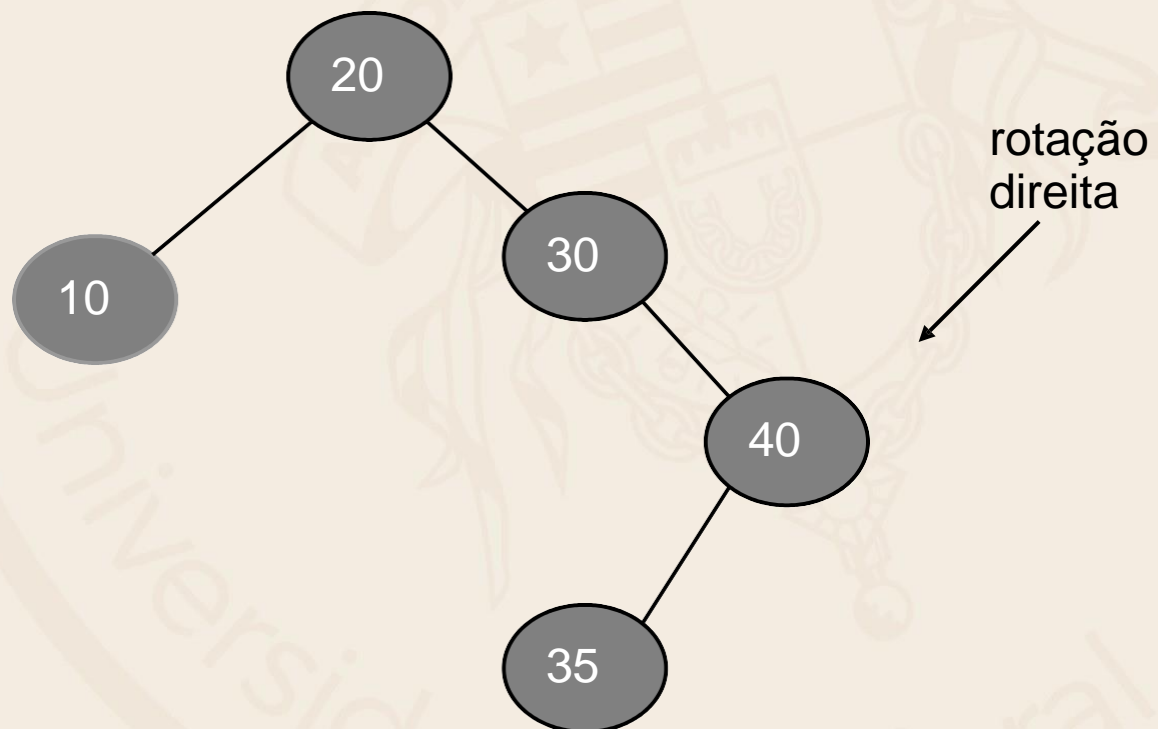


Qual a rotação indicada neste caso ?

Rotação dupla a esquerda.

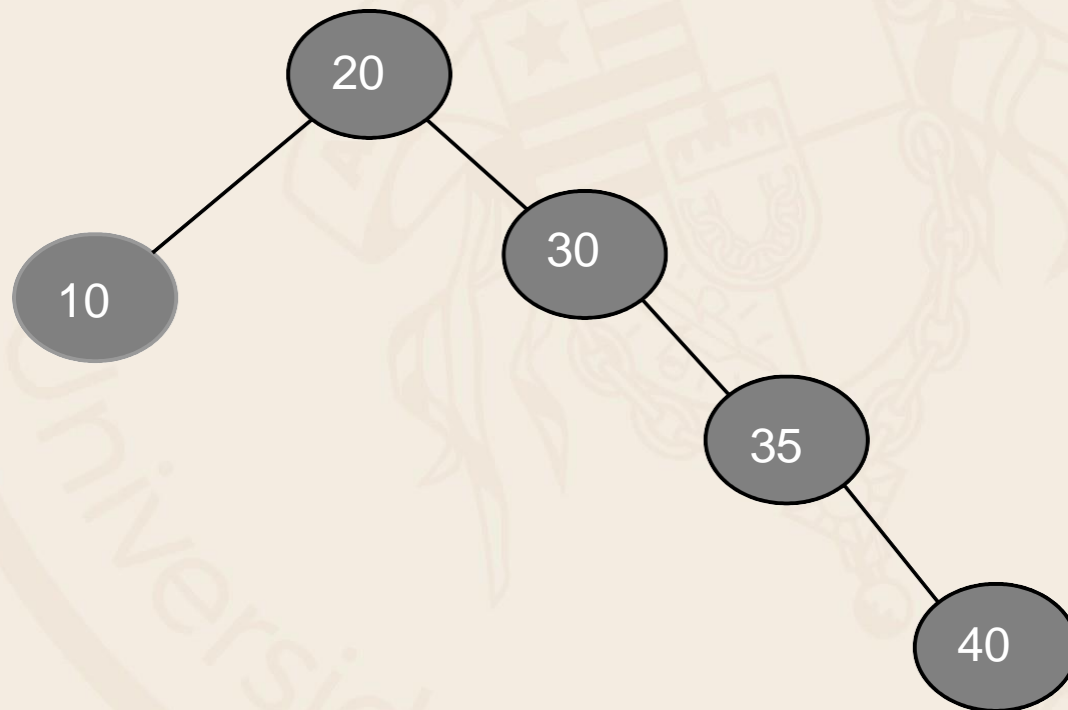
Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]



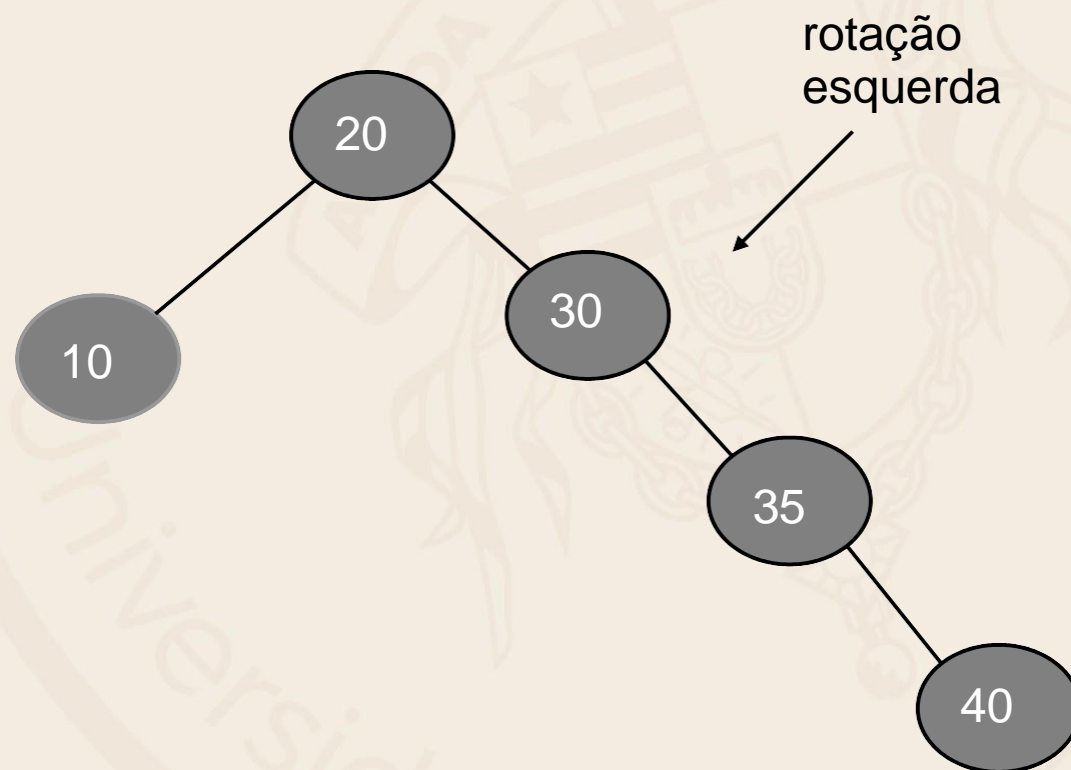
Exemplo

[10, 20, 30, 40, **35**]



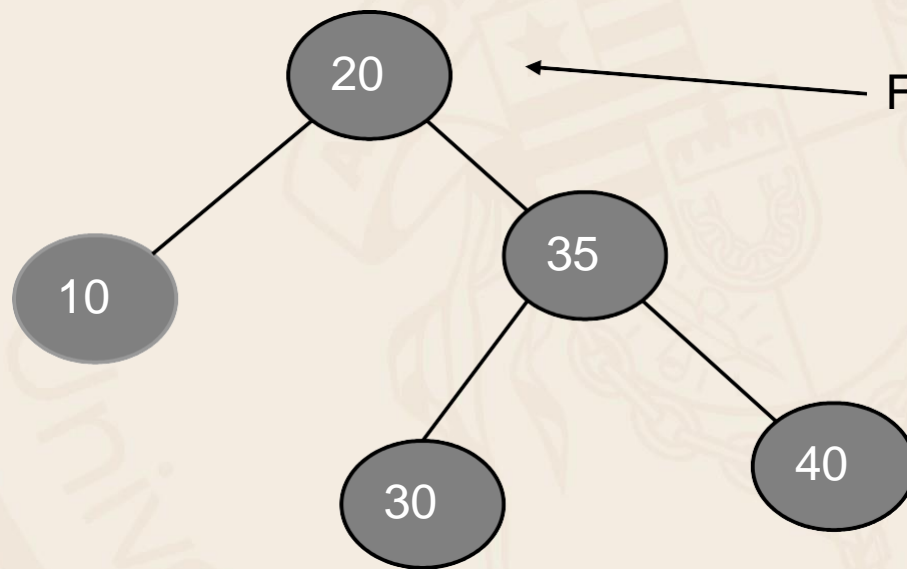
Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]



Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]

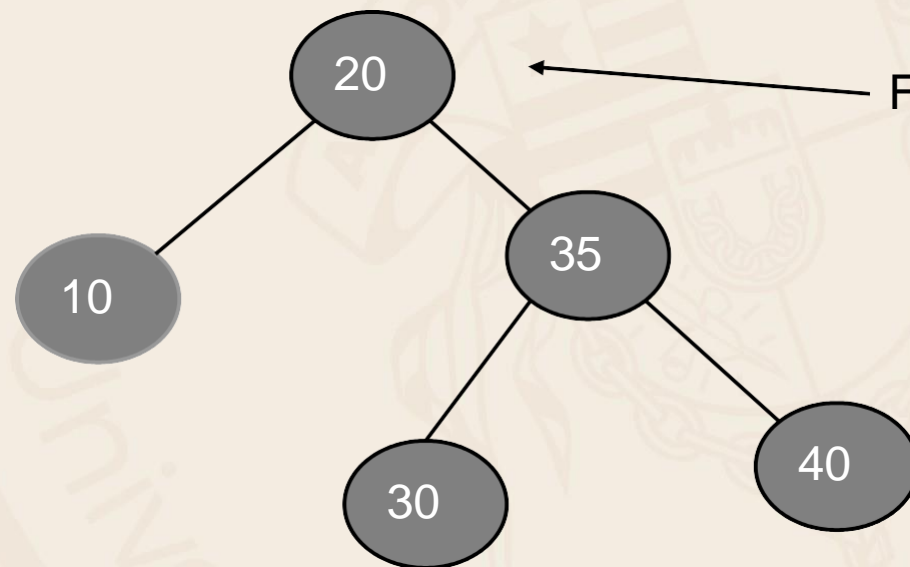


FB: $0 - 1 = -1$ OK

continua a checagem com o
no ascendente.

Exemplo

[10, 20, 30, 40, **35**]



← FB: $0 - 1 = -1$ OK

continua a checagem com o
no ascendente.

Atividades

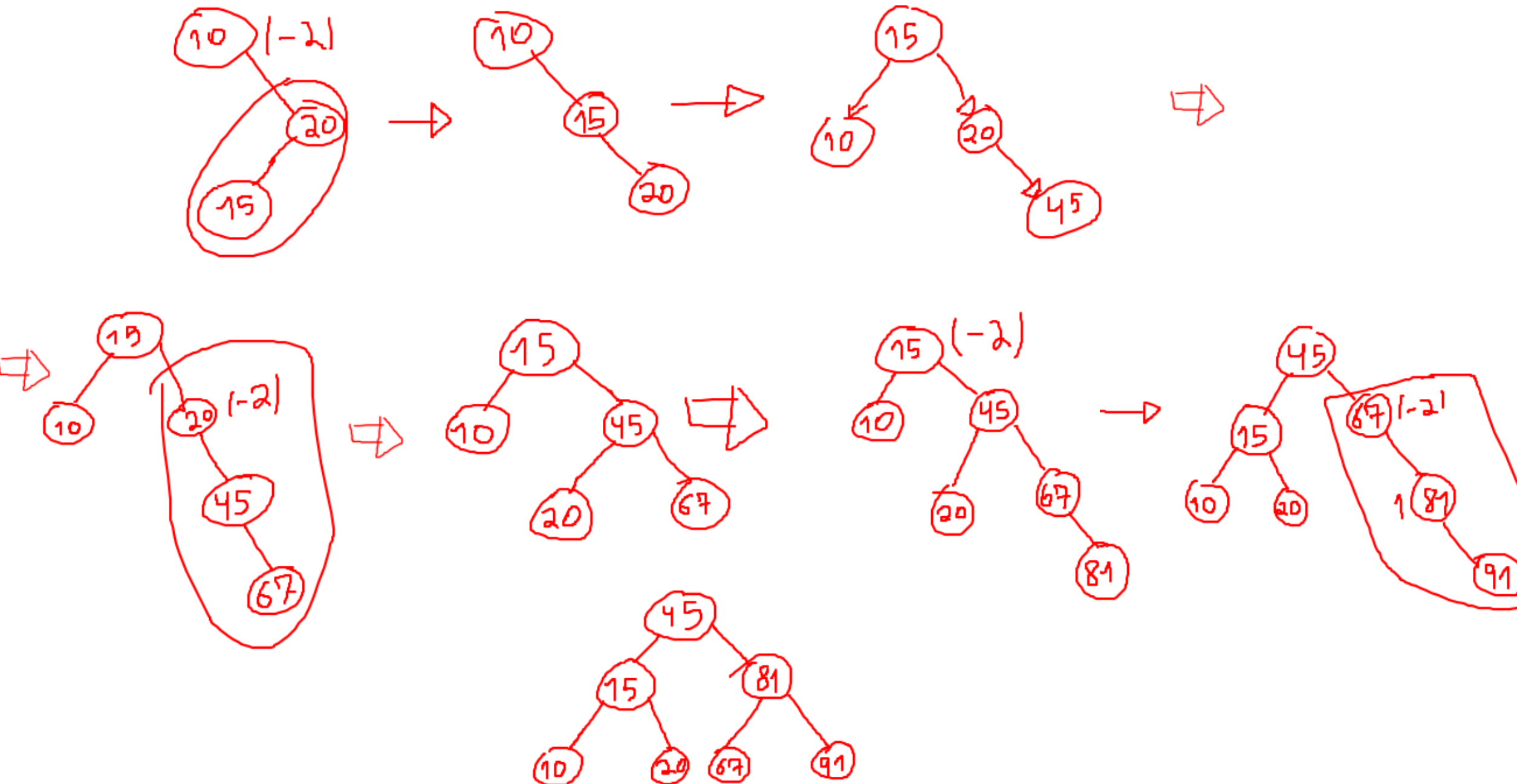
A partir de uma árvore AVL, insiram os seguintes valores:

a) [10, 20, 15, 45, 67, 81, 91, 10]

b) [1, 5, 80, 20, 67, 91, 8, 10]

c) [10, 20, 30, 50, 5, 15, 30]

a) [10, 20, 15, 45, 67, 81, 91, 10]



Atividades

Utilizando

a) [10, 20, 15, 45, 67, 81, 91, 10]

b) [1, 5, 80, 20, 67, 91, 8, 10]

c) [10, 20, 30, 50, 5, 15, 30]

Atividades

A partir de uma árvore AVL, insiram os seguintes valores:

- a) [30, 15, 50, 5, 10, 20]
- b) [80, 40, 100, 120, 90, 30]
- c) [20, 10, 40, 30, 50, 12 , Exclua o 10, 80, 41, 37]
- d) [10, 50, 4, 90, 20, 8]
- e) [79, 25, 3, 7, 28, Exclua o 7, 80, 91, Exclua o 25, 82]

Apresentem o passo a passo da AVL ao incluir, excluir e rotacionar nós.

