妙解

1. 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k!$

利用夹逼定理。首先容易注意到，$n\geq 1$时，有

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\geq 1$$

其次，$n\geq 3$时，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} &\leq \frac{1}{n!}\left((n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!\right)\\ &=\frac{(n-2)(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!}+\frac{(n-1)!}{n(n-1)!}+1\\ &=\frac{n-2}{n(n-1)}+\frac{1+n}{n}=\frac{n^2+n-3}{n(n-1)}\rightarrow 1\,(n\rightarrow+\infty)\end{aligned}$$

故 $\exists N=3$，当$n>N_0$时有两不等式成立，故$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k!=1$

评价

这个题目的放大部分非常有指导意义，也就是怎么把握多项式放大深度。一开始做此题时，我就在想如下放缩

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\leq\frac{1}{n!}(n\cdot n!)=n$$

显然这个放缩是无效的，因为结果是发散的。然后认为此路不通，便放弃。

一般情况下，我们有可能会遇到如下类型的多项式：

$$A=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

其中$\{x_n\}$是递增的，我们希望对它进行放大，一般情况下，我们会用这样的办法：

$$
\begin{aligned}
A &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
&\leq n \cdot x_n
\end{aligned}
$$

但很多情况下（例如本题），这样的放缩精度是不够的，这时候，我们考虑稍微加大放缩强度，但是仍然维持较好的精度，进行这样的操作：

$$
\begin{aligned}
A &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
&\leq (n-1)\, x_{n-1} + x_n
\end{aligned}
$$

若还不行，则可以更进一步

$$
\begin{aligned}
A &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
&\leq (n-2)\, x_{n-2} + x_{n-1} + x_n
\end{aligned}
$$

通过这样的操作，可以逐级增大放缩程度进行试探，从而获得希望的值。当然，缩小也是一样的道理，例如下面的$\{x_n\}$是递减的，这样就有

$$
\begin{aligned}
A &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
&\geq (n-2)\, x_{n-2} + x_{n-1} + x_n
\end{aligned}
$$