

Análisis de la direccionalidad en materiales periódicos

Nicolás Guarín-Zapata^a, Camilo Valencia^a, Juan Gomez^b

^aUniversidad EAFIT, Escuela de Ciencias Aplicadas e Ingeniería, Medellín 050022, Colombia

^bRisk and Design Consulting, Medellín 050022, Colombia

HISTORIA DEL ARTÍCULO

Compilado 3 de julio de 2023

RESUMEN

El estudio de los metamateriales y los materiales periódicos ha despertado un interés creciente en varias las disciplinas. Éstos son anisótropos y sus propiedades presentan direccionalidad. Por ejemplo, la velocidad de las ondas depende de la dirección de propagación. Además, son heterogéneos y su direccionalidad depende de su espectro. Los enfoques habituales para describir la anisotropía han utilizado la aproximación de longitud de onda grande — correspondiente a propiedades estáticas—. Aquí presentamos una medida de anisotropía basada en el comportamiento dinámico. El método recibe las superficies de dispersión de los análisis de Bloch y genera una curva/superficie con la direccionalidad codificada en ella. Presentamos resultados para elastodinámica, pero el enfoque es aplicable a otros fenómenos.

PALABRAS CLAVE

Material periódico; cristal fonónico; relación de dispersión; análisis de Bloch; anisotropía

KEYWORDS

Periodic material; phononic crystal; dispersion relation; Bloch analysis; anisotropy

1. Introducción

En diversas disciplinas, existe un interés creciente en la investigación y el diseño de metamateriales y materiales periódicos. [1–3]. La aparición de propiedades inusuales como la masa negativa efectiva, la refracción negativa, la relación de Poisson negativa y el ocultamiento (*cloaking* en inglés) acústico/electromagnético ha llamado la atención de científicos [4–6]. Como resultado, existe una tendencia en el diseño de microestructuras para controlar las propiedades macroscópicas. [7–11]. Aunque las simulaciones numéricas directas del material como un todo, considerando la microestructura completa, son factibles [12], el enfoque más común es sacar ventaja de la periodicidad del material y modelar una sola celda [5,13]. Esto se logra usando el teorema de Bloch [14]. El teorema de Bloch se desarrolló en la física del estado sólido [15,16], pero desde entonces se ha aplicado a la electrodinámica [2], acústica [3,17] y elastodinámica [5,18,19].

Este es un manuscrito original de un artículo publicado por Taylor & Francis en Mechanics of Advanced Materials and Structures el 2 de julio de 2023, disponible en: <https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2226958>

Juan Gómez estaba anteriormente vinculado a la Universidad EAFIT

CONTACTO: Nicolás Guarín-Zapata. Email: nguarinz@eafit.edu.co

Los materiales periódicos son anisotrópicos debido a las simetrías discretas en sus celdas unitarias [16,20–22]. Este comportamiento anisotrópico se traduce en direccionalidad en la propagación de ondas, es decir, la velocidad de las ondas depende de la dirección de propagación. Si queremos estudiar la propagación de ondas en un material periódico, nos interesa caracterizar esta direccionalidad. Además, debido a la naturaleza heterogénea de los materiales periódicos, su anisotropía depende de la frecuencia de las ondas que se propagan a través de ellos. Es decir, podríamos hablar de una *anisotropía dinámicamente inducida*. Este comportamiento ha sido reportado en la literatura[23,24] y está relacionado con la interacción de las ondas y la microestructura. Mediada por la relación entre las longitudes de onda y la longitud característica en el material. Ilustramos este fenómeno para una red de masa-resorte 2D, donde podemos calcular la solución analíticamente.

Se han realizado algunos esfuerzos para definir descriptores que cuantifiquen el nivel de anisotropía de los materiales. [25–27], no son perfectos porque reducen toda la información a un solo número y no proporcionan información sobre la dirección preferida de propagación o las simetrías presentes. Guarín-Zapata et al. [11] usó un enfoque cualitativo para comparar la anisotropía de diferentes materiales transversalmente isotrópicos y seleccionarlos para ajustar el comportamiento de compuestos helicoidales. Esto se usó para materiales transversalmente isotrópicos, donde las relaciones de dispersión pueden obtenerse analíticamente [28] y se usó para analizar una sola capa de un compuesto. Para materiales heterogéneos y materiales con otras simetrías además de la isotropía y la isotropía transversal, este tipo de información no está disponible analíticamente y se requieren simulaciones numéricas. Por lo tanto, se desea una herramienta general para analizar la anisotropía global de los materiales.

Aquí presentamos una nueva medida de anisotropía basada en el comportamiento dinámico del material. Nuestro enfoque toma como entrada (hiper) superficies de dispersión obtenidas mediante un análisis de Bloch y genera una curva/superficie con la direccionalidad global codificada en ella. Presentamos algunos resultados para el caso de la elastodinámica, pero son directamente aplicables a problemas con otros fenómenos físicos subyacentes. Como tal, este método permite ampliar los análisis de direccionalidad en metamateriales y materiales periódicos más allá del régimen de longitud de onda grande.

Este artículo presenta una nueva medida de anisotropía basada en el comportamiento dinámico del material. Como tal, considera la heterogeneidad del material y funciona más allá del régimen de longitud de onda grande. El método se puede aplicar a una frecuencia específica o a cualquier rango de frecuencia elegido. El punto de partida son las (hiper) superficies de dispersión, que son un resultado común cuando se aplica el teorema de Bloch a materiales periódicos. Comenzamos con algunas generalidades sobre los materiales periódicos y el teorema de Bloch, que se utiliza para describir el comportamiento macroscópico del material a partir de una sola celda unitaria. Luego, describimos la propagación de ondas en materiales elásticos anisotrópicos en dos y tres dimensiones. Después de esta sección, presentamos el método sugerido para analizar la direccionalidad de materiales periódicos, así como algunas pruebas para el método con relaciones de dispersión obtenidas analítica y numéricamente. Aunque todos los ejemplos presentados son del área de la elastodinámica, este método se aplica a cualquier material que emplee (hiper) superficies de dispersión como entrada, como la electrodinámica o la mecánica cuántica.

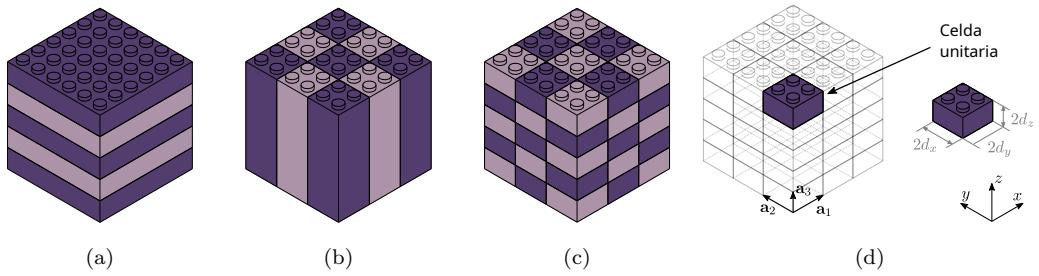


Figura 1. Material 3D con diferentes periodicidades. Independientemente de la dimensionalidad del espacio, su periodicidad podría estar en (a) una (b) dos o (c) tres dimensiones espaciales. (d) El bloque-lego morado define la celda unitaria fundamental que permite construir o llenar el espacio después de aplicar operaciones de traslación según el vector de red \mathbf{a} .

2. Materiales periódicos

Un material periódico se define por la repetición espacial de un motivo dado en una, dos o tres dimensiones. Los motivos se refieren a heterogeneidades en las propiedades de los materiales a nivel microestructural y pueden contener diferentes materiales, topologías y formas. Por ejemplo, en el caso de las ondas electromagnéticas, tenemos *cristales fotónicos* y la periodicidad de la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética [2]. Para ondas elásticas, el término es *cristales fonónicos* y tenemos periodicidad en la rigidez y densidad de masa del material [3]. Estos materiales periódicos se describen mediante una red y una celda unitaria elemental. Las Figuras 1(a)–1(c) muestran un material tridimensional con periodicidad en una, dos y tres dimensiones. Un conjunto de vectores base define la red (Fig. 1(d)). Estos permiten la construcción de todo el material a través aplicaciones sucesivas de operaciones de traslación de la celda unitaria. Para estudiar este tipo de material es común aprovechar la periodicidad de las propiedades del material y expresar la solución mediante el teorema de Bloch [15].

2.1. Teorema de Bloch

Consideremos una ecuación de onda generalizada de la forma

$$\mathcal{L}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\omega^2\mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

donde \mathcal{L} es un operador positivo definido [29,30], \mathbf{u} es el campo de interés, y ω es la frecuencia angular. El teorema de Bloch establece que las soluciones de (1) son de la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x})e^{i\kappa \cdot \mathbf{x}}, \quad (2)$$

donde $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ es una función con la misma peridodicidad del material. Los lados opuestos de la celda unitaria están separados por un vector \mathbf{a} y, como consecuencia,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\kappa \cdot \mathbf{a}}.$$

Las expresiones $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ y $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ denotan el campo en $\mathbf{x} + \mathbf{a}$ y \mathbf{x} , mientras $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1n_1 + \mathbf{a}_2n_2 + \mathbf{a}_3n_3$ es el vector de traslación de la red que se muestra en la Figura

[1\(d\)](#). El factor $e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a}}$ representa un salto de fase entre los lados opuestos de la celda unitaria. Esta relación entre lados opuestos de la celda fundamental enunciada en el teorema a través de los términos de la frontera permite caracterizar las propiedades fundamentales del material con el análisis de una sola celda.

Computacionalmente, la ecuación [\(1\)](#) se traduce usualmente a un problema de valores propios generalizado a través del uso de algún método numérico como el Método de los Elementos Finitos. Luego de esto terminamos con un sistema de la forma

$$[K]\{\mathbf{U}\} = \omega^2[M]\{\mathbf{U}\},$$

donde $[K]$ es la matriz de rigidez y $[M]$ es la matriz de masa. El teorema de Bloch se puede aplicar a través de las condiciones de frontera impuestas en forma fuerte directamente incluyendo los saltos de fase al nivel del elemento o realizando operaciones elementales fila/columna a esta matrices [\[18\]](#); o en forma débil a través del uso de multiplicadores de Lagrange o métodos de penalización [\[31,32\]](#). Después de este proceso, llegamos al siguiente sistema

$$[K_R(\boldsymbol{\kappa})]\{\mathbf{U}_R\} = \omega^2[M_R(\boldsymbol{\kappa})]\{\mathbf{U}_R\},$$

donde $\boldsymbol{\kappa}$ es el vector de onda al que se le asignan valores sucesivos de manera que se cubra la primera zona de Brillouin. Cada evaluación de un vector de onda particular y la solución del problema de valor propio relacionado produce tuplas de la forma $(\boldsymbol{\kappa}, \omega_n)$ que representan una onda plana que se propaga con frecuencia ω_n . El subíndice n se refiere al n -ésimo valor propio calculado para el vector de onda dado $\boldsymbol{\kappa}$; esto se representa en la Figura [2](#).

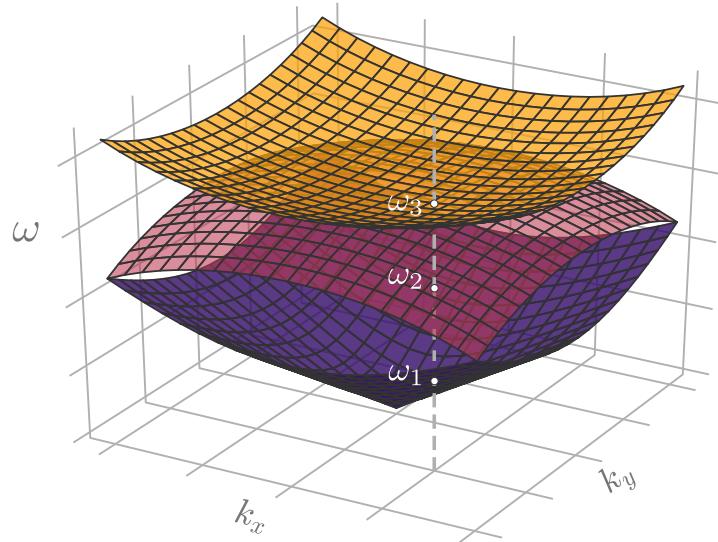


Figura 2. Esquema que representa las múltiples ramas obtenidas en un análisis de Bloch. Para un solo punto en el espacio del vector de onda, existen múltiples valores para la frecuencia.

Tener múltiples superficies de dispersión es común para problemas en electrodinámica o elastodinámica [\[1,2\]](#). Esto es consecuencia de la naturaleza vectorial de las cantidades físicas de interés: campo eléctrico/magnético o vector de desplazamiento, res-

pectivamente. En el caso de materiales homogéneos, tenemos dos modos transversales para ondas electromagnéticas y dos modos transversales más uno longitudinal para ondas elásticas. Sin embargo, el análisis de Bloch introduce una complicación adicional ya que los cálculos se realizan en la primera zona de Brillouin. Aquí, los vectores de onda están determinados salvo una constante aditiva que se escribe en términos de los vectores de red

$$\mathbf{a}_1 n_1 + \mathbf{a}_2 n_2 + \mathbf{a}_3 n_3 \quad \forall n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}.$$

Esto significa que mapeamos los vectores $\boldsymbol{\kappa}$ y $\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{a}_1 n_1 + \mathbf{a}_2 n_2 + \mathbf{a}_3 n_3$ al mismo punto en la primera zona de Brillouin. La Figura 3 ilustra este efecto para las primeras tres superficies de dispersión en el caso de un material homogéneo.

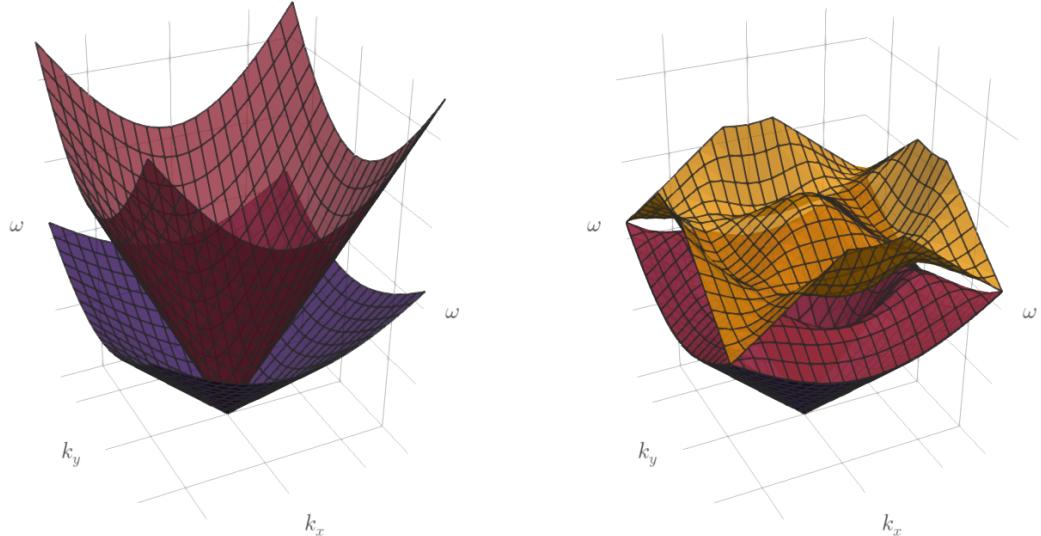


Figura 3. Comparación de las superficies de dispersión de un material homogéneo calculadas con la expresión clásica (izquierda) con las superficies de dispersión obtenidas mediante el análisis de Bloch (derecha). Aquí estamos mostrando las tres primeras ramas.

Como se muestra en la Figura 3, cuando usamos el análisis de Bloch, obtenemos superficies de dispersión ordenadas por frecuencia. Esto podría llevar a concluir que los materiales son anisotrópicos cuando no lo son, como se ilustra en la Figura 4. Para números de onda bajos, podemos ver que el material es isotrópico/anisotrópico cuando observamos el primer modo. Sin embargo, este no es el caso cuando se observan el segundo o tercer modo. Además, la anisotropía en un material puede ser más pronunciada en un modo de propagación que en otros.

Esta aparente anisotropía es más difícil de analizar si consideramos la propagación de ondas en tres dimensiones en lugar de dos, como se puede ver en la Figura 5.

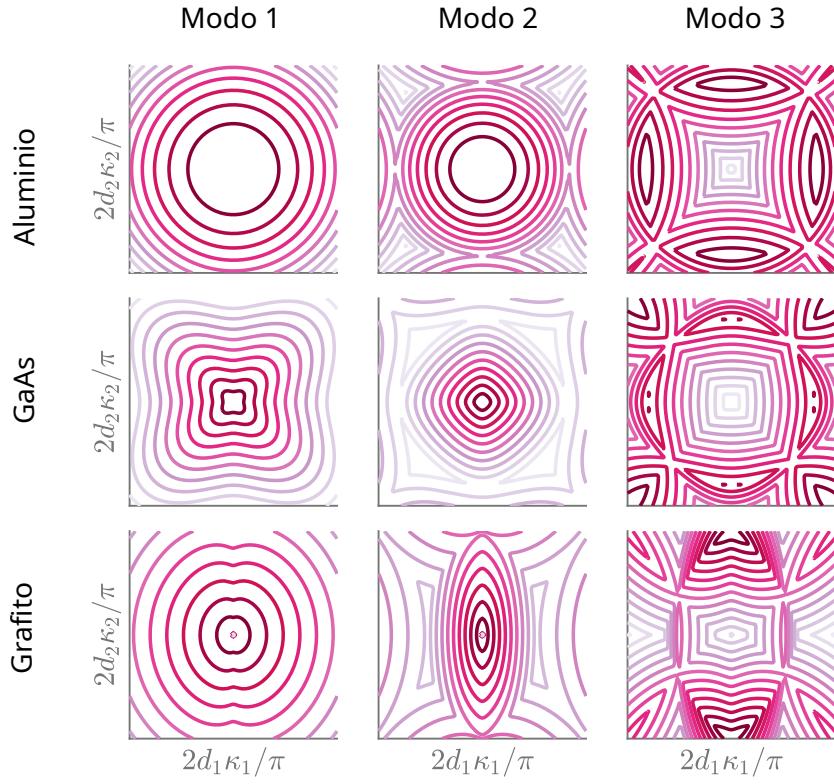


Figura 4. Comparación de los contornos de isofrecuencia para los tres primeros modos de dispersión para materiales isotrópico, cúbico y ortotrópico. (**Arriba**) Contornos para aluminio, un ejemplo isotrópico. (**Medio**) Contornos para GaAs, un ejemplo cúbico. (**Abajo**) Contornos para grafito, un ejemplo ortotrópico.

3. Propagación de ondas elásticas en medios anisotrópicos

Como se mencionó anteriormente, los materiales periódicos son inherentemente anisotrópicos debido a su microestructura. Su *nivel* de anisotropía obedece las simetrías presentes. En esta sección, describimos la propagación de ondas para sólidos elásticos de anisotropía general.

Consideremos una onda que se propaga en un sólido. En este caso, la conservación de la densidad del momento en ausencia de fuerzas de cuerpo se escribe como

$$\sigma_{ij,i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

con σ_{in} el tensor de esfuerzo, u_i el vector de desplazamiento y ρ la densidad de masa. En el caso de un material elástico lineal, la ley de Hooke viene dada por

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l},$$

donde c_{ijkl} es el tensor de rigidez que puede tener hasta 21 constantes en el caso de anisotropía general.

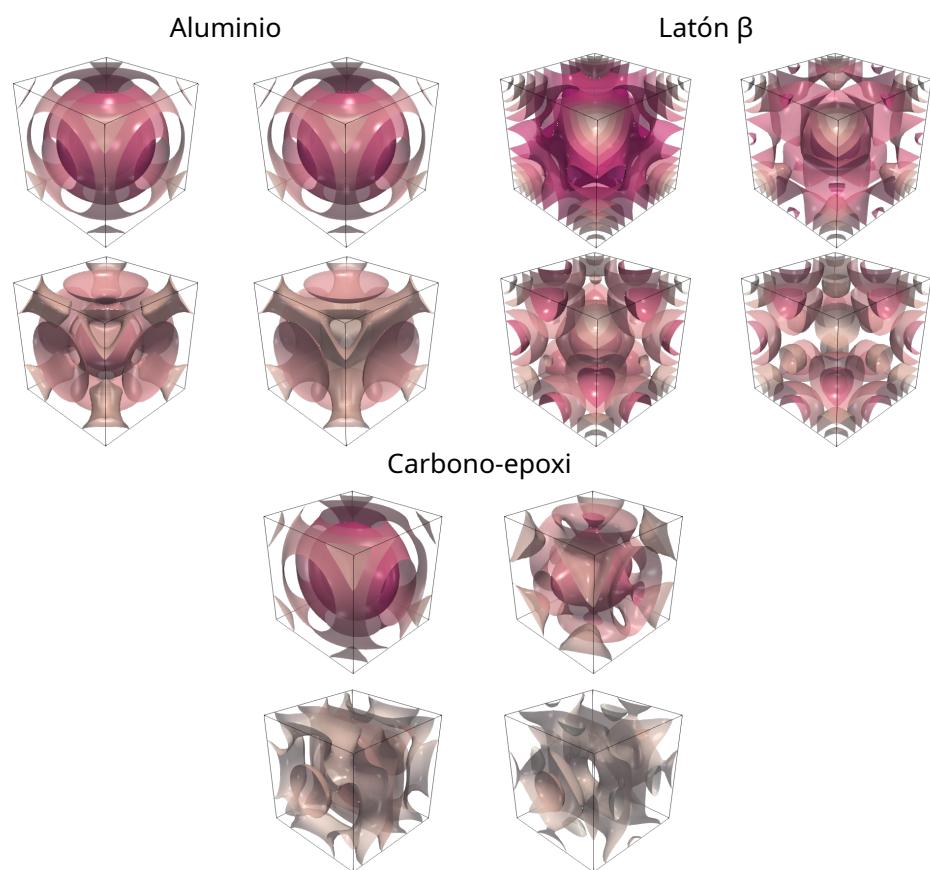


Figura 5. Comparación de los primeros cuatro modos de dispersión para materiales isotrópico, cúbico y transversalmente isotrópicos. Las superficies representan valores de isofrecuencia para las relaciones de dispersión.

Si asumimos una solución de onda plana de la forma

$$u_j = U_j e^{i\kappa(n_m x_m - v_p t)};$$

donde $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$ es el número de onda, n_m es un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{\kappa}$, y v_p es la velocidad de fase; terminamos con la ecuación de onda de Christoffel [28,33,34]:

$$[\Gamma_{ij} - \rho v_p^2 \delta_{ij}] U_j = 0,$$

donde $\Gamma_{ij} = c_{ijkl} n_k n_l$ es el tensor de rigidez de Christoffel o tensor acústico, y δ_{ij} es el delta de Kronecker. Este es un problema de valores propios con valores propios ρv_p^2 . Aquí, v_p representa las velocidades de fase del material. El polinomio característico correspondiente es

$$\det[\Gamma_{ij} - \rho v_p^2 \delta_{ij}] = 0. \quad (3)$$

De (3) concluimos que hay tres ondas que se propagan, cada una con una polarización diferente. Estas direcciones son ortogonales ya que Γ_{ij} es simétrica. De las tres polarizaciones, tenemos dos ondas quasi-transversales (qS) y una onda quasi-longitudinal (qP). Donde el prefijo *quasi* implica que dos de los modos son casi ortogonales al vector de onda y el otro es casi paralelo a él. Como podemos ver, el valor de Γ_{ij} depende de la dirección de propagación, lo que implica que la velocidad de fase depende de la dirección de la onda. Este efecto se representa en la Figura 6, donde visualizamos la velocidad de fase para dos materiales anisotrópicos: latón-β y carbono-epoxi.

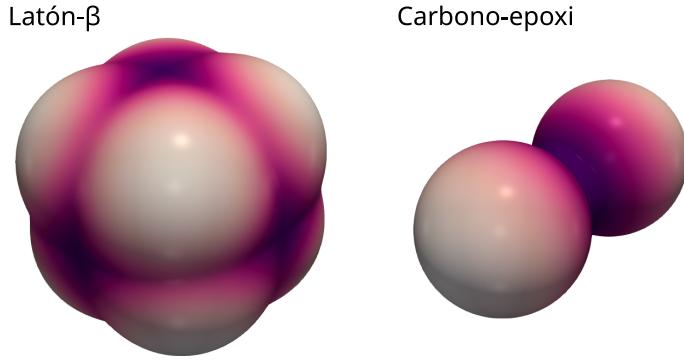


Figura 6. Comparación de la direccionalidad de la velocidad de fase para modos quasi-longitudinales (qP) para un material cúbico (izquierda) y uno transversalmente isotrópico (derecha).

Podemos reescribir (3) como

$$\Omega(\omega, \boldsymbol{\kappa}) = \det \left[\Gamma_{ij} - \rho \frac{\omega^2}{\|\boldsymbol{\kappa}\|^2} \delta_{ij} \right], \quad (4)$$

considerando que la velocidad de fase está definida por $v_p^2 = \omega^2 / \|\boldsymbol{\kappa}\|^2$. La velocidad de grupo está definida como [28]

$$\mathbf{v}_g = \frac{\nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \Omega}{\partial \Omega / \partial \omega}, \quad (5)$$

esta representa la dirección de flujo de energía para medios sin pérdidas.

4. Evaluación de la direccionalidad

La anisotropía elástica juega un papel en diferentes aplicaciones como metalurgia [25], geofísica [35], propagación de ondas en compuestos [11] y metamateriales [36], entre otras. Por lo tanto, para una aplicación particular, uno podría necesitar un material con más o menos anisotropía, y la pregunta de qué tan anisotrópicos son los diferentes materiales surge naturalmente.

4.1. Anisotropía inducida dinámicamente

Como se mencionó antes, en materiales periódicos su anisotropía depende de la frecuencia de las ondas que se propagan a través de ellos [23,24]. Es decir, existe una anisotropía inducida dinámicamente que se relaciona con la interacción de las ondas y la microestructura. Podemos contrastar este caso con el caso estático. Lo que corresponde a la aproximación de longitud de onda grande del caso dinámico.

Para ilustrar este fenómeno, presentamos como ejemplo la dispersión de una red de masas y resortes 2D. La Figura 7 presenta la celda unitaria para esta red.

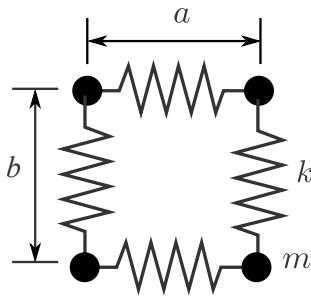


Figura 7. Celda unitaria para una red de masa y resortes 2D. Aquí k es la rigidez del resorte, m es la masa, a es la distancia entre vecinos en la dirección x y b es la distancia entre vecinos en la dirección y .

La solución analítica, en este caso, es la siguiente — ver [5] para una deducción de esta solución:

$$\Omega^2 = 2[2 - \cos(\kappa_1 a/\pi) - \cos(\kappa_2 b/\pi)],$$

donde $\Omega = \omega/\omega_0$ es la frecuencia normalizada, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia para un solo sistema resorte-masa, κ_1 es el número de onda en la dirección x , κ_2 es el número de onda en la dirección y , a es la distancia entre vecinos en la dirección x , y b es la distancia entre vecinos en la dirección y . La Figura 8 presenta esta relación de dispersión para este problema.

Si analizamos la direccionalidad de este problema vemos que para baja frecuencia parece ser isótropo pero comienza a volverse anisotrópico cuando se cambia la frecuencia. Esto se representa en la Figura 9. Tenemos diferentes frecuencias normalizadas: $\Omega = 0.5$, $\Omega = 1.0$, $\Omega = 1.5$, y $\Omega = 1.99$. Para este problema en particular, la frecuencia de propagación máxima es $\Omega = 2$.

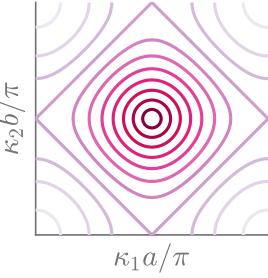


Figura 8. Contornos de isofrecuencia para la relación de dispersión en la red resortes y masas.

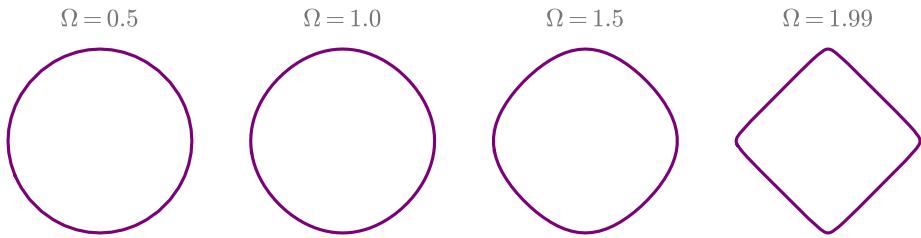


Figura 9. Comparación de la direccionalidad de una red resortes y masas para diferentes frecuencias normalizadas $\Omega = 0.5$, $\Omega = 1.0$, $\Omega = 1.5$, and $\Omega = 1.99$.

4.2. Algunas medidas existentes de anisotropía

Una de las primeras medidas de anisotropía fue la relación de Zener [25] que se define para materiales cúbicos y se escribe como

$$a_r = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} .$$

Desde una perspectiva intuitiva, se define como la relación entre el módulo de corte clásico y el *nuevo* que aparece en los materiales cúbicos. La relación de Zener es una para materiales isotrópicos. Una extensión de la relación de Zener para materiales con anisotropía más general reemplaza los coeficientes elásticos por promedios mientras conserva la forma de la relación original [26]

$$a_{\text{gen}} = \frac{2Y_{44}}{Y_{11} - Y_{12}} ,$$

con

$$Y_{11} = \frac{C_{11} + C_{22} + C_{33}}{3} , Y_{12} = \frac{C_{12} + C_{23} + C_{13}}{3} , Y_{44} = \frac{C_{44} + C_{55} + C_{66}}{3} .$$

Hay otras métricas propuestas para medir la anisotropía como la relación de la velocidad de fase máxima y mínima para los modos cuasi-transversales [37] o la norma de la proyección al tensor isotrópico más cercano [34]. Ranganathan y Ostoja-Starzewski [27] calculan algunas de estas métricas para varios cristales y las comparan con una nueva métrica denominada índice de anisotropía universal (UAI, en inglés). Aunque estas métricas parecen ser útiles para materiales anisotrópicos generales, se concibieron

teniendo en cuenta los materiales homogéneos.

Con respecto a la anisotropía de compuestos, es común presentar la direccionalidad como histogramas polares de velocidad de grupo basados en contornos de isofrecuencia [23,24]. Además, Casadei y Rimoli [36] calcularon un índice de anisotropía considerando cada modo de propagación por separado. Esta medida es, esencialmente, la desviación estándar para cada modo de propagación de onda. El principal inconveniente de estos enfoques es que consideraban solo los dos o tres primeros modos de propagación, es decir, las frecuencias bajas. Dado que los cristales fonónicos pueden presentar dispersión, se espera que la anisotropía (direccionalidad) dependa de la frecuencia.

4.3. Método de direccionalidad

Valencia et al. [10] propuso un método para caracterizar la direccionalidad de los cristales fonónicos que considera la contribución de múltiples modos, no solo los de baja frecuencia como en trabajos anteriores [23,24]. Así, el enfoque permite una descripción más completa de la respuesta direccional en un material y es válido en los regímenes de baja y alta frecuencia. Definieron la direccionalidad de propagación de onda, D , como

$$D = \sum_{\substack{i \\ e > tol}} d_i(\theta), \quad d_i(\theta) = C(\nabla M_i) \quad (6)$$

donde M_i es el i -ésimo modo en la relación de dispersión, ∇M_i es su gradiente con respecto al vector de onda κ , tol es una tolerancia predefinida, $\theta = [0, 2\pi]$ es el ángulo que define la dirección de propagación. En esta definición, el operador C asocia cada vector a su dirección (θ) y lo suma al vector anterior que comparte la misma dirección. En consecuencia, $d_i = C(\nabla M_i)$ corresponde a un histograma polar ponderado que representa la distribución de la velocidad de grupo para el modo M_i en cualquier dirección de propagación. El peso viene dado por el número de veces que aparece una determinada dirección en las relaciones de dispersión (discretas). Podemos resumir este método como:

- Comience desde la superficie de frecuencia y calcule el gradiente para obtener velocidades de grupo.
- Ordene el gradiente (discreto) por ángulo y agregue sus magnitudes cuando comparten el ángulo.

Estos pasos se muestran en la Figura 10.

Un problema con este método es que considera vectores de velocidad de grupo para regiones con vectores de onda de diferentes magnitudes. Por ejemplo, al considerar una celda unitaria cuadrada, incluirá más vectores asociados a las direcciones $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$. Esto hace que el método dependa de la elección de la forma de la celda unitaria. Nuestra propuesta de mejora es promediar vectores en lugar de acumularlos. Esto es similar a restringir el análisis a los vectores de onda encerrados por una esfera con una magnitud de vector de onda constante; en la física del estado sólido, los estados encerrados por una superficie de energía constante se consideran para calcular la densidad de estados [16]. Como ejemplo, comparemos la direccionalidad calculada para la primera rama de dispersión. Es decir, el primer valor propio obtenido del análisis de Bloch de la celda unitaria. Esto se muestra en la Figura

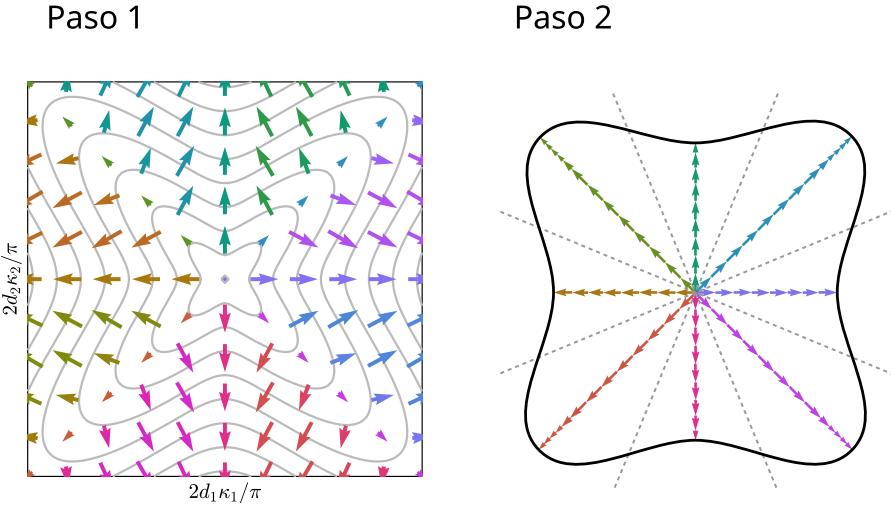


Figura 10. En el **Paso 1** calculamos el gradiente del i -ésimo modo de la curva de dispersión. Luego, en el **Paso 2**, los vectores de velocidad del grupo se reordenan según su dirección y se suman. La curva envolvente resultante representa la direccionalidad para ese modo.

11.

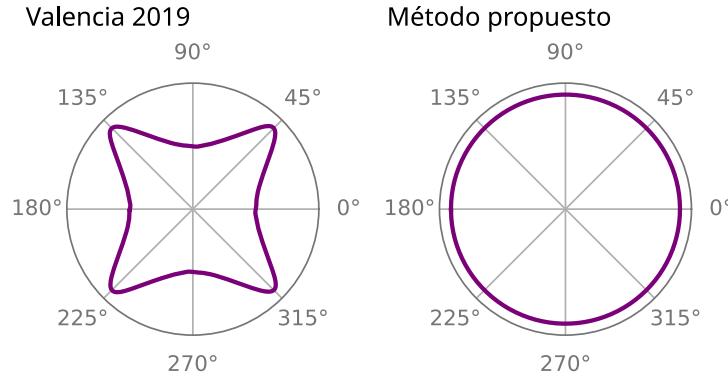


Figura 11. Comparación de la direccionalidad calculada para la primera rama de dispersión en un material homogéneo usando el método (**izquierda**) [10] y (**derecha**) nuestro enfoque.

Así, podemos resumir el método modificado con los siguientes pasos:

- Comience desde la superficie de frecuencia y calcule el gradiente para obtener velocidades de grupo.
- Ordene el gradiente (discreto) por ángulo y promedie sus magnitudes cuando comparten el ángulo.

Una pregunta natural que sigue es cómo extender el método a tres dimensiones. Pero, al pasar de dos a tres dimensiones no tenemos una partición uniforme de la esfera. Un poliedro donde los vértices de las caras se distribuyen uniformemente sobre una superficie esférica. En comparación con dos dimensiones. Donde usamos una partición uniforme del círculo para muestrear las direcciones de las velocidades de grupo. En el caso tridimensional, podríamos parametrizar la esfera utilizando coordenadas esféricas,

por ejemplo. Esto representaría un problema para nuestro método ya que existe una mayor densidad de polígonos en los polos. Esperamos esto porque el área diferencial en coordenadas esféricas viene dada por $dA = r \sin \theta d\varphi d\theta$ — acá, θ es el ángulo cenital y φ el ángulo azimutal [38]. Para evitar este problema, usamos una malla triangulada para la esfera que es casi uniforme [39]. La Figura 12 proporciona una comparación de dos mallas: una que usa coordenadas esféricas y la otra con un muestreo que es casi uniforme.

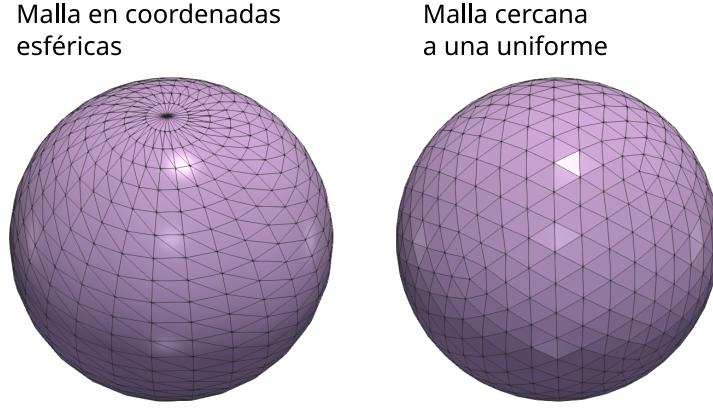


Figura 12. Comparación de una malla de una esfera usando una malla en coordenadas esféricas y una malla casi uniforme. Observe la mayor densidad del elemento en el polo de la malla izquierda.

Otra diferencia que plantea un desafío para extender el método de dos a tres dimensiones es la ausencia de un orden *natural* para los puntos¹. Para solucionar este problema, calculamos los ángulos esféricos para cada punto de la esfera y creamos un árbol kD [40,41]. Luego, al momento de evaluar la dirección de cada vector velocidad de grupo, realizamos una búsqueda del vecino más cercano de sus ángulos (θ, φ) para asignar el vector a un punto de la esfera como se hizo en el caso bidimensional.

¹La preimagen del círculo (1D) es un conjunto ordenado, es decir, un intervalo — que sigue el orden de los números reales. No podemos definir esta relación directamente para la preimagen de una esfera (2D).

5. Resultados

Para probar el método, calculamos la direccionalidad de materiales con diferentes clases de simetría en dos y tres dimensiones. Primero, probamos el método usando materiales homogéneos que nos permiten obtener (semi) analíticamente las relaciones de dispersión y luego lo probamos con los resultados obtenidos usando el método de elementos finitos para un material elástico micropolar. Eso también muestra que el método no depende de las ecuaciones que se analizan y solo necesita como entrada las relaciones de dispersión.

5.1. Resultados de las relaciones de dispersión analíticas

Queremos resolver el determinante en (4) para ω para determinar las relaciones de dispersión. Reescribimos la ecuación por completoz,

$$\Omega(\omega, \kappa) = \det \left[\Gamma_{ij} - \rho \frac{\omega^2}{\|\kappa\|^2} \delta_{ij} \right] = 0.$$

Esto corresponde a resolver una ecuación polinomial de tercer grado para cada número de onda κ (ver el apéndice al final de este capítulo para las formas explícitas de estas ecuaciones). Entonces, para materiales homogéneos, estas relaciones se pueden resolver semianalíticamente y se pueden escribir como

$$\omega \equiv \omega(\kappa).$$

Por otro lado, cuando estas relaciones se obtienen del teorema de Bloch, las relaciones de dispersión también contienen información de diferentes zonas de Brillouin que conducen a relaciones de la forma

$$\omega_{m_1, m_1} \equiv \omega(\kappa_{m_1, m_2}), \quad (7)$$

en dos dimensiones, donde los subíndices m_1, m_2 corresponden a números enteros que se refieren a ondas provenientes de zonas adyacentes de Brillouin. En el caso de tres dimensiones las relaciones son de la forma

$$\omega_{m_1, m_2, m_3} \equiv \omega(\kappa_{m_1, m_2, m_3}). \quad (8)$$

En el caso de una celda unitaria cuadrada/cúbica con lado d , tenemos la siguiente definición generalizada del vector de onda [42]:

$$\kappa_{m_1, m_2} = \left(\kappa_x + \frac{m_1 \pi}{d}, \kappa_y + \frac{m_2 \pi}{d} \right), \quad (9)$$

$$\kappa_{m_1, m_2, m_3} = \left(\kappa_x + \frac{m_1 \pi}{d}, \kappa_y + \frac{m_2 \pi}{d}, \kappa_z + \frac{m_3 \pi}{d} \right), \quad (10)$$

donde κ_x , κ_y y κ_z son las componentes del vector de onda.

La Figura 13 presenta una comparación de direccionalidad para un material periódico con una celda unitaria cuadrada para aluminio (isotrópico), GaAs (cúbico) y grafito (ortotrópico). Aquí, obtuvimos las curvas de dispersión analíticamente y las restringimos a la Primera Zona de Brillouin usando (9). Podemos ver que las curvas

de direccionalidad presentan las mismas simetrías que la clase de material en cada caso (ver el apéndice al final para las propiedades del material). La curva correspondiente al material isotrópico es (casi) simétrica con respecto a cualquier rotación en el plano. En el caso del material cúbico, la curva permanece igual después de rotaciones de 90° . Finalmente, para el material ortotrópico, podemos ver dos planos de simetría correspondientes a los ejes x e y .

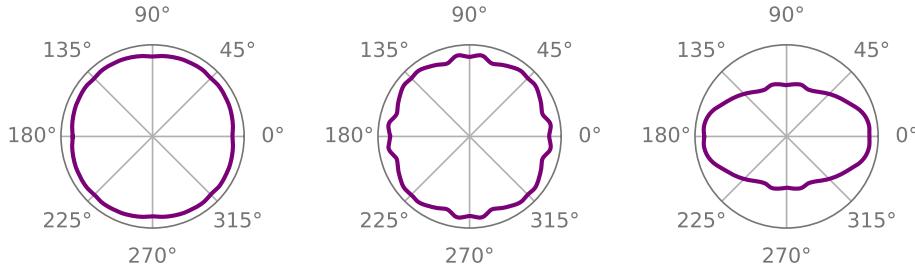


Figura 13. Comparación de la direccionalidad de un material periódico con una celda unitaria cuadrada para materiales isotrópicos, cúbicos y ortotrópicos. Obtuvimos las curvas de dispersión analíticamente y las restringimos a la Primera Zona de Brillouin usando (9). (**Izquierda**) Direccionalidad para aluminio, un ejemplo isotrópico. (**Centro**) Direccionalidad o GaAs, un ejemplo cúbico. (**Derecha**) Direccionalidad para grafito, un ejemplo ortotrópico.

La Figura 14 presenta una comparación de direccionalidad para un material periódico hecho de latón- β (cúbico) y cadmio (transversalmente isótropico). Para la figura material cúbica 14 presenta una vista superior y una vista isométrica de la superficie, se omiten las vistas frontal y lateral ya que presenta una simetría con respecto a las rotaciones de 90° . En el caso del material isotrópico transversal, se presenta una proyección de tercer ángulo más la vista isométrica. Podemos ver que las superficies de direccionalidad presentan las mismas simetrías que la clase de material en cada caso. En particular, la superficie es (casi) simétrica con respecto al eje z (ver el apéndice al final para conocer las propiedades del material utilizado).

5.2. Resultados para relaciones de dispersión obtenidas numéricamente

Como resultado final, calculamos las curvas de direccionalidad para materiales celulares con poros circulares. Cambiamos el diámetro del poro mientras el tamaño de la celda se mantiene fijo. El material utilizado es uno micropolar con las siguientes propiedades [19]:

$$\begin{aligned} \rho &= 2770 \text{ kg/m}^3, & \lambda &= 5.12 \times 10^{10} \text{ Pa}, \\ \mu &= 2.76 \times 10^{10} \text{ Pa}, & \alpha &= 3.07 \times 10^9 \text{ Pa}, \\ \gamma + \epsilon &= 7.66 \times 10^{10} \text{ N}, & J &= 306.5 \text{ kg/m}. \end{aligned}$$

donde ρ es la densidad de masa, μ y λ son los parámetros de Lamé conocidos de la elasticidad clásica, mientras que J es la densidad de inercia rotacional, α , β , η y γ son parámetros de material extra del modelo micropolar y representativos de interacciones de puntos de material adicionales, ver [19,43,44] para mayor discusión sobre la interpretación de estos parámetros.

La Figura 15 presenta las curvas de direccionalidad calculadas para aumentar los valores de porosidad, a saber: 0.000, 0.196, 0.503 y 0.709. Una porosidad de 0.0 re-

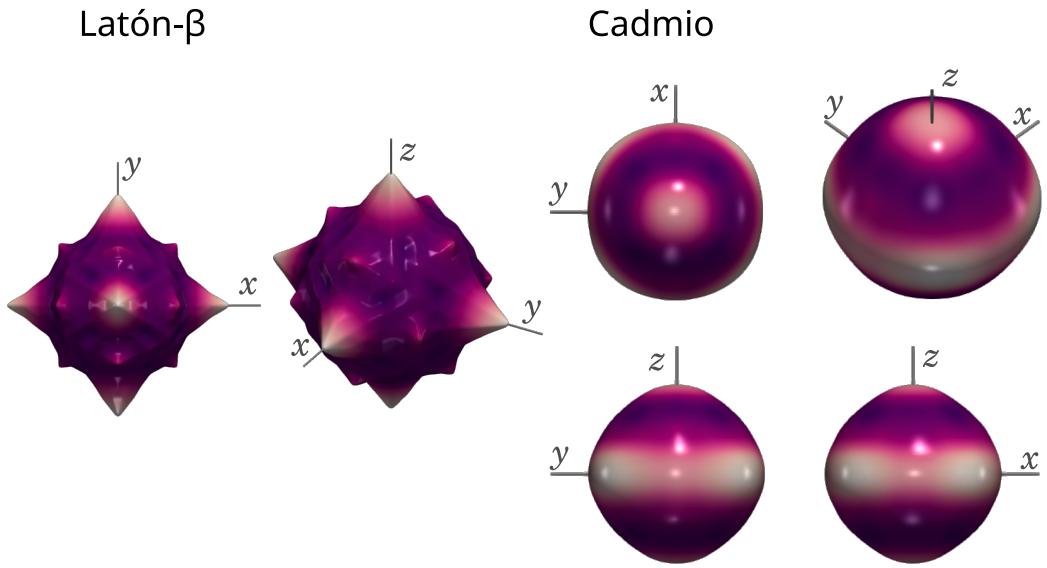


Figura 14. Comparación de las superficies de direccionalidad para (**Left**) latón- β (**Right**) y cadmio.

presenta un material homogéneo, utilizado como referencia en este caso. Como era de esperar, la direccionalidad del material aumenta con la porosidad, y los valores más altos para la velocidad de grupo promedio ocurren a lo largo de los ejes x e y donde tenemos caminos continuos para que la onda se propague [10]. Observe que las curvas resultantes son simétricas con respecto a las rotaciones de 90° . El mismo grupo de simetría se puede ver en la celda unitaria.

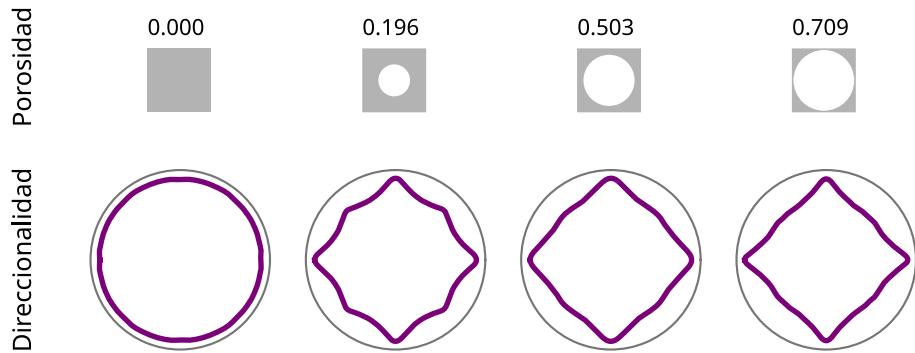


Figura 15. Curvas de direccionalidad para un material celular con porosidad creciente.

A modo de comparación, presentamos los contornos de isofrecuencia para las tres primeras ramas de las relaciones de dispersión para este material en la Figura 16 [19]. En este caso, tenemos diferentes rangos de frecuencia normalizados — $\Omega \in [0, \Omega_{\max}]$ — cuando cambiamos la porosidad a medida que el material se vuelve más dispersivo

cuando aparece la heterogeneidad. Aquí, la frecuencia normalizada se define como

$$\Omega = \frac{2d\omega}{c_T},$$

donde $c_T^2 = \mu/\rho$ es la velocidad de fase de la onda transversal en el límite de baja frecuencia para el caso homogéneo. La frecuencia máxima normalizada (Ω_{\max}) en cada caso es 43.38, 46.92, 57.49 y 70.84.

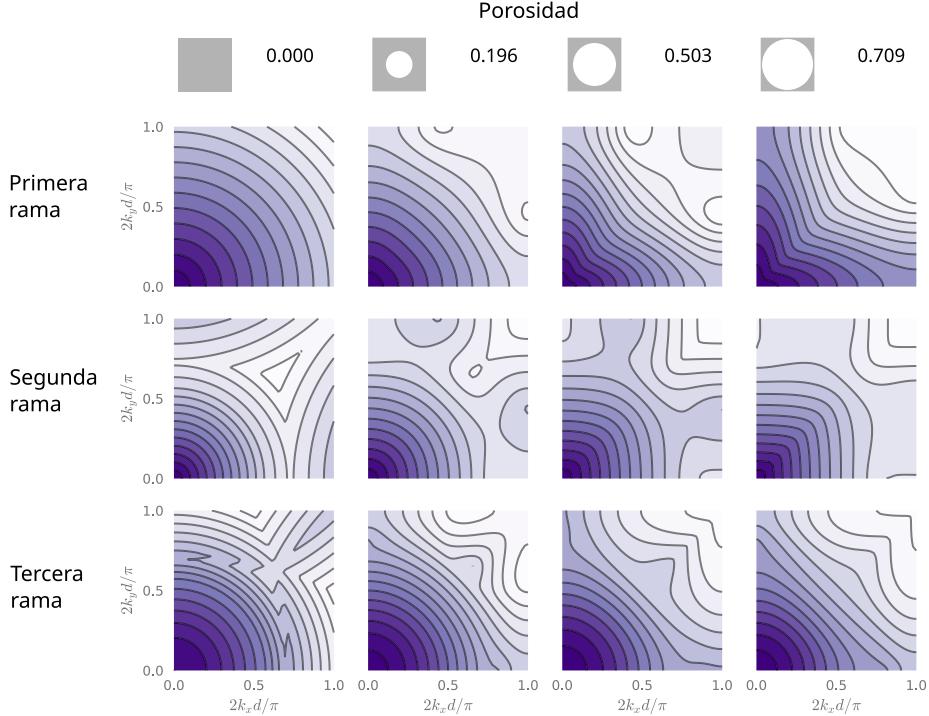


Figura 16. Curvas de isofrecuencia para un material celular con porosidad creciente para las tres primeras ramas. Estos son los gráficos que se suelen utilizar para analizar la direccionalidad en materiales periódicos. La frecuencia máxima normalizada en cada caso es 43.38, 46.92, 57.49 y 70.84.

6. Conclusiones

Presentamos un método para visualizar la direccionalidad de ondas en materiales periódicos modificando el trabajo de Valencia et al. [10] y extendiéndolo al caso tridimensional. Este método toma como entrada (hiper) superficies de dispersión obtenidas mediante un análisis de Bloch y genera una curva/superficie con la direccionalidad global codificada en ella. Como tal, se puede utilizar para curvas de dispersión obtenidas en diferentes contextos físicos como la elastodinámica o la electrodinámica. El enfoque utilizado en este trabajo no separa los modos M_i y los tipos de onda; en cambio, trata con varios modos a la vez, lo que permite presentar la direccionalidad para un rango de frecuencia de banda ancha y no solo el límite de baja frecuencia, como es común. Nuestro enfoque proporciona una herramienta cualitativa que es útil para describir el comportamiento global de las ondas cuando se propagan a través del material analizado; está destinado a ser utilizado como complemento de las curvas y superficies de

dispersión.

Referencias

- [1] Banerjee B. An Introduction to Metamaterials and Waves in Composites. 1st ed. Taylor & Francis; 2011.
- [2] Joannopoulos J, Johnson S, Winn J, et al. Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. 2nd ed. Princeton University Press; 2008.
- [3] Deymier PA. Acoustic metamaterials and phononic crystals. Vol. 173. Springer Science & Business Media; 2013.
- [4] Norris AN, Haberman MR. Introduction to the special issue on acoustic metamaterials. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2012;132(4):2783–2783.
- [5] Hussein MI, Leamy MJ, Ruzzene M. Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*. 2014; 66(4).
- [6] Goldsberry BM, Haberman MR. Negative stiffness honeycombs as tunable elastic metamaterials. *Journal of Applied Physics*. 2018;123(9):091711.
- [7] Milton GW, Cherkaev AV. Which elasticity tensors are realizable? *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1995;;
- [8] Norris AN, Nagy AJ. Metal water: A metamaterial for acoustic cloaking. *Proceedings of Phononics*, Santa Fe, New Mexico, USA. 2011;:112–113.
- [9] Willis JR. Negative refraction in a laminate. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016;97:10–18.
- [10] Valencia C, Restrepo D, Mankame ND, et al. Computational characterization of the wave propagation behavior of multi-stable periodic cellular materials. *Extreme Mechanics Letters*. 2019;33:100565.
- [11] Guarín-Zapata N, Gómez J, Kisailus D, et al. Bandgap tuning in bioinspired helicoidal composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2019 Oct;131:344–357. Available from: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022509619302431>.
- [12] Sigalas MM, Garcia N. Theoretical study of three dimensional elastic band gaps with the finite-difference time-domain method. *Journal of Applied Physics*. 2000;87(6):3122–3125.
- [13] Pennec Y, Vasseur JO, Djafari-Rouhani B, et al. Two-dimensional phononic crystals: Examples and applications. *Surface Science Reports*. 2010;65(8):229–291.
- [14] Bloch F. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für physik*. 1929;52(7-8):555–600.
- [15] Brillouin L. Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices. Courier Dover Publications; 2003.
- [16] Kittel C. Introduction to Solid State Physics. 7th ed. Wiley; 1996.
- [17] Zhang X, Liu Z. Negative refraction of acoustic waves in two-dimensional phononic crystals. *Applied Physics Letters*. 2004;85(2):341–343.
- [18] Valencia C, Gomez J, Guarín-Zapata N. A General-Purpose Element-Based Approach to Compute Dispersion Relations in Periodic Materials with Existing Finite Element Codes. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*. 2019 Jul;:1950005 Available from: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S2591728519500051>.
- [19] Guarín-Zapata N, Gomez J, Valencia C, et al. Finite element modeling of micropolar-based phononic crystals. *Wave Motion*. 2020 Jan;92:102406. Available from: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0165212519300526>.
- [20] Nye JF, et al. Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices. Oxford university press; 1985.
- [21] Moakher M, Norris AN. The closest elastic tensor of arbitrary symmetry to an elasticity tensor of lower symmetry. *Journal of Elasticity*. 2006;85(3):215–263. Available from: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10659-006-9082-0>.
- [22] Maurin F, Claeys C, Deckers E, et al. Probability that a band-gap extremum is located on

the irreducible Brillouin-zone contour for the 17 different plane crystallographic lattices. International Journal of Solids and Structures. 2018;135:26–36. Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768317305103>.

- [23] Ruzzene M, Scarpa F, Soranna F. Wave beaming effects in two-dimensional cellular structures. Smart materials and structures. 2003;12(3):363.
- [24] Ruzzene M, Scarpa F. Directional and band-gap behavior of periodic auxetic lattices. physica status solidi (b). 2005;242(3):665–680.
- [25] Zener C. Elasticity and anelasticity of metals. University of Chicago press; 1948.
- [26] Kanit T, N'Guyen F, Forest S, et al. Apparent and effective physical properties of heterogeneous materials: Representativity of samples of two materials from food industry. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2006;195(33):3960–3982.
- [27] Ranganathan SI, Ostoja-Starzewski M. Universal elastic anisotropy index. Physical Review Letters. 2008;101(5):055504.
- [28] Auld BA. Acoustic fields and waves in solids. Vol. 1. Wiley New York; 1973.
- [29] Johnson SG. Notes on the algebraic structure of wave equations. Massachusetts Institute of Technology; 2010.
- [30] Reddy J. Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering. 1st ed. Krieger Publishing; 1991.
- [31] Michel JC, Moulinec H, Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. Computer methods in applied mechanics and engineering. 1999;172(1-4):109–143.
- [32] Sukumar N, Pask JE. Classical and enriched Finite element formulations for Bloch-periodic boundary conditions. International Journal of Numerical Methods in Engineering. 2009;77(8):1121–1138.
- [33] Buchwald VT. Elastic waves in anisotropic media. Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences. 1959;253(1275):563–580.
- [34] Carcione JM. Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media. Elsevier; 2007.
- [35] Thomsen L. Weak elastic anisotropy. Geophysics. 1986;51(10):1954–1966.
- [36] Casadei F, Rimoli J. Anisotropy-induced broadband stress wave steering in periodic lattices. International Journal of Solids and Structures. 2013;50(9):1402–1414.
- [37] Ledbetter H, Migliori A. A general elastic-anisotropy measure. Journal of applied physics. 2006;100(6):063516.
- [38] Arfken GB, Weber HJ, Harris F. Mathematical Methods for Physicists. 6th ed. Academic Press; 2005.
- [39] Schlömer N. meshzoo [[Https://github.com/nschloe/meshzoo](https://github.com/nschloe/meshzoo)]; 2020.
- [40] Scopatz A, Huff KD. Effective computation in physics: Field guide to research with Python. O'Reilly Media, Inc.; 2015. Available from: <http://physics.codes/>.
- [41] Virtanen P, Gommers R, Oliphant TE, et al. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. Nature methods. 2020;17(3):261–272.
- [42] Langlet P. Analyse de la propagation des ondes acoustiques dans les matériaux périodiques à l'aide de la méthode des éléments finis [dissertation]. Valenciennes; 1993.
- [43] Lakes R. Experimental micro mechanics methods for conventional and negative Poisson's ratio cellular solids as Cosserat continua. Journal of Engineering Materials and Technology. 1991;113(1):148–155.
- [44] Hassanpour S, Heppler GR. Micropolar elasticity theory: a survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations. Mathematics and Mechanics of Solids. 2017;22(2):224–242.

Apéndice A. Forma explícita para las ecuaciones de Christoffel

A.1. Tres dimensiones

Para un material triclinico con un tensor de rigidez dado por

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix},$$

en notación de Voigt, una densidad ρ y un vector de onda κ , la ecuación que debe resolverse es [28]

$$\det \left(\|\kappa\|^2 \begin{bmatrix} \alpha & \delta & \varepsilon \\ \delta & \beta & \xi \\ \varepsilon & \xi & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \rho \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (\text{A1})$$

con

$$\alpha = C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{55}n_3^2 + 2C_{56}n_1n_3 + 2C_{15}n_3n_1 + 2C_{16}n_1n_2,$$

$$\beta = C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2 + C_{44}n_3^2 + 2C_{24}n_2n_3 + 2C_{46}n_3n_1 + 2C_{26}n_1n_2,$$

$$\gamma = C_{55}n_1^2 + C_{44}n_2^2 + C_{33}n_3^2 + 2C_{34}n_2n_3 + 2C_{35}n_3n_1 + 2C_{45}n_1n_2,$$

$$\delta = C_{16}n_1^2 + C_{26}n_2^2 + C_{33}n_3^2 + (C_{46} + C_{25})n_2n_3 + (C_{14} + C_{56})n_3n_1 + (C_{12} + C_{66})n_1n_2,$$

$$\varepsilon = C_{15}n_1^2 + C_{46}n_2^2 + C_{35}n_3^2 + (C_{45} + C_{36})n_2n_3 + (C_{13} + C_{55})n_2n_1 + (C_{14} + C_{56})n_1n_2,$$

$$\xi = C_{56}n_1^2 + C_{24}n_2^2 + C_{34}n_3^2 + (C_{44} + C_{23})n_2n_3 + (C_{36} + C_{45})n_3n_1 + (C_{25} + C_{46})n_1n_2,$$

donde $\hat{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3) = \frac{\kappa}{\|\kappa\|}$.

En el caso de materiales ortotrópicos alineados con el sistema de coordenadas, estas expresiones se pueden simplificar a

$$\alpha = C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{55}n_3^2,$$

$$\beta = C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2 + C_{44}n_3^2,$$

$$\gamma = C_{55}n_1^2 + C_{44}n_2^2 + C_{33}n_3^2,$$

$$\delta = (C_{12} + C_{66})n_1n_2,$$

$$\varepsilon = (C_{13} + C_{55})n_3n_1,$$

$$\xi = (C_{44} + C_{23})n_2n_3,$$

esto se puede simplificar aún más para materiales cúbicos

$$\begin{aligned}\alpha &= C_{11}n_1^2 + C_{44}(1 - n_1^2), \\ \beta &= C_{11}n_2^2 + C_{44}(1 - n_2^2), \\ \gamma &= C_{11}n_3^2 + C_{44}(1 - n_3^2), \\ \delta &= (C_{12} + C_{44})n_1n_2, \\ \varepsilon &= (C_{12} + C_{44})n_3n_1, \\ \xi &= (C_{12} + C_{44})n_2n_3.\end{aligned}$$

Para materiales con simetría transversalmente isotrópica las ecuaciones se pueden resolver analíticamente [34]. Para una onda que se propaga en el plano 1-3, y tomando $n_2 = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\omega_{qP}^2 &= \frac{\|\kappa\|^2(C_{11}n_1^2 + C_{33}n_3^2 + C_{55} + \sqrt{M})}{2\rho}, \\ \omega_{qS}^2 &= \frac{\|\kappa\|^2(C_{11}n_1^2 + C_{33}n_3^2 + C_{55} - \sqrt{M})}{2\rho}, \\ \omega_S^2 &= \frac{\|\kappa\|^2(C_{66}n_1^2 + C_{55}n_3^2)}{\rho}, \\ M &= [(C_{11} - C_{55})n_1^2 + (C_{55} - C_{33})n_3^2]^2 + 4[(C_{13} + C_{55})^2n_1n_3]^2.\end{aligned}$$

A.2. Dos dimensiones

En el caso de un material monoclínico podríamos alinear el plano de simetría para obtener el siguiente problema bidimensional

$$\det \left(\|\kappa\|^2 \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{bmatrix} - \rho\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0,$$

que se puede resolver analíticamente como

$$\omega^2 = \frac{\|\kappa\|^2}{2\rho} [\alpha + \beta \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\delta^2}]$$

con

$$\begin{aligned}\alpha &= C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + 2C_{16}n_1n_2, \\ \beta &= C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2 + 2C_{26}n_1n_2, \\ \delta &= C_{16}n_1^2 + C_{26}n_2^2 + (C_{12} + C_{66})n_1n_2,\end{aligned}$$

que se reduce a

$$\begin{aligned}\alpha &= C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2, \\ \beta &= C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2, \\ \delta &= (C_{12} + C_{66})n_1n_2,\end{aligned}$$

para materiales ortotrópicos, y a

$$\begin{aligned}\alpha &= C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2, \\ \beta &= C_{66}n_1^2 + C_{11}n_2^2, \\ \delta &= (C_{12} + C_{66})n_1n_2,\end{aligned}$$

para materiales cúbicos.

Apéndice B. Propiedades de materiales

A continuación, presentamos las propiedades utilizadas en el artículo.

B.1. Dos dimensiones

- Aluminio:

$$[C] = \begin{bmatrix} 112.35 & 60.49 & 0 \\ 60.49 & 112.35 & 0 \\ 0 & 0 & 25.9 \end{bmatrix} \text{ GPa}, \quad \rho = 2700 \text{ kg/m}^3.$$

- GaAs:

$$[C] = \begin{bmatrix} 118.8 & 59.4 & 0 \\ 59.4 & 118.8 & 0 \\ 0 & 0 & 53.7 \end{bmatrix} \text{ GPa}, \quad \rho = 5320 \text{ kg/m}^3.$$

- Grafito:

$$[C] = \begin{bmatrix} 235 & 3.69 & 0 \\ 3.69 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 28.2 \end{bmatrix} \text{ GPa}, \quad \rho = 1790 \text{ kg/m}^3.$$

B.2. Tres dimensiones

- Aluminio:

$$[C] = \begin{bmatrix} 112.35 & 60.49 & 60.49 & 0 & 0 & 0 \\ 60.49 & 112.35 & 60.49 & 0 & 0 & 0 \\ 60.49 & 60.49 & 112.35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25.9 \end{bmatrix} \text{ GPa}, \quad \rho = 2700 \text{ kg/m}^3.$$

- Latón- β :

$$[C] = \begin{bmatrix} 52 & 27.5 & 27.5 & 0 & 0 & 0 \\ 27.5 & 52 & 27.5 & 0 & 0 & 0 \\ 27.5 & 27.5 & 52 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 173 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 173 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 173 \end{bmatrix} \text{ GPa}, \quad \rho = 7600 \text{ kg/m}^3.$$

- Cadmio:

$$[C] = \begin{bmatrix} 115.9 & 41.05 & 41 & 0 & 0 & 0 \\ 41.05 & 115.9 & 41 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & 41 & 51.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37.43 \end{bmatrix} \text{ GPa}, \quad \rho = 8650 \text{ kg/m}^3.$$

- Carbono-epoxi:

$$[C] = \begin{bmatrix} 12.37 & 6.15 & 6.19 & 0 & 0 & 0 \\ 6.15 & 21.37 & 6.19 & 0 & 0 & 0 \\ 6.19 & 6.19 & 146.30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.11 \end{bmatrix} \text{ GPa}, \quad \rho = 1900 \text{ kg/m}^3.$$