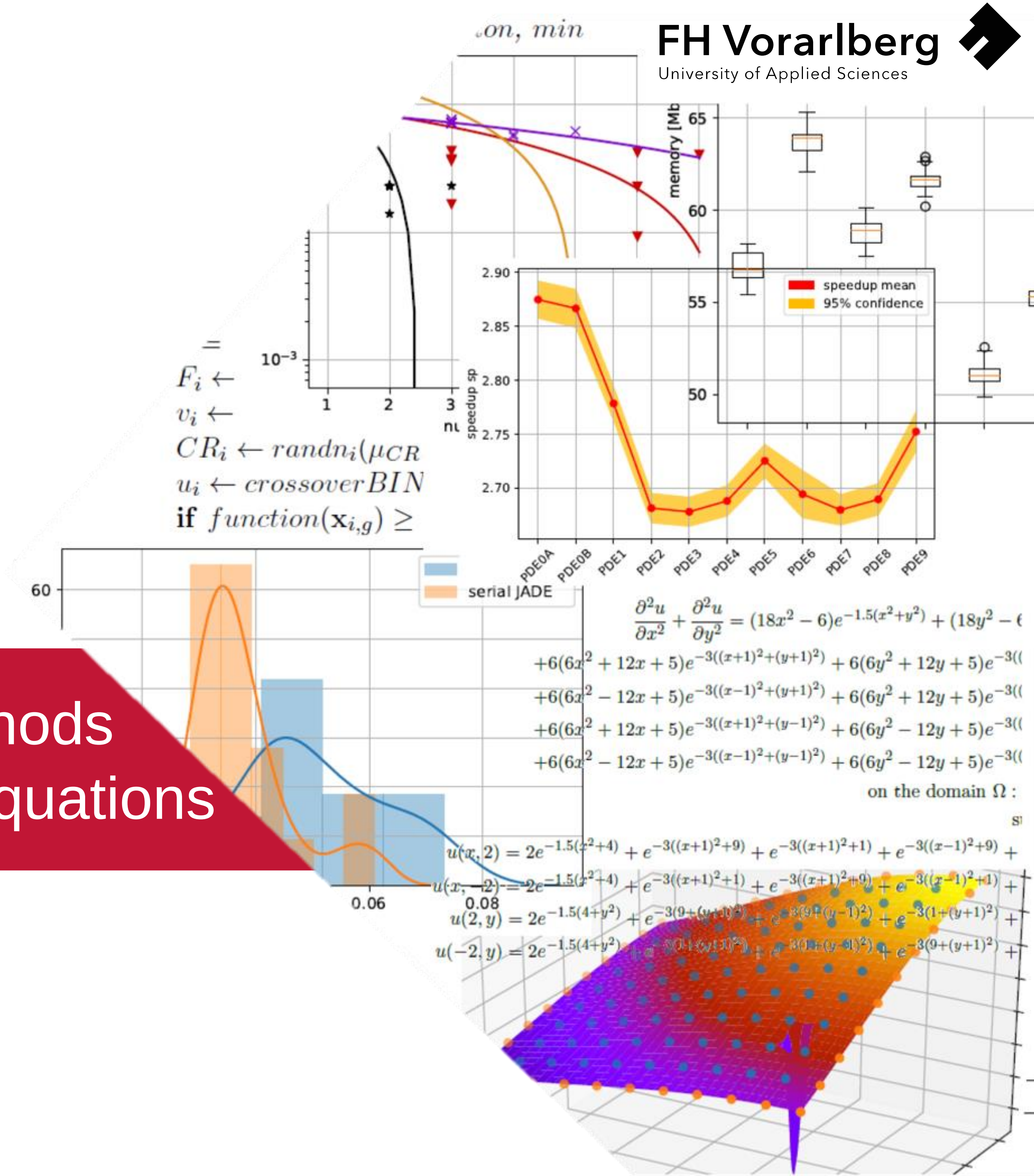
FH Vorarlberg
University of Applied Sciences

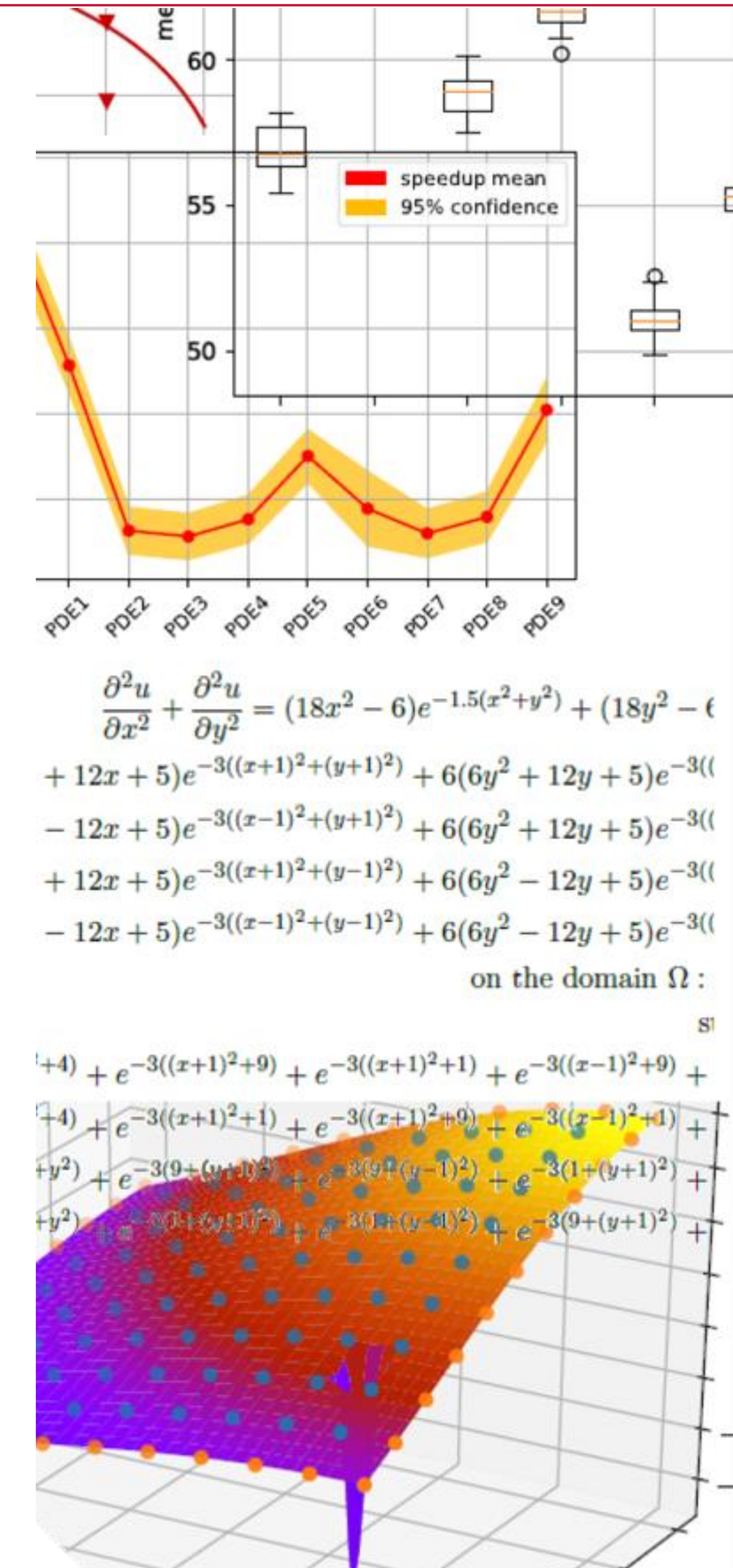



# Computational Intelligence Methods for Solving Partial Differential Equations


Name: Nicolai Schwartze
Studiengang: Master Mechatronics
Semester: 4

# Inhalt

- Problembeschreibung
- Experimentaufbau
- Serielle JADE
- Parallele JADE
- Adaptive Kernel
- Gauß-Sinus Kernel
- Schlussfolgerung



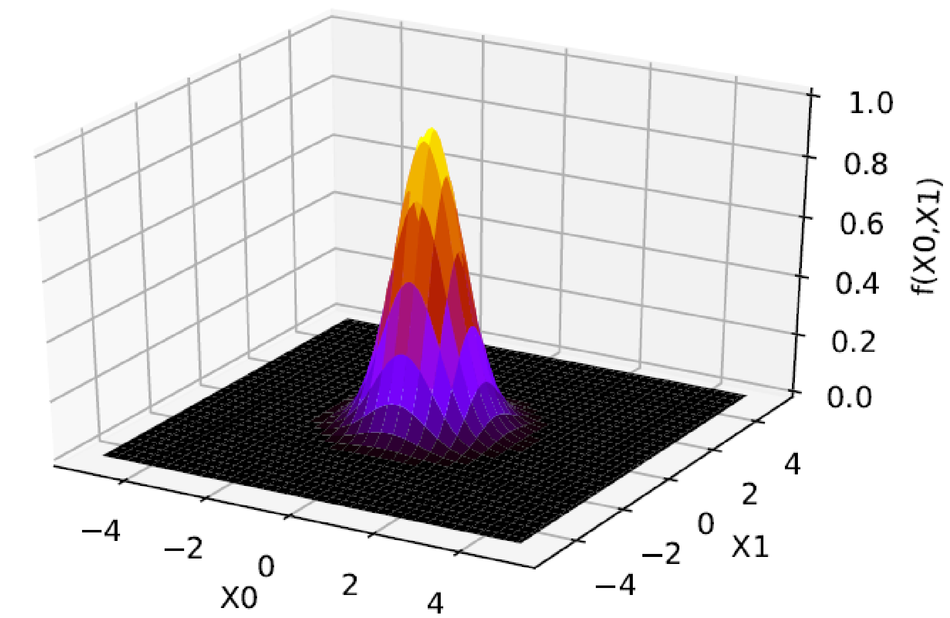
# Problembeschreibung: Optimierungsproblem

- Reformulierung der Differentialgleichung zu einem Optimierungsproblem
  - Minimierung des Residuums
  - $x$ wird hier auf $x \in \mathbb{R}^2$ beschränkt
  - $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ist die Domain der Differentialgleichung mit dem Rand $\partial\Omega$
  - $u(x)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ist die Lösung der Differentialgleichung
  - $\begin{array}{r} Lu(x) = f(x)\ in\ \Omega \\ Bu(x) = g(x)\ auf\ \partial\Omega \end{array}$ L und B sind lineare Differentialoperatoren
  - $R(u(x)) = Lu(x) - f(x)$
  - $R(u(x)) \to min$ für $u(x)$

# Problembeschreibung: Funktionsrepräsentation

- Approximationen werden als endliche Summe von radialen Basisfunkionen dargestellt

  $$\mathrm{u}(x) \approx u_{apx}(x) = \sum_{i=0}^{N} \phi_i(x)$$




- Es werden zwei Basisfunktionen getestet
  - Gauß Kernel

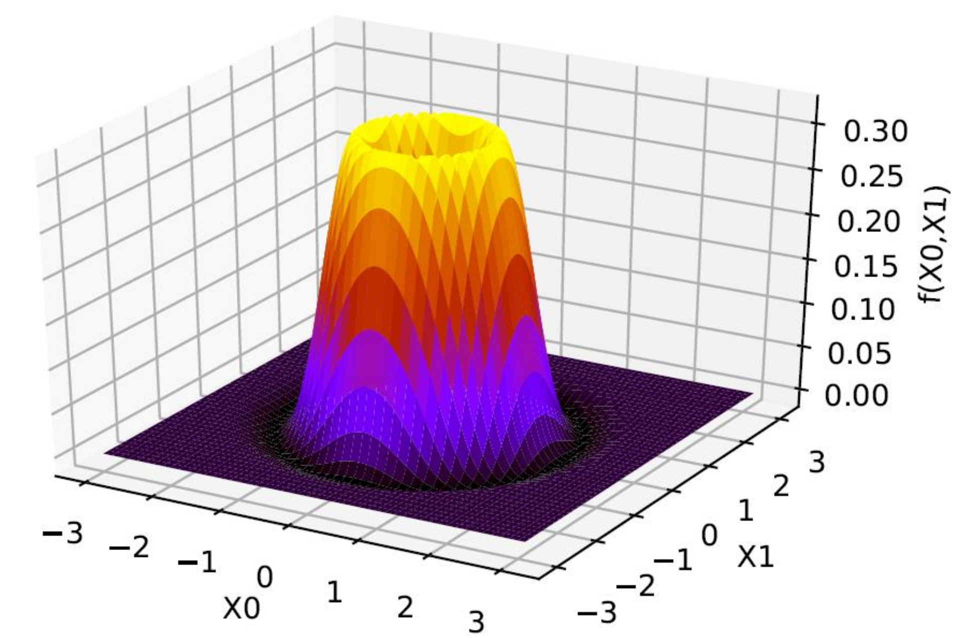
    $$gak(x) = \omega e^{-\gamma\|x-c\|^2}$$

    $$[\omega_0, \gamma_0, c_{00}, c_{01}, \ldots\ \omega_i, \gamma_i, c_{i0}, c_{i1}, \ldots\ \omega_N, \gamma_N, c_{N0}, c_{N1}]^T$$

  - Gauß-Sinus Kernel

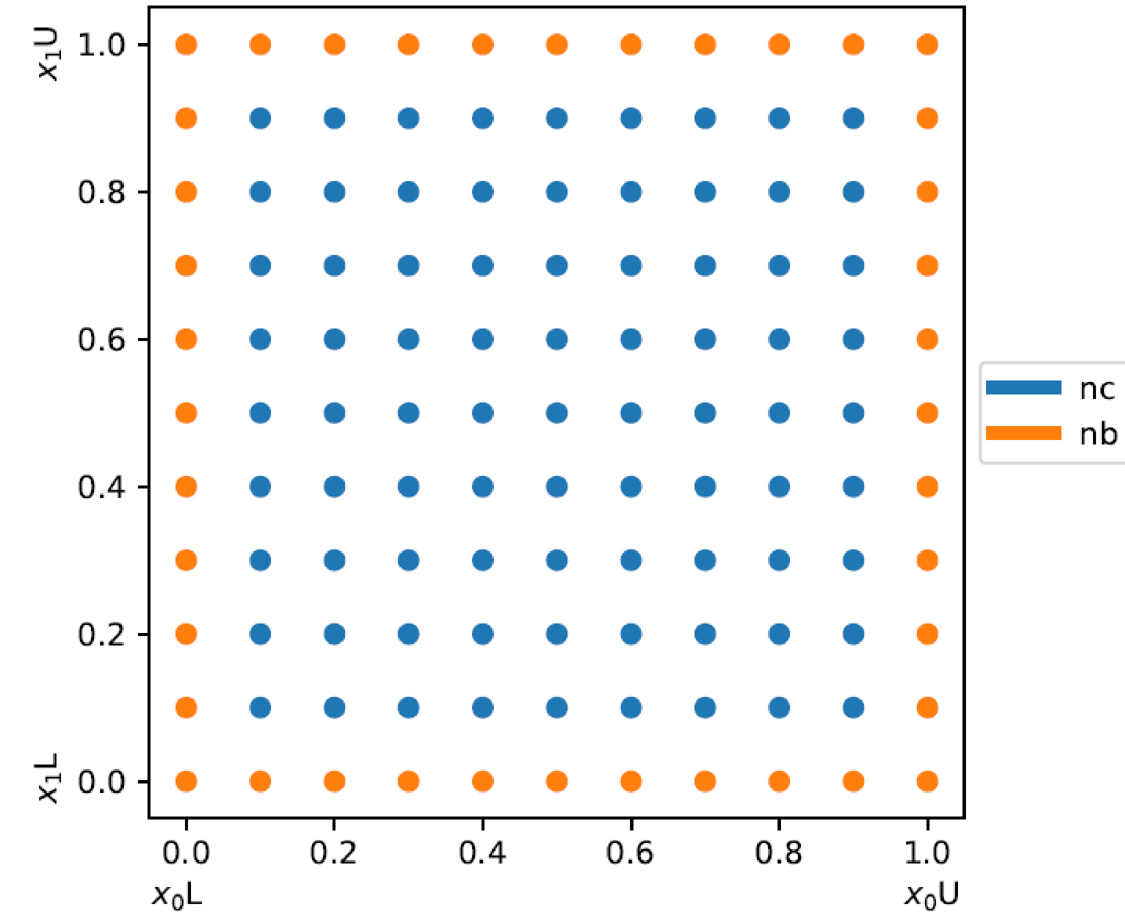
    $$gsk(x) = \omega e^{-\gamma\|x-c\|^2} \sin(f\|x-c\|^2 - \varphi)$$

    $$[\omega_0, \gamma_0, c_{00}, c_{01}, f_0, \varphi_0, \ldots\ \omega_i, \gamma_i, c_{i0}, c_{i1}, f_i, \varphi_i, \ldots\ \omega_N, \gamma_N, c_{N0}, c_{N1}, f_N, \varphi_N]^T$$



# Problembeschreibung: Fitnessfunktion

- Basiert auf dem Residuum
- Weist einer Approximation $u_{apx}(x)$ einen realen Wert zu
- Residuum wird für $u_{apx}(x)$ ausgewertet
  - Finite Anzahl an Collocation Points in der Domain
- „Using CMAES for solving different types of differential equations“ (Chaquet und Carmona 2019)




- Fitness Funktion:

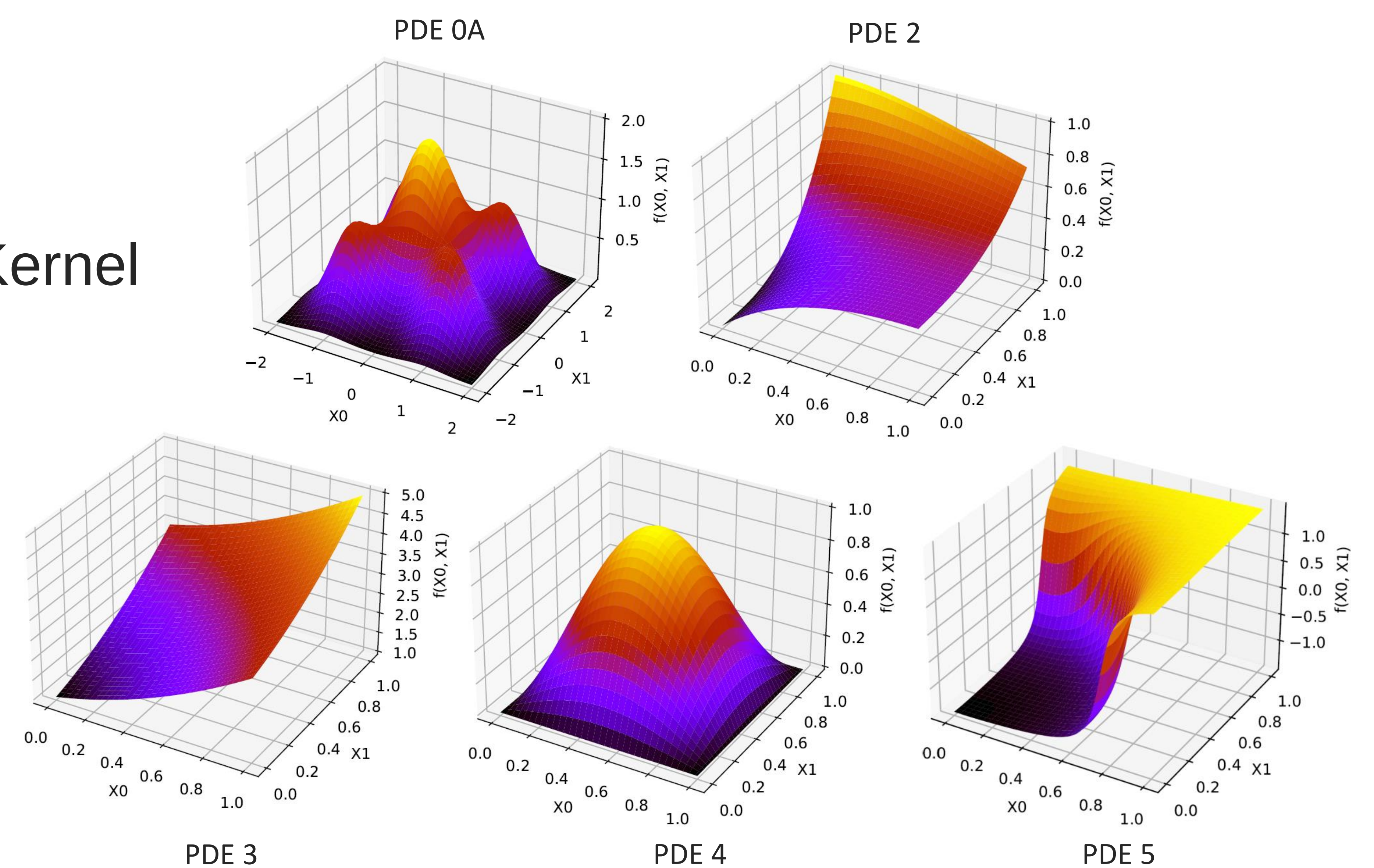
$$F\left(u_{apx}(x)\right) = \frac{\sum_{i=1}^{nc} \xi(x_i)\left[L u_{apx}(x_i) - f(x_i)\right]^2 + \phi \sum_{j=1}^{nB} \left[B u_{apx}(x_j) - g(x_j)\right]^2}{(n_C + n_B)}$$

- Implementierung: $F\left(\underbrace{u_{apx}(x)}_{[\,\omega_i,\gamma_i,c_{i0},c_{i1}]^{\,T}}\right) : \mathbb{R}^{4N} \rightarrow \mathbb{R}$

# Experimentaufbau: Testbed

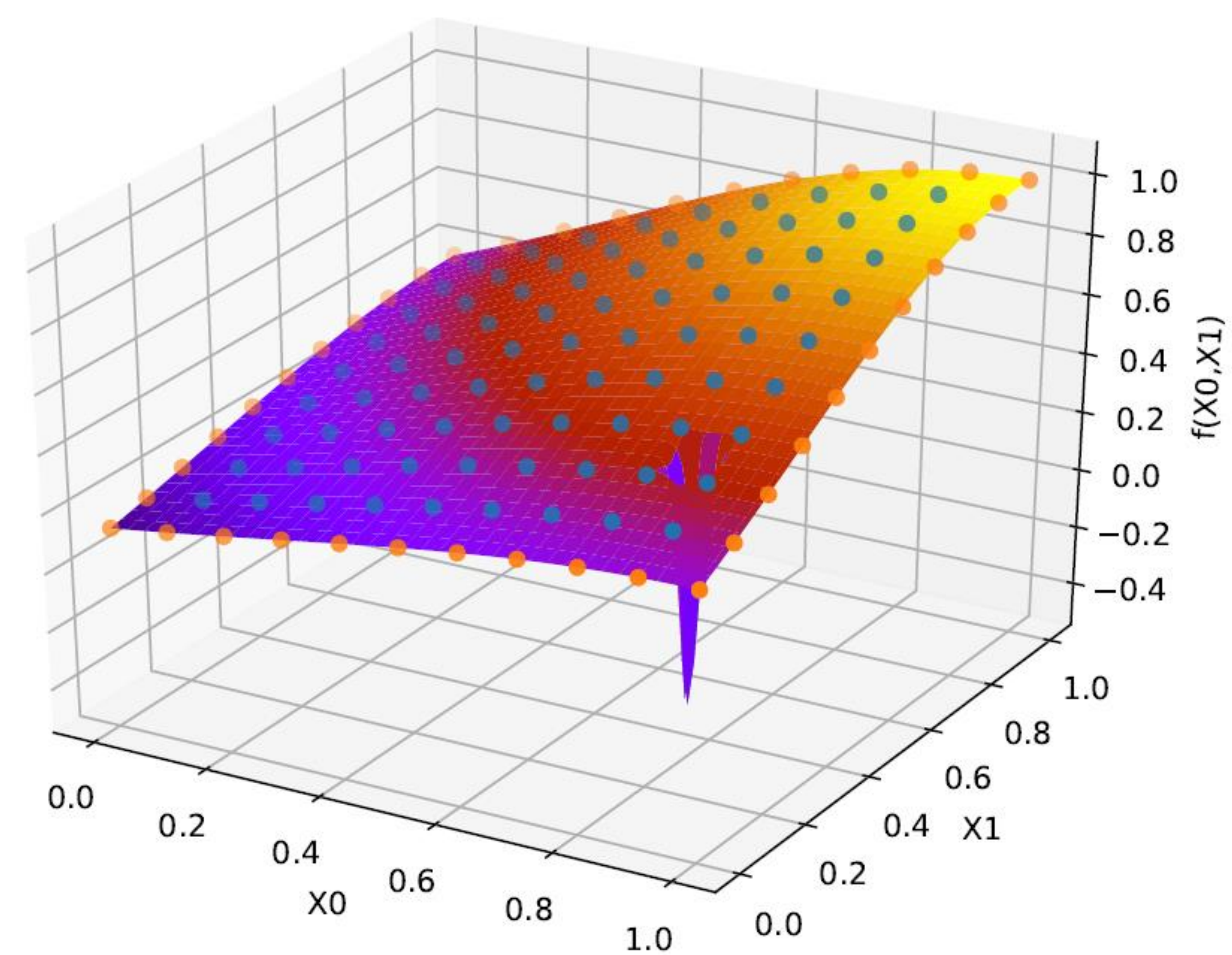
- Testbed bestehend aus 11 PDEs
  - Poisson Gleichungen:
    Laplace Operator wird auf die
    Lösung angewendet

- 5 Gleichungen von Bedeutung:
  - PDE 0A: Summe von 5 Gauß Kernel
  - PDE 2: Aus Literatur
  - PDE 3: Aus Literatur
  - PDE 4: Aus NIST Testbed
  - PDE 5: Aus NIST Testbed



# Experimentaufbau: Vergleiche

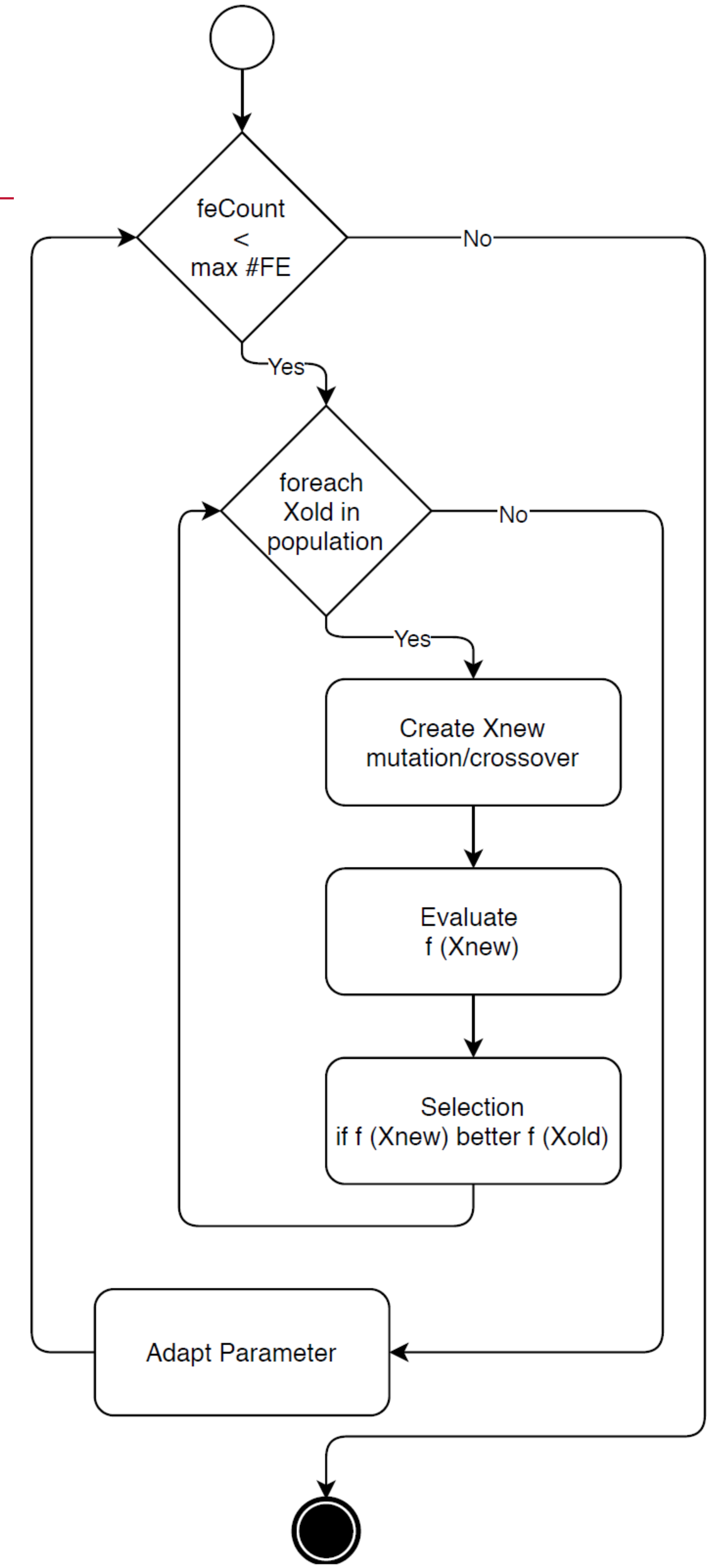
- Es werden 3 Eigenschaften verglichen:
  - Benötigte Zeit
  - Allokierter Speicher
  - Qualität der Approximation
- Vergleich mit Finite Elemente Solver NGSolve
- Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur
- Statistische Auswertung: 20 Replikationen
  Wilcoxon Ranksum Test mit $\alpha = 0.05$




$$\left\|u_{ext} - u_{apx}\right\| = \sqrt{\int_{\Omega} \left(u_{ext}(x) - u_{apx}(x)\right)^2 dx}$$

# Serielle JADE: Hypothese

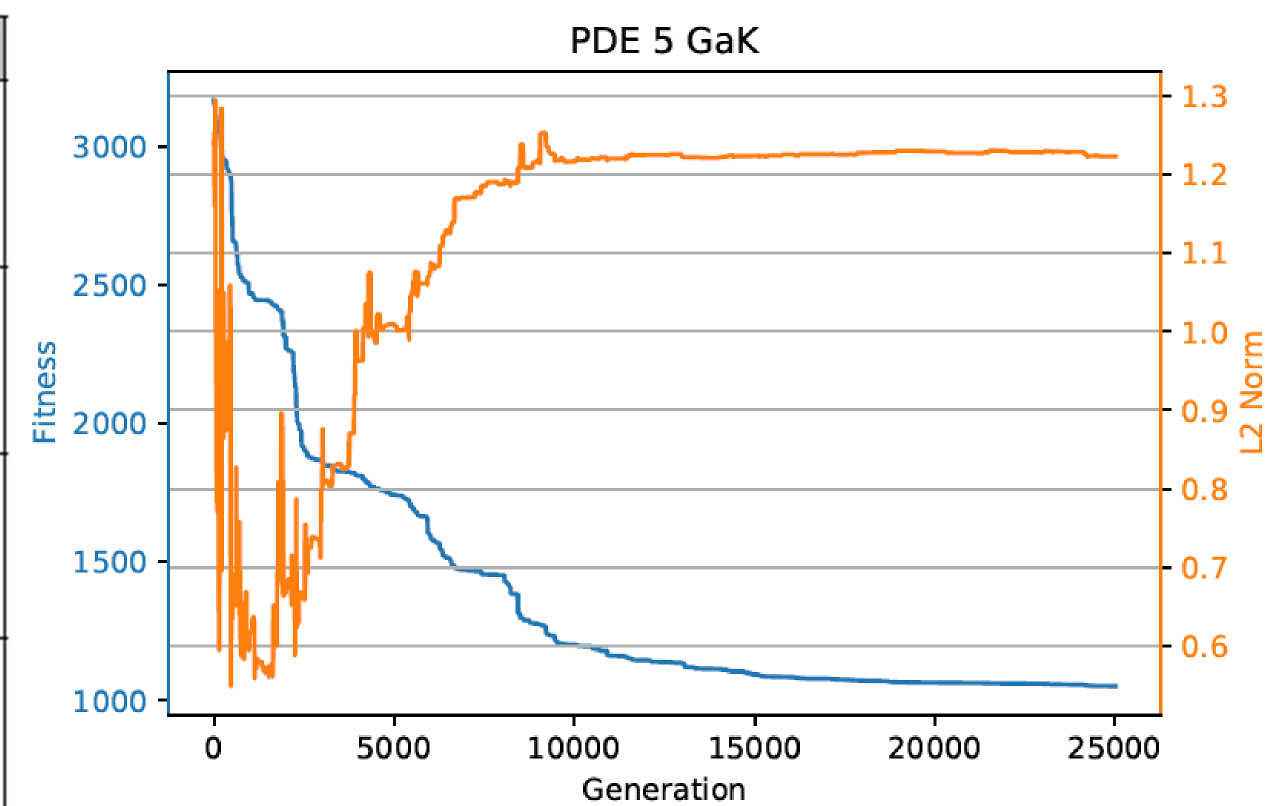
- JADE ist ein evolutionäres Optimierungsverfahren
  - Mutation/Crossover
  - Evaluierung
  - Selektion
- Dasselbe Experiment wie in „Chaquet und Carmona 2019“
  - JADE statt CMAES
  - geringe Parameteränderungen
- Ist es möglich, mit JADE ähnlich gute Ergebnisse wie in der Literatur zu erreichen?



# Serielle JADE: Ergebnisse

| Name | $10^4$ #FE | | $10^6$ #FE | | Wilcoxon |
|---|---|---|---|---|---|
| | mean | median | mean | median | |
| PDE 0A | 1.9415 ± 0.3321 | 1.8844 | 0.6596 ± 0.5510 | 0.9285 | sig. besser |
| PDE 2 | 0.0890 ± 0.0334 | 0.0760 | 0.0257 ± 0.0140 | 0.0224 | sig. besser |
| PDE 3 | 0.2409 ± 0.1051 | 0.2309 | 0.0328 ± 0.0169 | 0.0285 | sig. besser |
| PDE 4 | 0.1102 ± 0.0367 | 0.0985 | 0.0378 ± 0.0083 | 0.0352 | sig. besser |
| PDE 5 | 0.6645 ± 0.1930 | 0.6263 | 1.1968 ± 0.0286 | 1.2056 | sig. schlechter |

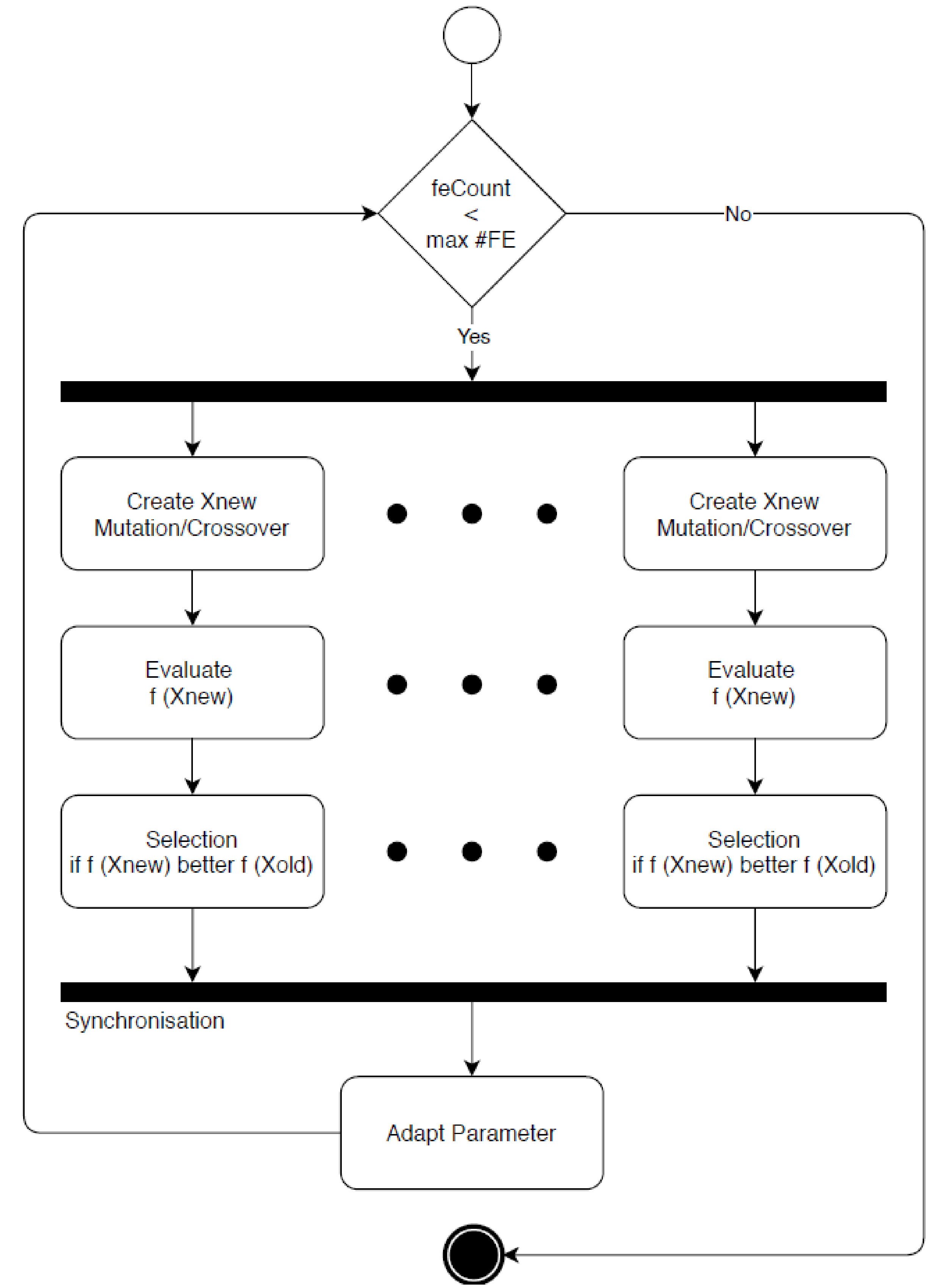
| Paper | Parameter | RMSE PDE 2 | RMSE PDE 3 |
|---|---|---|---|
| Chaquet and Carmona 2019 | 4 kernel<br>max #FE$=10^6$<br>50 replications | $(1.75 \pm 1.14)10^{-4}$ | $(1.09 \pm 0.846)10^{-5}$ |
| Chaquet and Carmona 2012 | 10 harmonics<br>max #FE $= G \cdot \lambda = 1.2 \cdot 10^6$<br>10 replications | $(6.37 \pm 0.733)10^{-3}$ | $(5.90 \pm 0.799)10^{-3}$ |
| Panagant and Bureerat 2014 | unknowns: N/A<br>#FE$=5 \cdot 10^5$<br>replications: N/A | $7.25610^{-4}$ | $9.48910^{-6}$ |
| serial memetic JADE | 5 kernel<br>max #FE $= 10^6$<br>20 replications | $(2.9798 \pm 1.5541)10^{-2}$ | $(3.8225 \pm 1.9438)10^{-2}$ |



# Parallele JADE: Hypothese

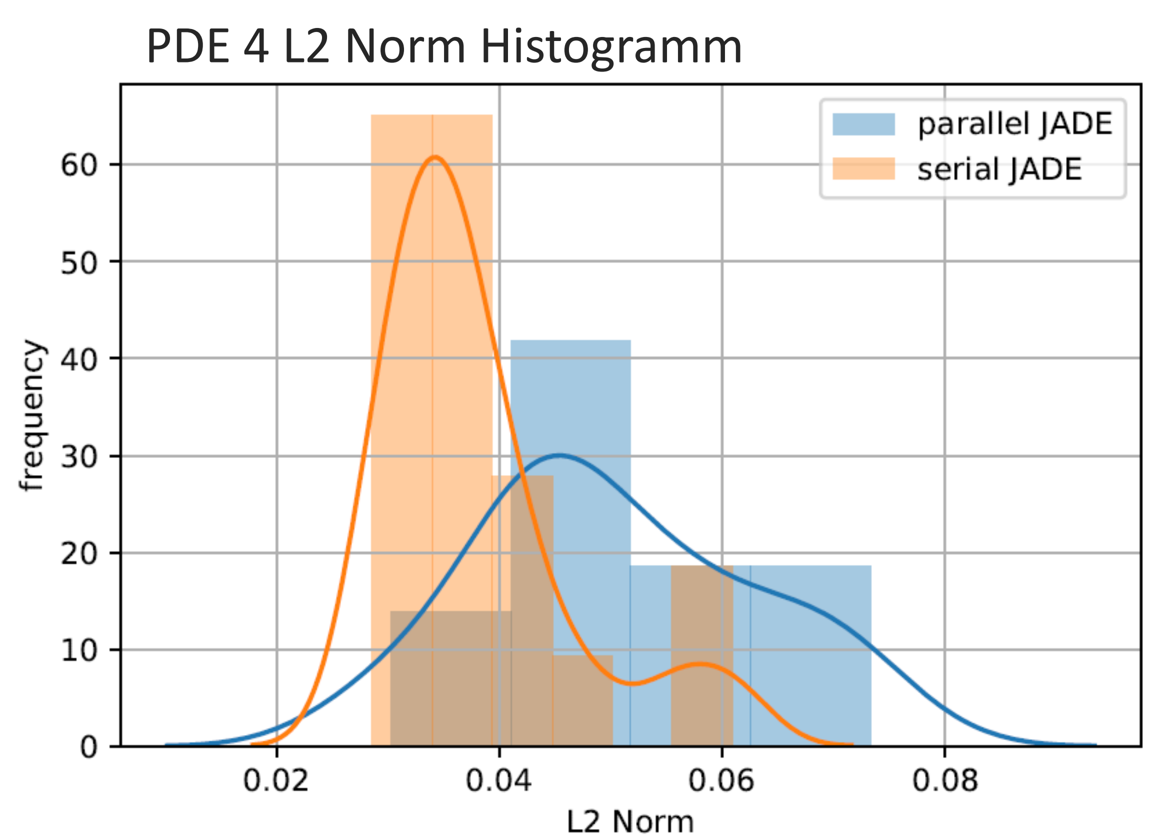
- Parallele Ausführung von JADE
- Die innere Iteration durch die Population wird parallelisiert
- Geringfügige Änderung des Algorithmus:
  - Die Informationen stehen erst nach der Synchronisation der Prozesse zur Verfügung

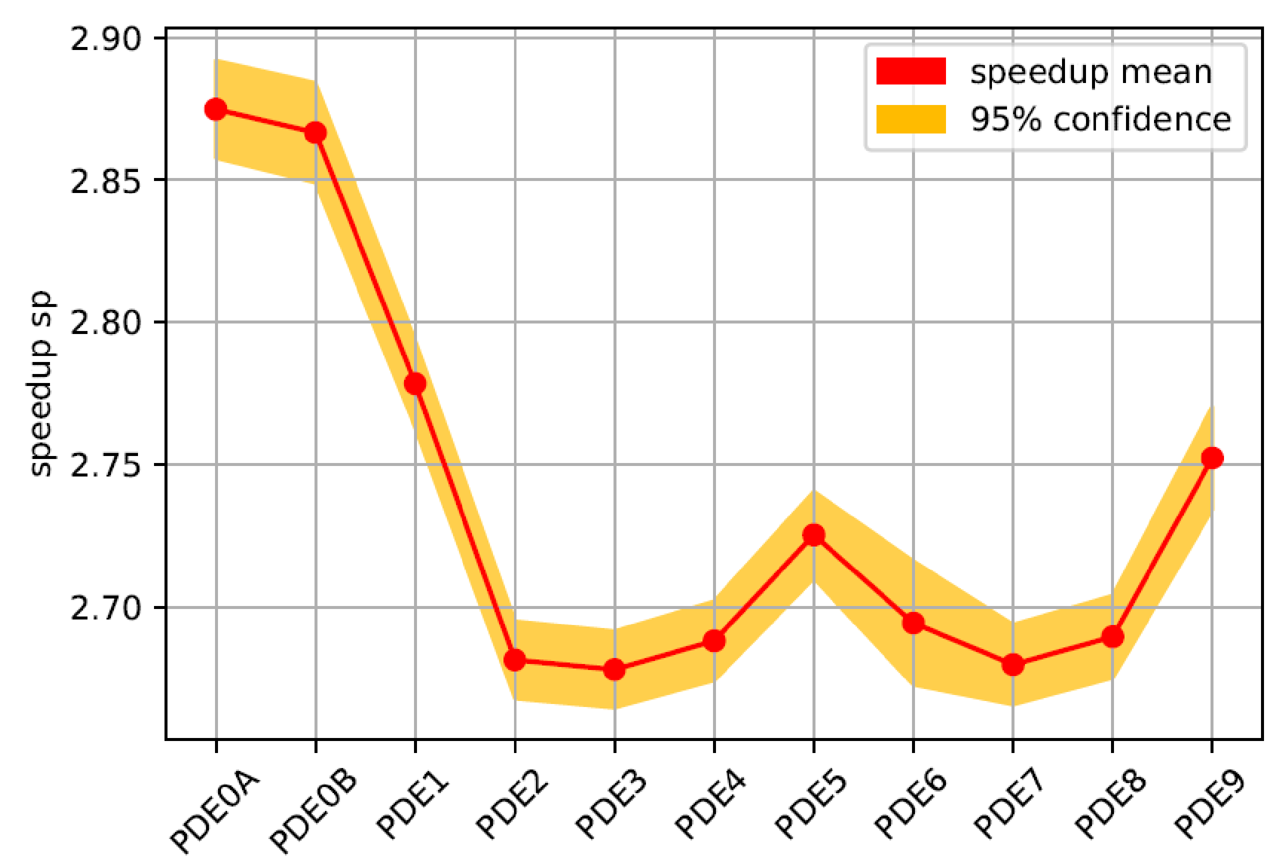
- Wie unterscheiden sich die Ergebnisse des parallelen und des seriellen Algorithmus?



# Parallele JADE: Ergebnisse

| Name | serielle JADE | | parallele JADE | | Wilcoxon |
|---|---|---|---|---|---|
| | mean | median | mean | median | |
| PDE 0A | 0.6596 ± 0.5510 | 0.9285 | 0.6939 ± 0.6635 | 0.9243 | unsig. unschlüssig |
| PDE 2 | 0.0257 ± 0.0140 | 0.0224 | 0.0300 ± 0.0157 | 0.0255 | unsig. schlechter |
| PDE 3 | 0.0328 ± 0.0169 | 0.0285 | 0.0371 ± 0.0206 | 0.0295 | unsig. schlechter |
| PDE 4 | 0.0378 ± 0.0083 | 0.0352 | 0.0505 ± 0.0121 | 0.0481 | sig. schlechter |
| PDE 5 | 1.1968 ± 0.0286 | 1.2056 | 1.2030 ± 0.0465 | 1.2053 | unsig. unschlüssig |

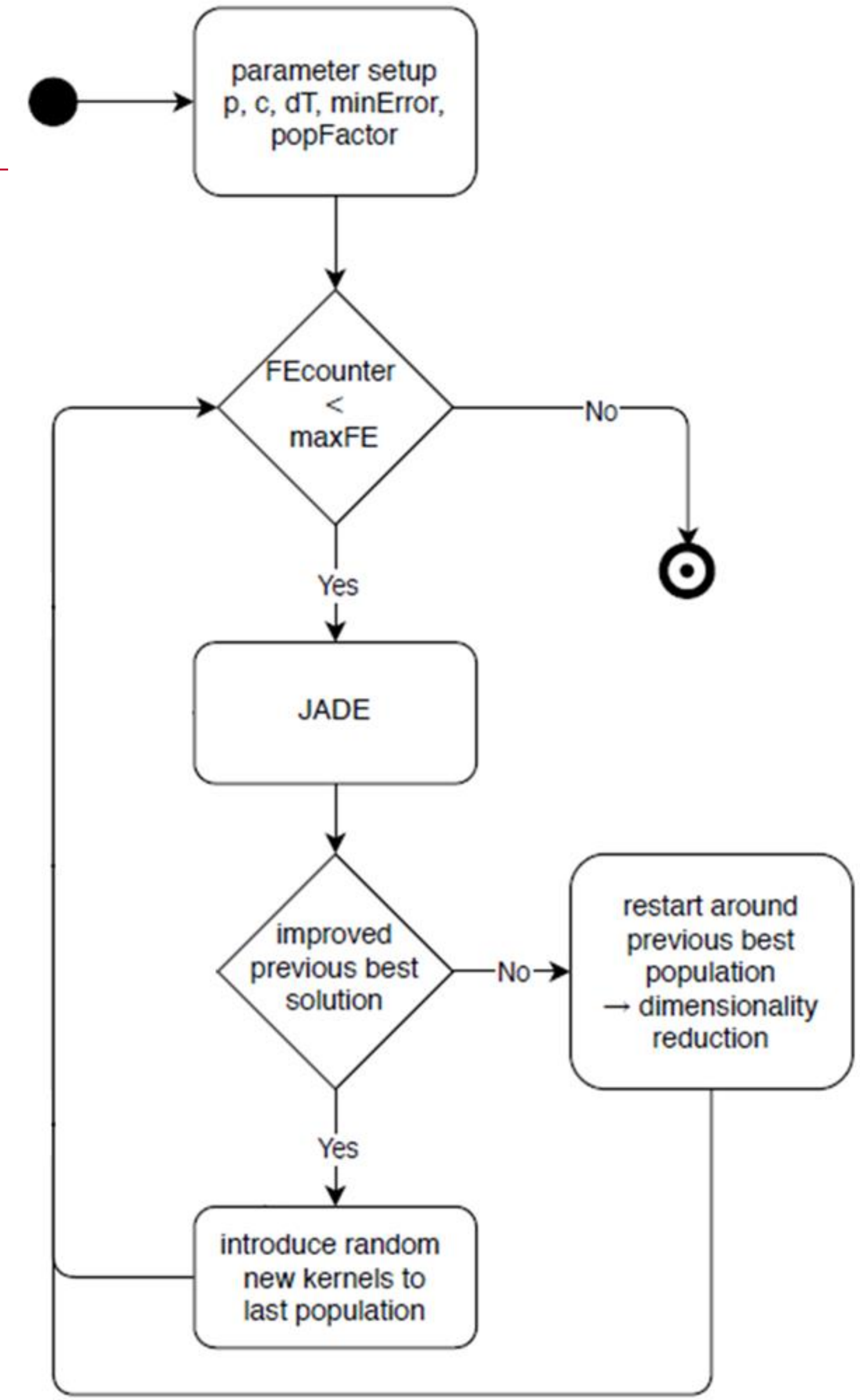


# Adaptive Kernel: Hypothese

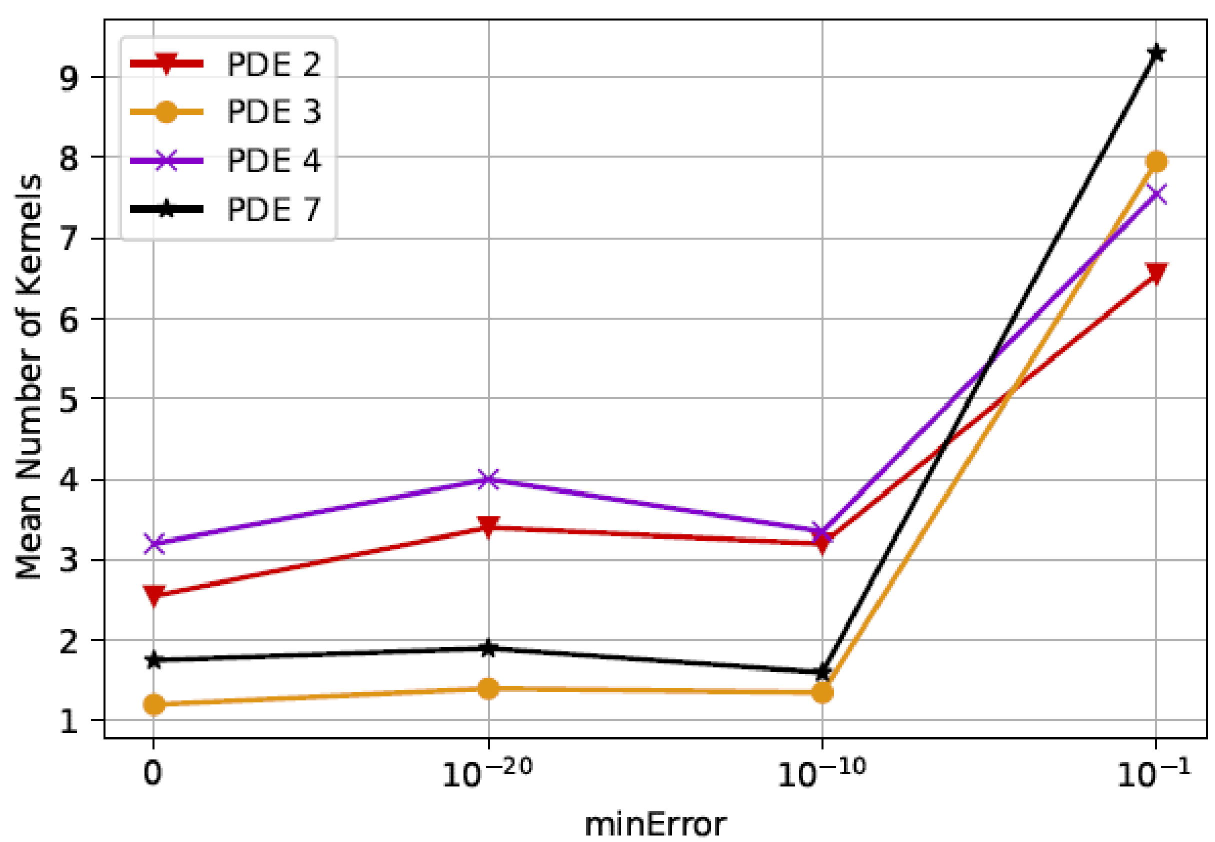
- Konvergenzbasierte Terminierung von JADE notwendig:
  - unveränderter Funktionswert über Generationen
- Adaptives Vorgehen:
  - Beginn mit einem Kernel, geringe Dimension
  - Erhöhe Anzahl der Kernel bis die Lösung nicht mehr verbessert werden kann

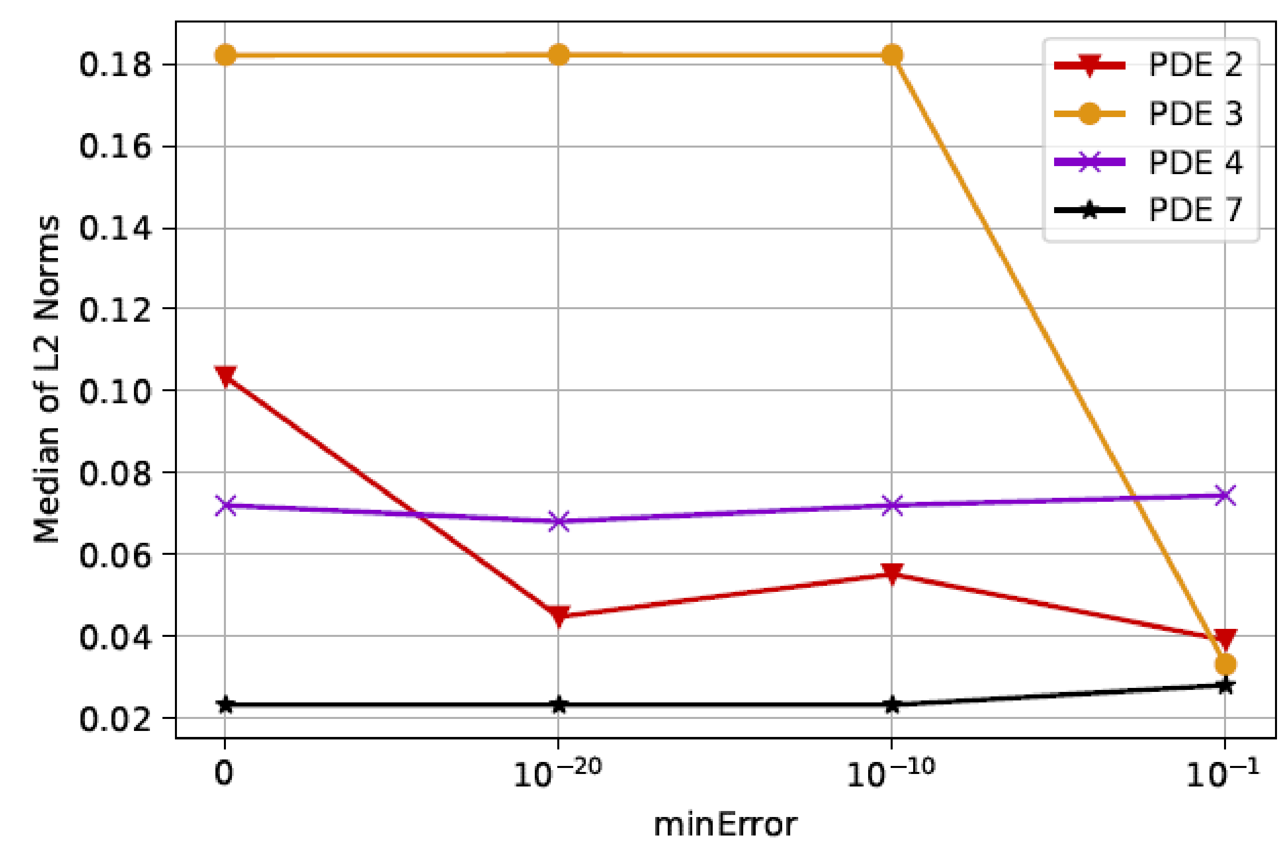
- Kann dieses adaptive Verhalten der Kernel die Ergebnisse verbessern?



# Adaptive Kernel: Ergebnisse

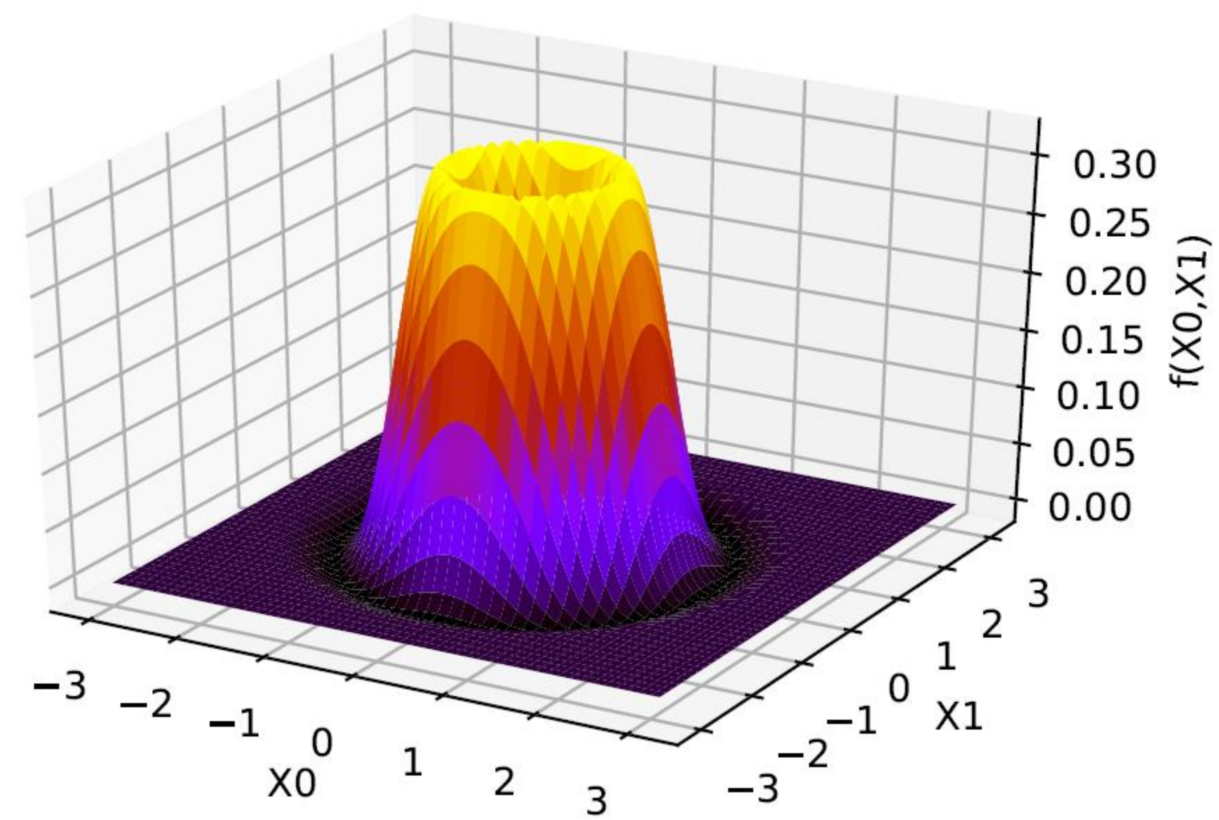
| Name | parallel JADE | | adaptive Kernel | | Wilcoxon |
|---|---|---|---|---|---|
| | mean | median | mean | median | |
| PDE 0A | 0.6939 ± 0.6635 | 0.9243 | 9.694E-16 ± 1.486E-16 | 9.255E-16 | sig. besser |
| PDE 2 | 0.0300 ± 0.0157 | 0.0255 | 0.0735 ± 0.0358 | 0.1034 | sig. schlechter |
| PDE 3 | 0.0371 ± 0.0206 | 0.0295 | 0.1731 ± 0.0395 | 0.1822 | sig. schlechter |
| PDE 4 | 0.0505 ± 0.0121 | 0.0481 | 0.0707 ± 0.0053 | 0.0720 | sig. schlechter |
| PDE 5 | 1.2030 ± 0.0465 | 1.2053 | 122.6312 ± 372.5676 | 1.1643 | unsig. unschlüssig |



# Gauß-Sinus Kernel: Hypothese

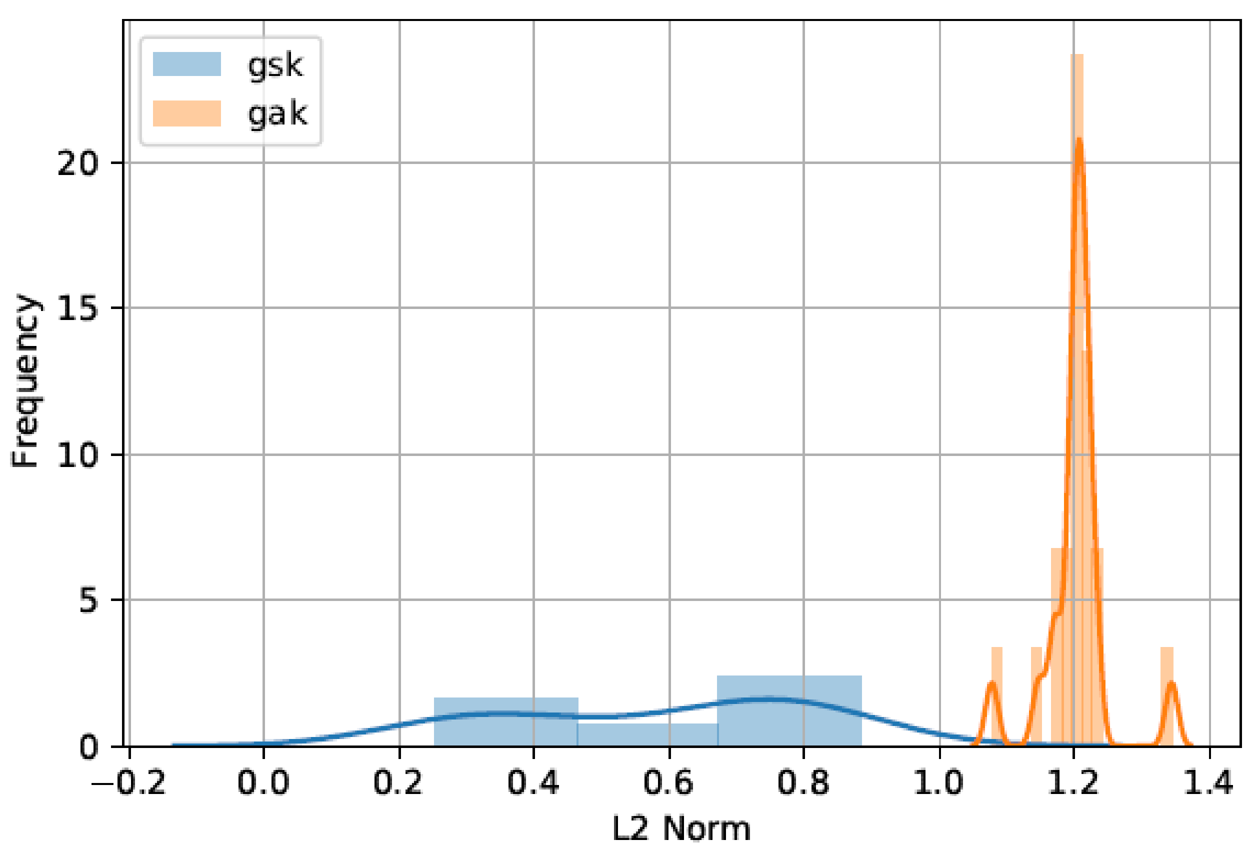
- Fitnessfunktion wird optimiert, reflektiert aber nicht das eigentliche Qualitätsmerkmal
  - Fitnessfunktion muss angepasst werden
    $\rightarrow$ einfache Möglichkeit: anderer Kerneltyp
- $gsk(x) = \omega e^{-\gamma \|x-c\|^2} \sin(f\|x-c\|^2 - \varphi)$

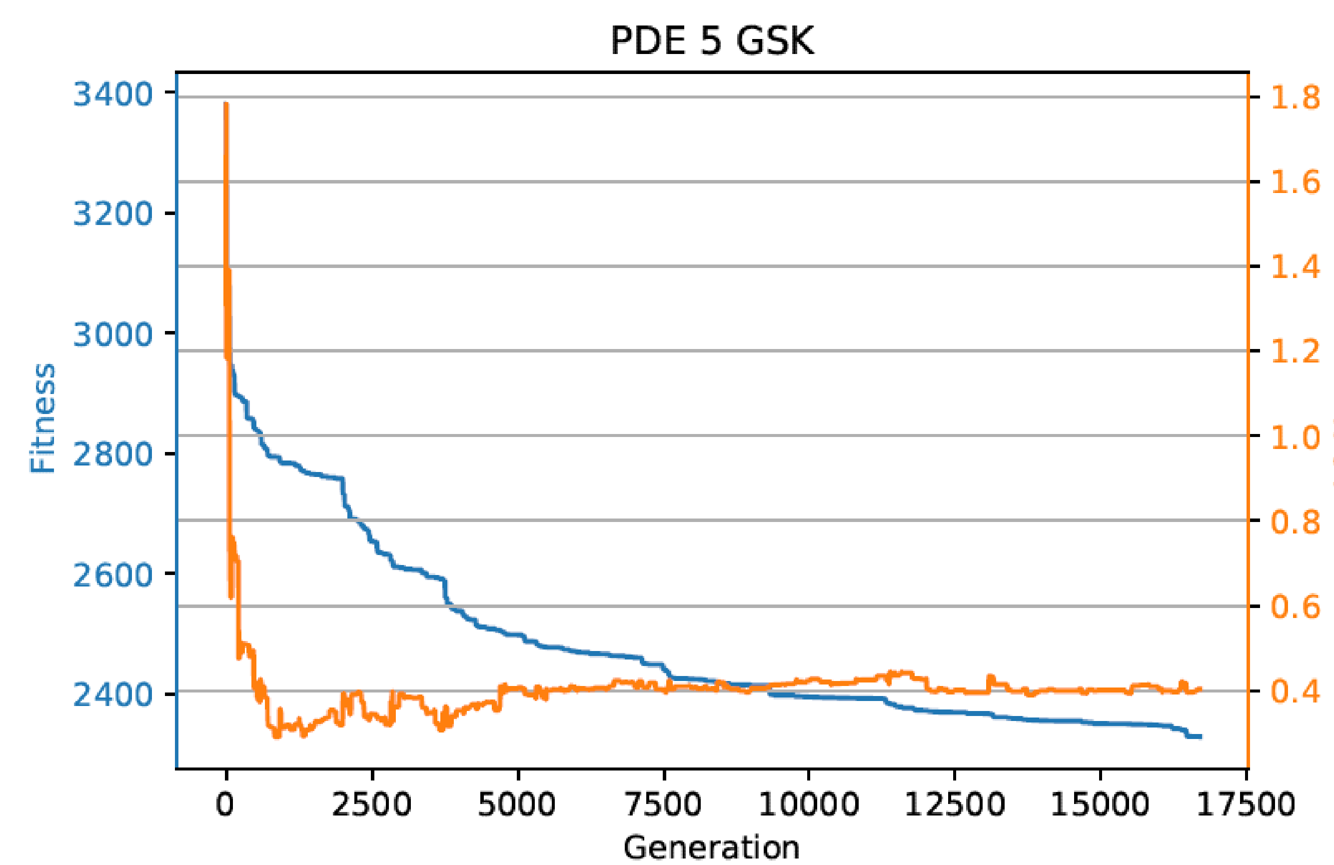



- Kann der neue Gauß-Sinus Kernel das Problem der gegensätzlichen Fitness und L2 Norm auf PDE 5 lösen?

# Gauß-Sinus Kernel: Ergebnisse

| Name | Gauß Kernel | | Gauß-Sinus Kernel | | Wilcoxon |
|---|---|---|---|---|---|
| | mean | median | mean | median | |
| PDE 0A | 0.6939 ± 0.6635 | 0.9243 | 0.8106 ± 0.7929 | 0.6765 | unsig. unschlüssig |
| PDE 2 | 0.0300 ± 0.0157 | 0.0255 | 0.0448 ± 0.0224 | 0.0416 | unsig. schlechter |
| PDE 3 | 0.0371 ± 0.0206 | 0.0295 | 0.0263 ± 0.0111 | 0.0269 | unsig. besser |
| PDE 4 | 0.0505 ± 0.0121 | 0.0481 | 0.0470 ± 0.0078 | 0.0458 | unsig. besser |
| PDE 5 | 1.2030 ± 0.0465 | 1.2053 | 0.5860 ± 0.2149 | 0.6841 | sig. besser |



# Schlussfolgerung

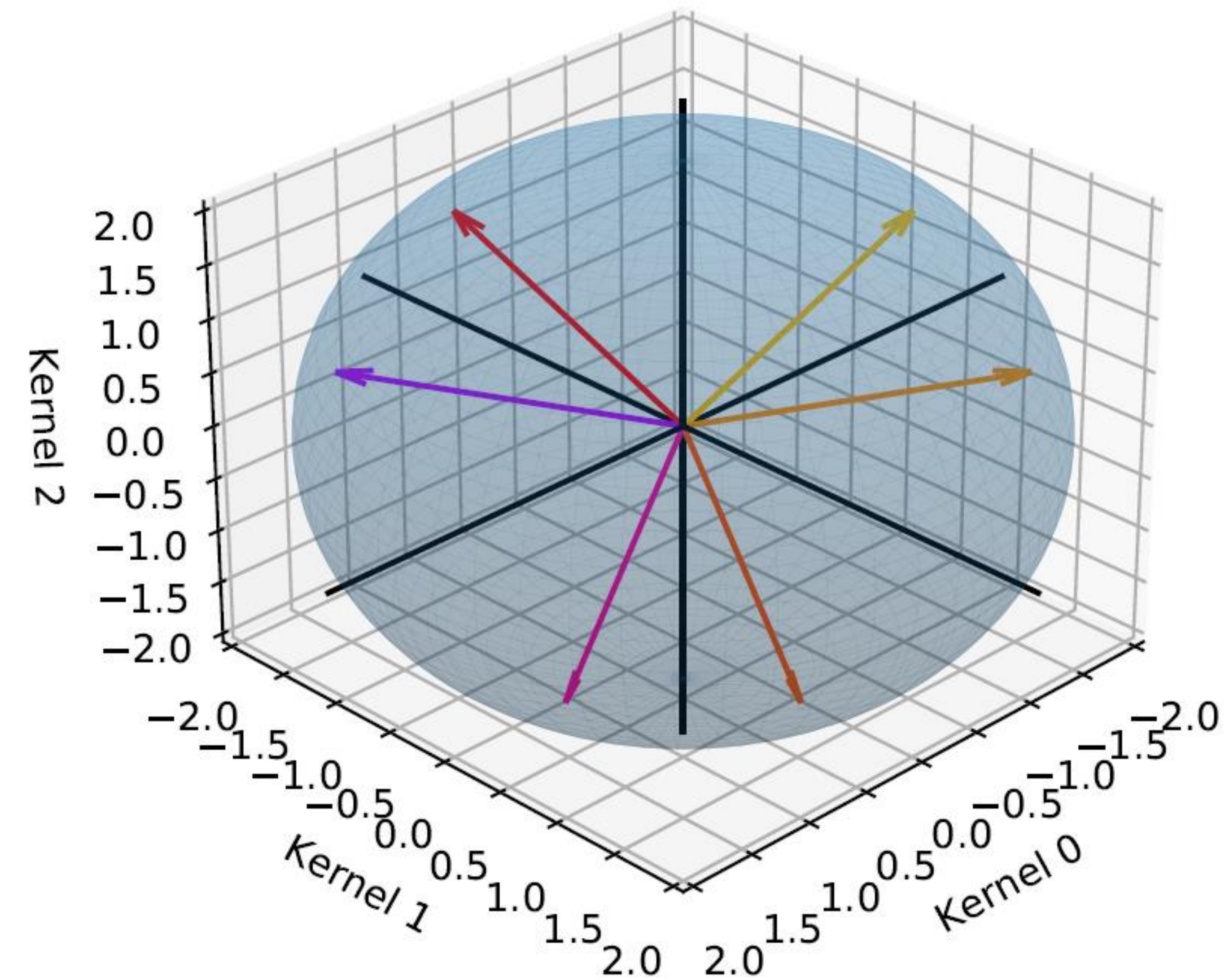
- JADE produziert schlechtere Ergebnisse als vergleichbare Algorithmen aus der Literatur

- CMAES auf diesem Testbed verwenden

- Es kann eine radiale Symmetrie der Fitnessfunktion festgestellt werden, das könnte der Entwicklung neuer Algorithmen dienen

$$u(x) \approx u_{apx}(x) = \sum_{i=0}^{N} \phi_i(x)$$

$$\left[\underrightarrow{kernel_0}, \dots \underleftrightarrow{kernel_i}, \dots \underleftarrow{kerenl_N}\right]^T$$



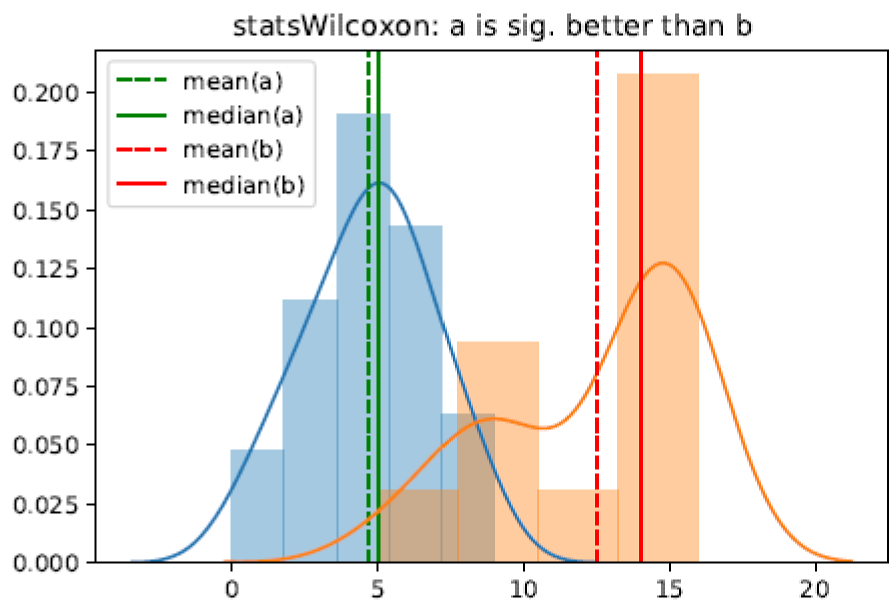
FH Vorarlberg
University of Applied Sciences

www.fhv.at

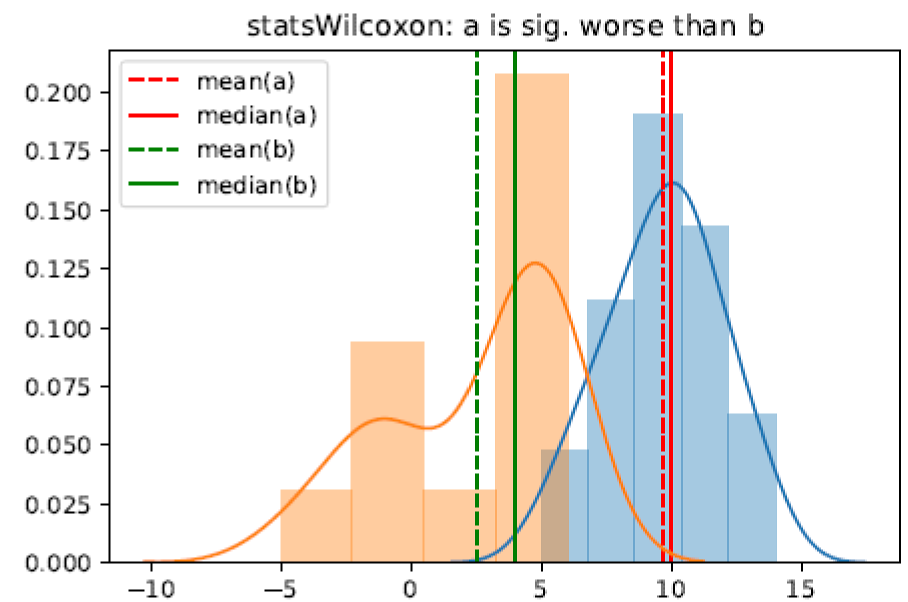
Name: Nicolai Schwartze
Kontakt: nicolai.schwartze@students.fhv.at

Studiengang, Semester: Master Mechatronics, 4

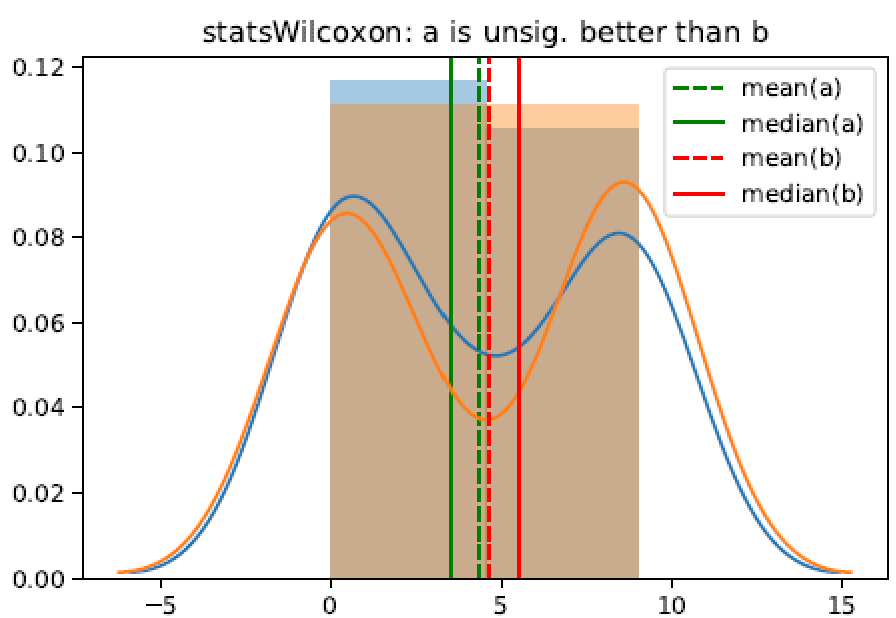
# Statistische Signifikanz: Wilcoxon Test



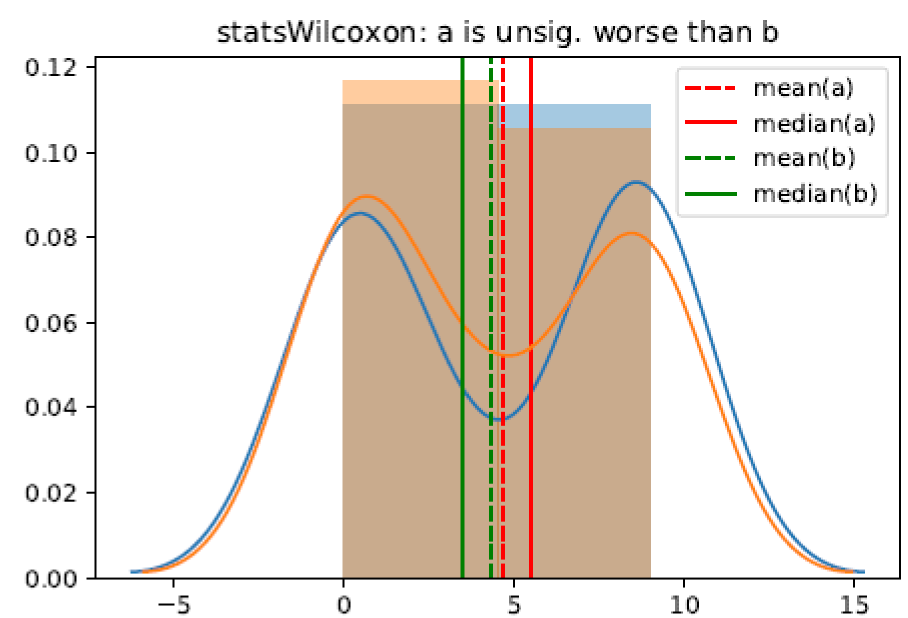

(a) A is significantly better than B




(b) A is sigificantly worse than B

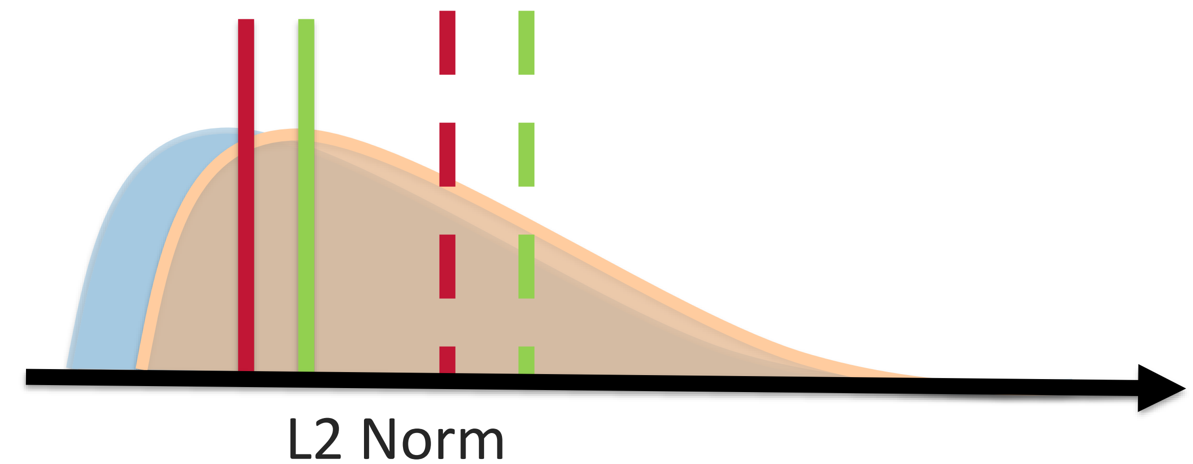



(c) A is unsignificantly better than B




(d) A is unsignificatnly worse than B

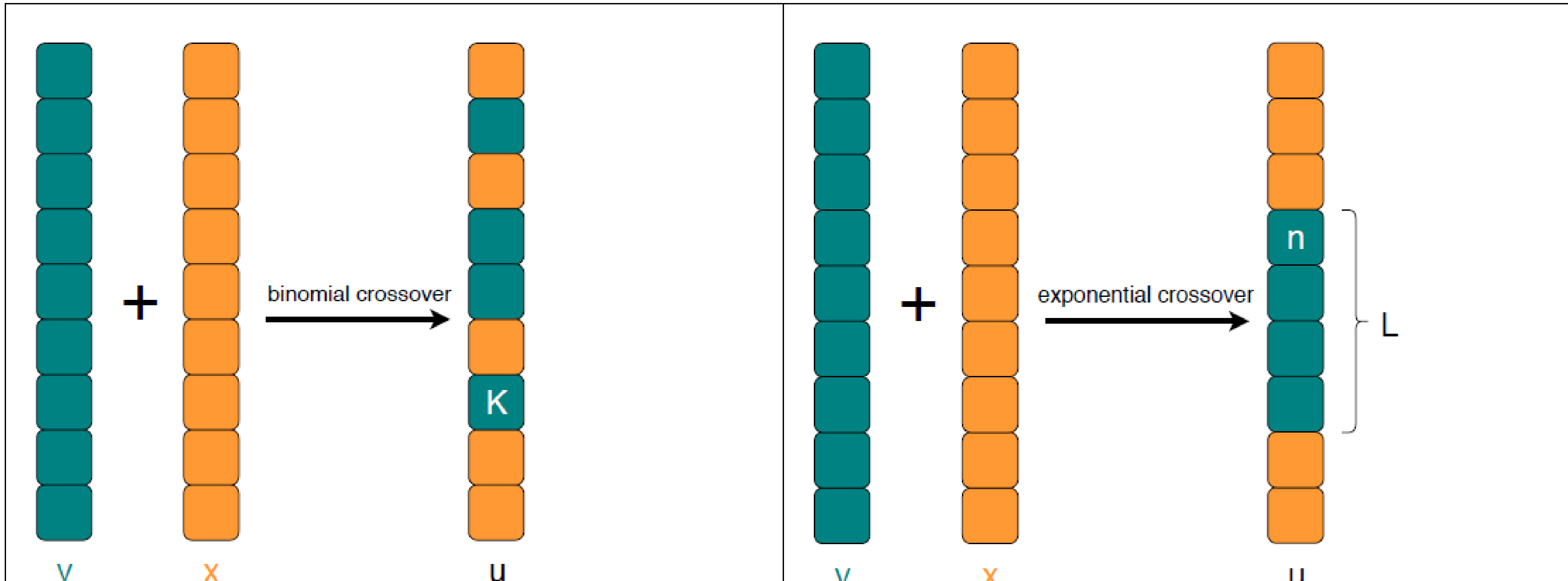
## Unschlüssig:



# Pseudocode: Mutation/Crossover

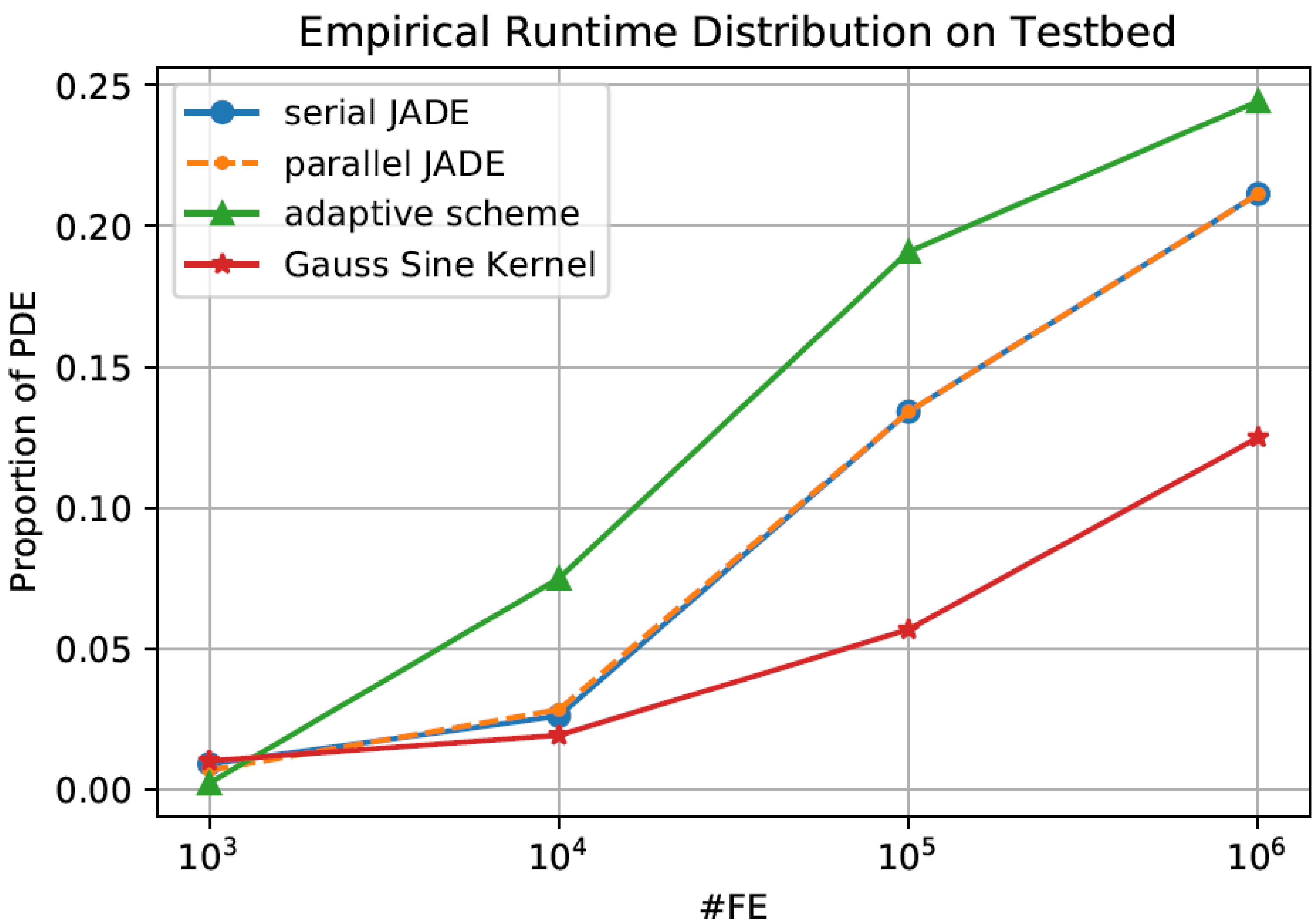
| | |
|---|---|
| CurrentToPBest | $v_{i,g} = x_{i,g} + F_i \cdot \left(x^{p}_{best,g} - x_{i,g}\right) + F_i \cdot \left(x_{r1,g} - x_{r2,g}\right)$ |
| CurrentToPBest with archive | $v_{i,g} = x_{i,g} + F_i \cdot \left(x^{P}_{best,g} - x_{i,g}\right) + F_i \cdot \left(x_{r1,g} - \tilde{x}_{r2,g}\right)$ |

| binomial crossover | exponential crossover |
|---|---|




| | |
|---|---|
| $u_j = \begin{cases} v_j, & \text{if } j = K \vee rand[0,1] \leq CR \\ x_j, & \text{otherwise} \end{cases}$ | $u_j = \begin{cases} v_j, & \text{if } j \in \{\langle n \rangle_d, \ldots \langle n+L-1 \rangle_d\} \\ x_j, & \text{otherwise} \end{cases}$ |

# Expected Runtime Distribution




L2 Norm auf allen
11 PDEs zu einem
Targetvalue von:
0.05
0.01
0.005
0.001

# Pseudocode: JADE

**Algorithm A.1:** JADE Pseudocode

**Function** JADE($\mathbf{X}_{g=0}$, $p$, $c$, $function$, $minError$, $maxFE$):
  $fValue_{g=0} \leftarrow function(\mathbf{x}_{g=0})$
  $\mu_{CR} \leftarrow 0.5$
  $\mu_F \leftarrow 0.5$
  $A \leftarrow \emptyset$
  **while** $fe \leq maxFE$ **do**
    $g \leftarrow g + 1$
    $S_F \leftarrow \emptyset$
    $S_{CR} \leftarrow \emptyset$
    **for** $i = 1$ *to* $NP$ **do**
      $F_i \leftarrow randc_i(\mu_F, 0.1)$
      $v_i \leftarrow mutationCurrentToPBest1(\mathbf{x}_{i,g}, A, fValue_g, F_i, p)$
      $CR_i \leftarrow randn_i(\mu_{CR}, 0.1)$
      $u_i \leftarrow crossoverBIN(\mathbf{x}_{i,g}, v_i, CR_i)$
      **if** $function(\mathbf{x}_{i,g}) \geq function(\mathbf{u}_{i,g})$ **then**
        $\mathbf{x}_{i,g+1} \leftarrow \mathbf{x}_{i,g}$
      **end**
      **else**
        $\mathbf{x}_{i,g+1} \leftarrow \mathbf{u}_{i,g}$
        $fValue_{i,g+1} \leftarrow function(\mathbf{u}_{i,g})$
        $\mathbf{x}_{i,g} \rightarrow \mathbf{A}$
        $CR_i \rightarrow S_{CR}$
        $F_i \rightarrow S_F$
      **end**
    **end**
    `// resize` $A$ `to size of` $\mathbf{x}_g$
    **if** $|A| > NP$ **then**
      $A \leftarrow A \setminus A_{rand_i}$
    **end**
    $fe \leftarrow fe + size(\mathbf{X})$
    $\mu_{CR} \leftarrow (1 - c) \cdot \mu_{CR} + c \cdot arithmeticMean(S_{CR})$
    $\mu_F \leftarrow (1 - c) \cdot \mu_F + c \cdot lehmerMean(S_F)$
  **end**

# Pseudocode: memetic JADE

**Algorithm 5.1:** Pseudocode of memetic JADE

```
Function memeticJADE(X, funct, minErr, maxFE):
    dim, popsize ← size(X)
    p ← 0.3
    c ← 0.5
    pop, FE, F, CR ← JADE(X, p, c, funct, minErr, maxFE − 2dim )
    bestIndex = argmin(FE)
    bestSol = pop[bestIndex]
    pop, FE = downhill simplex(funct, bestSol, minErr, 2dim)
    return pop, FE, F, CR
```

# Finite Elemente Ergebnisse

| Problem PDE | L2 Norm |
|---|---|
| 0A | $2.967 \cdot 10^{-5}$ |
| 0B | $1.071 \cdot 10^{-5}$ |
| 1 | $8.004 \cdot 10^{-7}$ |
| 2 | $3.501 \cdot 10^{-8}$ |
| 3 | $1.680 \cdot 10^{-9}$ |
| 4 | $4.764 \cdot 10^{-7}$ |
| 5 | $6.057 \cdot 10^{-6}$ |
| 6 | $1.908 \cdot 10^{-7}$ |
| 7 | $5.203 \cdot 10^{-5}$ |
| 8 | $3.237 \cdot 10^{-7}$ |
| 9 | $2.366 \cdot 10^{-7}$ |

# Ableitungen Kernel

## Gauß Kernel

$$\frac{\partial u_{apx}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -2\sum_{i=0}^{N} \omega_i \gamma_i (x_j - c_{ij}) e^{-\gamma_i r_i^2} \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial^2 u_{apx}(\mathbf{x})}{\partial x_j^2} = \sum_{i=0}^{N} \omega_i \gamma_i \left[4\gamma_i (x_j - c_{ij})^2 - 2\right] e^{-\gamma_i r_i^2} \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial^2 u_{apx}(\mathbf{x})}{\partial x_j x_k} = 4\sum_{i=0}^{N} \omega_i \gamma_i^2 (x_j - c_{ij})(x_k - c_{ik}) e^{-\gamma_i r_i^2} \tag{3.15}$$

## Gauß Sinus Kernel

$$\frac{\partial u_{apx}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \sum_{i=0}^{N} 2\omega_i (x_j - c_{ij}) e^{-\gamma_i r_i^2} (f_i cos(f_i r_i^2 - \varphi_i) - \gamma_i sin(f_i r_i^2 - \varphi_i)) \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial^2 u_{apx}(\mathbf{x})}{\partial x_j^2} = \sum_{i=0}^{N} 2\omega_i e^{-\gamma_i r_i^2}$$
$$[-(2(f_i^2 - \gamma_i^2)(x_j - c_{ij})^2 + \gamma_i) sin(f_i r_i^2 - \varphi_i) - (4 f_i \gamma_i (x_j - c_{ij})^2 - f_i) cos(f_i r_i^2 - \varphi_i)] \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial^2 u_{apx}(\mathbf{x})}{\partial x_j x_k} = \sum_{i=0}^{N} -4\omega_i (c_{ij} - x_j)(c_{ik} - x_k) e^{-\gamma_i r_i^2}$$
$$[(f_i^2 - \gamma_i^2) sin(f_i r_i^2 - \varphi_i) + 2 f_i \gamma_i cos(f_i r_i^2 - \varphi_i)] \tag{3.21}$$

# Picture Library – revised