ИТОГОВЫЙ ТЕСТ по курсу «Методы вычислений», лектор Лебедева А.В.

14.12.2020 г.

_343________Мамро М.В._______________

Выделите/отметьте номера верных/истинных утверждений (выбор может быть множественным)

1. (1 балл) Интерполяционная квадратурная формула (далее ИКФ) с N узлами:

1) (при фиксированных весе ρ(x) и (a,b)), набором своих узлов определяется ОДНОЗНАЧНО;
2) это квадратурная формула, узлы $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_N}$ которой – произвольные попарно-различные точки, а коэффициенты закреплены выражениями $A_k = \int_a^b \rho(x)\, l_k(x)\, dx$, k=1,…N;
3) это квадратурная формула с **N** попарно-различными узлами, которая точна для любого алгебраического многочлена степени не выше (**N-1)**;
4) всегда имеет алгебраическую степень точности, причем АСТ ≥ **N-1.**

2. (1,5 балла) Алгебраическая степень точности (далее АСТ) следующей КФ

$\int_{-1}^{3} f(x)\, dx \approx 2\cdot f(0) + 4\cdot f(1)$ равна:

1) 0, так как она точна для констант и не точна для $f(x)=x$;
2) 1;
3) 2;
4) у данной КФ нет АСТ.

3. (1 балл) Составная КФ трапеций и Составная КФ средних прямоугольников имеют одинаковую алгебраическую степень точности (АСТ), так как

1) Все составные КФ имеют одинаковую АСТ;
2) АСТ КФ трапеции и АСТ КФ среднего прямоугольника равны;
3) Утверждение неверное: у указанных составных КФ нет АСТ;
4) Утверждение неверное: у указанных составных КФ различные АСТ.

4. (1 балл) КФ Симпсона (или КФ парабол): $\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

1) имеет наивысшую алгебраическую степень точности;
2) точна для любого алгебраического многочлена второй степени;
3) точна для любого алгебраического многочлена не выше 3 степени;
4) имеет два внешних узла и, следовательно ее АСТ не может быть наивысшей АСТ.

5. (1 балл) Узлы КФ наивысшей степени точности (далее КФНАСТ) для N≥2 всегда:

1) Равноотстоящие точки (a;b), включая концы;
2) Расположены симметрично относительно середины (a;b), а в случае N-нечетного (a+b)/2 тоже узел;
3) Внутренние точки (a;b);
4) Являются корнями ортогонального относительно веса и (a;b) многочлена.

6. (1 балл) КФ Гаусса с N узлами:

1) Это КФ наивысшей алгебраической степени точности для веса $\rho(x)\equiv1$ и [-1;1];
2) Это интерполяционная КФ для веса $\rho(x)$ и [-1;1], узлы которой суть корни многочлена Лежандра степени N;
3) Точна для любого алгебраического многочлена степени не выше 2N;
4) Точна для любого алгебраического многочлена степени не выше 2N-1.

7. (1 балл) Коэффициенты КФ Гаусса с N узлами обладают следующими свойствами:

1) при любом значении N все коэффициенты положительны;
2) сумма коэффициентов для любого N равна 2, если интегрируем по [-1,1] и равна *(b–a)*, если интегрируем по $[a,b]\neq[-1,1]$;
3) начиная с некоторого значения N среди коэффициентов будут числа разных знаков;
4) в наборе коэффициентов (для $N\geq2$) будут встречаться пары одинаковых, они отвечают симметричным узлам.

8. **(1 балл) Для КФ Гаусса (отрезок интегрирования [-1,1]) с 5 узлами верны следующие утверждения:**

1) Точка **0** является узлом этой КФ;
2) Точка **0** не является узлом этой КФ;
3) Формула точна для любого алгебраического многочлена, степени не выше 9;
4) Все коэффициенты этой КФ положительны.

9. **(1,5 балла)** Следующий интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \bullet (2,175 \cdot x^5 - 3,267 \cdot x^2 + 6,321)\, dx$

вычисляют на «идеальной ЭВМ» (без округлений) при помощи КФ Гаусса с 5 узлами и при помощи КФ Мелера с 3 узлами. Какая формула даст более точное значение? Выберите правильный на Ваш взгляд ответ:

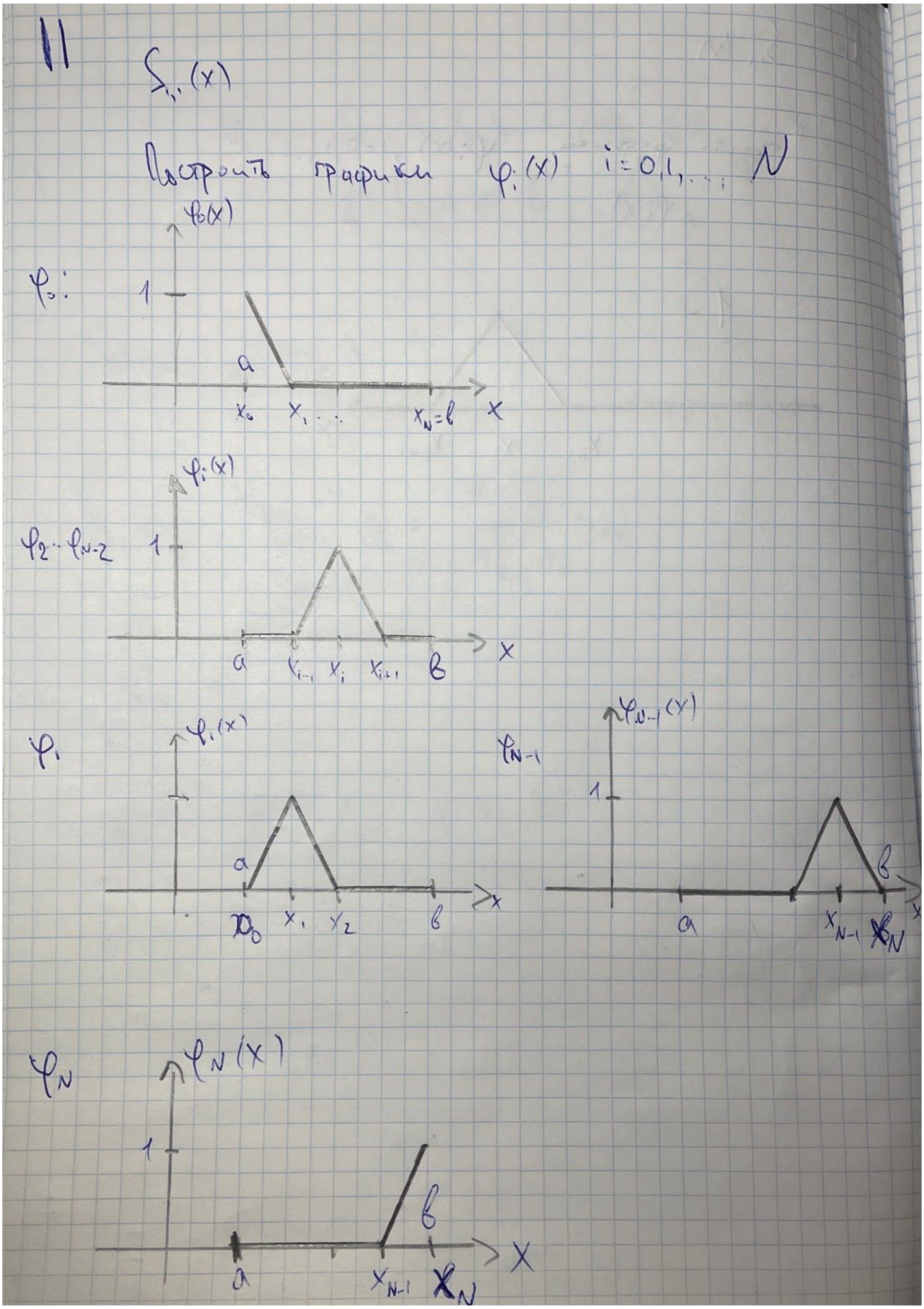
1) КФ Гаусса с 5 узлами;
2) КФ Мелера с 3 узлами;
3) По обеим формулам получится одинаковый результат.

10. (3 балла) На «идеальной ЭВМ» (считающей без округлений) запущена правильно работающая программа, вычисляющая интеграл вида $\int_A^B f(x)\,dx$ при помощи Составной КФ Симпсона с параметром **m** (число разбиений исходного отрезка интегрирования).
Какое значение выдаст программа, если пользователь введет следующие значения параметров: ***A***=0, ***B***=10, ***m***=100000, а интеграл вычисляется для функции $f(x)=x^3+5$? Выберите правильный на Ваш взгляд ответ:

1) 2550;
2) 2490;
3) 0;
4) недостаточно данных для решения задачи.

11. **(3 балла) Приведите ниже графики всех базисных функций $\varphi_i(x)$), $i=0,\ 1,\ \ldots\ ,N$:**

для сплайна $S_{1,1}(x)$ (вставить картинку с подробным графиком)



12*. **(4 балла)** Определить параметры A_1, A_2 и x_2 (коэффициенты и второй узел), чтобы КФ вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_1 \bullet f(0) + A_2 \bullet f(x_2)$$

была точна для алгебраических многочленов максимально возможной степени.

РЕШЕНИЕ: (вставить картинку с решением)

Подсказка: начните с того, что определите значение максимально возможной в этой ситуации степени многочленов, для которых формула будет точна.

12

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_1 f(0) + A_2 f(x_0)$$

(?) A_1, A_2, x_2 : КФ вида точна для ал. мн. max степени

Реш.

$\deg \le (2N-1)-1 = 2$ | $x_1 = 0 \notin (0;1)$, x_2 должен лежать в $(0;1)$

$f(x) = x^2$: $\frac{1}{3} = A_1 \cdot 0 + A_2 x_2^2 = A_2 x^2$

$f(x) = x$: $\frac{1}{2} = A_2 x_2$

$f(x) = 1$: $1 = A_1 + A_2$

$x_2^2 = \frac{1}{3A_2}$ $\quad x_2 = \frac{1}{2A_2}$ $\quad A_1 = 1 - A_2$

$A_1 = \frac{1}{4}$ $\quad A_2 = \frac{3}{4}$ $\quad x_2 = \frac{2}{3}$