

Univerza v Ljubljani



FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Modelska analiza I

# Naloga 13 - Metoda maksimalne entropije in linearna napoved

Žiga Krajnik

13. januar 2018

## Frekvenčni spekter z metodo maksimalne entropije

Ogledali si bomo kako lahko z metodo maksimalne entropije razberemo frekvenčni spekter signala. Naša metoda ima pred fourierovo analizo nekaj prednosti, saj nam omogoča, da natančno zadanemo frekvenčne vrhove v spektru, kljub temu, da nismo uporabili zelo kratkega časovnega koraka. Slabosti v primerjavi z fourierovo analizo so, da je proces računsko zahtevnejši in dobljeni signal ni točno periodičen, ampak počasi pada oziroma narašča. Izpišimo kratko predstavitev praktičnega dela metode.

Signal  $S_n$  želimo zapisati kot približek  $\tilde{S}_n$

$$\tilde{S}_n = - \sum_{k=1}^p a_k S_{n-k} + D_n,$$

kjer  $D_n$  predstavlja neznano deviacijo. Izpeljava nam pokaže, da lahko minimiziramo kvadrat razlike med signalom in približkom pri  $p$  parametrih

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_n (S_n - \tilde{S}_n)^2, \\ \epsilon_{min}^p &= R(0) + \sum_{k=1}^p a_k R(k). \end{aligned}$$

Uvedli smo avtokorelacijsko funkcijo signala  $R$ , ki se zapiše kot

$$R(k) = E[S_n S_{n+k}] = \frac{1}{N-k} \sum_{j=0}^{N-j-1} S_j S_{j+k},$$

kjer je  $N$  dolžina našega signala.

Ko imamo izračunane vrednosti  $R(k)$  lahko rešimo sistem enačb iz katerih dobimo vrednosti parametrov  $a_k$ .

$$\begin{aligned} \underline{M} \vec{a} &= -\vec{R}_1, \\ \underline{M} &= \mathbf{To}(\vec{R}), \\ \vec{R} &= (R(0), R(1), \dots, R(p-1)), \\ \vec{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_p). \end{aligned}$$

V zgornjih enačbah so indeksi ciklični z periodo  $p$ , z **To** pa smo označili operator, ki nam iz vektorja sestavi Toepliztovo matriko kjer je dani vektor v prvem stolpcu.

Ko z rešitivijo enačbe dobimo koeficienta  $a_k$  lahko izračunamo pole naše prenosne funkcije  $H(z)$

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}.$$

Poli prenosne funkcije  $z_f$  bodo ničle imenovalca

$$1 + \sum_{k=1}^p a_k z_f^{-k} = 0 \rightarrow \{z_f\}$$

Če bi ničle  $z_f$  padle iz enotskega kroga z radijem 1 jih preslikamo nazaj vanj z

$$z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}},$$

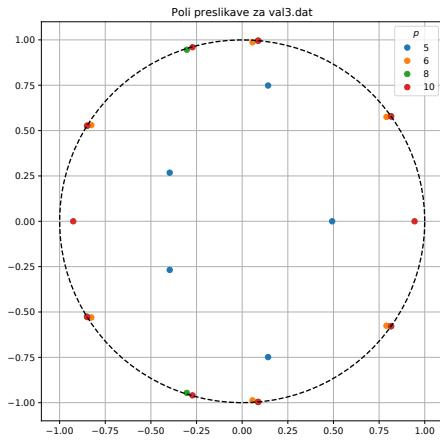
kar nam ohrani fazo pola, le prezrcali ga v krog. Frekvenčni spekter lahko sedaj izračunamo kot

$$P(\omega) = |1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-i\omega k}|^{-2}.$$

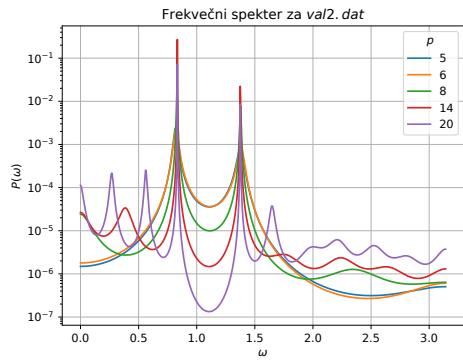
Oglejmo si, kako izgleda frekvenčni spekter za datoteki *val2.dat* in *val3.dat* ter kje so poli danih signalov.

Opazimo da so poli konjugirani, kar ni presenteljivo, saj imamo realen signal, kar pomeni, da bo imel karakteristični polinom realne koeficiente. Tedaj bodo ničle polinoma kompleksno konjugirane.

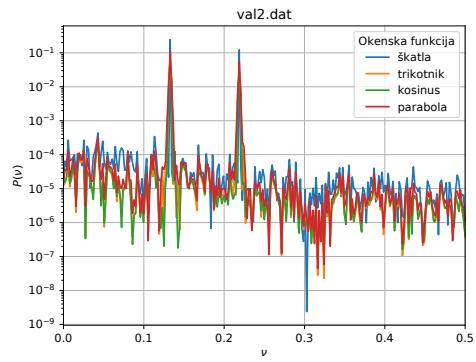
Poglejmo si še, kakšne ocene dobimo za spetralno gostoto v *val2/3.dat* z uporabo metode maksimalne entropije in dobljeni spekter primerjamo z spektrom dobljenim z fourierovo analizo.



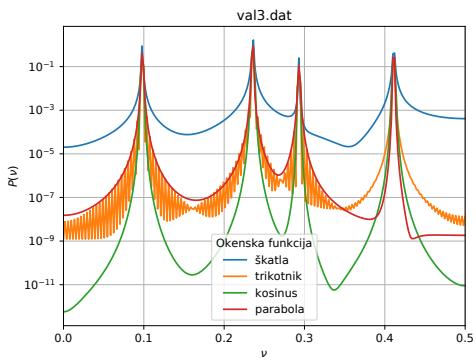
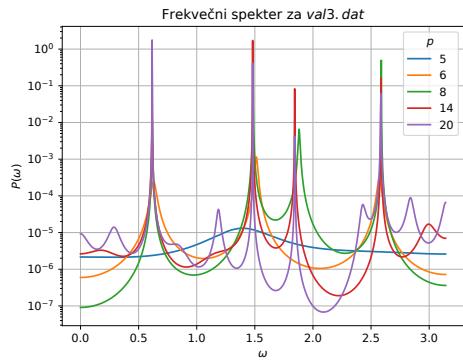
Polj preslikave za val3.dat pri raznih vrednostih  $p$ .



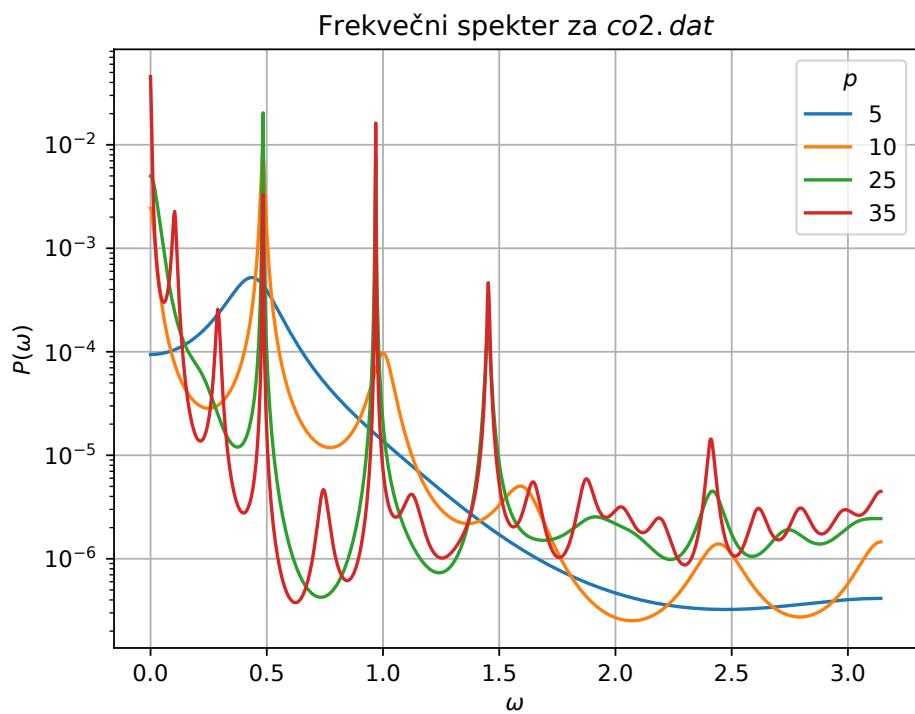
MEM spekter



FFT spekter



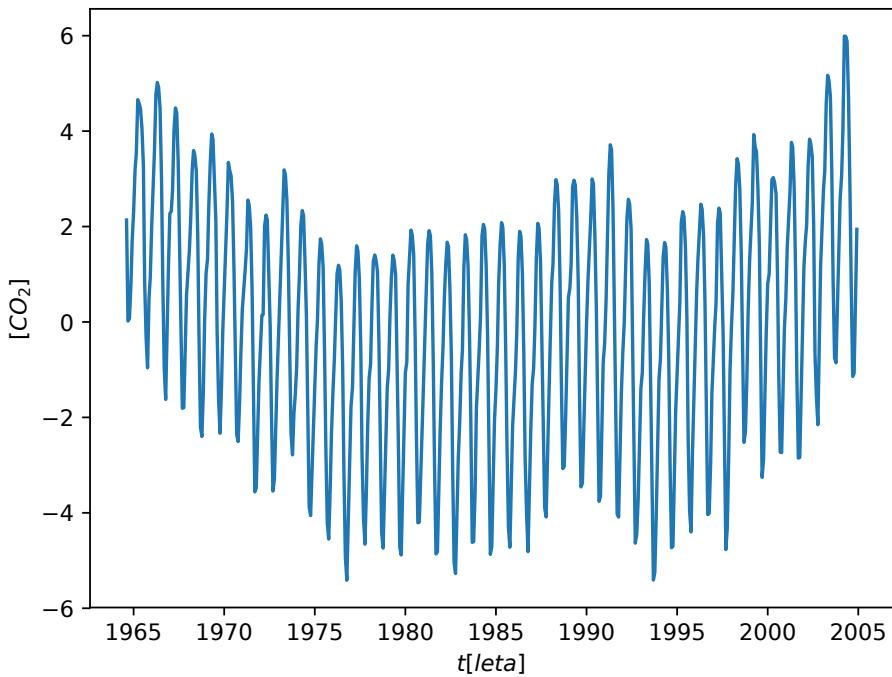
Kot je razvidno iz zgornjih slik, lahko že z majhno vrednostjo  $p$  dobro popišemo ostre vrhove v spektru. Ko vrednost  $p$  še povečujemo se začnejo v spektru pojavljati še drugi manjši vrhovi, ki izhajajo iz šuma.  
Oglejmo si delovanje MEM metode še na signalu *co2.dat*. Predenj začnemo z analizo signalu odštejemo linearen trend, ki ne vpliva na frekvenčni spekter.



Frekvenčni spekter za *co2.dat*.

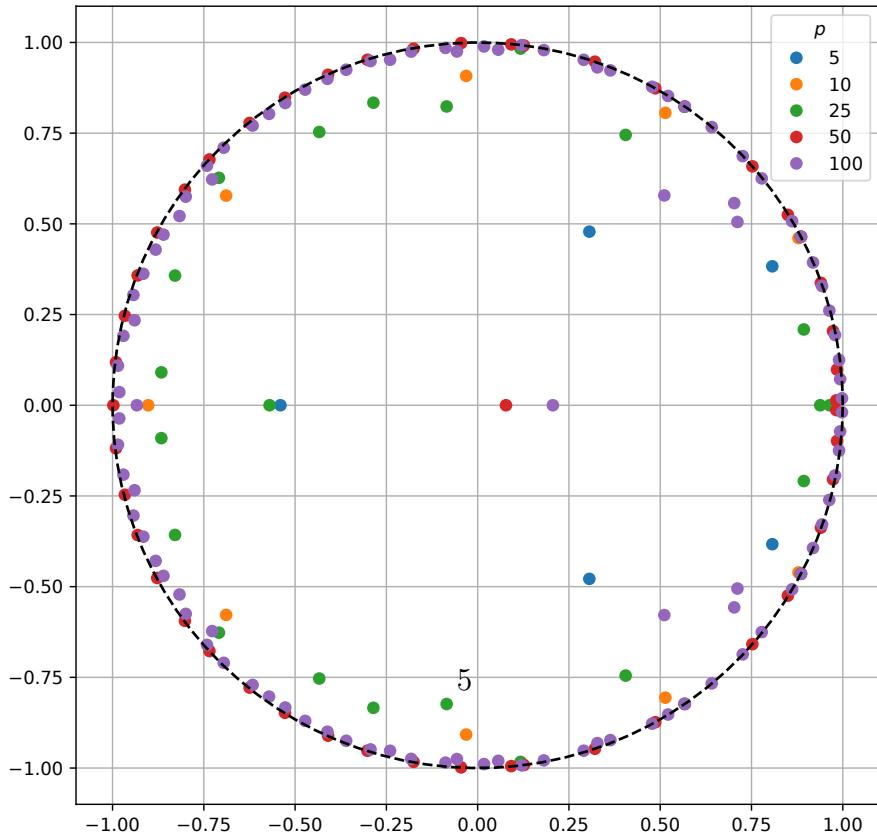
Vidimo, da z približno 25 poli precej lepo ujamemo frekvenčni spekter, medtem ko že z 35 poli dobimo precej odvečnih vrhov zaradi šuma.

Koncentracije  $CO_2$  z odštetim trendom



Koncentracija  $CO_2$  brez trenda.

Poli preslikave za co2.dat

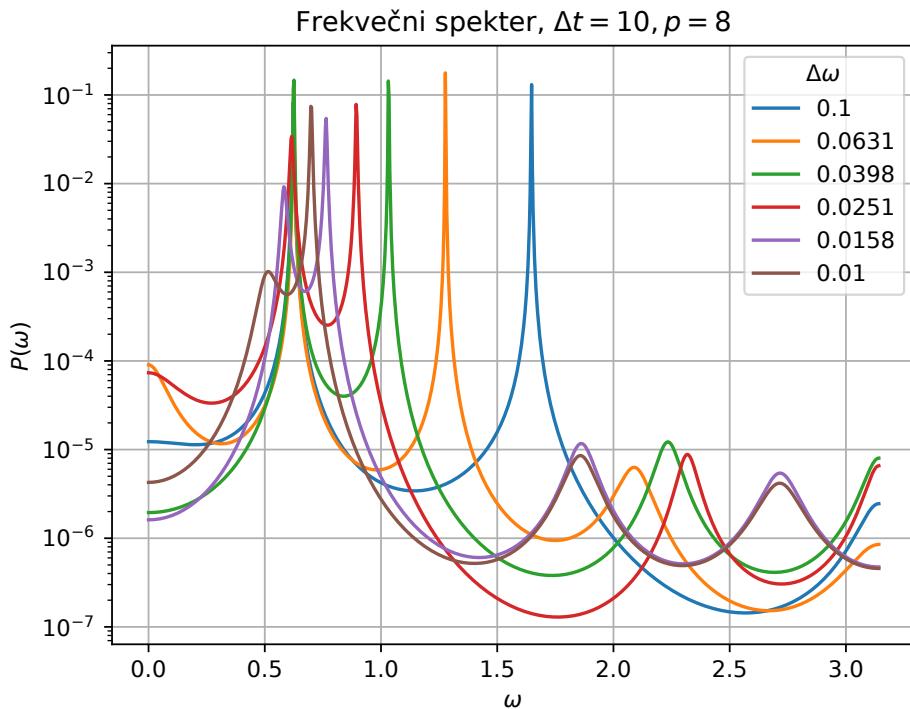


Oglejmo si še, kako občutljiva je metoda na razlovečanje bližnjih vrhov. Da bi to preverili si oglejmo spektre signalov, sestavljenih iz dveh bližnjih harmoničnih frekvenc.

$$s(t) = \sin 2\pi t + \sin(2\pi + \Delta\omega)t$$

Signal ovrednotimo na 100 točkah.

Ker pričakujemo le dva vrhova se omejimo le na majhne vrednosti  $p$ .



Frekvenčni spekter dveh bližnjih vrhov.

Opazimo, da pri danem  $p$  lepo razločimo vrhova, ki sta v frekvenci zama-knjeja za približno  $\Delta\omega_{min} \approx 0.02$ , nato začne prihajati do deformacije enega od vrhov v spektru.