11. Stohastični populacijski modeli

Domača naloga pri predmetu Modelska analiza I

Avtor: Matic Noč

3.1.2017

1 Uvod

Ponovno bomo obravnavali populacijske modele, le v nekoliko pogledu. V prejšni nalogi smo preprosto reševali diferencialne enačbe in tako uvideli, da rešitve res opisujejo npr. periodičnost populacije ali pa razmah/izumrtje. Tokrat pa bomo problem prevedli na diskretno obliko in tako s žrebanjem poiskali kaj se dogaja s populacijami.

2 Frekvenčni spekter

Pri prvi nalogi smo signaloma s 512 točkami na datotekah *val*2.*dat* in *val*3.*dat* določili frekvenčni spekter. Nato smo preizkušali še različne okenske funkcije in opazovali spreminjanje spektra, če analiziramo krajše intervale, npr. 64 ali 128.
Diskretno Fourierovo transformacijo lahko definiramo z enačbo

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-i2\pi kn/N}, \tag{1}$$

kjer so f_n vhodni podatki, F_k pa Fourierova transformiranka, ustrezno pa lahko definiramo inverz kot

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot e^{i2\pi kn/N}. \tag{2}$$

Najprej sem oba signala narisala s 512-imi točkami v času $t = [0, 1]$, kot je prikazano na levem grafu slike 1, nato pa s Fourierovo transformacijo dodatka *scipy.fftpack* izračunala frekvenčni spekter, prikazan na desnem grafu slike 1.

Slika 1: Odvisnost števila osebkov v populaciji od časovnega koraka $\beta\Delta t$

V nadaljevanju sem preizkušala še različne *okenske funkcije*, s katerimi namerno deformiramo signal, da bi dobili boljše rezultate. Značilnosti oken so, da so majhna na robu in čim večja na sredini, v bližini centralne transformiranke.

3 Dekonvolucija signalov

Recimo, da želimo meriti signal u(t). Vedno je ta signal vključen v vezje, ki ga lahko zapišemo s prenosno funkcijo r(t). Izhodni signal pa je konovlucija r(t) in u(t) ter dodatni šum zaradi vezja

$$c(t) = u(t) * r(t) + n(t) = s(t) + n(t) \tag{3}$$

Izmerimo c(t). Zanima nas kako dobiti prvotni signal u(t). Uporabimo fourierovo transformacijo, za katero velja, da konvolucija postane množenje ustreznih transformirank

$$C(f) = U(f)R(f) + N(f) \tag{4}$$

Če je $N(f) = 0$ lahko u(t) izračunamo kot

$$u(t) = FFT^{-1}[\frac{C(f)}{R(f)}] \tag{5}$$

Če pa imamo šum, potem pa je ta metoda odpade in moramo najti drugačen način za približek u(t). To naredimo s pomočjo minimizacijo

$$\int |\widetilde{u(t)} - u(t)|^2 = \int |\widetilde{U(f)} - U(f)|^2 \tag{6}$$

kjer je

$$\widetilde{U(f)} = \frac{C(f)}{R(f)}\Phi(f) \tag{7}$$

razpišemo in odvajamo po Φ in dobimo

$$\Phi(f) = \frac{|S(f)|^2}{|S(f)|^2 + |N(f)|^2}. \tag{8}$$

Šuma n(t) in posledično N(f) ne poznamo eksplicitno, zato ga moramo oceniti.

3.1 Signali

Na voljo imamo 4 signale, ki naraščajo po zašumljenosti.

druga_prvi.png

druga_prvi1.png

Slika 2: Prikaz signalov

4 Zaključek

Naučili smo se stohastičen opis populacijskih modelov in opis populacijskih modelov s pomočjo matrike prehodov. Zanimivo se mi je zdelo, da lahko s poissonskimi procesi simuliramo tudi fluktuacije v naravi.