

4. naloga – Populacijski modeli

1. Preuči standardni standardni deterministični **model zajci-lisice** (model Lotka-Volterra) v obliki

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= \alpha Z - \beta ZL, \\ \dot{L} &= -\gamma L + \delta ZL.\end{aligned}$$

- Nariši in preišči fazni diagram (brezdimenzijska oblika, zastojne točke, stabilnost ...).
- Oglej si obhodne dobe v odvisnosti od začetnega stanja. Zadošča, da preiščeš stanja, v katerih ima ena komponenta ravnovesno vrednost.

2. Analiziraj fazni portret za **populacijski model laserja** s konstantnim črpanjem.

$$\begin{aligned}\dot{f} &= -Bf + Daf, \\ \dot{a} &= -Ca - Eaf + Q\end{aligned}$$

Določi ravnovesno stanje v odvisnosti od moči črpanja. Kako se s tem parametrom spreminjata frekvenca in karakteristični čas relaksacijskih oscilacij?

3. **Model epidemije:** populacijo razdelimo v tri razrede: (D) zdravi in dovzetni, (B) bolni in kliconosni, (I) imuni: nedovzetni in nekliconosni. Bolezen se širi s stiki med zdravimi in bolnimi. Bolnik preide s konstantno verjetnostjo med imune (ozdravi ali umre).

$$\begin{aligned}\dot{D} &= -\alpha DB \\ \dot{B} &= +\alpha DB - \beta B \\ \dot{I} &= \beta B\end{aligned}$$

V epidemiji nas zanima njen vrh (maksimalno trenutno število obolelih), čas nastopa maksimuma in celotno število obolelih. S cepljenjem lahko vnaprej preselimo določen del populacije med imune. Kako vpliva delež cepljenih na parametre epidemije? Kako se spremeni potek epidemije, če obolele razdeliš na več razredov?

Sklopljen sistem linearnih enačb prvega reda $\dot{y}_i(x) = f_i(x, y_1, \dots, y_N)$ lahko rešujemo z integracijskimi metodami družine Runge-Kutta. V zbirki *GSL* integratorje najdemo v modulu `gsl_odeiv.h`, v Pythonu pa v modulu `scipy.integrate`, kjer ustvarite objekt razreda `ode` in mu tip integratorja nastavite z metodo `set_integrator`.

4. naloga - populacijski modeli

Domača naloga pri predmetu Modelska analiza I

Avtor: Matic Noč

17.10.2017

1 Uvod

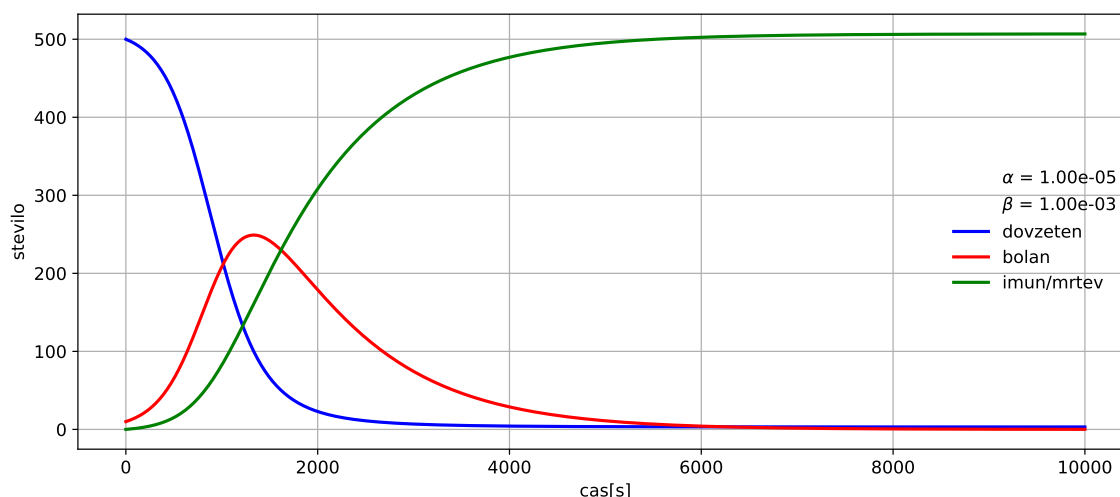
Obravnavali bomo populacijske modele, ki jih lahko modeliramo s sklopljenimi diferencialnimi enačbami prvega reda. Seveda je rešitev enačb močno odvisna od začetnih pogojev, tako bomo pri epidemiji dobili različne razmahe epidemij, pri populaciji zajcev in lisic, različne dobe periodičnega vzpona populacije in pri laserjih različne relaksacijske konstante laserja.

2 Epidemija

Epidemijo lahko opišemo s sistemom diferencialnih enačb, kjer populacijo razdelimo v tri razrede: (D) zdravi in dovzetni, (B) bolni in (I) imuni oziroma pokončani. Gre za logistični model.

$$\begin{aligned}\dot{D} &= -\alpha DB \\ \dot{B} &= +\alpha DB - \beta B \\ \dot{I} &= +\beta B\end{aligned}\tag{1}$$

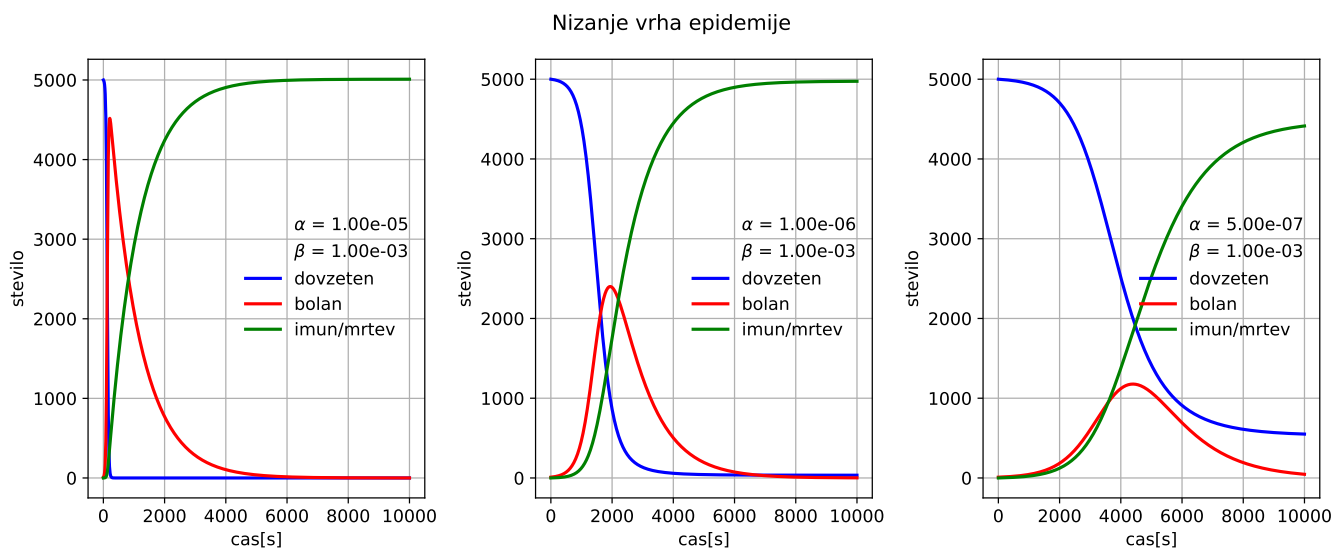
Problema se lotimo numerično s metodo Runge - Kutta in dobimo rešitve za $D(t)$, $B(t)$ in $I(t)$. Poglejmo si zanimivosti rešitev.



Slika 1: Osnovna rešitev logističnih enačb nam da rešitev razmaha epidemije, na začetku imamo 500 dovzetnih, ki nato postanejo imuni/mrtvi.

2.1 Nižanje vrha epidemije

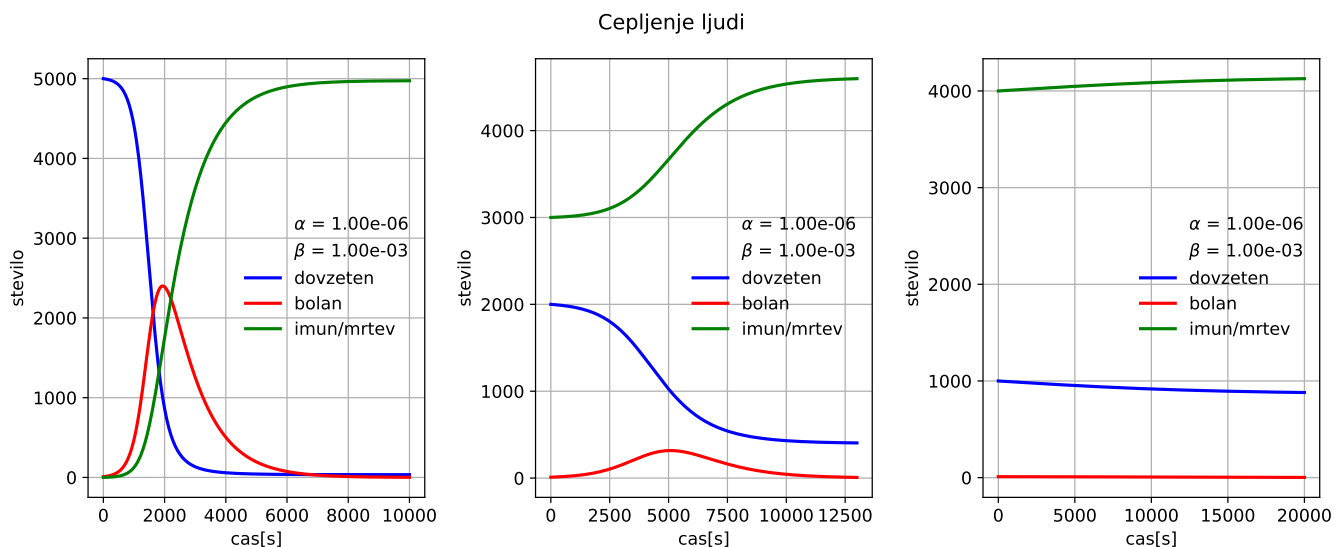
Ko zmanjšujemo konstanto α , ki pomeni pogostost srečanja D in B, se vrh epidemije pojavi kasneje in je zaradi večjega trajanja prehajanja bolnih med imune tudi manjši.



Slika 2: Nižanje vrha epidemije zaradi manjšega srečanja bolnih in dovzetnih

2.2 Cepljenje ljudi

Koliko ljudi moramo cepiti, da preprečimo razmah epidemije? Odgovor lahko dobimo če postavimo začetne pogoje za imune iz 0 na določen delež prebivalcev.



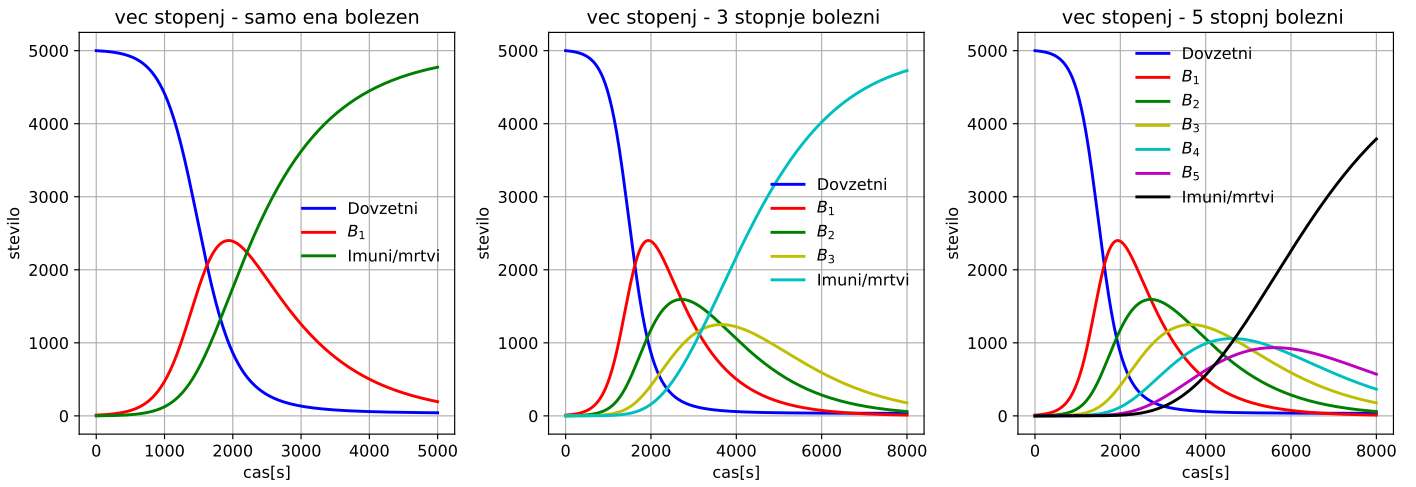
Slika 3: Vidimo da se je že pri cepitvi 3/5 ljudi epidemija močno zmanjšala, pri cepitvi 4/5 ljudi pa do epidemije sploh ne pride, eksponentno počasi postajajo ljudi bolni in bolni imuni.

2.3 Več stopenj bolezni

Recimo, da se bolezen začne s kašljanjem, nato pa preide vsakič v novo stopnjo. Za tak opis epidemije lahko razširimo enačbe (1)

$$\begin{aligned}\dot{D} &= -\alpha DB_1 \\ \dot{B}_1 &= +\alpha DB - \beta_1 B_1 \\ &\dots \\ \dot{B}_n &= +\beta_{n-1} B_{n-1} - \beta_n B_n \\ \dot{I} &= +\beta_n B_n\end{aligned}\tag{2}$$

Ta sistem lahko z izjemo dovzetnih in imunih, ki vsebujeta nelinearne člene, prepišemo v matrično obliko s $-\beta_n$ po diagonalah in β_n po spodnji diagonalni, ter tako rešujemo za poljubno stopenj bolezni.



Slika 4: Več stopenj bolezni omili končni razmah epidemije toda podaljša čas trajanja epidemije. V limiti veliko stopenj bi tako epidemija propadla, bolezen pa se nebi razširila.

3 Model Lotka-Volterra

Oglejmo si sedaj model plenilec - plen, ki ga prav tako opišemo s logističnim modelom:

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= +\alpha Z - \beta ZL \\ \dot{L} &= -\gamma L + \delta ZL\end{aligned}\tag{3}$$

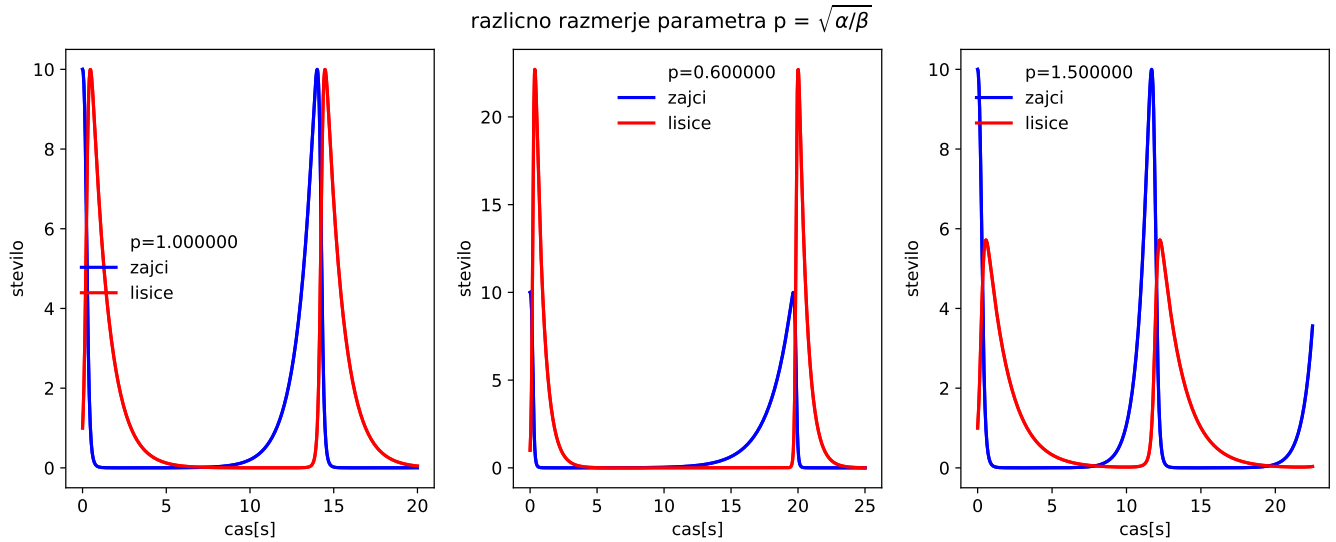
Z uvedbo brezdimenzijskega časa $\tau = t\sqrt{\alpha\gamma}$, brezdim. lisic $l = \frac{\beta}{\alpha}L$ in zajcev $z = \frac{\delta}{\gamma}Z$ lahko sistem prevedemo le na eno parametrični sistem enačb:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= +pz(1-l) \\ \dot{l} &= \frac{l}{p}(z-1)\end{aligned}\tag{4}$$

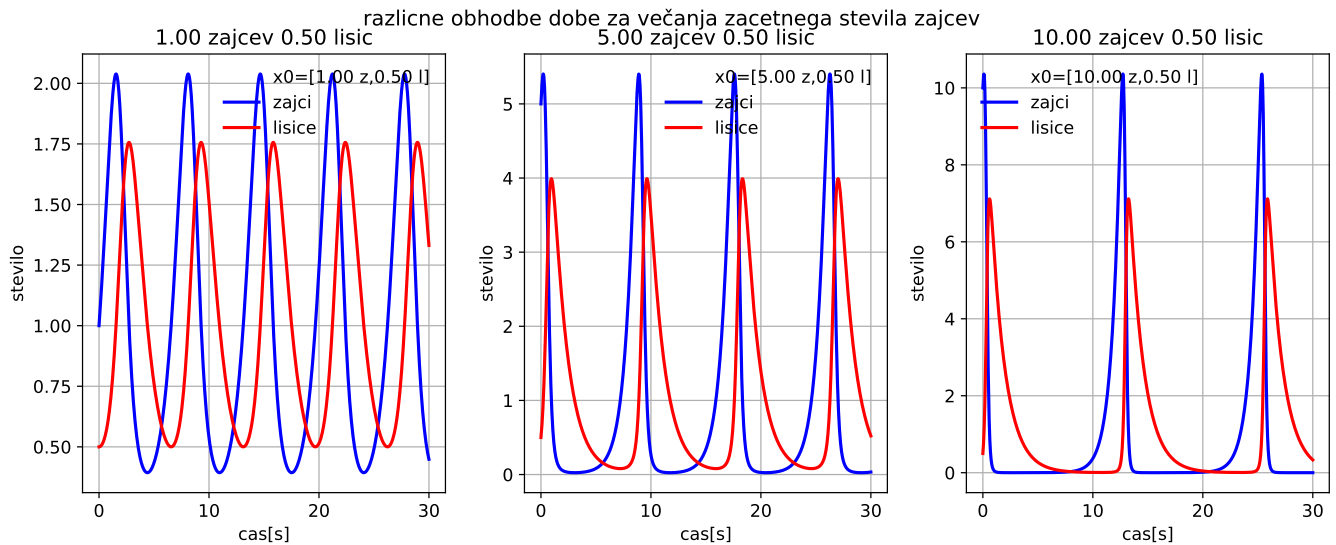
, kjer je $p = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ in pove razmerje rojevanja zajcev proti umiranju lisic.

3.1 Oscilacije zajcev in lisic

Ko numerično integriramo enačbe (4) dobimo naslednje oscilacije populacij, sepravi ko naraste število zajcev, naraste tudi število lisic, ki pobijejo zajce in nato tudi same umrejo. Perioda oscilacij je odvisna od začetne populacije zajcev in lisic ter parametra p .

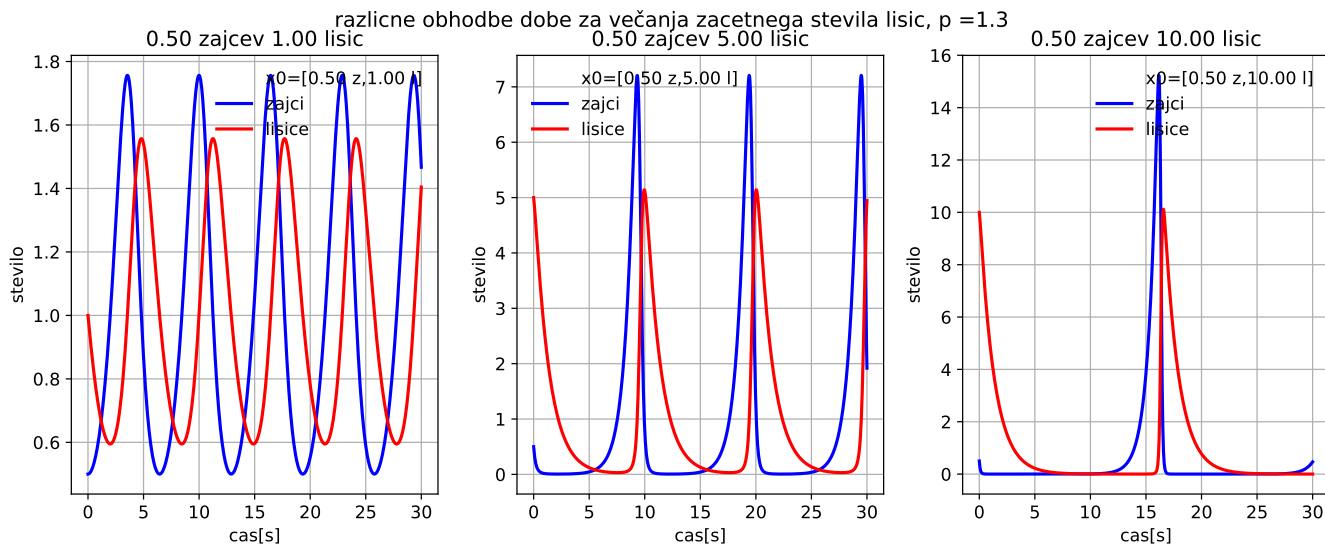


Slika 5: Periode se z naraščanjem p krajšajo saj se zajci hitreje razmahnejo in postanejo na voljo za razmah lisic.

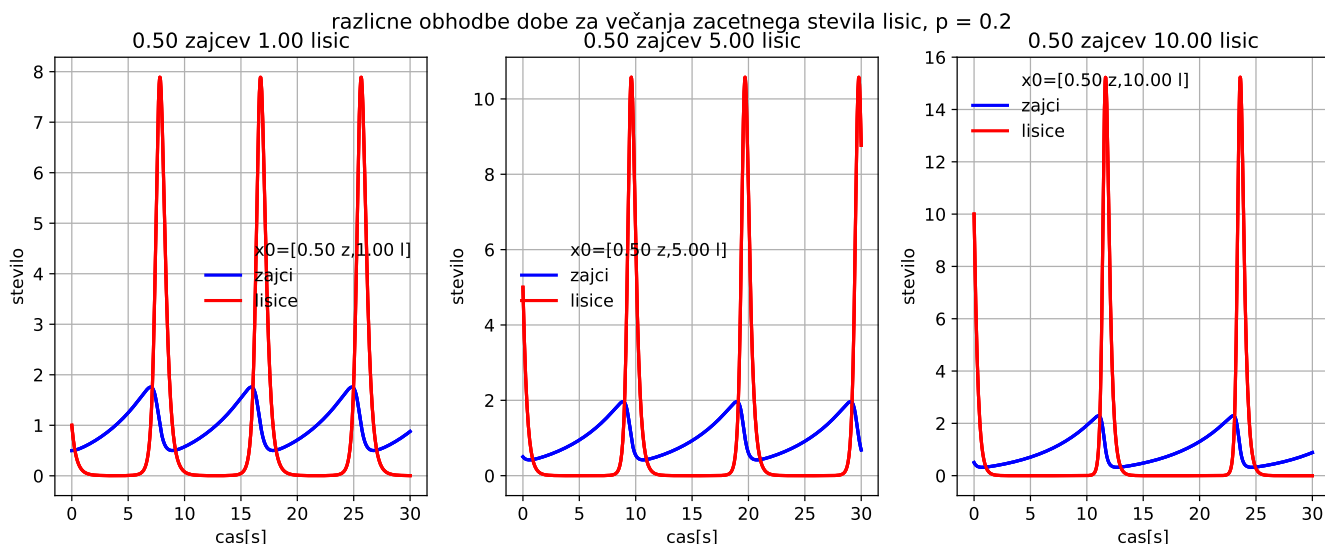


Slika 6: Iz tega grafa vidimo da se pri manjšem začetnem številu zajcev in lisic naraščanje postane bolj milo in zvezno kot v zgornjem primeru. Periode se z večanjem začetnega števila zajcev krajšajo, prav tako pa se zviša maksimum obeh populacij.

Integracijska shema nam pri nekaterih začetnih pogojih odpove. To se pogosteje dogaja pri velikih vrednostih $z(0), l(0), p$.



Slika 7: Z večanjem lisic se podobno kot z večanjem zajcev daljša obhodna doba populacij, končno število zajcev pa se zanimivo MOČNO poveča??? (to mi ni čisto logično??..., ampak izgleda, da je parameter $p = 1.3$ v prid zajcem in jih zato nastane več, čeprav smo povečevali število lisic.

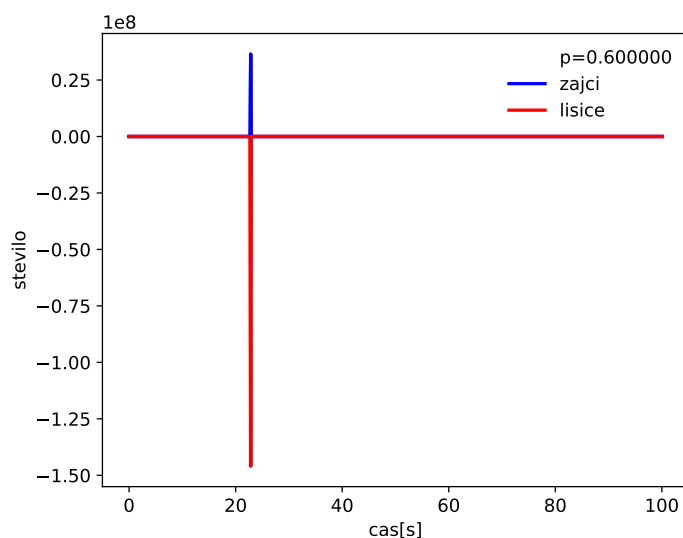


Slika 8: Če spremenimo razmerje rojevanja zajcev in umiranja lisic, dobimo manj zajcev in vedno enako število zajcev ne glede na število lisic. To mi zopet ni nekako logično, ker imamo lahko večje število lisic tudi če je zajcev manj. Izgleda da čas hranjenja z zajci (i.e. daljše obhodne dobe) omogočajo da v vsaki obhodni dobi nastane več lisic.

3.2 Zastojne točke

Zanima me ali obstajajo posebne rešitve sistema enačb(4), ki jih imenujemo zastojne točke in so nekako podobne stacionarnem stanju pri PDE. Postavimo torej \dot{z}, \dot{l} na 0 in dobimo dve točki (0,0) in (1,1). Če vstavimo ti dve točki kot začetne pogoje v osnovni sistem (4), vidimo da se rešitev na teh točkah ne propagira ampak ostane tam, ker so tam vsi odvodi enaki 0. Te točke so lahko

razmerje pod 0.6 naredi nezvezno in nefizikalno rešitev ..



Slika 9: Odpoved integracijske sheme za nekatere začetne pogoje.

stabilne (kot nekakšna potencialna jama), tako da se vsaka rešitev propagira nazaj v točko, ali pa nestabilne in se rešitev nikoli več ne propagira v zastožno točko. To se lahko preuči s Jakobijevo determinanto ali pa pogleda na fazni digram, kot bomo storili na sliki 10. Če enačbo (4) razvijemo okoli točke (0,0) dobimo razvoj sistema po prvem redu:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= pz \\ \dot{l} &= -\frac{l}{p}\end{aligned}\quad (5)$$

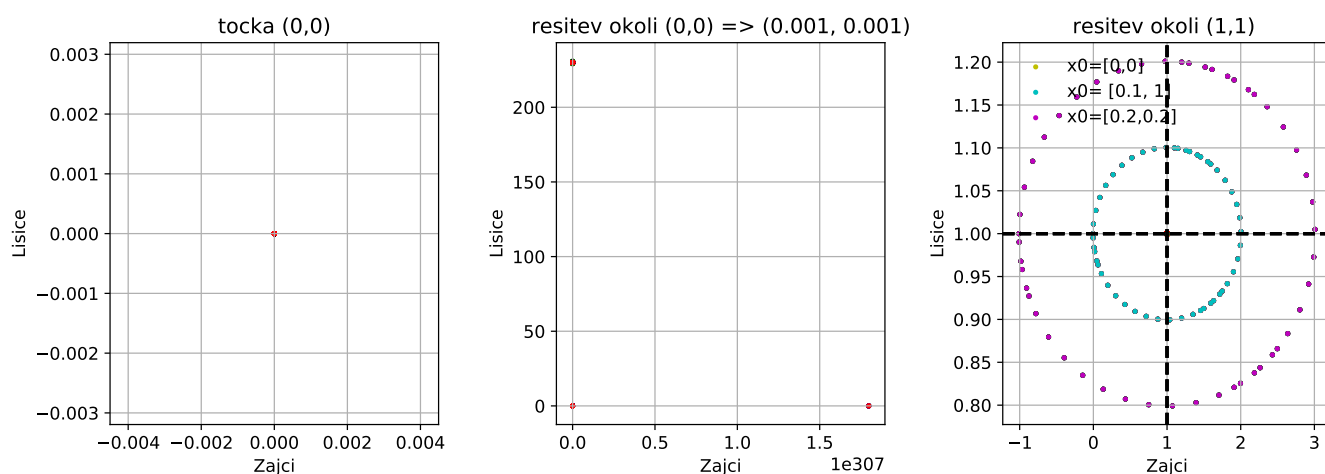
Za razvoj okoli točke (1,1) pa dobimo:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -pl \\ \dot{l} &= \frac{z}{p}\end{aligned}\quad (6)$$

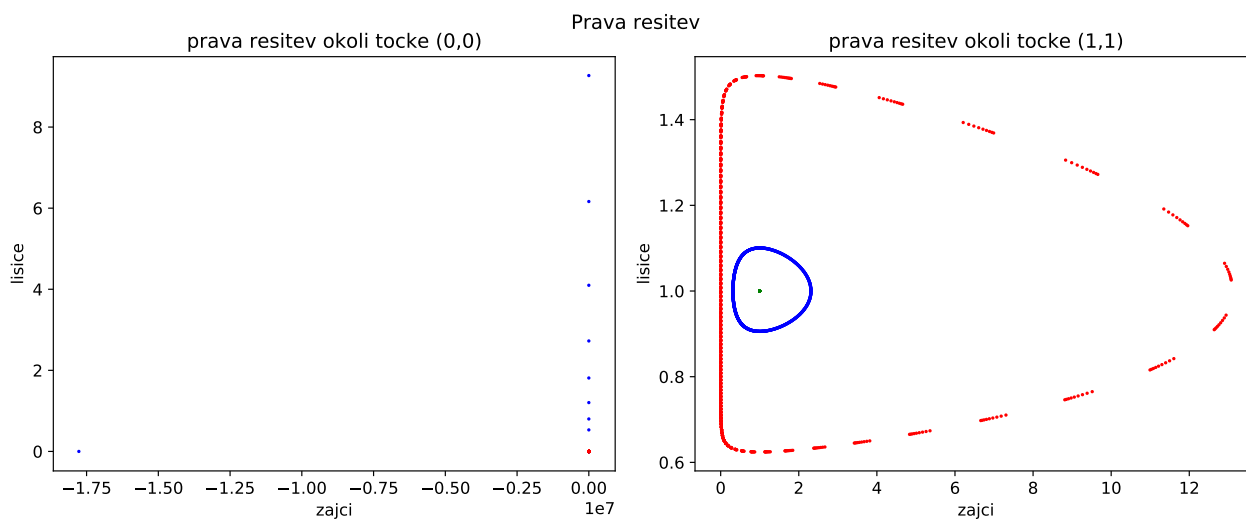
Stabilnost točke lahko preverimo če malo izmaknemo začetne pogoje:

Prava rešitev nam razvito rešitev - krožnico, s oddaljevanjem od točke točke (1,1) zmeraj bolj deformira.

Stabilnost zastojnih točk



Slika 10: Rešitev sistema enačb (5),(6). Kot je vidno je točka (0,0) nestabilna in točka(1,1) tudi, saj se fazni diagram ne konča v njih.



Slika 11: Vidimo da je v okolici zastoje točke (1,1) fazni diagram približno krožnica, vse bolj stran pa razvoj rešitve ni več dober. Rešitev okoli (0,0) pa nam odpove (integracijsko), tako kot na sliki 10.

4 Laser - populacija fotonov

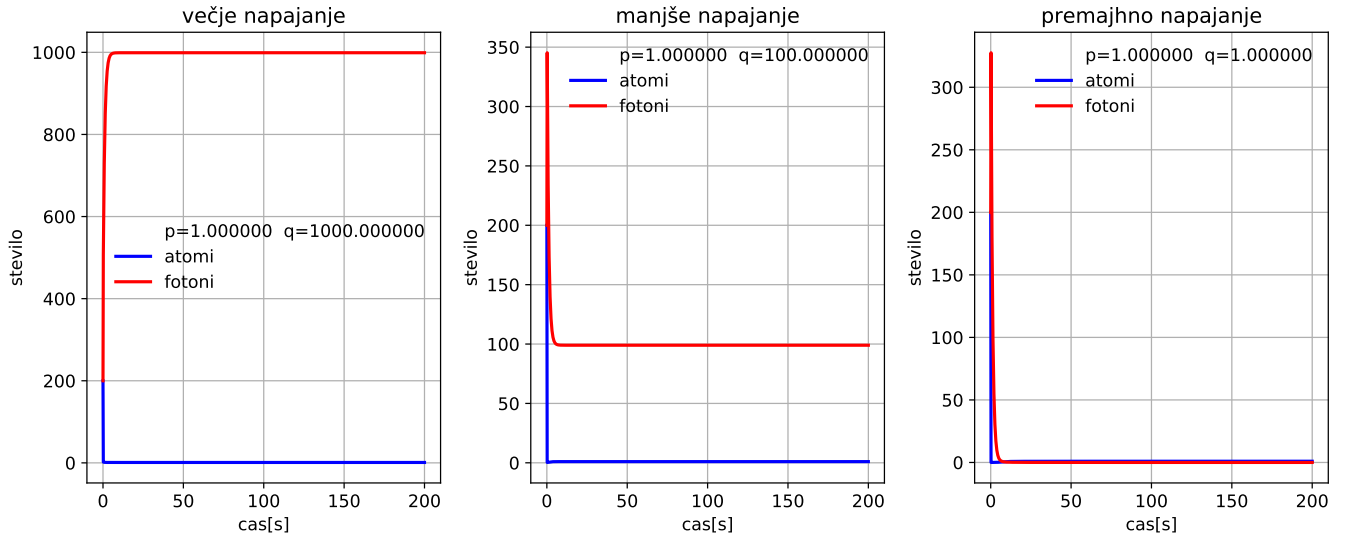
Laser predstavlja koherentno svetlobo. Opišemo ga s modelom resonatorja, v katerem imamo fotone in vzbujene atome, ki jim fotoni povzročajo stimulirano emisijo, in tako atomi izsevajo nove fotone, ter se združijo s fotonom, ki vzbuja. Tako torej srečanje fotona z vzbujenim atomom zmanjšuje število vzbujenih atomov na časovno enoto v resonatorju. Prav tako atomi prehajajo v osnovne stanje s spontano emisijo, zato se njihovo število manjša, za fotone pa privzamemo da nekateri pobegnejo iz resonatorja. Zapišimo zopet sistem enačb za populacijo, kjer so a število atomov, f število fotonov in Q črpanje atomov v resonator :

$$\begin{aligned}\dot{f} &= -Bf + Daf \\ \dot{a} &= -Ca + Eaf + Q\end{aligned}\quad (7)$$

Ta sistem lahko zopet prepišemo v brezdimenzijsko obliko in tako prevedemo sistem na le dva prosta parametra.

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \frac{F}{p}(A - 1) \\ \dot{A} &= q - pA(F + 1)\end{aligned}\quad (8)$$

Zastojni točki sta $(\frac{q}{p}, 0)$ in $(q, \frac{q}{p} - 1)$. Za razmah laserja mora biti $q > p$, torej črpanje močnejše od umiranja atomov, kar se tudi vidi iz rešitve:



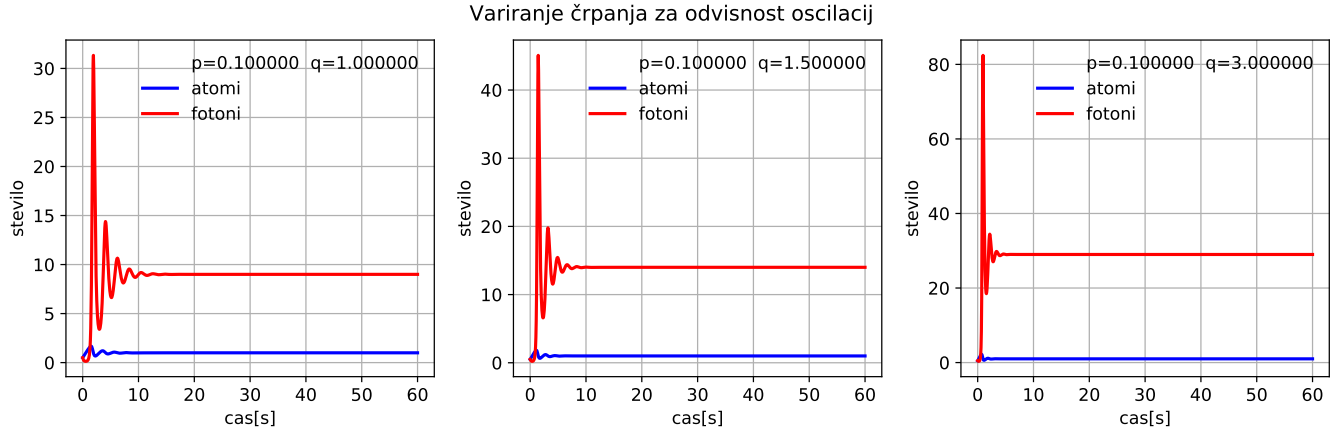
Slika 12: Različno močno napajanje nam vpliva na končno število fotonov. Če je napajanje premajhno ne bomo imeli fotonov v resonatorju, saj bodo vsi atomi razpadli hitreje kot jih bomo dovajali.

Zgornji režim ne vsebuje oscilacij zaradi visokih vrednosti parametrov. Če te postavimo na manjše vrednosti dobimo nov režim - oscilacije pred stacionarnim stanjem.

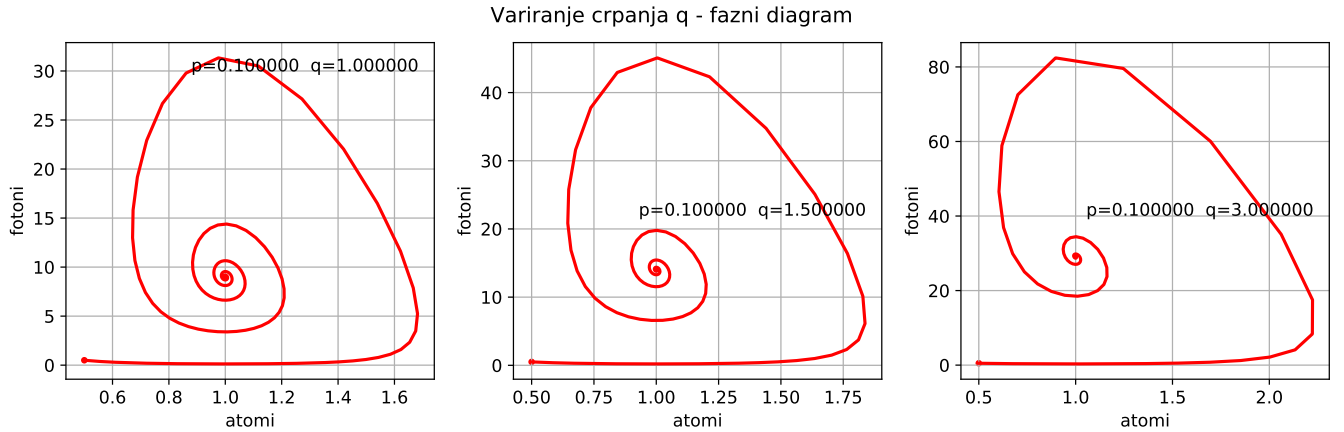
To lahko opazujemo tudi na faznem diagramu

4.1 Zastojni točki

Zanima nas ali sta astojni točki $A = (a, f) = (\frac{q}{p}, 0)$ in $B = (q, \frac{q}{p} - 1)$ stabilni ali nestabilni. Iz slike(12) je očitno, da obstaja stabilna točka, vendar le v določenih pogojih in sicer, ko je laser v

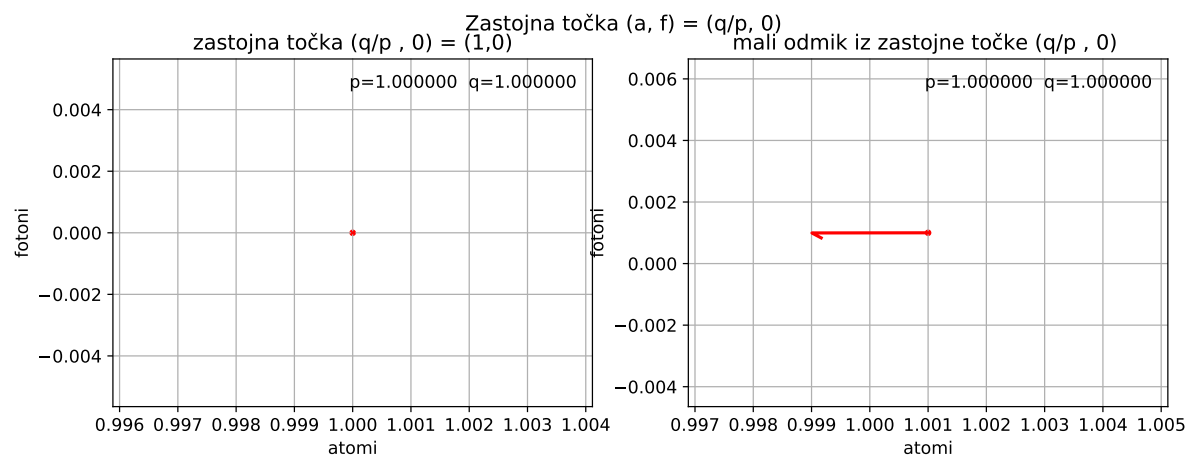


Slika 13: Vidimo, da je relaksacijski čas s večjim črpanjem krajši, oscilacije večja in frekvenca oscilacij večja. Vidi se tudi da je razmerje ravnovesnega števila fotonov približno $\frac{q}{p}$. Število atomov pa bo v primeru razvoja fotonov zelo nizko, saj v vsakem trenutku črpane atome izločimo prek vzbuditve in izsevanja novega fotona.

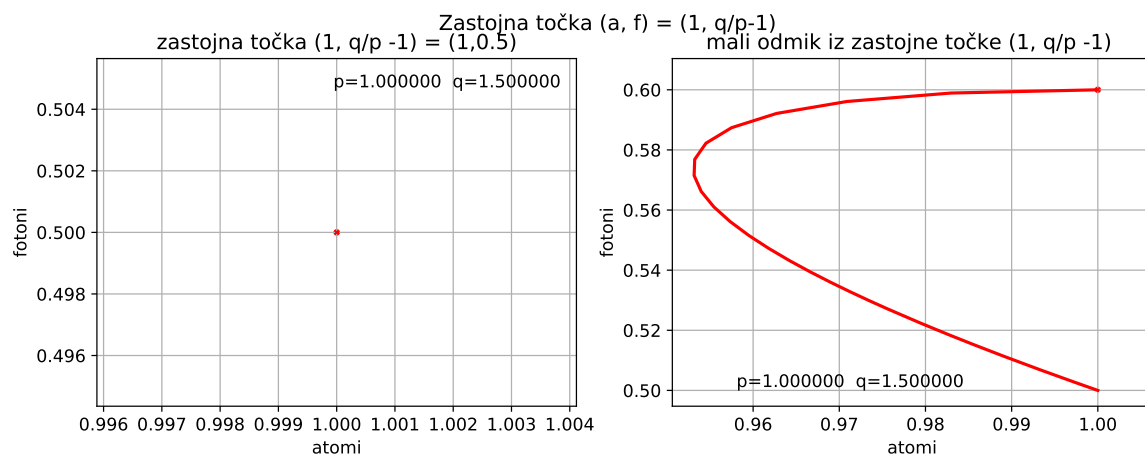


Slika 14: Fazni diagram, kjer se vidi spiralna ravnovesna oblika in pa večanje amplituide oscilacij ter več period/obhodov (bolj zavita spirala) pri manjšem črpanju.

delujočem režimu in je $q > p$, se laser vedno ustali na točki $(a, f) = (1, q/p - 1)$. Točka $A = (\frac{q}{p}, 0)$, pa je nestabilna, torej v režimu $q > p$ laser nima stacionarnega stanja, razen v eni točki, ko je število fotonov nič.



Slika 15: Izmik iz zastojne točke $A = (a, f) = (\frac{q}{p}, 0) = (1, 0)$ nam pokaže, da ta točka ni stabilna.



Slika 16: Izmik iz druge zastojne točke pa nas vedno vrne nazaj v zastojno točko, torej gre za edino stabilno točko v naših problemih.