統計学ノート

木村 正成
mkimura@klis.tsukuba.ac.jp

1 確率

1.1 事象

何らかの不確からしさを伴うような行為を試行といい，試行によって起こりうる全ての結果を全事象もしくは標本空間といい Ω で表す．二つの事象 A と B がともに怒る事象を積事象（intersection）といい，A か B の少なくともどちらかが起こる事象を和事象（union）という．A に属さない元の集合を A の補集合（complement）といい，A^c で表す．また，A に属するが B に属さない弦の集合を A と B の差集合（relative complement）といい，$A \setminus B = A \cap B^c$ と書く．積集合，和集合，補集合の間には次のような性質が成り立つ．

- $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

1.2 確率空間

確率は次の 3 つの性質を満たす可測集合族 $\mathcal{B}$ の上で定義される．

- $\emptyset \in \mathcal{B}, \Omega \in \mathcal{B}$
- $A \in \mathcal{B}$ ならば $A^c \in \mathcal{B}$
- $A_k \in \mathcal{B}, k = 1, 2, \ldots,$ ならば $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{B}$

可測集合族 $\mathcal{B}$ の元を可測集合といい，可測集合 A に対して実数を対応させる関数 $P(\cdot)$ で，次の 3 つの性質を満たすものを確率（probability）という．

- すべての $A \in \mathcal{B}$ に対して $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $A_k \in \mathcal{B}, k = 1, 2, \ldots,$ が互いに排反であるとき，すなわち $A_i \cup A_j = \emptyset, i \neq j$ の場合，$P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_k)$ が成り立つ

このように確率は Ω，$\mathcal{B}$，P によって決まり，$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間という．