



Question de cours (4pt) :

- Soient  $a$  et  $b$  deux entiers.
  - Définir  $\text{pgcd}(a,b)$  et  $\text{ppcm}(a,b)$ .
  - Comment montrer que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux de deux façons différentes.
- Décrire l'algorithme d'Euclide pour calculer  $\text{pgcd}(a,b)$ .
- Donner une méthode pour calculer  $\text{ppcm}(a,b)$ .
- Soit  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  et  $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ .
  - Donner les coefficients du polynôme  $P.Q$  en fonction des coefficients de  $P$  et de  $Q$ .
  - Donner les coefficients du polynôme  $(P.Q)'$  en fonction des coefficients de  $P$  et de  $Q$ .

Exercice 1 (4pt) :

- Montrer que  $21m + 4$  et  $14m + 3$  sont premiers entre eux.
- Montrer que  $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (ab) \wedge (a + b) = 1$ .
- Soit  $n$  un entier  $\geq 2$  tel que  $2^n - 1$  est premier.  
Montrer que  $n$  est nombre premier.

Exercice 2 (4pt) :

Soit  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  tel que  $a \neq b$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Donner le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$   
en fonction de  $P(a)$  et  $P(b)$ .

Exercice 3 (4pt) :

Déterminer tous les polynômes  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$  divisibles par leur polynôme dérivé  $P'$ .

Exercice 4 (4pt) :

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$  la suite de polynômes définie par :

$$P_1 = X - 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2$$

Calculer le coefficient de  $X^2$  dans le polynôme  $P_n$ .