Université
Internationale
de Casablanca

CPI2 : ALGÈBRE 3, 2016-2017.
CONTRÔLE 29-12-2016

Exercice 0.0.1. *Soit A une matrice carrée $n \times n$ inversible telle que*

$$A + A^{-1} = I$$

Calculer

$$A^k + A^{-k}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, 4$$

où on note $A^{-k} = (A^{-1})^k$

Exercice 0.0.2. *Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles qu'ils existent $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ae^x + be^{-x} + c\sin(x)$$

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
2. *Déterminer une base de E et sa dimension.*

Exercice 0.0.3. $E = \mathbb{R}^3$ *et* $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ *avec*

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (0, -1, 0), \quad u_3 = (3, 2, -1)$$

Et $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$ *avec*

$$v_1 = (1, -1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, -1)$$

3 - 2 $5v_2$

1. *Montrer que B_1 est une base de E.*
2. *Montrer que B_2 est une base de E.*
3. *Calculer la matrice de passage P de la base B_1 à la base B_2 et son inverse P^{-1}*
4. *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui même.*
   On suppose que la matrice associée à f dans la base B_1 est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) *Calculer la matrice A' de l'application linéaire f dans la base B_2*
   (b) *Calculer A'^n pour $n \in \mathbb{N}$.*
   (c) *En déduire A^n*

Exercice 0.0.4. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer A^2*
2. *Calculer $A^3 - A$*
3. *En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.*