Université Internationale de Casablanca

CPI2 : ALGÈBRE 3, 2016-2017.
CONTRÔLE 9-12-2016

Exo 1 : Soient

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$$

et

$$G = \{(a - b, a + b, a - 3b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
(b) Déterminer $F \cap G$.
(c) Montrer que le système (v_1, v_2) où $v_1 = (1, 1, 2)$ et $v_2 = (1, 2, 3)$ est une base de F.
(d) Donner la dimension de F.
(e) Déterminer une base de G.
(f) Donner la dimension de G.

Exo 2 : Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles qu'ils existent $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2 + bx + c)cosx$$

(a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(b) Déterminer une base de E et sa dimension.

Exo 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$\begin{cases} u_1 = e_2 + 2e_3 \\ u_2 = e_3 - e_1 \\ u_3 = e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.

Exo 4 : Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
(a) Comparer $kerf \cap kerg$ et $ker(f + g)$.
(b) Comparer $Imf + Img$ et $Im(f + g)$.
(c) Comparer $kerf$ et $ker(fof)$.
(d) Comparer Imf et $Im(fof)$.

Exo 5 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0 \qquad (1)$$

(b) Sous quelle condition la matrice A est inversible.
(c) donner la condition nécessaire pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

soit inversible.
Donner sa matrice inverse en utilisant la formule (1) ci dessus.

Exo 6 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in L(E)$ dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_3 \\ u_2 = e_1 + e_2 \\ u_3 = e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

(a) Montrer que la famille $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.
(b) Déterminer la matrice A' de f dans la base B' .
(c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.