BCC202 - Estrutura de Dados I

Aula 05: Análise de Algoritmos (Parte 2)

Reinaldo Fortes

Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP
Departamento de Ciência da Computação, DECOM

Website: **www.decom.ufop.br/reifortes**
Email: **reifortes@iceb.ufop.br**

Material elaborado com base nos slides do Prof. Túlio Toffolo (curso de 2013/01).

2013/02

Conteúdo

Conteúdo

Função de Complexidade

- Na aula passada aprendemos a calcular a **função de complexidade** $f(n)$.

- Observações importantes:
  - Para valores pequenos de n, praticamente qualquer algoritmo custa pouco para ser executado.
  - **Logo**: a escolha do algoritmo tem pouquíssima influência em problemas de tamanho pequeno.

Comportamento Assintótico

- A análise de algoritmos deve ser realizada para valores grandes de n.
- Para isso, estuda-se o **comportamento assintótico** das funções de custo.
  - Comportamento das funções para valores grandes de n.
- O **comportamento assintótico** de $f(n)$ representa o limite do comportamento do custo quando n cresce.

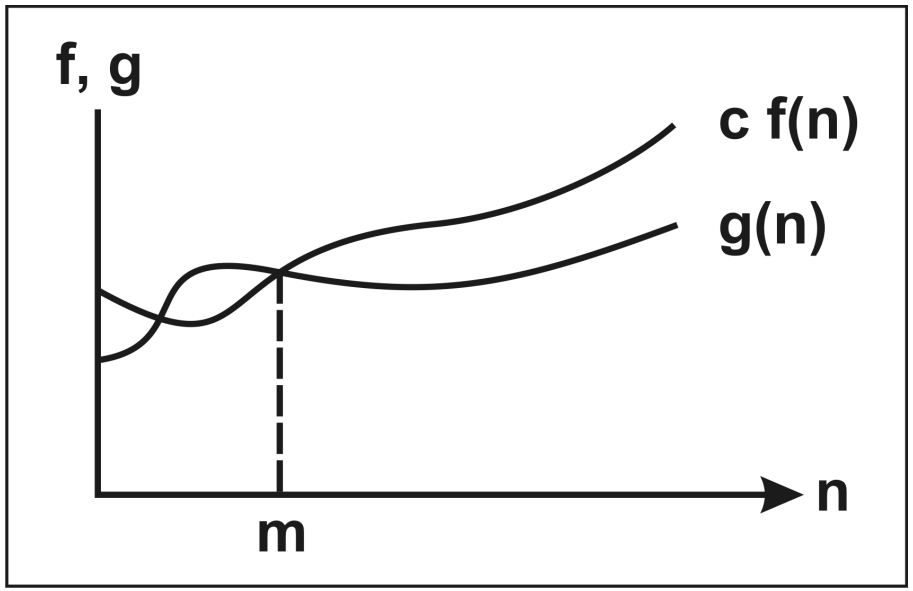
Crescimento e Domínio Assintótico

- A análise de um algoritmo geralmente conta com apenas algumas operações elementares.
- A **medida de custo**, ou **medida de complexidade**, relata o **crescimento assintótico** da operação considerada.
- **Definição**: Uma função $f(n)$ **domina assintoticamente** outra função $g(n)$ se:
  - Existem duas constantes positivas c e m tais que, para $n >= m$, temos $|g(n)| <= c|f(n)|$.
- *A próxima seção detalha esta definição...*

Conteúdo

Dominação Assintótica

- $f(n)$ **domina assintoticamente** $g(n)$ se:
  - Existem duas constantes positivas c e m tais que, para $n >= m$, temos $|g(n)| <= c|f(n)|$.



Dominação Assintótica: Exemplo

- Sejam $g(n) = (n+1)^2$ e $f(n) = n^2$.
- As funções $g(n)$ e $f(n)$ dominam assintoticamente uma à outra, desde que:
  - $|(n+1)^2| <= 4|n^2|$, para $n >= 1$.
  - $|n^2| <= |(n+1)^2|$, para $n >= 0$.

$|g(n)| <= c|f(n)|$ para $n >= m$; $c = 4$ e $m = 1$

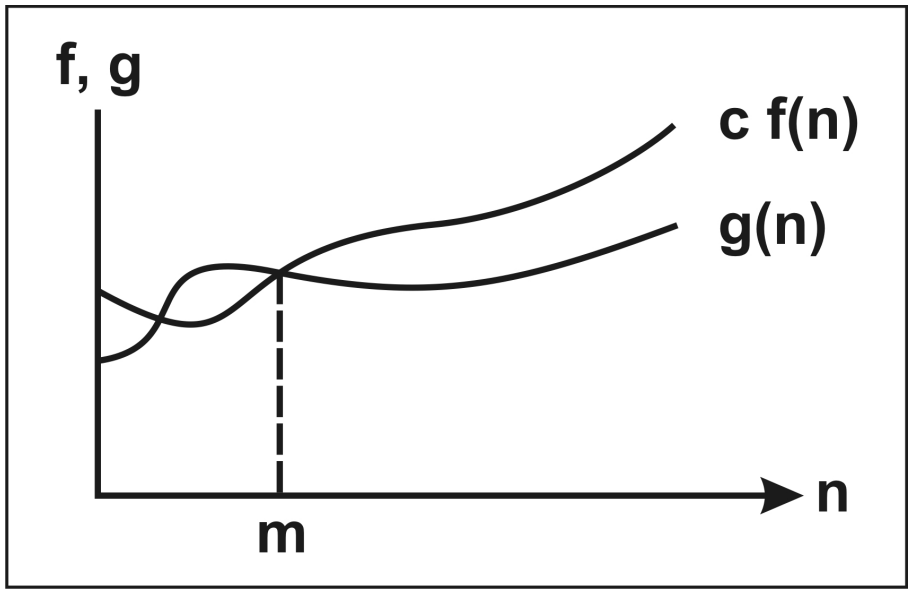
$|f(n)| <= c|g(n)|$ para $n >= m$; $c = 1$ e $m = 1$

Notação O

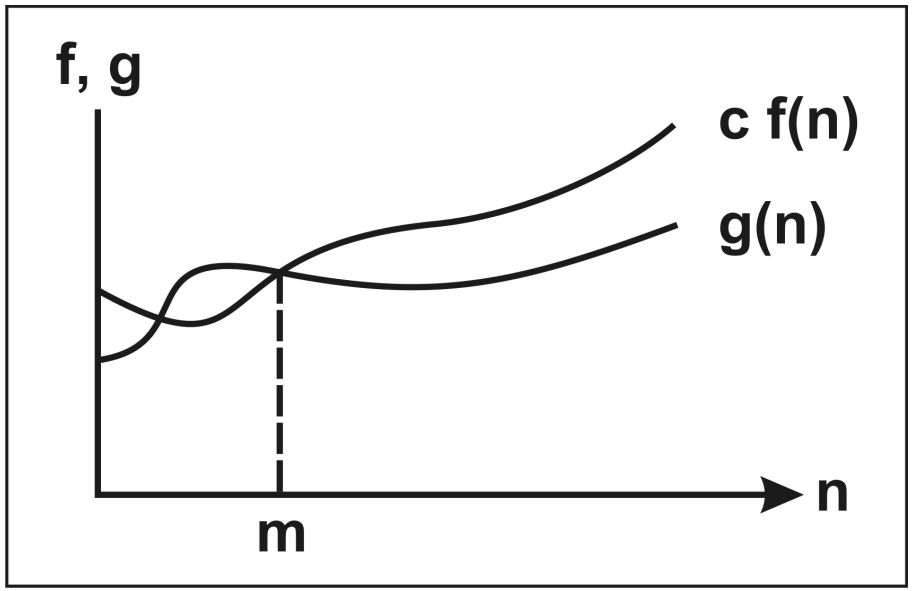
- Escrevemos $g(n) = O(f(n)$ para expressar que $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$.
  - Lê-se $g(n)$ é da ordem de no máximo $f(n)$.
- Exemplo:
  - Quando dizemos que o tempo de execução $T(n)$ de um programa é $O(n^2)$, significa que existem constantes c e m tais que, para valores de $n >= m$, $T(n) <= cn^2$.

Notação O

- Exemplo gráfico de dominação assintótica que ilustra a notação O.
  - Abaixo, a função $f(n)$ domina assintoticamente a função $g(n)$.



Notação O



- O valor da constante m mostrado é o menor valor possível, mas qualquer valor maior também é válido.
- **Definição**: uma função $g(n)$ é $O(f(n))$ se existem duas constantes positivas c e m tais que $g(n) <= cf(n)$, para todo $n >= m$.

Operações

$$f(n) = O(f(n))$$

$$c * O(f(n)) = O(f(n)), \text{ c} = \text{constante}$$

$$O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n))$$

$$O(O(f(n))) = O(f(n))$$

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(max(f(n), g(n)))$$

$$O(f(n)) * O(g(n)) = O(f(n) * g(n))$$

$$f(n) * O(g(n)) = O(f(n) * g(n))$$

Exemplo 01: $g(n) = (n+1)^2$ e $f(n) = n^2$

- $\boldsymbol{g(n)}$ é $\boldsymbol{O(n^2)}$ quando $\boldsymbol{m = 1}$ e $\boldsymbol{c = 4}$.
- Isto porque sabe-se que $\boldsymbol{(n+1)^2 <= 4n^2}$.

Ou seja, existem as constantes positivas $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{m}$ tal que $\boldsymbol{g(n) <= cf(n)}$, para $\boldsymbol{n >= m}$.

Exemplo 02: $g(n) = n$ e $f(n) = n^2$

- Sabemos que $g(n)$ é $O(n^2)$, pois para $n >= 1$, $n >= n^2$.
- Entretanto $f(n)$ não é $O(n)$.
- Suponha que existam constantes c e m tais que para todo $n >= m$, $n^2 <= cn$.
- Se $c >= n$ para qualquer $n >= m$, então deveria existir um valor para c que pudesse ser maior ou igual a n para todo n.

Portanto, não existe a constante positiva c tal que $g(n) <= cf(n)$, para $n >= m$.

Exemplo 03: $g(n) = 3n^3 + 2n^2 + n$

- Sabemos que $g(n)$ é $O(n^3)$.
- $g(n)$ também é $O(n^4)$. Entretanto, esta afirmação é **mais fraca** do que dizer que g(n) é $O(n^3)$.
- $g(n)$ também é $O(n^{40})$?

Sim! É fácil mostrar que existem as constantes positivas c e m tal que $g(n) <= cf(n)$, para $n >= m$.

Exemplo 04: $g(n) = log_5 n$ é $O(log\ n)$

- Recorrendo às propriedades logaritmicas, a mudança de base é definida por: $\boldsymbol{log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}}$.
- Assim, observa-se que $\boldsymbol{log_5 n = log_5 2 * log\ n}$. Logo, $\boldsymbol{log_5 2}$ é a constante $\boldsymbol{c}$, e será fácil encontrar um $\boldsymbol{m}$ que comprove que $\boldsymbol{g(n)}$ é $\boldsymbol{O(log\ n)}$.

Generalizando

$\boldsymbol{log_b n = log_b c * log_c n}$. Logo, a constante $\boldsymbol{c}$ será $\boldsymbol{log_b c}$ e deverá ser definida a constante $\boldsymbol{m}$ que comprove que $\boldsymbol{log_b n}$ é $\boldsymbol{O(log_c n)}$.

Exemplo 05: Ordem de complexidade do MaxMin1

```
1  int MaxMin1(int* A, int n, int* pMax, int* pMin) {
2    int i;
3    *pMax = A[0];
4    *pMin = A[0];
5    for(i = 1; i < n; i++)
6      if(*pMax < A[i]) // Comparação envolvendo os elementos
7        *pMax = A[i];
8      if(*pMin > A[i]) // Comparação envolvendo os elementos
9        *pMin = A[i];
10 }
```

- Como vimos anteriormente, $f(n) = 2(n-1)$ para $n > 0$, para o melhor caso, pior caso e caso médio.
- Então, **MaxMin1** é $O(n)$.

Exemplo 06: Operações com a notação O

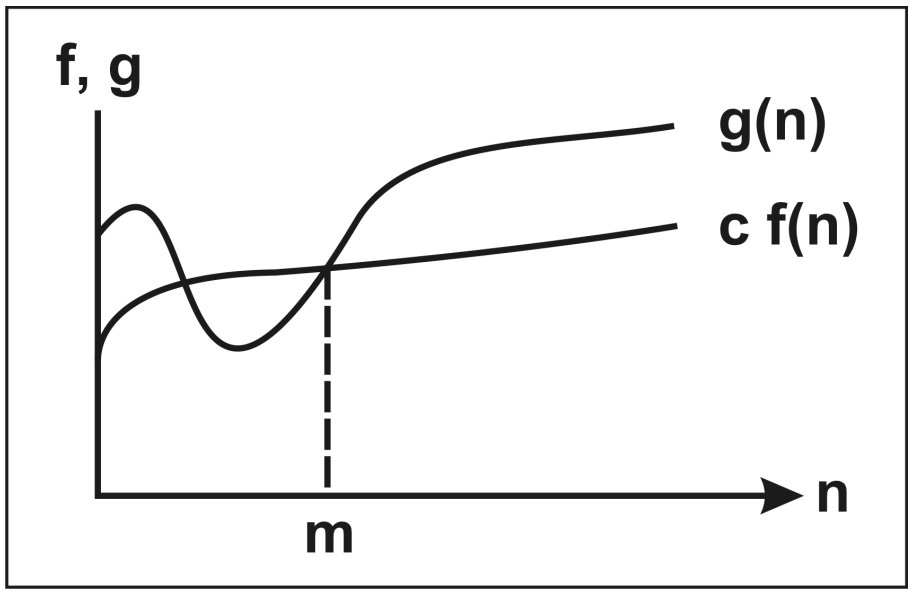
- Regra da soma $O(f(n)) + O(g(n))$.
- Suponha três trechos cujos tempos de execução são $O(n)$, $O(n^2)$ e $O(n \log n)$.
- O tempo de execução dos dois primeiros trechos é $O(max(n, n^2))$, que é $O(n^2)$.
- O tempo de execução de todos os três trechos é então $O(max(n, n^2, n \log n))$, que é $O(n^2)$.

Notação Ω (Ômega)

- Especifica um **limite inferior** para $g(n)$.
- **Definição**: Uma função $g(n)$ é $\Omega(f(n))$ se:
  - Existem duas constantes positivas c e m tais que, para $n >= m$, temos $|g(n)| >= c\ |f(n)|$.
- Exemplo:
  - Quando dizemos que o tempo de execução $T(n)$ de um programa é $\Omega(n^2)$, significa que existem constantes c e m tais que, para valores de $n >= m$, $T(n) >= c\ n^2$.

Exemplo gráfico

- Na figura abaixo, a função $f(n)$ é **dominada assintoticamente** pela função $g(n)$.



Exemplos

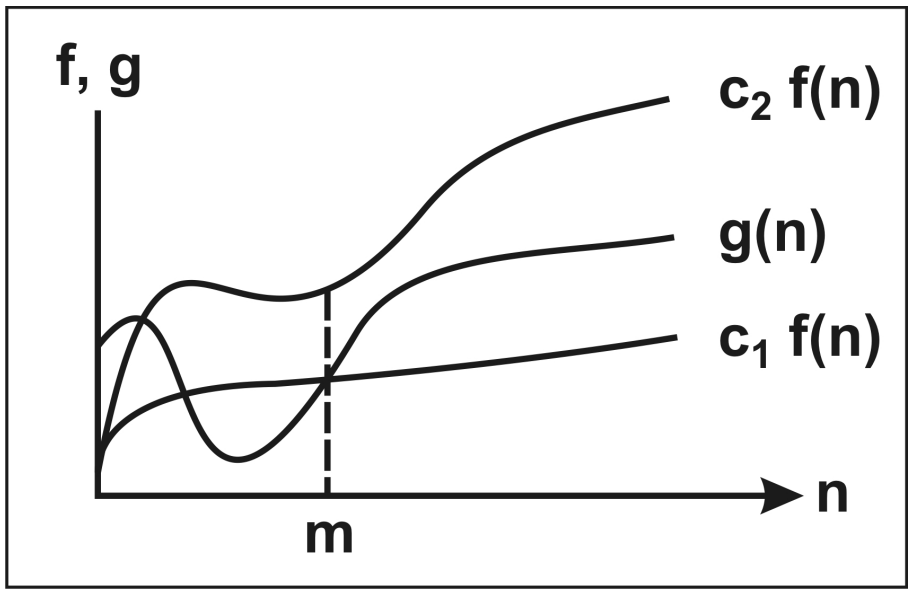
- Para mostrar que $g(n) = 3n^3 + 2n^2$ é $\Omega(n^3)$ basta fazer $c = 1$, e então $3n^3 + 2n^2 >= n^3$ para $n >= 0$.
- Seja $g(n) = n$, para n ímpar ($n >= 1$) e $g(n) = n^2$ para n par ($n >= 0$). Neste caso $g(n)$ é $\Omega(n^2)$, bastando considerar $c = 1$ e $m = 2, 4, 6, ...$.

Notação Θ (Theta)

- Especifica um **limite assintótico firme** para $g(n)$.
- **Definição**: Uma função $g(n)$ é $\Theta(f(n))$ se:
  - Existem três constantes positivas c_1, c_2 e m, tais que, para $n >= m$, temos: $0 <= c_1 f(n) <= g(n) <= c_2 f(n)$
- Isto é, para todo $n >= m$, a função $g(n)$ é igual a $f(n)$ a menos de uma constante.

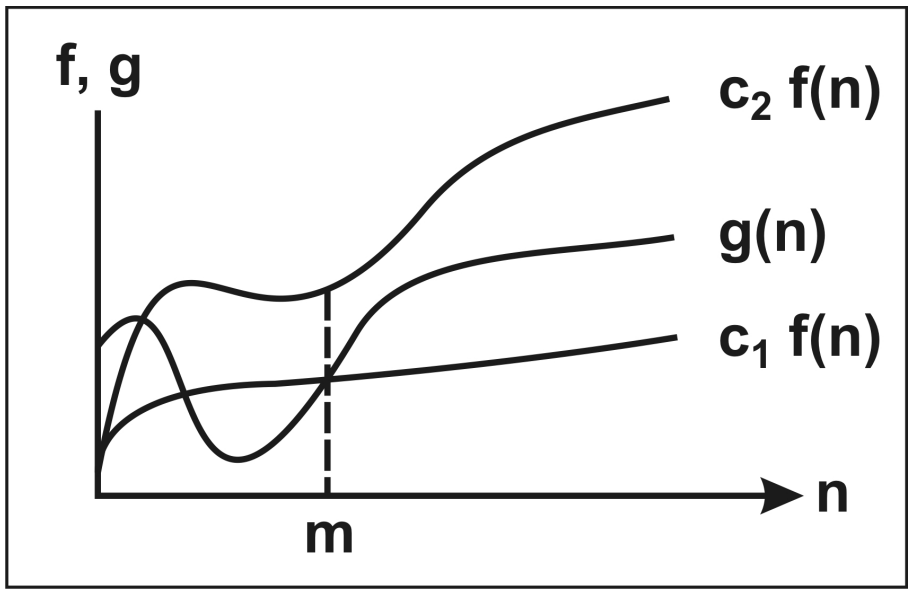
Exemplo gráfico

- Na figura abaixo, a função $f(n)$ é um **limite assintótico firme** para a função $g(n)$.



Relação com O e Ω

- Para uma função ser $\Theta(f(n))$ ela deverá ser, ao mesmo tempo, $O(f(n))$ e $\Omega(f(n))$.



Exemplo: Algoritmos MinMax

- Relembre as funções de complexidade:

Algoritmo	Melhor caso	Pior caso	Caso médio
MaxMin1	2 (n-1)	2 (n-1)	2 (n-1)
MaxMin2	n - 1	2 (n-1)	3 n/2 - 3/2
MaxMin3	3 n/2 - 2	3 n/2 - 2	3 n/2 - 2

- Observe que todos os algoritmos tem a mesma complexidade assintótica.
- Todos são $O(n)$ e $\Omega(n)$. **Portanto, são $\Theta(f(n))$.**

Conteúdo

Conclusão

- Nesta aula aprendemos a estudar o **comportamento assintótico** das funções de custo através da **dominação assintótica**.
- Foco principal para as notações $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\Theta}$.
- *Próxima aula*: Análise de Algoritmos (Parte 3) – Classes de Problemas.
- Dúvidas?

Conteúdo

Exercício 01

- Obtenha a função de complexidade $f(n)$ dos algoritmos abaixo.
- Considere apenas as operações envolvendo as variáveis x e y.
- Para cada algoritmo, responda:
  - O algoritmo é $O(n^2)$? É $\Omega(n^3)$? É $\Theta(n^3)$.

```
1  void Procedimento1(int n) {
2    int i, j, x, y;
3    x = y = 0;
4    for(i = 1; i <= n; i++) {
5      for(j = i; j <= n; j++)
6        x = x + 1;
7      for(j = 1; j < i; j++)
8        y = y + 1;
9    }
10 }
```

```
1  void Procedimento2() {
2    int i, j, k, x;
3    x = 0;
4    for(i = 1; i <= n; i++) {
5      for(j = 1; j <= n; j++)
6        for(k = 1; k <= j; k++)
7          x = x + j + k;
8    x = i;
9  }
```