Άσκηση 1

Δίνονται τα διανύσματα **u** = **i** + **j** – **κ**,   **v** = 2**i** + **j** + **κ** ,   **w** = –**i** –2**j** + 3**k** . Βρείτε

α) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα **u** και **v**

β) τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα **u**, **v** και **w**.

Λύση

α) Το εμβαδόν δίνεται από το μέτρο του εξωτερικού γινομένου $||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||$.

Το εξωτερικό γινόμενο είναι

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 1\boldsymbol{k}$$

του οποίου το μέτρο είναι $||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

β) Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου δίνεται από την απόλυτη τιμή του μεικτού γινόμενου

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5 - 7 + 3 = 1$$

και είναι $|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}| = 1$

Άσκηση 2

Βρείτε το σημείο τομής του επιπέδου $3x - 5y + 2z = 6$ με την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στο επίπεδο $2x - y - z = 4$.

Λύση

Αρχικά πρέπει να περιγράψουμε την ευθεία για την οποία γνωρίζουμε ότι περνάει από το (0,0,0) και είναι κάθετη στο επίπεδο $M_1 : 2x - y - z = 4$, άρα πρέπει να είναι παράλληλη με το κάθετο διάνυσμα στο M_1 δηλαδή το $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 1\boldsymbol{j} - 1\boldsymbol{k}$. Η διανυσματική μορφή αυτής της ευθείας είναι

$$\boldsymbol{u}(t) = (0,0,0) + (2,-1,-1)t = (2t, -t, -t)$$

και οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας είναι

$$x = 2t\,, \qquad y = -t\,, \qquad z = -t$$

Το σημείο τομής θα πρέπει να ανήκει στην ευθεία και να ικανοποιεί την εξίσωση του επιπέδου, δηλαδή

$$3x - 5y + 2z = 6 \Rightarrow 3(2t) - 5(-t) + 2(-t) = 6 \Rightarrow 9t = 6 \Rightarrow t = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

επομένως το σημείο τομής είναι το $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

Άσκηση 3

Βρείτε ένα διάνυσμα με μέτρο 2 που να βρίσκεται στην διεύθυνση του **v** = 2**i** –**j** + 2**κ** .

Λύση

1ος τρόπος: Ένα διάνυσμα στην διεύθυνση του $\boldsymbol{v}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$. Άρα, ένα διάνυσμα με μέτρο 2 δίνεται από το

$$\boldsymbol{u} = 2\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = 2\frac{2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{2}{3}(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) = \frac{4}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{4}{3}\boldsymbol{k}$$

2ος τρόπος: Αφού το διάνυσμα $\boldsymbol{u} = (x, y, z)$ είναι στην διεύθυνση του $\boldsymbol{v}$, θα έχει την μορφή :

$$\boldsymbol{u} = \lambda\, \boldsymbol{v} \Rightarrow (x, y, z) = (2\lambda, -\lambda, 2\lambda)$$

Το μέτρο του $\boldsymbol{u}$ είναι 2 άρα

$$\sqrt{(2\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (2\lambda)^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{9\lambda^2} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Άρα $\boldsymbol{u} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

Άσκηση 4

Βρείτε την οξεία γωνία μεταξύ των επιπέδων $x = 7$ και $x + y + \sqrt{2}z = -3$

Λύση

Η γωνία μεταξύ των επιπέδων είναι ίδια με την γωνία ανάμεσα στα κάθετα διανύσματα των δύο επιπέδων $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{i}$ και $\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \sqrt{2}\boldsymbol{k}$ που δίνεται από τον τύπο

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1 + 0 + 0}{1\sqrt{1 + 1 + 2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Άσκηση 5

Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας τομής των επιπέδων $x + 2y + z = 1$ και $x - y + 2z = -8$.

Λύση

Αρχικά πρέπει να βρούμε ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία της τομή των επιπέδων. Το εξωτερικό γινόμενο των καθέτων διανυσμάτων στα δύο επίπεδα είναι ένα τέτοιο διάνυσμα. Το κάθετο διάνυσμα στο $x + 2y + z = 1$ είναι $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{2}\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ και το κάθετο διάνυσμα στο $x - y + 2z = -8$ είναι

$\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{5}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$

Για να βρούμε την ευθεία, πρέπει να βρούμε και ένα σημείο που ανήκει στην ευθεία. Για $z = 0$, έχουμε $x + 2y = 1$ και $x - y = -8$ άρα ένα σημείο είναι το $(x, y, z) = (-5, 3, 0)$. Επομένως, η διανυσματική εξίσωση της ευθείας είναι

$$\boldsymbol{u}(t) = (-5, 3, 0) + t\ (5, -1, -3)$$

Και οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας είναι

$$x = -5 + 5t\ \ , y = 3 - t\ \text{ και }\ z = -3t$$

Άσκηση 6

Βρείτε την απόσταση του σημείου S(1,4,0) από το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία A(0,0,0) , B(2,0,-1) και Γ(2,-1,0).

Λύση

Αρχικά πρέπει να περιγράψουμε το επίπεδο που διέρχεται από τα 3 σημεία. Για αυτό, θεωρούμε τα διανύσματα

$\overrightarrow{AB} = (2-0)\boldsymbol{i} + (0-0)\boldsymbol{j} + (-1-0)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{2i} - \boldsymbol{k}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (2-0)\boldsymbol{i} + (-1-0)\boldsymbol{j} + (0-0)\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

και υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

και το μέτρο είναι $||\boldsymbol{n}|| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

Για να υπολογίσουμε την απόσταση *d* από το σημείο S πρέπει πρώτα να βρούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{PS}$, όπου P είναι ένα σημείο του επιπέδου. Αν διαλέξουμε σαν P το A, τότε $\overrightarrow{PS} = < 1, 4, 0 >$

$$d = \left| \overrightarrow{PS} \frac{\boldsymbol{n}}{||\boldsymbol{n}||} \right| = \left| (\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})(-\frac{1}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}) \right| = \left| -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} \right| = \left| -\frac{9}{3} \right| = 3$$

Άσκηση 7

Βρείτε την απόσταση του σημείου S=(2,2,0) από την ευθεία με παραμετρικές εξισώσεις x = -t , y = t , z = -1+t

Λύση

Από τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας συμπεραίνουμε ότι η ευθεία περνάει από το σημείο P=(0,0,-1) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

Δημιουργούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{PS} = (2-0)\boldsymbol{i} + (2-0)\boldsymbol{j} + (0-(-1))\boldsymbol{k} = \boldsymbol{2i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$**.** Στην συνέχεια υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο

$$\overrightarrow{PS} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$$

Η απόσταση του σημείο S από την ευθεία δίνεται από τον τύπο

$$d = \frac{||\overrightarrow{PS} \times \boldsymbol{v}||}{||\boldsymbol{v}||} = \frac{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (4)^2}}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$$

Άσκηση 8

Βρείτε την κλίση (ρυθμό μεταβολής) της συνάρτησης *f(x, y)* =$yx^2 + 5y^3$ στο σημείο (1,-2) στην διεύθυνση του x και στην διεύθυνση y.

Λύση

Οι κλίσεις στην διεύθυνση του x και του y δίνονται από τις μερικές παραγώγους στο σημείο (1,-2), οι οποίες είναι

$$\frac{df}{dx} = 2yx \Rightarrow \frac{df}{dx}|_{x=1\ ,\ \ y=-2} = 2(-2)1 = -4$$

και

$$\frac{df}{dy} = x^2 + 15y^2 \Rightarrow \frac{df}{dy}|_{x=1\ ,\ \ y=-2} = 1 + 15(-2)^2 = 61$$

Άσκηση 9

Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy}$ όταν xy ≠ 0

Λύση

Εξετάζουμε την συμπεριφορά του ορίου καθώς κινούμαστε πάνω στην καμπύλη $y = kx$

$$f(x, y)|_{y=kx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}|_{y=kx} = \frac{x^2 + (kx)^2}{x(kx)} = \frac{x^2 + k^2x^2}{kx^2} = \frac{1 + k^2}{k}$$

Συνεπώς, η τιμή του ορίου εξαρτάται από την τιμή του k . Για παράδειγμα, αν $k = 1$ το όριο είναι 2 ενώ αν $k = -1$ το όριο είναι – 2 . Επομένως, αφού το όριο είναι διαφορετικό όταν πλησιάζουμε από διαφορετικές κατευθύνσεις, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Άσκηση 10

Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις για την ευθεία που εφάπτεται στην παρακάτω καμπύλη για $t_0 = 0$

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (t^2 - \cos t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$$

Λύση

Έστω καμπύλη $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ όπου $f(t) = \sin t$, $g(t) = t^2 - \cos t$, και $h(t) = e^t$

Η ευθεία θα διέρχεται από το σημείο $r_0 = \boldsymbol{r}(t_0) = \big(f(t_0), g(t_0), h(t_0)\big) = (0, -1, 1)$ και θα είναι παράλληλη στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{u}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (2t + \sin t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$$

Για το t_0 ισχύει $\boldsymbol{r}'(t_0) = \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$.

Επομένως η διανυσματική μορφή της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη $\boldsymbol{r}(t)$ στο t_0 είναι

$$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{r}(t_0) + t\,\boldsymbol{r}'(t_0) = (0, -1, 1) + t\ (1, 0, 1)$$

και οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας είναι

$$x = t \ , y = -1 \ \text{ και } \ z = 1 + t$$

Άσκηση 11

Για ποιες τιμές του διαστήματος 0 ≤ t ≤ π γίνονται κάθετα μεταξύ τους τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, όταν το διάνυσμα θέσης είναι $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + (5\cos t)\boldsymbol{j} + (3\sin t)\boldsymbol{k}$

Λύση

Το διάνυσμα της ταχύτητας δίνεται από $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t) = (-5\sin t)\boldsymbol{j} + (3\cos t)\boldsymbol{k}$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δίνεται από $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{r}''(t) = (-5\cos t)\boldsymbol{j} + (-3\sin t)\boldsymbol{k}$

Τα διανύσματα θα είναι κάθετα όταν

$$\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t) = 0 \Rightarrow 25\sin t\, cos\, t - 9\sin t\, cos\, t = 0 \Rightarrow 16\sin t\, cos\, t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin t = 0 \\ \text{ή} \\ cos\, t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ ή } t = \pi \\ \text{ή} \\ t = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Άσκηση 12

Να υπολογιστεί η παράγωγος της $\mathrm{f}(x, y, z) = xy + yz + zx$ στο σημείο $P_o(1, -1{,}2)$ στην κατεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

Λύση

Ηκατεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{u}$ προκύπτει αν διαιρέσουμε το διάνυσμα με το μέτρο του δηλαδή $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}} = \frac{3}{7}\boldsymbol{i} + \frac{6}{7}\boldsymbol{j} - \frac{2}{7}\boldsymbol{k}$.

Στην συνέχεια, πρέπει να υπολογιστούμε οι μερικές παράγωγοι της f στο P_o.

$$\frac{df(x,y,z)}{dx} = y + z \Rightarrow \frac{df}{dx}|_{x=1\ ,\ \mathrm{y}=-1\ ,\ \mathrm{z}=2} = 1$$

$$\frac{df(x,y,z)}{dy} = x + z \Rightarrow \frac{df}{dy}|_{x=1\ ,\ \mathrm{y}=-1\ ,\ \mathrm{z}=2} = 3$$

και

$$\frac{df(x,y,z)}{dz} = y + x \Rightarrow \frac{df}{dz}|_{x=1\ ,\ \mathrm{y}=-1\ ,\ \mathrm{z}=2} = 0$$

Επομένως το διάνυσμα κλίσης στο P_o δίνεται από $\nabla\mathrm{f}|_{x=1\ ,\ \mathrm{y}=-1\ ,\ \mathrm{z}=2} = 1\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.
Η παράγωγος της f στο P_oστην κατεύθυνση του $\boldsymbol{v}$ δίνεται από

$$(D_{\boldsymbol{v}}f)|_{P_o} = \nabla\mathrm{f}|_{P_o} \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) \cdot \left(\frac{3}{7}\boldsymbol{i} + \frac{6}{7}\boldsymbol{j} - \frac{2}{7}\boldsymbol{k}\right) = 1\frac{3}{7} + 3\frac{6}{7} + 0\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{21}{7} = 3.$$

Άσκηση 13

Να βρεθούν οι εξισώσεις για το εφαπτόμενο επίπεδο και την κάθετο της επιφάνειας που δίνεται από την εξίσωση $x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7$ στο σημείο $P_o(1, -1,3)$

Λύση

Οι εξισώσεις για το εφαπτόμενο επίπεδο και την κάθετο προκύπτουν μέσω του υπολογισμούς του διανύσματος κλίσης

$$\nabla \mathrm{f} = \frac{df}{dx}\boldsymbol{i} + \frac{df}{dy}\boldsymbol{j} + \frac{df}{dz}\boldsymbol{k} = (2x + 2y)\boldsymbol{i} + (2x - 2y)\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$$

στο σημείο P_o

$$\nabla \mathrm{f}|_{x=1\ ,\ \mathrm{y}=-1\ ,\ \mathrm{z}=3} = 0\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο δίνεται από την

$$\frac{df}{dx}|_{P_o}(x - x_0) + \frac{df}{dy}|_{P_o}(y - y_0) + \frac{df}{dz}|_{P_o}(z - z_0) = 0 \Rightarrow 4(y + 1) + 6(z - 3) = 0 \Rightarrow 2y + 3z = 7$$

Η κάθετη ευθεία δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x_0 + \frac{df}{dx}|_{P_o}t = 1$$

$$y = -1 + 4t$$

$$z = 3 + 6t$$

Άσκηση 14

Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1$

Λύση

Οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{df}{dx} = 2x - 2y - 2$$

$$\frac{df}{dy} = -2x + 4y + 2$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{df}{dx} = 0 \\ \dfrac{df}{dy} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x - 2y - 2 = 0 \\ -2x + 4y + 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = y + 1 \\ 2y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$$

Άρα το $(x, y) = (1,0)$είναι κρίσιμο σημείο

Για να δούμε αν το κρίσιμο σημείο είναι μέγιστο ή ελάχιστο, πρέπει να εξετάσουμε και τις δεύτερες παραγώγους $\frac{d^2f}{dx^2} = 2, \frac{d^2f}{dy^2} = 4, \frac{d^2f}{dxdy} = -2$

Η ποσότητα $\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2 = 8 - 4 = 4 > 0$ μας δείχνει ότι το $(x, y) = (1,0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 15

Να βρεθεί η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

Λύση

Οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{df}{dx} = 4x + 3y - 5$$

$$\frac{df}{dy} = 3x + 8y + 2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx} = 0 \\ \frac{df}{dy} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x + 3y - 5 = 0 \\ 3x + 8y + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x = 2 \\ y = -1 \end{aligned}\right\}$$

Άρα το $(x, y) = (2, -1)$είναι κρίσιμο σημείο.

Για να δούμε αν το κρίσιμο σημείο είναι μέγιστο ή ελάχιστο, πρέπει να εξετάσουμε και τις δεύτερες παραγώγους$\frac{d^2f}{dx^2} = 4, \frac{d^2f}{dy^2} = 8, \frac{d^2f}{dxdy} = 3$

Η ποσότητα $\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2 = 23 > 0$ και $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$ άρα το $(x, y) = (2, -1)$ είναι ελάχιστο.

Άσκηση 16

Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 + 1$
α) Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x, y)$ στο πεδίο ορισμού της.
β) Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x, y)$ στο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x = -1, x = 1, y = -1$ και $y = 1$.

Λύση

α) $f_x = 3x^2 + 3y$, $f_y = 3y^2 + 3x$.

Θέλουμε $f_x = 0$ και $f_y = 0$ άρα έχουμε κρίσιμα σημεία στα $(0,0)$ και $(-1, -1)$.

Για το (0,0), $f_{xx} = 6x \rightarrow f_{xx}(0,0) = 0, f_{yy} = 6y \rightarrow f_{yy}(0,0) = 0$ και $f_{xy} = 3$. Άρα $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = -9 < 0$ και το (0,0) είναι σαγματικό.

Για το $(-1,-1)$, $f_{xx} = 6x \rightarrow f_{xx}(-1,-1) = -6, f_{yy} = 6y \rightarrow f_{yy}(-1,-1) = -6$ και $f_{xy} = 3$. Άρα $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ και $f_{xx}(-1,-1) < 0$ άρα το $f(-1,-1) = 2$ είναι τοπικό μέγιστο.

β) Τα ακρότατα θα βρίσκονται είτε στα άκρα είτε στο εσωτερικό του χωρίου που δίνεται.

Για τα άκρα, έστω AB: x=-1, BC: y=1, CD: x=1, DA: y=-1

Για την AB: $f(x,y) = f(-1,y) = 3y + y^3$. $f_y(-1,y) = 3y^2 - 3 = 0 \rightarrow y = \pm 1$ με $f(-1,-1) = 2$ και $f(-1,1) = -1$

Για την BC: $f(x,y) = f(x,1) = x^3 + 3x + 2$. $f_x(x,1) = 3x^2 + 3 = 0$ δεν έχει λύση

Για την CD: $f(x,y) = f(1,y) = 2 + 3y + y^3$. $f_y(1,y) = 3y^2 + 3 = 0$ δεν έχει λύση

Για την DA: $f(x,y) = f(x,-1) = x^3 - 3x$. $f_x(x,-1) = 3y^2 + 3x = 0 \rightarrow x = \pm 1$ με $f(-1,-1) = 2$ και $f(1,-1) = -2$

Άρα, για τα άκρα έχουμε $f(-1,-1) = 2$, $f(-1,1) = -2$, $f(1,1) = 6$, $f(1,-1) = -2$

Για τα εσωτερικά σημεία, μας ενδιαφέρει μόνο το $f(-1,-1) = 2$ από ερώτημα (α)

Άρα το απόλυτο μέγιστο είναι στο (1,1) και το απόλυτο ελάχιστο στα (1,-1) και (-1,1)

Άσκηση 17

Να βρεθούν τα σημεία που ανήκουν στην $xy^2 = 54$ και είναι κοντύτερα στην αρχή των αξόνων.

Λύση

Ουσιαστικά καλούμαστε να βρούμε τα σημεία που ελαχιστοποιούν μια συνάρτηση που κωδικοποιεί την απόσταση από την αρχή των αξόνων, υπό τον περιορισμό ότι για τα σημεία αυτά πρέπει να $g(x,y) = xy^2 - 54 = 0$. Η συνάρτηση f που ορίζει την απόσταση δίνεται από το μέτρο του διανύσματος το οποίο ξεκινά από την αρχή των αξόνων (0,0) και καταλήγει στα (x,y)και είναι ηαπλοποιημένη έκδοση της

$$\hat{f}(x,y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

που δίνεται από την

$$f(x,y) = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (x)^2 + (y)^2$$

Άρα το πρόβλημα μας δίνεται από την

$$\varepsilon\lambda\alpha\chi\iota\sigma\tau o\pi o\acute{\iota}\eta\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ f(x,y)$$

$$\upsilon\pi\acute{o}\ \tau o\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota o\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\ g(x,y) = 0$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό, χρησιμοποιούμε την μέθοδο Lagrangeη οποία λέει ότι η λύση θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

Οπότε για $\nabla f(x,y) = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$, $\nabla g(x,y) = y^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$ έχουμε ότι

$$2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} = \lambda(y^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda y^2 \\ 2y = \lambda 2xy \end{cases}$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις

(1) Αν$(x = 0, y = 0) \Rightarrow g(x,y) \neq 0$, δηλαδή αυτά τα σημεία δεν ικανοποιούν τον περιορισμό
(2) Αν $y \neq 0 \Rightarrow 2 = \lambda 2x \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda}$. Άρα $2x = \lambda y^2 \Rightarrow 2\frac{1}{\lambda} = \lambda y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{2}{\lambda^2}$, άρα.

$$xy^2 - 54 = \frac{1}{\lambda}\frac{2}{\lambda^2} - 54 \Rightarrow \lambda^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Άρα $x = 3$ και $y^2 = 18 \Rightarrow \pm 3\sqrt{2}$και τα σημεία με την μικρότερη απόσταση είναι τα $(3{,}3\sqrt{2})$ και $(3, -3\sqrt{2})$

Άσκηση 18

Να υπολογιστεί το $\int_1^2 \int_y^{y^2} dxdy$

Λύση

$$\int_1^2 \int_y^{y^2} dxdy = \int_1^2 (y^2 - y)dy = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2} = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

Άσκηση 19

Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται ανάμεσα στις $x = y^2$και $x = 2y - y^2$ για $0 \leq x \leq 1$

Λύση

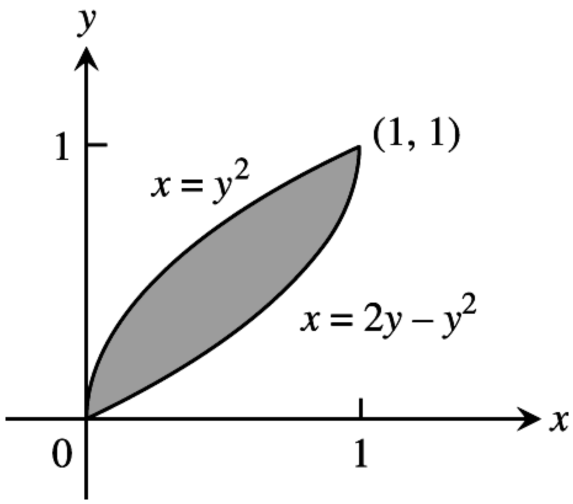
Για να βρεθεί η λύση, χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Fubini, δηλαδή για $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, όπου g_1, g_2 συνεχής στο [a, b]

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

Όπου $f(x,y) = 1$

Για $0 \leq x \leq 1 \rightarrow 0 \leq y \leq 1$ και $y^2 \leq y \Rightarrow 2y^2 \leq 2y^2 \Rightarrow y^2 \leq 2y - y^2 \Rightarrow y^2 \leq x \leq 2y - y^2$

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} dxdy = \int_0^1 (2y - y^2 - y^2)dy = \int_0^1 (2y - 2y^2)dy = \left[y^2 - \frac{2}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$



Άσκηση 20

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $y = 6 - x^2$ και την ευθεία $y = x$ του επιπέδου xy. Στην συνέχεια να υπολογιστεί ο όγκος του χώρου που φράσσεται από αυτό το χωρίο και την επιφάνεια $z = x^2$.

Λύση

$f(x) = y_1 = 6 - x^2$ και $g(x) = y_2 = x$

Τομή $6 - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2\; και\; x_2 = -3$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 6 - x^2 > x \quad ισχύει\; για -3 \leq x \leq 2$$

Εμβαδόν

$$E = \int_{-3}^{2}\int_{g(x)}^{f(x)} 1dydx = \int_{-3}^{2}\int_{x}^{6-x^2} 1dydx = \int_{-3}^{2}(6 - x^2 - x)dx = [6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_{-3}^{2} = \frac{125}{6}$$

Για τον όγκο $z = x^2$

$$V = \int_{-3}^{2}\int_{x}^{6-x^2}\int_{0}^{x^2} 1dzdydx = \int_{-3}^{2}\int_{x}^{6-x^2} x^2\, dydx = \int_{-3}^{2}(x^2(6 - x^2) - x^3)\, dx = [2x^3 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}]_{-3}^{2} = \frac{125}{4}$$

Άσκηση 21

Να υπολογιστεί ο όγκος του του χωρίου που φράσσεται από την επιφάνεια $z = 4 - x^2 - y$ στο 1ο ογδοημόριο $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$

Λύση

$$V = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{4-x^2-y} dzdydx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} (4 - x^2 - y)dydx$$

$$= \int_0^2 \left[(4 - x^2)^2 - \frac{1}{2}(4 - x^2)^2\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = \int_0^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{128}{15}$$