ΗΥ-111 Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εαρινό εξάμηνο 2023

2η σειρά ασκήσεων

Παράδοση: 26/03/2023

Γενικές οδηγίες

Το όνομα του παραδοτέου πρέπει να είναι της μορφής **ask2_AM** (όπου AM ο αριθμός μητρώου π.χ. ask2_1234). Μπορείτε να κάνετε χρήση των equation tools στο Word ή κάποιου άλλου λογισμικού για συγγραφή εξισώσεων ή του Latex. Αν οι ασκήσεις παραδοθούν σε doc/pdf με χρήση Word θα έχετε bonus +5% ενώ αν χρησιμοποιήσετε Latex θα έχετε bonus +10% (μέγιστη βαθμολογία 105% ή 110% αντίστοιχα). Αν παραδώσετε σκαναρισμένες ή με φωτογραφίες τις ασκήσεις σας θα βαθμολογηθείτε με μέγιστο 100%. Στην περίπτωση παράδοσης με φωτογραφίες, τοποθετήστε όλες τις εικόνες σε **ένα ενιαίο** αρχείο κειμένου/pdf ώστε να διευκολύνετε την διόρθωση.
Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνει **ηλεκτρονικά** μέχρι και τις 26/03/2023 και ώρα 23:59 από την ιστοσελίδα του μαθήματος στο eLearn. **Προσοχή:** Δεν θα δοθεί παράταση, υπάρχει όμως δυνατότητα καθυστερημένης παράδοσης με ποινή -10% ανά ημέρα και μέχρι 3 ημέρες καθυστέρηση το αργότερο.

Άσκηση 1 (10 Μονάδες)

Σχεδιάστε τις παρακάτω επιφάνειες με χρήση GeoGebra και προσθέστε τις εικόνες στην απάντησή σας. Περιγράψτε το είδος κάθε επιφάνειας (π.χ. ελλειψοειδές). Επίσης σχεδιάστε με χρήση GeoGebra τις τομές των επιπέδων xz, yz και z=3 με την κάθε επιφάνεια και αναφέρεται τι είδους καμπύλη είναι η κάθε τομή.

α) $z = \frac{x^2}{9} - y^2$

β) $-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$

Άσκηση 2 (17 Μονάδες)

α) Γράψτε την πολική εξίσωση της $r = \frac{8}{1+sin\theta}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες και αναγνωρίστε την αντίστοιχη καμπύλη. Σχεδιάστε την καμπύλη με χρήση GeoGebra χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

β) Βρείτε τα σημεία τομής όπου τέμνονται ο κύκλος $r = 3\cos\theta$ και η καρδιοειδής καμπύλη $r = 1 + \cos\theta$

γ) Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου με κυλινδρικές συντεταγμένες:
$(r, \theta, z) = (2, 3\pi/4 , -2)$

δ) Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου με σφαιρικές συντεταγμένες:
$(\rho, \phi, \theta) = (4, \pi/4 , 13\pi/6)$

Άσκηση 3 (17 Μονάδες)

α) (5 Μονάδες) Αποδείξτε ότι καμπύλη **r**(t) = < ½ sin2t **,** ½ (1-cos2t) , cost > βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας με κέντρο την αρχή των αξόνων. Σχεδιάστε στο GeoGebra αυτή την καμπύλη και την σφαίρα.

β) (5 Μονάδες) Βρείτε το μήκος της καμπύλης **r**(t) = (e^t sint) **i** + (e^t cost) **j** + (e^t) **k** για $0 \leq t \leq \ln 2$

γ) (7 Μονάδες) Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις για την ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη **r**(t) = ($\sqrt{2t+1}$) **i** + (sin πt) **j** + 4 **k** στο σημείο t = 4.

Άσκηση 4 (15 Μονάδες)

α) Με χρήση του GeoGebra σχεδιάστε την καμπύλη που διατρέχεται από το διάνυσμα θέσης **r** με **r**(t) = (0.5 cos15t) **i** + ((8+sin15t)cost) **j** + ((8+sin15t)sint) **k** , για $0 \leq t \leq 2\pi$

β) Με χρήση του GeoGebra βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας d**r**/dt και υπολογίστε το d**r**/dt στο σημείο t_0 = π/4

γ) Με χρήση του GeoGebra σχεδιάστε το διάνυσμα της ταχύτητας όπως φαίνεται πάνω στην καμπύλη, για όλα τα $t_1 \in$ [0, π/2] (δηλ. καθώς το t_1 μεταβάλλεται σε αυτό το διάστημα).

δ) Με χρήση του GeoGebra βρείτε το διανυσματική εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο t_0 = π/4 και σχεδιάστε την ευθεία αυτή.

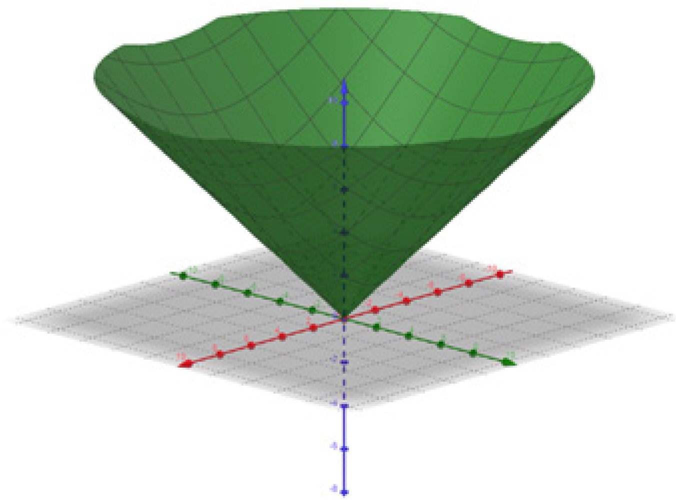
<u>Σημείωση:</u> Για την άσκηση αυτή θα παραδώσετε τις εντολές σε GeoGebra, το αποτέλεσμα των εντολών αυτών και μια τουλάχιστον εικόνα των γραφικών παραστάσεων.

Άσκηση 5 (12 Μονάδες)

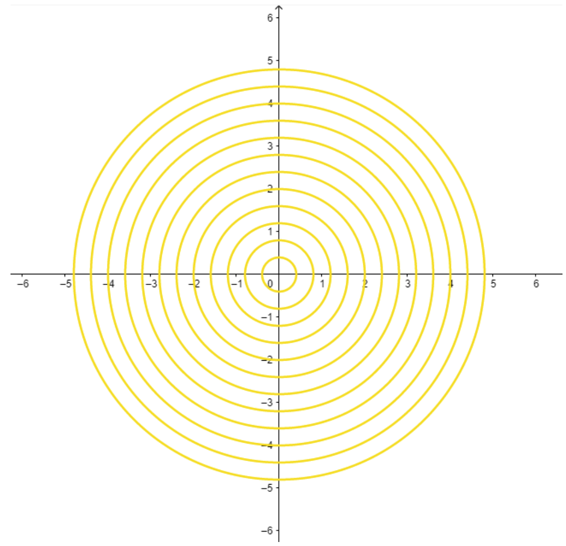
Α. Έστω ότι έχουμε την συνάρτηση $f(x,y) = 2 + 2\sin(x-y)$. Γράψτε τις κατάλληλες εντολές σε GeoGebra οι οποίες να σχεδιάζουν μια ισοϋψή καμπύλη με *f(x,y) = AM/2000 ,* όπου AM ο δικός σας αριθμός μητρώου.

Β. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων με χρήση GeoGebra και βρείτε τις ισοσταθμικές καμπύλες *f(x,y) = c* όπου c ανήκει στο διάστημα [0,10] και κάθε ισοσταθμική καμπύλη πρέπει να απέχει από την επόμενη 0.4 Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση Sequence() της GeoGebra.

<u>Παράδειγμα:</u> Η συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ έχει γράφημα και ισοσταθμικές καμπύλες όπως φαίνονται στο Σχήμα 1 και Σχήμα 2 αντίστοιχα.



Σχήμα 2



Σχήμα 1

i) $f(x,y) = x - y^2$

ii) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

Άσκηση 6 (9 Μονάδες)

Περιγράψτε και σχεδιάστε με GeoGebra την περιοχή του R^2 στην οποία η συνάρτηση είναι συνεχής

α) f(x, y) = $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

β) f(x, y) = ln(2x – 5y + 2)

γ) f(x, y) = $\cos^{-1}(xy/2)$

Άσκηση 7 (8 Μονάδες)

Βρείτε τα α) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{y^2-4}{xy-2x}$ και β) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,5)} \frac{\sqrt{y}-\sqrt{x+1}}{y-x-1}$

Άσκηση 8 (12 Μονάδες)

α) Δείξτε ότι το δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3+x^3}{xy^2}$

β) Βρείτε το όριο της $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ καθώς $(x,y) \to (0,0)$ ή δείξτε ότι το όριο δεν υπάρχει.