ΗΥ-215 ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2
ΧΡΗΣΤΟΣ ΠΑΠΑΣΤΑΜΟΣ csd 4569

Άσκηση 1

α) $x(-t) = (-t)^3 = -t^3 \neq x(t)$

$-x(-t) = -(-t)^3 = -(-t^3) = t^3 = x(t)$ → Περιττή

β) $x(-t) = (-t)^3|-t| = -t^3|t| \neq x(t)$

$-x(-t) = -((-t)^3)|-t| = -(-t^3)|t| = t^3|t| = x(t)$ → Περιττή

γ) $x(-t) = |(-t)^3| = |-t^3| = |t^3| = x(t)$ → Άρτια

$-x(-t) = -|(-t)^3| = -|t^3| \neq x(t)$

δ) $x(-t) = \frac{1}{2}(e^{j(-t)} + e^{-j(-t)}) = \frac{1}{2}(e^{-jt} + e^{jt}) = x(t)$ → Άρτια

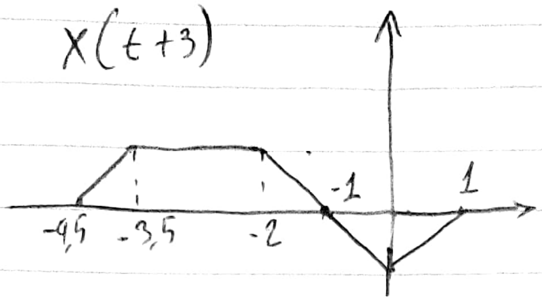
$-x(-t) = -\frac{1}{2}(e^{j(-t)} + e^{-j(-t)}) = -\frac{1}{2}(e^{-jt} + e^{+jt}) \neq x(t)$

ε) $x(-t) = 1 + \sin(2\pi(-t)) = 1 + \sin(-2\pi t) = 1 - \sin(2\pi t) \neq x(t)$

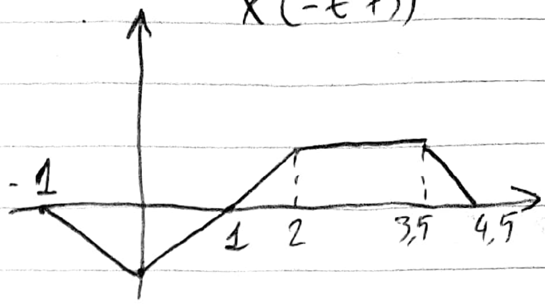
$-x(-t) = -1 - \sin(2\pi(-t)) = -1 + \sin(2\pi t) \neq x(t)$

Άσκηση 2

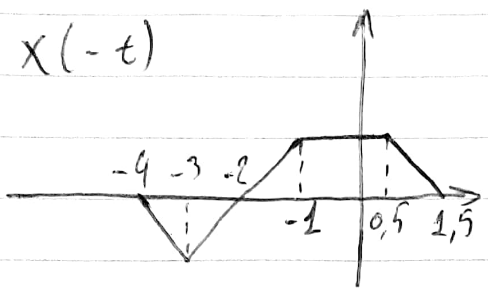
α) $x(t+3)$



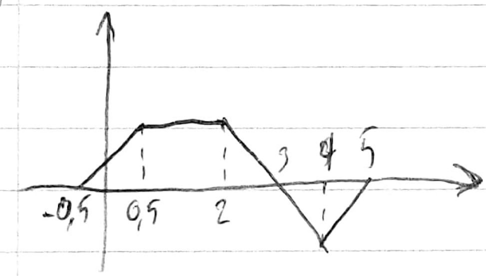
$x(-t+3)$



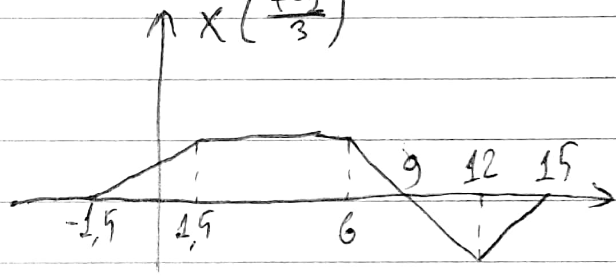
β) $x(-t)$



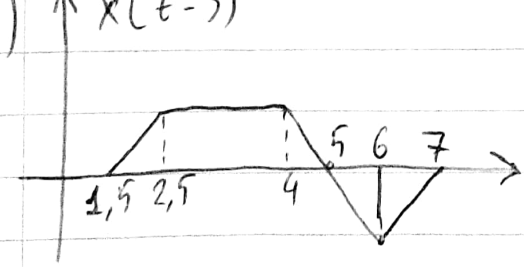
γ) $x(t-1)$



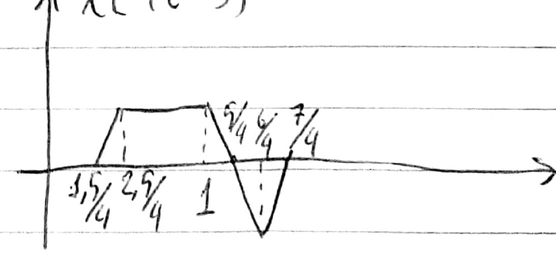
$x\left(\frac{t-1}{3}\right)$



δ) $x(t-3)$



$x(4t-3)$



Άσκηση 3

α) $\frac{t^2+1}{t^2+9}\delta(t+1) = \frac{t^2+1}{t^2+9}\Big|_{t=-1} = \frac{1+1}{1+9} = 2/10 = 0.2$

β) $\frac{\sin(at)}{t}\delta(t) = \frac{\sin(at)}{t}\Big|_{t=0}$ δεν ορίζεται

γ) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{t-1}\cos(\pi(t-5)/2)\delta(t-3)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-1}\cos(\pi(t-5)/2)\,dt\Big|_{t=3}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} e^2\cos(2\pi/2)\,dt = e^2\cos(\pi) = -e^2$

δ) $\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\pi t)\delta(2t-3)\,dt \xRightarrow{\gamma=2t} \int_{-\infty}^{\infty}\sin(\pi\gamma/2)\,d\gamma/2\Big|_{\gamma=3} = \sin(3\pi/2) = -1$

ε) $\int_{t}^{\infty}(\tau^2+1)\delta(\tau+2)\,d\tau \overset{t\leq-2}{=} \int_{t}^{\infty}(\tau^2+1)\,d\tau\Big|_{\tau=-2} = (-2)^2+1 = 5\ ,\ t\leq-2$

στ) $\int_{0}^{2} e^{j2t}\delta(t-4)\,dt = \int_0^2 e^{j2t}\,dt\Big|_{t=4} = 0$ (το $t=4$ είναι εκτός των ορίων ολοκλήρωσης)

Άσκηση 4

Γνωρίζουμε ότι ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δύο βηματικών συναρτήσεων. Έτσι, το σήμα $rect(t-1/2)$ μπορεί να γραφεί και ως $u(t)-u(t-1)$

$g(t) = 3\cos(2\pi t)\,rect(t-1/2)$

$g'(t) = (3\cos(2\pi t))'\,rect(t-1/2) + 3\cos(2\pi t)(u(t)-u(t-1))'$

$= -3\cdot 2\pi\sin(2\pi t)\,rect(t-1/2) + 3\cos(2\pi t)(\delta(t)-\delta(t-1))$

$= -6\pi\sin(2\pi t)\,rect(t-1/2) + 3\cos(2\pi t)\delta(t) - 3\cos(2\pi t)\delta(t-1)$

$= -6\pi\sin(2\pi t)\,rect(t-1/2) + 3\cancel{\cos(2\pi 0)}\delta(t) - 3\cancel{\cos(2\pi 1)}\delta(t-1)$

$= -6\pi\sin(2\pi t)\,rect(t-1/2) + 3\delta(t) - 3\delta(t-1)$

Άσκηση 5

Γραμμικότητα:

α) $x(t) \to y(t) = |x(t)| + x(t+1)$

$ax(t) \to y'(t) = |ax(t)| + ax(t+1)$

$= |a|\, x(t) + a\, x(t+1)$

Δεν είναι ευσταθές, οπότε δεν είναι γραμμικό

Χ.Α: Είσοδος $x(t-t_0) \to y'(t) = |x(t-t_0)| + x(t-t_0+1)$

Έξοδος $y(t-t_0) \to |x(t-t_0)| + x(t-t_0+1)$

Το σύστημα είναι Χ.Α

Ευσταθεια: $|y(t)| = |x(t)| + |x(t+1)|$

$\leq B_x + B_x$

Έστω $0 < |x(t)| < B_x$ Το σύστημα είναι ευσταθές

Αιτιατό: $y(t) = |x(t)| + x(t+1)$

Χρειάζονται μελλοντικές τιμές της εισόδου, το σύστημα δεν είναι Αιτιατό

Δυναμικό: Το σύστημα χρειάζεται μελλοντικές τιμές της εισόδου οπότε είναι δυναμικό β)

Γραμμικοτητα: $x(t) \rightarrow y(t) = t\,x(t)$

$a\,x(t) \rightarrow y'(t) = t\,a\,x(t) = a(t\,x(t)) = a\,y(t)$

Ομογενες

Το συστημα ειναι γραμμικο

Χ.Α: Εισοδος $x(t-t_0) \Rightarrow y'(t) = t\,x(t-t_0)$

$y(t-t_0) = t-t_0\,x(t-t_0)$

Το συστημα δεν ειναι Χ.Α.

Ευσταθεια: $|y(t)| = |t\,x(t)| = |t|\cdot|x(t)|$

$0 \leq |x(t)| \leq B_x$ $\qquad \leq |t|\cdot B_x$

Το συστημα δεν ειναι ευσταθες

Αιτιατο/Δυναμικο $y(t) = t\,x(t)$

Το συστημα δεν χρειαζεται μελλοντικες ή παρελθοντικες τιμες της εισοδου, οποτε ειναι αιτιατο και οχι Δυναμικο

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) = t\,x_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) = t\,x_2(t) \end{array}\right\} y_1(t) + y_2(t) = t\,x_1(t) + t\,x_2(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y'(t) = t(x_1(t) + x_2(t)) = t\,x_1(t) + t\,x_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Προσθετικοτητα

Ασκηση 6

α) Προκυπτει το, πολυονυμο : $\lambda^2+\lambda-6=0$

$\Delta = (-1)^2 + 24 = 25 \qquad \lambda_{1,2} \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$

$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$y_{zi}(0) = 0 \Rightarrow c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^{-3\cdot 0} = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$ (1)

$y'_{zi}(0) = -1 \Rightarrow c_1 2 e^{2\cdot 0} + c_2 \cdot (-3) e^{-3\cdot 0} = -1 \Rightarrow 2c_1 - 3c_2 = -1$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} 2c_1 + 3c_1 = -1$

$\Rightarrow 5c_1 = -1 \Rightarrow \boxed{c_1 = -1/5}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow -c_2 = -1/5 \Rightarrow \boxed{c_2 = 1/5}$

Αρα $y_{zi}(t) = \left(-1/5\, e^{2t} + 1/5\, e^{-3t}\right) u(t)$