Θεμα 2ο Εξεταστική Ιανουαρίου

Έστω $f:R^3\to R$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση και $h:R^3\to R$ η συνάρτηση με τύπο

$$h(r,\varphi,\theta)=f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)$$

Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \frac{\partial h}{\partial \theta}$ της h σε κάθε σημείο συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f

Λύση:

$h=f\circ g$ και από κανόνα αλυσίδας έχουμε

$r\cos\varphi\sin\theta$, $r\sin\varphi\sin\theta$, $r\cos\theta$

$$Dh(r,\varphi,\theta)=\left(\frac{\partial h}{\partial r},\frac{\partial h}{\partial \varphi},\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)=Df(x,y,z)\,Dg(r,\varphi,\theta)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial r},\frac{\partial g}{\partial \varphi},\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\varphi\sin\theta & r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{pmatrix}=(\ldots,\ldots,\ldots)$$

οπότε $$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\varphi,\theta)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,r\cos\varphi\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\sin\varphi\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\cos\theta$$

$\frac{\partial h}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta)=\ldots$ και $\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta)=\ldots$

Θεμα 3

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y)=2yx$. Εστω $R>0$ και $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq R^2\}$

α) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της f και το είδος τους στο εσωτερικό του D

β) Η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f στο $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=R^2\}$

γ) -//- της f στο D

Λυση

α) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2x$ Θέλω $\begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0$ Μοναδικό Κ.Σ. στο $(0,0)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=2$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

άρα $Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Hf(0,0)=-4<0$

Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f

β) $h(x,y)=x^2+y^2$ $F(x,y)=2xy$

$\nabla F=\lambda \nabla h \Rightarrow \begin{cases} 2x=2\lambda x \\ 2x=2\lambda y \end{cases}$ $\underbrace{}_{x^2+y^2=R^2}$ $\Rightarrow \begin{cases} y=\lambda x \\ x=\lambda y \\ \hline x^2+y^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow x+y=\lambda(x+y)$

$\lambda=1$ ή $x+y=0$

• Αν $\lambda=1$ τότε $x=y$

$2x^2=R^2 \Rightarrow x^2=\dfrac{R^2}{2} \Rightarrow x\pm\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

Άρα $(x,y)=\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right),\left(\dfrac{-R}{\sqrt{2}},\dfrac{-R}{\sqrt{2}}\right)$

• αν $x+y=0 \Rightarrow x=-y$ $\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{-R}{\sqrt{2}}\right),\left(\dfrac{-R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right) \to$

1 2

$f\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\dfrac{-R}{\sqrt{2}},-\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)=R^2$ Στα 1 κ 2 σημεία

3 4

$f\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)=-R^2$ μέγιστη R^2 και

στα 3 κ 4 σημεία ελάχιστη $-R^2$

γ) Η μέγιστη τιμή στο D είναι R^2 και η ελάχιστη $-R^2$

Θέμα 3ο Σεπτ. 2014

Να βρεθούν το πλησιέστερο και το πιο απομακρυσμένο σημείο της $h: (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1$ από το $(2,0,1)$

Λύση

$f(x,y,z) = (x-2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2 = (x-2)^2+y^2+(z-1)^2$ ⟶ τύπος απόστασης χωρίς τη ρίζα, δεν μας εξυπηρετεί η ρίζα στο τετράγωνο

- $\nabla h(x,y,z) = \left(\frac{dh}{dx}, \frac{dh}{dy}, \frac{dh}{dz}\right) = \left(2(x-1), 2(y+1), 2z\right)$
- $\nabla f(x,y,z) = \left(2(x-2), 2y, 2(z-1)\right)$

Lagrange $\boxed{\nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla h(x,y,z)}$

$$\begin{cases} 2(x-2) = 2\lambda(x-1) \\ 2y = 2\lambda(y+1) \\ 2(z-1) = 2\lambda z \\ (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=\lambda x-\lambda \Rightarrow x-\lambda x = 2-\lambda \Rightarrow x(1-\lambda)=2-\lambda \Rightarrow x=\frac{2-\lambda}{1-\lambda} \quad \lambda\neq 1 \\ y=\frac{\lambda}{1-\lambda}, \ \lambda\neq 1 \\ z=\frac{1}{1-\lambda}, \ \lambda \neq 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{2-\lambda}{1-\lambda}-1\right)^2+\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}+1\right)^2+\frac{1}{(1-\lambda)^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{(1-\lambda)^2}+\frac{1}{(1-\lambda)^2}+\frac{1}{(1-\lambda)^2}=1 \Rightarrow 3=(1-\lambda)^2 \Rightarrow$$

$\lambda^2-2\lambda-2=0 \quad \Delta=12 \quad \lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}$ ⟶ $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$

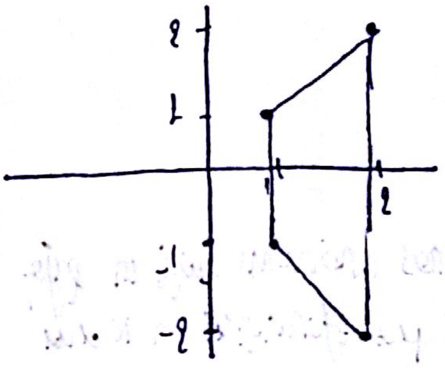
Για $\lambda=1+\sqrt{3}$
$x=\ldots$
$y=\ldots$
$z=\ldots$

Για $\lambda=1-\sqrt{3}$
x
y
z

Scanned by CamScanner

Θέμα 4ο Σεπτ 2014

$\int_B e^{x+y} dx dy$ όπου B τραπέζιο με κορυφές $(1,1)(2,2)(2,-2)(1,-1)$



$1 \leq x \leq 2$

Παίρνω σταθερό το x γιατί αν πάρω το y θα πρέπει να ολοκληρώματα να το "κόψω" Αν ήταν ίσιο το τραπέζιο θα βάλουμε το x

$y-y_0 = \lambda(x-x_0)$ και $\lambda = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

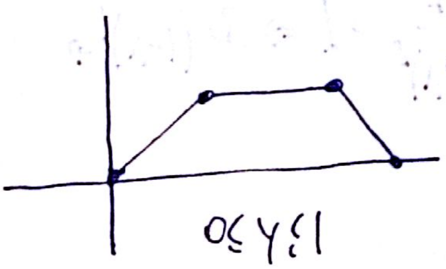
$\left.\begin{matrix} y=x \\ y=-x \end{matrix}\right\}$ άρα $-x \leq y \leq x$

$$\int_1^2\int_{-x}^{x} e^{x+y} dy dx = \int_1^2\int_{-x}^{x} e^x e^y dy dx = \int_1^2 e^x [e^y]_{-x}^{x} dx$$

$$= \int_1^2 e^x (e^x - e^{-x}) dx = \int_1^2 (e^{2x}-1) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - x\right]_1^2$$

Θέμα 4ο Ιαν 2015

$\int_B (x+y) dx dy$ B: τραπέζιο $(0,0)(3,0)(2,1)$ και $(1,1)$

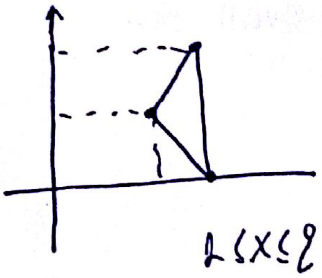


$0 \leq y \leq 1$

$\left.\begin{matrix} y=x \\ y=3-x \end{matrix}\right\}$ $y \leq x \leq 3-y$

Εμβόλιμη 2016, Θέμα 4:

D τριγ. $(1,1)(2,2)(2,0)$



$$\int_D e^{x+y}\,dx\,dy$$

$1\le x\le 2$

$$\left.\begin{array}{l} y=x \\ y=2-x \end{array}\right\} 2-x\le y\le x$$

Ιούνιος 2015, Θέμα 5:

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z\le 9,\ x,y,z\ge 0\}$$

όταν δεν έχουμε z ⇒ πολικές

όταν δεν μπορούμε σφαιρικές ⇒ κυλινδρικές

κυλινδρικές
$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z \\ \det = r \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z\le 9 \Rightarrow$$
$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi+z\le 9$$
$$r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+z\le 9$$
$$r^2\,1+z\le 9$$
$$r^2+z\le 9 \Rightarrow 0\le z\le 9-r^2$$

$0\le r^2\le 9 \Rightarrow 0\le r\le 3$ (πρέπει ≥ 0)

$$\left.\begin{array}{l} r\cos\varphi\ge 0 \\ r\sin\varphi\ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos\varphi\ge 0 \\ \sin\varphi\ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow 0\le\varphi\le \pi/2$$

Όταν ζητά όγκο δε δίνει συνάρτηση ολοκληρώνω το 1

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^{9-r^2} 1\cdot \underbrace{r}_{\det}\,dz\,dr\,d\varphi = \dots = \frac{81\pi}{8} \Rightarrow$$

Προσοχή! Δεν ξεχνάω η det μέσα στο ολοκλήρωμα

Σεπτέμβριος 2015 Θέμα 5º

$$B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \frac{(x-1)^2}{4[2^2]} + \frac{(y-2)^2}{9[3^2]} \le 1\right.$$

Δεν είναι στην εκφώνηση

Έλλειψη με κέντρο $(1,2)$ οπου έχουμε χρησιμοποιήσει κάτω πολικές

κλασσικές πολικές

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$\det = r$

πολικές έλλειψης

$$\left.\begin{array}{l} x = 1+2r\cos\varphi \\ y = 2+3r\sin\varphi \end{array}\right\} \det\begin{pmatrix} 2\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi & 3r\cos\varphi \end{pmatrix} = 6r\cos^2\varphi + 6r\sin^2\varphi = 6r$$

$0 \le r \le 1$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \underbrace{x^2}_{(1+2r\cos\varphi)^2} 6r\,dr\,d\varphi = \ldots = 12\pi$$

Εμβόλιμη 2016 Θέμα 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{df}{dx}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\frac{\arctan\sqrt{h^2}}{\sqrt{h^2}}-1}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\frac{\arctan|h|-|h|}{|h|}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\arctan|h|-|h|}{h\cdot|h|}$$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\arctan-h}{h^2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ — ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2015 ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.
(β) Για κάθε $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, με $(u,v) \neq (0,0)$, να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'((0,0);(u,v))$.
(γ) Είναι η f διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$;

ΘΕΜΑ 2ο. (1,5) Να ευρεθούν τα σημεία τοπικών ακροτάτων και τα σάγματα της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = x^2 + 1 - 2x\cos y.$$

ΘΕΜΑ 3ο. (2,5) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

είναι λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και να ευρεθούν τα σημεία του με την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(0,0,0)$.

ΘΕΜΑ 4ο. (1,5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_B (x+y)\,dxdy$, όπου B είναι το τραπέζιο στο $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(3,0)$, $(2,1)$ και $(1,1)$.

ΘΕΜΑ 5ο. (1,5) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \leq 9, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}.$$

ΘΕΜΑ 6ο. (1,5) Αν $R > 0$ και

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2, \quad z \geq R, \quad 0 \leq y \leq x\},$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_K \frac{1}{z^2}\,dxdydz.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑπΣ Θέματα Ιουνίου 2015

Θέμα 1ο

$|xy| \leq |x||y|$ ες
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

α) Νδο f συνεχής στο (0,0)

(Γενικό: f συνεχής στο (x_0, y_0) αν $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\|$)

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|(x-y)(x^2+xy+y^2)|}{x^2+y^2} \underset{ες}{\leq} \frac{|x-y|\,|x^2+xy+y^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{(|x|+|y|)\ldots}{\ldots}$$

$$\leq \frac{(|x|+|y|)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} = |x|+|y|$$

β) Κατευθυνόμενη παράγωγος: Γενικό θέτουμε $F(t) = f((x_0,y_0)+t(u,v)) = f(x_0+tu, y_0+tv)$ Τότε από ορισμό $f'((x_0,y_0),(u,v)) = F'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tu, y_0+tv)}{t}$

$F(t) = f(tu, tv)$
$F'(0) = \lim \frac{f(tu,tv)}{t}$. Όπου x βάζω tu και όπου y tv στην f

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^3u^3 - t^3v^3}{t(t^2u^2+t^2v^2)} = \frac{t^3(u^3-v^3)}{t^3(u^2+v^2)} = \frac{u^3-v^3}{u^2+v^2}$$

γ) Δ.Ο. f διαφορίσιμη στο $(0,0)$

Γενικά Βήμα 1ο Υπολ $\frac{df}{dx}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+t(1,0)) - f(x_0,y_0)}{t}$

$\frac{df}{dy}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+t(0,1)) - f(x_0,y_0)}{t}$

Βήμα 2ο Ορίζω $T = \left(\frac{df}{dx}(x_0,y_0), \frac{df}{dy}(x_0,y_0)\right)$ και $h=(h_1,h_2)\neq(0,0)$

Τότε θέλω $\lim_{h\to(0,0)} \frac{|f((x_0,y_0)+(h_1,h_2)) - f(x_0,y_0) - T\binom{h_1}{h_2}|}{\|h\|}$

$\|h\| = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$

1ο

$\frac{f((0,0)+t(1,0)) - \cancel{f(0,0)}^{0}}{t} = \frac{f(t,0)}{t} = \frac{\frac{t^3}{t^2}}{\frac{t}{1}} = 1$

άρα $\frac{df}{dx}(0,0) = 1$

Αντίστοιχα για $\frac{df}{dy}$: $\frac{f(0,t)}{t} = -1$ άρα $\frac{df}{dy}(0,0) = -1$

2ο $T=(1,-1)$ $\frac{|f((0,0)+(h_1,h_2)) - \cancel{f(0,0)}^{0} - (1,-1)\binom{h_1}{h_2}|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$

$\frac{|f(h_1,h_2) - (h_1-h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{\left|\frac{h_1^3-h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - (h_1-h_2)\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{\left|\frac{h_1^3-h_2^3-(h_1-h_2)(h_1^2+h_2^2)}{h_1^2+h_2^2}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$

$= \frac{|(h_1-h_2)h_1h_2|}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$ Απροσδιοριστία → ψάχνουμε να δούμε αν τα όρια υπάρχει ή ... ότι ... στο 0

$f(0,1) = 0$
$f(1,0) = 0$
$f($

Για $h_1 = 2h_2$ $\left|\frac{2h_2^2}{(5h_2^2)^{3/2}}\right| = \frac{2}{5^{3/2}}$

Για $h = 0$ $f(h_1, h_2) = f(0, h_2) = 0$ Το όριο $\nexists$ άρα η f δεν είναι διαφορίσιμη

Θέμα 2ο

$f(x,y) = x^2 + 1 - 2x\cos y$

Τοπικά ακρότατα

Γενικά **Βήμα 1ο**: Βρίσκουμε τα $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$ και λύνουμε το $\begin{cases} \frac{df}{dx} = 0 \\ \frac{df}{dy} = 0 \end{cases}$ για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία (x_0, y_0)

Βήμα 2ο: Βρίσκουμε τον πίνακα $HF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dxdy} \\ \frac{d^2f}{dxdy} & \frac{d^2f}{dy^2} \end{pmatrix}$ και μετά βρίσκουμε τον πίνακα για κάθε κρίσιμο σημείο δηλ. τον $HF(x_0,y_0)$

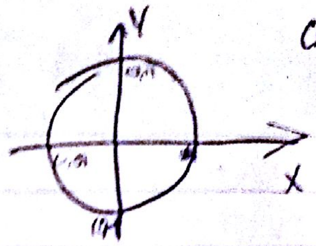
Βήμα 3ο Βρίσκουμε το $\det HF(x_0,y_0)$ $\forall x_0, y_0$

Βήμα 4ο Αν $\det HF(x_0,y_0) > 0$ και $\frac{d^2f}{dxdy} > 0$ έχουμε ελάχιστο

Αν $\det HF(x_0,y_0) > 0$ $L_3 < 0$ -//- μέγιστο

Αν -//- < 0 σαγματικό σημείο

Αν $= 0$ δεν



$(x,y)=(\cos,\sin)$

$f(x)= x^2+1-2x\cos y$

$\frac{df}{dx}=2x-2\cos y$, $\frac{df}{dy}=2x\sin y$

$\begin{cases} 2x=2\cos y \\ 2x\sin y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\cos y \\ x=0 \text{ ή } \sin y=0 \end{cases}$

• Αν $x=0$ $\cos y=0 \to y=\pm\frac{\pi}{2}$ $\cos y=\cos -y$

$(0,\frac{\pi}{2})$, $(0,-\pi/2)$

• Αν $\sin y=0 \to y=0$ ή $y=\pi$ απορρίπτεται

$y=0$: $x=\cos 0=1$

$\boxed{(1,0)}$

$\frac{d^2f}{dxdy}(x,y)=2\sin y$

$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 2\sin y \\ 2\sin y & 2x\cos y \end{pmatrix}$

$\det Hf(x,y)=2\cdot 2x\cos y-4\sin^2 y=4\cos y-4\sin^2 y$

• $\det Hf(0,\frac{\pi}{2})=-4<0$
σάγμα

• $\det Hf(0,-\pi/2)=-4<0$
σάγμα

• $\det Hf(1,0)=4>0$ ελάχιστο

$\frac{d^2f}{dxdy}(1,0)=2>0$

Θέμα 3°:

Γενικά:

Λεία επιφάνεια: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^n : h(x,y\ldots) = c\}$, c σταθερά $\left\{ \frac{dh}{dx} = 0 \atop \frac{dh}{dy} = 0 \right.$

Βρίσκω τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστ.

Αν το κρίσιμο σημείο $(x_0, y_0) \notin$ δηλαδή $h(x_0, y_0 \ldots) \neq c$ τότε S λεία

Πλησιέστερο σημείο: Αν $(x_1, y_1, \ldots)$ το σημείο όπου ψάχνουμε την απόσταση ορίζουμε:

$f(x,y,\ldots) = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + \ldots$ Από Θ Lagrange $\frac{df}{dx} = \lambda \frac{dh}{dx}$

$\frac{df}{dy} = \lambda \frac{dh}{dy}$

$\vdots$

Λύση:

$h(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - z^2$

$\frac{dh}{dx} = 8x$, $\frac{dh}{dy} = 2y$, $\frac{dh}{dz} = -2z$

Άρα κρίσιμο σημείο $(0,0,0)$ $\quad 4 0^2 + 0^2 - 0^2 = 1 \Rightarrow 0 = 1$ άτοπο άρα S λεία

$\frac{df}{dx} = \lambda \frac{dh}{dx}$

$$\begin{cases} \frac{df}{dy} = \lambda \frac{dh}{dy} \\ \frac{df}{dz} = \lambda \frac{dh}{dz} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 8\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ 2z = 2\lambda z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(1-4\lambda) = 0 \\ y(1-\lambda) = 0 \\ z(1+\lambda) = 0 \end{cases}$$

• Αν $\lambda = 0$ $x = y = z = 0$
$h(0,0,0) = 1 \Rightarrow 0 = 1$
άτοπο!
άρα $\lambda \neq 0$

i) Αν $y = z = 0, x \neq 0$ $x = \pm 1/2$

ii) Αν $x = z = 0, y \neq 0$ $y = \pm 1$

iii) Αν $x = y = 0$, $z^2 = -1$ αδύνατο!

Scanned by CamScanner

$f(\pm 1/2, 0, 0) = \frac{1}{4}$ Άρα το πλησιέστερο είναι το $(\pm 1/2, 0, 0)$

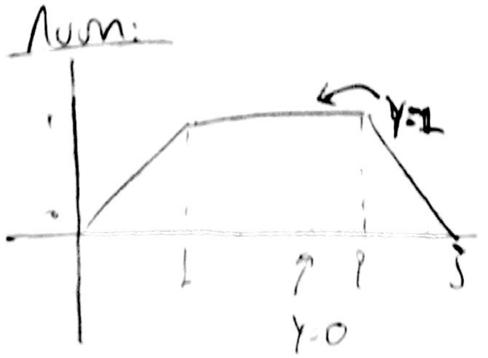
$f(0, \pm 1, 0) = 1$ στο $(0,0,0)$

$f(x,y,z) = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2$

Θέμα 4ο

calculus Vol III pdf [illegible]

Λύση:



$(0,0), (3,0), (2,1), (1,1)$

$(\varepsilon)\ y = \lambda x + \beta$

- $(0,0) \in (\varepsilon)$ $\quad 0 = 0 + \beta \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$
- $(3,0) \in (\varepsilon)$ $\quad 0 = 3\lambda + \beta \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$ $\quad y = 0$

- $(3,0) \in (\varepsilon)$: $0 = 3\lambda + \beta$
  $(2,1) \in (\varepsilon)$: $1 = 2\lambda + \beta$
  $1 = \lambda, \beta = 3$ $\quad \boxed{y = -x + 3}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le y \le 1$ και $y \le x \le 3 - y\}$

- $(0,0)$: $\beta = 0$
  $(1,1)$: $1 = \lambda$ $\Big\}$ $\boxed{y = x}$

$$\int_B (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_y^{3-y} (x+y)\,dx \right) dy = \dots [illegible]$$

Θέμα 5ο

Γενικά:

Πολικές $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ x^2 + y^2 \le a^2\}, a > 0$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$B = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \ 0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ $\quad \det D(r,\varphi) = r$

$$Dg(r,\varphi) = \begin{matrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\varphi} \end{matrix}$$

Κυλινδρικές

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ x^2+y^2 \leq a^2, \ x,y \geq 0, \ 0 \leq z \leq b\} \ a, b > 0$

$x = r\cos\varphi$ $\quad$ $\det = r$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$

$g(B) = \{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3, \ 0 \leq r \leq a, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ 0 \leq z \leq b\}$

Σφαιρικές

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ x^2+y^2+z^2 \leq a^2, \ x,y,z \geq 0$

$x = \rho\cos\varphi\sin\theta$
$y = \rho\sin\varphi\cos\theta$ $\quad$ $\det = r^2\sin\theta$
$z = \rho\cos\theta$

$g(B) = \{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ 0 \leq r \leq a, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}, \ a \geq 0$

Λύση

$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+z \leq 9, \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

$K = \{0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2, \ x,y \geq 0\}$

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z$

$0 \le z \le 9 - (r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)$ $\overset{\text{Ταυτότητα}}{\iff}$

$\boxed{0 \le z \le 9 - r^2}$

$0 \le 9 - r^2 \Rightarrow r^2 \le 9 \Rightarrow \boxed{0 \le r \le 3}$

$x = 0 \Rightarrow r\cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$y = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$\Big\} \; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3}\int_0^{9-r^2} 1\, r\, dz\, dr\, d\varphi = \frac{81\pi}{4}$$

Θέμα 6ο

$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4R^2,\ z \ge R,\ 0 \le y \le x\}$, $\int_K \frac{1}{z^2}\,dx\,dy\,dz$

Σφαιρικές

$x = \rho\cos\varphi\sin\theta$

$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$

$z = \rho\cos\theta$

$\rho^2 \cdot \cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta \le 4R^2$

$\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta \le 4R^2 \iff \rho^2 \le 4R^2 \iff$, $z \ge R \Rightarrow \rho\cos\theta \ge R$

άρα $\boxed{\frac{R}{\cos\theta} \le \rho \le 2R}$

$0 \le \rho\sin\theta \le \rho\cos\varphi\sin\theta$

$\rho\sin\varphi\sin\theta = \rho\cos\varphi\sin\theta$

$\sin\varphi = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$0 = \rho\sin\varphi\sin\theta \Rightarrow \sin\varphi\sin\theta = 0$

$\left.\begin{array}{l}\sin\varphi = 0\\ \sin\theta = 0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\varphi = 0\\ \theta = 0\end{array}$

$(\cancel{z = R \Rightarrow \rho\cos\theta = R})$

Άρα $\boxed{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}}$

Scanned by CamScanner

$0 \leq \theta \leq \theta_0$

$z \geq R$ για $\rho = 2R$ έχουμε $\rho\cos\theta = R \to 2R\cos\theta = R \to \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$

Άρα $\boxed{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}}$ $\qquad \theta_0 = \frac{\pi}{3}$

ορίζουσα μην την ξεχνάς ⚠

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{R}{\cos\theta}}^{2R} \frac{\rho^2 \sin\theta}{\rho^2\cos\theta} \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \frac{\pi R}{2} \qquad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} =$$

Έλλειψη $\qquad$ ~~[illegible]~~

$\to$ Πέρναμε Πολικές

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1$

$x = 1 + r\cos\theta$ $\qquad$ Βρίσκω την ορίζουσα

$y = 2 + r\sin\theta$