ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘ. ΗΥ-215
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2
ΧΡΗΣΤΟΣ ΠΑΠΑΣΤΑΜΟΣ csd 4569

Άσκηση 1

(a) i) Άρτιο: $x(t)=x(-t) \Rightarrow -4t=-4(-t) \Rightarrow -4t=4t$ Δεν ισχύει

Περιττό: $x(t)=-x(-t) \Rightarrow -4t=-(-4(-t)) \Rightarrow -4t=-4t$ Ισχύει

ii) Άρτιο: $x(t)=x(-t) \Rightarrow e^{-|t|}=e^{-|-t|} \Rightarrow e^{-|t|}=e^{-|t|}$ Ισχύει

Περιττό: $x(t)=-x(-t) \Rightarrow e^{-|t|}=-e^{-|-t|} \Rightarrow e^{-|t|}=-e^{-|t|}$ Δεν ισχύει

iii) Άρτιο: $x(t)=x(-t) \Rightarrow 5\cos(3t)=5\cos(-3t) \Rightarrow 5\cos(3t)=5\cos(3t)$ Ισχύει

Περιττό: $x(t)=-x(-t) \Rightarrow 5\cos(3t)=-5\cos(-3t) \Rightarrow 5\cos(3t)=-5\cos(3t)$ Δεν ισχύει

iv) Άρτιο: $x(t)=x(-t) \Rightarrow \sin(3t-\pi/2)=\sin(-3t-\pi/2)$ Δεν ισχύει

Περιττό: $x(t)=-x(-t) \Rightarrow \sin(3t-\pi/2)=-\sin(-3t-\pi/2)$ Δεν ισχύει

v) Άρτιο: $x(t)=x(-t) \Rightarrow U(t)=U(-t) \Rightarrow \begin{matrix} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0, & -t<0 \\ 1, & -t>0 \end{matrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0, & t>0 \\ 1, & t<0 \end{matrix}$

Δεν ισχύει

Περιττό: $x(t)=-x(-t) \Rightarrow U(t)=-U(-t) \Rightarrow \begin{matrix} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0, & -t<0 \\ -1, & -t>0 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{matrix}$

Δεν ισχύει

β) i) Ξέρουμε ότι το ολοκλήρωμα από $-\infty$ στο ∞ μιας περιττής συνάρτησης κάνει 0, οπότε $\int_{-T}^{T} x_{\pi\varepsilon\rho}(t)\,dt = 0$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_{\pi\varepsilon\rho}(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot 0 = 0$$

ii) Ξέρουμε ότι για μια άρτια συνάρτηση ισχύει:
$\int_{-T}^{T} x_{\alpha\rho\tau}(t)\,dt = 2\int_{0}^{T} x_{\alpha\rho\tau}(t)\,dt$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_{\alpha\rho\tau}(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\, 2\int_{0}^{T} \frac{1}{2}(x(t)+x(-t))\,dt =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} x(t)+x(-t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} x(t)\,dt + \int_{0}^{T} x(-t)\,dt =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} x(t) + \int_{-T}^{0} x(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} x(t)\,dt + \int_{-T}^{0} x(t)\,dt$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt = M_x$$

iii) $x_{\pi\varepsilon\rho}(0) = \frac{1}{2}(x(0)-x(-0)) = \frac{1}{2}(x(0)-x(0)) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$

$x_{\alpha\rho\tau}(0) = \frac{1}{2}(x(0)+x(0)) = \frac{1}{2}(2x(0)) = x(0)$

Ασκηση 2

α) Επειδη ειναι τετραγωνικος παλμος πιθανοτητα ειναι σημα ενεργειας

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} x^2(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} 2^2\,dt = 4\Big|_{-1/2}^{1/2} = 4$$

β) Επειδη ειναι τριγωνικος παλμος πιθανοτητα ειναι σημα ισχυος...

$$x(t) = \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Απο την Θεωρια ξερουμε : $P_x = \sum \frac{A_i^2}{2} = \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

γ) Ειναι σημα ισχυος

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{0} |x(t)|^2 dt + \int_{0}^{10} |x(t)|^2 dt + \int_{10}^{T} |x(t)|^2 dt\right)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{0} 1^2 dt + \int_{0}^{10} 0\,dt + \int_{10}^{T} 1^2 dt\right)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(t\Big|_{-T}^{0} + t\Big|_{10}^{T}\right)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(T + T - 10\right)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{2T-10}{2T} = \lim 1 - \frac{5}{T} = 1$$

δ) Θα δοκιμασουμε αν ειναι σημα ισχυος διοτι το σημα εχει απειρη διαρκεια

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 3^2 dt$$

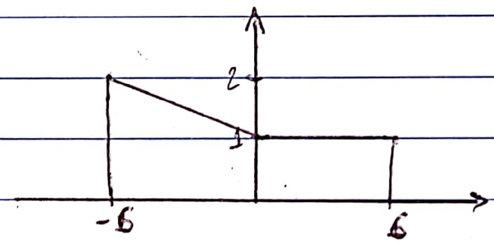
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\, 9x \Big|_{-T}^{T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}(9T+9T)$$

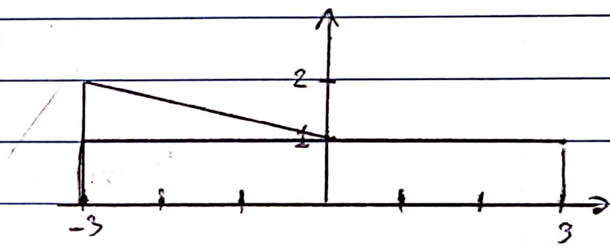
$$= \lim_{T\to\infty} 9 = 9$$

Ασκηση 3

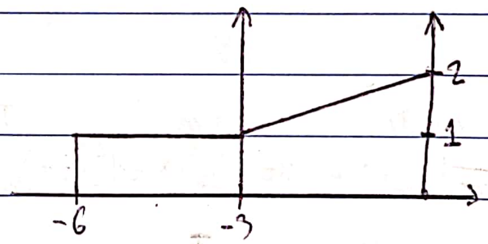
α)



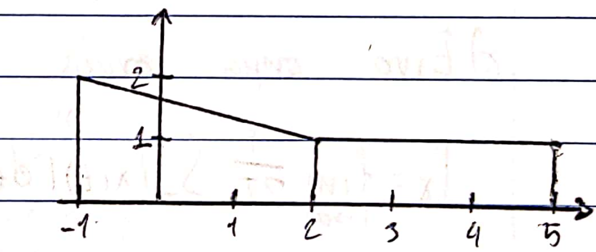
β)



γ)



δ)



Ασκηση 4

α) $(\sqrt{t}-2)\delta(t-8) = \sqrt{t}-2\big|_{t=8}\,\delta(t-8) = (\sqrt{8}-2)\cdot\delta(t-8)$

β) $\cos(\pi t)\delta(t-1) = \cos(\pi t)\big|_{t=1}\,\delta(t-1) = \cos(\pi)\,\delta(t-1) = -\delta(t-1)$

γ) $(x-t)\cdot\delta(t-1) = x-t\big|_{t=1}\cdot\delta(t-1) = (x-1)\delta(t-1)$

δ) $\left(\frac{d}{dt}\frac{t^2}{2}\right)\delta(t+1) = t\,\delta(t+1) = t\big|_{t=-1}\,\delta(t+1) = -\delta(t+1)$

ε) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi t)\,\delta(t-1)\,dt = \cos(2\pi t)\big|_{t=1} = \cos(2\pi) = -1$

στ) $\int_{10}^{+\infty} \sin((t-1)\pi)\,\delta(t-2)\,dt = \sin((t-1)\pi)\big|_{t=2} = \sin((2-1)\pi) = \sin(\pi) = 0$

ζ) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\pi t)\,\delta(t-6)\,dt = \sin(\pi t)\big|_{t=6} = \sin(6\pi) = 0$

η) $\int_{-\infty}^{0} (t-12)\,\delta(t-12)\,dt = 0$

Άσκηση 5

$g(t) = 3\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\mathrm{rect}(t)$

$g'(t) = 3\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\left(u(t+1/2) - u(t-1/2)\right)$

$g'(t) = 3\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\left(u(t+1/2) - u(t-1/2)\right)' + \left(3\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)'(\mathrm{rect}(t))$

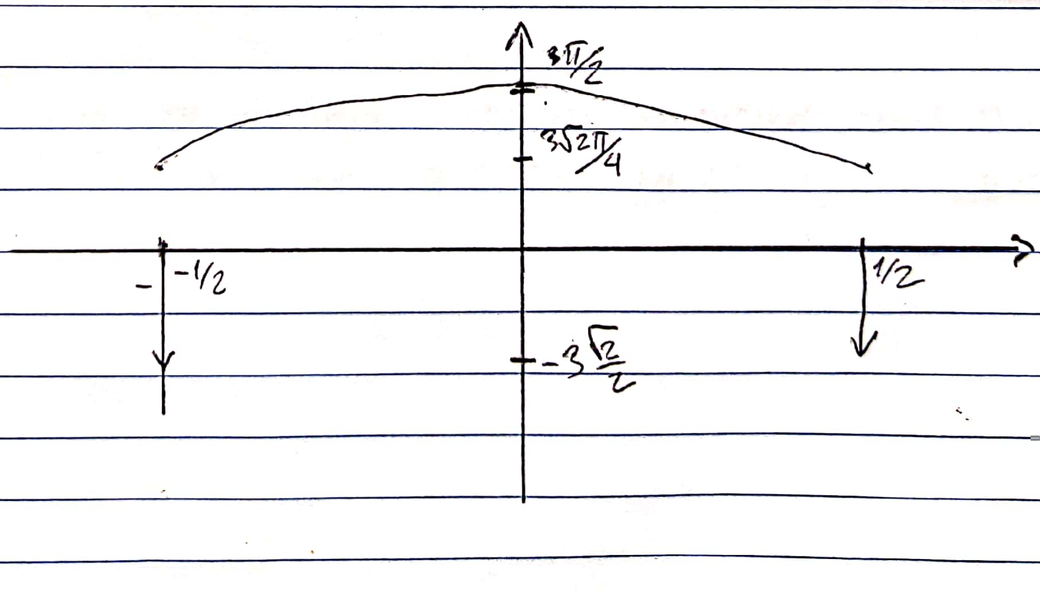
$= 3\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\left(\delta(t+1/2) - \delta(t-1/2)\right) + \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\mathrm{rect}(t)$

$= \left(3\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\delta(t+1/2) - \left(3\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\delta(t-1/2) + \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\mathrm{rect}(t)$

$= 3\sin(-\pi/4)\,\delta(t+1/2) - 3\sin(\pi/4)\,\delta(t-1/2) + \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\mathrm{rect}(t)$

$= -3\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t+1/2) - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t-1/2) + \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\mathrm{rect}(t)$

$= -3\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\delta(t+1/2) + \delta(t-1/2) + \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\mathrm{rect}(t)\right.$



Ασκηση 6

α) Ομογενεια: $x(t) \to y(t) = 3x(3t+3)$

$ax(t) \to y'(t) = 3ax(3t+3) = a \cdot 3x(3t+3) = ax(t)$

Ειναι ομογενες

Αθροιστικοτητα: $x_1(t) \to y_1(t) = 3x_1(3t+3)$

$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = 3x_2(3t+3)$

$x_1(t)+x_2(t) \to y'(t) = 3(x_1(3t+3)+x_2(3t+3)) = 3x_1(3t+3)+3x_2(3t+3)$

$y_1 + y_2$

Αρα ειναι ομογενες

Ειναι αθροιστικο

Χ.Α.: $x(t) \to y(t) = 3x(3t+3)$

Εισοδος: $x(t-t_0) \to y'(t) = 3x(3(t-t_0)+3) = 3x(3t-3t_0+3)$

Εξοδος: $y(t-t_0) \Rightarrow 3x(3(t-t_0)+3) = 3x(3t-3t_0+3)$

Ειναι χρονικα αμεταβλητο

Ευσταθη: $|x(t)| \leq B_x \Rightarrow |3x(3t+3)| < B_x \Rightarrow 3|x(3t+3)| < B_x$

$|x(3t+3)| < \frac{1}{3}$

ειναι ευσταθη

Επειδη το συστημα αποτελει μελοντικες τιμες της εισοδου $(3x+3)$ δεν ειναι αιτιατο και ειναι και δυναμικο β) Ομογένεια: $x(t) \to y(t) = 7x(t) + 6$

$ax(t) \to y'(t) = 7ax(t) + 6 \neq a(\cancel{7x(t)} + 6)$

Δεν είναι ομογενές, οπότε ούτε γραμμικό

Χ.Α. Είσοδος: $x(t-t_0) \Rightarrow y''(t) = 7x(t-t_0) + 6$

Έξοδος: $y(t-t_0) \Rightarrow 7x(t-t_0) + 6$

Είναι Χ.Α.

Ευστάθεια: $x(t) \to y(t) = 7x(t) + 6$

$|x(t)| < B_x \Rightarrow |7x(t) + 6| < B_x \Rightarrow |7x(t)| < -6$

Οπότε το σύστημα είναι ευσταθή

Μπορούμε επίσης να διακρίνουμε ότι το σύστημα δεν αποτελεί μελλοντικές τιμές οπότε είναι αιτιατό και επειδή δεν απαιτεί και προηγούμενες τιμές, είναι δυναμικό

γ) Ομογένεια: $x(t) \to y(t) = e^{tx(t)}$

$ax(t) \to y'(t) = e^{tax(t)} \neq ae^{tx(t)}$

Δεν είναι ομογενές, οπότε ούτε γραμμικό

Χ.Α. Είσοδος $x(t-t_0) \to y''(t) = e^{tax(t-t_0)}$

Έξοδος $\cancel{x}(t-t_0) = e^{(t-t_0)x(t-t_0)}$

Δεν είναι Χ.Α.

Ευστάθεια: Επειδή η συνάρτηση είναι λογαριθμική δεν είναι φραγμένη, οπότε δεν είναι ευσταθή

Είναι επίσης εμφανές ότι δεν χρειάζεται μελλοντικές ή προηγούμενες τιμές οπότε είναι ευσταθή και στατικό