ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3
ΧΡΗΣΤΟΣ ΠΑΠΑΣΤΑΜΟΣ csd4569

Ασκηση 1

α) Το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του συστηματος ειναι

$\lambda^2+7\lambda+10=$ το οποιο εχει λυσεις $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-5$

οποτε εχουμε:

$y_{zi}(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-5t}$ και $y'_{zi}(t)=-2c_1e^{-2t}-5c_2e^{-5t}$

$y_{zi}(0)=c_1\cancel{e^{-2\cdot 0}}+c_2\cancel{e^{-5\cdot 0}}$ $\quad y'_{zi}(0)=-2c_1e^0-5c_2e^0$

$y_{zi}(0)=c_1+c_2$ $\quad -1=-2c_1-5c_2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$c_1+c_2=0$ $\quad 2c_1-5c_1=1$

$c_1=-c_2$ (1) $\quad -3c_1=1$

$c_1=-1/3$

$\downarrow (1)$

$c_2=1/3$

οποτε εχουμε: $y_{zi}(t)=\left(-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-5t}\right)u(t)$

β) $\frac{d^2}{dt}h_0(t)+7\frac{d}{dt}h_0(t)+10h_0(t)=\delta(t)=0$

Το χαρακτηριστικο πολυωνυμο της κρουστικης ειναι

$\lambda^2+7\lambda+10=0$ με λυσεις: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-5$

οποτε εχουμε:

$h_0(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-5t}$ και $h'_0(t)=-2c_1e^{-2t}-5c_2e^{-5t}$

$h_0(0)=c_1e^0+c_2e^0$ $\quad h'_0(0)=-2c_1e^0-5c_2e^0$

$-1=c_1+c_2$ $\quad 1=-2c_1-5c_2$

$c_1=-c_2$ $\quad 2c_1-5c_1=-1$

$-3c_1=-1$

$c_1=1/3 \overset{(2)}{\rightarrow} c_2=-1/3$

οποτε: $h_0(t)=\left(\frac{1}{3}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{-5t}\right)u(t)$

$h'_0(t)=\left(-\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{5}{3}e^{-5t}\right)\delta(t)$

$$h(t) = h_0(t) - h_0'(t) = \left(\tfrac{1}{3}e^{-2t} - \tfrac{1}{3}e^{-5t}\right)u(t) - \left(\left(\tfrac{1}{3}e^{-2t}\right)' + \left(-\tfrac{1}{3}e^{-5t}\right)'\right)u(t)'$$

$$= \tfrac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \tfrac{1}{3}e^{-5t}u(t) - \tfrac{1}{3}e^{-2t}\delta(t) + \tfrac{2}{3}e^{-2t}u(t) + \tfrac{1}{3}e^{-5t}\delta(t) - \tfrac{5}{3}e^{-5t}u(t)$$

$$= \tfrac{1}{3}e^{-2t}u(t) + \tfrac{2}{3}e^{-2t}u(t) - \tfrac{1}{3}e^{-5t}u(t) - \tfrac{5}{3}e^{-5t}u(t) - \cancel{\tfrac{1}{3}\delta(t)} + \cancel{\tfrac{1}{3}\delta(t)}$$

$$= 1e^{-2t}u(t) - 2e^{-5t}u(t)$$

$$= \left(e^{-2t} - 2e^{-5t}\right)u(t)$$

γ) $x(t) = e^{-t}u(t)$ $\qquad$ $h(t) = \left(e^{-2t} - 2e^{-5t}\right)u(t)$

$$C_{xh} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau-t}\cdot\left(e^{-2\tau} - 2e^{-5\tau}\right)u(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t e^{\tau}\cdot e^{-t}\cdot e^{-2\tau} - 2e^{-5\tau}\cdot \cancelto{1}{u(t-\tau)}\,\cancelto{1}{u(\tau)}\,d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\cdot e^{-2\tau} - 2e^{-5\tau}\,d\tau$$

$$= e^{-t}\left(-e^{-\tau} + \frac{e^{-4\tau}}{2}\Big|_0^t\right) = e^{-t}\left(-e^{-t} + e^{-4t}/2 + 1 - 1/2\right)$$

$$= \left(-e^{-2t} + e^{-5t}/2 + e^{-t}/2\right)u(t)$$

δ) $$y_{tot}(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \left(-\tfrac{1}{3}e^{-2t} + \tfrac{1}{3}e^{-5t}\right)u(t) + \left(-e^{-2t} + e^{-5t}/2 + e^{-t}/2\right)u(t)$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}e^{-2t} + \tfrac{1}{3}e^{-5t} - e^{-2t} + e^{-5t}/2 + e^{-t}/2\right)u(t)$$

$$= \left(-\tfrac{4}{3}e^{-2t} + \tfrac{5}{6}e^{-5t} + e^{-t}/2\right)u(t)$$

Άσκηση 2

α) $x(t) = u(1-t) \qquad y(t) = e^{-t}\, u(t-1)$

$x(t-\tau) = u(1+\tau-t)$

$$u(1+\tau-t) = \begin{cases} 0 & 1+\tau-t<0 \Rightarrow \tau<t-1 \\ 1 & \tau>t-1 \end{cases} \qquad u(t-1) = \begin{cases} 0 & t-1<0 \Rightarrow t<1 \\ 1 & t>1 \end{cases}$$

Για $t>2$:

$$C_{xy} = \int_1^{\infty} y(\tau)\cdot x(t-\tau)\,d\tau = \int_1^{\infty} e^{-\tau}\cdot 1\, d\tau = -e^{-\tau}\Big|_1^{\infty} = 0 + e^{-1} = 1/e$$

Για $t<2$:

$$C_{xy} = \int_{t+1}^{\infty} y(\tau)\, x(t-\tau)\,d\tau = \int_{t+1}^{\infty} e^{-\tau}\,d\tau = -e^{-\tau}\Big|_{t-1}^{\infty} = 0 + e^{-t+1}$$

$$C_{xy} = 1/e\; u(2-t) + e^{-t+1}\, u(t-2)$$

β) $x(t) = e^{-t} u(t-1)$ $\qquad$ $y(t) = 2u(t+1)$

$y(t-\tau) = 2u(t-\tau-1)$

$$u(\tau-1) = \begin{cases} 0 & \tau-1<0 \Rightarrow \tau<1 \\ 1 & \tau \geq 1 \end{cases} \qquad u(t-\tau-1) \begin{cases} 0 & t-\tau-1<0 \Rightarrow \tau>t-1 \\ 1 & \tau<t-1 \end{cases}$$

$$C_{xy} = \int_1^{t-1} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_1^{t-1} 2e^{-\tau} d\tau = 2\int_1^{t-1} e^{-t} d\tau$$

$$= 2 \cdot \left(-e^{-\tau}\Big|_1^{t-1}\right) = 2\left(-e^{-t+1} + e^{-1}\right) = 2e^{-1} - 2e^{1-t} = 2\left(1/e - e^{-(t-1)}\right) u(t-2)$$

Άσκηση 3

$$x(t) = 2\sin(2\pi t) - \cos(4\pi t)$$
$$= \cancel{2 \cdot 1/2}\,(1 - \cos(2\pi \cdot 2t)) - \cos(4\pi t)$$
$$= 1 - \cos(4\pi t) - \cos(4\pi t)$$
$$= 1 - 2\cos(4\pi t)$$
$$= 1 - \left(e^{j2\pi} \cdot e^{j2\pi 2t} + e^{-j2\pi} \cdot e^{-j2\pi 2t}\right)$$

Η φαση μπορει να ειναι 0 ή 2π

Η συχνοτητα ειναι $f_0 = 2\,Hz \rightarrow T_0 = \frac{1}{f_0} = 1/2 = 0.5\,sec$