75 indução

(1) Estrutura indutiva: Sequência de dias a começar hoje.

Afirmação a provar (hip. ind): $Q(n)$ = Está sol no dia n

Caso base: Hoje está sol.

Caso indutivo: por hipótese está sol no dia n

Por 1., está sol no dia $n+1$

Logo, $Q(n+1)$ verifica-se.

(2) Estrutura indutiva: $n \geq 45, n \in \mathbb{N}$

Afirmação a provar: $Q(n)$ = é possível satisfazer qualquer encomenda de n envelopes, com $n \geq 45$

Caso base: $n = 45$, é possível, por exemplo 9 pacotes de 5 envelopes.

Caso indutivo: $n = 5a + 12b$, queremos mostrar que existem c e d, tal que:

$$n+1 = 5c + 12d$$

$$1 = 5a + 12b \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \wedge b = -2 \\ a = -7 \wedge b = 3 \end{cases}$$

Uma encomenda n ou tem 2 pacotes de 12 ou não.

Se tiver 2 pacotes de 12, retira-se estes e coloca-se 5 pacotes de 5 envelopes

Se não tiver 2 pacotes de 12, tem pelo menos 7 pacotes de 5 $(1 \times 12 + 6 \times 5 = 42)$ ↳ não chega.

portanto retira-se 7 de 5 e coloca-se 3 pacotes de 12.

Em qualquer dos casos, $Q(n+1)$ verifica-se.

(3) Estrutura indutiva: $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

Hipótese indutiva: $2^{2n} - 1$ é divisível por 3 $(2^{2n} \equiv 1 \pmod 3)$

Caso base: $n = 1$, $2^2 - 1 = 3$, que é divisível por 3.

Caso indutivo: $2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n} \times 2^2 - 1 = 4^n \times 4 - 1 = (4^n \times 4 - 4) + 3 =$

$= 4(4^n - 1) + 3 = 4(2^{2n} - 1) + 3$, logo, é divisível por 3, pois qualquer número divisível por 3 quando multiplicado por 4 é divisível por 3, e se somado 3, continua a sê-lo.

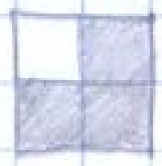
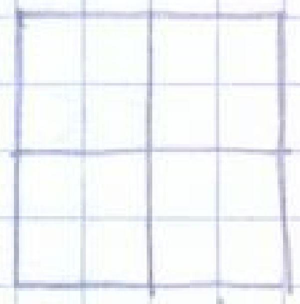
ou

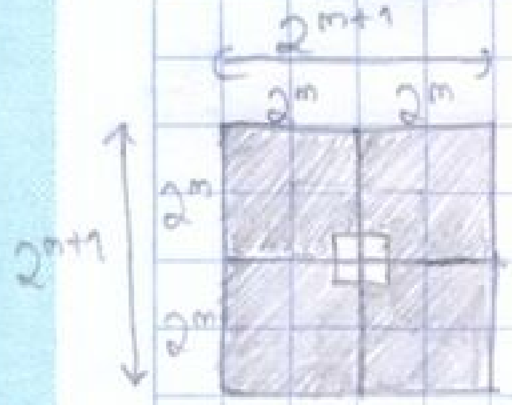
$$2^{2(n+1)} \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow \overset{1}{\overset{\equiv}{2^{2n}}} \times 2^2 \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow 4 \equiv 1 \pmod 3$$

Ora, isto é verdadeiro.

④ Estrutura indutiva: tabuleiros de lado 2^m

Afirmação a provar: $Q(m)$ = "É possível cobrir todas as casas de um tabuleiro $2^m \times 2^m$ usando a peça ⅃."

Caso base:  $m=1$  $m=2$ tem 4 tabuleiros de $m=1$



Preenchendo todos os quadrados possíveis dos tabuleiros $2^m \times 2^m$, sobra um quadrado por preencher. No final dos 4 tabuleiros, haverão 4 quadrados simples por preencher, que poderão ser preenchidos por uma única peça ⅃, sobrando apenas um quadrado.

⑤ Estrutura indutiva: Número de aplicações das regras 1 e 2.

Caso base: $m=1$, verifica-se pela regra 1.

Caso indutivo: pal de ordem $2(m+1)-1$

Hipótese indutiva: $Q(m)$: Um pal de comprimento $2m-1$ é palíndromo.

Um pal de ordem $2(m+1)-1 = 2m-1+2$ vem de um pal $2m-1$, acrescentando uma letra antes e depois.

Pela regra 2, é palíndromo com a mesma letra antes e depois.

—//—

$\alpha\alpha$ é um palíndromo que não é pal (o converso não é verdadeiro).

1. Para cada letra $\lambda \in \lambda\lambda$ é um pal.

⑥ Estrutura indutiva: $m \in \mathbb{N}$

Hipótese de indução: Supondo que $1+3+5+\ldots+(2m-1) = m^2$

Queremos provar que $1+3+5+\ldots+(2m+1) = (m+1)^2$

Caso base: $m=1$: $2\times 1 - 1 = 1 = 1^2$ ✓

$1+3+5+\ldots+(2m+1) = (m+1)^2 \Leftrightarrow \overbrace{1+3+5+\ldots+(2m-1)}^{\text{pela hipótese de indução}} + (2m+1) = (m+1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2+2m+1 = (m+1)^2 \Leftrightarrow (m+1)^2 = (m+1)^2$. Verdadeiro, logo é válida para $m+1$.

⑦ Estrutura indutiva: $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$

Hipótese de indução: Supondo que $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}$

Caso base: $m=2$ $\quad 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

Queremos provar que $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{m+1}\right) = \frac{1}{m+1}$

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{m+1}\right) = \underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{m}\right)}\left(1-\frac{1}{m+1}\right) = \frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m+1}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2+m} =$

$= \frac{m+1-1}{m^2+m} = \frac{m}{m^2+m} = \frac{1}{m+1}$ c.q.p.