58 funções

1) a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ $\quad rng_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ $\quad D_f =]-\infty, 1[$ $\quad rng_f =]0, +\infty[$

2) a) Para ser uma relação de equivalência, tem de ser:

- reflexiva
- simétrica
- transitiva

$f(5) = f(5)$, logo $f \sim f \rightarrow$ reflexiva

$f(5) = g(5) \Leftrightarrow g(5) = f(5)$ Logo, $g \sim f$, é simétrica.

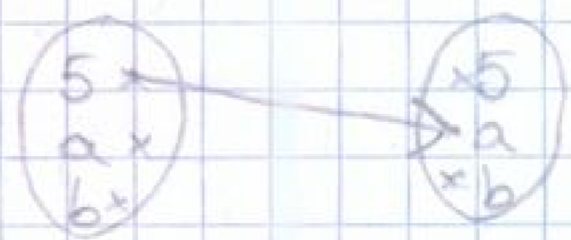
Se $f \sim g$ e $g \sim h$

$f(5) = g(5)$ e $g(5) = h(5)$, logo $f(5) = h(5)$ $f \sim h \rightarrow$ transitiva.

Assim, $\sim$ é uma relação de equivalência em A.

b) $f = \{(5,a),(a,b),(b,b)\}$ $\overline{f} = \{g \in A : g(5) = a\}$

3 hipóteses 3 hipóteses



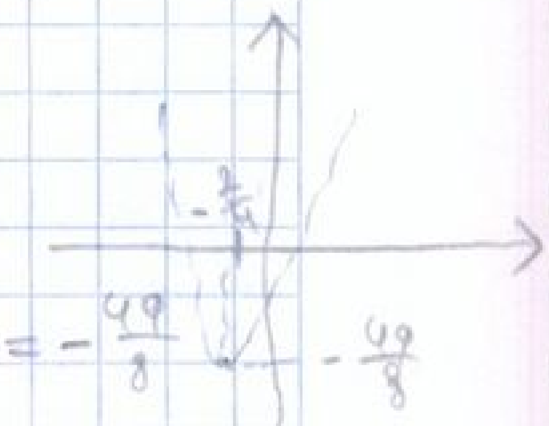
$3 \times 3 = 9$ R: 9 elementos.

$\overline{f} = \{(5,a),(a,b),$

3) As funções de X para Y podem ser injetivas, uma vez que o nº de elementos de Y é maior do que o de X.

(...)

4) $g'(x) = 4x + 7$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}$



$g\left(-\frac{7}{4}\right) = 2 \times \frac{49}{16} - \frac{49}{4} = -2 \times \frac{49}{16} = -\frac{49}{8}$

g não é sobrejetiva pois o contradomínio não corresponde ao conjunto de chegada, visto que a função não assume valores abaixo de $-\frac{49}{8}$ (inteiros). exemplo: $-1000, -2018$, mg $f \neq \mathbb{Z}$.

Sejam $x_1 \neq x_2$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

Supondo $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow 2x_1^2 + 7x_1 = 2x_2^2 + 7x_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x_1^2 - x_2^2) = 7(x_2 - x_1) \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 7(x_2 - x_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 7(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(2(x_1 + x_2) + 7) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \vee \boxed{x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}} \rightarrow$ não é possível em $\mathbb{Z}$.

Logo, $x_1 = x_2$, pelo que g é injetiva.

5) a) Sejam $x_1 \neq x_2$, com $x_1, x_2 \in A$

Supor $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{4x_1}{2x_1 - 1} = \frac{4x_2}{2x_2 - 1} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{2x_1 - 1}{2x_2 - 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x_2} = 2 - \frac{1}{x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ Logo f é injetiva.

b) $\text{rng}_f = \mathbb{R}$ Como rng_f = conjunto de chegada $= \mathbb{R}$, a função é sobrejetiva. Como é injetiva e sobrejetiva, é bijetiva, pelo que possui inversa.

c) $x = \frac{4y}{2y-1} \Leftrightarrow (2y-1)x = 4y \Leftrightarrow 2yx - x = 4y \Leftrightarrow 4y - 2yx = -x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(4-2x) = -x \Leftrightarrow y = -\frac{x}{4-2x} \Leftrightarrow y = \frac{x}{2(x-2)}$ $\quad f^{-1}(x) = \frac{x}{2(x-2)}$

$D_{f^{-1}(x)} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $\quad \text{rng}\, f^{-1}(x) = D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

6 a) $f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g$

$f \circ g = \{(1,1),(2,4),(3,3),(4,2)\}$

$f^{-1} \circ g^{-1} = \{(1,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$

$f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g = \{(1,1),(2,4),(3,2),(4,3)\}$

b) $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f$

$g \circ f = \{(1,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$

$f^{-1} \circ g^{-1} = \{(1,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$

$f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} = I_A$ (identidade)

7 a) $f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{x+1}$

$g \circ f = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{x}{x+1}} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

b) $(f \circ g)^{-1} = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-1}$ $\quad x = \frac{1}{y+1} \Leftrightarrow y+1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} - 1$

$f^{-1} = -\frac{x}{x-1}$

$g^{-1} = \frac{1}{x}$

$x = \frac{y}{y+1} \Leftrightarrow yx + x = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(x-1) = -x \Leftrightarrow y = -\frac{x}{x-1}$

$x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$

$f^{-1} \circ g^{-1} = f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} =$

$= -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1-x}{x}} = -\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$

$g^{-1} \circ f^{-1} = g^{-1}\left(-\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{-\frac{x}{x-1}} = -\frac{x-1}{x}$

Logo $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ $= -1 + \frac{1}{x}$

8) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ $\quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots\}$$

Se A e B são enumeráveis, então $|A| = |B|$, e como $A \times B$ resulta da combinação entre os elementos de A e de B, então $|A \times B| = |A| \times |B|$, pelo que $A \times B$ também é enumerável.

9) $y = 2^{x-1} + 3$ $\quad$ função inversa: $x = 2^{y-1} + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{y-1} = x - 3 \Leftrightarrow y - 1 = \log_2(x-3) \Leftrightarrow y = \log_2(x-3) + 1$

$x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ $\quad D_g = D'_{g^{-1}} = \mathbb{R}$ $\quad rng\, g = D_{g^{-1}} =]3, +\infty[$

Uma vez que o conjunto de chegada de g é igual ao seu contradomínio ($\mathbb{R}$), conclui-se que a função é sobrejetiva.

Assumindo $g(x_1) = g(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$2^{x_1-1} + 3 = 2^{x_2-1} + 3 \Leftrightarrow 2^{x_1-1} = 2^{x_2-1} \Leftrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Logo, $g(x_1) = g(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$, pelo que a função g é injetiva.

10) Podem-se definir 5^{21} funções. Nenhuma delas é injetiva, pois todos os alunos têm que ter nota e só há 5 notas (menos que os alunos)