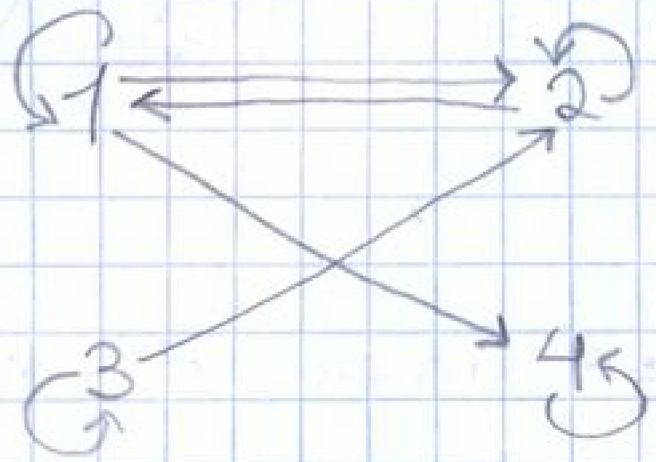
53 relações

① a) diagrama:



matriz:

	1	2	3	4
1	X	X		X
2	X	X		
3		X	X	
4				X

b) R é reflexiva ($\forall a, aRa$)

R não é simétrica ($\forall a, aRb \Rightarrow bRa$)

R não é antissimétrica ($\forall a,b; aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$)

R não é transitiva ($\forall a,b, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$)

c) reflexiva: para cada elemento do diagrama, existe uma seta que começa e termina nele mesmo. Na matriz, a diagonal que começa no canto superior direito e termina no canto inferior esquerdo está totalmente preenchida.

não simétrica: existe pelo menos um elemento do qual parte uma seta que termina noutro elemento, em que deste outro não parte nenhuma seta que termine no primeiro. Na matriz, a tabela não está igualmente distribuída dos dois lados da diagonal. (ex: $(3,2) \in R$ mas $(2,3)$ não)

não antissimétrica: existe pelo menos um elemento que é simétrico de outro, logo, R não é antissimétrica. (ex: $(2,1) \in R$ e $(1,2) \in R$).

não transitiva: existe pelo menos um elemento em que a condição $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ não acontece (ex: $3R2$ e $2R1$ mas $3R1 \notin R$)

②

A	1	2	3	4	5	...
1	X					
2	X	X				
3	X	X	X			
4	X	X	X	X		
5	X	X	X	X	X	
...						

M	1	2	3	4	5	...
1	X					
2	X	X				
3	X	X	X			
4	X	X	X	X		
5	X	X	X	X	X	
...						

$(x,y) \in B \rightarrow (x,y) \in A$

Logo, $B \subseteq A$. (B é subconjunto de A).

3 a) S é antissimétrica se respeitar a condição $\forall a,b,\ aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

Os elementos $((1,0),(0,1)), ((0,1),(1,0))$ são ambos pertencentes a esta relação.

Ora, verifica-se $(1,0)S(0,1) \wedge (0,1)S(1,0)$, mas $(1,0) \neq (0,1)$

Logo, S não é antissimétrica.

b) S é reflexiva se verificar a condição $\forall a,\ aSa$

Ora, $x^2+y^2 = x^2+y^2$, logo $(x,y)S(x,y)$, pelo que S é reflexiva.

S é simétrica se se verificar a condição $\forall a,b,\ aSb \Rightarrow bSa$

Ora, se $x^2+y^2 = u^2+v^2$, então $u^2+v^2 = x^2+y^2$, pelo que S é simétrica.

S é transitiva se se verificar a condição $\forall a,b,\ aSb \wedge bSc \Rightarrow aSc$.

Ora, se $x^2+y^2 = u^2+v^2$ e $u^2+v^2 = w^2+z^2$, então $x^2+y^2 = w^2+z^2$, isto é, $(x,y)S(u,v) \wedge (u,v)S(w,z) \Rightarrow (x,y)S(w,z)$, pelo que S é transitiva.

Como S é reflexiva, simétrica e transitiva, S é uma relação de equivalência.

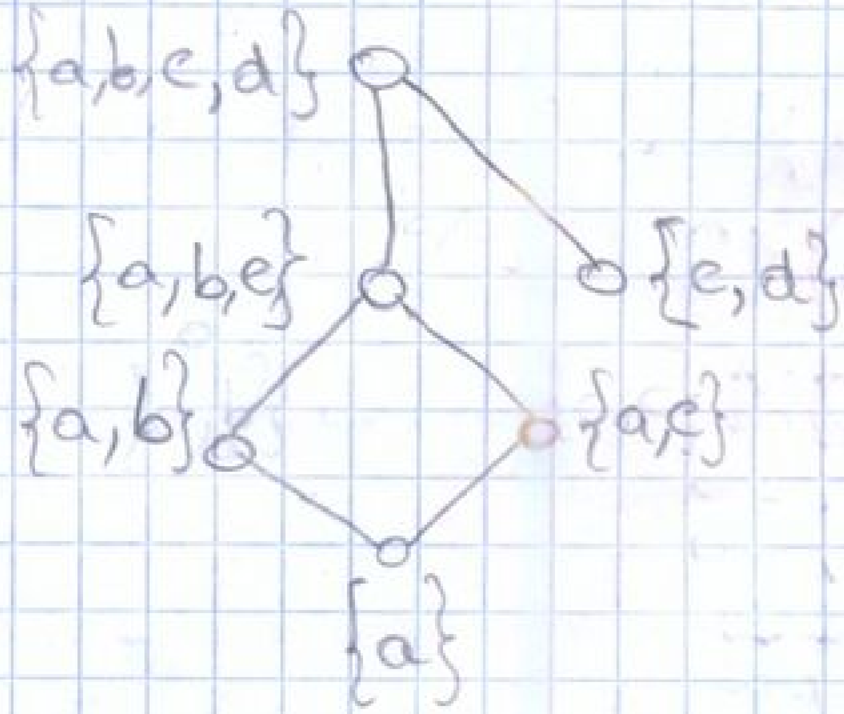
$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = a^2+b^2 = r^2\}$

R: A classe de equivalência de (a,b) é a circunferência de raio $= \sqrt{a^2+b^2}$ e de centro na origem.

4 $\mathcal{P}(S) = \{P_{porto}, P_{lisboa}, P_{açores}, P_{madeira}, etc\}$

A relação S define uma relação em P e o número de classes é o número de distritos (20).

5 a) $\{a,b,c,d\}$



b) $\{a,b,c,d\}$

c) Não existe mínimo.

d) $\{a\}$ e $\{c,d\}$

e) $\{a,b,c\}$

f) Não existe ínfimo.

g) $\{a\}$ $\wedge \to$ ínfimo

h) $\{a,b,c,d\}$ $\vee \to$ supremo.

6 a) $(B^n, \preccurlyeq)$ só constitui um conjunto parcialmente ordenado se a relação binária for uma relação de ordem parcial. Para isso, tem de ser reflexiva, antissimétrica e transitiva.

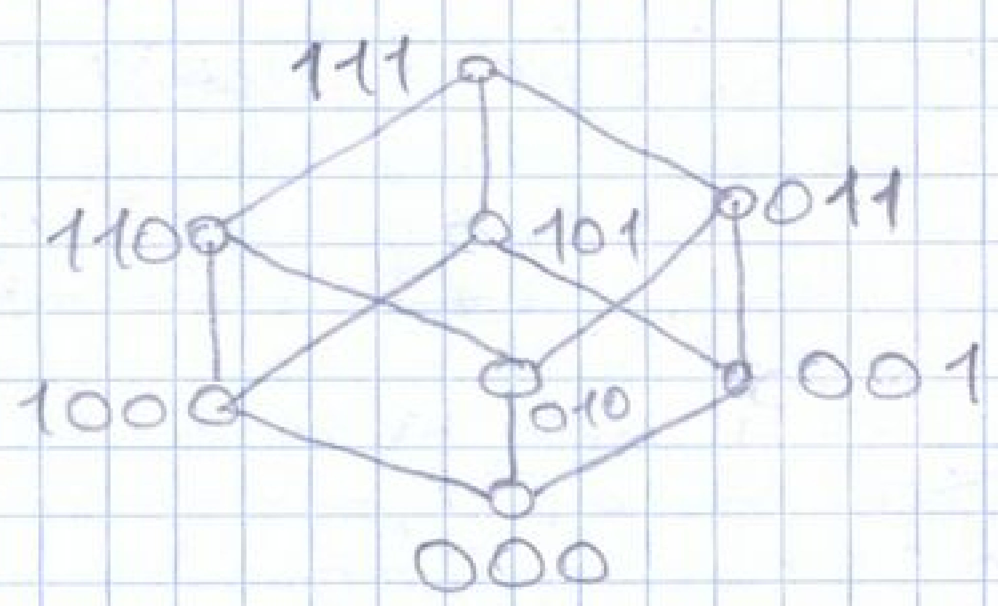
Ora, esta relação é reflexiva se $\forall a, a \preccurlyeq a$, e verifica-se que, para todo o $a \in B^n$, $a_i \leq a_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Logo, é reflexiva.

Ora, esta relação é antissimétrica se $\forall a, b,\ a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a \Rightarrow b = a$. Assim, se $a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a$, então para cada i, $a_i \leq b_i$ e $b_i \leq a_i$, pelo que $a_i = b_i$. Logo, $a = b$, pelo que a relação é antissimétrica.

Ora, esta relação é transitiva se $\forall a, b, c,\ a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$. Assim, se $a \preccurlyeq b$ e $b \preccurlyeq c$, então, para cada i, $a_i \leq b_i$ e $b_i \leq c_i$, pelo que $a_i \leq c_i$, logo $a \preccurlyeq c$, portanto, a relação é transitiva.

Assim, esta relação é de ordem parcial, pelo que se conclui que $(B^n, \preccurlyeq)$ é um c.p.o.

b)



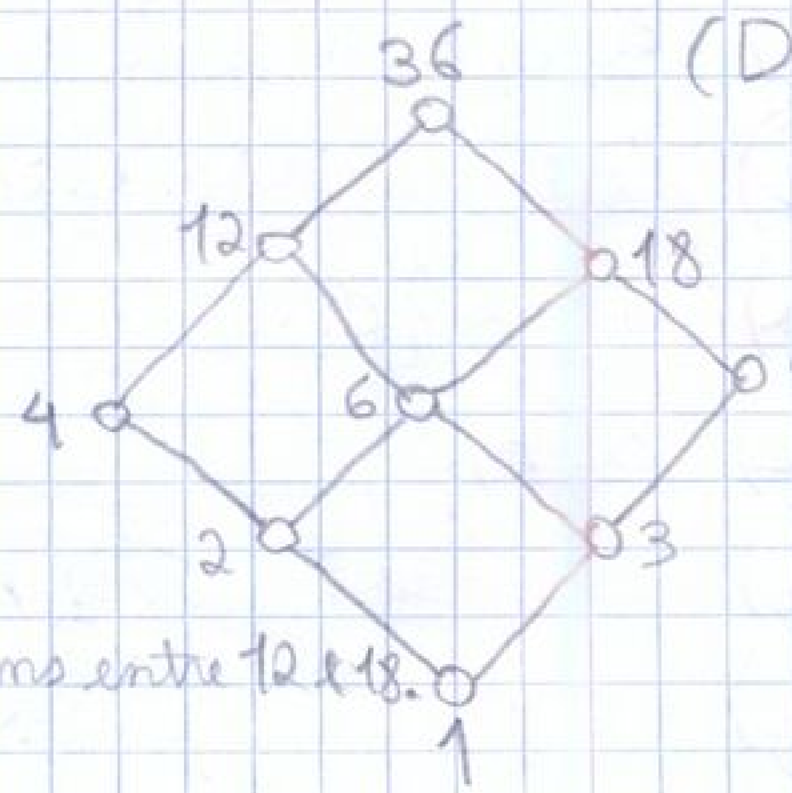
$(B^3, \preccurlyeq)$

c) 111, 010.

d) ínfimo → conjunção bit a bit (AND)

supremo → disjunção bit a bit (OR).

7 a) (desenhado ao lado) ~~a)~~



$(D_{36}, |)$

b) 12

c) 1

d) 36

e) 2

f) $\{1, 2, 3, 6\}$. São os divisores comuns entre 12 e 18.

g) $12 \wedge 18 = 6$ ← máximo divisor comum $12 \vee 18 = 36$ → mínimo múltiplo comum.

8) Seja $G = A \wedge B$ (ínfimo de A e B).

1) Tem-se $G \leq A$ e $G \leq B$

2) Se $C \leq A$ e $C \leq B$, para um $C \in \mathcal{P}(S)$, então $C \leq G$

3) $G \subseteq A$ e $G \subseteq B$, logo $G \subseteq (A \cap B)$, por 1)

4) $(A \cap B) \leq A$ e $(A \cap B) \leq B$, logo $A \cap B \leq G$, por 2)

Logo, por 3) e 4), conclui-se que $A \wedge B = G = A \cap B$, c.q.p.

9) a) Se $\leq_1$ e $\leq_2$ são ordens parciais, então são reflexivas, antissimétricas e transitivas. Mostrar que $(A_1 \times A_2, \leq)$ é um c.p.o, é mostrar que goza dessas propriedades.

$(x_1, x_2) \leq (x_1, x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_1$ e $x_2 \leq x_2$

Logo, é reflexiva, uma vez que $\leq_1$ e $\leq_2$ também o são.

$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ e $(y_1, y_2) \leq (x_1, x_2)$, então $x_1 \leq y_1$ e $x_2 \leq y_2$ e $y_1 \leq x_1$ e $y_2 \leq x_2$

Ora, $\leq_1$ e $\leq_2$ são antissimétricos, pelo que $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$, ou seja, $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, pelo que $\leq$ também é antissimétrico.

Se $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ e $(y_1, y_2) \leq (z_1, z_2)$ então:

$x_1 \leq y_1$ e $x_2 \leq y_2$ e $y_1 \leq z_1$ e $y_2 \leq z_2$. Ora como são transitivos:

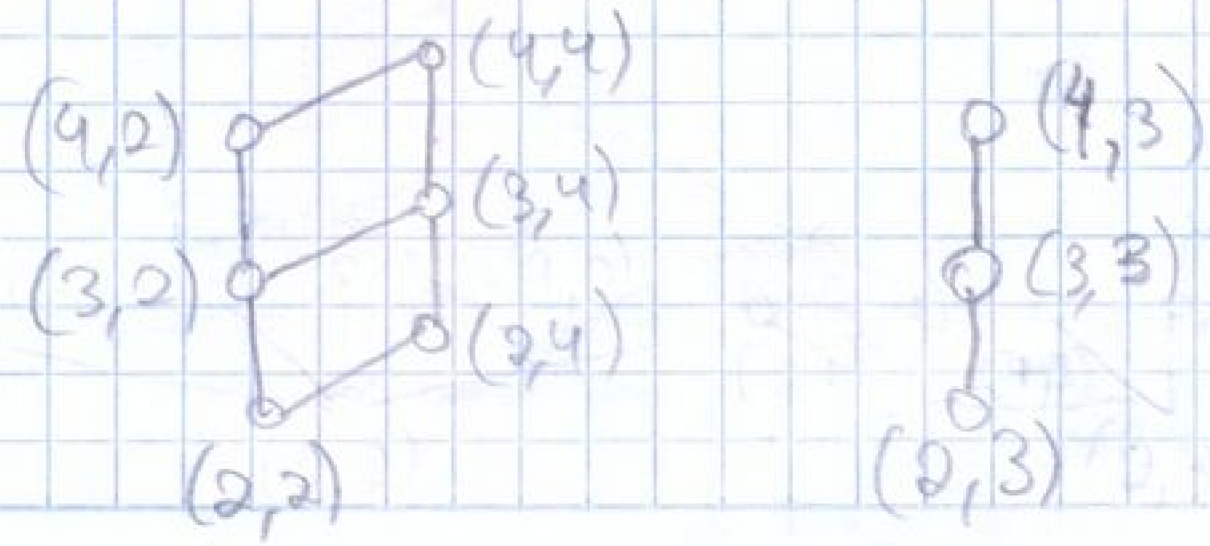
$x_1 \leq z_1$ e $x_2 \leq z_2$, ou seja, $(x_1, x_2) \leq (z_1, z_2)$ e portanto, $\leq$ é transitiva.

Concluindo, $(A_1 \times A_2, \leq)$ é um c.p.o.

b) $\{(x_1, x_2) < (y_1, y_2) \mid x_1 \leq y_1$ e $x_2 | y_2$ e $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)\}$

$\{(2,2) < (3,2), (2,2) < (4,2), (2,2) < (2,4), (2,2) < (3,4), (2,2) < (4,4),$
$(2,3) < (3,3), (2,3) < (4,3), (2,4) < (3,4), (2,4) < (4,4), (3,2) < (4,2),$
$(3,2) < (3,4), (3,2) < (4,4), (3,3) < (4,3), (3,4) < (4,4), (4,2) < (4,4)\}$

c) (desenhado em baixo)



d) Não tem máximo nem mínimo, mas tem como minimais o (2,2) e (2,3), e como maximais o (4,4) e o (4,3).

e) i) $(2,2) \wedge (3,3) \to$ não existe $\qquad (2,2) \vee (3,3) \to$ não existe

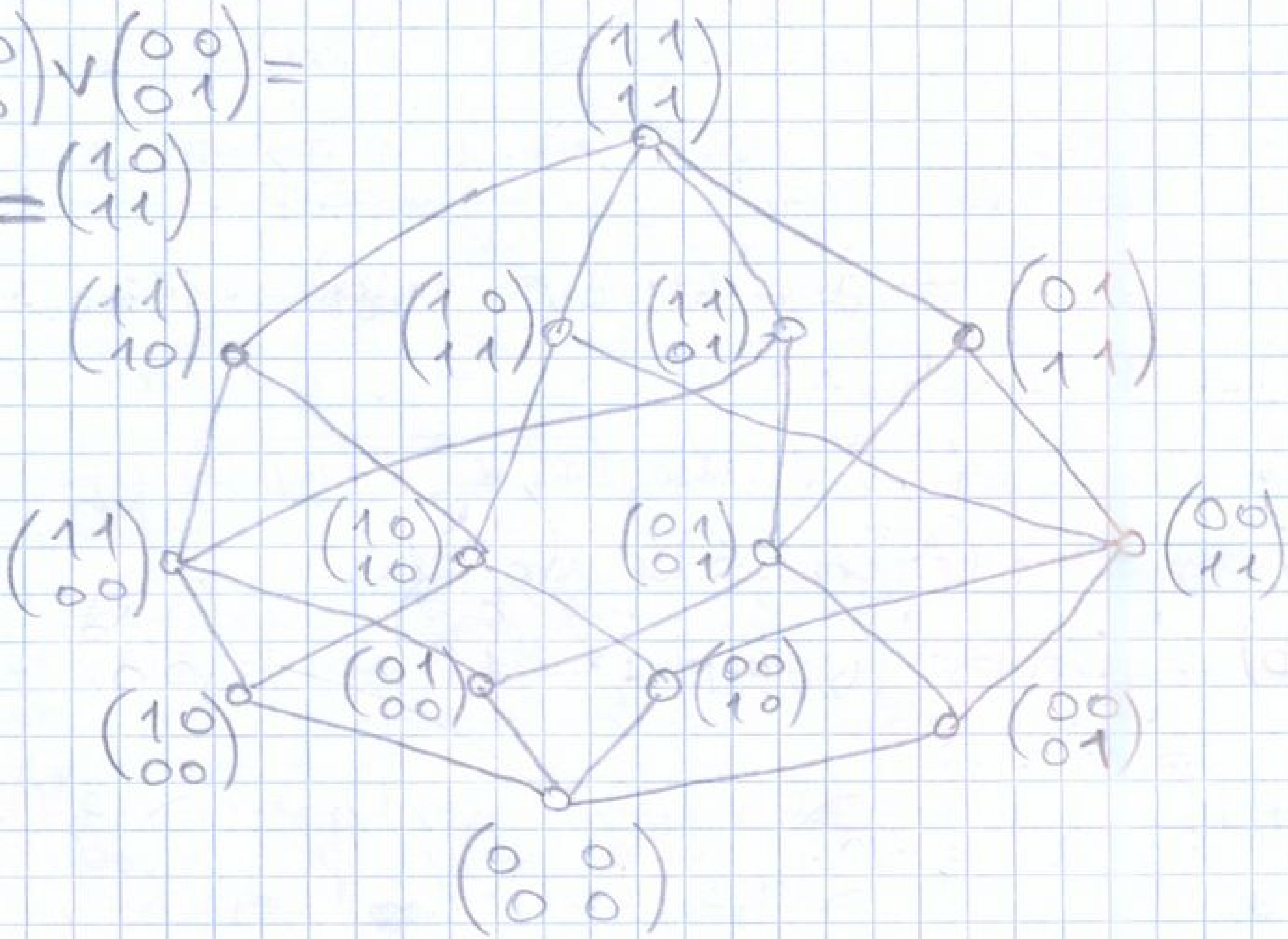
ii) $(4,2) \wedge (3,4) \to (3,2) \qquad (4,2) \vee (3,4) \to (4,4)$

iii) $(3,2) \wedge (2,4) \to (2,2) \qquad (3,2) \vee (2,4) \to (3,4)$

iv) $(3,2) \wedge (3,4) \to (3,2) \qquad (3,2) \vee (3,4) \to (3,4)$

f) Consideremos a restrição de A_2 só a $\{2,4\}$. $(A_2, |)$ é uma relação de ordem total, mas a relação de ordem obtida não é total:

10 a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

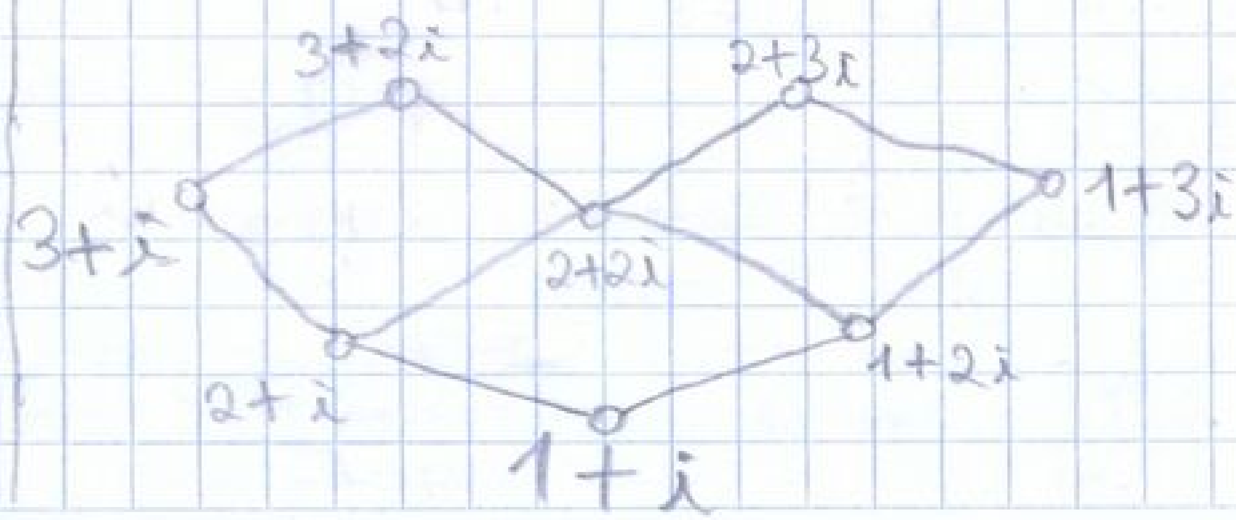


b) Não é antissimétrica, logo não é ordem parcial.

11 a)

$1+3i \vee 3+i =$

$=$ não existe



b) Não é ordem parcial, pois há elementos com o mesmo módulo que não são o mesmo elemento, isto é, a relação não seria antissimétrica. ex: $|2+3i| = |3+2i|$, mas $2+3i \neq 3+2i$

12 a) Se R é transitiva, $\forall a,b,c \in S, (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$

$R = \{(a,b) | (a,b) \in S \times S$ $\quad R^{-1} = \{(b,a) | (a,b) \in R\}$

$\forall a,b,c \in S:$ $\quad (b,a) \in R^{-1} \wedge (a,c) \in R^{-1} \rightarrow (b,c) \in R^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (c,a) \in R \rightarrow (c,b) \in R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (c,a) \in R \wedge (a,b) \in R \rightarrow (c,b) \in R$

Logo, se R é transitiva em $S \times S$, R^{-1} também o é.

b) Pretende-se mostrar que $R \cup R^{-1} = S \times S$, isto é, que $R \cup R^{-1} \subseteq S \times S$ e $S \times S \subseteq R \cup R^{-1}$

Qualquer $(x,y) \in S \times S$, $(x,y) \in R \vee (y,x) \in R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y) \in R \vee (y,x) \in R \Leftrightarrow (x,y) \in R \vee (x,y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in (R \cup R^{-1})$

$(x,y) \in S \times S \longrightarrow (x,y) \in R \cup R^{-1}$ Logo, $S \times S \subseteq R \cup R^{-1}$

Seja $(x,y) \in R \cup R^{-1}$:

$(x,y) \in R \vee (x,y) \in R^{-1}$

$(x,y) \in R \longrightarrow (x,y) \in S \times S$

$(x,y) \in R^{-1} \longrightarrow (x,y) \in S \times S$

$(x,y) \in S \times S$

Logo, $R \cup R^{-1} \subseteq S \times S$