4. Ряды

4.1. Числовой ряд в комплексной плоскости

Def. 1. $z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, где $z_n \in \mathbb{C}$ - числовой ряд

Def. 2. Сумма ряда - $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$

Если сумма существует и конечна, то ряд называют сходящимся.

Def. $f(z)$ называется регулярной в точке z_0, если $f(z_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Для комплексных числовых рядов остаются справедливыми:

1. Необходимое условие сходимости
2. Признак Даламбера
3. Радикальный признак Коши
4. Критерий Коши
5. Абсолютная сходимость

4.2. Функциональный ряд в комплексной плоскости

Def. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, где $u_n(z):\ D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ - функциональный ряд

Th. Признак Вейерштрасса.
$\exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n,\ \alpha_n \in \mathbb{R}_0^+,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R},\ |u_n(z)| \le \alpha_n\ \forall z \in D \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Lab. Сверить формулировку и доказательства для $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$-случая

Nota. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывна

Th. $u_n(z)$ непрерывна в D и $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Тогда $\int_K f(\zeta)d\zeta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_K u_n(\zeta)d\zeta$, где $K \subset D$ - кусочно гладкая кривая

Докажем, что $\left|\int_K f(\zeta)d\zeta - \sum_{k=1}^{n}\int_K u_k(\zeta)d\zeta\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\left|\int_K \left(f(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta)\right) d\zeta\right| = \left|\int_K \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta)\right) d\zeta\right| = \left|\int_K \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(\zeta)d\zeta\right| = \left|\int_K r_n(\zeta)d\zeta\right| \le \int_K |r_n(\zeta)||d\zeta| \underset{\text{по кр. Коши}}{\le \varepsilon}$$

4.3. Степенной ряд

Def. Степенной ряд - $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \left(a = 0 : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)$, $c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Область сходимости - круг с центром a, $|z-a| \le R$ - радиус сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z-a| < 1 \Longrightarrow |z-a| < \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Nota. Также справедлива теорема Абеля

Th. Абеля.

Если степенной ряд сходится в точке z_1, то он сходится абсолютно и равномерно в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| > |z-z_2|$

Если степенной ряд расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| < |z-z_2|$

Следствие: Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, то $f(z)$ - непрерывна в круге сходимости ряда

Th. Почленное дифференцирование суммы ряда.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ - сходящийся в круге радиуса $R \neq 0$. Тогда $f(z)$ дифференцируема и $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$

Рассмотрим ряд (и его сумму) $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ - он сходится в круге радиуса ρ таком, что $0 \le |z| \le \rho < R$ (см. сходимость по Даламберу) (Обозначим круг $K_1 : |z| = \rho$)

Докажем, что $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1} = S(z) = f'(z)$

В круге K_1 выберем кривую γ, соединяющую $z_0 = 0$ и z

Рассмотрим $\int_\gamma \zeta^k d\zeta$, функция ζ^k аналитическая, тогда $\int_\gamma \zeta^k d\zeta$ не зависит от пути

$\int_\gamma \zeta^k d\zeta = \int_0^z \zeta^k d\zeta = \frac{\zeta^{k+1}}{k+1}\Big|_0^z = \frac{z^{k+1}}{k+1}$

Тогда $\int_0^z nc_n\zeta^{n-1}d\zeta = \frac{nc_n\zeta^n}{n}\Big|_0^z = c_nz^n$

Возьмем интеграл от суммы $\int_0^z S(\zeta)d\zeta = \int_0^z \left(\sum\limits_{n=0}^\infty nc_n\zeta^{n-1}\right)d\zeta = \sum\limits_{n=0}^\infty \int_0^z nc_n\zeta^{n-1}d\zeta = \sum\limits_{n=0}^\infty c_nz^n = f(z)$

Таким образом, $f(z)$ является первообразной для $S(z)$, то есть $S(z) = f'(z)$

При этом $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^\infty nc_nz^{n-1} = \sum\limits_m c_mz^m$ - этот ряд можно дифференцировать дальше, и область, в которой функция дифференцируется, - круг K_1, где ρ вплотную подходит к R

Таким образом, доказали, что если $f(z)$ регулярна $\forall z$ в круге $|z| < R$, то $f(z)$ сколько угодно раз дифференцируема в этом круге и $f'(z) = \left(\sum\limits_{n=0}^\infty c_nz^n\right)'$

Следствие: $f'(z) = (c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots)'$ или $f'(z) = (c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots)' \Longrightarrow c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = \frac{f''(z)}{2!}$ и так далее

Получили ряд Тейлора $f(z) \underset{|z-a|<\rho}{=} \sum\limits_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

Th. $f(z)$ аналитическая в области $D \Longrightarrow f(z)$ регулярна в области D

По формуле Коши $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\ \forall z \in K$, где $K = \{z \mid |z-a| < \rho\}$, $\gamma_\rho = \{\zeta \mid |\zeta - a| = \rho\}$ и $K \subset D$

Разложим в ряд $\frac{1}{\zeta - z}$:

$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - (z-a) - a} = \frac{1}{\zeta - a}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta-a}\sum\limits_{n=0}^\infty\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$, где $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$

То есть $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся

Тогда $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^\infty \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\sum\limits_{n=0}^\infty\left(\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$ - единственное разложение по Тейлору, где $b_n = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$

Итак $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$