

4° $f(z)$ аналитична в D ($f : D \rightarrow D'$), $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$. Тогда $\exists g(w) = f'(z)$ ($g : D' \rightarrow D$) и $\forall z_0 \in D \quad f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$, где $w_0 = w(z)$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\text{Заметим, что } f'(z) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J \neq 0$$

$$\text{Действительно, если якобиан равен 0, то } \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

$$\text{Аналогично } \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{Значит, } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ — противоречие}$$

Если $J \neq 0$, то преобразование $f(z)$ приводит (x, y) в (u, v) взаимно однозначно. Тогда

$$\exists! \text{ решение } \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}, \text{ то есть взаимно однозначно определены } \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

$$\text{Обозначим } g(w) = x(u, v) + iy(u, v)$$

$$\text{Найдем } f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}. \text{ Рассмотрим отношение } \frac{\Delta z}{\Delta w} \xrightarrow[\Delta z \rightarrow 0]{\Delta w \rightarrow 0} \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'_z(z_0)} \implies \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = g'_w(w_0) = \frac{1}{f'_z(z_0)} \text{ или } f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$$

5° $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D . Тогда $u(x, y), v(x, y)$ — гармонические функции в D

Функция считается гармонической, если $\Delta u = 0$ (здесь $\Delta = \nabla^2$ — лапласиан) \iff

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Lab.

6° Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D и известна $u(x, y)$ или $v(x, y)$, то $f(z)$ определяется однозначно с точностью до const

Пусть известна $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. Нужно найти $v(x, y)$. По условию Коши-Римана $\int u(x, y), \int v(x, y)$ не зависят от пути (Lab. доказать, что $\int_{AB} dv$ не зависит от пути)

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x dx + v_y dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y) dx + u_x dy$$

Интеграл будет найден с точностью до const = $C(x_0, y_0)$

5° Конформные отображения

Найдем геометрический смысл производной. Рассмотрим отображение $w = f(z)$ ($w : D \rightarrow G$) – дифференцируема в точке $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$

Аргумент: В области D рассмотрим гладкую кривую $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$. Образ $\gamma(t)$ – кривая $\sigma(t)$ в G

$\gamma(t)$ в окрестности некоторой точки z_0 гладкая, \exists касательная с углом $\theta = \arg \gamma'(t)$

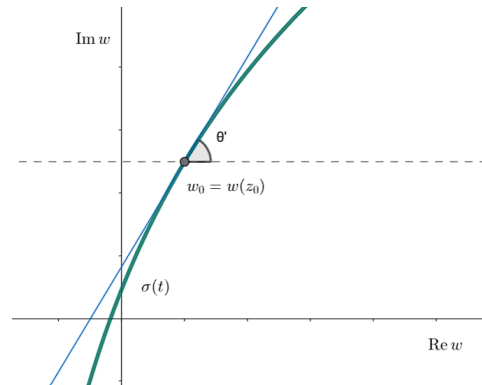
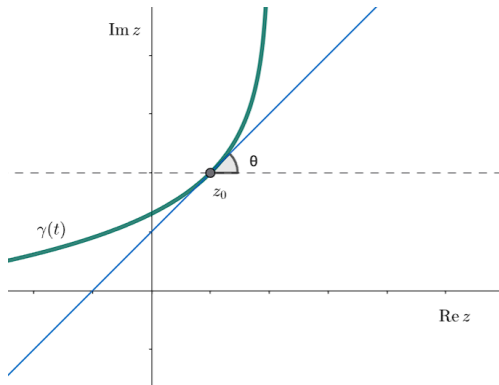
$\sigma(t)$ в окрестности $w_0 = w(z_0)$ гладкая, \exists касательная с углом $\theta' = \arg \sigma'(t)$

$$\text{А } \sigma'(t_0) = w'(t_0) = f'(z_0) \cdot \underbrace{\gamma'(t_0)}_{z'(t_0)}$$

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0)$$

$$\theta' = \arg f'(z_0) + \theta$$

$\theta' - \theta = \arg f'(z_0)$ – поворот кривой $\gamma(t)$ вокруг z_0 на угол $\arg f'(z_0)$ при отображении $w = f(z)$



Модуль: $w = f(z)$ – дифференцируема $\iff \Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$

$$\text{Рассмотрим } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)| \implies |\Delta w| = |f'(z_0)| \cdot |\Delta z| + o(|\Delta z|)$$

Рассмотрим малый контур $|\Delta z| = |z - z_0| = \rho$. Тогда $|\Delta w| = |w(z) - w(z_0)| = |f'(z)|\rho + o(\rho)$

Таким образом $w(z)$ растягивает круг $|z - z_0| = \rho$ в $|f'(z_0)|$ раз с точностью до малых высших порядков

Итак, $w = f(z)$ в точке z_0 поворачивает точку у окрестности на угол $\alpha = \arg f'(z_0)$ и растягивает отрезки $[z_0, z]$ в $k = |f'(z_0)|$ раз

Def. Конформное отображение – отображение $w(z)$, сохраняющее углы (между образами и прообразами) и постоянство растяжений

$$\text{Th. Условия конформности: } \begin{cases} \text{дифференцируемость} \\ \text{однолиственность} \\ f'(z) \neq 0 \text{ в } D \end{cases} \iff \text{конформно}$$

Ex. $w = az + b$

Мет. Геометрический смысл линейного отображения: b - перенос $z = 0$ в точку $z = b$; $a = |a|e^{i\varphi}$, тогда $|a|$ - коэффициент растяжения, φ - угол поворота

Заметим, $w' = (az + b)' = a$, тогда $k = |w'(z_0)| = |a|$, $\varphi = \arg w'(z_0) = \arg a$

Lab. Проверить, что $w = z^2$ не конформное отображение, найдя $w'(z_0)$

6° Интеграл по комплексной переменной

6.1 Определения

В \mathbb{C} задана кусочно-гладкая кривая K (с концами в точках M и N) параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) & t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ y = \psi(t) & \varphi, \psi - \mathbb{R}\text{-функции} \end{cases}$$

Тогда $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ - задание K в \mathbb{C} . Введем отображение $w = f(z)$, действующее на K

Определим интегральные суммы:

1. дробление отрезка MN на частичные дуги: $M = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = N$

Тогда $\alpha = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta$

2. Выбор средних точек в отрезках кривой $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$

3. Сопоставим интегральную сумму $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i$

4. Интегралом от $w = f(z)$ по кривой K называется $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau = \max \Delta z_i \rightarrow 0}} \sigma_n = \int_K f(z) dz$, если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения, выбора средних точек и т. д.

При этом интеграл можно представить как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) (\Delta x_i + i \Delta y_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u(\xi_i, \eta_i) + iv(\xi_i, \eta_i)) (\Delta x_i + i \Delta y_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u_i \Delta x_i - v_i \Delta y_i) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u_i \Delta y_i + v_i \Delta x_i) = \int_K u dx - v dy + i \int_K u dy + v dx$

Nota. Мы свели \mathbb{C} -интеграл к двум криволинейным \mathbb{R} -интегралам, все свойства интегралов сохраняются

$$\text{Ex. } \int_{\gamma=[0;1+i]} \bar{z}dz = \int_{\gamma} (x-iy)(dx+idy) = \int_{\gamma} xdx + ydy + i \int_{\gamma} xdy - ydx = 2 \int_0^1 xdx = 1$$