Лекция 7

Стандартное дискретное распределение

I. Распределение Бернулли

Распределение Бернулли B_p (с параметром $0 < p < 1$)
ξ - число успехов при одном испытании, p - вероятность успеха при одном испытании

ξ	0	1
p	$1 - P(A)$	$P(A)$

Матожидание: $E\xi = p$
Дисперсия: $D\xi = p(1-p) = pq$

Ex. Индикатор события $I_A \in B_p$ как раз имеет распределение Бернулли, где $p = P(A)$

II. Биномиальное распределение

Биномиальное распределение $B_{n,p}$ (с параметрами n, p)
ξ - число успехов в серии из n испытаний, p - вероятность успеха при одном испытании
$p(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, \dots, n \Longleftrightarrow \xi \in B_{n,p}$

ξ	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
p	q^n	$nq^{n-1}p$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

Заметим, что $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, где $\xi_i \in B_p$ - число успехов при i-ой испытании
$E\xi_i = p; \quad D\xi_i = pq$
$E\xi = E\xi_1 + \dots + E\xi_n = p + \dots + p = \boxed{np}$
$D\xi = D\xi_1 + \dots + D\xi_n = pq + \dots + pq = \boxed{npq}$

III. Геометрическое распределение

Геометрическое распределение G_p (с параметром p)
ξ - номер 1-ого успешного испытания в бесконечной серии
$p(\xi = k) = q^{k-1}p,\ k = 1, 2, 3, \dots \Longleftrightarrow \xi \in G_p$

ξ	1	2	$\dots$	k	$\dots$
p	p	qp	$\dots$	$q^{k-1}p$	$\dots$

Матожидание $E\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp(\xi = k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum\limits_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\sum\limits_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}(q^k)\right)' = p\left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

$E\xi^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = pq\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + E\xi = pq(\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k)'' + \frac{1}{p} =$
$pq\left(\frac{1}{1-q}\right)'' + \frac{1}{p} = 2pq\frac{1}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} = 2pq\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$
$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

IV. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона Π_λ (с параметром $\lambda > 0$)

Def. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если $p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \dots$

ξ	0	1	...	k	...
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	...

Покажем корректность определения - докажем, что сумма нижней строки равна 1:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\substack{\text{ряд Тейлора} \\ \text{для } e^x}} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

$E\xi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda = np$
$E\xi^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} +$
$\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda$
$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

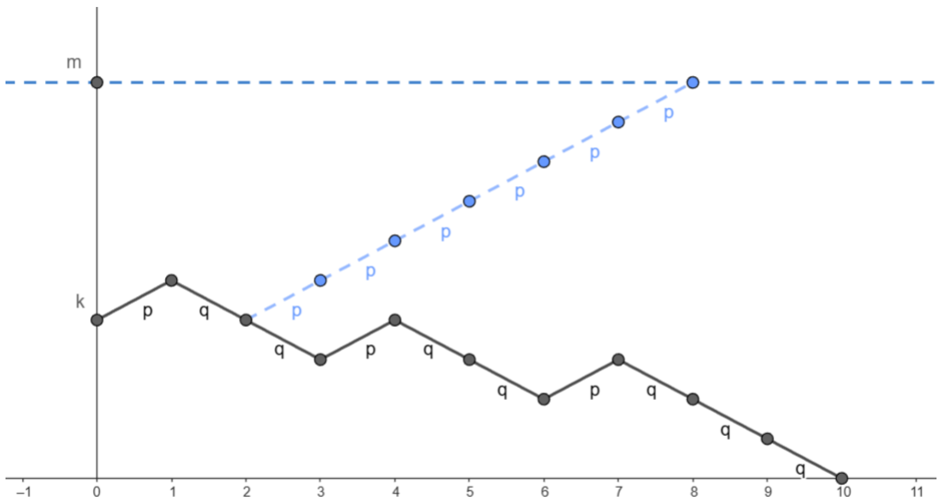
Задача о разорении игрока

Постановка задачи: играют 2 игрока, вероятность выигрыша первого игрока в одной игре равна p, $q = 1 - p$ - вероятность его проигрыша (выигрыш второго)

В каждой игре разыгрывается 1 биткоин. Капитал первого игрока - k биткоинов, $m - k$ биткоинов - капитал второго

Найти вероятность разорения первого игрока

Траектория капитала первого игрока будет выглядить как-то так:



Пусть r_k - интересующая нас вероятность разорение игрока при капитале k (то есть достижения оси абсцисс на графике)

$r_k = p \cdot r_{k+1} + q r_{k-1}$

$p r_{k+1} - r_k + (1-p) r_{k-1} = 0, \quad r_0 = 1, r_m = 0$

$p\lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$

$D = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm (2p-1)}{2p}; \quad \lambda_1 = 1; \lambda_2 = \dfrac{2-2p}{2p} = \dfrac{q}{p}$

Обозначим $\lambda = \dfrac{q}{p}$

Рассмотрим два случая:

- $p \neq \dfrac{1}{2}$

  Тогда общее решение: $r_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k = C_1 + C_2 \lambda^k$

  Найдем частное решение:

  $$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 + C_2 \lambda^m \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ 1 - C_2 + C_2 \lambda_m = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ C_2(1 - \lambda_m) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - \frac{1}{1-\lambda^m} = \frac{-\lambda^m}{1-\lambda^m} \\ C_2 = \frac{1}{1-\lambda^m} \end{cases}$$

  $r_k = \dfrac{-\lambda^m}{1-\lambda^m} + \dfrac{1}{1-\lambda^m}\lambda^k = \dfrac{\lambda^k - \lambda^m}{1-\lambda^m}$

Посмотрим, что будет происходит при бесконечной игре (то есть когда $m \to \infty$ - капитал неограничен)

1) $p < q$, то есть $\lambda > 1$. Тогда $\lambda^m \to \infty$, $r_k = \dfrac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m} = \dfrac{\frac{\lambda^k}{\lambda_m} - 1}{\frac{1}{\lambda^m} - 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ - то есть первый игрок гарантированно разорится

2) $p > q$, то есть $\lambda < 1$. Тогда $\lambda^m \to 0$, $r_k = \dfrac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda^k$ - то есть $r_k = \left(\dfrac{q}{p}\right)^k$

- $p = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow D = 0$

  Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

  Общее решение: $r_k = C_1\lambda^k + C_2 k\lambda_k = C_1 + C_2 k$

  Частное решение:

  $$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 0 = C_1 + C_2 m \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = C_1 \\ -1 = C_2 m \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = C_1 \\ C_2 = -\frac{1}{m} \end{cases}$$

  $r_k = 1 - \dfrac{k}{m}$

  При бесконечной игре:

  $r_k = 1 - \dfrac{k}{m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1$ - то есть при равной игре игрок неминуемо разорится

Случайное блуждание на прямой

Пусть в начальный момент времени находимся в начале координат. С вероятностью p идем на единицу вправо, с вероятностью q - влево

При $p = \dfrac{1}{2}$ мы рано или поздно попадем в любую точку числовой прямой

Можно привести аналогию с орлянкой: рано или поздно каждый игрок будет при сколь угодно большом выигрыше

Посмотрим на орлянку как на распределение Бернулли:

ξ	-1	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E\xi = 0; \quad D\xi = 1$

Пусть ξ - выигрыш первого после n игр.

$E\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} E\xi_i = 0$

$D\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} D\xi_i = n$

$\sigma_\xi = \sqrt{n}$ - среднее квадратическое отклонение

Это означает, что при большом n СКО поглотит всю числовую прямую

$\dfrac{S_n}{n} \to E\xi$

Закон больших чисел в этой ситуации говорит, что точка останется у 0, однако в то же время она может оказаться на любой точке на числовой прямой

Ex. По n конвертам случайным образом раскладывается m писем. Случайная величина ξ - число писем в своих конвертах

$\urcorner A_i$ - число i письма в своем конверте, $\xi_i = I_A = \begin{cases} 0, & i\text{-ое письмо в не своем конверте} \\ 1, & i\text{-ое письмо в своем конверте} \end{cases}$

$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$

$E\xi_i = P(A_i) = \dfrac{1}{n}$

$D\xi_i = pq = \dfrac{1}{n}(1 - \dfrac{1}{n}) = \dfrac{n-1}{n^2}$

$E\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} E\xi_i = n\dfrac{1}{n} = 1$ - в среднем будет одно письмо в своем конверте

$D\xi = D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} D\xi_i + 2\sum\limits_{i<j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$

Найдем ковариацию:

$\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = E\xi_i\xi_j - E\xi_i E\xi_j = \dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{n} = \dfrac{n-(n-1)}{n^2(n-1)} = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$

Заметим, что для любых $i, j, i < j$: $\xi_i\xi_j = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы одно не в своем} \\ 1, & \text{если оба в своем} \end{cases}$

То есть $\xi_i\xi_j \in B_p$ и $E\xi_i\xi_j = P(\text{оба письма в своих}) = \dfrac{1}{n(n-1)}$

Получаем: $D\xi = n\dfrac{n-1}{n^2} + 2\dfrac{n(n-1)}{2}\dfrac{1}{n^2(n-1)} = \dfrac{n-1}{n} + \dfrac{1}{n} = 1$