Лекция 15

Характеристические функции

Мет. i - комплексная единица
Мет. $e^{it} = \cos t + i \sin t$
Пусть $\xi + i\eta$ - комплексная случайная величина, где ξ - вещественная часть, а η - мнимая часть

Def. $E(\xi + i\eta) = E\xi + iE\eta$

Def. Характеристической функций случайной величины ξ называется функция

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, t \in \mathbb{R}$$

Свойства:

1. Любая случайная величина ξ имеет характеристическую функцию, причем $|\varphi_\xi(t)| \le 1$

   Характеристическая функция существует по теореме об абсолютной сходимости интеграла от произведения ограниченной и нормированной функций
   Докажем неравенство:
   $|\varphi_\xi(t)|^2 = |Ee^{it\xi}|^2 = |E\cos t\xi + iE\sin t\xi|^2 = (E\cos \xi t)^2 + (E\sin \xi t)^2 \le$ [по неравенству Йенсена] $\le E\cos^2 \xi t + E\sin^2 \xi t = E(\cos^2 \xi t + \sin^2 \xi t) = E1 = 1$

2. Пусть $\varphi_\xi(t)$ - характеристическая функция случайной величины ξ. Тогда характеристическая функция случайной величины $a + b\xi$ равна $\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita}\varphi_\xi(bt)$

   $\varphi_{a+b\xi}(t) = Ee^{it(a+b\xi)} = E(e^{ita} \cdot e^{itb\xi}) = e^{ita}Ee^{itb\xi} = e^{ita}\varphi_\xi(bt)$

3. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций

   Пусть случайные величины ξ и η - независимы. Тогда
   $\varphi_{\xi+\eta}(t) = E(e^{it\xi} \cdot e^{it\eta}) =$ [так как они независимы] $= Ee^{it\xi} \cdot Ee^{it\eta} = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$
   Аналогично для большего числа величин

4. Пусть $E\xi^k < \infty$. Тогда

$$\varphi_\xi(t) = 1 + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + o(|t|^k)$$

$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = E(1 + it\xi + \frac{(it\xi)^2}{2!} + \cdots + \frac{(it\xi)^k}{k!} + o(|t|^k)) = 1 + itE\xi + \frac{i^2t^2}{2}E\xi^2 + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + o(|t|^k)$

5. Пусть $E\xi^k < \infty$. Тогда $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$

$E\xi^k < \infty \Longrightarrow$ существует k членов разложения в ряд Маклорена: $\frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{k!}t^k = \frac{i^k E\xi^k}{k!}t^k$; $\frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{k!}t^k = i^k E\xi^k$

6. Существует взаимно-однозначное соответствие между распределениями и характеристическими функциями. Зная характеристическую функцию можно восстановить распределение.

   Ex. Если распределение абсолютно непрерывное, то его можно восстановить по преобразованию Фурье
   $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_\xi(t)dt$

7. Теорема о непрерывном соответствии

Th. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ слабо сходится к ξ тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций сходится поточечно к $\varphi_\xi(t)$
$\{\xi_n\} \rightrightarrows \xi \Longleftrightarrow \varphi_{\xi_n}(t) \longrightarrow \varphi_\xi(t) \forall t \in \mathbb{R}$

Характеристические функции стандартных распределений

- Распределение Бернулли

ξ	0	1
p	$1-p$	p

  $\varphi_\xi(t) = Ee^{i\xi t} = e^{i\cdot 0\cdot t}p(\xi = 0) + e^{i\cdot 1\cdot t}p(\xi = 1) = 1 - p + pe^{it}$
- Биномиальное распределение
  $P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$
  Если $t \in B_{n,p}$, то $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \cdots + \xi_n$, где $\xi_i \in B_p$ - независимы
  $\varphi_\xi(t) = (\varphi_{\xi_n}(t))^n = (1 - p + pe^{it})^n$
- Распределение Пуассона
  $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Следствие: распределение Пуассона устойчиво относительно суммирования

$\exists \xi \in \Pi_\lambda, \eta \in \Pi_\mu$, они независимы. Тогда $\xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}$

По третьему свойству $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}$ - характеристическая функция распределения Пуассона $\Pi_{\lambda+\mu}$

- Стандартное нормальное распределение
  $f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$
  $$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx)} dx =$$
  $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2itx-t^2)} e^{-\frac{t^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} d(x-it) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$
- Нормальное распределение
  $\xi \in N(a, \sigma^2)$
  Если $\eta \in N(0,1)$, то $\xi = a + \sigma\eta \in N(a, \sigma^2)$
  По второму свойству $\varphi_\xi(t) = e^{ita} \varphi_\eta(\sigma t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
  Следствие: нормальное распределение устойчиво относительно суммирования

Если $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2), \eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$ и они независимы, то $\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t) = e^{ita_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{ita_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{it(a_1+a_2) - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$ - характеристическая функция $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Доказательства теорем через свойства характеристических функций

Докажем некоторые теоремы с помощью характеристических функций

Закон больших чисел Хинчина

Для доказательства закона больших чисел Хинчина докажем такую лемму:
$$\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$$

$$\left(1+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)} = e^{n\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{x+no\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$$

Th. Закон больших чисел Хинчина

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным матожиданием. Тогда $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1$

Обозначим $a = E\xi_1$

Ранее было доказано, что сходимость по вероятности к константе эквивалентно к слабой сходимости. Поэтому достаточно доказать, что $\dfrac{S_n}{n} \rightrightarrows a$

По теореме о непрерывном соответствии остается доказать, что $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \longrightarrow \varphi_a(t) = e^{ita}$

По четвертому свойству $\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + itE\xi_1 + o(|t|) = 1 + ita + o(|t|)$

$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) =$ [по второму свойству] $= \varphi_{S_n}\left(\dfrac{t}{n}\right) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + ia\dfrac{t}{n} + o\left(\left|\dfrac{t}{n}\right|\right)\right)^n \xrightarrow[\text{по лемме}]{} e^{ita} = \varphi_a(t)$

Центральная предельная теорема

Th. Центральная предельная теорема Ляпунова, 1901 г.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом ($D\xi_1 < \infty$)

Обозначим $a = E\xi_1, \sigma^2 = D\xi_1$. Тогда

$$\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \rightrightarrows N(0,1)$$

Пусть $\eta_i = \dfrac{\xi_i - a}{\sigma}$ - стандартизованная случайная величина

$E\eta_i = 0, D\eta_i = 1$

Обозначим $Z_n = \eta_1 + \dots + \eta_n = \dfrac{(\xi_1+\dots+\xi_n) - na}{\sigma} = \dfrac{S_n - na}{\sigma}$

Надо доказать, что $\dfrac{Z_n}{\sqrt{n}} \rightrightarrows N(0,1)$

По четвертому свойству $\varphi_{\eta_1}(t) = 1 + itE\eta_1 - \dfrac{t^2}{2}E\eta_1^2 + o(t^2) = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$

$\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{n}}} = \varphi_{Z_n}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\eta_1}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \dfrac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}{2} + o\left(\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right)^n = \left(1 - \dfrac{t^2}{2n} + o\left(\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$ - характеристическая функция $N(0,1)$

Предельная теорема Муавра-Лапласа

Th. Пусть $v_n(A)$ - число появления события A при n независимых испытаний, p - вероятность успеха при одном испытании, $q = 1 - p$. Тогда $\dfrac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} \rightrightarrows N(0,1)$

$v_n(A) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = S_n$, где $\xi_i \in B_p$ и независимы, $E\xi_1 = p, D\xi_1 = pq$
По ЦПТ $\dfrac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \rightrightarrows N(0,1)$

Следствие. Интегральная формула Лапласа:
$p(k_1 \le v_n \le k_2) = p\left(\dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \dfrac{v_n - np}{\sqrt{npq}} \le \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$. Обозначим $\eta = \dfrac{v_n - np}{\sqrt{npq}}$
$p\left(\dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \dfrac{v_n - np}{\sqrt{npq}} \le \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) = F_\eta\left(\dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - F_\eta\left(\dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_0\left(\dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - F_0\left(\dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, где
$F_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Nota. Аналогичным образом ЦПТ применяется для приближенного вычисления вероятностей, связанных с суммами большого числа независимых одинаковых случайных величин, заменяя стандартизованную сумму на стандартное нормальное распределение. Возникает вопрос: какова погрешность данного вычисления?

Th. Неравенство Берри-Эссеена
В условиях ЦПТ для ξ_1 с конечным третьим моментом можно оценить так:
$$\left| p\left(\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < x\right) - F_0(x) \right| \le C \frac{E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sqrt{n(D\xi_1)^3}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nota. На практике берут $C = 0.4$, точная оценка сверху $C < 0.77$