

**Th. 1.** о сдвиге:

Ряд Фурье не изменится, если  $[-\pi, \pi]$  заменить на  $[a; a + 2\pi]$

Докажем, что если  $\varphi(t)$  -  $2\pi$ -периодична, то  $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = \int_a^{a+2\pi} \varphi(t) dt$

У нас  $f(x)$  с периодом  $[-\pi, \pi]$ , обозначим  $x = t - 2\pi$  ( $t = x + 2\pi$ ).

Рассмотрим  $\int_b^a f(x) dx = \int_{b+2\pi}^{a+2\pi} f(t - 2\pi) dt = \int_{b+2\pi}^{c+2\pi} f(t) dt = \int_{b+2\pi}^{c+2\pi} f(x) dx$

Пусть  $b = -\pi, c = a$ , тогда  $\int_b^c f(x) dx = \int_{-\pi}^a f(x) dx = \int_{-\pi+2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^{\pi} f(x) dx$

$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{a+2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

**Th. 2.** о растяжении:

$f(x)$  -  $2l$ -периодична: ( $T : [-l, l]$ )

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$$

$$\text{Тогда } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$f(x)$  -  $2l$ -периодична: ( $T : [-l, l]$ )

Обозначим  $x = \frac{lt}{\pi}$   $t \Big|_{-\pi}^{\pi}$   $x \Big|_{-l}^l$

$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t)$  -  $2\pi$ -периодична

Ряд Фурье для  $\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$ , где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ktdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ktdt = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ktd\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx \end{aligned}$$

Аналогично  $b_k$ .

Ex. 1.  $f(x) = x$   $x \in [-1, 1]$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x \cos \frac{k\pi x}{d} dx = \int_{-1}^1 x \cos k\pi x dx = \frac{1}{k\pi} \left( x \sin k\pi x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \sin k\pi x dx \right) = -\frac{1}{k\pi} \cdot 0 = 0$$

$$b_k = \int_{-1}^1 x \sin k\pi x dx = -\frac{1}{k\pi} \left( x \cos k\pi x \Big|_{-1}^1 - \int_0^1 \cos k\pi x dx \right) = -\frac{2}{k\pi} \left( (-1)^k - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_0^1 \right) = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2}{k\pi}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2}{k\pi} \sin k\pi x$$

## 4.2. Оценка коэффициентов Фурье

*Nota.* Вернемся к приближению  $f(x)$  тригонометрическим многочленом  $T_n(x)$ . Ранее говорилось, что из всех многочленов типа  $\sum_{m=0}^n a_m \cos mx + b_m \sin mx$  минимально отстоящим будет многочлен Фурье, то есть с  $a_m$  и  $b_m$ , равными коэффициентам Фурье.

Зададим расстояние  $\delta_n$  между  $f(x)$  и многочленом  $T_n(x)$  формулой

$$\delta_n^2 = \|f - T_n\|^2 = (f - T_n, f - T_n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - T_n(x))^2 dx = \left[ [a, b] = [-\pi, \pi] \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{m=1}^n a_m \cos mx + b_m \sin mx \right)^2 dx$$

Далее, честно интегрируя, можно убедиться, что  $\delta$  будет наименьшим, если  $a_m$  и  $b_m$  - коэффициенты Фурье

Преобразуем  $\|f - f_0\|^2$ :

$$\delta_n^2 = \|f - \sum_{m=0}^n (f, e_m) e_m\|^2 = \|f\|^2 - 2 \left( f, \sum_{m=0}^n (f, e_m) e_m \right) + \left\| \sum_{m=0}^n (f, e_m) e_m \right\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{m=0}^n (f, e_m)^2 +$$

$$\sum_{m=0}^n (f, e_m)^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=0}^n (f, e_m)^2 - \text{квадраты коэффициентов разложения}$$

$$\text{Тогда } \delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2)$$

$$\text{Так как } \delta_n^2 \geq 0, \text{ то } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^k (a_m^2 + b_m^2)$$

Так как  $\sum_{m=1}^n$  растёт и ограничена, то ряд  $\sum_{m=1}^{\infty}$  сходится

$$\text{Можем записать: } \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \right] - \text{неравенство Бесселя}$$

Можем усилить неравенство, если доказать, что при  $n \rightarrow \infty$   $\delta_n^2 \rightarrow 0$ . В этом случае  $f(x)$  раскладывается по полной системе функций  $\{\cos mx, \sin mx\}$

**Def.** Система  $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$  называется полной, если  $\forall f(x) \notin \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = 0 \implies f(x) = 0$

$$\left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \right] - \text{равенство Парсеваля}$$

$$\text{Заметим, что из оценки ранее } \|f\|^2 = \sum_{m=1}^n (f, e_m)^2 = \sum_{m=1}^n f_m^2$$

В  $\infty$ -мерном пространстве  $\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^2$  - «теорема Пифагора»

*Nota.* Эти утверждения верны для любых ортогональных систем функций, а не только для тригонометрических

### 4.3. Интеграл Фурье

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\exists \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = I \in \mathbb{R}$

$\exists$  ряд Фурье для  $f(x)$  на  $[-l, l]$   $\forall l > 0$ , то есть

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{m\pi t}{l} dt \right) \cos \frac{m\pi x}{l} + \left( \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{m\pi t}{l} dt \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \right] = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \frac{m\pi}{l} (t-x) dt \end{aligned}$$

Исследуем при  $l \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \frac{I}{2l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

Обозначим  $\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \alpha_m = \frac{m\pi}{l}, \Delta\alpha_m = \frac{\pi}{l}$

$$\text{Рассмотрим } \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{m\pi(t-x)}{l} dt}_{\text{функция переменной } l} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left( \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_m(t-x) dt \right) \Delta\alpha_m$$

Рассмотрим переменную  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_m = \alpha(m)$ ,  $\Delta\alpha_m = \Delta\alpha$  - дифференциальное

Имеем аналог интегральной суммы  $\sum_{m=1}^n \varphi(\alpha_m) \Delta\alpha_m, n \rightarrow \infty$

$$\text{Тогда } f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha - \text{интеграл Фурье}$$

*Nota.* От дискретного спектра частот  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  перешли к непрерывному спектру  $\alpha$

$$\text{Nota. В точках разрыва } \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha$$

Преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos at \cos ax + \sin at \sin ax) dt \right) d\alpha = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \cos at \cos ax dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin at \sin ax dt \right) d\alpha \end{aligned}$$

Если  $f(x)$  - четная, то  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt = 2 \int_0^{+\infty} \dots; \int_{-\infty}^{\infty} \sin \alpha t dt = 0$

Если  $f(x)$  - нечетная, то  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt = 2 \int_0^{+\infty} \dots; \int_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha t dt = 0$

Обозначим  $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt$        $\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt$

Тогда  $f(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x d\alpha}_{\text{косинус-преобразование Фурье}}, \quad f(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha x d\alpha}_{\text{синус-преобразование Фурье}}$

Ex.  $f(x) = e^{-\beta x}, \quad (\beta > 0, x \geq 0)$  Lab.  
 $F(\alpha) = ? \quad \Phi(\alpha) = ? \quad e^{-\beta x} = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha$