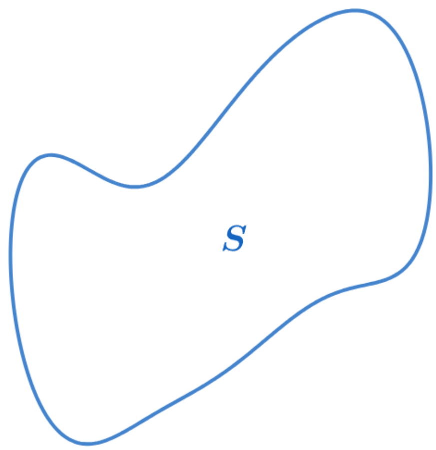
Содержание

1. Определенный интеграл

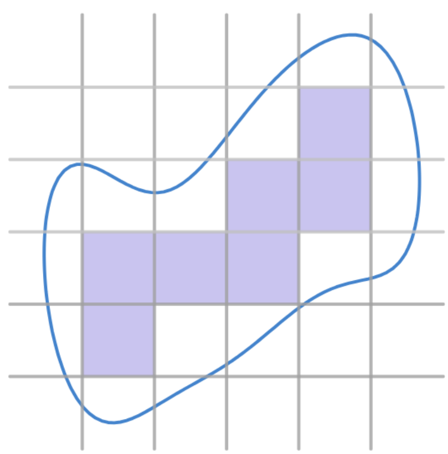
1.1. Задача и определение

Задача. Дана криволинейная фигура:



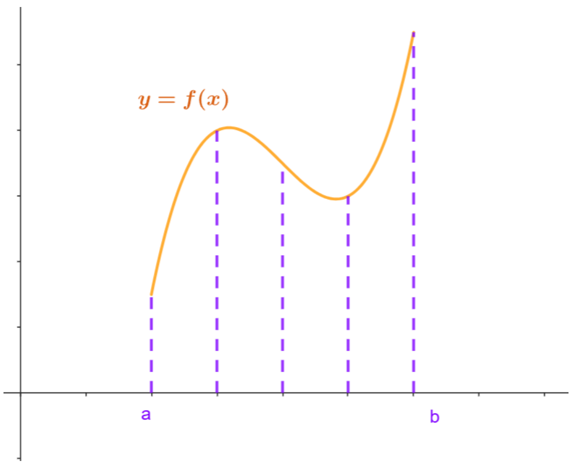
Надо найти ее площадь S

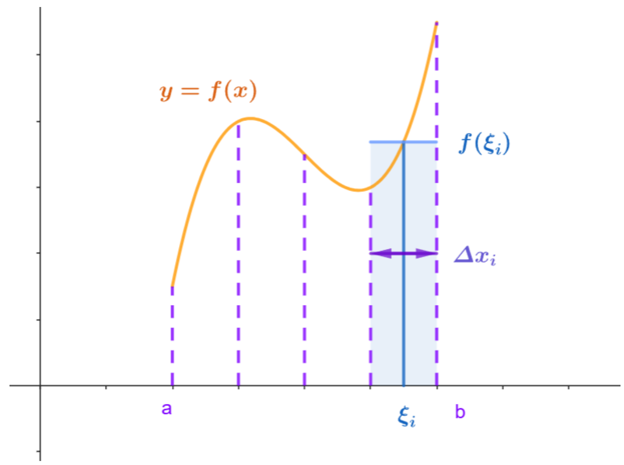
Произведем ее дробление на маленькие элементарные фигуры, площадь которых мы можем посчитать:



Уменьшаем дробление, чтобы свести погрешность к 0 (погрешность между истинной площадью и суммарной площадью прямоугольников)

Сведем задачу к простейшей в ДПСК:





1. Вводим разбиение отрезка $[a;b]$ $(a<b)$ точками $a < x_0 < \cdots < x_n < b$
   $T = \{x_i\}_{i=0}^{n}$
2. Выбираем средние точки на частичных отрезках $[x_{i-1}, x_i]_{i=1}^{n}$
   $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ – набор средних точек
   $\Delta x_i \overset{\text{обозн.}}{=} x_i - x_{i-1}$ – длина отрезка
3. Строим элементарные прямоугольники
4. Составляем сумму площадей всех таких прямоугольников:

   $$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i)$$

   Такая сумма называется интегральной суммой Римана
5. Заменяя разбиение, выбор ξ_i при каждом n, получаем последовательность $\{\sigma_n\}$
   При этом следим, чтобы ранг разбиения $\tau = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$ при $n \to \infty$
   Иначе получим неуничтожаемую погрешность

6. **Def.** Если существует конечный предел интегральной суммы и он не зависит от типа, ранга дробления и выбора средних точек, то он называется определенным интегралом

   $$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sigma_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)dx$$

Nota. Независимость от дробления и выбора средних точек существенна

Ex. $\mathcal{D} = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1], x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Сумма Римана для этой функции неопределенна, так как все зависит от выбора средних точек:

- если средние точки иррациональные, то сумма равна единице
- иначе сумма равна нулю

В обозначении определенного интеграла a и b называют нижним и верхним пределами интегрирования соответственно

Дифференциал dx имеет смысл Δx, понимается как бесконечно малая, то есть $f(x)dx$ – площадь элементарных прямоугольников, тогда $\int_a^b f(x)dx$ – сумма этих прямоугольников

1. $\int_a^a f(x)dx \overset{\text{def}}{=} 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Можно доказать, что определенный интеграл существует для всякой непрерывной на отрезке функции

Геометрический смысл: Заметим, что в определении интеграл – площадь под графиком функции $(f(x) \geq 0)$

Заметим, что для $f(x) \leq 0 \quad \int_a^b f(x)dx = -S$

1.2. Свойства

1. Линейность пределов $\Longrightarrow$ линейность интегралов
   $\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$
2. Аддитивность (часто для кусочно-непрерывных функций с конечным числом точек разбивается на участки непрерывности)
   $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
   Доказательства строятся на свойствах конечных сумм и пределов
3. Оценка определенного интеграла
   $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, $f(x)$ имеет наименьшее (m) и наибольшее (M) значения. Тогда:
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

   Доказательство: по теореме Вейерштрасса 2 $f(x)$ принимает наименьшее и наибольшее значения и для всякого x из $[a;b]$: $m <= f(x) <= M$
   Так как все средние точки принадлежат $[a;b]$, то
   $m \leq f(\xi_i) \leq M \quad \forall \xi_i$
   $m\Delta_i \leq f(\xi_i)\Delta_i \leq M\Delta_i$
   $m\sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq f(\xi_i)\sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq M\sum_{i=1}^n \Delta x_i$
   Предельный переход:
   $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} m\sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} M\sum_{i=1}^n \Delta x_i$

$$m \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \le \int_a^b f(x)dx \le M \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

4. *Мет.* Теорема Лагранжа о среднем: $f(x) \in C'_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)\ f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Th. Лагранжа о среднем в интегральной форме

$f(x) \in C_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)\ f(\xi)(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

$m \le \underbrace{\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)dx}_{\text{некоторое число}} \le M$ по свойству выше

По теореме Больцано-Коши $f(x)$ непрерывна, поэтому пробегает все значения от m до M

Значит найдется такая точка ξ, что $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

5. Сравнение интегралов

$f(x), g(x) \in C_{[a,b]} \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \ge g(x)$

Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(f(\xi_i)-g(\xi_i))}_{\ge 0} \underbrace{\Delta x_i}_{\ge 0} \ge 0$$

6. Интеграл и модуль

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$

Так как определен $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \in \mathbb{R}$, то можно рассмотреть случаи

$S > 0: \quad \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \sigma_n > 0$ (вблизи S)
$\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$
$S > 0: \quad \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \sigma_n < 0$ (вблизи S)
$\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = -\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$
$S = 0: \lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n| = 0$
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i$ (модуль суммы меньше или равен сумме модулей)

Nota. Интеграл и разрыв: изъятие из отрезка не более, чем счетного числа точек, не меняет значение интеграла, что позволяет считать интеграл на интервале

Nota. Сходимость интеграла в определении интеграла подчеркивает, что это число. Если предел интегральных сумм не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится

Nota. Вычисления. Определение дает способ вычисления и его можно упростить:
$\forall i \ \Delta x_i = \Delta x, \quad \xi_i = \left[\begin{array}{l} x_{i-1} \\ \\ x_i \end{array}\right.$ - концы отрезка
Так вычисляют «неберущиеся интегралы»
Для функций, у которых первообразные выражаются в элементарных функциях используется не этот метод, а формула Ньютона-Лейбница

1.3. Вычисление определенного интеграла

1.3.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Дана $f(x) : [a; +\infty), f(x) \in C_{[a;+\infty)}$
$\forall x \in [a; +\infty)$ определен $\displaystyle\int_a^x f(x)dx$

Таким образом определена функция $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx$ – переменная площадь

В общем случае обозначим $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \quad t \in [a, x]$
Итак, различают три объекта:

1. Семейство функций: $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$
2. Функция $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$
3. Число $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$

Выявим связь между ними.

Th. Об интеграле с переменным верхним пределом (Барроу)

$f(x) : [a; +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) \in C_{[a;+\infty]}$

Тогда $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ – первообразная для $f(x)$, то есть $\Phi(x) = F(x)$

Докажем по определению

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = [\text{по } \mathbf{Th.} \text{ Лагранжа } \exists \xi \in [x; x+\Delta x]] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \xi \to x}} f(\xi) = f(x)$$

Th. Основная теорема математического анализа (формула Ньютона-Лейбница, N-L)

$f(x) \in C_{[a;b]}, F(x)$ – какая-либо первообразная $f(x)$

Тогда $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$

Для $f(x)$ определена $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C$

Найдем значения $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$

$\Phi(a) = F(a) + C = \int_a^a f(t)dt = 0 \Longrightarrow F(a) + C = 0 \Longrightarrow F(a) = -C$

$\Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

1.3.2. Методы интегрирования

1* Замена переменной в определенном интеграле

Th. $f(x) \in C_{[a;b]} \quad x = \varphi(t) \in C'_{[\alpha;\beta]}, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

N-L: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$

Докажем, что $F(x) = F(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$
$\dfrac{dF(\varphi(t))}{dt} = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$
$\dfrac{dF(\varphi(t))}{d\varphi(t)}\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = \dfrac{dF(x)}{dx}\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t)$

Ex. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ x \uparrow_0^{\frac{1}{2}} \quad t \uparrow_0^{\frac{\pi}{6}} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{|\cos t|} \cos t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

2* По частям

Th. $u, v \in C'_{[a;b]}$ $\quad uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

Тогда: $\displaystyle\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

$u(x)v(x)$ – первообразная для $u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
Или $d(uv) = udv + vdu$
По формуле N-L $\displaystyle\int_a^b (udv + vdu) = \int_a^b d(uv) = u(x)v(x)\Big|_a^b$
$\displaystyle\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

Ex. $\displaystyle\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e xd\ln x = e\ln e - 1\ln 1 - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = 1$

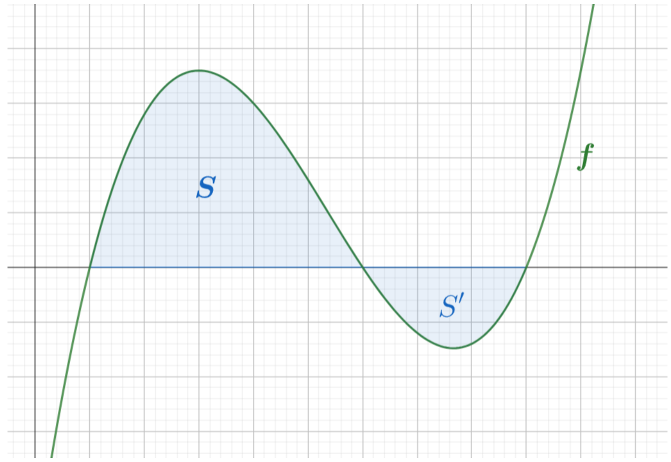
Nota. Не всякий интеграл вида $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ является определенным

Ex. $\displaystyle\int_0^e \ln x dx = x\ln x\Big|_0^e - x\Big|_0^e = e\ln e - \underbrace{0\ln 0}_{0\cdot\infty} - e$ – несобственный интеграл

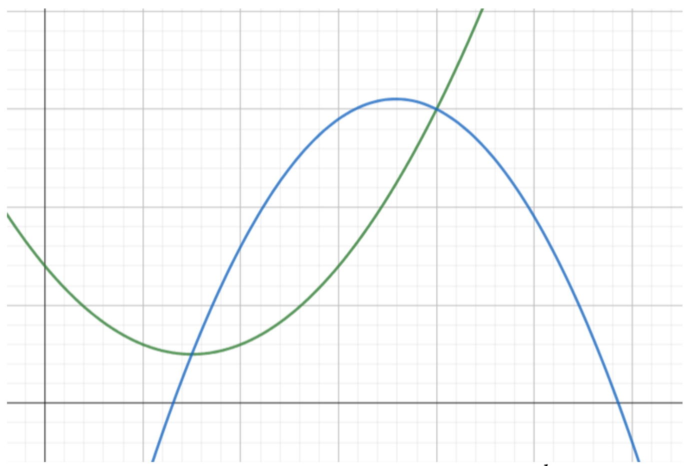
1.4. Приложения определенного интеграла

1.4.1. Площади

1* *Mem.* Значение интеграла - площадь фигуры под графиком



Геом. смысл. $S = \int_a^b f(x)dx \qquad S' = -\int_b^c f(x)dx$



2*

Площадь фигуры, окруженной графиками функций $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$, a, b - абсциссы точек пересечения

Nota. Симметрия

Если $f(x)$ – четная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

1.4.2. Площадь в ПСК

В ДПСК мы производили дробление фигуры на элементарные прямоугольники. Сделаем подобное в ПСК для $\rho(\varphi)$:

1. Дробление $[\alpha; \beta]$ на угловые сектора $[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$
   $\Delta\varphi_i$ - угол сектора
2. Выбор средней точки $\psi_i \in [\varphi_{i-1}; \varphi_i]$, площадь сектора $S_i = \frac{1}{2}\Delta\varphi_i\rho^2(\psi_i)$

3. Интегральная сумма $\sigma_n = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$
4. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i = \dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$

Ex. Кардиоида:
$\rho = 1+\cos\varphi$
$S = \dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\rho^2(\varphi)\Delta\varphi = \int_{0}^{\pi}\rho^2(\varphi)\Delta\varphi = \int_{0}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\Delta\varphi = \int_{0}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\Delta\varphi = \varphi\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}\Delta\varphi = \pi + \dfrac{1}{2}\pi = \dfrac{3}{2}\pi$

Nota. Если фигура задана параметрическими уравнениями:
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$
то площадь будет равна $S = \int_a^b y(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$

1.4.3. Длина кривой дуги

Пусть дуга AB задана уравнением $y = f(x) \quad x \in [a;b]$

1. Производим дробление дуги на элементарные дуги точками $A = M_0 < M_1 < \dots < M_n = B$
   Здесь порядок M_i таков, что их абсциссы $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \Delta x_i > 0$
2. Стягиваем сумму элементарными хордами. Сумма длин этих хорд при уменьшении их длин будет приближать длину этой дуги
   $\Delta s_i = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2}$
   По **Th.** Лагранжа существует такая точка $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, что значение производной в этой точке равно наклону отрезка: $f'(\xi_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta s_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+(y'(\xi_i))^2}\Delta x_i$
4. Предельный переход $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}}\sigma_n = \int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}dx = l_{\text{дуги}}$

Nota. Очевидно, что требуется гладкость дуги, то есть ее спрямляемость. Только при этом условии $\Delta l_i \approx \Delta s_i$, и работает **Th.** Лагранжа
Параметрическое задание:
$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t)\end{cases} \quad t \in [\alpha;\beta]$
$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\varphi'(\theta_i)\Delta t)^2 + (\psi'(\theta_i)\Delta t)^2} = |\Delta t|\sqrt{(\varphi'(\theta_i))^2 + (\psi'(\theta_i))^2}$
$l = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}|dt|$

Ex. Длина эллипса

$L = 4l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{c^2\sin^2 t + b^2}dt = 4\frac{b}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+k^2\sin^2 t}dt$ - эллиптический интеграл

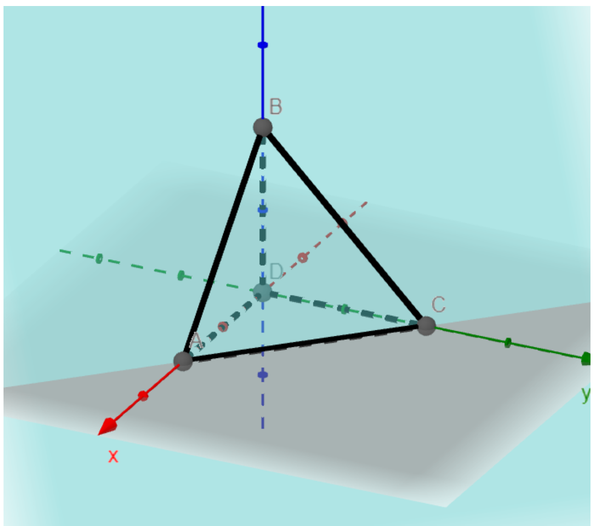
1.4.4. Объемы тел

1* Объемы тел с известными площадями сечений

Для тела известна площадь сечения перпендикулярной Ox плоскости $S(x)$

Аналогично обычному дроблению $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} v_n = \int_a^b S(x)dx = V_{\text{тела}}$

Ex. Тело отсечено от I октанта плоскостью $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$

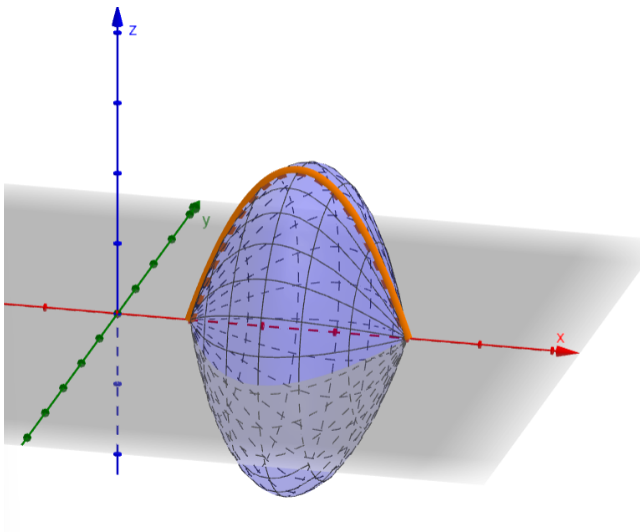


$S(x) = S_{DBC} = \frac{(a-x)^2}{2}$

Тогда $V = \int_0^a \frac{1}{2}(a-x)^2dx = \frac{1}{2}\int_0^a (x-a)^2dx = \frac{1}{2}\int_0^a (x-a)^2d(x-a) = \frac{1}{6}(x-a)^3\Big|_0^a = \frac{a^3}{6}$

Nota. Объем тела вращения

Пусть дана функция $r(x)$, задающая радиус тела вращения на уровне x, тогда объем тела вращения будет равен $\int_a^b \pi r^2(x)dx$

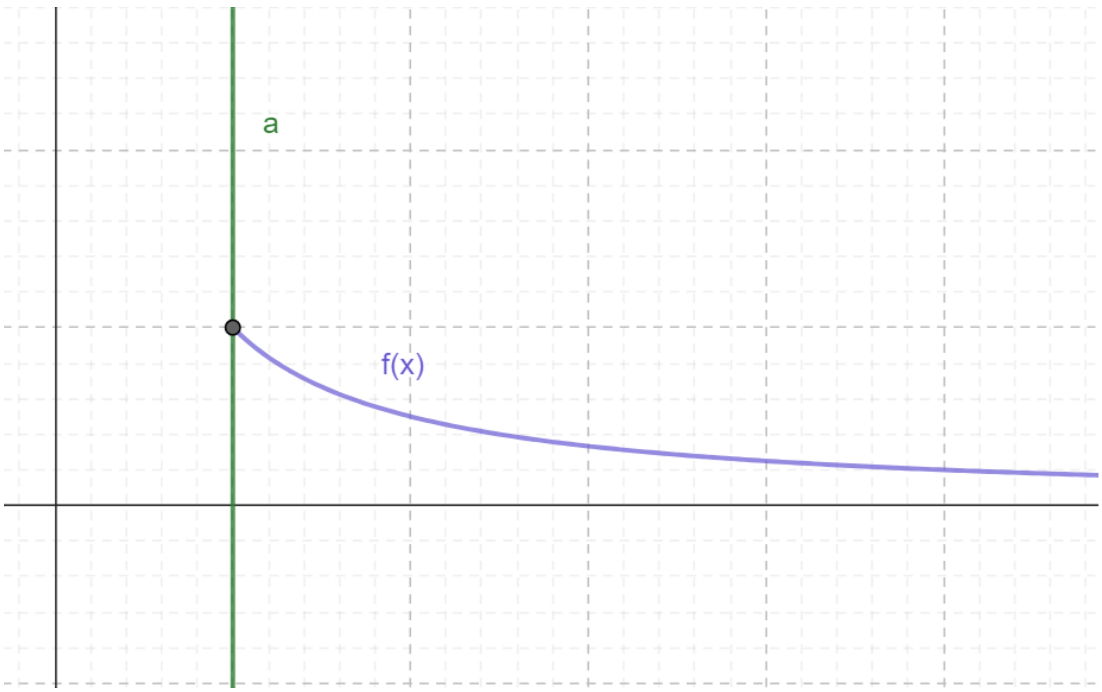

z
y
x

2. Несобственные интегралы

2.1. Определения

2.1.1 Интегралы на неограниченном промежутке

Геометрический смысл: пусть $f(x) : [a; +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) \in C_{[a;+\infty]}$



Тогда определенный интеграл имеет смысл – это площадь под графиком функции:

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

Имеет ли смысл площадь неограниченной фигуры под графиком функции?

Предел функции $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ может быть конечным или бесконечным

Def. 1. Определим несобственный интеграл первого рода (на неограниченном промежутке) ($f(x)$ любого знака):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Nota. Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится. В противном случае – расходится

Def. 2. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[-\infty; b]$ и непрерывна. Тогда определен:

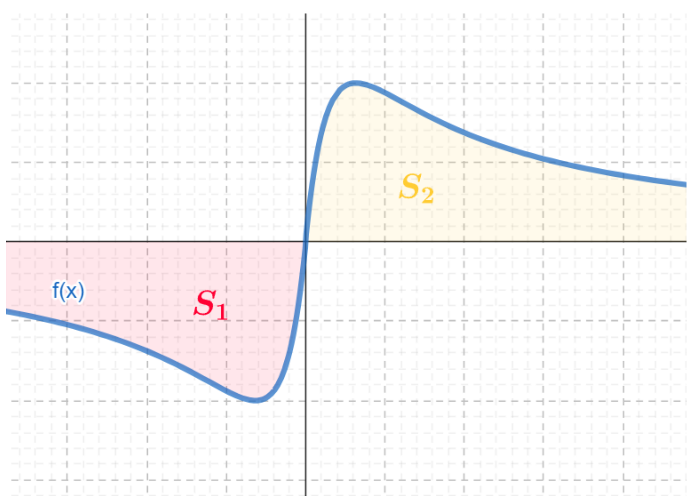
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Def. 3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

Nota. Этот интеграл сходится, если сходятся оба интеграла справа, и расходится, если расходится хотя бы один из них (в том числе если возникает неопределенность $\infty - \infty$)

Ex. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Сделаем ее непрерывной в окрестности нуля:

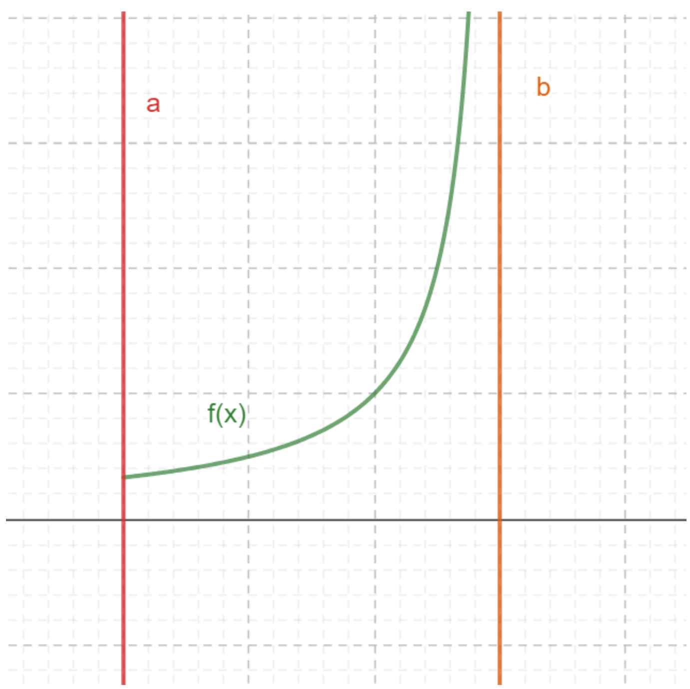


$S_1 = S_2$, но $I_1 = -I_2$. Суммарный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ должен быть равен нулю.
Но по определению $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится
Чтобы учесть обнуление интеграла в ситуации взаимного погашения площадей S_1 и S_2 (а это происходит тогда, когда левый и правый концы промежутка синхронно стремятся к $+\infty$) используют понятие интеграла в смысле главного значения (v. p. - от французского *valeur principale*):
v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to-\infty} \int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx$
Разложение по формуле Ньютона-Лейбница

Ex. 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{c=0} + \operatorname{arctg} x\Big|_{c=0}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(0) + \operatorname{arctg}(0) - \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Ex. 2. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \int_{1}^{+\infty} \frac{d\ln x}{\ln x} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{0}^{+\infty} = \ln\ln x\Big|_{1}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\ln x - \lim\limits_{x\to 1} \ln\ln x = \infty - \infty$ – расходится
Заметим нарушение непрерывности функции $\frac{1}{x\ln x}$ в $x = 1$, что привело к $\ln\ln x \to -\infty$ при $x \to 1$
Это не интеграл первого рода, а комбинация интегралов первого и второго рода

2.1.2 Интеграл от неограниченной на отрезке функции



Пусть дана $f(x) : [a; b) \to \mathbb{R}$, где b – точка разрыва второго рода, а именно бесконечного

Def. 1. Интеграл второго рода (несобственный)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f(x)dx$$

Этот интеграл сходится, если предел существует и конечен

Def. 2. Аналогично для случая, в которой нижний предел a – точка бесконечного разрыва:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a}\int_\alpha^b f(x)dx$$

Def. 3. Для $c \in [a; b]$ – точка бесконечного разрыва:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Интеграл сходится, если оба интеграла сходятся

Ex. 1. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^0 + \ln|x|\Big|_0^1$ – интеграл расходится
Однако без разбиения в точке 0 интеграл легко считается по формуле N-L, что приводит к ошибке: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^1 = 0$

Ex. 2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$ – неверно
$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^0 + -\frac{1}{x}\Big|_0^1$ – расходится

Nota. Если нет разбиения $[a; b]$ по аддитивности, то неопределенности раскрываются

Ex. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|)\Big|_1^2 =$
$= \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|)\Big|_1^2 = \infty$, т. к. разбивается отрезок
$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln(0)\right) = \infty$ - теперь точно ∞

2.2 Свойства

1. Линейность: $\int_a^{+\infty}(\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda\int_a^{+\infty} f(x)dx + \mu\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – если интегралы сходятся (иначе исследуем по определению через предел)
2. Аддитивность: $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$ – отсечение любого конечного

интеграла $\int_a^c f(x)dx$ не влияет на сходимость

3. Знаки интегралов:
$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$ при $f(x) \le g(x)$. Если $g(x)$ сходится, то $f(x)$ тоже сходится
В частности $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le 0$ при $f(x) \le 0$ на $[a; +\infty]$

Nota. Исследование интегралов двух функций используется для определения их сходимости

2.3 Сходимость несобственных интегралов

Задача: Часто нужно исследовать интеграл на сходимость без или до его вычисления (обычно приближенного для неберущихся интегралов)
Требуются признаки сходимости интегралов, часто использующие сравнение с эталонными интегралами (вычисляемые по формуле Ньютона-Лейбница)

1* **Признак сравнения в неравенствах** (далее только для интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, для остальных аналогично)

$f(x), g(x) : [a; +\infty) \to \mathbb{R}^+$, непрерывны на $[a; +\infty)$ и $\forall x \in [a; +\infty)$ $f(x) \le g(x)$
Тогда, если сходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx = I \in \mathbb{R}$, то $J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, причем $0 \le \int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$

Прежде чем использовать свойство определенного интеграла и предельный переход в неравенствах, нужно доказать, что интеграл $J = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ сходится

Так как $f(x) \ge 0$, то $\Phi(x) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to \infty$ – монотонно возрастающая функция
При этом:

$$0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le \lim_{b\to+\infty} \int_a^b g(x)dx = I \in \mathbb{R}$$

Поэтому $J(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена и по признаку Вейерштрасса сходится
Можно использовать предельный переход

$$0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \quad \Big|\lim_{b\to+\infty}$$

$$0 \le J \le I$$

Nota. Можно аналогично сравнить функции отрицательного знака
Если сходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ при $g(x) \le f(x) \le 0$, то сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$
Интегралы от функций разных знаков этим методов не сравниваются
$f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a; +\infty)$, но функции разных знаков, и нижняя площадь, т. е. $\int_a^b |f(x)|dx$, больше верхней

$f(x), g(x) \in C_{[a;+\infty)}$, $0 \le f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a; +\infty)$
$J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится

Lab. (от противного)

Nota. Отметим, что если $f(x)$ не является убывающей к нулю, т. е. бесконечно малой на $+\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ разойдется
Таким образом, если сравнить бесконечно малую $\frac{f(x)}{g(x)}$, то можно исследовать их интегралы на сходимость

2* Предельный признак сравнения

$f(x), g(x) \in C_{[a;+\infty)}$, $f(x), g(x) > 0$
$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ и $J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x > \delta\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon$
$-\varepsilon + k < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + k \quad \Big| \cdot g(x) > 0$
$(k-\varepsilon)g(x) < f(x) < (\varepsilon + k)g(x)$
Т. к. $k > 0\ \left(\frac{f(x)}{g(x)} > 0\right)$ и ε – сколь угодно мало, то $k \pm \varepsilon$ – положительное и не близкое к нулю число
По свойству определенного интеграла: $\int_a^b (k-\varepsilon)g(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b (k+\varepsilon)g(x)dx$
В пределе $\lim\limits_{b\to+\infty}$: $(k-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx < \int_a^{+\infty} f(x)dx < (k+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx$

Если $I = \infty$ (но $k - \varepsilon \neq 0$), то по первому признаку (линейность) J расходится, что следует из правого неравенства
Если $I \in \mathbb{R}$ ($k + \varepsilon \neq \infty$), то по первому признаку (линейность) J сходится, что следует из левого неравенства

3* Абсолютная сходимость

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx = I \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = J \in \mathbb{R}$$

Nota. Обратное неверно

По условию определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Очевидно, что $0 \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b |f(x)|dx = I$

$$-I \leq \int_a^b f(x)dx \leq I$$

$$0 \leq \lim_{b\to\infty}\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx = I$$

Nota. Если $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то I называют условно сходящимся

Ex. $I = \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{8x^2+3}dx$

$$\int_a^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{8x^2+3}\right|dx = \int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{8x^2+3}dx \underset{|\sin x|\leq 1}{\leq} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{8x^2+3}dx = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}\Big|_1^{+\infty} \in \mathbb{R}$$

В качестве эталонных интегралов удобно использовать:
I рода: $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$
II рода: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$
<u>Lab.</u> Исследовать на сходимость в зависимости от $n \in \mathbb{Z}(\mathbb{Q})$

3. Интегралы зависящие от параметра

Задача. *Ex.* $(\alpha \neq 0)$. $\int_0^1 \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \cos \alpha x d\alpha x = \frac{1}{\alpha}\sin \alpha x\Big|_0^1 = \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \phi(\alpha)$

$J(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$ - интеграл, зависящий от параметра

$f(x,\alpha)$ непрерывна в $a \le x \le b$, $c \le \alpha \le d$ и существует непрерывная производная f'_α

Тогда на $[c;d]$ определена $J'_\alpha(\alpha) = \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha dx$

Если последний интеграл берется лучше, чем исходный, то теорема полезна

$J'_\alpha(\alpha) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left(\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_a^b f(x,\alpha)dx\right) =$

$= \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left(\int_a^b (f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha))dx\right)$

По теореме Лагранжа о среднем $\exists\xi\in[\alpha;\alpha+\Delta\alpha]$

$= \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f(x,\xi)dx$

Т. к. f'_α непрерывна, то $f'_\alpha(x,\xi) = \lim\limits_{\xi\to\alpha} f'_\alpha(x,\xi)+\varepsilon = f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon$

Таким образом, $J'_\alpha(\alpha) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx + \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b \varepsilon dx = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\xi)dx$

Ex. $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$

$I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty}\left(e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\right)'_\alpha dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1}{x}x\cos\alpha x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x dx = e^{-x}\frac{\alpha\sin\alpha x-\cos\alpha x}{\alpha^2+1}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1+\alpha^2}$

Из этого следует, что $I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2}dx = arctg(\alpha)+C$

Так как $I(\alpha)$ – несобственный интеграл, это функция, а не семейство функций. Найдем C.

$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin 0\cdot x}{x}dx = 0 \Longrightarrow C = 0$ Таким образом, $I(\alpha) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right)'_\alpha = \operatorname{arctg}(\alpha)$

Ex. Гамма-функция

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad (\alpha > 0)$$

Исследуем на сходимость:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}$$

На отрезке $[0;1]$ $e^{-x} \in [0;1]$. Тогда $0 \leq \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx \leq \int_0^1 x^{\alpha-1}dx \Longrightarrow$ интеграл сходится

Пусть $n > \alpha - 1, n \in \mathbb{N}$, тогда:

$\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \leq \int_1^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ – по частям, появятся $x^k e^{-x}\Big|_1^{+\infty} \to 0$ и $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится

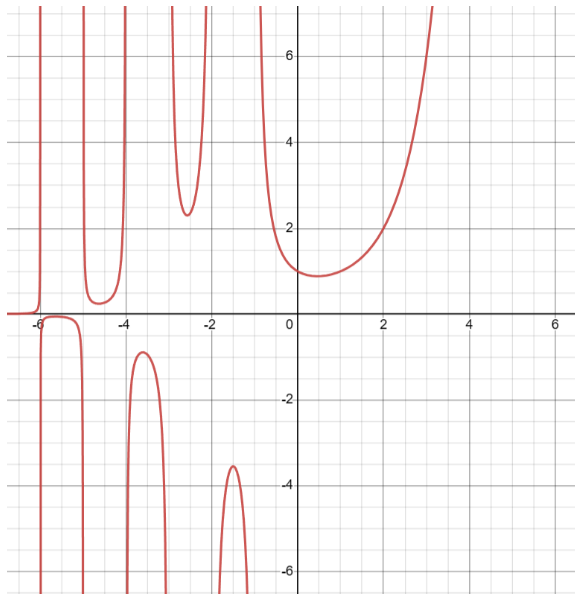
Найдем формулу для $\Gamma(\alpha)$:

$\alpha \in \mathbb{N}$ $\quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}de^{-x} = -x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_1^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^{\alpha-2}(\alpha-1)e^{-x}dx = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = (\alpha-1)!\Gamma(1) = (\alpha-1)!$

$\Gamma(n+1) = n!$

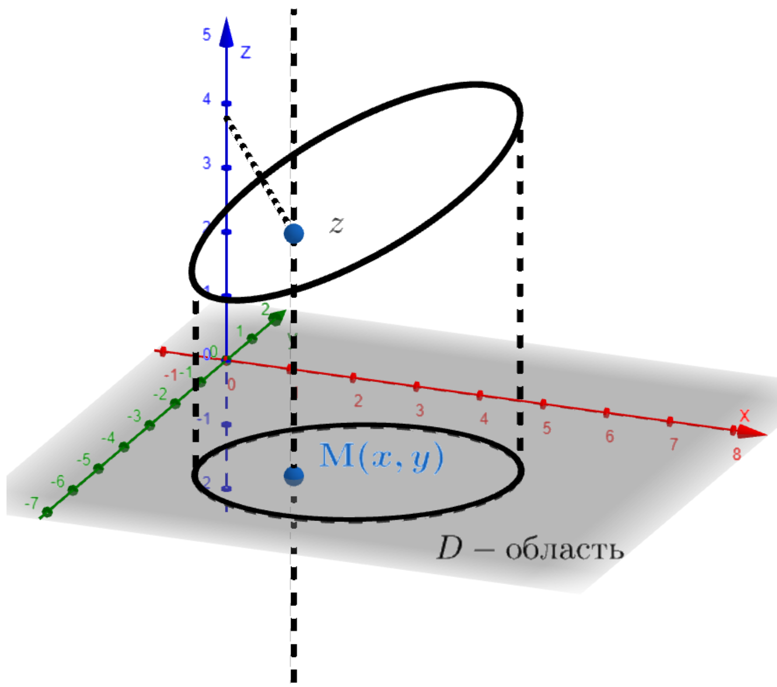
Lab. Посмотреть, как обобщается понятие факториала на вещественные числа:



4. Функция нескольких переменных (ФНП)

4.1. Определение

Nota. Дадим определение функции нескольких переменных



$\forall M(x, y)\ \exists! z \in \mathbb{R} : z = f(x, y) \iff z = f(x, y)$ – функция двух переменных

Def. Окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$
$U_\delta(M_0) = \{(x, y) \in Oxy : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2, \delta > 0$ – радиус$\}$
$\overset{\circ}{U}_\delta(M_0) = U_\delta(M_0) \setminus \{M_0\}$ – выколотая окрестность

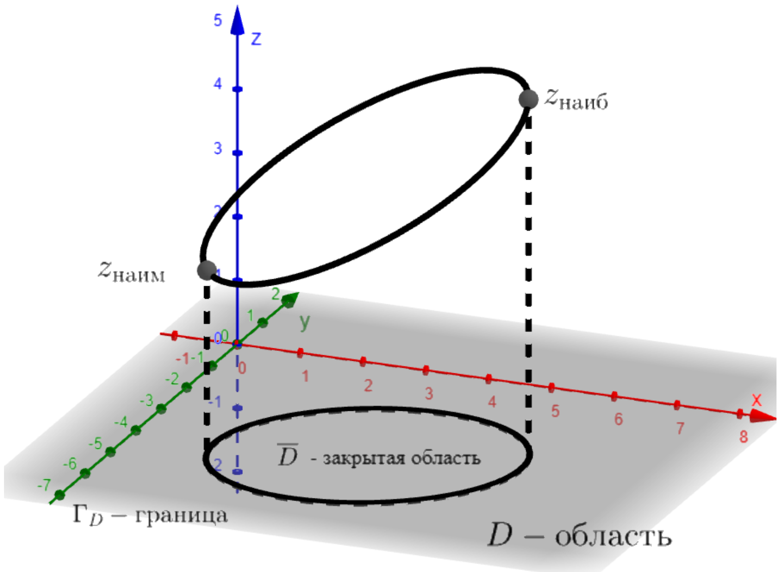
Nota. $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$, одновременное стремление $\Delta x, \Delta y \to 0$ можно заменить $\Delta\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \to 0$

Def. $\lim\limits_{M \to M_0} z(x, y) = L \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0\ \underset{\delta = \delta(\varepsilon)}{\exists \delta > 0} \mid \forall M \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0)\ |z(x, y) - L| < \varepsilon$
Здесь M_0 – точка сгущения, и $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

Nota. На плоскости Oxy возможно стремление $M \to M_0$ по разным путям $F(x, y) = 0$ (уравнение кривой)
При этом значение предела вдоль разных путей могут отличаться (аналог односторонних пределов)

Предел в определении – предел в общем смысле: его существование и значение не зависит от пути

Def. $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M(x_0, y_0)$, если $z = f(x_0, y_0) = \lim\limits_{M \to M_0} z(x, y)$
z непрерывна на D, если z непрерывна $\forall (x, y) \in D$



Nota. Справедливы теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши для функции, непрерывной в заданной области
$z = f(x, y)$ непрерывна на $\overline{D} = D \cup \Gamma_D$, где $\overline{D}$ - закрытая область, D - открытая область, Γ_D - граница

Th. W1. $z = f(x, y)$ ограничена на $\overline{D}$

Th. W2. Для функции $z = f(x, y)$ существуют наибольшее и наименьшее z для $(x, y) \in \overline{D}$

Th. B-C1. На границе Γ_D z принимает значения разных знаков $\Longrightarrow \exists M \in \overline{D} : z(M) = 0$

Th. B-C1. $z(x, y)$ принимает все значения от $z_{\text{наим}}$ до $z_{\text{наиб}}$

4.2. Производные функции двух переменных

Путям l_1, l_2 соответствуют кривые L_1, L_2 на поверхности $z = f(x, y)$.

Пользуясь геометрическим смыслом производной, заметим, что касательные к L_1, L_2 могут быть различными.
Поэтому для определения производной выберем координатные направления $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$
$z = f(x = c, y)$
$\frac{\partial z}{\partial y} \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, где $\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$

Def. Частной производной $z = f(x, y)$ по y называется $\frac{\partial z}{\partial y} \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$
Lab. Аналогично дать определение $\frac{\partial z}{\partial x}$
Nota. $\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$ и $\Delta_y z$ называют частным приращением

Def. Полное приращение $\Delta z \overset{def}{=} z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)$
Nota. При этом $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$!!!
Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = z_x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = z_y$
Как определить функцию, дифференцируемую в точке?
По аналогии $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $A, B \in \mathbb{R}$, α, β – бесконечно малые

Th. $z : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\exists$ непрерывные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
Тогда дифференциал функции представим как $\Delta z = Adx + Bdy + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $A, B \in \mathbb{R}$, α, β – бесконечно малые

$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y) = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y) + z(x + \Delta x, y) - z(x, y)$
По теореме Лагранжа:
$z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y) = z'_y(\eta)\Delta y$
$z(x + \Delta x, y) - z(x, y) = z'_x(\xi)\Delta x$
По теореме о представлении функции ее пределом:
$z'_x(\xi) = \lim\limits_{\substack{\xi \to x \\ (\Delta x \to 0)}} z'_x(\xi) + \alpha$
$z'_y(\eta) = \lim\limits_{\eta \to y} z'_y(\eta) + \beta$
Так как $z'_x(\xi), z'_y(\eta)$ непрерывны, то $\lim\limits_{\xi \to x} z'_x(\xi) = \frac{\partial z}{\partial x}, \lim\limits_{\eta \to y} z'_y(\eta) = \frac{\partial z}{\partial y}$
Тогда $\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \beta\right)\Delta y = \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$

Заметим, что $\alpha\Delta x$ и $\beta\Delta y$ – бесконечно малые порядка выше, чем $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \iff$
$1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)^2} \quad \left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \le 1, \left|\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right| \le 1$

Сравним $\alpha\dfrac{\Delta x}{\Delta\rho} = \text{б.м.}\cdot\text{огран.} \overset{\Delta\rho\to 0}{\to} 0$, $\dfrac{\beta\Delta y}{\Delta\rho} \overset{\Delta\rho\to 0}{\to} 0$

Функция, приращение которой представимо $\Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(\Delta\rho)$, называется дифференцируемой в точке (x, y), линейная часть приращения называется полным дифференциалом

Обозначение: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

Ex. $z = 3xy^2 + 4\cos xy$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} \overset{y=\text{const}}{=} 3y^2 - 4\sin xy \cdot y$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} \overset{x=\text{const}}{=} 6xy - 4\sin xy \cdot x$

$dz = (3y^2 - 4y\sin xy)dx + (6xy - 4x\sin xy)dy$

4.3. Правила дифференцирования

Nota. При нахождении $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ (x_i - какая-либо переменная) дифференцирование проводится по правилам для функции одной переменной ($x_j \neq x_i$ считаются константами)

Выпишем более сложные правила

1* Сложная функция

Mem. $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Def. Сложная функция двух переменных – $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y), v = v(x, y)$

Формула: Найдем $\dfrac{\partial z(u, v)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z(u, v)}{\partial y}$

Th. $z = z(u, v)$, $u(x, y), v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по x, y

Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$

z дифференцируема $\Longleftrightarrow \Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v$

Зададим приращение Δx (представление Δz не должно измениться)

$\Delta_x z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x + v \quad \Big| \cdot \Delta x$

$\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\dfrac{\Delta_x v}{\Delta x}$

По теореме Лагранжа: $\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x}(\xi) \overset{\Delta x\to 0}{\to} \dfrac{\partial u}{\partial x}$

В пределе: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$
Аналогично для $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Nota. Интересен случай $z = z(x, u, v)$, где $u = u(x), v = v(x)$

Здесь z является функцией одной переменной x

Обобщая правило на случай трех переменных, можем записать формулу полной производной, которая имеет смысл

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Ex. Пусть $w = w(x, y, z)$ – функция координат, $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ – функции времени w явно не зависит от времени, тогда $\dfrac{dw}{dt} = w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z$, где v_x – проекция скорости

Если $w = w(x, y, z, t)$, то $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t}(w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z)$

2* **Неявная функция одной переменной**: пусть $F(x, y(x)) = 0$ – неявное задание $y = y(x)$

Найдем $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy = 0$

Отсюда $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

4.4. Производная высших порядков

Nota. Пусть $z = z(x, y)$ дифференцируема, $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ также дифференцируемы, при этом в общем случае $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f(x, y), \dfrac{\partial z}{\partial y} = g(x, y)$

Тогда определены вторые частные производные

Def. Функция $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial x}$ называется второй частной производной

Функции $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ называются чистыми производными, а $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – смешанными

Th. $z = z(x, y)$, функции $z(x, y), z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ определены и непрерывны в $\overset{\circ}{U}(M(x, y))$
Тогда $z''_{xy} = z''_{yx}$

Введем вспомогательную величину
$\Phi = (z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x+\Delta x, y)) - (z(x, y+\Delta y) - z(x,y))$
Обозначим $\phi(x) = z(x, y+\Delta y) - z(x,y)$
Тогда $\Phi = \phi(x+\Delta x) - \phi(x)$ – дифференцируема, непрерывна, как комбинация
По теореме Лагранжа $\phi(x+\Delta x) - \phi(x) = \phi'(\xi)\Delta x = (z'_x(\xi, y+\Delta y) - z'_x(\xi, y))\Delta x$, где $\xi \in (x; x+\Delta x)$
Здесь z'_x дифференцируема также на $[y, y+\Delta y]$
Тогда по теореме Лагранжа $\exists \eta \in (y, y+\Delta y) \mid z'_x(\xi, y+\Delta y) - z'_x(\xi, y) = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta y$
Таким образом $\Phi = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x \Delta y$
Перегруппируем Φ, далее аналогично для z''_{yx}
Тогда $z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x\Delta y = \Phi = z''_{yx}(\xi', \eta')\Delta x \Delta y$

4.5. Дифференциалы

Мет. 1. Полный дифференциал (1-ого порядка) функции $z = z(x,y)$
$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ – сумма частных дифференциалов

Мет. 2. Инвариантность формы первого дифференциала функции одной переменной
$dy(x) = y'(x)dx \overset{x=\phi(t)}{=} y'(t)dt$

Th. Инвариантность полного дифференциала первого порядка.
$z = z(u,v), \quad u = u(x,y), \quad v = v(x,y)$ - дифференциалы
Тогда $dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

$dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \dfrac{\partial z}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

Мет. $d^2y(x) \overset{def}{=} d(dy(x)) = y''(x)dx^2 \neq y''(t)dt^2$

Def. : $z = z(x,y)$ – дифференцируема и $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ – дифференцируемая функция

Тогда второй полный дифференциал равен $d^2z \overset{def}{=} d(dz)$
Формула: $d^2z = d\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy\right) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy = (z'_x dx)'_x dx + (z'_y dy)'_x dx +$

$(z'_x dx)'_y dy + (z'_y dy)'_y dy = (z'_x)'_x (dx)^2 + (z'_y)'_x dxdy + (z'_x)'_y dydx + (z'_y)'_y (dy)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$

Nota: Заметим формальное сходство с биномом Ньютона: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

Введем условное обозначение $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$

Тогда $d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z$, здесь $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$ – оператор второго полного дифференцирования

$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$ – дифференциал n-ого порядка

Nota: Можно ли утверждать, что $d^2 z(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z \overset{x=x(u,v),y=y(u,v)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$?

Нет, нельзя ($d^2 z$ не инвариантен при замене)

Покажем, что не выполняется в простом случае: $z = z(x,y) = z(x(t), y(t))$ – параметризация.

Геометрически, это выбор пути в области D от точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x,y)$

Итак:

$$d(dz) \overset{z-\Phi_1\Pi}{=} (dz)'_t dt = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_t dt = \begin{bmatrix} dx(t) = \frac{dx}{dt}dt \\ dy(t) = \frac{dy}{dt}dt \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)'_t dt^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right)'_t dt^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)'_t dt^2 = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_t \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right)'_t\right)dt^2 + \left(\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_t \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right)'_t\right)dt^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2}\right)dt^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2}\right)dt^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y}d^2 y + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dydx = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2 y$$

$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$ – линейная параметризация

Lab. Дать инвариантность при линейной параметризации

Причем, это свойство верно для $d^n z$, то есть если $\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$ (например), то $d^n z \overset{z=z(t)}{=} z^{(n)}(t) dt$

4.6. Формула Тейлора

Mem. $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \begin{bmatrix} o((x-x_0)^n) & \text{– ост. в форме Пеано} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} & \text{– ост. в форме Лагранжа} \end{bmatrix}$

В дифференциалах:

$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} +$ остаток

Формула Тейлора для $z = z(x,y)$ в окрестности $M_0(x_0, y_0)$ (как раньше $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$)

$z(M \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0)) = z(M_0) + \dfrac{dz(M_0)}{1!} + \dots + \dfrac{d^n z(M_0)}{n!} + o((\Delta\rho)^n)$

Nota. Формула выше верна, если $z = z(x, y)$ непрерывна со своими частными производными до $n+1$ порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(M_0(x_0, y_0))$, где $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$
Для линейной параметризации форма дифференциала сохраняется
$d^2 z = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z \overset{\text{инвариант}}{=} z_t^{(n)} dt^n$
Введем функцию: $z(x(t), y(t)) \overset{\text{обозн}}{=} \varphi(t)$ – она $(n+1)$ раз дифференцируема (композиция $(n+1)$ дифференцируемых и линейных функций)
Заметим, что $x = x_0 + \Delta x t \overset{t_0=0}{=} x_0$, $y = y_0 + \Delta y t \overset{t_0=0}{=} y_0$, тогда $M \overset{t \to t_0 = 0}{\to} M_0$
То есть $z(M_0) = z(x_0, y_0) = z(x(t_0), y(t_0)) = \varphi(t_0) = \varphi(0)$
Таким образом $\varphi(t)$ как функция одной переменной может быть разложена в окрестности $t_0 = 0$ по формуле Маклорена

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{d\varphi(0)}{1!}\Delta t + \dots + \frac{d^n\varphi(0)}{n!}\Delta t^n + o((\Delta t)^n)$$

Вернемся к $z(x, y)$ ($\Delta t = t - t_0 = 1$):

$$z(x, y) = z(M) = z(M_0) + \frac{dz(M_0)}{1!} + \frac{d^2 z(M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n z(M_0)}{n!} + r_n(x, y)$$

где остаток в форме Лагранжа $r_n(x, y) = r_n(t) = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(\theta\Delta t)}{(n+1)!}\Delta t = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(\theta\Delta t)}{(n+1)!}$
Остаток $r_n(x, y)$ должен быть бесконечно малым по отношению к $(\Delta\rho)^n$, то есть $r_n(x, y) = o((\Delta\rho)^n)$
$\big(r_n(t) \overset{n\to\infty}{\to} 0$, если $\varphi(t)$ нужное число раз дифференцируема $\Rightarrow$ ограничена, $r_n(t)$ – ограниченная бесконечно малая$\big)$

Nota. В дальнейшем для исследования $z(x, y)$ на экстремум достаточно разложения по формуле Тейлора до 2-ого порядка включительно. Покажем сходимость $r_n(x, y) \overset{(\Delta\rho)^n \to 0}{\to} 0$ на примере
$r_2(x, y) = \dfrac{d^3 z(M_{\text{сред.}})}{3!}$
$r_2(x, y) = \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^3 z = \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + 3\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(\Delta x)^2\Delta y + 3\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}(\Delta y)^2\Delta x \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}(\Delta y)^3\right)$
Вообще говоря, значения частных производных берутся в различных средних точках
$r_2(x, y) = \dfrac{1}{3!}(z_{xxx}(\mu_1)(\Delta x)^3 + 3z_{xxy}(\mu_2)(\Delta x)^2\Delta y + z_{xyy}(\mu_3)(\Delta y)^2\Delta x + 3z_{yyy}(\mu_4)(\Delta y)^3) = \Big[\text{вынесем } (\Delta\rho)^3\Big] =$
$\dfrac{(\Delta\rho)^3}{3!}\left(\text{огран.} \cdot \dfrac{(\Delta x)^3}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.} \cdot \dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.} \cdot \dfrac{(\Delta y)^2\Delta x}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.} \cdot \dfrac{(\Delta y)^3}{(\Delta\rho)^3}\right)$
$\dfrac{(\Delta x)^3}{(\Delta\rho)^3} = \dfrac{(\Delta x)^3}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}^3} \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, то есть дробь и выражение выше ограничены
$\dfrac{r_2(x, y)}{(\Delta\rho)^2} = \dfrac{1}{3!}\dfrac{(\Delta\rho)^3 \cdot \text{огр.}}{(\Delta\rho)^2} = \dfrac{1}{3!}\Delta\rho \cdot \text{огр.} \overset{\Delta\rho \to 0}{\to} 0$

4.7. Геометрия ФНП

4.7.1. Линии и поверхности уровня

Положим $z = \text{const}$.

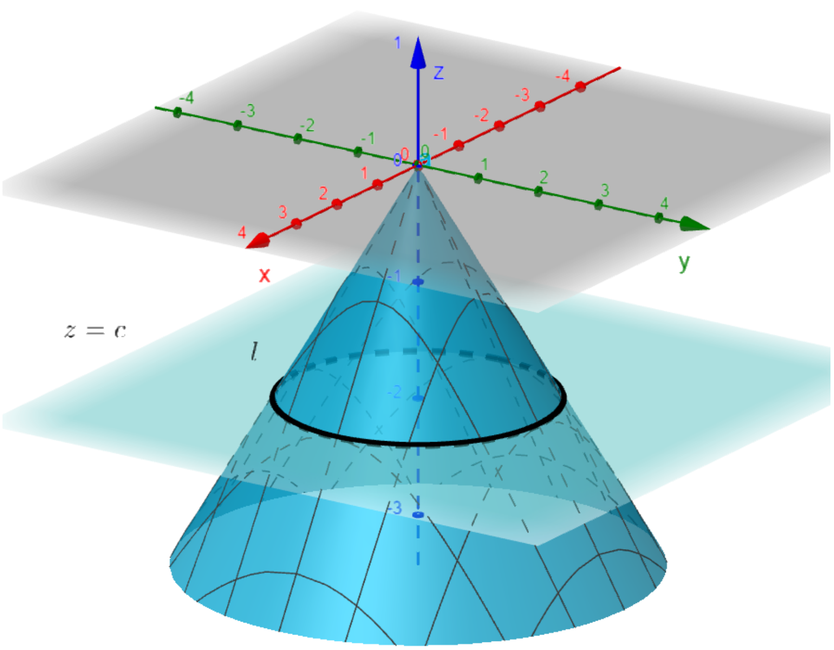
В сечении плоскостью $z = c$ образуется кривая l с уравнением $\begin{cases} z = c \\ \varphi(x, y) = 0 \leftarrow \text{уравнение } l_{\text{проек}} \text{ на } Oxy \end{cases}$

Кривая l с уравнением $z(x, y) = c$ называется линией уровня функции двух переменных $z = z(x, y)$

Def. Поверхность уровня $\mathcal{P}$ – это поверхность с уровнем $u(x, y, z) = c$

Физический смысл: Пусть $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (значения функции $u(x, y, z)$ – скаляры). Тогда говорят, что в $\mathbb{R}^3$ задано скалярное поле. Например, поле температур, давления, плотности и т. д. Тогда $u = c$ – поверхности постоянных температур, давления и т. п. (изотермические, изобарные, эквипотенциальные)

Ex. Конус: $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$



Линии уровня $z = c$:

1. $c > 0 \quad \varnothing$
2. $c = 0 \quad x = y = 0 -$ точка $(0, 0)$
3. $c < 0 \quad -|c| = -\sqrt{x^2 + y^2}$ или $c^2 = x^2 + y^2$

4.7.2. Производная по направлению, градиент

Задача. Дано скалярное поле $u = u(x, y, z)$ (например, давления). Как меняется давление при перемещении в заданном направлении?

Это задача о нахождении скорости изменения $u(x, y, z)$ в заданном направлении $\vec{s}$

Из $M_0(x_0, y_0, z_0)$ движемся в $M(x, y, z)$ в направлении $\vec{s}$, $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, $z = z_0 + \Delta z$

$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\Delta s}$

$1 = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta z}{\Delta s}\right)^2}$

$\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta s}, \dfrac{\Delta y}{\Delta s}, \dfrac{\Delta z}{\Delta s}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \vec{s^0}$

Потребуем, чтобы $u(x, y, z)$ имела непрерывность u_x, u_y, u_z в D

То есть $u(x, y, z)$ дифференцируема и $\Delta u = du + o(\Delta s) = u_x\Delta x + u_y\Delta y + u_z\Delta x + o(\Delta s)$

$\dfrac{\Delta u}{\Delta s} = u_x\cos\alpha + u_y\cos\beta + u_z\cos\gamma + \dfrac{o(\Delta s)}{\Delta s}$

В предельном переходе получаем: $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

Nota. Изначально $\Delta u = du + (\text{б. м.})\Delta x + (\text{б. м.})\Delta y + (\text{б. м.})\Delta z \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\Delta s}$

$\dfrac{\Delta u}{\Delta s} = \dfrac{du}{\Delta s} + (\text{б. м.})\cos\alpha$, $(\text{б. м.})\cos\alpha \to 0$

Def. Производной функции $u = u(x, y, z)$ в направлении $\vec{s}$ называют величину $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где α, β, γ - направления $\vec{s}$

Nota. Производная в определении – число, но $\dfrac{\partial u}{\partial s}\vec{s^0}$ – вектор скорости

Nota. Заметим, что если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – декартовы орты, то $\dfrac{\partial u}{\partial i} = \dfrac{\partial u}{\partial x}1 + \dfrac{\partial u}{\partial y}0 + \dfrac{\partial u}{\partial z}0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

И аналогично в других направлениях: $\dfrac{\partial u}{\partial j} = \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial k} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$

Составим вектор $\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \overset{\text{обозн}}{=} \vec{\nabla}u$

$\vec{\nabla}$ – набла-оператор (оператор Гамильтона); $\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ – условный вектор

Def. $\overrightarrow{\text{grad}}\ u \overset{def}{=} \vec{\nabla}u$ – называют градиентом функции $u(x, y, z)$

Свойства градиентов:

Th. 1. $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \text{проек.}_{\vec{s}}\vec{\nabla}u$

В любом заданном направлении $\overrightarrow{s}$ производная $\dfrac{\partial u}{\partial s}|_M$ равна проекции градиента в M

Th. 2. $\vec{\nabla}u$ – направление наибольшего значения $\dfrac{\partial u}{\partial s}$

Th. 3. $\vec{s} \perp \vec{\nabla}u \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial s} = 0$

Th. 4. $u = u(x, y), u = c$ – линии уровня l. Тогда $\vec{\nabla}u \perp l$

Прямая, содержащая $\vec{\nabla}u$ (т. е. перпендикулярная касательной к l), называется нормалью к l а тогда $\vec{\nabla}u$ – вектор нормали

Доказательства:

1. $$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \vec{s^0}\right) u = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) u \cdot \vec{s^0} = \vec{\nabla}u \cdot \vec{s^0}$$
$$|\vec{\nabla}u \cdot \vec{s^0}| = |\vec{\nabla}u||\vec{s^0}| \cos(\widehat{\vec{\nabla}u, \vec{s^0}}) = |\vec{\nabla}u| \cos(\widehat{\vec{\nabla}u, \vec{s^0}}) = \text{проек.}_{\vec{s}}\vec{\nabla}u$$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial s} = |\vec{\nabla}u| \cos\varphi$, где φ - угол между $\vec{s}$ и $\vec{\nabla}u$
Косинус принимает наибольшее значение, если угол между $\vec{s}$ и $\vec{\nabla}u$ равен нулю, то есть направления векторов совпадает. Значит, при $\vec{s} = \vec{\nabla}u$ производная принимает наибольшее значение

3. Из доказательства **Th. 2.** следует, что если $\vec{s}$ сонаправлен с $\vec{\nabla}u$, то производная принимает наибольшее значение. Следовательно, если $\vec{s} \perp \vec{\nabla}s$, то $\cos\varphi = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial s} = 0$

4. $u = c$ – уравнение $l_{\text{пр}}$ в плоскости Oxy, то есть $u(x, y) = c$ мы можем рассмотреть как неявную функцию $u(x, y(x)) - c = 0$
Производная неявной функции: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{u_x}{u_y} = k_l$ – угловой коэффициент касательной к l

$\vec{\nabla} u = (u_x, u_y) \quad \dfrac{u_y}{u_x} = k_{\text{град.}}$ – наклон вектора градиента.
Очевидно $k_l \cdot k_{\text{град.}} = -1 \Longrightarrow \vec{\nabla} u \perp l$

4.7.3. Касательная и нормаль к поверхности

Будем исследовать поверхность π с уравнением $F(x, y, z(x, y)) = 0$ (неявное задание)

Def. Прямая τ называется касательной прямой к поверхности π в точке $P(x, y, z)$, если эта прямая касается какой-либо кривой, лежащей на π и проходящей через P
Nota. Кривая получается (обычно) сечением π какой-либо плоскостью
Nota. В одной точке может быть множество касательных, но это не всегда так

Nota. Договоримся различать два типа точек поверхности: обыкновенные и особые

Def. Поверхность π задана $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Точка M называется обыкновенной, если существуют все $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$, они непрерывны и не все равны нулю
Def. Точка M называется особой, если $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$ или хотя бы одна из производных не существует

Th. Все касательные прямые к π в обыкновенной точке M_0 лежат в одной плоскости

$\vec{s}$ – направляющий вектор касательной τ, проведенной к кривой l в некоторой секущей плоскости
$d\vec{s}$ – вектор малых приращений, то есть $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$
$d\vec{p}$ – проекция $d\vec{s}$ на Oxy, то есть $d\vec{p} = (dx, dy)$

Кривую l можно задать параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \xi(t) \\ z = \theta(t) \end{cases}$

Прямая τ имеет уравнение

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}$$

При отходе от M_0 на малое расстояние по поверхности (точнее по кривой l) задаем приращение $dt \neq 0$
Домножим уравнение на dt

$$\frac{x-x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y-y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z-z_0}{\frac{dz}{dt}}$$

Из условия обыкновенности точки M_0 следует дифференцируемость функции F. Кроме того, уравнение можно преобразовать к виду $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, где $x(t), y(t), z(t)$ – тоже дифференцируемы в точке M_0

Запишем F'_t, как вложенную:

$$F'_t = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Или $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = 0$

Таким образом, $\vec{N} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = 0$. То есть $\vec{N} \perp \frac{d\vec{s}}{dt}$, при том, что $d\vec{s}$ выбран произвольно (кривая l – кривая произвольного сечения)

Итак, вектор $\vec{N}$ перпендикулярен любой касательной τ к поверхности π в точке M_0. Следовательно, все касательные лежат в плоскости κ такой, что $\vec{N} \perp \kappa$

Def. Плоскость κ (содержащая все касательные прямые τ к π в точке M_0) называется касательной плоскостью к π в M_0

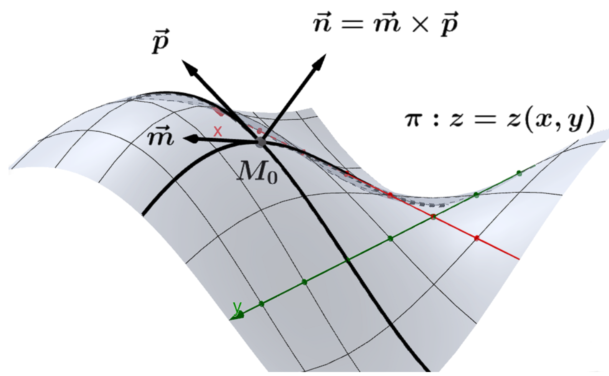
Def. Прямая в направлении $\vec{N}$ через точку M_0 называется нормалью к π в M_0

$\vec{N}$ – вектор нормали к поверхности в точке

Уравнение (π)	$F(x,y,z) = 0,\ \vec{N} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right),\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi, \kappa, n$
Касательная плоскость (κ)	$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0) = 0$
Нормаль (n)	$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

Nota. Получим вектор нормали в случае явного задания $\pi \quad z = z(x,y)$

Пересечем π в точке M_0 плоскостями $x = x_0, y = y_0$, в сечении получим кривые с касательными векторами $\vec{m}$ и $\vec{p}$ в точке M_0



Вектор нормали к π в $M_0 \quad \vec{n} = \vec{m} \times \vec{p}$

Найдем $\vec{m}, \vec{p}$. В сечении $x = x_0$ введем вектор $d\vec{p} || \vec{p}$:

$d\vec{p} = \left(0, dy, \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$

Аналогично найдем $\vec{m}$ в сечении $y = y_0$:

$\vec{m} || d\vec{m} = \left(dx, 0, \frac{\partial z}{\partial x}dx\right) = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right)dx$

Так как модуль $\vec{n}$ не важен, а только направление, то будем искать $\vec{n} = \left(1, 0, \dfrac{\partial z}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \vec{j}\frac{\partial z}{\partial y} + \vec{k} =$$

$$= \left(-\frac{\partial z}{\partial x}; -\frac{\partial z}{\partial y}; 1\right)$$

Тогда уравнение κ:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0) = dz$$

Уравнение нормали n: $\dfrac{x - x_0}{-\frac{\partial z}{\partial x}} = \dfrac{y - y_0}{-\frac{\partial z}{\partial y}} = \dfrac{z - z_0}{1}$

Nota. Последние уравнения можно получить проще, если свести уравнение $z = f(x, y)$ к уравнению $z - f(x, y) = F(x, y, z) = 0$

Lab. Вывести уравнение κ и n, пользуясь предыдущим замечанием

Nota. Если найти $\vec{n^-} = \vec{p} \times \vec{m} = -(\vec{m} \times \vec{p})$, то получим также вектор нормали, но обращенный в противоположную сторону

Будем говорить, что $\vec{n^+}$ - положительный вектор нормали, если угол $\angle\gamma = \angle(\vec{n^+}, Oz) \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\vec{n^-}$ - отрицательный, если угол $\angle\gamma = \angle(\overrightarrow{n^-}, Oz) \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$

Соответственно этому верхней стороной π называется та, у которой аппликата вектора нормали положительна

Нижней стороне соответствует $\overrightarrow{n^-}$. Если $\overrightarrow{n} \perp Oz$, то это боковая сторона

4.7.4. Экстремумы ФНП ($\Phi_2\Pi$)

Def. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z = z(x, y)$, если $\forall M \in U_\delta(M_0) \quad z(M_0) \geq z(M)$ (для минимума $z(M_0) \leq z(M)$)

Nota. То же, что $z(M) - z(M_0) = z - z_0 = \Delta z \leq 0$ (max), $\quad \Delta z \geq 0$ (min)

Mem. Для функции одной переменной формулировали необходимое условие экстремума (лемма Ферма), из этого условия получали точки, подозрительные на экстремум: критические – $f'(x_0) = 0$ или $\nexists f'(x_0)$ (для острого экстремума); стационарные – $\exists f'(x_0) = 0$ (частный случай критич.)

Далее при помощи достаточных условий (признаков) проверяли наличие экстремума в критических точках

Nota. Все термины переносятся на функции нескольких переменных. Необходимое условие и достаточное условие аналогичны

Th. Необходимое условие экстремума (гладкого):
$z = z(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; z_0 - точка гладкого экстремума, то есть $\exists \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ в M_0 и $\forall M \in U_\delta(M_0)$ $z_0 \le z(M)$ или $z_0 \ge z(M)$

Тогда $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} = 0 \end{cases}$

Аналогично лемме Ферма в сечениях $x = x_0$, $y = y_0$

Для существования острого экстремума нужно рассмотреть не существование или бесконечность $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$
Если же функция трижды дифференцируема исследования на характер экстремума можно проводить с помощью вторых производных

Th. Достаточное условие (гладкого) экстремума
Пусть $z = z(x, y)$ непрерывна в окрестности M_0 (критическая точка $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} = 0, \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} = 0$) вместе со своими первыми и вторыми производными (можно потребовать трижды дифференцируемость)
Тогда, если $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{\text{обозн}}{=} A, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \overset{\text{обозн}}{=} B, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \overset{\text{обозн}}{=} C$, то

1. $AC - B^2 > 0, A > 0 \Longrightarrow M_0$ – точка минимума
2. $AC - B^2 > 0, A < 0 \Longrightarrow M_0$ – точка максимума
3. $AC - B^2 < 0 \Longrightarrow$ в точке M_0 нет экстремума
4. $AC - B^2 = 0 \Longrightarrow$ нельзя утверждать наличие или отсутствие экстремума в точке (требуются дополнительные исследования)

Функция z дважды дифференцируема, тогда $(z_0 = z(M_0))$
$\Delta z = z - z_0 = \dfrac{dz}{1!}\Big|_{M_0} + \dfrac{d^2 z}{2!}\Big|_{M_0} + o((\Delta\rho)^2)$
$\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, $dx = \Delta\rho\cos\alpha, dy = \Delta\rho\sin\alpha$
$o((\Delta\rho)^2) = \lambda(\Delta\rho)^3$
Заметим, что $dz\Big|_{M_0} = 0$, так как M_0 – критическая
$d^2 z = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 = A(dx)^2 +$

$2Bdxdy + C(dy)^2 = A(\Delta\rho)^2\cos^2\alpha + 2B(\Delta\rho)^2\cos\alpha\sin\alpha + C(\Delta\rho)^2\sin^2\alpha$

Тогда $\Delta z = \dfrac{1}{2}(\Delta\rho)^2(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha + 2\lambda\Delta\rho)$

Далее рассмотрим отдельно случаи $A \neq 0$ и $A = 0$

$A \neq 0$: $A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha = \dfrac{A^2\cos^2\alpha + 2AB\cos\alpha\sin\alpha + B^2\sin^2\alpha + (AC - B^2)\sin^2\alpha}{A} =$
$\dfrac{(A\cos\alpha + B\sin\alpha)^2 + (AC - B^2)\sin^2\alpha}{A}$

1. Пусть $AC - B^2 > 0$ $(A > 0)$: Числитель неотрицательный и не равен нулю (иначе $\sin\alpha = 0$, то тогда $A\cos\alpha \neq 0$)

   Итак, числитель и знаменатель больше нуля. Обозначим всю дробь за $k^2 > 0$

   Вернемся к $\Delta z = \dfrac{1}{2}(\Delta\rho)^2(k^2 + 2\lambda\Delta\rho)$

   Устремим $\Delta\rho \to 0$, начиная с какого-то δ $\forall M \in U_\delta(M_0)$ $k^2 + \lambda\Delta\rho > 0$

   То есть $\Delta z > 0$ в $U_\delta(M_0) \Longrightarrow M_0$ – точка минимума (локально в $U_\delta(M_0)$)
2. Пусть $AC - B^2 > 0$ $(A < 0)$, тогда $\Delta z = \dfrac{1}{2}(\Delta\rho)^2(-k^2 + 2\lambda\Delta\rho) < 0$ при достаточно малом $\Delta\rho$

   Аналогично $\Delta z < 0 \Longrightarrow M_0$ – точка максимума
3. Пусть $AC - B^2 < 0$ $(A > 0)$, тогда фиксируем направления $\alpha = 0 \Longrightarrow \sin\alpha = 0$

   $\Delta z = \dfrac{1}{2}(\Delta\rho)^2(A + 2\lambda\Delta\rho) > 0$

   $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{A}{B} \Longrightarrow \dfrac{(AC - B^2)\sin^2\alpha}{A} = -k^2, \Delta z = \dfrac{(\Delta\rho)^2}{2}(-k^2 + 2\lambda\Delta\rho) < 0$

   Вдоль разных путей $\alpha = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{A}{B}$, разный знак $\Delta z \Longrightarrow$ нет экстремума

   Nota. Можно аналогично рассмотреть $A < 0$
4. $A = 0$, вернемся к выражению $\Delta z = \dfrac{1}{2}(\Delta\rho)^2(\sin\alpha(2B\cos\alpha + C\sin\alpha) + 2\lambda\Delta\rho)$

   Пусть α – бесконечно малая, тогда $\sin\alpha \approx 0, C\sin\alpha \approx 0, 2B\cos\alpha \approx 2B$. Тогда знак $\sin\alpha \cdot 2B$ зависит от α

   То есть Δz колеблется вместе с α по знаку $\Longrightarrow$ нет экстремума

Можно доказать при $A \neq 0$, например, выбрав $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{A}{B}$, что знак Δz зависит от α

5. Интеграл ФНП

5.1. Общая схема интегрирования

Постановка задачи.

В некоторой области Ω (дуга кривой, участок поверхности, тело и т. д.) распределена или действует непрерывно некоторая функция скалярная g или векторная $\vec{G}$, то есть определены $g(M)$ или $\vec{G}$ $\forall M \in \Omega$

Ex. Область Ω – дуга кривой $l : y = y(x)$. Тогда скалярная функция $g(M)$ – плотность в точке M

Ex. Область Ω – трубка в $\mathbb{R}^3$. Тогда векторная величина $\vec{G}(M)$ – скорость жидкой частицы, движущейся по трубке

Из всех векторов $\vec{v}$ (для всех $M \in \Omega$) складывается «поле жидких скоростей»

Ex. Область Ω – кривая, по которой движется точка M под действием силы $\vec{G}(M)$

Задача интегрирования – найти суммарное содержание скалярной величины или действие векторной величины в области Ω

Схема: величины $g(M)$ и $\vec{G}(M)$, меняясь от точки к точке заменяются на квазипостоянные на малых (элементарных) участках $d\omega$

Так как $g(M)$ или $\vec{G}(M)$ должны быть непрерывны на Ω, то на малом участке $d\omega$ их изменение незначительно и значение функции можно считать почти постоянным, приняв за это значение какое-либо среднее $g_{\text{ср.}}(M), \vec{G}_{\text{ср.}}(M)$

Тогда элементарное содержание $g(M)$ в $d\omega$ будет отличаться от среднего содержания, то есть $g_{\text{ср.}} d\omega$ на бесконечно малую большего порядка

Ex. Проиллюстрируем на примере $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

S – площадь по наибольшей границе, σ – площадь по наименьшей границе, $S_{\text{трапеции}}$ – «истинная» площадь

Так как $f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a, b]$, то $\Delta f \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$

Для простоты рассмотрим монотонно возрастающую $f(x)$

Хотим доказать, что $S - S_{\text{трапеции}}$ – бесконечно малая большего порядка, чем $S_{\text{трапеции}}$ или S

$$0 \le S - S_{\text{трапеции}} \le dx\Delta y$$

Сравним $\dfrac{dx\Delta y}{S} = \dfrac{dx\Delta y}{dx f(x + \Delta x)} = \dfrac{\Delta y}{\text{огран.}} \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, таким образом $S - S_{\text{трапеции}} = o(S_{\text{трапеции}})$

Смысл интеграла в случае векторной функции $\overrightarrow{G}(M)$: будем интегрировать только скалярные выражения вида $\vec{G}(M) \cdot d\vec{\omega}$ – скалярное произведение векторов, где $d\vec{\omega}$ - ориентированный элемент $d\omega$

Ex. Сила $\vec{F}(M)$ перемещает точку M вдоль плоской кривой l. При этом сила совершает работу по перемещению (работа A – скалярная величина)
Известна формула для $\vec{F} = \text{const}$ и перемещения $\vec{s}$ по прямой: $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$
Разобьем дугу на элементы $dl \approx ds$ и ориентируем их (зададим направление перемещению ds)
$dl = ds + o(dl)$, $d\vec{s}$ – вектор элементарного перемещения, как правило, ds направлен согласовано с Ox
Элемент работы $dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F_x, F_y) \cdot (dx, dy) \overset{\text{обозн.}}{=} (P, Q) \cdot (dx, dy) = Pdx + Qdy$ – скаляр. Вся работа равна $A = \displaystyle\int dA$

Nota. Ориентированный участок поверхности $d\vec{\sigma}$ – это размер участка $d\sigma$, умноженный на вектор нормали к участку $\vec{n}$, то есть $d\vec{\sigma} = \vec{n}d\sigma$
Итак, схема интегрирования:

1* Дробление области Ω на элементы $d\omega$
2* Выбор постоянного значения функции на $d\omega$, то есть $g_{\text{ср.}}$ или $\vec{G}_{\text{ср.}}$
3* Составление подынтегрального выражения $g_{\text{ср.}}d\omega$ или $\vec{G}_{\text{ср.}}d\vec{\omega}$
4* «Суммирование» элементарных величин $\displaystyle\int g d\omega$ или $\displaystyle\int \vec{G}d\vec{\omega}$

5.2. Классификация интегралов

1* По размерности Ω

$n = 1$:	прямая (определенный интеграл $\int_a^b$)	кривая (криволинейный интеграл $\int_A^B$)
$n = 2$:	плоскость (двойной интеграл $\iint_D$)	поверхность, криволинейная (поверхностный интеграл $\iint_S$)
$n = 3$:	пространство $\mathbb{R}^3$ (тройной $\iiint_V$ или $\iiint_T$)	

2* По виду функции

	Скалярная $g(M)$ (I рода)	Векторная $\vec{G}(M)$ (II рода)
$n = 1$:	определенный, криволинейный I рода	криволинейный II рода (интегралы в проекциях)
$n = 2$:	двойной, поверхностный I рода	поверхностный II рода
$n = 3$:	тройной	

5.3. Двойной и тройной интегралы

Nota. Дадим строгое определение

Def. $z = z(x, y) \quad z : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. Дробление на $[x_{i-1}, x_i]$ длиной Δx
2. Выбор средней точки $M_i(\xi_i, \eta_i)$, по значению $z(M_i)$ строим элемент. параллелепипед объемом
   $v_i = z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i \approx V_{\text{малого цилиндра}}$
3. Интеграл суммы
   $v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i = \sum z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i$
4. Если $\exists \lim v_n \in \mathbb{R}$, не зависящий от типа дробления и т.д. при $n \to \infty$ и $\tau = \max(\Delta x_i, \Delta y_i) \to 0$,
   то $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} v_n \overset{def}{=} \iint_D z(x, y)dxdy$ - двойной интеграл от $z(x, y)$ на области D

Мет. Определение определенного интеграла:
$\int_a^b f(x)dx \qquad f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}^+$

1. Дробление на элементы P_i прямыми $x = \text{const}, y = \text{const}$, $S_{P_i} = \Delta x_i \Delta y_i$ (дали dx, dy)
2. Выбор $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, площадь элементарных прямоугольников $f(\xi_i)\Delta x_i \approx S_{\text{полоски}}$
3. Интеграл суммы $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$
4. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx$

Nota. Об области D: в простейшем случае рассматривают выпуклую, односвязную $\mathbb{R}^2$-область

а) Выпуклость:
$\exists M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1M_2} \notin D$ – не выпуклая, где $\overline{M_1M_2}$ – прямой отрезок
$\forall M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1M_2} \in D$ – выпуклая

б) Связность:
$D = D' \cup D''$ – несвязная, если $\exists M_1, M_2 \in D \mid M_1\overset{\frown}{}M_2 \notin D$, где $M_1\overset{\frown}{}M_2$ – непрерывная кривая, соединяющая M_1 и M_2
D – связная, если $\forall M_1, M_2 \in D \mid M_1\overset{\frown}{}M_2 \in D$

Обычно область открытая (то есть без границы), дальше будем рассматривать в том числе области с границей

Добавим к определению $\iint_{\partial D\text{ – граница } D} z(x, y)dxdy$

Геометрический смысл: в определении при $z(x, y) \ge 0$ интегральная сумма $v_n = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ была суммой объемов элементарных параллелепипедов и приближала объем подповерхности

Тогда $\iint_D z(x, y)dxdy \overset{z\ge 0}{=} V_{\text{цилиндра с осн. } D}$, а при $z = 1$ $\iint_D dxdy = S_D$

Вычисление: по геометрическому смыслу найти $\iint_D z(x, y)dxdy$ – значит найти объем подповерхности

Можно найти $S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x = c, y)dy$ – площадь поперечного сечения

Найдем V как объем тела с известными площадями сечений

$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x = c, y)dy\right)dx$

Nota. Кратный

Если найдена первообразная для $z(x=c,y)$ (обозначим $F(x,y(x))$), то по формуле N-L: $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c,y)dy = F(x,y(x))\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = F(x,y_2(x)) - F(x,y_1(x))$

Тогда $\int_a^b \overbrace{(F(x,y_2)-F(x,y_1))}^{\varphi(x)}\,dx$ – обычный определенный интеграл

Пределы интегрирования во внутреннем интеграле – функции, во внешнем – точки

Можно ли вычислить V, рассекая тело сечениями $y=\text{const}$? Верно ли, что $\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)dy\right)dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)dx\right)dy$?

Верно: V не зависит от порядка сечения

Таким образом, двойной интеграл $\iint_D z(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} z(x,y)dydx = \int_\alpha^\beta \int_{x_1}^{x_2} z(x,y)dxdy$

Но при другом порядке интегрирования область D может оказаться неправильной

Def. При проходе области D в направлении $Oy\uparrow$ граница области (верхняя) меняет аналитическое задание. Такая область называется неправильной в направлении Oy

Выгодно выбирать правильное направление, чтобы не делить интеграл по аддитивности

Ex. $\iint_D xydxdy,\ D: x^2+y^2\le 1$

$$\iint_D xydxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{y_1=-\sqrt{1-x^2}}^{y_2=\sqrt{1-x^2}} xydy\right)dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2}y^2\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2}((1-x^2)-(1-x^2))\right)dx = 0$$

Def. Тройной интеграл: пусть дана функция $u(x,y,z)\ :\ T\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

1. Дробление на элементы объема $dv = dxdydz$
2. Вычисление среднего содержания $u(x,y,z)$ в dv: $u(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)dv$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \sum u(M_i)dv$
4. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max(dv)\to 0}} \overset{def}{=} \iiint_T u(x,y,z)dv = \iiint_T u(x,y,z)dxdydz$

Геометрический смысл: только при $u=1$ интеграл $\iiint_T dxdydz = V_T$ равен объему

Физический смысл: пусть $u(x,y,z)$ – плотность в каждой точке T, тогда $\iiint_T u(x,y,z)dxdydz = m_T$ – масса

Тройной интеграл можно вычислить через кратный: $\iiint_T u(x,y,z)dxdydz \overset{\text{кратный}}{=} \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} u(x,y,z$

5.4. Замена переменной в двойном и тройном интегралах

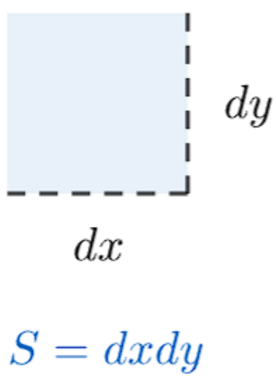
Проблема: для $S = \iint_D dxdy$, если $S_{D'} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho = \iint_{D'} d\rho d\varphi$, то это не площадь круга, а площадь прямоугольника S в распрямленных координатах

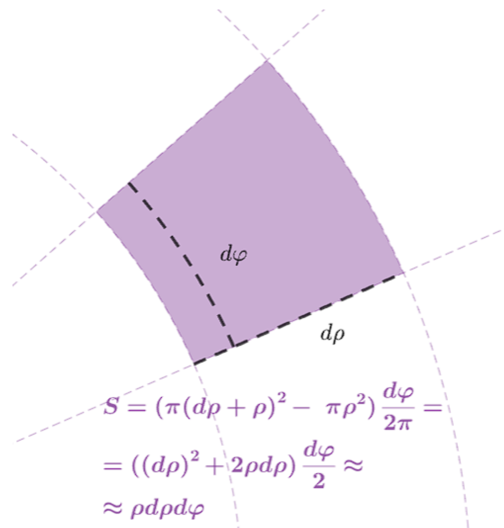
Введем Δs_i – площадь кольцевого сектора в полярных координатах, а $\Delta s_i'$ – площадь прямоугольника, причем $\Delta s_i \neq \Delta s_i'$

Nota. Будем искать поправочный коэффициент так, чтобы $\Delta s_i \approx$ коэфф. $\cdot \Delta s_i'$

Дроблению будем подвергать область D' в распрямленной системе координат

Введем новые криволинейные координаты: $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$, где функции $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемы по обоим аргументам





Заменим криволинейный параллелограмм $ABCD$ на обычный, стянув вершины хордами (погрешность в площади – бесконечно малая более высокого порядка, чем площадь)

$A = (x_A, y_A) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$

$B = (x_B, y_B) = (\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v))$

$C = (x_C, y_C) = (\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v))$

$D = (x_D, y_D) = (\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v))$

Площадь параллелограмма $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\theta = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$

$$\Delta s = S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_D - x_A & y_D - y_A & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left| \vec{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix} \right|$$

$$x_B - x_A = \varphi(u, v + \Delta v) - \varphi(u, v) = \Delta_v \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v$$

$$y_B - y_A = \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u, v) = \Delta_v \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v$$

$$x_D - x_A = \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v) = \Delta_u \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u$$

$y_D - y_A = \psi(u+\Delta u, v) - \psi(u,v) = \Delta_u \psi \approx \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u$

$$\left|\vec{k}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \end{matrix}\right\| \overbrace{\Delta v\Delta u}^{\Delta s'} \overset{|\det|=|J|}{\Longrightarrow} \Delta s \approx |J|\Delta s'$$

Nota. В пределе это точное равенство: $|J| = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta s'}$

Это легко понять, если считать частные приращения по теореме Лагранжа $\Delta_u\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(\xi,\eta)\Delta u \to \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\Delta u$

Def. Определитель $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$, где $\begin{cases} x_1 = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{cases}$ – преобразование координат $Ox_i \to O\xi_i$ ($f_k \in C^1_D$), называется определителем Якоби или якобиан

Построение интеграла:

1. Дробление D' в распрямленной Ouv
2. Выбор средней точки, поиск значения $f(\xi_i, \eta_i)$
   Значение величины на элементе $f(\xi_i,\eta_i)|J|dudv$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \sum f(\xi_i,\eta_i)|J|dudv$
4. В пределе интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(u,v)|J|dudv$

Якобианы в ПСК, ЦСК, СфСК

1. ПСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \frac{\partial x}{\partial\rho} = \cos\varphi \quad \frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi$, $\quad \frac{\partial y}{\partial\rho} = \sin\varphi \quad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = \rho\cos\varphi$
   $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$
2. ЦСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $\quad J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$
3. СфСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$ $\quad J = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\cos^2\varphi\sin^3\theta +$
   $\rho\sin\varphi\sin\theta(-\rho\sin\varphi\sin^2\theta - \rho\sin\varphi\cos^2\theta) - \rho^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\sin\theta = -\rho^2(\cos^2\varphi\sin\theta + \sin^2\varphi\sin\theta) = -\rho^2\sin\theta$
   $|J| = \rho^2\sin\theta$

Ex. Тело T, ограниченное уравнениями $\begin{matrix} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+y^2=z \end{matrix}$

Конус в ЦСК: $\rho=z, z>0$

Параболоид в ЦСК: $\rho=\sqrt{z}, z>0$

$V_T = \iiint_T dxdydz = \iiint_{T'} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} \rho dz = 2\pi \int_0^1 \rho z\Big|_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3)d\rho = 2\pi\left(\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{6}$

Lab. Тело T, ограниченное уравнениями $\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=1 \\ \sqrt{x^2+y^2}=z \end{matrix}$ – «мороженка», считать в СфСК

5.5. Криволинейные интегралы

Для криволинейных интегралов I рода область интегрирования – кривая $l=\overset{\frown}{AB}$ (дуга). Для простоты начнем с плоской дуги

На l действует скалярная функция $f(x,y)$ (физический смысл – плотность, то есть имеем неоднородный кривой стержень)

Задача в нахождении «суммарной» величины $f(x,y)$, то есть интеграла: «складываем» элементы $f_{\text{ср}}(x,y)dl$

Получаем $\int_l f(x,y)dl = \int_{AB} f(x,y)dl$

Nota. В строгом определении интегральная сумма строится так:

$M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i$ – элементарная дуга

Δl_i – длина элемента

Δs_i – длина стягивающей дуги

$\Delta l_i \approx \Delta s_i$

$M_{\text{ср.}}(\xi_i,\eta_i)$ – средняя точка элемента

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

Определим криволинейный интеграл II рода. Задача (вычисление работы силы вдоль пути): вдоль пути $\overset{\frown}{AB}$ действует сила $\overrightarrow{F}=(P(x,y),Q(x,y))$. Найдем элементарную работу $dA=\vec{F}_{\text{ср.}}d\vec{s}$, где $d\vec{s}$ – элементарное приращение

$d\vec{s}=(dx,dy)=(\cos\alpha ds, \sin\alpha ds)$

$\vec{F}_{\text{ср.}}$ – значение силы на элементарном участке в какой-либо его точке

Тогда $dA=(P(x,y),Q(x,y))\cdot(dx,dy)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, а по всей кривой $A=\int_{AB} dA = \int_{AB} Pdx+Qdy$ – интеграл II рода (в проекциях)

Nota. В проекциях, потому что $F_x = P, F_y = Q$, таким образом скалярное произведение записано в проекциях

При этом часто рассматривают по отдельности: $\int_{AB} f(x,y)dx$ и $\int_{AB} g(x,y)dy$

Nota. Связь интегралов I и II рода:
$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P,Q)(dx,dy) = \int_L (P,Q)(\cos\alpha,\cos\beta)\underbrace{ds}_{\approx dl} = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl$
Обозначим $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

По теореме Лагранжа $\exists(\xi,\eta) \in$ элементарной дуге, касательная которой параллельна ds

Тогда $d\vec{s} = \vec{\tau}ds \approx \vec{\tau}dl$, где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, касательной в (ξ,η)

Тогда $\int_L Pdx + Qdy \overset{\text{пред. в вект. форме}}{=} \int_L \overrightarrow{F}\overrightarrow{\tau}\,dl = \int_L \overrightarrow{F} \underbrace{\overrightarrow{dl}}_{\text{ориент. эл. дуги}}$

<u>Свойства</u>:

Nota. Свойства, не зависящие от прохода дуги, аналогичны свойствам определенного интеграла

- Направление обхода:

  I рода:
  $\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl$

  II рода:
  $\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy$

Def. Часто рассматривают замкнутую дугу, называемую контур. Тогда интегралы обозначаются так: $\oint_K fdl$ и $\oint_K Pdx + Qdy$.

Если K (контур) обходят против часовой стрелки, то обозначают $\oint_{K^+}$, иначе $\oint_{K^-}$

Вычисление сводится к $\int_a^b dx$ или $\int_\alpha^\beta dy$ или $\int_\tau^T dt$

1. Параметризация дуги L:
   $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \varphi,\psi \in C^1_{[\tau,T]} \quad \begin{matrix} A(x_A,y_A) = (\varphi(\tau),\psi(\tau)) \\ B(x_B,y_B) = (\varphi(T),\psi(T)) \end{matrix}$
   При этом задании $L \quad y = y(x), x \in [a,b]$ или $x = x(y), y \in [\alpha,\beta]$ – частные случаи параметризации
2. I рода:
   $\int_L f(x,y)dl = \left[dl = \sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2}|dt|\right] =$
   $= \int_\tau^T f(t)\sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2}|dt|$

   II рода:
   $\int_{L=\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = [dx = \varphi_t'dt, dy = \psi_t'dt] =$
   $= \int_\tau^T (P\varphi' + Q\psi')dt$

Ex. Дуга L – отрезок прямой от $A(1,1)$ до $B(3,5)$. Вычислим $\int_{AB}(x+y)dl$ двумя способами:

1. $\int_{AB}(x+y)dl = \left[\begin{matrix} AB: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} \\ \text{или } y = 2x-1, x \in [1,3] \\ f(x,y) = x+2x-1 = 3x-1 \\ dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{5}dx \end{matrix}\right] = \int_1^3 (3x-1)\sqrt{5}dx = \sqrt{5}\left(\frac{3x^2}{2} - x\right)\Big|_1^3 = \sqrt{5}(12 - 2) = 10\sqrt{5}$

2. $\int_{AB}(x+y)dx + (x+y)dy = \left[\begin{matrix} x\uparrow_1^3, y\uparrow_1^5 \\ y = 2x-1, x = \frac{y+1}{2} \\ dx = dx, dy = dy \end{matrix}\right] = \int_1^3 (x+2x-1)dx + \int_1^5 \left(\frac{y+1}{2} + y\right)dy = \left(\frac{3x^2}{2} - x\right)\Big|_1^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{3y^2}{2} + y\right)\Big|_1^5 = 10 + 20 = 30$

Th. Формула Грина

Пусть дана область $D \subset \mathbb{R}^2$, которая обходится в правильном направлении ($\uparrow Ox, \uparrow Oy$)

K – гладкая замкнутая кривая (контур), которая ограничивает D

В области D действует $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ – непрерывные дифференциалы

Тогда $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{K^+} Pdx + Qdy$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}dx - \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy = \int_\alpha^\beta \left(Q(x,y)\Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)}\right)dy - \int_a^b \left(P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}\right)dx = \int_\alpha^\beta (Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y))dy - \int_a^b (P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)))dx = \int_{NST} Qdy - \int_{NMT} Qdy - \int_{MTS} Pdx + \int_{MNS} Pdx = \underbrace{\int_{NST} Qdy + \int_{TMN} Qdy}_{\oint_{K^+} Qdy} + \underbrace{\int_{STM} Qdy + \int_{MNS} Qdy}_{\oint_{K^+} Pdx} = \oint_{K^+} Pdx + Qdy$$

Следствие формулы Грина: $S_D = \frac{1}{2}\oint_K xdy - ydx$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Формула Грина: $\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy = \iint_D \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)\right)dxdy = \iint_D dxdy = S_D \overset{\text{Ф. Гр.}}{=} \oint_{K^+}\left(-\frac{y}{2}\right)dx + \frac{x}{2}dy$

Def. Пусть даны $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемы по 2-м переменным

А также кривая $\overset{\frown}{AB}$, соединяющая любые две точки области, $\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, φ, ψ – непрерывно дифференцируемы (кусочно)

$I = \int_{AB} Pdx + Qdy$ называется интегралом, не зависящим от пути интегрирования (НЗП), если $\forall M, N \in D \ \int_{AMB} Pdx + Qdy = \int_{ANB} Pdx + Qdy$

Nota. Обозначают $\int_A^B Pdx + Qdy$ или $\int_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy$

Th. Об интеграле НЗП. В условиях определения

I. $\int_{AB} Pdx + Qdy$ – интеграл, не зависящий от пути

II. $\oint_K Pdx + Qdy = 0 \quad \forall K \subset D$

III. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \ \forall M(x,y) \in D$

IV. $\exists \Phi(x,y) \mid d\Phi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ в области D

Причем $\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$, где $(x_0,y_0), (x,y) \in D$

Тогда I $\iff$ II $\iff$ III $\iff$ IV

1. I $\iff$ II

$\boxed{\Longrightarrow}$ По определению $\int$ НЗП $\iff \int_{AMB} = \int_{ANB}$

Рассмотрим $\int_{AMB} - \int_{ANB} = \int_{AMB} + \int_{BNA} = \oint_K = 0 \ \forall K \subset D$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Достаточно разбить $\oint_{K^+} = \int_{AMB} + \int_{BNA} = 0$

Поскольку $\int_{AMB} + \int_{BNA} = 0$, то $\int_{AMB} - \int_{ANB} = 0$

2. II $\iff$ III

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\oint_K = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \ \forall M(x,y) \in D$

От противного $\quad \exists M_0(x_0,y_0) \in D \mid \left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{M_0} \neq \left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{M_0} \iff \left.\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)\right|_{M_0} \neq 0$

Для определенности пусть $\left.\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)\right|_{M_0} > 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \mid \left.\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)\right|_{M_0} > \delta > 0$

Выберем малую окрестность в точке M_0 $(U(M_0))$ и обозначим ее контур Γ

Так как P и Q непрерывно дифференцируемы, $\left.\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)\right|_{M_0} > 0$ в $U(M_0)$

Формула Грина: $\iint_{U(M_0)} \left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy > \iint_{U(M_0)} \delta dxdy = \delta S_{U(M_0)} > 0$

С другой стороны $\iint_{U(M_0)} \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = 0$

Таким образом, возникает противоречие

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ $\forall M \in D$

Тогда $\forall D' \subset D$ $\displaystyle\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0 = \oint_{\Gamma_{D'}} Pdx + Qdy \ \forall \Gamma_{D'} \subset D$

3. III $\Longleftrightarrow$ IV

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \Longrightarrow \exists \Phi(x,y)$

Так как доказано $I \Longleftrightarrow III$, то докажем $I \Longrightarrow IV$

$\displaystyle\int_{AM} Pdx + Qdy = \int_{A(x_0,y_0)}^{M(x,y)} Pdx + Qdy - \int$ НЗП $\forall A, M \in D$

Обозначим $\displaystyle\int_{A(x_0,y_0)}^{M(x,y)} Pdx + Qdy - \Phi(x,y)$

Докажем, что $d\Phi = Pdx + Qdy$

Так как $d\Phi(x,y) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}dx - \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}dy$, то нужно доказать $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y)$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y)$

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x \Phi}{\Delta x} =$ [задали приращение вдоль MM_1] $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Phi(x+\Delta x, y) - \Phi(x,y)}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_A^{M_1} Pdx + Qdy - \int_A^M Pdx + Qdy}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_A^M + \int_M^{M_1} - \int_A^M}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_M^{M_1}}{\Delta x} \overset{\text{НЗП}}{=}$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} Pdx}{\Delta x} =$ [по **Th.** Лагранжа $\exists \xi \in [x; x + \Delta x]$] $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(\xi, y)\Delta x}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} P(\xi, y) = P(x,y)$

Аналогично $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y)$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $d\Phi = Pdx + Qdy \overset{?}{\Longrightarrow} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

Известно $P = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}, Q = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$

Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

Nota. Φ – первообразная для $Pdx + Qdy$

Th. Ньютона-Лейбница.

Выполнены условия **Th.** об интеграле НЗП, тогда $\displaystyle\int_A^B Pdx + Qdy = \Phi(B) - \Phi(A)$

$\displaystyle\int_A^B Pdx + Qdy \overset{\exists \Phi | d\Phi = Pdx + Qdy}{=} \int_A^B d\Phi(x,y) \overset{\text{параметр. } AB}{=} \int_\alpha^\beta d\Phi(t) = \Phi(t)\Big|_\alpha^\beta = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \Phi(B) - \Phi(A)$

Применение:

Ex. Дан интеграл $\displaystyle\int_{AB}\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy$

Проверим НЗП $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{2y}{x^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{2y}{x^2}\iff\displaystyle\int$ НЗП

Найдем первообразную $\Phi(x,y)$ на все случаи жизни: $\displaystyle\Phi(x,y)=\int_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)}Pdx+Qdy$

Выберем путь (самый удобный): $\displaystyle\Phi(x,y)=\int_{M_0}^{N}+\int_{N}^{M}$

$\displaystyle\int_{M_0}^{N}\overset{y=0,x_0=1,dy=0}{=}\int_{(1,0)}^{(x,0)}4dx=4x\Big|_{(1,0)}^{(x,0)}=4x-4$

$\displaystyle\int_{N}^{M}\overset{dx=0}{=}\int_{(x,0)}^{(x,y)}\frac{2y}{x}dy=\frac{y^2}{x}\Big|_{(x,0)}^{(x,y)}=\frac{y^2}{x}$

$\Phi(x,y)=4x-4+\dfrac{y^2}{x}+C=4x+\dfrac{y^2}{x}+C$

Проверим: $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=4-\dfrac{y^2}{x^2}=P$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=\dfrac{2y}{x}=Q$

Теперь можем искать $\displaystyle\int_{AB}$ $\forall A,B\in D$ по N-L

Пусть $A(1,1),B(2,2)$, тогда $\displaystyle\int_{AB}Pdx+Qdy=\Phi\Big|_A^B=\frac{y^2}{x}+4x\Big|_{(1,1)}^{(2,2)}=\frac{4}{2}+8-1-4=5$

Nota. Функция Φ ищется в тех случаях, когда $\displaystyle\int_A^B Pdx+Qdy=\int_A^B(P,Q)(dx,dy)=A$ – работа силы, которая не зависит от пути

Ex. Работа силы тяжести не зависит от пути (такие силы называются консервативными), а силы трения – зависит (такие – диссипативными)

Ex. Пусть $\vec{F}=(P,Q)=(0,-mg)$

$\displaystyle\Phi(x,y)=\int_O^M 0dx-mgdy=-\int_0^y mgdy=-mgy$ – потенциал гравитационного поля (или силы тяжести)

5.6. Поверхностные интегралы

1* **Поверхностные интегралы I рода** (по участку поверхности)

Задача: найти массу поверхности. Дана функция $u=u(x,y,z)$ (ее физический смысл - плотность)

Элементарная масса: $dm=u_{\text{ср.}}(\xi,\eta,\zeta)d\sigma$, $d\sigma$ – элемент поверхности

$\displaystyle M=\iint_S dm=\iint_S u(x,y,z)$ – поверхностный интеграл I рода

(a) Дробление S на элементы $\Delta\sigma_k$ координатными плоскостями $x=x_i,y=y_j$

(b) Определение средней точки (ξ_k,η_k,ζ_k)

(c) Интегральная сумма $\displaystyle\nu_n=\sum_{k=1}^{n}u(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta\sigma_k$

(d) **Def.** $\iint_S u(x,y,z)\Delta\sigma = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max\Delta\sigma_k\to 0}} v_n$ – поверхностный интеграл первого рода

Свойства: смена обхода поверхности S не меняет знака интеграла: $\iint_{S^+} ud\sigma = \iint_{S^-} ud\sigma$

Вычисление

Мет. Криволинейный интеграл $\int_L f(x,y)dl$ мы вычисляли через параметризацию кривой одной переменной $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$, замену элементарного участка $dl = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}|dt|$ и функции $f(x,y)$ на $\tilde{f}(t)$. Получаем $\iint_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta \tilde{f}(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}|dt|$

Аналогично для поверхностного: $\iint_S u(x,y,z)d\sigma$

(a) Параметризация S: самая частая – $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D$ – пределы интегрирования

(b) $d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}|dxdy|$, но так как в двойном интеграле договорились, что $dxdy>0$ (площадь), модуль можно не ставить (область D проходится в направлении против часовой стрелки)

(c) $u(x,y,z) = \tilde{u}(x,y,z(x,y)) = \tilde{u}(x,y)$
$\iint_S u(x,y,z)d\sigma = \iint_{D^+} \tilde{u}(x,y)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$

Ex. $S:\ x^2+y^2=z^2, z=0, z=1$

$u(x,y,z)=z$

$$\iint_S zd\sigma = \left[\begin{matrix} S: z=\sqrt{x^2+y^2} \\ D: \text{круг}, x^2+y^2=1 \\ d\sigma = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy \end{matrix}\right] = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy = \Big[\text{переход в ПСК}\Big] =$$
$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\rho \rho\underbrace{\rho}_{|J|}d\rho = \sqrt{2}2\pi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

2* Поверхностный интеграл II рода.

Задача: нахождение потока

Будем говорить о потоке вектора $\vec{F}=(P,Q,R)$ через площадку S в направлении нормали $\vec{n^+}$ или $\vec{n^-}$

Если задано поле жидких скоростей, то потоком называют количество жидкости, протекающей через S за время Δt

В простой ситуации поток $\Pi = FS$ ($\vec{F}\perp S, \vec{F}=\text{const}$)

В общем случаем $\vec{F}$ – переменная, S – искривленная и $\angle\vec{F},S\neq\frac{\pi}{2}$

Переходим к вычислению элементарного потока $d\Pi$

$d\sigma$ – малый элемент поверхности (почти плоский)

В пределах $d\sigma$ $\vec{F}$ меняется мало, за среднее берем $\vec{F} = (P, Q, R)$, где $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R(x, y, z)$

Разберемся с наклоном: если площадка перпендикулярна, то $d\Pi = Fd\sigma$, но в нашем случае высота цилиндра равна проек.$_{\vec{n}}\vec{F} = (\vec{n}, \vec{F}) = F\cos\varphi$, где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали, φ – угол между нормалью и потоком, $d\Pi = (\vec{F}, \vec{n})d\sigma = F_n d\sigma$

Пусть $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, тогда $d\Pi = (\vec{F}, (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma))d\sigma = (P\cos\alpha, Q\cos\beta, R\cos\gamma)d\sigma$

Итак, $\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} d\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} F_n d\sigma = \iint_{S^{\vec{n}}} (\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \iint_{S^{\vec{n}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$

Но, еще нет координатной записи подынтегрального выражения. Спроектируем $d\sigma$ на координатные плоскости: сначала разрежем поверхность S на элементы плоскостями $x = \text{const}, y = \text{const}$ (и, таким образом, уточним форму $d\sigma$). Так как $d\sigma$ мал, то можно считать его плоским параллелограммом

Тогда $\cos\gamma d\sigma = \pm dxdy$ (γ – угол между нормалью и осью Oz)

Нашли последнее слагаемое $\iint_{S^{\vec{n}}} R\cos\gamma d\sigma$ в исходном интеграле (I рода, так как по участку $d\sigma$)

Найдем $\iint_{S^{\vec{n}}} Q\cos\beta d\sigma$, разобьем поверхность на участки $d\sigma$ плоскостями $x = \text{const}, y = \text{const}$

Аналогично $\cos\beta d\sigma = \pm dxdz$

Тогда в $\iint_{S^{\vec{n}}} P\cos\alpha d\sigma \quad \cos\alpha d\sigma = \pm dydz$

Окончательно, поток $\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} \pm Pdydz \pm Qdxdz \pm Rdxdy = \iint_{S^{\vec{n}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$ – связь интегралов I и II рода

Nota. Формулу интеграла можно получить еще так: $(\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \vec{F}\vec{n}d\sigma = \vec{F}d\vec{\sigma}$, где $d\vec{\sigma} = (\pm dydz, \pm dxdz, \pm dxdy)$

Def. $I = \iint_{S^{\vec{n}}} \vec{F}(x, y, z)d\vec{\sigma} = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max\Delta s_k\to 0}} \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta s_k$ – поверхностный интеграл второго рода ($\Delta s_k = \Delta x\Delta y$ – любого знака, согласованного с обходом)

Свойства: интеграл меняет знак при смене обхода с $\vec{n}^+$ на $\vec{n}^-$

Вычисление:

(a) Параметризация S:
- для $\iint Rdxdy \quad z = z(x, y)$
- для $\iint Qdxdz \quad y = y(x, z)$
- для $\iint Pdydz \quad x = x(y, z)$

Пределы интегрирования: $D_{xy} =$ проек.$_{Oxy}S$ для $\iint Rdxdy$, $D_{xz} =$ проек.$_{Oxz}S$ для

$\iint Qdxdz$, $D_{yz} = \text{проек.}_{Oyz} S$ для $\iint Pdydz$

(b) $dxdy \to \pm dxdy$, если обход D_{xy} в направлении против часовой стрелки ($+dxdy$, если угол между $\vec{n}$ и Oz острый, иначе $-dxdy$, аналогично с другими в зависимости от угла между нормалью и осью)

(c) $R(x,y,z) = \tilde{R}(x,y,z(x,y)), P(x,y,z) = \tilde{P}(x(y,z),y,z), Q(x,y,z) = \tilde{Q}(x,y(x,z),z)$

(d) $\iint_{S^{\vec{n}}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{\sigma} = \iint_D \pm\tilde{P}dydz \pm \tilde{Q}dxdz \pm \tilde{R}dxdy = \iint_{D_{yz}} \pm\tilde{P}dydz + \iint_{D_{xz}} \pm\tilde{Q}dxdz + \iint_{D_{xy}} \pm\tilde{R}dxdy$

Разберем пример поверхностного интеграла:

Ex. $S_1 : \ x^2 + y^2 = 1, \quad S_2 : z = 0, \quad S_3 : z = 1$

$S = \bigcup\limits_{i=1}^{3} S_i$ – цилиндр

$\vec{F} = (P,Q,R) = (x,y,z)$

$\iint_{S_{\text{внешн.}}} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}$

Так как проекции S_2 и S_3 на Oxz и Oyz – отрезки, то $dxdz = 0$, $dydz = 0$:

$\iint_{S_2} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint_{S_2} zdxdy = 0$

$\iint_{S_3} zdxdy \overset{z|_{S_3}=1}{=} \iint_{S_3} dxdy \overset{\text{с «+», так как } \vec{n}_3 \uparrow\uparrow Oz}{=} \iint_{D_{xy}} dxdy = \pi$

$\iint_{S_1} xdydz + ydxdz = \iint_{D^+_{yz}:x=\sqrt{1-y^2}} xdydz + \left(-\iint_{D^-_{yz}:x=-\sqrt{1-y^2}} xdydz\right) + \iint_{D^+_{xz}} ydxdz + \left(-\iint_{D^-_{xz}} ydxdz\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$

$\iint_S = 3\pi$

5.7. Связь поверхностных интегралов с другими

Th. Гаусса-Остроградского.

$S_1 \ : \ z = z_1(x,y), \ S_3 \ : \ z = z_3(x,y), \ S_2 \ : \ f(x,y) = 0$ (проекция на Oxy – кривая)

$S = \bigcup\limits_{i=1}^{3} S_i$ - замкнута и ограничивает тело T (S_2 – цилиндр, S_1 – шапочка сверху, S_3 – шапочка снизу)

$P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$ – непрерывно дифференцируемы, действуют в области $\Omega \supset T$

Тогда $\oiint_{S_{\text{внешн.}}} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$

Мет. Формула Грина: $\oint_K Pdx + Qdy = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy$

Вычислим почленно $\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$

$\iiint_T \left(\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz\right) dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z)\Big|_{z=z_1(x,y)}^{z=z_3(x,y)} dxdy = \iint_{D_{xy}} (R(x,y,z_3(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)))dxdy = \underbrace{\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_3)dxdy - \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))dxdy}_{\text{двойной}} = \underbrace{\iint_{S_3} R(x,y,z)dxdy + \iint_{S_1} R(x,y,z)dxdy + \iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy}_{\text{поверхностный}} = \iint_{S_{\text{внешн.}}} Rdxdy$

$\iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy$ — равен 0, т.к. $dxdy\ |_{S_2} = 0$

Аналогично остальные члены:

$\iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_{S_{\text{внешн.}}} Qdxdz$, $\iiint_T \frac{\partial P}{\partial y} dxdydz = \iint_{S_{\text{внешн.}}} Pdxdz$

Nota. Если считаем поток через внутреннюю поверхность, то $\iint_{S_{\text{внутр}}} = -\iiint_T$

Nota. С учетом связи поверхностных интегралов $\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dv$

Th. Стокса.

Пусть $S: z = z(x,y)$ – незамкнутая поверхность, L – контур, на которую она опирается

проек.$_{Oxy}L = K_{xy}$, проек.$_{Oxy}S = D_{xy}$

В области $\Omega \supset S$ действуют функции P, Q, R, непрерывно дифференцируемые

Тогда $\oint_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S^+} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) d\sigma$

Найдем слагаемое $\oint_L P(x,y,z)dx \overset{\text{на } L\,:\, z=z(x,y)}{=\!=\!=} \oint_{K_{xy}^+} \tilde{P}(x,y,z(x,y))dx = \oint_{K_{xy}} \tilde{P}dx + \tilde{Q}dy = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}\right) dxdy = -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial \tilde{P}(x,y)}{\partial y} dxdy = -\iint_{S^+} \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} dxdy = -\iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy = -\iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma + \frac{\partial P}{\partial z}(-\cos\beta)\right) d\sigma$

$\vec{n} = \left(\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}\right)$

$\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$

Аналогично $\oint_L Qdy = \iint_{S^+}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)d\sigma$, $\oint_L Rdz = \iint_{S^+}\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \dfrac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)d\sigma$

Остается сложить интегралы

Nota. Формула Грина является частным случаем теоремы Стокса при $\cos\alpha = \cos\beta = 0$ и $\cos\gamma = 1$ – элементарная площадка на плоскости Oxy всегда сонаправлена оси Oz

Ex. 1. Возьмем пример выше: $S_1: \ x^2+y^2=1, \quad S_2: z=0, \quad S_3: z=1,\ S=\bigcup\limits_{i=1}^{3} S_i$ – замкнутый цилиндр, $\vec{F}=(P,Q,R)=(x,y,z)$. Получаем по теореме Гаусса-Остроградского:

$$\iint_{S_{\text{внешн}}} xdydz+ydxdz+zdxdy = \iiint_T\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dv = 3V_{\text{цил.}} = 3\cdot 1\cdot\pi\cdot 1^2 = 3\pi$$

Ex. 2. Те же P,Q,R. По теореме Стокса:

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz = \iint_S\left(\overbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)}^{=0}\cos\alpha+0+0\right)d\sigma = 0$$

6. Теория поля

6.1. Определения

Def. 1. Дано многомерное пространство $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Функция $u\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ называется скалярным полем в Ω

Def. 2. Функция $\vec{F} = (F_1(\vec{x}), \ldots, F_n(\vec{x}))\ :\ \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется векторным полем

Nota. Далее будем рассматривать функции в $\mathbb{R}^3$, то есть $u = u(x, y, z)$ и $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$
Nota. Функции u и $\vec{F}$ могут зависеть от времени t. Тогда эти поля называются нестационарными. В противном случае стационарными

6.2. Геометрические характеристики полей

$u = u(x, y, z)$: l – линии уровня $u = \text{const}$
$\vec{F} = (P, Q, R)$: w – векторная линия, в каждой точке w вектор $\vec{F}$ – касательная к w
Векторная трубка – совокупность непересекающихся векторных линий

Nota. Отыскание векторных линий
Возьмем $\vec{\tau}$ – элементарный касательный вектор, $\vec{\tau} = (dx, dy, dz)$
Определение векторной линии: $\vec{\tau} || \vec{F}$ $\quad \dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$ – система ДУ

Ex. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}, M_0(1, 0)$ – ищем векторную линию $w \ni M_0$
Задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xdx = -ydy \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = -y^2 + C \\ y(1) = 0 \implies C = +1 \end{cases} \iff x^2 + y^2 = 1$$

6.3. Дифференциальные характеристики

Mem. $\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad}}\ u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}; \dfrac{\partial u}{\partial y}; \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$ – градиент скалярного поля
$\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ – набла-оператор

Nota. Так как $\vec{\nabla}$ – это вектор, то для $\vec{\nabla}$ определены действия:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \dfrac{\partial a_1}{\partial x} + \dfrac{\partial a_2}{\partial y} + \dfrac{\partial a_3}{\partial z}$

- $\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$

Причем:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$ – лапласиан, оператор Лапласа
- $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$ – повторяющиеся строки в определителе

Nota. $\Delta u = \underbrace{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\text{часть волнового уравнения матфизики}} = 0$ – уравнение, определяющее гармоническую функцию $u(x, y, z)$, уравнение Лапласа

Def. 1. Дивергенцией поля (от *divergence* – расхождение) называется $\operatorname{div} \vec{F} \overset{def}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

Def. 2. Вихрем (ротором) поля называется $\operatorname{rot} \vec{F} \overset{def}{=} \vec{\nabla} \times \vec{F}$

Def. 3. Если $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, то $\vec{F}$ называется безвихревым полем

Def. 4. Если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, то $\vec{F}$ называется соленоидальным полем

Nota. Безвихревое поле имеет незамкнутые векторные линии, а вихревое – замкнутые

Th. 1. Свойство безвихревого поля: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \iff \exists u(x, y, z) \mid \vec{\nabla} u = \vec{F}$

$\boxed{\Longrightarrow}$

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = 0$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Рассмотрим $u = u(x, y, z) \mid \dfrac{\partial u}{\partial x} = P, \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q, \dfrac{\partial u}{\partial z} = R$ – эта функция удовлетворяет системе равенств

$\vec{F} = (P, Q, R) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z} \right) = \vec{\nabla} u$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Дана $\vec{F} = \vec{\nabla} u$

$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} u) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) u = 0$

Nota. Доказали, что если векторное поле является градиентом какого-то скалярного, то его вихрь равен нулю: $\operatorname{rot}\overrightarrow{\operatorname{grad}} u = 0$

Def. Пусть $\vec{F} = \vec{\nabla} u$. Поле $u(x, y, z)$ называется потенциалом поля $\vec{F}$

Таким образом, доказано, что безвихревое поле потенциально

Th. 2. Свойство соленоидального поля: если $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, то $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{F} = 0$

6.4. Интегральные характеристики. Теоремы теории поля

Mem. Потоком поля $\vec{F}$ через поверхность S называется величина $\Pi = \iint_S \vec{F} d\vec{\sigma}$

Def. Циркуляцией поля $\vec{F}$ через контур L называется величина $\Gamma = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = \oint_L P dx + Q dy + R dz$

Nota. Запишем **Th.** на векторном языке

1* Гаусса-Остроградского

$$\iint_S P dydz + Q dxdz + R dxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$
$$\iint_S (P, Q, R)(dydz, dxdz, dxdy) = \iint_S (P, Q, R)(\cos\alpha d\sigma, \cos\beta d\sigma, \cos\gamma d\sigma) = \iint_S \vec{F}\vec{n} d\sigma = \iint_S \vec{F} d\vec{\sigma}$$
$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iiint_T (\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) dv = \iiint_T \operatorname{div}\vec{F} dv$$

Th. Гаусса-Остроградского. Поток поля $\vec{F}$ через замкнутую поверхность равен тройному интегралу дивергенции этого поля по объему внутри поверхности:

$$\iint_S \vec{F} d\vec{\sigma} = \iiint_T \operatorname{div}\vec{F} dv$$

2* Стокса

$$P dx + Q dy + R dz = \vec{F} d\vec{l}$$
$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) d\sigma =$$
$$\iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) d\sigma = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\vec{n} d\sigma = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F} d\vec{\sigma}$$

Th. Стокса. Циркуляция поля $\vec{F}$ через контур равен интегралу ротора этого поля по поверхности внутри контура

$$\oint_L \vec{F}d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}d\vec{\sigma}$$

3* **Th. О потенциале**

Рассмотрим **Th.** об интеграле, не зависящего от пути. Для поля $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ третий пункт $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ можно представить как $\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$

Так как $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, то по свойству безвихревого поля $\exists u(x,y,z) \mid \vec{\nabla}u = \vec{F}$

Поэтому $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \vec{F}d\vec{l} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, 0\right) \cdot (dx, dy, dz) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \Phi(x,y)$

Th. О потенциале. Для поля $\vec{F} = (P, Q)$ и для любого контура L верно:

$$\oint_L \vec{F}d\vec{l} = 0 \iff \operatorname{rot}\vec{F} = 0 \iff \exists u(x,y,z) \mid \vec{\nabla}u = \vec{F}$$

Ex. $\vec{F} = x\vec{i} + xy\vec{j},\ L: x = y, x = -y, x = 1$

По формуле Грина (Стокса) $\oint_L \vec{F}d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D ydxdy \quad \operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$

$$\oint_L xdx + xydy = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} = \int_0^1 (x + x^2)dx + \int_{-1}^1 ydy - \int_0^1 (x + x^2)dx = \int_{-1}^1 ydy = 0$$

$$\iint_D ydxdy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x ydy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^x dx = \int_0^1 0dx = 0$$

6.5. Механический смысл

1* Дивергенция

По **Th.** Гаусса-Остроградского поток $\Pi = \iiint_T div\vec{F}dv$

По **Th.** о среднем существует точка $M_1 \in T \ \Big|\ \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}dv = \operatorname{div}\vec{F}\Big|_{M_1} \cdot V_T = \Pi$

$\operatorname{div}\vec{F}\Big|_{M_1} = \frac{\Pi}{V_T}$

Выберем точку M_0 внутри произвольного объема T. Пусть $V_T \to 0$, тогда $\operatorname{div}\vec{F}\Big|_{M_1 \to M_0} =$

$\lim\limits_{V_T\to 0}\dfrac{\Pi}{V_T}$ – поток через границу бесконечно малого объема с центром M_0 или мощность источника в M_0

Таким образом, дивергенция поля – мощность источников

Nota. Смысл утверждения $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$ – поле вихря свободно от источников

Nota. Утверждение $\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} u) = 0$ – поле потенциалов свободно от вихрей

2* Ротор

По **Th.** Стокса циркуляция $\Gamma = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}d\vec{\sigma}$

По **Th.** о среднем существует точка $M_1 \mid \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}d\vec{\sigma} = \operatorname{rot}\vec{F}\Big|_{M_1}\cdot S = \Gamma$

$\operatorname{rot}\vec{F}\Big|_{M_1} = \dfrac{\Gamma}{S}$, будем стягивать поверхность S к точке M_0, тогда $\operatorname{rot}\vec{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{S\to 0}\dfrac{\Gamma}{S}$ – циркуляция по бесконечно малому контуру с центром M_0

Поток Π и циркуляцию Γ называют интегральными характеристиками поля, тогда как дивергенцию $\operatorname{div}\vec{F}$ и ротор $\operatorname{rot}\vec{F}$ – дифференциальными

Nota. Ранее выяснили, что смысл

- потока $\Pi = \oiint_S \vec{F}d\vec{\sigma}$ – количество пройденной жидкости через поверхность за единицу времени;
- дивергенции $\operatorname{div}\vec{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{V\to 0}\dfrac{\Pi}{V}$ – мощность точечного источника (сколько жидкости он «производит» или «потребляет»)
- теоремы Гаусса-Остроградского: поток через замкнутую поверхность равен суммарной мощности источников внутри

Выясним смысл ротора и циркуляции на примере конкретного поля

Ex. $\vec{F} = -\omega y\vec{\imath} + \omega x\vec{\jmath}$ – поле линейных скоростей вращающегося твердого тела, где $\vec{\omega} = const$ – угловая скорость

Выберем контур L, ограничивающий область S

Найдем $\Gamma_L = \oint_L \vec{F}d\vec{l} = \oint_L (-\omega y)dx + \omega x dy \overset{\textbf{Th. } \text{Стокса}}{=} \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\vec{n}d\sigma = \iint_S \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma d\sigma = \iint_S 2\omega\cos\gamma d\sigma$

Так как ротор сонаправлен оси Oz, получаем $\cos\gamma = 1$

$\iint_S 2\omega\cos\gamma d\sigma = 2\omega\iint_S d\sigma = 2\omega S$

Раньше в интеграле видно, что $\operatorname{rot}\vec{F}\vec{n} \Longrightarrow |\operatorname{rot}\vec{F}| = 2\omega$

То есть механический смысл ротора – удвоенная угловая скорость вращающегося тела (или диска)

Nota. Чтобы уточнить смысл Γ, рассмотрим такое же поле жидких скоростей (водоворот)

$\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ и погруженное в него колесо с лопатками (водяная мельница)

В качестве контура L берем обод колеса, а его располагаем под углом γ к вектору $\vec{\omega}$

Все равно $\Gamma_L = \iint_S 2\omega\cos\gamma d\sigma = 2\omega\cos\gamma S$

Если $\gamma = 0$ (мельница расположена в плоскости водоворота), то $\Gamma_L = 2\omega S$ – максимальная мощность вращения нашей мельницы

Если, например, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (мельница расположена перпендикулярно водовороту), то $\Gamma_L = 0$ - колесо перпендикулярно полю, поэтому оно не вращается

6.6. Приложения к физике

1* Уравнение неразрывности (в гидромеханике)

Nota. Здесь потребуются формулы: $\dfrac{du(x(t),y(t),z(t))}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}$

$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{F}) = \vec{\nabla}f\cdot\vec{F} + f\cdot(\vec{\nabla}\vec{F})$, где f – скалярное поле, $\vec{F}$ – векторное поле

Задача: дано $\vec{F} = \rho\vec{v}$ – поле скоростей жидкости с весом $\rho = \rho(x,y,z,t)$

Через площадку dS за время dt протекает $d\Pi = \rho v_n dt dS$ или за единицу времени $d\Pi = \rho v_n dS$

Приращение жидкости за единицу времени $|dm| = \left|\dfrac{\partial\rho}{\partial t}dV\right|$

Поток жидкости равен ее убыли в объеме V, то есть $\Pi = \oiint_S \rho v_n dS = -\iiint_V \dfrac{\partial\rho}{\partial t}dV$

Применяя **Th.** Гаусса-Остроградского: $\Pi = \iiint_V \operatorname{div}(\rho\vec{v})dV = -\iiint_V \dfrac{\partial\rho}{\partial t}dV \iff$

$\iff \iiint_V \left(\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right)dV = 0 \quad \forall V$ (поэтому подынтегральная функция $= 0$)

$\iff \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

Учтем: $\dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho\vec{v}$

$\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = \vec{\nabla}\rho\cdot\vec{v} + \rho\vec{\nabla}\vec{v} \iff \vec{\nabla}\rho\vec{v} = \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) - \rho\vec{\nabla}\vec{v}$

$\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\vec{v} = 0$ – уравнение неразрывности (при несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\vec{v} = 0$)

2* Уравнения Максвелла

Экспериментально выяснено, что:

(a) $\int_L \vec{H}d\vec{l} = \iint_S \vec{r}d\vec{\sigma}$ – теорема о циркуляции магнитного поля

(b) $\int_L \vec{E}d\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}d\vec{\sigma}$ – закон Фарадея

где $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля, $\vec{r}$ – полный ток, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{B}$ – индукция магнитного поля

Максвелл узнал, что $\vec{r}$ = ток проводимости + ток смещения = $\lambda\vec{E} + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, где λ – коэффициент проводимости, ε, μ – проницаемость

(a) Закон Ампера: $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \left(\lambda \vec{E} + \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{\sigma}$

По **Th.** Стокса: $\iint_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{\sigma} - \iint_S \left(\lambda \vec{E} + \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{\sigma} = 0$

В векторной форме: $\operatorname{rot} \vec{H} = \left(\lambda \vec{E} + \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ – источники магнитного поля, то есть токи проводимости и смещения

(b) Закон Фарадея: $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{\sigma} = -\iint_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{\sigma} \Longleftrightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ – изменение индукции дает электрический ток в соленоиде

(c) Теорема Гаусса: $\vec{\nabla} \varepsilon \vec{E} = \rho$ – электрический заряд является источником индукции электрического поля

(d) Теорема Гаусса для магнитного поля: $\vec{\nabla} \mu \vec{H} = 0$ – магнитное поле не создают «магнитные заряды»

X. Программа экзамена в 2023/2024

X.1. Определенный интеграл функции одной переменной.

1. Определенный интеграл. Определение, свойства линейности и аддитивности.

   Определение: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}} \sigma_n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)dx$

   Свойства:

   1) Линейность: $\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$,

   2) Аддитивность $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

2. Геометрический смысл определенного интеграла. Оценка определенного интеграла. Теорема о среднем.

   Геометрический смысл: значение интеграла – площадь фигуры под графиком

   Оценка: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, где m и M – минимум и максимум функций

   Теорема Лагранжа о среднем:

   $f(x) \in C_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)\ f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$

3. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу.

   Интеграл с переменным верхним пределом: $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$

   Теорема Барроу: $f(x) : [a; +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) \in C_{[a;+\infty)}$

   Тогда $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ – первообразная для $f(x)$ - $\Phi(x) = F(x)$

4. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

   Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $f(x) \in C_{[a;b]}, F(x)$ – какая-либо первообразная $f(x)$

5. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

   Замена переменной: $f(x) \in C_{[a;b]} \quad x = \varphi(t) \in C'_{[\alpha;\beta]}, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

   Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

   По частям: $u, v \in C'_{[a;b]} \quad uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

   Тогда: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

6. Приложения интеграла: вычисление площадей в декартовых координатах; площади криволинейного сектора в полярных координатах.

   Приложения определенного интеграла

   Вычисление площади в ДПСК: $\int_a^b f(x)dx$

   Вычисление площади сектора в ПСК: $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$

7. Вычисление длины дуги кривой (вывод формулы).

   Вычисление длины кривой дуги: $\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$

8. Вычисление объемов тел с известными площадями сечений и тел вращения.

   Вычисление объемов тел: $\int_a^b S(x)dx$

   Вычисление объема тела вращения: $\int_a^b \pi r^2(x)dx$

9. Несобственные интегралы 1-го рода и 2-го рода. Определение и свойства. Вычисление.

   Несобственный интеграл 1-го рода – $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

   Несобственный интеграл 2-го рода – $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\beta\to b}\int_a^\beta f(x)dx$

   Свойства аналогичны собственному интегралу

10. Признаки сходимости несобственных интегралов: первый и второй признаки сравнения (в неравенствах и предельный).

    Сходимость несобственных интегралов

    Признак сходимости в неравенствах: $f(x), g(x) : [a;+\infty) \to \mathbb{R}^+$, непрерывны на $[a;+\infty)$ и $\forall x \in [a;+\infty) f(x) \leq g(x)$

    Тогда, если $\int_a^{+\infty} g(x)dx = I \in \mathbb{R}$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, причем $0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$

    Признак сходимости в пределах: $f(x), g(x) \in C_{[a;+\infty)}$, $f(x), g(x) > 0$

    $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ и $J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

11. Признак сходимости несобственных интегралов: теорема об абсолютной сходимости. Понятие условной сходимости.

    Признак абсолютной сходимости: $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$

    Условная сходимость: если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то I называют условно сходящимся

X.2. Функции нескольких переменных.

1. Определение функции двух переменных. Предел и непрерывность функции.

   Определение: $\forall M(x,y)\exists! z \in \mathbb{R} : z = f(x,y) \Longleftrightarrow z = f(x,y)$ – функция двух переменных

   Определение предела: $\lim\limits_{M\to M_0} z(x,y) = L \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\underset{\delta=\delta(\varepsilon)}{\delta > 0} \mid \forall M \in \overset{o}{U}_\delta(M_0)\quad |z(x,y) - L| < \varepsilon$

   Непрерывность: $z = f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M(x_0, y_0)$, если $z = f(x_0, y_0) = \lim\limits_{M\to M_0} z(x,y)$

2. Частные производные функции двух переменных.

Частная производная по y $\dfrac{\partial z}{\partial y} \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$, где $\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$

3. Производная сложной функции. Полная производная.

   Производная сложной функции: $z = z(u, v)$, $u(x, y), v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по x, y

   Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}$

   Полная производная: пусть $z = z(x, u(x), v(x))$, тогда $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{dv}{dx}$

4. Полный дифференциал функции двух переменных. Инвариантность формы.

   Полный дифференциал: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$ – сумма частных дифференциалов

   Инвариантность формы: $z = z(u, v)$, $\quad u = u(x, y)$, $\quad v = v(x, y)$ – дифференциалы

   Тогда $dz = \dfrac{\partial z}{\partial u} du + \dfrac{\partial z}{\partial v} dv = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$

5. Вторые производные функции двух переменных. Равенство смешанных производных.

   Вторые производные:

   $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{\partial z}{\partial x}$ – чистая производная

   $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{\partial z}{\partial x}$ – смешанные производные

   Равенство смешанных производных: $z = z(x, y)$, функции $z(x, y), z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ определены и непрерывны в $\overset{o}{U}(M(x, y))$

   Тогда $z''_{xy} = z''_{yx}$ $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)$

6. Второй дифференциал функции двух переменных. Неинвариантность формы.

   Второй дифференциал: $d^2 z \overset{def}{=} d(dz) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

   Неинвариантность формы

7. Формула Тейлора.

   Формула Тейлора: $z(M = \overset{o}{U}(M_0)) = z(M_0) + \dfrac{dz(M_0)}{1!} + \dots + \dfrac{d^n z(M_0)}{n!} + o((\Delta\rho)^n)$, где $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

8. Производная по направлению, градиент: определения, свойства.

   Производная по направлению – $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$,

   где α, β, γ – направления $\vec{s}$

   Градиент: $\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ – условный вектор

   $\overrightarrow{\text{grad}}\, u \overset{def}{=} \vec{\nabla} u$ – градиент функции $u(x, y, z)$

   Свойства градиентов:

   - $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \text{проек.}_{\vec{s}} \vec{\nabla} u$
   - $\vec{\nabla} u$ – направление наибольшего значения $\dfrac{\partial u}{\partial s}$

- $\vec{s} \perp \vec{\nabla} u \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial s} = 0$
- $u = u(x, y), u = c$ – линии уровня l. Тогда $\vec{\nabla} u \perp l$

9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности: определения, вывод уравнений.

   Касательная плоскость и нормаль к поверхности

   Касательная к поверхности: Прямая τ называется касательной прямой к поверхности π в точке $P(x, y, z)$, если эта прямая касается какой-либо кривой, лежащей на π и проходящей через P

   Касательная плоскость: Плоскость κ (содержащая все касательные прямые τ к π в точке M_0) называется касательной плоскостью к π в M_0. Плоскость κ задается как $z - z_0 = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \dfrac{\partial z}{\partial y}(y - y_0)$

   Нормаль к поверхности: Прямая в направлении $\vec{N}$, перпендикулярном касательной плоскости, через точку M_0 называется нормалью к π в M_0

   Уравнение нормали n: $\dfrac{x - x_0}{-\frac{\partial z}{\partial x}} = \dfrac{y - y_0}{-\frac{\partial z}{\partial y}} = \dfrac{z - z_0}{1}$

10. Экстремумы функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия.

    Экстремумы функции двух переменных. Экстремум – такая точка M_0, что $\forall M \in U_\delta(M_0)$ $z_0 \le z(M)$ или $z_0 \ge z(M)$

    Необходимое условие: $z = z(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\qquad M_0$ – точка гладкого экстремума.

    Тогда $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}|_{M_0} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}|_{M_0} = 0 \end{cases}$

    Достаточное условие: Пусть $z = z(x, y)$ непрерывна в окрестности M_0 (критическая точка $\dfrac{\partial z}{\partial x}|_{M_0} = 0, \dfrac{\partial z}{\partial y}|_{M_0} = 0$) вместе со своими первыми и вторыми производными (можно потребовать трижды дифференцируемость)

    Тогда, если $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{\text{обозн}}{=} A, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \overset{\text{обозн}}{=} B, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \overset{\text{обозн}}{=} C$, то

    (a) $AC - B^2 > 0, A > 0 \Longrightarrow M_0$ – точка минимума
    (b) $AC - B^2 > 0, A < 0 \Longrightarrow M_0$ – точка максимума
    (c) $AC - B^2 < 0 \Longrightarrow$ в точке M_0 нет экстремума
    (d) $AC - B^2 = 0 \Longrightarrow$ нельзя утверждать наличие или отсутствие экстремума в точке (требуются дополнительные исследования)

X.3. Интегрирование функции нескольких переменных.

1. Двойной интеграл. Определение и свойства. Вычисление двойного интеграла. Кратный интеграл.

   Двойной интеграл: Если $\exists \lim v_n \in \mathbb{R}$, не зависящий от типа дробления и т.д. при $n \to \infty$ и $\tau = \max(\Delta x_i, \Delta y_i) \to 0$, то $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \tau \to 0}} v_n \overset{def}{=} \iint_D z(x, y) dx dy$ – двойной интеграл от $z(x, y)$ на области D

Вычисление: $\iint_D z(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} z(x,y)dydx = \int_\alpha^\beta \int_{x_1}^{x_2} z(x,y)dxdy$

Кратный интеграл

2. Определение и вычисление тройного интеграла.

   Тройной интеграл: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max(dv)\to 0}} \overset{def}{=} \iiint_T u(x,y,z)dxdydz$

   Геометрический смысл. Только при $u=1$ интеграл $\iiint_T dxdydz = V_T$ равен объему

   Физический смысл. Пусть $u(x,y,z)$ – плотность в каждой точке T. Тогда $\iiint_T u(x,y,z)dxdydz = m_T$ – масса

   Вычисление: $\iiint_T u(x,y,z)dxdydz \overset{\text{кратный}}{=} \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} u(x,y,z)dzdydx$

3. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Якобиан.

   Замена переменных в двойном и тройном интегралах

   (a) Дробление D' в распрямленной Ouv

   (b) Выбор средней точки, поиск значения $f(\xi_i,\eta_i)$

   Значение величины на элементе $f(\xi_i,\eta_i)|J|dudv$

   (c) Интегральная сумма $\sigma_n = \Sigma f(\xi_i,\eta_i)|J|dudv$

   (d) В пределе интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(u,v)|J|dudv$

   Определитель $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$, где $\begin{cases} x_1 = f_1(\xi_1,\dots,\xi_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(\xi_1,\dots,\xi_n) \end{cases}$ – преобразование координат $Ox_i \to O\xi_i (f_k \in C^1_D)$, называется определителем Якоби или якобиан

   (a) Якобиан в ПСК: $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$

   (b) в ЦСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$

4. Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.

   Криволинейный интеграл 1-го рода: Дана скалярная функция $f(x,y)$ и кривая l, тогда суммарная величина функции на кривой равна $\int_l f(x,y)dl$

   Физический смысл: пусть $f(x,y)$ – плотность, кривая – неоднородный кривой стержень. Тогда интеграл – масса стержня

   Свойства:

   Свойства, не зависящие от прохода дуги, аналогичны свойствам определенного интеграла

   Направление обхода: $\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl$

Вычисление:

(a) Параметризация $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $\varphi, \psi \in C^1_{[\tau, T]}$ $\begin{matrix} A(x_A, y_A) = (\varphi(\tau), \psi(\tau)) \\ B(x_B, y_B) = (\varphi(T), \psi(T)) \end{matrix}$

(b) $\int_L f(x,y)dl = \left[dl = \sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2}|dt| \right] = \int_\tau^T f(t)\sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2}|dt|$

5. Криволинейный интеграл 2-го рода как работа силы вдоль пути. Определение, вычисление и свойства. Формула связи криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода.

Криволинейный интеграл 2-го рода: Дана векторная функция $\vec{F} = (P, Q)$ и кривая l, тогда суммарная величина скалярных произведений функции и координат на кривой равна $\int_l Pdx + Qdy$

Физический смысл: работа сила $\vec{F} = (P, Q)$ над точкой вдоль пути, обозначенной кривой

Свойства:

Свойства, не зависящие от прохода дуги, аналогичны свойствам определенного интеграла

Направление обхода меняет знак интеграла: $\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy$

Вычисление:

(a) Параметризация $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $\varphi, \psi \in C^1_{[\tau, T]}$ $\begin{matrix} A(x_A, y_A) = (\varphi(\tau), \psi(\tau)) \\ B(x_B, y_B) = (\varphi(T), \psi(T)) \end{matrix}$

(b) $\int_{L=\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = [dx = \varphi_t' dt, dy = \psi_t' dt] = \int_\tau^T (P\varphi' + Q\psi')dt$

Связь между интегралами: $\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P,Q)(dx,dy) = \int_L (P,Q)(\cos\alpha, \cos\beta)\underbrace{ds}_{\approx dl} = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl$

6. Теорема (формула) Грина.

Формула Грина: $D \subset R^2$, обходящаяся в правильном направлении $\uparrow Ox, \uparrow Oy$, K – гладкая замкнутая кривая (контур), которая ограничивает D

В области D действует $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ – непрерывные дифференциалы

Тогда $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{K^+} Pdx + Qdy$

7. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути.

Интеграл, не зависящий от пути (НЗП): $\int_{AB} Pdx + Qdy$ называется интегралом НЗП, если $\forall M, N \in D \quad \int_{AMB} Pdx + Qdy = \int_{ANB} Pdx + Qdy$

Теорема об интеграле НЗП:

I. $\int_{AB} Pdx + Qdy$ – интеграл НЗП

II. $\oint_K Pdx + Qdy = 0 \quad \forall K \subset D$

III. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \; \forall M(x,y) \in D$

IV. $\exists\Phi(x,y) \mid d\Phi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ в области D

Причем $\Phi(x,y) = \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy$, где $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in D$

Тогда I $\iff$ II $\iff$ III $\iff$ IV

8. Следствие теоремы о независимости от пути (формула Ньютона-Лейбница).

   Формула Ньютона-Лейбница: Выполнены условия **Th.** об интеграле НЗП

   Тогда $\displaystyle\int_A^B Pdx + Qdy = \Phi(B) - \Phi(A)$

9. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.

   Поверхностный интеграл 1-го рода: $\displaystyle\iint_S u(x,y,z)\Delta\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max\Delta\sigma_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta\sigma_k$ – поверхностный интеграл первого рода

   Свойства: смена обхода поверхности S не меняет знака интеграла, то есть $\displaystyle\iint_{S^+} ud\sigma = \iint_{S^-} ud\sigma$

   Вычисление: $\displaystyle\iint_S u(x,y,z)d\sigma$

   (a) Параметризация S: самая частая – $z = z(x,y), (x,y) \in D$ – пределы интегрирования

   (b) $d\sigma = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy,$

   (c) $u(x,y,z) = \tilde{u}(x,y,z(x,y)) = \tilde{u}(x,y)$

   $\displaystyle\iint_S u(x,y,z)d\sigma = \iint_{D^+} \tilde{u}(x,y)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$

10. Поверхностный интеграл 2-го рода как поток жидкости через поверхность. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода.

    Поверхностный интеграл 2-го рода – поток жидкости через площадку, направленную по вектору $\vec{n}$

    $\Pi = \displaystyle\iint_{S^{\vec{n}}} d\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} F_n d\sigma = \iint_{S^{\vec{n}}} (\vec{F},\vec{n})d\sigma = \iint_{S^{\vec{n}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$

    Связь: поток $\Pi = \displaystyle\iint_{S^{\vec{n}}} \pm Pdydz \pm Qdxdz \pm Rdxdy = \iint_{S^{\vec{n}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$ – связь интегралов I и II рода

11. Поверхностный интеграл 2-го рода: математическое определение, вычисление, свойства.

    Определение: $\displaystyle\iint_{S^{\vec{n}}} f(x,y,z)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max\Delta s_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$ – поверхностный интеграл второго рода

    Свойства: Меняет знак при смене обхода с $\vec{n}^+$ на $\vec{n}^-$

    Вычисление:

    (a) Параметризация S для $\displaystyle\iint Rdxdy$ $z = z(x,y)$, для $\displaystyle\iint Qdxdz$ $y = y(x,z)$, для $\displaystyle\iint Pdydz$ $x = x(y,z)$

    Пределы интегрирования $D_{xy} =$ проек.$_{Oxy}S$ и т. д.

(b) $dxdy \to \pm dxdy$, если обход D_{xy} в направлении против часовой стрелки ($+dxdy$, если угол между $\vec{n}$ и Oz острый, иначе $-dxdy$)

(c) $R(x,y,z) = \tilde{R}(x,y,z(x,y)), P(x,y,z) = \tilde{P}(y,z), Q(x,y,z) = \tilde{Q}(x,z)$

(d) $\iint_{S^{\vec{n}}} f(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} \pm\tilde{P}dydz \pm \tilde{Q}dxdz \pm \tilde{R}dxdy$

12. Теорема Гаусса-Остроградского.

    Теорема Гаусса-Остроградского: $S_1 \ : \ z = z_1(x,y), \ S_3 \ : \ z = z_3(x,y), \ S_2 \ : \ f(x,y) = 0$ (проекция на Oxy – кривая)

    $S = \bigcup\limits_{i=1}^{3} S_i$ – замкнута и ограничивает тело T (S_2 – цилиндр, S_1 – шапочка, S_3 – шапочка снизу)

    $P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$ – непрерывно дифференцируемые, действуют в области $\Omega \supset T$

    Тогда $\oiint_{S_{\text{внешн.}}} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$

13. Теорема Стокса.

    Теорема Стокса: Пусть $S : z = z(x,y)$ – незамкнутая поверхность, L – контур, на которую она опирается

    $\text{проек.}_{Oxy} L = K_{xy}, \quad \text{проек.}_{Oxy} S = D_{xy}$

    В области $\Omega \supset S$ действуют функции P, Q, R – непрерывно дифференцируемы

    Тогда $\oint_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S^+} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) d\sigma$

14. Скалярное и векторное поля: определения, геометрические характеристики. Дифференциальные и интегральные характеристики полей (определения).

    Скалярное поле: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Функция $u \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ называется скалярным полем в Ω

    Векторное поле: Функция $\vec{F} = (F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x})) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется векторным полем

    Геометрические характеристики:

    $u = u(x,y,z)$: l - линии уровня $u = \text{const}$

    $\vec{F} = (P,Q,R)$: w – векторная линия, в каждой точке w вектор $\vec{F}$ – касательная к w

    Векторная трубка – совокупность непересекающихся векторных линий

    Дифференциальные характеристики:

    Дивергенция $\operatorname{div} \vec{F} \overset{def}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

    Ротор $\operatorname{rot} \vec{F} \overset{def}{=} \vec{\nabla} \times \vec{F}$

    Интегральные характеристики:

    (a) Поток поля $\vec{F} : \Pi = \iint_S \vec{F} d\vec{\sigma}$

    (b) Циркуляция поля $\vec{F} : \Gamma = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$

15. Виды векторных полей и их свойства (теоремы о поле градиента и поле вихря).

    Безвихревое поле: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$

    Свойство безвихревого поля: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \Longleftrightarrow \exists u(x,y,z) \mid \vec{\nabla} u = \vec{F}$

Соленоидальное поле: $\operatorname{div}\vec{F} = 0$

Свойство соленоидального поля: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$

Смысл утверждения $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$ – поле вихря свободно от источников

Утверждение $\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ u) = 0$ – поле потенциалов свободно от вихрей

16. Механический смысл потока и дивергенции.

    Механический смысл:

    $\operatorname{div}\vec{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{V\to 0}\dfrac{\Pi}{V}$ – мощность точечного источника

    Поток Π – кол-во жидкости через площадку за единицу времени

17. Механический смысл вихря и циркуляции.

    Механический смысл:

    $\operatorname{rot}\vec{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{S\to 0}\dfrac{\Gamma}{S}$ – циркуляция по бесконечно малому контуру (удвоенная угловая скорость вращающегося тела)

    Циркуляция Γ – максимальная мощность вращения водяной мельницы

18. Векторная запись теорем теории поля и их механический смысл.

    Теорема Гаусса-Остроградского в векторной форме: $\iint_S \vec{F}d\vec{\sigma} = \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}$

    Теорема Стокса в векторной форме: $Pdx + Qdy + Rdz = \vec{F}d\vec{l}$

    $\oint_L \vec{F}d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\vec{n}d\sigma = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}d\vec{\sigma}$

    Теорема о потенциале: $\forall L\ \oint_L \vec{F}d\vec{l} = 0 \iff \operatorname{rot}\vec{F} = 0 \iff \exists u(x,y,z) \mid \vec{\nabla}u = \vec{F}$