Th. $Ly = f(x), y = \overline{y} + y^*$ - решение $Ly = f(x)$.
Тогда $\overline{y} + y^*$ - общее решение

Правда ли, что найдется единственный набор констант $C_1, \dots, C_n$, которые удовлетворяют начальным условиям $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \end{cases}$

Так как $\overline{y} + y^*$ - решение, то $\begin{cases} y_0 = C_1 y_{01} + C_2 y_{02} + \dots + C_n y_{0n} + y^*_0 \\ y'_0 = C_1 y'_{01} + \dots + y^{*\prime}_0 \\ \vdots \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} y_0 - y^*_0 = \sum_{i=1}^n C_i y_{0i} \\ y'_0 - y^{*\prime}_0 = \sum_{i=1}^n C_i y'_{0i} \\ \vdots \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} y_{01} & y_{02} & \dots & y_{0n} \\ y'_{01} & y'_{02} & \dots & y'_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n)}_{01} & y^{(n)}_{02} & \dots & y^{(n)}_{0n} \end{pmatrix}}_{\det W \neq 0} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - y^*_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Таким образом система имеет единое решение $(C_1, \dots, C_n)$, которое удовлетворяет начальным условиям

Th. $Ly = f_1(x) + f_2(x)$
Пусть $Ly^*_1 = f_1(x)$ и $Ly^*_2 = f_2(x)$, тогда $Ly^* = f_1 + f_2$, где $y^* = y^*_1 + y^*_2$

$Ly^* = L(y^*_1 + y^*_2) = Ly^*_1 + Ly^*_2 = f_1(x) + f_2(x)$

4.6. Системы ДУ

Def. Пусть дан набор функций $y_1, \dots, y_n$. Система, связывающие эти функции, то есть $\begin{cases} F_1(x_1, y_1, \dots y_n, \dots, y^{(n)}_1, \dots y^{(n)}_n) = 0 \\ \vdots \end{cases}$, называется системой дифференциальных уравнений (СДУ)

<u>Механический смысл</u>: пусть $\mathbb{R}^n$ – фазовое пространство, пространство состояний системы, t – время, x_i – координаты точки M в $\mathbb{R}^n$
Тогда такая система ДУ

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, \{x_i\}) \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(t, \{x_i\}) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, \{x_i\}) \end{cases}$$

описывает состояние исследуемой системы во времени, причем $\dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$ – скорости

Nota. Такая система называется нормальной, то есть все уравнения разрешены относительно производных

Nota. Всякое ДУ$_n$ можно рассмотреть как СДУ: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = y_1(x) \\ y' = y_2(x, y_1) \\ \vdots \end{cases}$

Можно сделать и обратное – свести СДУ к ДУ$_n$ с помощью <u>метода исключения</u>. Рассмотрим на примере СДУ 2-ого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y, t) \\ \frac{dx}{dt} = g(x, y, t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = f(x, y, t) \\ \dot{x} = g(x, y, t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial f}{\partial y}f \\ \dot{x} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Свели систему ДУ к ДУ$_2$: $\ddot{y} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial x}g + \dfrac{\partial f}{\partial y}f$

Nota. Чтобы свести к ДУ систему ДУ $\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$

нужно исключить $n-1$ выражение $\dot{x}_i$, для этого взять производные $\dfrac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}$

Таким образом общий порядок СДУ (сумма порядков старших производных) будет равен порядку ДУ

Ex. $\begin{cases} \dot{y} = y + 5x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5\dot{x} \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5(\dot{-y - 3x}) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 15x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 3(\dot{y} - y) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0$

ХрУ 😈: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i \Longrightarrow \overline{y} = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

Найдем $x(t)$ из 1-ого ДУ: $\dot{\overline{y}} = -e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = e^{-t}((C_2 - C_1)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t)$

$5x = \dot{\overline{y}} - \overline{y} = e^{-t}((C_2 - 2C_1)\cos t - (C_1 + 2C_2)\sin t)$

$$\begin{cases} y(t) = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) \\ x(t) = \frac{1}{5}e^{-t}((C_2 - 2C_1)\cos t - (C_1 + 2C_2)\sin t) \end{cases}$$

Nota. Метод исключения сохраняет линейность, поэтому линейная СДУ (с постоянными коэффициентами) сводится к ЛДУ (с постоянными коэффициентами)

Nota. СДУ из *Ex.* не содержала t в явном виде. Такие СДУ называются автономными

Матричный метод

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_n + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Обозначим $(y_1, \dots, y_n) = Y$ – вектор функций, $\{a_{ij}\} = A$ – матрица СДУ

Тогда СДУ запишется в виде $Y' = AY$ (однородная СДУ, так как нет $f(x)$)

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа A и h_i – собственный вектор для λ_i

Будем искать решение Y в виде $Y = \ln e^{\lambda_i x}$

Подставим в СДУ: $Y' = \lambda_i h_i = e^{\lambda_i x} = A\underbrace{h_i e^{\lambda_i x}}_{Y} = AY$

Ex. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 8x + 3y \end{cases} \qquad x(0) = 0, y(0) = 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$

$h_1 : \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$h_2 : \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{5t}$

Задача Коши: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ -2C_1 + 4C_2 \end{pmatrix} \to C_1 = -\dfrac{1}{3}, C_2 = \dfrac{1}{3}$

Итак $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{5t} \end{cases}$

Решения в *Ex.* линейно независимы (то есть $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$, где $Y_1 = h_i e^{\lambda_i t}$), так как $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

Для кратных собственных $\mathbb{R}$-чисел нельзя построить базис из h_i, а чтобы составить общее

решение СДУ, нужно n линейно независимых решений Y_i (ФСР). В этом случае используют жорданов базис (см. литературу)
Для $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ можно искать решения в том же виде, но потом свести к вещественным функциям (см. литературу🧐)

4.7. Теория устойчивости (элементы)

Наводящие соображения: возьмем грузик, подвешенный на стержне. Когда он находится снизу, он находится в устойчивом равновесии, но когда сверху – в неустойчивом

Def. Пусть даны СДУ$_2$: $\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y) \\ \dot{y} = f_2(t, x, y) \end{cases}$, НУ$_1$: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ и НУ$_2$: $\begin{cases} \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$
Решение СДУ $x = x(t), y = y(t)$ называется устойчивым по Ляпунову при $t \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \underset{\begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases}}{\forall x, y} \quad \forall t > 0 \begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \varepsilon \end{cases}$

Или $\begin{matrix} \Delta x(t) \to 0 \\ \Delta y(t) \to 0 \end{matrix}$ при $t \to +\infty$ и $\begin{cases} \Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0 \end{cases}$

Nota. Малое воздействие приводит к малым отклонениям от исходной траектории

Nota. Обычно рассматривают отклонение решений от нулевого, то есть $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

Ex. $\dot{y} + y = 1$, НУ: $y(0) = 1, \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$ (малое отклонение)
$\begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \to C = 0 \quad \begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \to C = \tilde{y} - 1$
$\tilde{y} - y = (\tilde{y}_0 - y)e^{-t} + 1 - 1 = (\tilde{y}_0 - 1)e^{-t} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ - устойчива🥳