

Содержание

1. Основные понятия	2
1.1. Комплексное число	2
1.2. Комплексная плоскость	2
1.3. Предел	4
2. Комплексная функция	5
2.1. Определение	5
2.2. Предел функции	6
2.3. Элементарные комплексные функции	7
2.4. Дифференцирование ФКП	8
2.5. Конформные отображения	11
3. Интеграл по комплексной переменной	13
3.1. Определения	13
3.2. Теорема Коши	14
3.3. Неопределенный интеграл	16
3.4. Интеграл Коши	17
4. Ряды	17
4.1. Числовой ряд в комплексной плоскости	17
4.2. Функциональный ряд в комплексной плоскости	18
4.3. Степенной ряд	19
4.4. Ряд Лорана	21
Х. Программа экзамена в 2024/2025	27
Часть 1.	27
Часть 2.	30

1. Основные понятия

1.1. Комплексное число

Мет. $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Обозначение: $z = (a, b) = a + bi$, где $i = (0, -1) = \sqrt{-1}$

Основные операции:

1. $\operatorname{Re} z = a$ - вещественная часть, $\operatorname{Im} z = b$ - мнимая часть
2. $z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4. $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ - **формула Муавра**, где $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$
5. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$, где $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$, $k \in \mathbb{Z}$
6. При $n = 2$ $\sqrt{z} = \sqrt{a + bi} = \pm(c + di)$, где $c = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$, $d = \operatorname{sign}(b) \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$

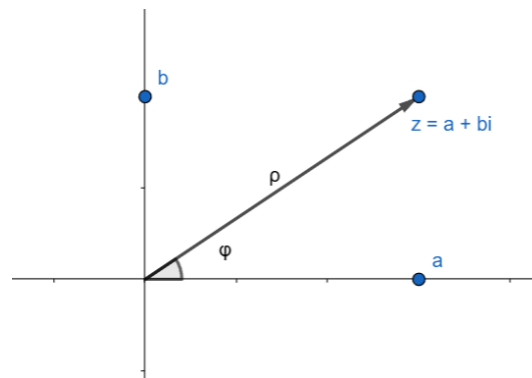
Тригонометрическая форма:

$z = a + bi = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi =$

$\arg z \in [0; 2\pi)$

$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

По формуле Эйлера $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}$



1.2. Комплексная плоскость

Def. Окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ определяется как $U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$

Тогда $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0) = U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ - выколота окрестность

Def. Для данной множества точек A точка z_0 считается

- внутренней, если для любого δ $U_\delta(z_0) \subset A$
- граничной, если для любого δ $\exists z \in U_\delta(z_0) \mid z \in A$ и $\exists z \in U_\delta(z_0) \mid z \notin A$

Def. Открытое множество состоит только из внутренних точек

Def. Закрытое множество содержит все свои граничные точки

Def. Границей Γ_D (иногда обозн. δD) для множества D называют множество всех граничных точек D

Def. Если любые две точки множества можно соединить ломаной линией конечной длины, то множество считается связным

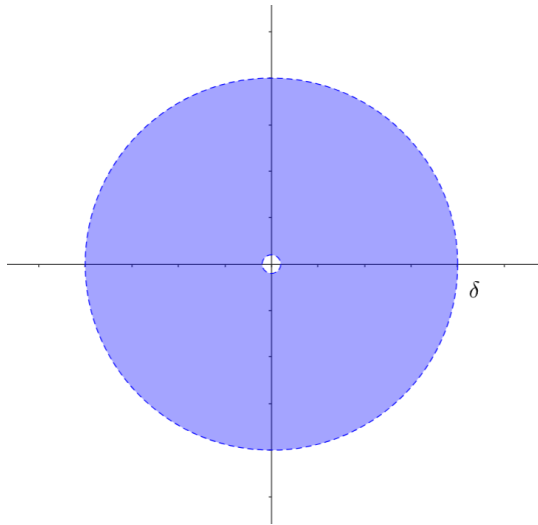
Def. Множество $D \subset \mathbb{C}$ называется областью, если D - открытая и связная

Def. Кривая $l \subset \mathbb{C}$ считается непрерывной, если $l = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \varphi(t) + i\psi(t), t \in \mathbb{R}\}$, где $\varphi(t), \psi(t)$ - непрерывные функции

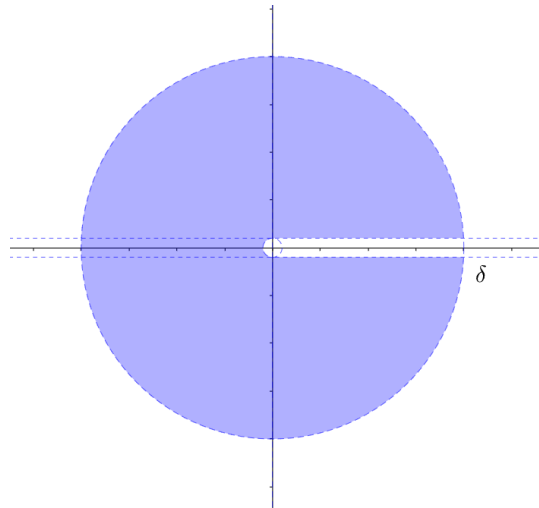
Nota. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и их производные непрерывные, то кривая l гладкая

Def. Непрерывная замкнутая (то есть начальная и конечная точки совпадают) без самопересечений кривая называется контуром

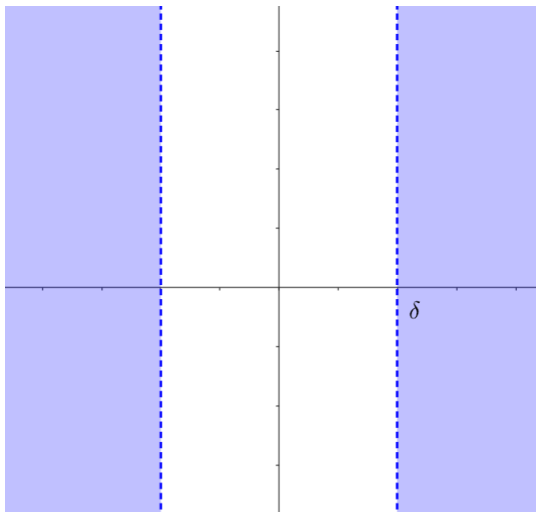
Nota. Односвязную область можно стянуть в точку



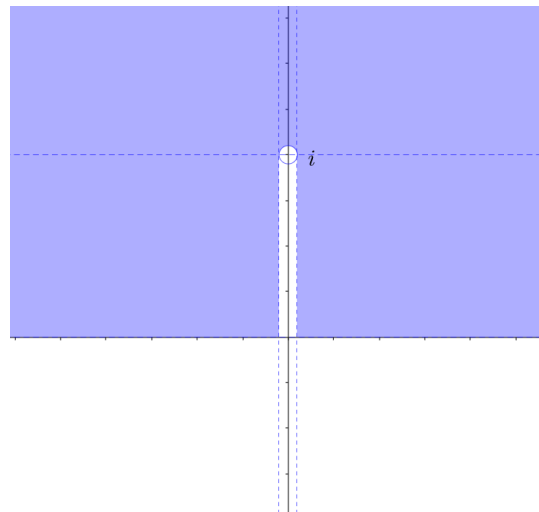
Ex. 1. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \delta\}$ - область связанная, но не односвязная, ее нельзя стянуть из-за дырки



Ex. 2. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \delta, \arg z \neq 0\}$ - область связная и односвязная



Ex. 3. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < \delta\}$ - несвязная область



Ex. 4. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0, z \notin [0, i]\}$ - здесь под $[0, i]$ подразумевается линейный отрезок на оси

Nota. Дальше все рассматриваемые Γ_D будут состоять из кусочногладких и изолированных кривых

1.3. Предел

Met. Последовательность $\{z_n\} = z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$

Def. Пределом $\{z_n\}$ называют число z такое, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = \mathbb{N} \left| \forall n > n_0 \quad |z_n - z| < \varepsilon \right.$$

Обозначается $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$

Nota. $\{z_n\}$ можно представить как $x_n + iy_n$, то есть двумя \mathbb{R} -последовательностями

$$\text{Th. } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x + iy \iff \begin{matrix} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = x \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = y \end{matrix}$$

$$\boxed{\Leftarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| \forall n > n_0 \quad \begin{matrix} |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix} \right.$$

$$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

То есть $\forall \varepsilon > 0 \dots |z_n - z| < \varepsilon$

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \\ |y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

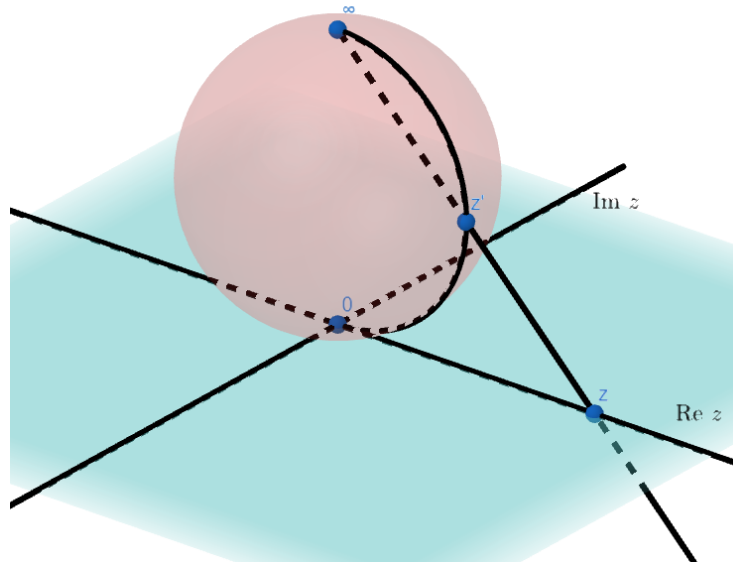
$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

Nota. Для комплексных чисел работают теоремы для пределов (сумма пределов, произведение пределов и т.д.), критерий Коши и другие

$$\text{Def. } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| n > n_0 \quad |z| > \varepsilon \right.$$

Def. Точка z , определенная как предел, равный ∞ , называется бесконечно удаленной. Но существует множество последовательностей, чьи пределы удаляются на бесконечность разными путями на плоскости

Def. Стереографическая проекция (сфера Римана)



Поместим сферу на комплексную плоскость и сделаем биекцию точек плоскости на точки сферы: проведем из верхней точки сферы лучи вниз на плоскость, и точка, где луч пересекает сферу, будет считаться отображением для данной точки. Заметим, что в этом случае бесконечно удаленные точки будут отображаться в верхнюю точку сферы

Def. $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ - расширенная комплексная плоскость

Однако $z + \infty$ не определена, $\infty + \infty$ не определена. Но $\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n}$ при $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; $\infty = \infty \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ при $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$

Записью $[-\infty; +\infty]$ обозначается ось $\overline{\mathbb{R}}$;

$[-i\infty; +i\infty]$ - мнимая расширенная ось

Путь $x \pm i\infty$ при фикс. x - вертикальная прямая;

$iy \pm \infty$ - горизонтальная прямая;

$e^{i\varphi} \cdot \infty$ - прямая, проходящая через начало координат

2. Комплексная функция

2.1. Определение

Мет. $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{\iff}$ отображение такое, что $\forall x \in E \exists! y \in D \mid y = f(x)$

Def. $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{\iff}$ отображение такое, что $\forall z \in D \exists w \in G \mid f(z) = w$

Def. Если $\forall z \in D \exists! w \in G$, то f называется однозначной функцией

Def. Если $\forall z_1, z_2 \in D (z_1 \neq z_2) \implies f(z_1) \neq f(z_2)$, то f называется однолистной функцией

Ex. 1. $w = \sqrt{z}$ - неоднозначная функция

$$\square z = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{1} \left(\cos \frac{2\pi k}{2} + i \sin \frac{2\pi k}{2} \right)$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = -1$$

Ex. 2. $w = z^2$ - неоднолистная функция

$$z_1 = 1, z_2 = -1 \quad w(z_1) = w(z_2) = 1$$

Nota. Если $f(z)$ однозначна и однолистка, то $f(z)$ - взаимно однозначное соответствие (биекция).

Тогда $\exists g(x) \mid g(f(x)) = x$

Комплексную функцию $f(z)$ можно представить как $u(x, y) + iv(x, y)$, где $x + iy = z$

$$Ex. w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$$

$$u(x, y) = (x^2 - y^2), \quad v(x, y) = 2xy$$

2.2. Предел функции

Def. $L \in \mathbb{C}, f : D \longrightarrow G, \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid z \in D, z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0) \implies f(z) \in U_\varepsilon(L)$

В определении существование и значение L не должно зависеть от пути, по которому z приближается к точке сгущения z_0 . Может быть так, что для любого направления стремления предел есть, но в общем смысле не существует

$$Ex. f(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right) \quad \square z = \rho e^{i\varphi}$$

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}} - \frac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} \right) = \frac{1}{2i} (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}) = \frac{1}{2i} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi - \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = \sin 2\varphi$$

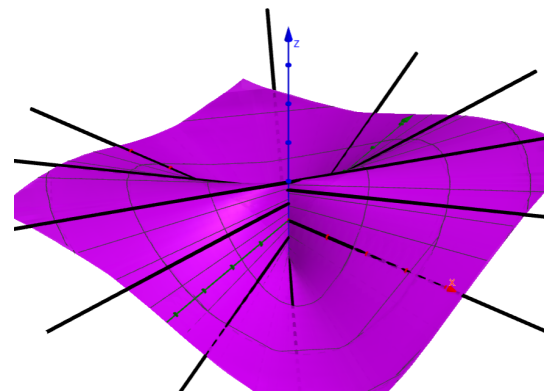
Зафиксируем $\varphi = \varphi^* \in [0; 2\pi)$, тогда $\sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi = \varphi^*}} f(z) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi = \varphi^*}} \sin 2\varphi = \sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$$

Значения предела занимает отрезок $[-1; 1] \implies$

$$\nexists \lim_{z \rightarrow 0} f(z)$$

На рисунке изображена $\sin 2\varphi$, на оси Oz изображена $\operatorname{Re} w$. Черные линии - это возможные пути приближения z к 0



Nota. Путь следования предела аналогичен левостороннему и правостороннему пределами \mathbb{R} -функций

Def. Непрерывность функций в точке z_0 .

$f: D \rightarrow G, z_0 \in D, f(z)$ называется непрерывной в z_0 , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

На языке приращений: $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$

$$\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0 \implies \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{cases} \implies \Delta \rho \rightarrow 0$$

2.3. Элементарные комплексные функции

Ех. 1. Линейная $f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$

Эта функция однозначная, однолистная $\implies \exists f^{-1}(z) = g(z) = \frac{z-b}{a}$

Геометрический смысл:

$a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$

$az = |a||z|(\cos(\varphi_a + \varphi_z) + i\sin(\varphi_a + \varphi_z))$ - поворот и растяжение ($\varphi_a = \arg a, \varphi_z = \arg z$)

$az + b = (x_{az} + x_b) + i(y_{az} + y_b)$ - сдвиг

То есть линейная функция - композиция из поворота, растяжения и сдвига

Ех. 2. Степенная $w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$ - однозначная, может быть неоднолистной

Для $n \in \mathbb{Q}$ функция становится неоднозначной

Ех. $w = z^2 \quad z = \rho e^{i\varphi}, w = \rho^2 e^{2i\varphi}$

Пусть $z_1 \neq z_2$ и $w(z_1) = w(z_2)$, тогда $\arg z_1 = \arg z_2 \pm \pi$

$$w(z_1) = \rho^2 e^{2i \arg z_1} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + 2\pi k)}$$

$$w(z_2) = \rho^2 e^{2i \arg z_2} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + \pi)} = \rho^2 e^{i(2 \arg z_1 + 2\pi)} = w(z_1)$$

Область однолистности z^2 - множество точек, для которых $\arg z \in [0; \pi)$

Точку $w = 0$ называют точкой разветвления

Ех. $w = z^{-1} = \frac{1}{z} \quad w(0) = \infty, w(\infty) = 0$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - функция обратима

$$w = re^{i\psi} = \frac{1}{\rho e^{i\phi}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \implies |w| = \frac{1}{|z|}, \arg w = -\arg z$$

Преобразование $|w| = \frac{1}{|z|}$ называется инверсией, а

$\arg w = -\arg z$ дает симметрию относительно $\operatorname{Re} z$

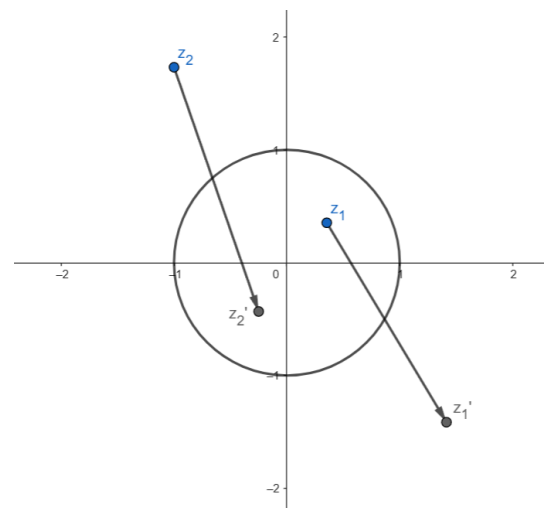
Ех. 3. Рациональная $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \quad n, m \in \mathbb{N}$

Ех. 4. Показательная $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

Свойства:

$$1. e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$2. (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$$



3. $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ - показательная функция периодична с периодом $2\pi i$

Ех. 5. Логарифмическая $w = \text{Ln } z$

Если $e^w = e^{u+vi} = e^u(\cos v + i \sin v) = z = |z|e^{i \arg z}$, то $u = \ln |z|$, $v = \arg z + 2\pi k$

Тогда $\boxed{\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k)}$

$\ln z = \text{Ln } z$ при $k = 0$ - т. н. главное значение

Заметим, что $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ - многолистная функция, а $w = \text{Ln } z = \ln \rho + i(\arg z + 2\pi k)$ - многозначная

Ех. 6. Тригонометрические и гиперболические

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Nota. Рассмотрим уравнение $\sin z = A \in \mathbb{C}$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = A \implies e^{2iz} - 2iAe^{iz} - 1 = 0$$

При $t = e^{iz}$ получаем квадратное уравнение, у которого в \mathbb{C} всегда будет два корня. Это значит, что в \mathbb{C} \sin и \cos принимают любые значения (то есть $|\sin z| > 1$)

2.4. Дифференцирование ФКП

Def. $w = f(z), w : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z_0 \in D$. **Производная** функции $w(z_0)$ - это предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$, если он существует и не зависит от пути $z \rightarrow z_0$

Мет. Дифференцирование $y = f(x)$:

$$\text{В } \Phi_1 \text{ П: } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \underset{A \in \mathbb{R}}{=} A\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\text{В } \Phi_2 \text{ П: } \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)$$

Def. $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0 , если $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$

Def. Дифференцируемая в точке z_0 функция $w = f(z)$, производная $f'(z_0)$ которой непрерывна в z_0 , называется аналитической (или аналитичной) функцией в z_0

Th. Критерий аналитичности (или Условие Коши-Римана)

$f(x) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в точке $z_0 = x + iy$



$\exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ непрерывны в z и $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

Причем, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f \text{ аналитическая в } z &\iff \exists \text{ непрерывная } f'(z) = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = [\text{предел не зависит от пути}] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично при } i\Delta y \rightarrow 0 \text{ получаем } \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{i\Delta y} = \\ = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y v}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = v_y - iu_y \end{aligned}$$

Итак, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

Отсюда $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$

$\Leftarrow \exists$ непрерывные $u_x, u_y, v_x, v_y \iff u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в (x, y) , тогда

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha_1(x, y, \Delta x, \Delta y) + \alpha_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$$

$$\alpha_1 = o(\Delta \rho), \quad \Delta \rho = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \beta_1 + \beta_2$$

$$\Delta f = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - (u(x, y) + iv(x, y)) = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y + \beta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{u_x \Delta x + u_y \Delta y + i v_x \Delta x + i v_y \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{u_x(\Delta x + i \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{v_x(i \Delta x - \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} = u_x + \\ &+ v_x i + \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = u_x + iv_x + \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} = u_x + iv_x \iff f' = u_x + iv_y, \text{ существует и непрерывна}$$

в (x, y)

Nota. Используя Условие Коши-Римана, получим равенство $u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

Nota. Коши-Риман в ПСК:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

Тогда $f'(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{\rho}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)$

$$u_\rho = u_x \frac{\partial x}{\partial \rho} + u_y \frac{\partial y}{\partial \rho} = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi$$

$$v_\varphi = v_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + v_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\rho v_x \sin \varphi + \rho v_y \cos \varphi = \rho u_y \sin \varphi + \rho u_x \cos \varphi = \rho u_\rho$$

$$\text{Lab. } \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho}$$

Свойства аналитических функций

Пусть f, g - аналитические функции, тогда:

- 1° Линейность: $af + bg$ - аналитическая
- 2° Композиция: $f(g(z))$ - аналитическая
- 3° Произведение: $f \cdot g$ - аналитическая

Nota. Доказательства свойств элементарные, все сводится к сведению к u и v

$$\text{Ex. } w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$u_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_y = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = u_x$$

$$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u_y$$

Таким образом, $\frac{1}{z}$ - аналитическая функция

$$\text{Ex. } w = \bar{z} = x - iy$$

$u_x = 1, v_y = -1 \neq u_x$ - не аналитическая функция

- 4° $f(z)$ аналитична в D ($f: D \rightarrow D'$), $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$. Тогда $\exists g(w) = f^{-1}(z)$ ($g: D' \rightarrow D$) и $\forall z_0 \in D \quad f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$, где $w_0 = w(z)$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Заметим, что $f'(z) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J \neq 0$

Действительно, если якобиан равен 0, то $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Аналогично $\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Значит, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ – противоречие

Если $J \neq 0$, то преобразование $f(z)$ приводит (x, y) в (u, v) взаимно однозначно. Тогда

$\exists!$ решение $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$, то есть взаимно однозначно определены $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$

Обозначим $g(w) = x(u, v) + iy(u, v)$

Найдем $f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$. Рассмотрим отношение $\frac{\Delta z}{\Delta w} \xrightarrow{\Delta w \rightarrow 0} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} =$

$$\frac{1}{\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'_z(z_0)} \implies \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = g'_w(w_0) = \frac{1}{f'_z(z_0)} \text{ или } f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$$

5° $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D . Тогда $u(x, y), v(x, y)$ – гармонические функции в D

Функция считается гармонической, если $\Delta u = 0$ (здесь $\Delta = \nabla^2$ – лапласиан) \iff
 $u_{xx} + u_{yy} = 0$
Lab.

6° Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D и известна $u(x, y)$ или $v(x, y)$, то $f(z)$ определяется однозначно с точностью до const

Пусть известна $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. Нужно найти $v(x, y)$. По условию Коши-Римана $\int u(x, y), \int v(x, y)$ не зависят от пути (Lab. доказать, что $\int_{AB} dv$ не зависит от пути)

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x dx + v_y dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y) dx + u_x dy$$

Интеграл будет найден с точностью до const = $C(x_0, y_0)$

2.5. Конформные отображения

Найдем геометрический смысл производной. Рассмотрим отображение $w = f(z)$ ($w : D \longrightarrow G$) – дифференцируема в точке $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$

Аргумент: В области D рассмотрим гладкую кривую $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$. Образ $\gamma(t)$ – кривая $\sigma(t)$ в G

$\gamma(t)$ в окрестности некоторой точки z_0 гладкая, \exists касательная с углом $\theta = \arg \gamma'(t)$

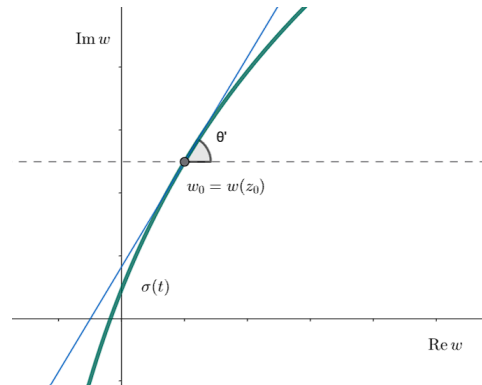
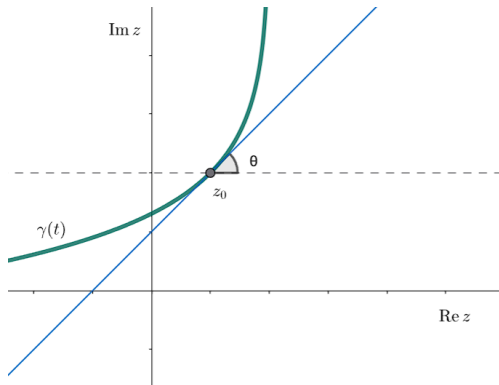
$\sigma(t)$ в окрестности $w_0 = w(z_0)$ гладкая, \exists касательная с углом $\theta' = \arg \sigma'(t)$

$$A \quad \sigma'(t_0) = w'(t_0) = f'(z_0) \cdot \underbrace{\gamma'(t_0)}_{z'(t_0)}$$

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0)$$

$$\theta' = \arg f'(z_0) + \theta$$

$\theta' - \theta = \arg f'(z_0)$ – поворот кривой $\gamma(t)$ вокруг z_0 на угол $\arg f'(z_0)$ при отображении $w = f(z)$



Модуль: $w = f(z)$ – дифференцируема $\iff \Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$

$$\text{Рассмотрим } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)| \implies |\Delta w| = |f'(z_0)| \cdot |\Delta z| + o(|\Delta z|)$$

Рассмотрим малый контур $|\Delta z| = |z - z_0| = \rho$. Тогда $|\Delta w| = |w(z) - w(z_0)| = |f'(z)|\rho + o(\rho)$

Таким образом $w(z)$ растягивает круг $|z - z_0| = \rho$ в $|f'(z_0)|$ раз с точностью до малых высших порядков

Итак, $w = f(z)$ в точке z_0 поворачивает точку у окрестности на угол $\alpha = \arg f'(z_0)$ и растягивает отрезки $[z_0, z]$ в $k = |f'(z_0)|$ раз

Def. Конформное отображение – отображение $w(z)$, сохраняющее углы (между образами и прообразами) и постоянство растяжений

$$\text{Th. Условия конформности: } \begin{cases} \text{дифференцируемость} \\ \text{однолиственность} \\ f'(z) \neq 0 \text{ в } D \end{cases} \iff \text{конформно}$$

Ex. $w = az + b$

Мет. Геометрический смысл линейного отображения: b – перенос $z = 0$ в точку $z = b$; $a = |a|e^{i\varphi}$, тогда $|a|$ – коэффициент растяжения, φ – угол поворота

Заметим, $w' = (az + b)' = a$, тогда $k = |w'(z_0)| = |a|$, $\varphi = \arg w'(z_0) = \arg a$

Lab. Проверить, что $w = z^2$ не конформное отображение, найдя $w'(z_0)$

3. Интеграл по комплексной переменной

3.1. Определения

В \mathbb{C} задана кусочно-гладкая кривая K (с концами в точках M и N) параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) & t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ y = \psi(t) & \varphi, \psi - \mathbb{R}\text{-функции} \end{cases}$$

Тогда $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ - задание K в \mathbb{C} . Введем отображение $w = f(z)$, действующее на K

Определим интегральные суммы:

1. Дробление отрезка MN на частичные дуги: $M = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = N$

Тогда $\alpha = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta$

2. Выбор средних точек в отрезках кривой $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$

3. Сопоставим интегральную сумму $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i$

4. Интегралом от $w = f(z)$ по кривой K называется $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau = \max \Delta z_i \rightarrow 0}} \sigma_n = \int_K f(z) dz$, если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения, выбора средних точек и т. д.

При этом интеграл можно представить как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) (\Delta x_i + i \Delta y_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u(\xi_i, \eta_i) + i v(\xi_i, \eta_i)) (\Delta x_i + i \Delta y_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u_i \Delta x_i - v_i \Delta y_i) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u_i \Delta y_i + v_i \Delta x_i) = \int_K u dx - v dy + i \int_K u dy + v dx$

Nota. Мы свели \mathbb{C} -интеграл к двум криволинейным \mathbb{R} -интегралам, все свойства интегралов сохраняются

$$\text{Ex. } \int_{\gamma=[0;1+i]} \bar{z} dz = \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) = \int_{\gamma} x dx + y dy + i \int_{\gamma} x dy - y dx = 2 \int_0^1 x dx = 1$$

Свойства комплексного интеграла:

1° Линейность

2° Аддитивность

3° Смена знака: $\int_{K^+} = - \int_{K^-}$

4° Оценка, модуль: $\left| \int_K \right| \leq \int_K |f(z)| dz$

5° $\int_K f(z) dz \stackrel{z=g(w)}{=} \int_C f(g(w)) g'(w) dw = [\text{В частности переход к параметру } t] = \int_{C(t)} f(t) g'(t) dt$

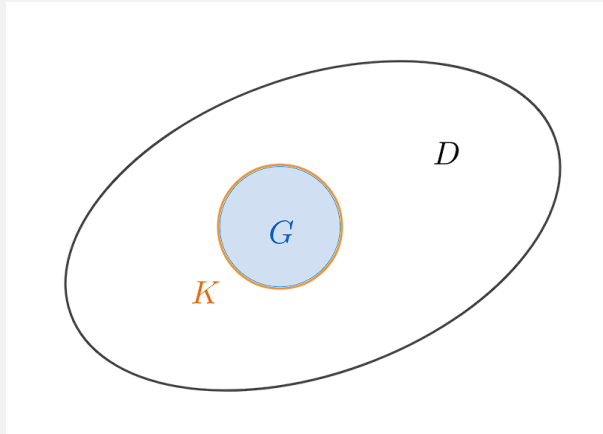
$$\text{Ex. } I = \int_{K: |z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z-z_0} \stackrel{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=} \int_K \frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} = \int_K \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$

Интеграл I не зависит от радиуса и центра окружности (то есть контура интегрирования), то есть интеграл функции $\frac{1}{z-z_0}$ будет равен $2\pi i$ для любой окружности в качестве контура

3.2. Теорема Коши

Th. 1. $f(z)$ аналитическая и однозначная в односвязной области D

Если $f(z)$ непрерывна на Γ_D , то $\oint_{\Gamma_D} f(z)dz = 0$



Запишем интеграл по контуру $K \subset D$ (K - кусочно гладкая):

$$\int_K f(z)dz = \int_K udx - vdy + i \int_K udy + vdx = I_1 + I_2i$$

$$I_1 = \int_K \underbrace{u(x,y)}_{P(x,y)} dx - \underbrace{v(x,y)}_{Q(x,y)} dy = \left[\begin{array}{l} f(z) - \text{аналитическая} \Rightarrow \\ u_x, u_y, v_x, v_y \text{ существуют} \\ \text{и непрерывны} \end{array} \right] = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \text{Формула Грина}$$

$$\iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = 0$$

$$\text{Аналогично } I_2 = \int_K udy + vdx = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy = 0$$

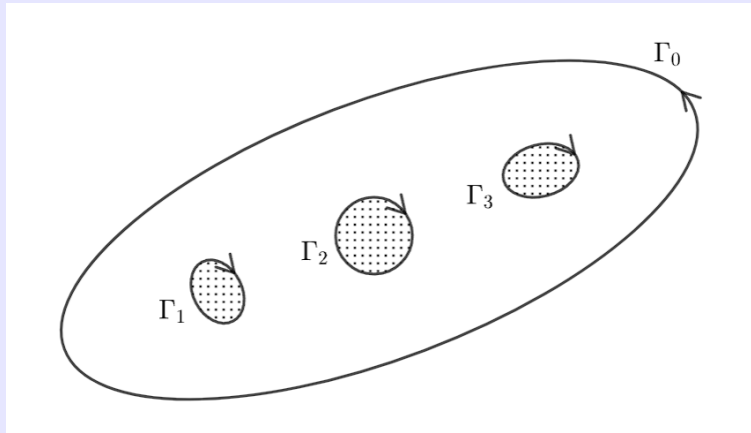
Таким образом, $\oint_{K \subset D} f(z)dz = 0$ - формула Коши

Так как $f(z)$ непрерывна на Γ_D , то можно взять $K = \Gamma_D$

Nota. Получим, что интеграл по любому замкнутому Γ_D контуру в области аналитичности равен нулю

То есть $\int_{AB} f(z)dz$ в условиях **Th. 1.** не зависит от пути, и его можно решать как $\int_{AB} = \int_A^B$

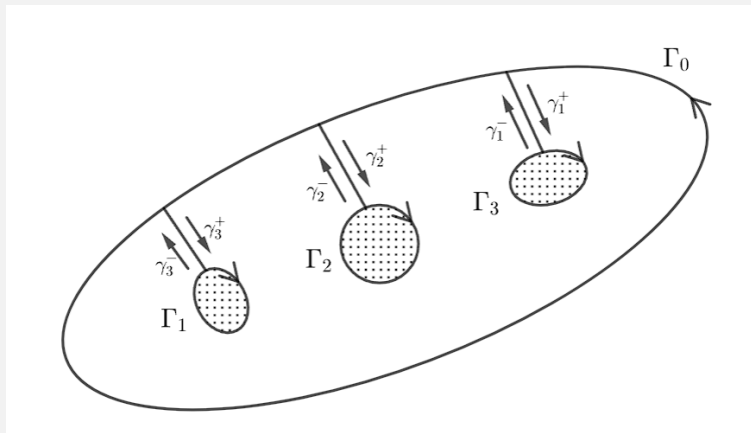
Nota. Обобщим **Th. 1.** на многосвязную область. Выколотые области тоже имеют границы, которые включены в границу всей области



Th. 2. Дана многосвязная область D , $f(z)$ - аналитична в D и непрерывна на Γ_D
Граница $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$, где положительным обходом области считается тот, при котором область обхода слева

Тогда $\int_{\Gamma_D^+} f(z)dz = 0$ или $\int_{\Gamma_0^+} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i^+} f(z)dz$

Сделаем разрезы как на картинке. Разрезы превратили область D в односвязную с границей $\Gamma' = \Gamma_0 \cup (\gamma_1^+ \cup \gamma_1^- \cup \Gamma_1) \cup \dots = \Gamma_0 \cup \bigcup_{i=1}^n (\gamma_i^+ \cup \gamma_i^- \cup \Gamma_i)$



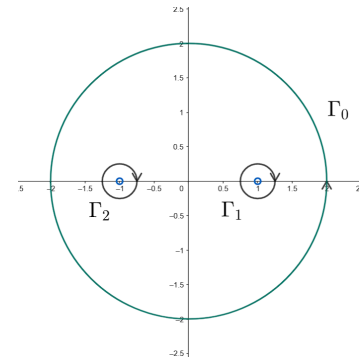
По **Th. 1.** $\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0 \iff \int_{\Gamma_D} f(z)dz + \int_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \dots = 0$

Но $\int_{\gamma_1^+} = - \int_{\gamma_1^-}$, поэтому $\int_{\Gamma_D^+} = \sum \int_{\Gamma_i^-}$ или $\int_{\Gamma_0^+} = \sum \int_{\Gamma_i^+}$

Ex. $\int_{|z|=2} f(z)dz$

По **Th. 2.** $\int_{\Gamma_0} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$

Тогда $\int_{|z|=2} f(z)dz = \int_{|z-1|=\rho_1} f(z)dz + \int_{|z+1|=\rho_2} f(z)dz$, где ρ_1, ρ_2 - радиусы бесконечно малой длины



3.3. Неопределенный интеграл

Мет. По теореме Барроу $\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом

Тогда $\Phi(x)$ - дифференцируема, и $\Phi'(x) = f(x)$, то есть $\Phi(x)$ - первообразная $f(x)$

Th. $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и $\forall \Gamma \subset D \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

Тогда при фиксированном $z_0 \in D$ $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$ аналитична в D и $\Phi'(z) = f(z)$

Если $\forall \Gamma \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$, то $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$ - интеграл, не зависящий от пути, а только от z_0 и z

$$\text{Рассмотрим } \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta \right) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta =$$

$$\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z) + f(z))d\zeta = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z)d\zeta + \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta =$$

$$\Delta z f(z) + \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta$$

$$\left| \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta \right| \leq \int_z^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)|d\zeta \leq \max_{[z, z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| \Delta z$$

Так как $f(z)$ непрерывна в D и $z, \zeta \in D$, то $\lim_{\zeta \rightarrow z} f(\zeta) = f(z) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta \mid |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta \mid \max |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

То есть $\left| \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta \right| \leq \varepsilon \Delta z$

Или $\frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} \leq f(z) + \varepsilon$, то есть $\left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon$, или $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z)$

Def. $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ называют первообразной для $f(z)$

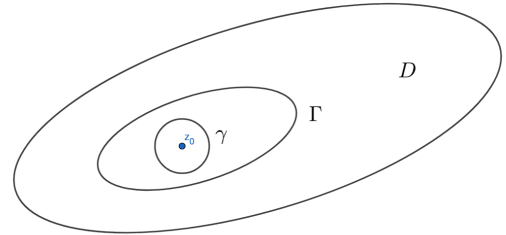
Следствие - формула Ньютона-Лейбница: $\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

3.4. Интеграл Коши

Nota. Установим связь между значениями $f(z)$ во внутренних точках области и на ее границе

$f(z)$ аналитична в односвязной области D , $z_0 \in D$.

Окружаем z_0 контуром $\Gamma \in D$ и меньшим контуром $\gamma: |z - z_0| = \rho$



В кольце между γ и Γ рассмотрим функцию $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ (в кольце $\varphi(z)$ аналитична)

По **Th. 2.** для $\varphi(z)$ в многосвязной области $\int_{\Gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta$ - не зависит от пути

То есть выбор окружности в качестве γ не важен:

$$\int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta \stackrel{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta) \rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} f(\zeta) d\varphi = i \underbrace{\int_0^{2\pi} (f(\zeta) - f(z_0)) d\varphi}_{\text{стягиваем } \gamma \text{ в точку } z_0, \int \rightarrow 0} + i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\varphi =$$

$$if(z_0) \cdot 2\pi$$

$$\text{Тогда } \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = 2\pi i f(z_0)$$

Nota. Доказали теорему: в области аналитичности $\forall z_0 \in D \quad \int_{\Gamma_D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$

$$\text{Ex. } \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)(z+1)} dz = \int_{|z-1|=\rho_1} \frac{\frac{f(z)}{z+1}}{z-1} dz + \int_{|z+1|=\rho_2} \frac{\frac{f(z)}{z-1}}{z+1} dz = 2\pi i \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{-2} \right)$$

4. Ряды

4.1. Числовой ряд в комплексной плоскости

Def. 1. $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, где $z_n \in \mathbb{C}$ - числовой ряд

Def. 2. Сумма ряда - $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k$

Если сумма существует и конечна, то ряд называют сходящимся.

Def. $f(z)$ называется регулярной в точке z_0 , если $f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Для комплексных числовых рядов остаются справедливыми:

1. Необходимое условие сходимости
2. Признак Даламбера
3. Радиальный признак Коши
4. Критерий Коши
5. Абсолютная сходимость

4.2. Функциональный ряд в комплексной плоскости

Def. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, где $u_n(z) : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ - функциональный ряд

Th. Признак Вейерштрасса.

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \alpha_n \in \mathbb{R}_0^+, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}, |u_n(z)| \leq \alpha_n \forall z \in D \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Lab. Сверить формулировку и доказательства для \mathbb{C} и \mathbb{R} -случая

Nota. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывна

Th. $u_n(z)$ непрерывна в D и $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Тогда $\int_K f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_K u_n(\zeta) d\zeta$, где $K \subset D$ - кусочно гладкая кривая

Докажем, что $\left| \int_K f(\zeta) d\zeta - \sum_{k=1}^n \int_K u_k(\zeta) d\zeta \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\left| \int_K \left(f(\zeta) - \sum_{k=1}^n u_k(\zeta) \right) d\zeta \right| = \left| \int_K \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\zeta) - \sum_{k=1}^n u_k(\zeta) \right) d\zeta \right| = \left| \int_K \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_K r_n(\zeta) d\zeta \right| \leq$$

$$\int_K |r_n(\zeta)| |d\zeta| \underset{\text{по кр. Коши}}{\leq} \varepsilon$$

4.3. Степенной ряд

Def. Степенной ряд - $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ $\left(a = 0 : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right), c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Область сходимости - круг с центром a , $|z-a| \leq R$ - радиус сходимости
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |z-a| < 1 \implies |z-a| < \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$

Nota. Также справедлива теорема Абеля

Th. Абеля.

Если степенной ряд сходится в точке z_1 , то он сходится абсолютно и равномерно в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| > |z-z_2|$

Если степенной ряд расходится в точке z_1 , то он расходится в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| < |z-z_2|$

Следствие: Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, то $f(z)$ - непрерывна в круге сходимости ряда

Th. Почленное дифференцирование суммы ряда.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ - сходящийся в круге радиуса $R \neq 0$. Тогда $f(z)$ дифференцируема и
 $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$

Рассмотрим ряд (и его сумму) $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ - он сходится в круге радиуса ρ таком, что $0 \leq |z| \leq \rho < R$ (см. сходимость по Даламберу) (Обозначим круг $K_1 : |z| = \rho$)

Докажем, что $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} = S(z) = f'(z)$

В круге K_1 выберем кривую γ , соединяющую $z_0 = 0$ и z

Рассмотрим $\int_{\gamma} \zeta^k d\zeta$, функция ζ^k аналитическая, тогда $\int_{\gamma} \zeta^k d\zeta$ не зависит от пути

$$\int_{\gamma} \zeta^k d\zeta = \int_0^z \zeta^k d\zeta = \left. \frac{\zeta^{k+1}}{k+1} \right|_0^z = \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

$$\text{Тогда } \int_0^z n c_n \zeta^{n-1} d\zeta = \left. \frac{n c_n \zeta^n}{n} \right|_0^z = c_n z^n$$

$$\text{Возьмем интеграл от суммы } \int_0^z S(\zeta) d\zeta = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} n c_n \zeta^{n-1} \right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z n c_n \zeta^{n-1} d\zeta =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$$

Таким образом, $f(z)$ является первообразной для $S(z)$, то есть $S(z) = f'(z)$

При этом $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ - этот ряд можно дифференцировать дальше, и область, в которой функция дифференцируется, - круг K_1 , где ρ вплотную подходит к R . Таким образом, доказали, что если $f(z)$ регулярна $\forall z$ в круге $|z| < R$, то $f(z)$ сколько угодно раз дифференцируема в этом круге и $f'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right)'$

Следствие: $f'(z) = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots)'$ или $f'(z) = (c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots)'$ $\implies c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = \frac{f''(z)}{2!}$ и так далее

Получили ряд Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$

Th. $f(z)$ аналитическая в области $D \implies f(z)$ регулярна в области D

По формуле Коши $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in K$, где $K = \{z \mid |z-a| < \rho\}$, $\gamma_\rho = \{\zeta \mid |\zeta-a| = \rho\}$ и $K \subset D$

Разложим в ряд $\frac{1}{\zeta - z}$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - (z-a) - a} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n, \text{ где } \left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| < 1$$

То есть $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся

Тогда $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n - \text{единственное разложение по Тейлору, где } b_n = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

$$\text{Итак } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Th. Морера. $f(z)$ непрерывна в D и $\forall \gamma \subset D \int_{\gamma} f(z) dz = 0 \implies f(z)$ аналитична в D

При данных условиях $\exists \Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \mid \Phi'(z) = f(z)$ и $\Phi(z)$ аналитична

Так как $\Phi(z)$ дифференцируема, то она дифференцируема сколько угодно раз. Таким образом, существуют $f'(z), f''(z)$ и так далее, а из этого означает, что $f(z)$ – аналитична

Th. Лиувилля. $f(z)$ аналитична в \mathbb{C} и $\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid |f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$

Тогда $f(z) \equiv \text{const}$

Докажем, что $f'(z) = 0$

$$|f'(z)| = \left| \text{контур } \gamma - \text{круг } z + \rho e^{i\varphi} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\varphi}) \rho i e^{i\varphi}}{\rho^2 e^{2i\varphi}} d\varphi \right| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z + \rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}} \right| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\rho} d\varphi = \frac{M}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0 \implies f'(z) = 0$$

Nota. $w = \sin z \neq \text{const} \implies \sin z$ – неограниченная функция

4.4. Ряд Лорана

Def. Ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$, где $C_n, z_0 \in \mathbb{C}$, называется рядом Лорана в точке z_0

Nota. Исследуем ряд. Обозначим $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$

$$f_2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z - z_0)^n \xrightarrow{m=-n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Тогда ряд можно записать так: $C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n(z - z_0)^n + \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} \right)$

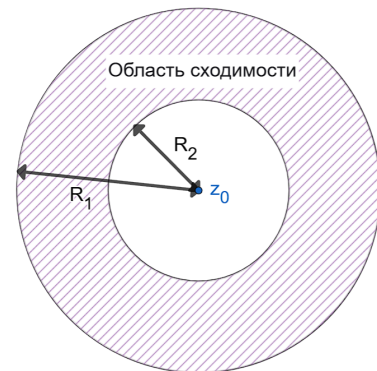
Рассмотрим $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ – ряд согласно теореме Абеля

сходится в круге с центром z_0 и радиусом $R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$

Рассмотрим $f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} \xrightarrow{t = \frac{1}{z - z_0}} \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} t^n$ – ряд сходится в

круге $|t| < r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{-n}}{C_{-n-1}} \right|$ или $|z - z_0| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{-n-1}}{C_{-n}} \right| = R_2$

Таким образом, ряд Лорана сходится в *кольце* с внутренним радиусом R_2 и внешним радиусом R_1 и центром z_0 к значению некой аналитической функции $f(z)$



$f(z)$, аналитичная в кольце $K = (z_0, R_2, R_1)$, однозначно представима рядом Лорана в кольце K

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{\Gamma = \Gamma_2 \cup \Gamma_1}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Разложим $\frac{1}{\zeta - z}$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \begin{cases} \frac{1}{(\zeta - z_0)(1 - (\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\ \frac{1}{-(z - z_0)(1 - (\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}))} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \end{cases}$$

1. Первый ряд сходится, если $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| < |\zeta - z_0|$

— это Γ_1

$$\text{Также } \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

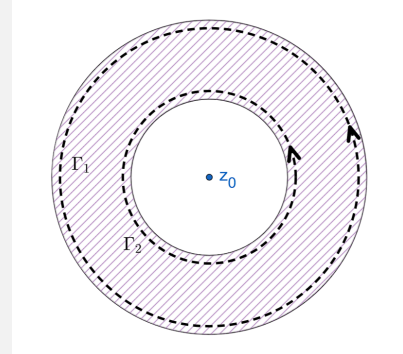
По теореме Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

$$\text{Из этого } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

2. Второй ряд сходится, если $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| > |\zeta - z_0|$ — это Γ_2

Lab.



Nota. Таким образом, коэффициенты ряда Лорана $C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$

Def. Изолированной особой точкой однозначного характера называется точка $a \in \mathbb{C} \mid f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - a| < \rho$, но не определена в $z = a$

Def. Точка $a = \infty$ называется изолированной особой, если $f(z)$ аналитична в кольце $\rho < |z| < \infty$

Def. Устранимой особой точкой a называется точка, для которой $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$, в a функция не определена

Полюсом a называется точка, для которой $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

Существенно особой точкой a называется точка, для которой $\nexists \lim_{z \rightarrow a} f(z)$

Ex. 1. Для $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ точка $z = 0$ является устранимой особой — $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

Ex. 2. Для $f(z) = \frac{z}{(z+i)^2}$ $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z}{(z+i)^2} = \left[\frac{1}{0^2} = \infty^2 \right]$, $a = -i$ — полюс 2-ого порядка

Ex. 3. Для $f(z) = \sin z$ $\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} \sin z$

Def. Для ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности особой точки $z = a \in \mathbb{C}$ $f(z) =$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n}_{\text{это правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}}_{\text{это главная часть}}$$

это правильная часть это главная часть

Def. Для ряда Лорана в $a = \infty$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n}_{\text{это главная часть}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}}_{\text{это правильная часть}}$

Def. Вычетом $\text{res}(f(z), z_0)$ функции $f(z)$ в точке z_0 называется C_{-1} коэффициент ряда Лорана, если $z_0 \in \mathbb{C}$, и $-C_{-1}$, если $z_0 = \infty$

Из определения ясно, что для конечной точки $\text{res}(f(z), z_0) = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^0} d\zeta =$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$$

Для бесконечной $\text{res}(f(z), z_0) = -C_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(\zeta) d\zeta$

Здесь вместо γ берут для простоты окружность

Nota. Для вычисления вычетов используют более простые формулы, которые зависят от типа особых точек

Th. 1. z_0 – устранимая особая точка ($z_0 \in \mathbb{C}$) функции $f(z) \iff$ главная часть ряда Лорана равна 0

То есть $f(z)$ в z_0 представима как $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ тогда и только тогда, когда $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

$\implies z_0$ – устранимая $\iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$

Тогда в некоторой окрестности $\mathring{U}_{\delta}(z_0)$ функция ограничена – $|f(z)| \leq M, M \in \mathbb{R}$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\delta}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} = [\gamma_{\delta} : \zeta = z_0 + \delta e^{i\varphi}] = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta) \delta i e^{i\varphi} d\varphi}{(\delta e^{i\varphi})^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \delta^n e^{ni\varphi} d\varphi$$

$$|C_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \delta^n d\varphi = M \delta^n \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

$$\iff C_{-n} = 0 \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1 (z - z_0) + \dots$$

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0 \in \mathbb{C}$ – устранимая

Следствие: вычет в устранимой точке равен 0

Th. 2. z_0 – полюс m -ого порядка \iff главная часть ряда Лорана содержит не более m ненулевых членов подряд (то есть для $i > m$ $C_{-i} = 0$)

Полюс m -ого порядка функции $f(z)$ – точка z_0 , для которой $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \implies \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ и z_0 – ноль функции $g(z)$ порядка m

То есть $g(z)$ представима как $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, где $h(z)$ – аналитическая в z_0 и $h(z_0) \neq 0$

\implies Рассмотрим $\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, при этом $\frac{1}{h(z_0)} = b_0 \neq 0$ ($h(z)$ – аналитическая

$\implies \frac{1}{h(z)}$ – аналитическая $\implies \frac{1}{h(z)}$ – регулярная)

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^m} (b_0 + b_1(z - z_0) + \dots) =$$

$$\underbrace{\frac{b_0}{(z - z_0)^m}}_{\frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} \neq 0} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^{m-n}} + \dots = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

$$\frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} \neq 0$$

При этом $C_{-n} = 0$ при $n \geq m + 1$

$$\begin{aligned} \iff f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \frac{C_{-m}}{z - z_0} + \dots + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots = \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \underbrace{(C_{-n} + \dots + C_{-1}(z - z_0)^{m-1} + C_0(z - z_0)^m + \dots)}_{\text{аналитическая } \frac{1}{h(z)} \text{ в } z_0} = \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)} \implies z_0 \text{ – ноль функ-} \end{aligned}$$

ции $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$

Тогда $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty \implies z_0$ – полюс (порядок бесконечно большой равен m)

Th. 3. z_0 – существенно особая точка \iff главная часть содержит бесконечное число членов

Очевидно, так как в другом случае, точка была бы полюсом или устранимой

Nota. Для особой точки $z_0 = \infty$ **Th. 1.**, **Th. 2.**, **Th. 3.** справедливы и доказываются аналогично:

1. z_0 – устранимая \iff главная часть равна 0
2. z_0 – m -полюс \iff главная часть содержит не более m членов и $C_m \neq 0$
3. z_0 – существенно особая \iff главная часть содержит бесконечное число членов

Ex. 1. $f(z) = \frac{(e^z - 1)^2}{1 - \cos z}, \quad z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{(e^z - 1)^2}{1 - \cos z} \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z^2}{\frac{z^2}{2}} = 2 - \text{устраняемая}$$

Ex. 2. $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}, z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \left(\frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} - 1 \right) \sim \frac{1}{z} \cdot k \frac{z^2}{1} \underset{z \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 - \text{устраняемая}$$

Ex. 3. $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}, z_0 = \infty$

$$z = \frac{1}{w} \quad f(z) = \tilde{f}(w) = w \frac{1}{\frac{1}{w} - 1} = w^2 \frac{1}{1 - w} = w^2 \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}} - \text{устраняемая (главной части нет)}$$

Вычисления вычетов

Nota. z_0 – устранимая $\implies \operatorname{res}(f(z), z_0) = 0$

z_0 – существенно особая $\implies \operatorname{res}(f(z), z_0) = \pm C_{-1}$

Th. z_0 – простой полюс ($m = 1$). Тогда $\operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$, где $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots$$

$$(z - z_0)f(z) = C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^{n+1} \implies \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = C_{-1}$$

Th. z_0 – m -полюс. Тогда $\operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m)$

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots \quad \Big| \cdot (z - z_0)^m$$

$$f(z)(z - z_0)^m = C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \dots \quad \Big| \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m) = C_{-1}(m-1)! + C_0(z - z_0)(m-1)! + C_1(z - z_0)^2 \frac{(m-1)!}{2!} + \dots$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m) = C_{-1} + C_0(z - z_0) + C_1(z - z_0)^2 \frac{1}{2!} + \dots$$

Далее переход к пределу, аналогичному доказательству выше

Th. Теорема о вычетах.

1. $f(z)$ аналитична в D кроме особых точек z_1, \dots, z_n . Тогда $\int_{\Gamma_0} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f(z), z_k)$
2. $f(z)$ аналитична в \mathbb{C} кроме особых точек $z_1, \dots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\sum_{k=1}^n \text{res}(f(z), z_k) = 0$

1. По теореме Коши (о многосвязной области)

$$\int_{\Gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n 2\pi i C_{-1}^{(k)} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f(z), z_k), \text{ где } C_{-1}^{(k)} - \text{коэффициент}$$

для ряда Лорана в точке z_k

2. Очевидно по теореме Коши

Х. Программа экзамена в 2024/2025

Часть 1.

1. Функции комплексного переменного (ФКП). Геометрия ФКП.

Def. Функция $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{\iff}$ отображение такое, что $\forall z \in D \exists w \in G \mid f(z) = w$

Def. Если $\forall z \in D \exists! w \in G$, то f называется однозначной функцией

Def. Если $\forall z_1, z_2 \in D (z_1 \neq z_2) \implies f(z_1) \neq f(z_2)$, то f называется однолистной функцией

Ex. $w = \sqrt{z}$ - неоднозначная функция, $w = z^2$ - однолистная функция

Nota. Если $f(z)$ однозначна и однолистка, то $f(z)$ - взаимно однозначное соответствие (биекция). Тогда $\exists g(x) \mid g(f(x)) = x$

Комплексную функцию $f(z)$ можно представить как $u(x, y) + iv(x, y)$, где $x + iy = z$

2. Предел, непрерывность функции комплексного переменного.

Def. Предел. $L \in \mathbb{C}, f : D \longrightarrow G, \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left| z \in D, z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0) \implies f(z) \in U_\varepsilon(L) \right.$

В определении существование и значение L не должно зависеть от пути, по которому z приближается к точке сгущения z_0 . Может быть так, что для любого направления стремления предел есть, но в общем смысле не существует

Def. Непрерывность функций в точке z_0 . $f : D \longrightarrow G, z_0 \in D, f(z)$ называется непрерывной в z_0 , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

На языке приращений: $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$

3. Элементарные функции. Степень и корень. Показательная функция и логарифм. Тригонометрические и гиперболические функции.

Элементарные функции:

Ex. 1. Линейная $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$

Эта функция однозначная, однолистная $\implies \exists f^{-1}(z) = g(z) = \frac{z-b}{a}$. Линейная функция - композиция из поворота, растяжения и сдвига

Ex. 2. Степенная $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ - однозначная, может быть однолистной

Для $n \in \mathbb{Q}$ функция становится неоднозначной

Ex. $w = z^2 \quad z = \rho e^{i\varphi}, w = \rho^2 e^{2i\varphi}$. Область однолиственности z^2 - множество точек, для которых $\arg z \in [0; \pi)$. Точку $w = 0$ называют точкой разветвления

Ex. $w = z^{-1} = \frac{1}{z}$, при этом $w(0) = \infty, w(\infty) = 0$. Для $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция обратима

Преобразование $|w| = \frac{1}{|z|}$ называется инверсией, а $\arg w = -\arg z$ дает симметрию относительно $\text{Re } z$

Ex. 3. Рациональная $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, $n, m \in \mathbb{N}$

Ex. 4. Показательная $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ - многолистная функция. Свойства:

(a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

(b) $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$

(c) $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ - показательная функция периодична с периодом $2\pi i$

Ex. 5. Логарифмическая $w = \text{Ln } z$ - многозначная функция

Если $e^w = e^{u+vi} = e^u (\cos v + i \sin v) = z = |z| e^{i \arg z}$, то $u = \ln |z|$, $v = \arg z + 2\pi k$. Тогда

$$\boxed{\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k)}$$

$\ln z = \text{Ln } z$ при $k = 0$ - т. н. главное значение

Ex. 6. Тригонометрические и гиперболические

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

В \mathbb{C} область значений этих функций является \mathbb{C} - эти функции не ограничены

4. Дифференцирование и аналитичность функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Свойства аналитических функций.

Def. $f(z)$ называется **дифференцируемой** в точке z_0 , если $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$

Def. Дифференцируемая в точке z_0 функция $w = f(z)$, производная $f'(z_0)$ которой непрерывна в z_0 , называется аналитической (или аналитичной) функцией в z_0

Th. **Критерий аналитичности (или Условие Коши-Римана)**

$$f(x) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ аналитична в точке } z_0 = x + iy$$



$$\exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ непрерывны в } z \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{Причем, } f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

Свойства аналитических функций: пусть f, g - аналитические функции, тогда:

1° Линейность: $af + bg$ - аналитическая

2° Композиция: $f(g(z))$ - аналитическая

3° Произведение: $f \cdot g$ - аналитическая

4° $f(z)$ аналитична в D ($f: D \rightarrow D'$), $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$. Тогда $\exists g(w) = f^{-1}(z)$ ($g: D' \rightarrow D$)
и $\forall z_0 \in D \quad f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$, где $w_0 = w(z)$

5° $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D . Тогда $u(x, y), v(x, y)$ – гармонические функции в D

6° Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D и известна $u(x, y)$ или $v(x, y)$, то $f(z)$ определяется однозначно с точностью до const

5. Понятие конформного отображения. Геометрический смысл производной.

Def. Конформное отображение – отображение $w(z)$, сохраняющее углы (между образами и прообразами) и постоянство растяжений

Th. Условия конформности: $\begin{cases} \text{дифференцируемость} \\ \text{однолиственность} \\ f'(z) \neq 0 \text{ в } D \end{cases} \iff \text{конформно}$

Геометрический смысл: Функция $w = f(z)$ в точке z_0 поворачивает точку u окрестности на угол $\alpha = \arg f'(z_0)$ и растягивает отрезки $[z_0, z]$ в $k = |f'(z_0)|$ раз

6. Интеграл по комплексной переменной. Теорема Коши. Первообразная.

В \mathbb{C} задана кусочно-гладкая кривая K (с концами в точках M и N) параметрическими

уравнениями: $\begin{cases} x = \varphi(t) & t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ y = \psi(t) & \varphi, \psi - \mathbb{R}\text{-функции} \end{cases}$

Тогда $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ – задание K в \mathbb{C} . Введем отображение $w = f(z)$, действующее на K

Определим интегральные суммы:

(a) Дробление отрезка MN на частичные дуги: $M = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = N$

Тогда $\alpha = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta$

(b) Выбор средних точек в отрезках кривой $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$

(c) Сопоставим интегральную сумму $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i$

(d) **Интегралом** от $w = f(z)$ по кривой K называется $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau = \max \Delta z_i \rightarrow 0}} \sigma_n = \int_K f(z) dz$, если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения, выбора средних точек и т. д.

При этом интеграл можно представить как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_K f(z) dz = \int_K u dx - v dy + i \int_K u dy + v dx$

Th. Теорема Коши для односвязной области. $f(z)$ аналитическая и однозначная в односвязной области D

Если $f(z)$ непрерывна на Γ_D , то $\oint_{\Gamma_D} f(z) dz = 0$

Th. Теорема Коши для многосвязной области. Дана многосвязная область D , $f(z)$ - аналитична в D и непрерывна на Γ_D

Граница $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$, где положительным обходом области считается тот, при котором область обхода слева

Тогда $\int_{\Gamma_D^+} f(z) dz = 0$ или $\int_{\Gamma_0^+} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i^+} f(z) dz$

По теореме Барроу $\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ - интеграл с переменным верхним пределом

Тогда $\Phi(x)$ - дифференцируема, и $\Phi'(x) = f(x)$, то есть $\Phi(x)$ - первообразная $f(x)$

Th. $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и $\forall \Gamma \subset D \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$

Тогда при фиксированном $z_0 \in D$ $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ аналитична в D и $\Phi'(z) = f(z)$

$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ называют первообразной для $f(z)$

Следствие - формула Ньютона-Лейбница: $\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

Часть 2.

7. Числовые ряды. Регулярная функция. Функциональные ряды. Признаки сходимости.

Def. 1. $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, где $z_n \in \mathbb{C}$ - числовой ряд

Def. 2. Сумма ряда - $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k$. Если сумма существует и конечна, то ряд называют сходящимся.

Def. $f(z)$ называется регулярной в точке z_0 , если $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, где $c_n \in \mathbb{C}$

Def. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, где $u_n(z) : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ - функциональный ряд

Th. Признак Вейерштрасса.

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \alpha_n \in \mathbb{R}_0^+, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}, |u_n(z)| \leq \alpha_n \forall z \in D \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \text{ сходится равномерно в } D$$

8. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряд Тейлора.

Def. Степенной ряд - $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ $\left(a = 0 : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right)$, $c_n \in \mathbb{C}$. Область сходимости - круг с центром a , $|z-a| \leq R$ - радиус сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |z-a| < 1 \implies |z-a| < \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Th. Абеля.

Если степенной ряд сходится в точке z_1 , то он сходится абсолютно и равномерно в любой точке z_2 такой, что $|z - z_1| > |z - z_2|$

Если степенной ряд расходится в точке z_1 , то он расходится в любой точке z_2 такой, что $|z - z_1| < |z - z_2|$

Th. Почленное дифференцирование суммы ряда.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ - сходящийся в круге радиуса $R \neq 0$. Тогда $f(z)$ дифференцируема и

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

Ряд Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$

9. Бесконечная дифференцируемость регулярной функции. Формула n-ой производной.

Th. $f(z)$ аналитическая в области $D \implies f(z)$ регулярна в области D

Для функции $f(z)$ в точке a $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

10. Ряды Лорана в конечной и бесконечно удаленной точке. Главная и правильная части.

Def. Ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$, где $C_n, z_0 \in \mathbb{C}$, называется рядом Лорана в точке z_0 . Ряд Лорана сходится в кольце с внутренним радиусом R_2 и внешним радиусом R_1 и центром z_0 к значению аналитической функции $f(z)$

$f(z)$, аналитичная в кольце $K = (z_0, R_2, R_1)$, однозначно представима рядом Лорана в кольце K

Nota. Таким образом, коэффициенты ряда Лорана $C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta$

Def. Для ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности особой точки $z = a \in \mathbb{C}$ $f(z) =$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n}_{\text{это правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}}_{\text{это главная часть}}$$

это правильная часть это главная часть

Def. Для ряда Лорана в $a = \infty$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n}_{\text{это главная часть}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}}_{\text{это правильная часть}}$

11. Классификация изолированных особых точек однозначной аналитической функции.

Def. **Изолированной особой точкой** однозначного характера называется точка $a \in \mathbb{C} \mid f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - a| < \rho$, но не определена в $z = a$

Def. Точка $a = \infty$ называется изолированной особой, если $f(z)$ аналитична в кольце $\rho < |z| < \infty$

Def. Устранимой особой точкой a называется точка, для которой $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$, в a функция не определена

Полусом a называется точка, для которой $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

Существенно особой точкой a называется точка, для которой $\nexists \lim_{z \rightarrow a} f(z)$

12. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Определение и формулы вычисления вычета. Основные теоремы теории вычетов.

Def. **Вычетом** $\text{res}(f(z), z_0)$ функции $f(z)$ в точке z_0 называется C_{-1} коэффициент ряда Лорана, если $z_0 \in \mathbb{C}$, и $-C_{-1}$, если $z_0 = \infty$

Th. 1. z_0 – устранимая особая точка ($z_0 \in \mathbb{C}$) функции $f(z) \iff$ главная часть ряда Лорана равна 0

Th. 2. z_0 – полюс m -ого порядка \iff главная часть ряда Лорана содержит не более m ненулевых членов подряд (то есть для $i > m$ $C_{-i} = 0$)

Th. 3. z_0 – существенно особая точка \iff главная часть содержит бесконечное число членов

Nota. z_0 – устранимая $\implies \text{res}(f(z), z_0) = 0$

z_0 – существенно особая $\implies \text{res}(f(z), z_0) = \pm C_{-1}$

Th. z_0 – простой полюс ($m = 1$). Тогда $\text{res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$, где $z_0 \in \mathbb{C}$

Th. z_0 – m -полюс. Тогда $\text{res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m)$

Th. Теорема о вычетах.

(a) $f(z)$ аналитична в D кроме особых точек z_1, \dots, z_n . Тогда $\int_{\Gamma_0} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(f(z), z_k)$

(b) $f(z)$ аналитична в \mathbb{C} кроме особых точек $z_1, \dots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\sum_{k=1}^n \operatorname{res}(f(z), z_k) = 0$