

4°  $f(z)$  аналитична в  $D$  ( $f : D \rightarrow D'$ ),  $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$ . Тогда  $\exists g(w) = f'(z)$  ( $g : D' \rightarrow D$ ) и  $\forall z_0 \in D \quad f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$ , где  $w_0 = w(z)$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\text{Заметим, что } f'(z) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J \neq 0$$

$$\text{Действительно, если якобиан равен 0, то } \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

$$\text{Аналогично } \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{Значит, } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ — противоречие}$$

Если  $J \neq 0$ , то преобразование  $f(z)$  приводит  $(x, y)$  в  $(u, v)$  взаимно однозначно. Тогда

$$\exists! \text{ решение } \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}, \text{ то есть взаимно однозначно определены } \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

$$\text{Обозначим } g(w) = x(u, v) + iy(u, v)$$

$$\text{Найдем } f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}. \text{ Рассмотрим отношение } \frac{\Delta z}{\Delta w} \xrightarrow{\Delta w \rightarrow 0} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} =$$

$$\frac{1}{\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'_z(z_0)} \implies \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = g'_w(w_0) = \frac{1}{f'_z(z_0)} \text{ или } f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$$

5°  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  аналитична в  $D$ . Тогда  $u(x, y), v(x, y)$  — гармонические функции в  $D$

Функция считается гармонической, если  $\Delta u = 0$  (здесь  $\Delta = \nabla^2$  — лапласиан)  $\iff$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Lab.

6° Если  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  аналитична в  $D$  и известна  $u(x, y)$  или  $v(x, y)$ , то  $f(z)$  определяется однозначно с точностью до const

Пусть известна  $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ . Нужно найти  $v(x, y)$ . По условию Коши-Римана  $\int u(x, y), \int v(x, y)$  не зависят от пути (Lab. доказать, что  $\int_{AB} dv$  не зависит от пути)

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x dx + v_y dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y) dx + u_x dy$$

Интеграл будет найден с точностью до const =  $C(x_0, y_0)$

## 2.5. Конформные отображения

Найдем геометрический смысл производной. Рассмотрим отображение  $w = f(z)$  ( $w : D \rightarrow G$ ) – дифференцируема в точке  $z_0 \in D$  и  $f'(z_0) \neq 0$

Аргумент: В области  $D$  рассмотрим гладкую кривую  $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ . Образ  $\gamma(t)$  – кривая  $\sigma(t)$  в  $G$

$\gamma(t)$  в окрестности некоторой точки  $z_0$  гладкая,  $\exists$  касательная с углом  $\theta = \arg \gamma'(t)$

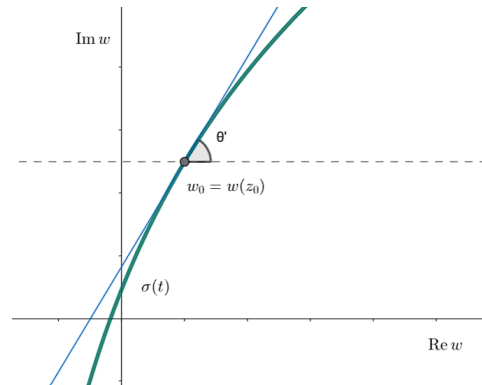
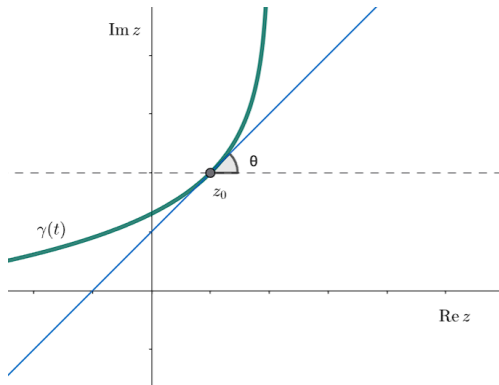
$\sigma(t)$  в окрестности  $w_0 = w(z_0)$  гладкая,  $\exists$  касательная с углом  $\theta' = \arg \sigma'(t)$

А  $\sigma'(t_0) = w'(t_0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0)$

$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0)$

$\theta' = \arg f'(z_0) + \theta$

$\theta' - \theta = \arg f'(z_0)$  – поворот кривой  $\gamma(t)$  вокруг  $z_0$  на угол  $\arg f'(z_0)$  при отображении  $w = f(z)$



Модуль:  $w = f(z)$  – дифференцируема  $\iff \Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$

Рассмотрим  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)| \implies |\Delta w| = |f'(z_0)| \cdot |\Delta z| + o(|\Delta z|)$

Рассмотрим малый контур  $|\Delta z| = |z - z_0| = \rho$ . Тогда  $|\Delta w| = |w(z) - w(z_0)| = |f'(z)|\rho + o(\rho)$

Таким образом  $w(z)$  растягивает круг  $|z - z_0| = \rho$  в  $|f'(z_0)|$  раз с точностью до малых высших порядков

Итак,  $w = f(z)$  в точке  $z_0$  поворачивает точку у окрестности на угол  $\alpha = \arg f'(z_0)$  и растягивает отрезки  $[z_0, z]$  в  $k = |f'(z_0)|$  раз

**Def.** Конформное отображение – отображение  $w(z)$ , сохраняющее углы (между образами и прообразами) и постоянство растяжений

$$\text{Th. Условия конформности: } \begin{cases} \text{дифференцируемость} \\ \text{однолиственность} \\ f'(z) \neq 0 \text{ в } D \end{cases} \iff \text{конформно}$$

Ex.  $w = az + b$

Мет. Геометрический смысл линейного отображения:  $b$  - перенос  $z = 0$  в точку  $z = b$ ;  $a = |a|e^{i\varphi}$ , тогда  $|a|$  - коэффициент растяжения,  $\varphi$  - угол поворота

Заметим,  $w' = (az + b)' = a$ , тогда  $k = |w'(z_0)| = |a|$ ,  $\varphi = \arg w'(z_0) = \arg a$

Lab. Проверить, что  $w = z^2$  не конформное отображение, найдя  $w'(z_0)$

### 3. Интеграл по комплексной переменной

#### 3.1. Определения

В  $\mathbb{C}$  задана кусочно-гладкая кривая  $K$  (с концами в точках  $M$  и  $N$ ) параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) & t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ y = \psi(t) & \varphi, \psi - \mathbb{R}\text{-функции} \end{cases}$$

Тогда  $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$  - задание  $K$  в  $\mathbb{C}$ . Введем отображение  $w = f(z)$ , действующее на  $K$

Определим интегральные суммы:

1. дробление отрезка  $MN$  на частичные дуги:  $M = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = N$

Тогда  $\alpha = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta$

2. Выбор средних точек в отрезках кривой  $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$

3. Сопоставим интегральную сумму  $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i$

4. Интегралом от  $w = f(z)$  по кривой  $K$  называется  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau = \max \Delta z_i \rightarrow 0}} \sigma_n = \int_K f(z) dz$ , если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения, выбора средних точек и т. д.

При этом интеграл можно представить как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) (\Delta x_i + i \Delta y_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u(\xi_i, \eta_i) + iv(\xi_i, \eta_i)) (\Delta x_i + i \Delta y_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u_i \Delta x_i - v_i \Delta y_i) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u_i \Delta y_i + v_i \Delta x_i) = \int_K u dx - v dy + i \int_K u dy + v dx$

Nota. Мы свели  $\mathbb{C}$ -интеграл к двум криволинейным  $\mathbb{R}$ -интегралам, все свойства интегралов сохраняются

$$\text{Ex. } \int_{\gamma=[0;1+i]} \bar{z}dz = \int_{\gamma} (x-iy)(dx+idy) = \int_{\gamma} xdx + ydy + i \int_{\gamma} xdy - ydx = 2 \int_0^1 xdx = 1$$