

5.3. Двойной и тройной интегралы

Nota. Дадим строгое определение

Def. $z = z(x, y)$ $z : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1. Дробление на $[x_{i-1}, x_i]$ длиной Δx
2. Выбор средней точки $M_i(\xi_i, \eta_i)$, по значению $z(M_i)$ строим элемент. параллелепипед объемом

$$v_i = z(M_i) \Delta x_i \Delta y_i \approx V_{\text{малого цилиндра}}$$

3. Интеграл суммы

$$v_i = \sum_{i=1}^n v_i = \sum z(M_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

4. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in \mathbb{R}$, не зависящий от типа дробления и т.д. при $n \rightarrow \infty$ и $\tau = \max(\Delta x_i, \Delta y_i) \rightarrow 0$, то $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} v_n \stackrel{\text{def}}{=} \iint_D z(x, y) dx dy$ - двойной интеграл от $z(x, y)$ на области D

Mem. Определение определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx \quad f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

1. Дробление на элементы P_i прямыми $x = \text{const}, y = \text{const}$, $S_{P_i} = \Delta x_i \Delta y_i$ (дали dx, dy)

2. Выбор $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, площадь элементарных прямоугольников $f(\xi_i) \Delta x_i \approx S_{\text{полоски}}$

3. Интеграл суммы $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

$$4. \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sigma_n = \int_a^b f(x) dx$$

Nota. Об области D : в простейшем случае рассматривают выпуклую, односвязную \mathbb{R}^2 -область

- а) Выпуклость:

$\exists M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1 M_2} \notin D$ - не выпуклая, где $\overline{M_1 M_2}$ - прямой отрезок

$\forall M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1 M_2} \in D$ - выпуклая

- б) Связность:

$D = D' \cup D''$ - несвязная, если $\exists M_1, M_2 \in D \mid \widehat{M_1 M_2} \notin D$, где $\widehat{M_1 M_2}$ - непрерывная кривая, соединяющая M_1 и M_2

D - связная, если $\forall M_1, M_2 \in D \mid \widehat{M_1 M_2} \in D$

Обычно область открытая (то есть без границы), дальше будем рассматривать в том числе области с границей

Добавим к определению $\iint_{\partial D} z(x, y) dx dy$ - граница D

Геометрический смысл: в определении при $z(x, y) \geq 0$ интегральная сумма $v_n = \sum_{i=1}^n v_i$ была суммой объемов элементарных параллелепипедов и приближала объем подповерхности

Тогда $\iint_D z(x, y) dx dy \stackrel{z \geq 0}{=} V_{\text{цилиндра с осн. } D}$, а при $z = 1$ $\iint_D dx dy = S_D$

Вычисление: по геометрическому смыслу найти $\iint_D z(x, y) dx dy$ - значит найти объем подповерхности

Можно найти $S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y) dy$ - площадь поперечного сечения

Найдем V как объем тела с известными площадями сечений

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c, y)dy \right) dx$$

Nota. Кратный

Если найдена первообразная для $z(x=c, y)$ (обозначим $F(x, y(x))$), то по формуле N-L:

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c, y)dy = F(x, y(x)) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = F(x, y_2(x)) - F(x, y_1(x))$$

Тогда $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{(F(x, y_2) - F(x, y_1))} dx$ – обычный определенный интеграл

Пределы интегрирования во внутреннем интеграле – функции, во внешнем – точки

Можно ли вычислить V , рассекая тело сечениями $y = \text{const}$? Верно ли, что $\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y)dy \right) dx =$

$$\int_a^b \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x, y)dx \right) dy?$$

Верно: V не зависит от порядка сечения

Таким образом, двойной интеграл $\iint_D z(x, y)dx dy = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} z(x, y)dy dx = \int_a^b \int_{x_1}^{x_2} z(x, y)dx dy$

Но при другом порядке интегрирования область D может оказаться неправильной

Def. При проходе области D в направлении $Oy \uparrow$ граница области (верхняя) меняет аналитическое задание. Такая область называется неправильной в направлении Oy

Выгодно выбирать правильное направление, чтобы не делить интеграл по аддитивности

Ex. $\iint_D xy dx dy, D : x^2 + y^2 \leq 1$

$$\iint_D xy dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{y_1=-\sqrt{1-x^2}}^{y_2=\sqrt{1-x^2}} xy dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2} y^2 \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2} ((1-x^2) - (1-x^2)) \right) dx = 0$$

Def. Тройной интеграл: пусть дана функция $u(x, y, z) : T \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

1. Дробление на элементы объема $dv = dx dy dz$
2. Вычисление среднего содержания $u(x, y, z)$ в dv : $u(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) dv$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \sum u(M_i) dv$
4. $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau = \max(dv) \rightarrow 0}} \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_T u(x, y, z) dv = \iiint_T u(x, y, z) dx dy dz$

Геометрический смысл: только при $u = 1$ интеграл $\iiint_T dx dy dz = V_T$ равен объему

Физический смысл: пусть $u(x, y, z)$ – плотность в каждой точке T , тогда $\iiint_T u(x, y, z) dx dy dz = m_T$ – масса

Тройной интеграл можно вычислить через кратный: $\iiint_T u(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{кратный}}{=} \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} u(x, y, z) dz dy dx$