Для линейной параметризации форма дифференциала сохраняется
$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z \overset{\text{инвариант}}{=} z_t^{(n)}dt^n$
Введем функцию: $z(x(t), y(t)) \overset{\text{обозн}}{=} \varphi(t)$ – она $(n+1)$ раз дифференцируема (композиция $(n+1)$ дифференцируемых и линейных функций)
Заметим, что $x = x_0 + \Delta xt \overset{t_0=0}{=} x_0$, $y = y_0 + \Delta yt \overset{t_0=0}{=} y_0$, тогда $M \overset{t\to t_0=0}{\to} M_0$
То есть $z(M_0) = z(x_0, y_0) = z(x(t_0), y(t_0)) = \varphi(t_0) = \varphi(0)$
Таким образом $\varphi(t)$ как функция одной переменной может быть разложена в окрестности $t_0 = 0$ по формуле Маклорена

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{d\varphi(0)}{1!}\Delta t + \cdots + \frac{d^n\varphi(0)}{n!}\Delta t^n + o((\Delta t)^n)$$

Вернемся к $z(x, y)$ $(\Delta t = t - t_0 = 1)$:

$$z(x, y) = z(M) = z(M_0) + \frac{dz(M_0)}{1!} + \frac{d^2z(M_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nz(M_0)}{n!} + r_n(x, y)$$

где остаток в форме Лагранжа $r_n(x, y) = r_n(t) = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(\theta\Delta t)}{(n+1)!}\Delta t = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(\theta\Delta t)}{(n+1)!}$
Остаток $r_n(x, y)$ должен быть бесконечно малым по отношению к $(\Delta\rho)^n$, то есть $r_n(x, y) = o((\Delta\rho)^n)$
$(r_n(t) \overset{n\to\infty}{\to} 0$, если $\varphi(t)$ нужное число раз дифференцируема $\Rightarrow$ ограничена, $r_n(t)$ – ограниченная бесконечно малая)

*Nota.* В дальнейшем для исследования $z(x, y)$ на экстремум достаточно разложения по формуле Тейлора до 2-ого порядка включительно. Покажем сходимость $r_n(x, y) \overset{(\Delta\rho)^n\to 0}{\to} 0$ на примере
$r_2(x, y) = \dfrac{d^3z(M_{\text{сред.}})}{3!}$
$r_2(x, y) = \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^3 z = \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + 3\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}(\Delta x)^2\Delta y + 3\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}(\Delta y)^2\Delta x\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}(\Delta y)^3\right)$
Вообще говоря, значения частных производных берутся в различных средних точках
$r_2(x, y) = \dfrac{1}{3!}(z_{xxx}(\mu_1)(\Delta x)^3 + 3z_{xxy}(\mu_2)(\Delta x)^2\Delta y + z_{xyy}(\mu_3)(\Delta y)^2\Delta x + 3z_{yyy}(\mu_4)(\Delta y)^3) = \left[\text{вынесем } (\Delta\rho)^3\right] =$
$\dfrac{(\Delta\rho)^3}{3!}\left(\text{огран.}\cdot\dfrac{(\Delta x)^3}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.}\cdot\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.}\cdot\dfrac{(\Delta y)^2\Delta x}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.}\cdot\dfrac{(\Delta y)^3}{(\Delta\rho)^3}\right)$
$\dfrac{(\Delta x)^3}{(\Delta\rho)^3} = \dfrac{(\Delta x)^3}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}^3} \overset{\Delta x\to 0}{\to} 0$, то есть дробь и выражение выше ограничены
$\dfrac{r_2(x, y)}{(\Delta\rho)^2} = \dfrac{1}{3!}\dfrac{(\Delta\rho)^3\cdot\text{огр.}}{(\Delta\rho)^2} = \dfrac{1}{3!}\Delta\rho\cdot\text{огр.} \overset{\Delta\rho\to 0}{\to} 0$

## 4.7. Геометрия ФНП

### 4.7.1. Линии и поверхности уровня

Положим $z = \text{const}$.

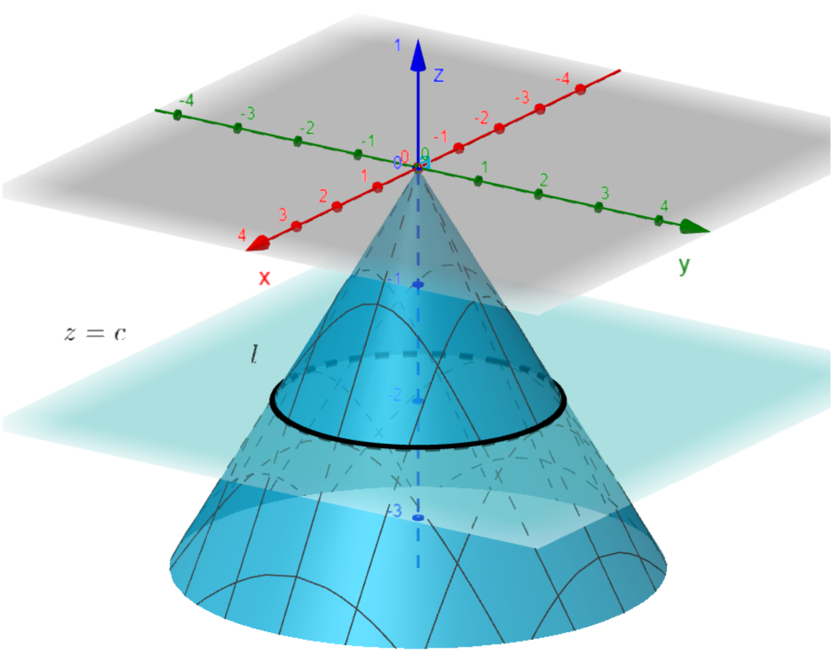
В сечении плоскостью $z = c$ образуется кривая $l$ с уравнением $\begin{cases} z = c \\ \varphi(x, y) = 0 \leftarrow \text{уравнение } l_{\text{проек}} \text{ на } Oxy \end{cases}$

Кривая $l$ с уравнением $z(x, y) = c$ называется линией уровня функции двух переменных $z = z(x, y)$

**Def.** Поверхность уровня $\mathcal{P}$ – это поверхность с уровнем $u(x, y, z) = c$

Физический смысл: Пусть $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (значения функции $u(x, y, z)$ – скаляры). Тогда говорят, что в $\mathbb{R}^3$ задано скалярное поле. Например, поле температур, давления, плотности и т. д. Тогда $u = c$ – поверхности постоянных температур, давления и т. п. (изотермические, изобарные, эквипотенциальные)

*Ex.* Конус: $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$




Линии уровня $z = c$:

1. $c > 0 \quad \varnothing$
2. $c = 0 \quad x = y = 0-$ точка $(0, 0)$
3. $c < 0 \quad -|c| = -\sqrt{x^2 + y^2}$ или $c^2 = x^2 + y^2$

### 4.7.2. Производная по направлению, градиент

Задача. Дано скалярное поле $u = u(x, y, z)$ (например, давления). Как меняется давление при перемещении в заданном направлении?

Это задача о нахождении скорости изменения $u(x, y, z)$ в заданном направлении $\vec{s}$

Из $M_0(x_0, y_0, z_0)$ движемся в $M(x, y, z)$ в направлении $\vec{s}$, $x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y,\ z = z_0 + \Delta z$

$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\Delta s}$

$1 = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta z}{\Delta s}\right)^2}$

$\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta s}, \dfrac{\Delta y}{\Delta s}, \dfrac{\Delta z}{\Delta s}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \vec{s^0}$

Потребуем, чтобы $u(x, y, z)$ имела непрерывность $u_x, u_y, u_z$ в $D$

То есть $u(x, y, z)$ дифференцируема и $\Delta u = du + o(\Delta s) = u_x\Delta x + u_y\Delta y + u_z\Delta x + o(\Delta s)$

$\dfrac{\Delta u}{\Delta s} = u_x\cos\alpha + u_y\cos\beta + u_z\cos\gamma + \dfrac{o(\Delta s)}{\Delta s}$

В предельном переходе получаем: $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

*Nota.* Изначально $\Delta u = du + (\text{б. м.})\Delta x + (\text{б. м.})\Delta y + (\text{б. м.})\Delta z \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\Delta s}$

$\dfrac{\Delta u}{\Delta s} = \dfrac{du}{\Delta s} + (\text{б. м.})\cos\alpha,\ (\text{б. м.})\cos\alpha \longrightarrow 0$

**Def.** Производной функции $u = u(x, y, z)$ в направлении $\vec{s}$ называют величину $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma$ - направления $\vec{s}$

*Nota.* Производная в определении – число, но $\dfrac{\partial u}{\partial s}\vec{s^0}$ – вектор скорости

*Nota.* Заметим, что если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – декартовы орты, то $\dfrac{\partial u}{\partial i} = \dfrac{\partial u}{\partial x}1 + \dfrac{\partial u}{\partial y}0 + \dfrac{\partial u}{\partial z}0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

И аналогично в других направлениях: $\dfrac{\partial u}{\partial j} = \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial k} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$

Составим вектор $\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \overset{\text{обозн}}{=} \vec{\nabla} u$

$\vec{\nabla}$ – набла-оператор (оператор Гамильтона); $\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ – условный вектор

**Def.** $\overrightarrow{\text{grad}}\ u \overset{def}{=} \vec{\nabla} u$ – называют градиентом функции $u(x, y, z)$

Свойства градиентов:

**Th. 1.** $\frac{\partial u}{\partial s} = \text{проек.}_{\vec{s}}\vec{\nabla} u$

В любом заданном направлении $\overrightarrow{s}$ производная $\frac{\partial u}{\partial s}|_M$ равна проекции градиента в $M$

**Th. 2.** $\vec{\nabla} u$ – направление наибольшего значения $\frac{\partial u}{\partial s}$

**Th. 3.** $\vec{s} \perp \vec{\nabla} u \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = 0$

**Th. 4.** $u = u(x, y), u = c$ – линии уровня $l$. Тогда $\vec{\nabla} u \perp l$

Прямая, содержащая $\vec{\nabla} u$ (т. е. перпендикулярная касательной к $l$), называется нормалью к $l$ а тогда $\vec{\nabla} u$ – вектор нормали

Доказательства:

1.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \vec{s^0}\right) u = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) u \cdot \vec{s^0} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{s^0}$$

$$|\vec{\nabla} u \cdot \vec{s^0}| = |\vec{\nabla} u||\vec{s^0}| \cos(\widehat{\vec{\nabla} u, \vec{s^0}}) = |\vec{\nabla} u| \cos(\widehat{\vec{\nabla} u, \vec{s^0}}) = \text{пр.}_{\vec{s}}\vec{\nabla} u$$

2.

$\frac{\partial u}{\partial s} = |\vec{\nabla} u| \cos\varphi$, где $\varphi$ - угол между $\vec{s}$ и $\vec{\nabla} u$

Косинус принимает наибольшее значение, если угол между $\vec{s}$ и $\vec{\nabla} u$ равен нулю, то есть направления векторов совпадает. Значит, при $\vec{s} = \vec{\nabla} u$ производная принимает наибольшее значение

3.

Из доказательства **Th. 2.** следует, что если $\vec{s}$ сонаправлен с $\vec{\nabla} u$, то производная принимает наибольшее значение. Следовательно, если $\vec{s} \perp \vec{\nabla} s$, то $\cos\varphi = 0$, $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$

4.

$u = c$ – уравнение $l_{\text{пр}}$ в плоскости $Oxy$, то есть $u(x, y) = c$ мы можем рассмотреть как неявную функцию $u(x, y(x)) - c = 0$

Производная неявной функции: $\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = k_l$ – угловой коэффициент касательной к $l$

$\vec{\nabla} u = (u_x, u_y) \quad \dfrac{u_y}{u_x} = k_{\text{град.}}$ – наклон вектора градиента.

Очевидно $k_l \cdot k_{\text{град.}} = -1 \Longrightarrow \vec{\nabla} u \perp l$