

Следствие формулы Грина: $S_D = \frac{1}{2} \oint_K xdy - ydx$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{2} \right) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Формула Грина: $\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy = \iint_D \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right) \right) dxdy = \iint_D dxdy = S_D \stackrel{\Phi, \Gamma p.}{=} \oint_{K^+} \left(-\frac{y}{2} \right) dx + \frac{x}{2} dy$

Def. Пусть даны $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемы по 2-м переменным

А также кривая \widehat{AB} , соединяющая любые две точки области, $\widehat{AB} : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, φ, ψ – непрерывно

дифференцируемы (кусочно)

$I = \int_{AB} Pdx + Qdy$ называется интегралом, не зависящим от пути интегрирования (НЗП), если

$$\forall M, N \in D \quad \int_{AMB} Pdx + Qdy = \int_{ANB} Pdx + Qdy$$

Nota. Обозначают $\int_A^B Pdx + Qdy$ или $\int_{(x_2, y_2)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy$

Th. Об интеграле НЗП. В условиях определения

I. $\int_{AB} Pdx + Qdy$ – интеграл, не зависящий от пути

II. $\oint_K Pdx + Qdy = 0 \quad \forall K \subset D$

III. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall M(x, y) \in D$

IV. $\exists \Phi(x, y) \mid d\Phi = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ в области D

Причем $\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy$, где $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in D$

Тогда $I \iff II \iff III \iff IV$

1. $I \iff II$

\implies По определению $\int \text{НЗП} \iff \int_{AMB} = \int_{ANB}$

Рассмотрим $\int_{AMB} - \int_{ANB} = \int_{AMB} + \int_{BNA} = \oint_K = 0 \quad \forall K \subset D$

\impliedby Достаточно разбить $\oint_{K^+} = \int_{AMB} + \int_{BNA} = 0$

Поскольку $\int_{AMB} + \int_{BNA} = 0$, то $\int_{AMB} - \int_{ANB} = 0$

2. $II \iff III$

$\implies \oint_K = 0 \stackrel{?}{\implies} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall M(x, y) \in D$

От противного $\exists M_0(x_0, y_0) \in D \mid \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{M_0} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{M_0} \iff \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \Big|_{M_0} \neq 0$

Для определенности пусть $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \Big|_{M_0} > 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \mid \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \Big|_{M_0} > \delta > 0$

Выберем малую окрестность в точке M_0 ($U(M_0)$) и обозначим ее контур Γ

Так как P и Q непрерывно дифференцируемы, $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \Big|_{M_0} > 0$ в $U(M_0)$

Формула Грина: $\iint_{U(M_0)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy > \iint_{U(M_0)} \delta dx dy = \delta S_{U(M_0)} > 0$

С другой стороны $\iint_{U(M_0)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma^+} P dx + Q dy = 0$

Таким образом, возникает противоречие

$$\boxed{\iff} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall M \in D$$

Тогда $\forall D' \subset D \quad \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 = \oint_{\Gamma_{D'}} P dx + Q dy \quad \forall \Gamma_{D'} \subset D$

3. III \iff IV

$$\boxed{\implies} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \implies \exists \Phi(x, y)$$

Так как доказано $I \iff III$, то докажем $I \implies IV$

$$\int_{AM} P dx + Q dy = \int_{A(x_0, y_0)}^{M(x, y)} P dx + Q dy - \int \text{НЗП} \quad \forall A, M \in D$$

Обозначим $\int_{A(x_0, y_0)}^{M(x, y)} P dx + Q dy - \Phi(x, y)$

Докажем, что $d\Phi = P dx + Q dy$

Так как $d\Phi(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$, то нужно доказать $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x} = [\text{задали приращение вдоль } MM_1] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x, y) - \Phi(x, y)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_A^{M_1} P dx + Q dy - \int_A^M P dx + Q dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_A^M + \int_M^{M_1} - \int_A^M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_M^{M_1}}{\Delta x} \stackrel{\text{НЗП}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx}{\Delta x} = [\text{по th Лагранжа } \exists \xi \in [x; x + \Delta x]] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(\xi, y) \Delta x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\xi, y) = P(x, y)$$

Аналогично $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$

$$\boxed{\iff} d\Phi = P dx + Q dy \stackrel{?}{\implies} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Известно $P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$

Тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Nota. Φ – первообразная для $Pdx + Qdy$

Th. Ньютона-Лейбница.

Выполнены условия **Th.** об интеграле НЗП, тогда $\int_A^B Pdx + Qdy = \Phi(B) - \Phi(A)$

$$\int_A^B Pdx + Qdy \stackrel{\exists \Phi | d\Phi = Pdx + Qdy}{=} \int_A^B d\Phi(x, y) \stackrel{\text{параметр. } AB}{=} \int_\alpha^\beta d\Phi(t) = \Phi(t) \Big|_\alpha^\beta = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \Phi(B) - \Phi(A)$$

Применение:

Ex. Дан интеграл $\int_{AB} \left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy$

Проверим НЗП $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\right): \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2}, \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2} \iff \int \text{НЗП}$

Найдем первообразную $\Phi(x, y)$ на все случаи жизни: $\Phi(x, y) = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} Pdx + Qdy$

Выберем путь (самый удобный): $\Phi(x, y) = \int_{M_0}^N + \int_N^M$

$$\int_{M_0}^N \stackrel{y=0, x_0=1, dy=0}{=} \int_{(1,0)}^{(x,0)} 4dx = 4x \Big|_{(1,0)}^{(x,0)} = 4x - 4$$

$$\int_N^M \stackrel{dx=0}{=} \int_{(x,0)}^{(x,y)} \frac{2y}{x} dy = \frac{y^2}{x} \Big|_{(x,0)}^{(x,y)} = \frac{y^2}{x}$$

$$\Phi(x, y) = 4x - 4 + \frac{y^2}{x} + C = 4x + \frac{y^2}{x} + C$$

$$\text{Проверим: } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4 - \frac{y^2}{x^2} = P, \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{2y}{x} = Q$$

Теперь можем искать $\int_{AB} \forall A, B \in D$ по N-L

$$\text{Пусть } A(1, 1), B(2, 2), \text{ тогда } \int_{AB} Pdx + Qdy = \Phi \Big|_A^B = \frac{y^2}{x} + 4x \Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = \frac{4}{2} + 8 - 1 - 4 = 5$$

Nota. Функция Φ ищется в тех случаях, когда $\int_A^B Pdx + Qdy = \int_A^B (P, Q)(dx, dy) = A$ – работа силы, которая не зависит от пути

Ex. Работа силы тяжести не зависит от пути (такие силы называются консервативными), а силы трения – зависит (такие – диссипативными)

Ex. Пусть $\vec{F} = (P, Q) = (0, -mg)$

$$\Phi(x, y) = \int_O^M 0dx - mgdy = - \int_0^y mgdy = -mgy - \text{потенциал гравитационного поля (или силы тяжести)}$$