

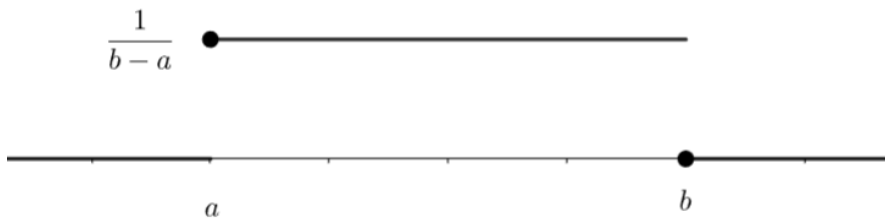
Лекция 9

Стандартное абсолютно непрерывное распределение

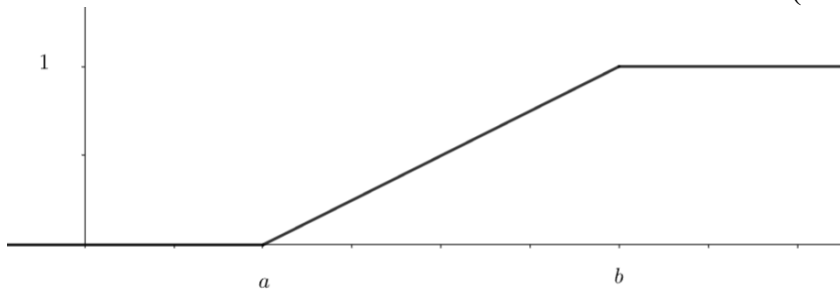
I. Равномерное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение $\xi \in U(a, b)$, если ее плотность на этом отрезке постоянна

Получаем функцию плотности $f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$ $\frac{1}{b-a}$ из усл. нормировки



Из этого функция распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$



Числовые характеристики:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

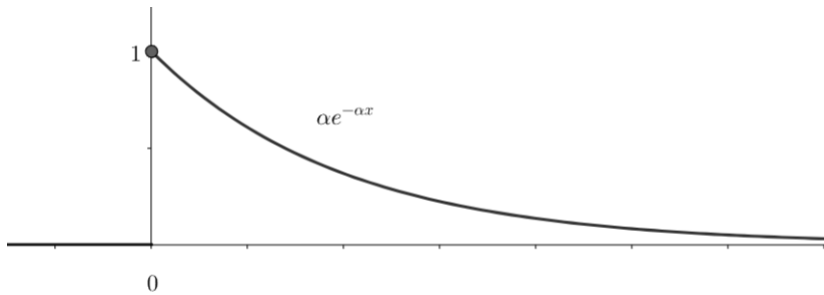
$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \text{ при условии, что } \alpha, \beta \in [a, b]$$

Nota. Примеры равномерного распределения: задача со временем, датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение $U(0, 1)$

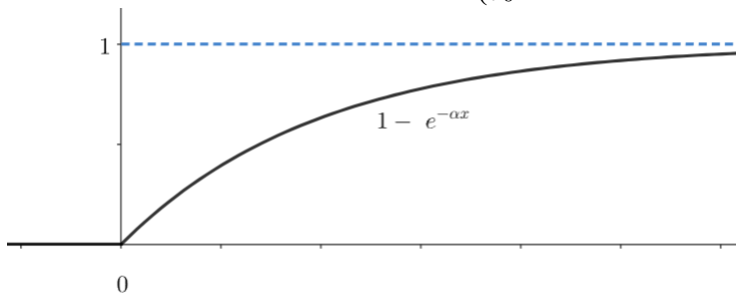
II. Показательное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет показательное (или экспоненциальное) распределение с параметром $\alpha > 0$ (обозн. $\xi \in E_\alpha$), если ее плотность имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



Функция распределения $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \alpha e^{-\alpha x} = 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$



Числовые характеристики:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x}dx = \left[\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\alpha e^{-\alpha x} & v=-e^{-\alpha x} \end{matrix} \right] = -xe^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx =$$

$$-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\alpha x}} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha e^{\alpha x}} - \frac{1}{\alpha} (\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} - 1) = \frac{1}{\alpha}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x}dx = \left[\begin{matrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\alpha e^{-\alpha x} & v=-e^{-\alpha x} \end{matrix} \right] = -x^2 e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x}dx =$$

$$\frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x} = \frac{2}{\alpha} E\xi = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\alpha}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\alpha\alpha} - e^{-\beta\alpha} \quad a, b \geq 0$$

Nota. Из непрерывных случайных величин только показательная обладает свойством нестарения

Th. $\exists \xi \in E_\alpha$. Тогда $p(\xi > x + y \mid \xi > x) = p(\xi > y) \quad \forall x, y > 0$

□

$$p(\xi > x + y \mid \xi > x) = \frac{p(\xi > x + y, \xi > x)}{p(\xi > x)} = \frac{1 - p(\xi < x + y)}{1 - p(\xi < x)} = \frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} = \frac{e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} = e^{-\alpha y} = 1 - (1 - e^{-\alpha y}) = 1 - p(\xi < y) = p(\xi > y)$$

□

Ex. 1. Время работы надежной микросхемы до поломки

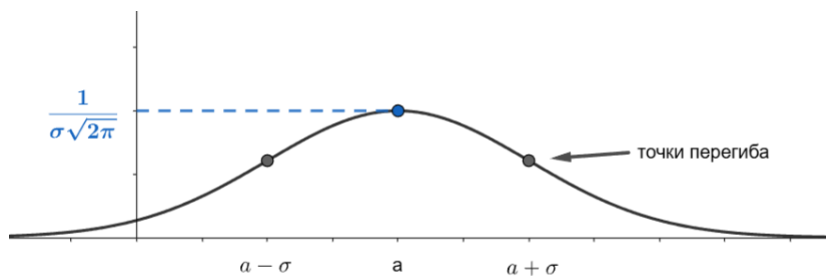
Ex. 2. Время между появлениями двух редких событий (через схему Пуассона)

Nota. Применится в системах массового обслуживания, теория надежности

III. Нормальное распределение (Гауссовское)

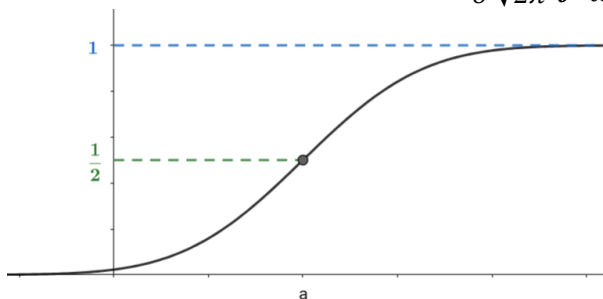
Def. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2 (обозн. $\xi \in N(a, \sigma^2)$), если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$



Смысл параметров распределения: $a = E\xi$ - математическое ожидание и медиана, σ - СКО, а $D\xi = \sigma^2$

Функция распределения: $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$



Проверим корректность определения - условие нормировки. Покажем, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{ll} t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} & dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} \\ t(\pm\infty) = \pm\infty & dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1 - \text{верно}$$

Ясно, что $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$ - интеграл сходится абсолютно для любого k (степень e задавит полином)

$$E\xi = m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a \text{ в силу симметрии}$$

Найдем дисперсию при помощи дифференцирования интеграла по параметру:

$$\text{Из условия нормировки } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{(x-a)^2}{2} (-2\sigma^{-3}) \right) dx = 1$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 = D\xi, \text{ получаем, что } \sigma - \text{СКО}$$

Стандартное нормальное распределение

Def. Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma^2 = 1$: $\xi \in N(0, 1)$

Плотность: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса

$$E\xi = 0; D\xi = 1$$

Распределение: $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - функция стандартного нормального распределения

Заметим, что $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа

Функция Лапласа нечетная и из соображения симметрии легко вычисляется для отрицательных x , однако большинство ПО используют $F_0(x)$

Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями

1) $\xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $F_\xi(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

□

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left[\begin{array}{lll} z = \frac{t-a}{\sigma} & t = \sigma z + a & dt = \sigma dz \\ z(-\infty) = -\infty & z(x) = \frac{x-a}{\sigma} & \end{array} \right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

□

2) Если $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0, 1)$ (процесс $\xi \rightarrow \eta$ называется стандартизацией)

□

$$F_\eta(x) = p(\eta < x) = p\left(\frac{\xi - a}{\sigma} < x\right) = p(\xi < \sigma x + a) = F_\xi(\sigma x + a) = F_0\left(\frac{\sigma x + a - a}{\sigma}\right) = F_0(x), \text{ так как}$$

$$F_\eta(x) = F_0(x), \text{ то } \eta \in N(0, 1)$$

□

3) $\square \xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = F_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

4) Вероятность попадания в симметричный интервал (вероятность отклонения случайной величины от матожидания) $p(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$

$$p(|\xi - a| < t) = p(-t < \xi - a < t) = p(a - t < \xi < a + t) = \Phi\left(\frac{a + t - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - t - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{t}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

Nota. Если через $F_0(x)$, то $p(|\xi - a| < t) = 2F_0\left(\frac{t}{\sigma}\right) - 1$

5) Правило 3 «сигм»: $p(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973$ - попадание случайной величины нормального распределения в интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ близко к 1

$$p(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0.49685 = 0.9973$$

6) Свойство линейности: если случайная величина $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $\eta = \gamma\xi + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$ (можем доказать при помощи свойств ранее, но мы докажем позже, используя другие методы)

7) Устойчивость относительно суммирования: если случайные величины $\xi_1 \in N(a_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \in N(a_2, \sigma_2^2)$, и они независимы, то $\xi_1 + \xi_2 \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Def. 1. Асимметрией распределения называется число $A_s = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$

Def. 2. Эксцессом распределения называется число $E_s = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$

Nota. Если случайная величина $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $A_s = E_s = 0$, таким образом, отличие этих характеристик от нуля характеризует степень отклонения распределения. Благодаря этим и другим параметрам, можно проверять на практике, является ли распределение нормальным