Def. Пусть $\mathcal{A}: V \to W$; $\mathcal{B}: U \to V$, тогда $\mathcal{AB}$ - произведение операторов (композиция), причем $(\mathcal{AB})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$; $\quad x \in U$

Свойства:

1° $\lambda(\mathcal{AB}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$

2° $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC}+\mathcal{BC}$

3° $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB}+\mathcal{AC}$

4° $\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$

Lab. доказать

Nota. Можно обобщить 4° на n равных $\mathcal{A}$

Def. $\mathcal{A}^n = \underbrace{\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}\cdot\dots\cdot\mathcal{A}}_{n \text{ раз}}$ - степень оператора

Свойства: $\mathcal{A}^{m+n} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

2.3. Обратимость оператора

Def. $\mathcal{A}: V \to W$ так, что $\mathcal{A}V = W$ и $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V)$ $\begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \implies y_1 \neq y_2$

Тогда $\mathcal{A}$ называется взаимно-однозначно действующим

Nota: Проще сказать «линейный изоморфизм»

Th. $\{x_i\}$ - линейно независима $\overset{\mathcal{A}x=y}{\Longrightarrow}$ $\{y_i\}$ - линейно независима

В обратную сторону верно, если $\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен

Пусть $\mathcal{A}: V \to W$ и $0_V, 0_W$ - нули V и W соответственно

1. $\mathcal{A}(0_V) = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} 0\cdot e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} 0\cdot\mathcal{A}e_i = 0_W$
2. Докажем, что если $x_i \subset V$ - линейно независима, то $y_i \subset W$ - линейно независима

   Составим $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j y_j = 0_W$

   От противного пусть $\{y_i\}$ - линейно зависима, тогда $\exists \lambda_k \neq 0$

   При этом $\forall j \quad y_j = \mathcal{A}x_j$ (т. к. $\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен, то $n' = m'$: кол-во x_i и y_i равно)

   $\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j \mathcal{A}x_j \overset{\text{линейность}}{=} \mathcal{A}(\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j) = 0_W$

   Так как $\mathcal{A}0_V = 0_W$, то 0_W - образ $x = 0_V$, но так как $\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен, то $\nexists x' \neq x \mid \mathcal{A}(x') = 0_W$

Значит $\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j = 0_V$, но $\exists \lambda_k \neq 0 \Longrightarrow \{x_j\}$ - линейно зависима - противоречие

3. Пусть теперь $\{y_i\}$ - линейно независима, а $\{x_i\}$ (по предположению от противного) - линейно зависима

$$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i x_i \overset{\exists \lambda_k \neq 0}{=} 0_V \quad \Big| \mathcal{A}$$

$$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i \mathcal{A} x_i = 0_W$$

При этом $\exists \lambda_k \neq 0 \Longrightarrow \{y_i\}$ - линейно зависима - противоречие

Следствие: $\dim V = \dim W \Longrightarrow \mathcal{A}$ - линейный изоморфизм

Def. $\mathcal{B} : W \to V$ называется обратным оператором для $\mathcal{A} : V \to W$, если $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{I}$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$)
Следствие: $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} x = x$

Th. $\mathcal{A}x = 0$ и $\exists \mathcal{A}^{-1}$, тогда $x = 0$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1} 0_W = 0_V \Longrightarrow x = 0$

Th. Необходимые и Достаточные условия существования $\mathcal{A}^{-1}$
$\exists \mathcal{A}^{-1} \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ - взаимно-однозначный

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\exists \mathcal{A}^{-1}$, но $\sqsupset$ $\mathcal{A}$ - не взаимно-однозначен, то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longleftrightarrow \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0_W \overset{\exists \mathcal{A}^{-1}}{\Longrightarrow} x = 0_V \Longleftrightarrow x_1 = x_2$ - противоречие

$\boxed{\Longleftarrow}$ Так как $\mathcal{A}$ - изоморфизм (не учитывая линейность), то $\exists \mathcal{A}'$ - обратное отображение (не обязательно линейное)

Докажем, что $\mathcal{A}' : W \to V$ - линейный оператор

$\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен $\Longleftrightarrow \forall x_i \longleftrightarrow y_i \quad \Big| \cdot \lambda_i, \sum$

$\mathcal{A}\left(\sum \lambda_i x_i\right) = \mathcal{A}x = y = \sum \lambda_i y_i$ и y имеет только один прообраз x

Применим $\mathcal{A}'$ к $y = \sum \lambda_i y_i$, получим $\mathcal{A}'y = x = \sum \lambda_i x_i$ - единственный прообраз y

Таким образом, $\mathcal{A}'$ переводит линейную комбинацию в такую же линейную комбинацию прообразов, то есть $\mathcal{A}'$ - линейный: $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$

2.4. Матрица линейного оператора

Пусть $\mathcal{A} : V^n \to W^m$

Возьмем вектор $x \in V^n$ и разложим по какому-либо базису $\{e_j\}_{j=1}^n$

$\mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_j e_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \mathcal{A} e_j$

$\mathcal{A}e_j \overset{\text{образ базисного вектора}}{=} y_j \overset{\{f_i\}-\text{ базис } W^m}{=} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$

$\mathcal{A}x = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \mathcal{A} e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} c_j a_{ij} f_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j a_{ij} f_i$

Иллюстрация:

$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Def. Матрица $A = \{a_{ij}\}_{i=1..m, j=1..n}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V^n \to W^m$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства V^n

1. Для каждого ли оператора $\mathcal{A}$ существует матрица A?
   При выбранном базисе $\{e_j\}$ $\forall \mathcal{A}\ \exists A$ (алгоритм выше)
2. Для каждой ли матрицы A существует оператор $\mathcal{A}$?
   $\forall A_{m \times n}$ можно взять пару ЛП V^n, W^m и определить $\mathcal{A} : V^n \to W^m$ по правилу $\mathcal{A}e_V = e'_W$
3. Если существует матрица A для оператора $\mathcal{A}$, то она единственная?
   Такая A единственная $\Longrightarrow$ в разных базисах матрицы ЛО $\mathcal{A}$ $\quad A_e \neq A_{e'}$
4. Если существует оператор $\mathcal{A}$ для матрицы A, то он единственный?
   Lab.

Nota. Далее будем решать две задачи:

1. преобразование координат как действие оператора
2. поиск наиболее простой матрицы в некотором базисе

2.5. Ядро и образ оператора

Def. Ядро оператора $\operatorname{Ker} \mathcal{A} \overset{def}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$
Def. Образ оператора $\operatorname{Im} \mathcal{A} \overset{def}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$