Содержание

1. Основные понятия

1.1. Комплексное число

Мет. $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Обозначение: $z = (a, b) = a + bi$, где $i = (0, -1) = \sqrt{-1}$

Основные операции:

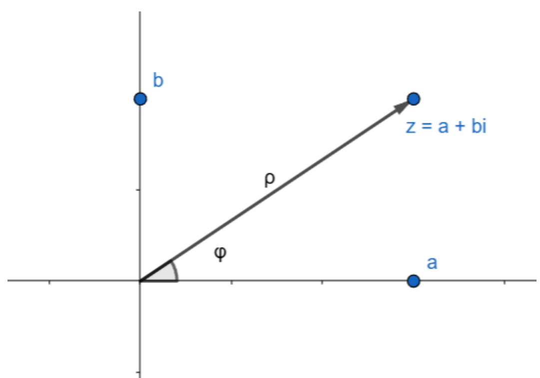
1. $\text{Re}z = a$ - вещественная часть, $\text{Im}z = b$ - мнимая часть
2. $z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4. $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ - **формула Муавра**, где $\rho = |z|, \varphi = \arg z$
5. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, где $\rho = |z|, \varphi = \arg z, k \in \mathbb{Z}$
6. При $n = 2$ $\sqrt{z} = \sqrt{a + bi} = \pm(c + di)$, где $c = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, d = \text{sign}(b)\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$

Тригонометрическая форма:

$z = a + bi = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$

$\text{Arg}z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

По формуле Эйлера $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$



1.2. Комплексная плоскость

Def. Окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ определяется как $U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$

Тогда $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0) = U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ - выколотая окрестность

Def. Для данной множества точек A точка z_0 считается

- внутренней, если для любого δ $U_\delta(z_0) \subset A$
- граничной, если для любого δ $\exists z \in U_\delta(z_0) \Big| z \in A$ и $\exists z \in U_\delta(z_0) \Big| z \notin A$

Def. Открытое множество состоит только из внутренних точек

Def. Закрытое множество содержит все свои граничные точки

Def. Границей Γ_D (иногда обозн. δD) для множества D называют множество всех граничных точек D

Def. Если любые две точки множества можно соединить ломаной линией конечной длины, то множество считается связным

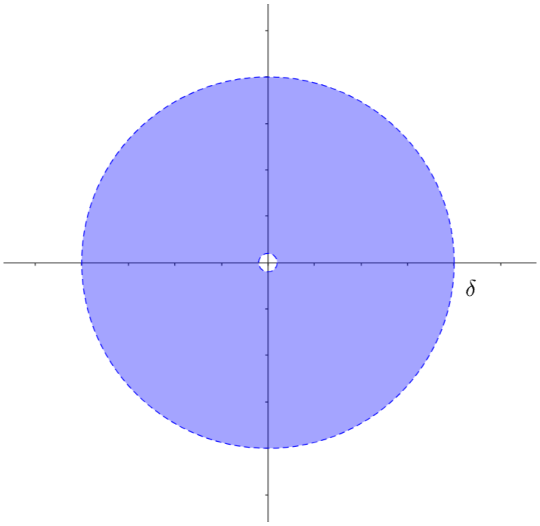
Def. Множество $D \subset \mathbb{C}$ называется областью, если D - открытая и связная

Def. Кривая $l \subset \mathbb{C}$ считается непрерывной, если $l = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \varphi(t) + i\psi(t), t \in \mathbb{R}\}$, где $\varphi(t), \psi(t)$ - непрерывные функции

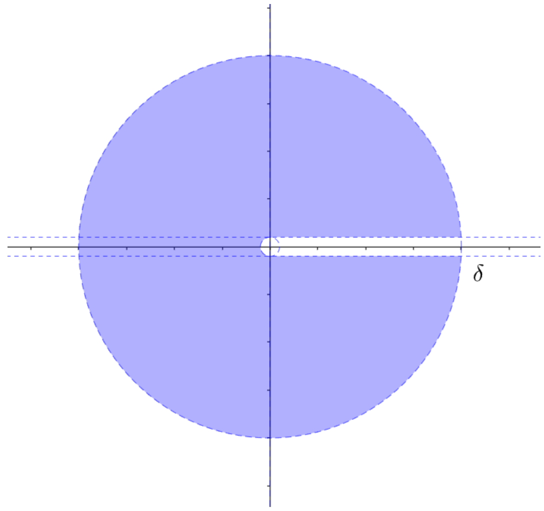
Nota. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и их производные непрерывные, то кривая l гладкая

Def. Непрерывная замкнутая (то есть начальная и конечная точки совпадают) без самопересечений кривая называется контуром

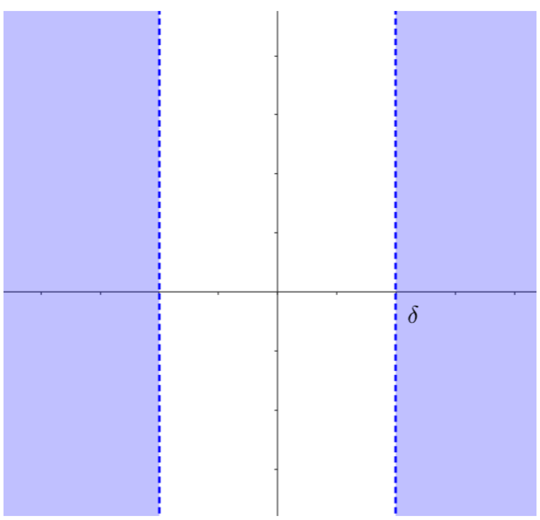
Nota. Односвязную область можно стянуть в точку



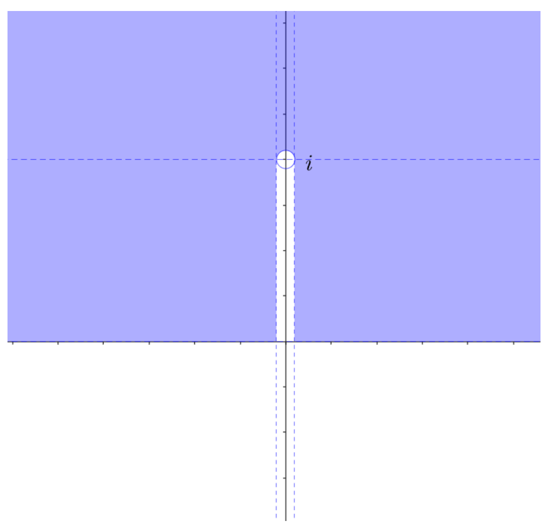
Ex. 1. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < \delta\right\}$ - область связаная, но не односвязная, ее нельзя стянуть из-за дырки



Ex. 2. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < \delta, \arg z \neq 0\right\}$ - область связная и односвязная



Ex. 3. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mathrm{Re} z| < \delta\right\}$ - несвязная область



Ex. 4. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Im} z \geq 0, z \notin [0, i]\right\}$ - здесь под $[0, i]$ подразумевается линейный отрезок на оси

Nota. Дальше все рассматриваемые Γ_D будут состоять из кусочногладких и изолированных кривых

1.3. Предел

Mem. Последовательность $\{z_n\} = z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$

Def. Пределом $\{z_n\}$ называют число z такое, что
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0=n_0(\varepsilon)}{n_0 = \mathbb{N}} \ \Big| \ \forall n > n_0 \ |z_n - z| < \varepsilon$
Обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$

Nota. $\{z_n\}$ можно представить как $x_n + iy_n$, то есть двумя $\mathbb{R}$-последовательностями

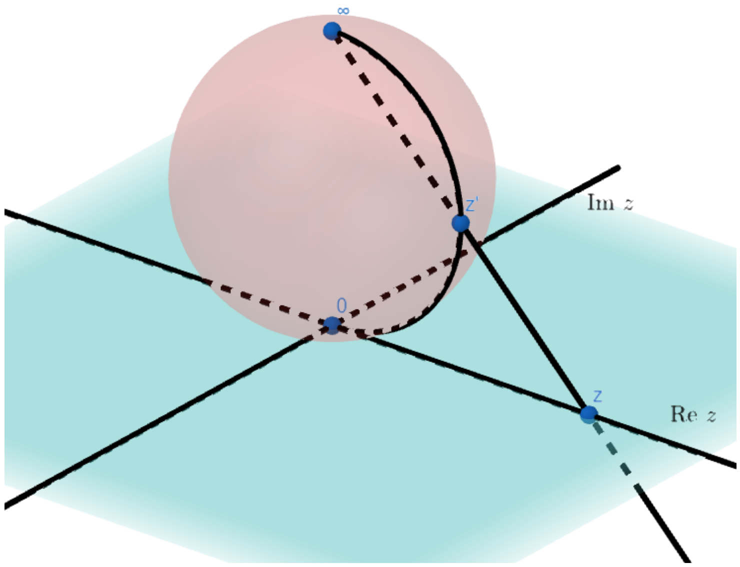
Th. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \underset{x,y\in\mathbb{R}}{x + iy} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re} z_n = x \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im} z_n = y \end{array}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0=\max(n_{0x}, n_{0y})}{n_0 \in \mathbb{N}} \ \Big| \ \forall n > n_0 \ \begin{array}{l} |\mathrm{x}_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |\mathrm{y}_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$
$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$
То есть $\forall \varepsilon > 0 \ldots |z_n - z| < \varepsilon$
$\boxed{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ |z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} |x_n - x| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \\ |y_n - y| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow$
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$

Nota. Для комплексных чисел работают теоремы для пределов (сумма пределов, произведение пределов и т.д.), критерий Коши и другие

Def. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0=n_0(\varepsilon)}{n_0 \in \mathbb{N}} \ \Big| \ n > n_0 \ |z| > \varepsilon$
Def. Точка z, определенная как предел, равный ∞, называется бесконечно удаленной. Но существует множество последовательностей, чьи пределы удаляются на бесконечность разными путями на плоскости

Def. Стереографическая проекция (сфера Римана)



Поместим сферу на комплексную плоскость и сделаем биекцию точек плоскости на точки сферы: проведем из верхней точки сферы лучи вниз на плоскость, и точка, где луч пересекает сфера, будет считаться отображением для данной точки. Заметим, что в этом случае бесконечно удаленные точки будут отображаться в верхнюю точку сферы

Def. $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ - расширенная комплексная плоскость
Однако $z + \infty$ не определена, $\infty + \infty$ не определена. Но $\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n}$ при $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; $\infty = \infty \cdot \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ при $z_n \longrightarrow z$
Записью $[-\infty; +\infty]$ обозначается ось $\overline{\mathbb{R}}$;
$[-i\infty; +i\infty]$ - мнимая расширенная ось
Путь $x \pm i\infty$ при фикс. x - вертикальная прямая;
$iy \pm \infty$ - горизонтальная прямая;
$e^{i\varphi} \cdot \infty$ - прямая, проходящая через начало координат

1.4. Комплексная функция

1° Определение

Mem. $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R} \overset{def}{\iff}$ отображение такое, что $\forall x \in E\ \exists! y \in D \mid y = f(x)$

Def. $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \overset{def}{\iff}$ отображение такое, что $\forall z \in D\ \exists w \in G \mid f(z) = w$
Def. Если $\forall z \in D\ \exists! w \in G$, то f называется однозначной функцией
Def. Если $\forall z_1, z_2 \in D (z_1 \neq z_2) \Longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, то f называется однолистной функцией

Ex. 1. $w = \sqrt{z}$ - неоднозначная функция

$\sqsupset z = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

$\sqrt{z} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{2\pi k}{2} + i\sin\frac{2\pi k}{2}\right)$

$w_1 = 1, \quad w_2 = -1$

Ex. 2. $w = z^2$ - неоднолистная функция

$z_1 = 1, z_2 = -1 \qquad w(z_1) = w(z_2) = 1$

Nota. Если $f(z)$ однозначна и однолистна, то $f(z)$ - взаимно однозначное соответствие (биекция). Тогда $\exists g(x) \mid g(f(x)) = x$

Комплексную функцию $f(z)$ можно представить как $u(x,y) + iv(x,y)$, где $x + iy = z$

Ex. $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$

$u(x,y) = (x^2 - y^2), \qquad v(x,y) = 2xy$

2° Предел

Def. $L \in \mathbb{C}, f : D \longrightarrow G, \quad L \stackrel{def}{=} \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\underset{\delta=\delta(\varepsilon)}{\delta > 0}\ \Big|\ z \in D, z \in U^\circ_\delta(z_0)\ f(x) \in U_\varepsilon(L)$

В определении существование и значение L не должно зависеть от пути, по которому z приближается к точке сгущения z_0. Может быть так, что для любого направления стремления предел есть, но в общем смысле не существует

Ex. $f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}\right) \qquad \sqsupset z = \rho e^{i\varphi}$

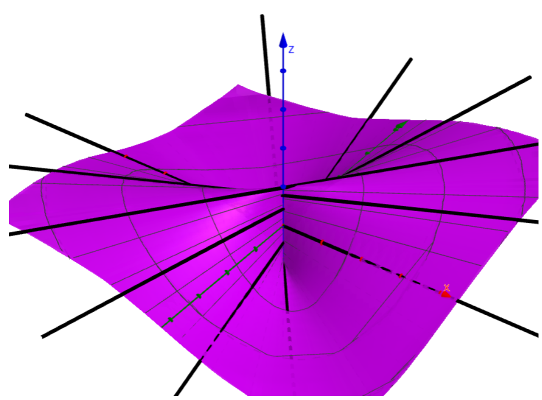
$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}} - \frac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right) = \frac{1}{2i}(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi - \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = \sin 2\varphi$

Зафиксируем $\varphi = \varphi^* \in [0; 2\pi)$, тогда $\sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi^*}} f(z) = \lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi^*}} \sin 2\varphi = \sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$

Значения предела занимает отрезок $[-1; 1] \Longrightarrow \nexists \lim\limits_{z\to 0} f(z)$

На рисунке изображена $\sin 2\varphi$, на оси Oz изображена $\mathrm{Re}\,w$. Черные линии - это возможные пути приближения z к 0



Nota. Путь следования предела аналогичен левостороннему и правостороннему пределами $\mathbb{R}$-функций

Def. Непрерывность функций в точке z_0.

$f: D \longrightarrow G, z_0 \in D$, $f(z)$ называется непрерывной в z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

На языке приращений: $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \underset{\Delta z \to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y \to 0 \Longrightarrow \begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases} \Longrightarrow \Delta\rho \to 0$$

3° Элементарные комплексные функции

Ex. 1. Линейная $f(z) = az + b, \qquad a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$

Эта функция однозначная, однолистная $\Longrightarrow \exists f^{-1}(z) = g(z) = \dfrac{z-b}{a}$

Геометрический смысл:

$a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$

$az = |a||z|(\cos(\varphi_a + \varphi_z) + i\sin(\varphi_a + \varphi_z))$ - поворот и растяжение ($\varphi_a = \arg a$, $\varphi_z = \arg z$)

$az + b = (x_{az} + x_b) + i(y_{az} + y_b)$ - сдвиг

То есть линейная функция - композиция из поворота, растяжения и сдвига

Ex. 2. Степенная $w = z^n$, $\quad n \in \mathbb{N}$ - однозначная, может быть неоднолистной

Для $n \in \mathbb{Q}$ функция становится неоднозначной

Ex. $w = z^2 \qquad z = \rho e^{i\varphi}, w = \rho^2 e^{2i\varphi}$

Пусть $z_1 \neq z_2$ и $w(z_1) = w(z_2)$, тогда $\arg z_1 = \arg z_2 \pm \pi$

$w(z_1) = \rho^2 e^{2i\arg z_1} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + 2\pi k)}$

$w(z_2) = \rho^2 e^{2i\arg z_2} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + \pi)} = \rho^2 e^{i(2\arg z_1 + 2\pi)} = w(z_1)$

Область однолистности z^2 - множество точек, для которых $\arg z \in [0; \pi)$

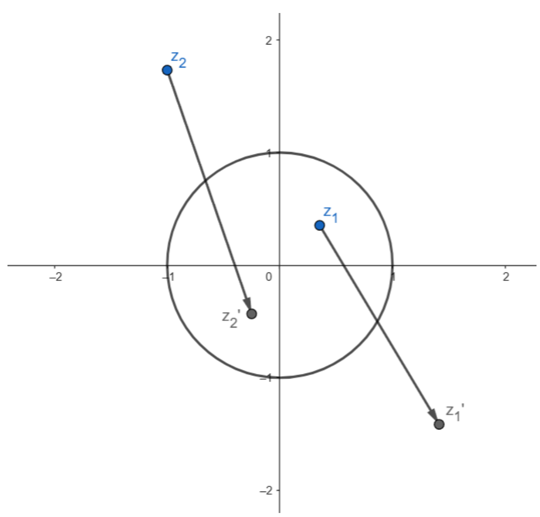
Точку $w = 0$ называют точкой разветвления

Ex. $w = z^{-1} = \dfrac{1}{z} \qquad w(0) = \infty, w(\infty) = 0$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - функция обратима

$w = re^{i\psi} = \dfrac{1}{\rho e^{i\phi}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \Longrightarrow |w| = \dfrac{1}{|z|}, \arg w = -\arg z$

Преобразование $|w| = \dfrac{1}{|z|}$ называется инверсией, а $\arg w = -\arg z$ дает симметрию относительно $\operatorname{Re} z$



Ex. 3. Рациональная $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \qquad n, m \in \mathbb{N}$

Ex. 4. Показательная $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Свойства:

1. $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
2. $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$

3. $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ - показательная функция периодична с периодом $2\pi i$

Ex. 5. Логарифмическая $w = \mathrm{Ln} z$

Если $e^w = e^{u+vi} = e^u(\cos v + i\sin v) = z = |z|e^{i\arg z}$, то $u = \ln|z|$, $v = \arg z + 2\pi k$

Тогда $\boxed{\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)}$

$\ln z = \mathrm{Ln} z$ при $k = 0$ - т. н. главное значение