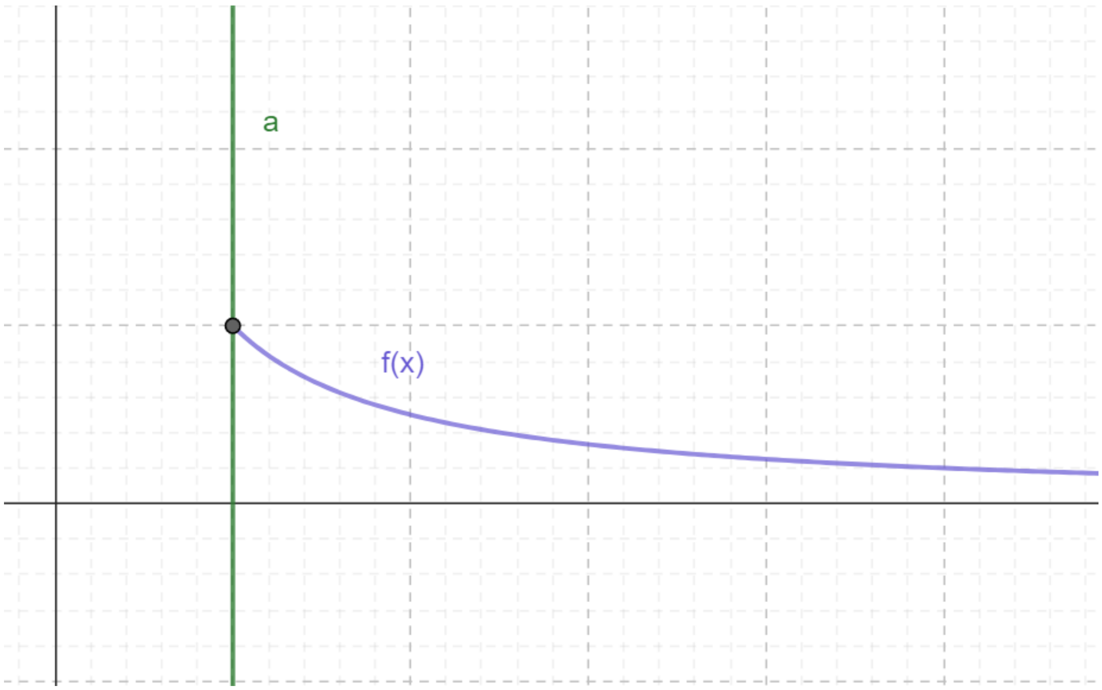
2. Несобственные интегралы

2.1. Определения

2.1.1 Интегралы на неограниченном промежутке

Геометрический смысл: пусть $f(x) : [a; +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) \in C_{[a;+\infty]}$



Тогда определенный интеграл имеет смысл – это площадь под графиком функции:

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

Имеет ли смысл площадь неограниченной фигуры под графиком функции?

Предел функции $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ может быть конечным или бесконечным

Def. 1. Определим несобственный интеграл первого рода (на неограниченном промежутке) ($f(x)$ любого знака):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Nota. Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится. В противном случае – расходится

Def. 2. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[-\infty; b]$ и непрерывна. Тогда определен:

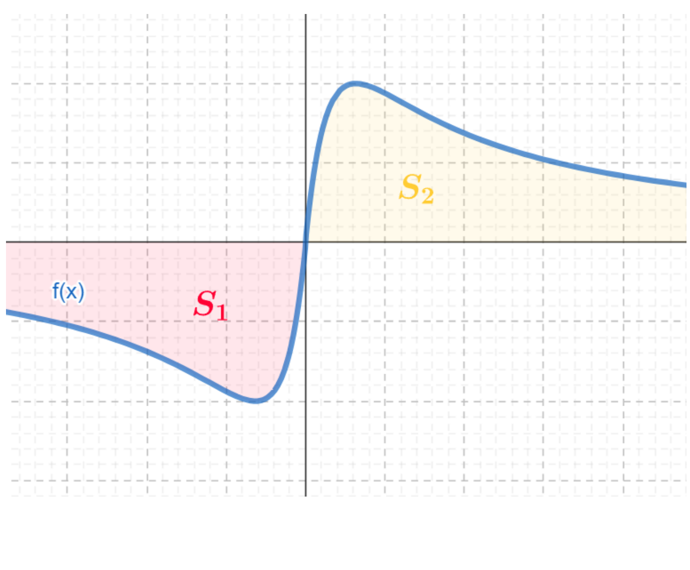
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Def. 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

Nota. Этот интеграл сходится, если сходятся оба интеграла справа, и расходится, если расходится хотя бы один из них (в том числе если возникает неопределенность $\infty - \infty$)

Ex. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Сделаем ее непрерывной в окрестности нуля:

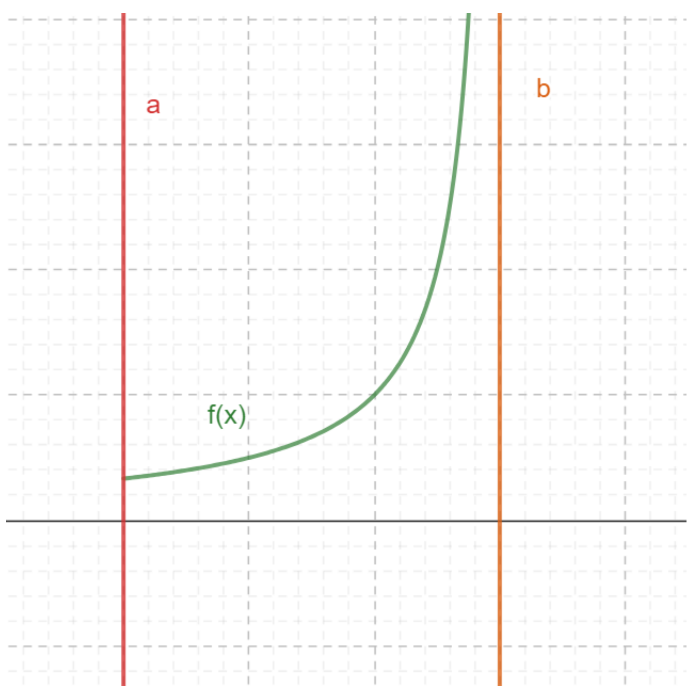


$S_1 = S_2$, но $I_1 = -I_2$. Суммарный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ должен быть равен нулю.
Но по определению $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится
Чтобы учесть обнуление интеграла в ситуации взаимного погашения площадей S_1 и S_2 (а это происходит тогда, когда левый и правый концы промежутка синхронно стремятся к $+\infty$) используют понятие интеграла в смысле главного значения (v. p. - от французского *valeur principale*):
$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\delta \to -\infty} \int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx$
Разложение по формуле Ньютона-Лейбница

Ex. 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{c=0} + \operatorname{arctg} x\Big|_{c=0}^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(0) + \operatorname{arctg}(0) - \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Ex. 2. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{1}^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{0}^{+\infty} = \ln \ln x\Big|_{1}^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \ln \ln x - \lim_{x \to 1} \ln \ln x = \infty - \infty$ – расходится
Заметим нарушение непрерывности функции $\frac{1}{x}$ в $x = 1$, что привело к $\ln \ln x \to -\infty$ при $x \to 1$
Это не интеграл первого рода, а комбинация интегралов первого и второго рода

2.1.2 Интеграл от неограниченной на отрезке функции



Пусть дана $f(x) : [a; b) \to \mathbb{R}$, где b – точка разрыва второго рода, а именно бесконечного

Def. 1. Интеграл второго рода (несобственный)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f(x)dx$$

Этот интеграл сходится, если предел существует и конечен

Def. 2. Аналогично для случая, в которой нижний предел a – точка бесконечного разрыва:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a}\int_\alpha^b f(x)dx$$

Def. 3. Для $c \in [a;b]$ – точка бесконечного разрыва:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Интеграл сходится, если оба интеграла сходятся

Ex. 1. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^0 + \ln|x|\Big|_0^1$ – интеграл расходится
Однако без разбиения в точке 0 интеграл легко считается по формуле N-L, что приводит к ошибке: $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^1 = 0$

Ex. 2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$ – неверно
$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^0 + -\frac{1}{x}\Big|_0^1$ – расходится

Nota. Если нет разбиения $[a;b]$ по аддитивности, то неопределенности раскрываются

Ex. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|)\Big|_1^2 =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|)\Big|_1^2 = \infty$, т. к. разбивается отрезок
$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln(0)\right) = \infty$ - теперь точно ∞

2.2 Свойства

1. Линейность: $\displaystyle\int_a^{+\infty}(\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda\int_a^{+\infty} f(x)dx + \mu\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – если интегралы сходятся (иначе исследуем по определению через предел)
2. Аддитивность: $\displaystyle I = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$ – отсечение любого конечного интеграла $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ не влияет на сходимость

3. Знаки интегралов:
$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$ при $f(x) \le g(x)$. Если $g(x)$ сходится, то $f(x)$ тоже сходится
В частности $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le 0$ при $f(x) \le 0$ на $[a; +\infty]$

Nota. Исследование интегралов двух функций используется для определения их сходимости

2.3 Сходимость несобственных интегралов

Задача: Часто нужно исследовать интеграл на сходимость без или до его вычисления (обычно приближенного для неберущихся интегралов)
Требуются признаки сходимости интегралов, часто использующие сравнение с эталонными интегралами (вычисляемые по формуле Ньютона-Лейбница)

1* **Признак сравнения в неравенствах** (далее только для интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, для остальных аналогично)

$f(x), g(x) : [a; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, непрерывны на $[a; +\infty)$ и $\forall x \in [a; +\infty)$ $f(x) \le g(x)$
Тогда, если сходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx = I \in \mathbb{R}$, то $J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, причем $0 \le \int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$

Прежде чем использовать свойство определенного интеграла и предельный переход в неравенствах, нужно доказать, что интеграл $J = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ сходится
Так как $f(x) \ge 0$, то $\Phi(x) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to \infty$ – монотонно возрастающая функция
При этом:

$$0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le \lim_{b\to+\infty} \int_a^b g(x)dx = I \in \mathbb{R}$$

Поэтому $J(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена и по признаку Вейерштрасса сходится
Можно использовать предельный переход

$$0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \quad \Big|\lim_{b\to+\infty}$$

$$0 \le J \le I$$

Nota. Можно аналогично сравнить функции отрицательного знака

Если сходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ при $g(x) \le f(x) \le 0$, то сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Интегралы от функций разных знаков этим методов не сравниваются

$f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a; +\infty)$, но функции разных знаков, и нижняя площадь, т. е. $\int_a^b |f(x)|dx$, больше верхней

$f(x), g(x) \in C_{[a;+\infty)}$, $0 \le f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a; +\infty)$
$J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится

Lab. (от противного)

Nota. Отметим, что если $f(x)$ не является убывающей к нулю, т. е. бесконечно малой на $+\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ разойдется

Таким образом, если сравнить бесконечно малую $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, то можно исследовать их интегралы на сходимость

2* Предельный признак сравнения

$f(x), g(x) \in C_{[a;+\infty)}$, $f(x), g(x) > 0$
$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ и $J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x > \delta\ \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon$

$-\varepsilon + k < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + k \quad \Big| \cdot g(x) > 0$

$(k - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\varepsilon + k)g(x)$

Т. к. $k > 0$ $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0\right)$ и ε – сколь угодно мало, то $k \pm \varepsilon$ – положительное и не близкое к нулю число

По свойству определенного интеграла: $\int_a^b (k - \varepsilon)g(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b (k + \varepsilon)g(x)dx$

В пределе $\lim\limits_{b\to+\infty}$: $(k - \varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx < \int_a^{+\infty} f(x)dx < (k + \varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx$

Если $I = \infty$ (но $k - \varepsilon \ne 0$), то по первому признаку (линейность) J расходится, что следует из правого неравенства

Если $I \in \mathbb{R}$ ($k + \varepsilon \ne \infty$), то по первому признаку (линейность) J сходится, что следует из левого неравенства

3* Абсолютная сходимость

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx = I \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = J \in \mathbb{R}$$

Nota. Обратное неверно

По условию определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \le \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Очевидно, что $0 \le \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b |f(x)|dx = I$

$$-I \le \int_a^b f(x)dx \le I$$

$$0 \le \lim_{b\to\infty} \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx = I$$

Nota. Если $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то I называют условно сходящимся

Ex. $I = \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{8x^2+3}dx$

$$\int_a^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{8x^2+3}\right| dx = \int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{8x^2+3}dx \underset{|\sin x|\le 1}{\le} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{8x^2+3}dx = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}\Big|_1^{+\infty} \in \mathbb{R}$$

В качестве эталонных интегралов удобно использовать:

I рода: $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$

II рода: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$

<u>Lab.</u> Исследовать на сходимость в зависимости от $n \in \mathbb{Z}(\mathbb{Q})$

3. Интегралы зависящие от параметра

Задача. *Ex.* $(\alpha \neq 0)$. $\int_0^1 \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \cos \alpha x d\alpha x = \frac{1}{\alpha}\sin \alpha x\Big|_0^1 = \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \phi(\alpha)$

$J(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$ - интеграл, зависящий от параметра

$f(x,\alpha)$ непрерывна в $a \le x \le b$, $c \le \alpha \le d$ и существует непрерывная производная f'_α

Тогда на $[c;d]$ определена $J'_\alpha(\alpha) = \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha dx$

Если последний интеграл берется лучше, чем исходный, то теорема полезна

$J'_\alpha(\alpha) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left(\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_a^b f(x,\alpha)dx\right) =$

$= \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left(\int_a^b (f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha))dx\right)$

По теореме Лагранжа о среднем $\exists\xi \in [\alpha;\alpha+\Delta\alpha]$

$= \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f(x,\xi)dx$

Т. к. f'_α непрерывна, то $f'_\alpha(x,\xi) = \lim\limits_{\xi\to\alpha} f'_\alpha(x,\xi) + \varepsilon = f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon$

Таким образом, $J'_\alpha(\alpha) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx + \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b \varepsilon dx = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\xi)dx$