

# Вычислительная геометрия

## Содержание

Вычислительная геометрия .....	1
1. Преобразование изображений. Геометрическое моделирование .....	2
1.1 Основные понятия .....	2
1.2 Модели линейных пространств .....	2
1.3 Геометрические преобразования .....	3
1.4 Линейные операторы .....	4
1.5 Аффинное преобразование .....	5
1.5 Однородные координаты .....	7
1.6 Моделирование плоских линий .....	10
1.6.1 Общие сведения .....	10
1.6.2 Дифференциальные характеристики .....	12

## 1. Преобразование изображений. Геометрическое моделирование

### 1.1 Основные понятия

*Мет.* Линейное пространство – это множество векторов  $V$  с определенными операциями сложения  $+$  и умножения на число  $\cdot \lambda$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , которые удовлетворяют свойствам:

1.-4. свойства абелево-аддитивной группы:

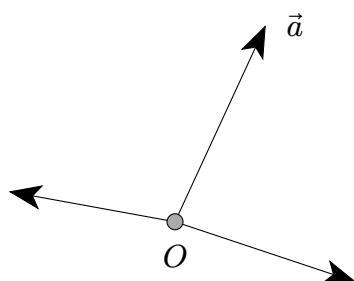
1.  $x + y = y + x$  для  $x, y \in V$
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$  для  $x, y, z \in V$
3. Существует такой  $0$ , что  $x + 0 = x$  для  $x \in V$
4. Для любого  $x \in V$  существует такой  $-x$ , что  $x + (-x) = 0$
5.  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$  для  $x \in V$
6.  $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$  для  $x \in V$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
7.  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  для  $x \in V$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
8.  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$  для  $x, y \in V$  и  $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

В общем случае умножение определено на комплексное число, но мы будем рассматривать вещественные

**Def.** Линейная комбинация векторов  $x, y, z, \dots$  называется сумма  $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \dots$ , где  $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

### 1.2 Модели линейных пространств

Геометрическое



Линейное пространство – направленные отрезки с общим началом

Арифметическое

$$x = (x_1, x_2) \text{ в } \mathbb{R}^2$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \text{ в } \mathbb{R}^3$$

В общем случае  $x = (x_1, \dots, x_n)$  в  $\mathbb{R}^n$

Линейное пространство – множество упорядоченных совокупностей  $n$  чисел

Между этими моделями вводится изоморфизм с помощью базиса, например,  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Тогда всякий геометрический вектор можно преобразовать в арифметический и наоборот:  $\vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} = (x_1, x_2)$

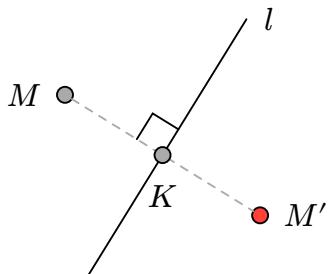
### 1.3 Геометрические преобразования

**Def.** Геометрическое преобразование – это биекция, которая переводит пространство  $\Omega$  в себя

**Def.** Движение – геометрическое преобразование, сохраняющее расстояние между двумя любыми точками (изометрия)

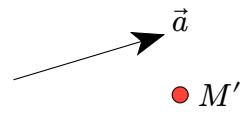
Виды движения на плоскости  $\mathbb{R}^2$ :

1. Осевая симметрия  $S_l$  относительно оси  $l$



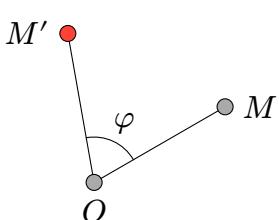
$$M' = S_l(M) \text{ так, что } \begin{cases} MM' \perp l \\ MK = KM' \end{cases}$$

2. Перенос  $T_{\vec{a}}$  на вектор  $\vec{a}$



$$M' = T_{\vec{a}}(M) \text{ так, что } \overrightarrow{MM'} = \vec{a}$$

3. Поворот  $R_O^\varphi$  относительно точки  $O$  на ориентированный угол  $\varphi$



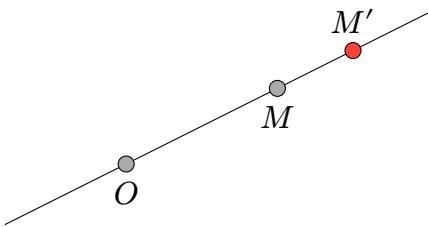
$$M' = R_O^\varphi(M) \text{ так, что } \begin{cases} \angle(MOM') = \varphi \\ OM = OM' \end{cases}$$

Традиционно принимаем положительный угол за поворот против часовой стрелки

**Def.** Конформное преобразование – преобразование, сохраняющее углы

Виды конформных преобразований на плоскости  $\mathbb{R}^2$ :

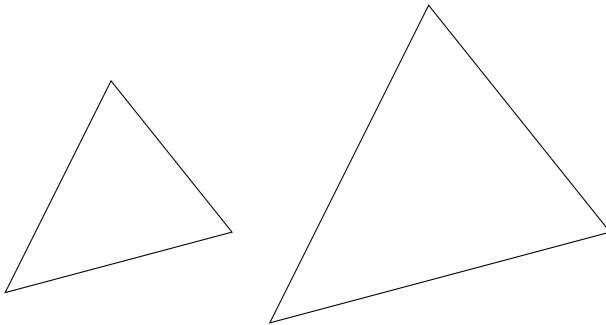
1. Гомотетия  $H_O^k$  относительно точки  $O$  с коэффициентом  $k \in \mathbb{R}$



$$M' = H_O^k(M) \text{ так, что } \begin{cases} M' \in OM \\ \frac{OM'}{OM} = k \end{cases}$$

*Nota.* Если  $k < 0$ , то точки  $M$  и  $M'$  будут по разные стороны от точки  $O$

2. Подобие  $P_k$  с коэффициентом  $k$  – композиция движения и гомотетии  $P_k = F \circ H_O^k$   
(здесь  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ )



#### 1.4 Линейные операторы

**Def.** Линейный оператор  $\mathcal{A}$  – отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  (в общем случае  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ ), для которого соблюдаются свойства:

1.  $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$
2.  $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$

Если для  $V$  определен базис  $\varepsilon_V = \{e_1, \dots, e_n\}$ , а для  $W$  базис  $\varepsilon_W = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ , то действие оператора можно представить так:

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{A}(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m \mu_j e'_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} e'_j$$

**Def.** Матрица  $A = \{a_{ij}\}_{i=1..n, j=1..m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  называется матрицей оператора

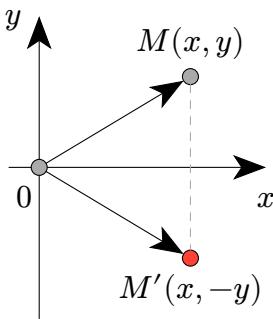
$$\mathcal{A} : V \rightarrow W$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}x = y \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Найдем матрицы геометрических преобразований на  $\mathbb{R}^2$

1. Осевая симметрия  $S_l$

Чаще всего на практике используются  $S_{Ox}$  и  $S_{Oy}$



Для  $S_{Ox}$  это матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

А для  $Oy$  это  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

## 2. Перенос $T_{\vec{a}}$ на вектор

Перенос точки на вектор выносит ее из линейного пространства, где точки имеют общее начало, поэтому перенос не является линейным оператором:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

## 3. Поворот

Активным преобразованием называется поворот плоскости, а пассивным – поворот системы координат. Такие преобразования взаимно обратны

Тогда поворот системы координат задается матрицей  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

А поворот плоскости задается обратной матрицей  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

## 4. Гомотетия

Для гомотетии  $H_O^k$  матрица оператора равна  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

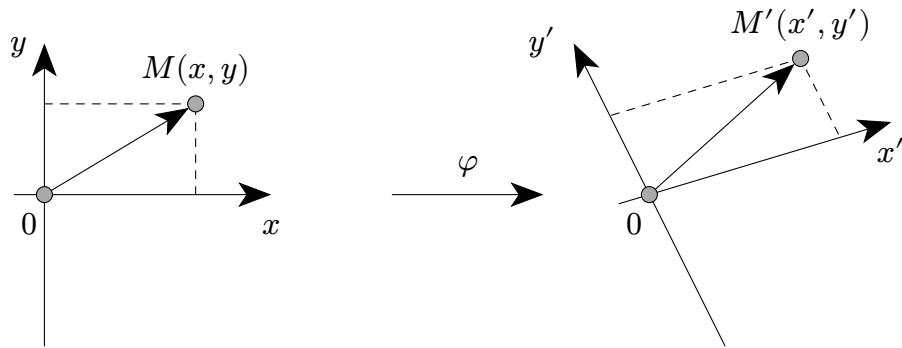
## 1.5 Аффинное преобразование

**Def. 1.** Преобразование  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  называется аффинным преобразованием, если  $\varphi$  – биекция, и для всяких точек на прямой  $A, B, C \in l$  справедливо, что  $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \in \varphi(l)$  и  $\frac{AB}{BC} = \frac{\varphi(A)\varphi(B)}{\varphi(B)\varphi(C)}$

*Nota.* Аффинное преобразование не сохраняет углы и расстояния, но сохраняет параллельность

*Nota.* Кроме этого все треугольник аффинно-эквивалентны, то есть один треугольник можно перевести в любой другой с помощью аффинного преобразования

**Def. 2.** Преобразование  $\varphi$  – аффинное преобразование, если оно переводит одну систему координат в другую систему координат



*Met.* Система координат – это определенные точка отсчета, координатная сетка, порядок осей и единичные отрезки

Для дальнейшего нам потребуются уравнения прямых:

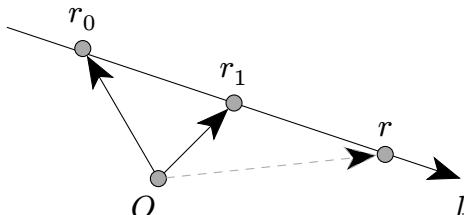
1. По двум точкам на плоскости:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0$$

2. По коэффициентам на плоскости:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$$

3. Векторное:  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}t$ , где  $t$  – параметр



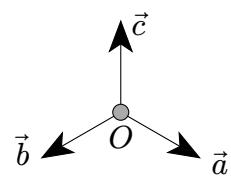
$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t$$

Также нам понадобятся:

- Уравнения плоскостей в пространстве
- Уравнения кривых второго порядка, специальных кривых (спирали, гипоциклоиды)
- Индикатор ориентации

$$Met. \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \vec{c} : \begin{cases} |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \\ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - \text{правая тройка векторов} \end{cases}$$

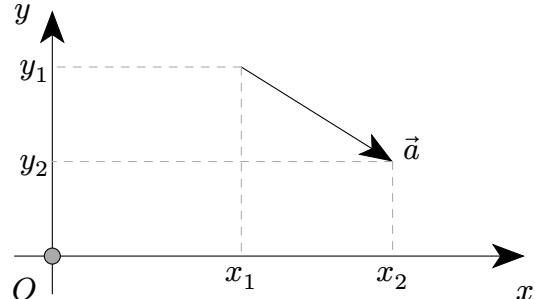


**Def.** Псевдоскалярное (или косое) произведение  $\vec{a} \vee \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} \pm |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$ , причем со знаком плюс, если угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  положителен (то есть против часовой), и со знаком минус, если угол отрицателен (то есть по часовой)

## 1.5 Однородные координаты

*Мет.* В плоскости  $\mathbb{R}^2$  существует линейное пространство направленных отрезков. Проблема состоит в том, что нам нужно представить вектор с другим началом

Тогда такие вектора можно представить двумя точками



Чтобы работать с точками, а не векторами с общим началом  $O$ , обобщим понятие линейного пространства. Тогда понятие линейного пространства обобщается до аффинного, где элементы – это точки, а не векторы

**Def.** Пространство  $\mathcal{A}$  – аффинное пространство, ассоциированное с линейным пространством  $V$ , если:

1. Заданы аксиомы для  $V$
2. Существует  $f : \mathcal{A} \rightarrow V$  такое, что для всякой пары сопоставляется вектор из линейного:  $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad f(A, B) = \overrightarrow{AB} \in V$
3. Для всяких  $A \in \mathcal{A}$  и  $\vec{a} \in V$  существует единственная  $B \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AB} = \vec{a}$
4. Для всяких точек  $A, B, C \in \mathcal{A}$  справедливо, что  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

В аффинном пространстве  $\mathcal{A}$  можно ввести аффинные преобразования. Те, что не связаны с переносом, можно считать линейными в пространстве  $V$ :

1. Осевая симметрия  $S_l$ , если  $O \in l$
2. Поворот  $R_O^\varphi$
3. Гомотетия  $H_O^k$

Их можно представить в виде матрицы. Но перенос выводит из линейного пространства. Нам нужно все преобразования свести к алгебраическому действию  $x' = \mathcal{F}x$ , где  $\mathcal{F}$  – преобразование с матрицей  $F$

Движение плоскости и гомотетия дают формулу:

$$X' = FX + T_{\vec{a}}$$

Вместо

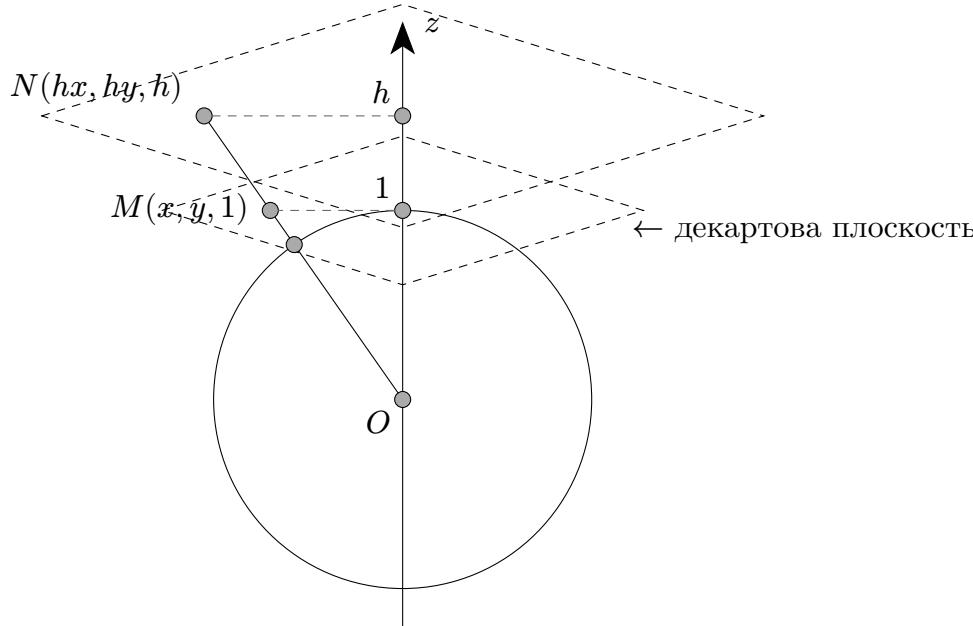
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

рассмотрим векторы с добавленной координатой  $z = 1$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & x_0 \\ f_{21} & f_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}x + f_{12}y + x_0 \\ f_{21}x + f_{22}y + y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Координаты  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$  называют однородными

Геометрическая интерпретация – стереографическая проекция Римана



Далее происходит центральное проектирование на плоскость  $z = h$ ,  $p(x, y) \rightarrow N(hx, hy, h)$

Таким образом, каждой точке декартовой плоскости ставится в соответствии точка сферы, а она центрально проектируется на плоскость  $z = h$ , где  $h$  отвечает за масштаб. В результате точкам декартовой плоскости  $(x, y)$  соответствуют точки  $(x, y, 1) = (hx, hy, h)$ , а однородные координаты  $(x, y, 0)$  представляют бесконечно удаленную точку декартовой плоскости в направлении вектора  $\vec{a} = (x, y)$

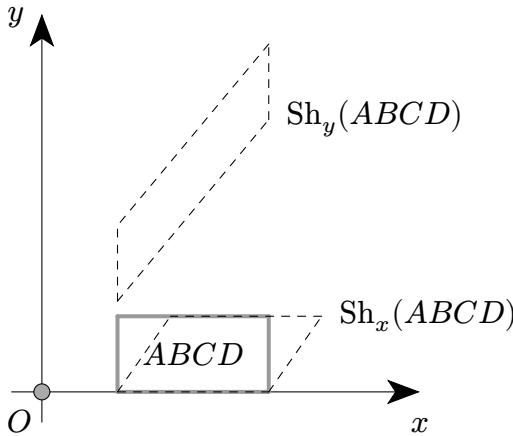
Рассмотрим матрицы преобразований в однородных координатах:

$$F = \begin{pmatrix} a & b & m \\ b & d & h \\ p & q & s \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  представляет композицию из симметрии, поворота, гомотетии и сдвига

**Def.** Сдвиг (shear)  $\text{Sh}_x$  – наклонной перекос такой, что  $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$ , а  $k = \text{sh}_x$

Аналогично по оси  $Oy$  сдвиг  $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \operatorname{sh}_y x \end{cases}$



Вектор  $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$  – вектор переноса  $T_{(m,n)}$ , число  $s$  – масштаб

Рассмотрим смысл  $(p, q)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ px + qy + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ h \end{pmatrix}$$

При фиксированных  $p$  и  $q$  выражение  $h = px + qy + 1$  задает наклонную плоскость в трехмерном пространстве, что позволяет изменять перспективу. На этом курсе операции, использующие  $p$  и  $q$ , рассматриваться не будут

Рассмотрим частные виды преобразований:

- Перенос  $T_{m,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Поворот  $R_O^\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Симметрия по оси  $S_{Ox} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Симметрия по биссектрисе  $S_{x=y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Сдвиг  $\operatorname{Sh}_x = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sh}_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Ex.** Дан  $\triangle ABC$  с вершинами в координатах  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ . Найти  $\triangle A'B'C' = \mathcal{F}(\triangle ABC)$

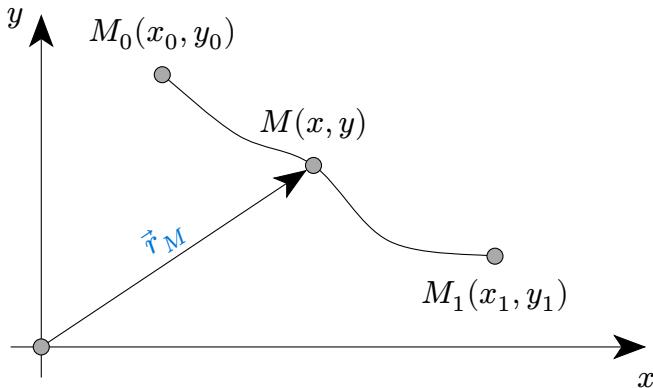
Найдем матрицу координат вершин  $\triangle ABC$ : 
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразование осуществляется так:

$$\begin{pmatrix} a & b & m \\ b & d & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 1.6 Моделирование плоских линий

### 1.6.1 Общие сведения



Пусть  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  – базис (в частности  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  – декартов)

Радиус-вектор точки кривой  $\gamma$  определяется как  $\vec{r}_M = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

Чаще всего кривая  $\gamma$  ориентирована так, что задана начальная точка  $M_0(x_0, y_0)$  и пара уравнений  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ , где  $t \in [t_1, t_2]$ . Интервал  $[t_1, t_2]$  задают ориентацию

Таким образом,  $\gamma$  может быть задана:

- параметрически  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$
- общим уравнением  $f(x, y) = 0$

Рассмотрим задания простых кривых:

#### 1. Прямая

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = t\vec{r}_1 + \vec{r}_0(1 - t)$$

Последнее выражение полезно, так как для  $t \in [0, 1]$  уравнение задает отрезок

$$M_0M_1: \vec{r}(t) |_{t=0} = \vec{r}_0, \vec{r}(t) |_{t=1} = \vec{r}_1$$

#### 2. Окружность

Параметрическое уравнение:  $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$  для  $t \in [0, 2\pi)$

$$\text{Радиус-вектор задается как } \vec{r}(t) = R(\vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t) = R(\cos t, \sin t)$$

3. Кривая второго порядка в общем виде

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

При этом один или более из коэффициентов  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  не равны нулю

Коэффициенты кривой можно представить в виде матрицы:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Коэффициенты  $a_{13}$  и  $a_{23}$  отвечают за перенос кривой, а  $a_{33}$  за масштаб

В однородных координатах  $\vec{r} = (x, y) \rightarrow (x, y, 1)$  получаем:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \end{pmatrix}$$

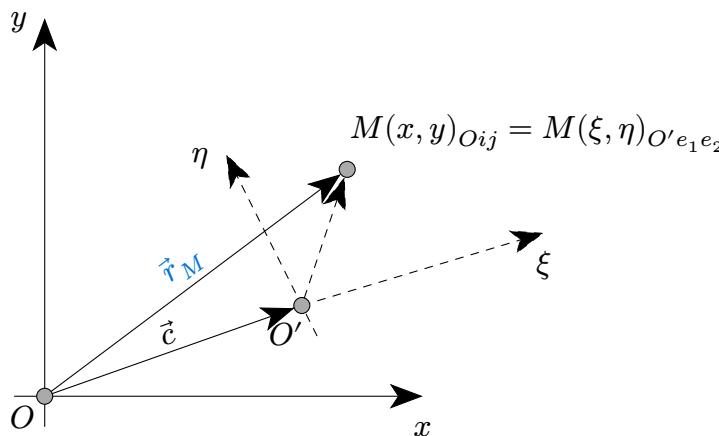
Если слева домножить на вектор-строку  $(x, y, 1)$ , то получим:

$$\begin{aligned} (x, y, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}x + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{23}y + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \\ &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \end{aligned}$$

Тогда общее уравнение кривой второго порядка в матричном виде записывается

как  $(x, y, 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

*Nota.* Пусть есть аффинный базис  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . Нужно перевести координаты точки  $M(\xi, \eta)$  из нового базиса  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  в координаты  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  из нового базиса  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$



Радиус-вектор точки в базисе  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  равен  $\vec{r}_M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{e}_1 + \eta \vec{e}_2 + \vec{c}$ . Здесь  $\vec{c}$  – смещение начал координат

В однородных координатах это выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e_{1x} \\ \xi e_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta e_{2x} \\ \eta e_{2y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & c_1 \\ e_{1y} & e_{2y} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Здесь  $P = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & c_1 \\ e_{1y} & e_{2y} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  – матрица аффинного преобразования, где  $\begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} \\ e_{1y} & e_{2y} \end{pmatrix}$  – матрица приведения из базиса  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  в базис  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

Такая матрица не меняет инварианты, поэтому можно делать подобные преобразования кривых:

$$(x, y, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \implies (\xi, \eta, 1) P A P^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

**Def.** Инварианты кривой второго порядка – выражения, значения которых остаются постоянными при применении аффинных преобразований:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Тип кривой определяется по инвариантам:

- Если  $I_2 > 0$ , то кривая эллиптического типа
- Если  $I_2 < 0$ , то кривая гиперболического типа
- Если  $I_2 = 0$ , то кривая параболического типа

### 1.6.2 Дифференциальные характеристики

Мем. Для кривой  $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

- Гладкость кривой – непрерывная дифференцируемость  $x(t)$  и  $y(t)$ , то есть для всякой  $M \in \gamma$  существуют  $\frac{dy}{dx} = \varphi(t)$ , которая непрерывная
- Касательная – вектор (или прямая), имеющая одну общую точку с кривой в окрестности

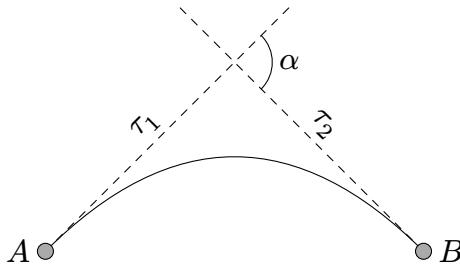
Если кривая задается как  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ , то касательная задается как производная:

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

- Нормаль – перпендикуляр к кривой в точке. Вектор нормали задается как перпендикулярный к касательной:  $\vec{n} \perp \vec{r}'$
- Длина дуги (элемента):  $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = |\vec{r}'(t)| dt$

Рассмотрим новые характеристики для кривой:

- Кривизна кривой в точке



Касательная  $\tau_1$  переходит в  $\tau_2$  при  $A \rightarrow B$ , поворачиваясь на угол  $\alpha$  – угол смежности

Средняя кривизна на дуге  $\bar{AB}$  равна  $K_{\text{cp}} = \frac{\alpha}{|\bar{AB}|}$

**Def.** Кривизна кривой  $\gamma$  в точке  $A$  определяется как  $K_A = \lim_{\substack{B \rightarrow A \\ \text{по } \bar{AB}}} K_{\text{cp}} = \lim_{|\bar{AB}| \rightarrow 0} \frac{\alpha}{|\bar{AB}|}$

**Ex.** Окружность

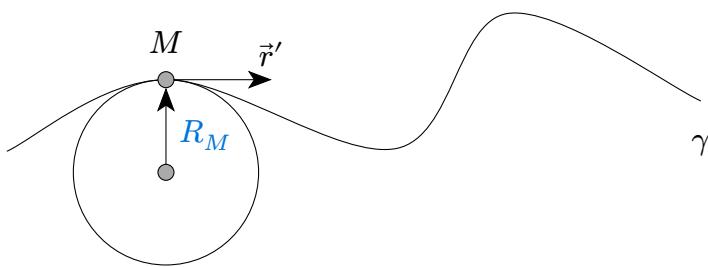
$$\angle AOB = \alpha, |\bar{AB}| = \alpha R, \text{ тогда } K_A = \lim_{B \rightarrow A} \frac{\alpha}{\alpha R} = \frac{1}{R}$$

- Радиус кривизны

**Def.** Величина  $\frac{1}{K_A} = R_A$ , обратная кривизне в точке, называется радиусом кривизны в точке

*Nota.* У окружности радиус кривизны совпадает с ее собственным радиусом.

Сама окружность – линия постоянной кривизны. Другая такая линия постоянной кривизны – прямая, где кривизна равна 0



- Центр кривизны

**Def.** Центр кривизны кривой  $\gamma$  в точке  $M$  – это точка на нормали к  $\gamma$  в точке  $M$  на расстоянии  $R_M$  от  $M$ , находящаяся в той полуплоскости, разделенной касательной, что и окрестность кривой

**Def.** Эволюта кривой – множество центров кривизны

Для характеристик можно выразить другие формулы:

- Кривизна  $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \varphi'(s) = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{ds} \stackrel{t=x}{=} \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} - \text{угол касательной}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$$

$$K = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{В параметрическом задании } K = \frac{|y''_t x'_t - y'_t x''_t|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- Центр кривизны:  $\begin{cases} x_0 = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \\ y_0 = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \end{cases}$