

## Лекция 6

### Случайные величины

Примеры случайных величин:

*Ex. 1.* Бросаем кость, может выпасть 6 граней, здесь случайная величина  $\xi$  - число выпавших очков

*Ex. 2.*  $\xi$  - время работы микросхемы, в этом случае время может быть:

а) дискретным -  $\xi \in \{0, 1, 2, \dots\}$

б) непрерывным -  $\xi \in [0; \infty)$

*Ex. 3.* Температура за окном:  $\xi \in (-50, +50)$

**Def.** На вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $\mathcal{F}$ -измеримой, если  $\forall x \in \mathbb{R} \{ \omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x \} \in \mathcal{F}$  (то есть  $\xi^{-1}(y) \in \mathcal{F}$ , где  $y \in (-\infty; x)$ )

**Def.** Случайной величиной, заданной на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , называется  $\mathcal{F}$ -измеримая функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , которая сопоставляет каждому элементарному исходу некоторое вещественное число

*Nota.* Не все функции являются  $\mathcal{F}$ -измеримыми

*Ex.* Кость:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$

Пусть  $\xi(\omega) = i$  - число выпавших очков. Тогда при  $x = 4$ :  $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{F} \implies$  случайная величина не является  $\mathcal{F}$ -измеримой

В данном случае следует сделать  $\xi$  таким, что  $\xi(2) = \xi(4) = \xi(6) = 1$ ,  $\xi(1) = \xi(3) = \xi(5) = 0$

*Nota.* Смысл измеримости: если задана случайная величина  $\xi$ , то мы можем задать вероятность попадания случайной величины в интервал  $(-\infty; x)$ :  $p(\xi \in (-\infty; x)) = p(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\})$

А из интервалов  $(-\infty; x)$  с помощью операций пересечения, объединения и дополнения можно получить все другие интервалы (включая точки) и также приписать им вероятности

Из матанализа известно, что мера из интервалов однозначно продолжается до меры на всей Борелевской  $\sigma$ -алгебре на  $\mathbb{R}$  и, таким образом, с помощью случайной величины каждому Борелевскому множеству  $B$  также приписывается вероятность  $p(\xi \in B)$

Итак, пусть  $\xi$  задана на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , с помощью нее получаем новый вероятностное пространство  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_\xi)$

Получая новое вероятностное пространство, мы упрощаем и формализуем работу, так как можем не учитывать природу и структуру исходного пространства

**Def.** Функция  $p(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , ставящая в соответствие каждому Борелевскому множеству

вероятность, называется распределением случайной величины  $\xi$

## Основные типы распределения

- a) Дискретное
- b) Абсолютно непрерывное
- c) Сингулярное
- d) Смешанное

## Дискретная случайная величина

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет дискретное распределение, если она принимает не более, чем счетное число значений. То есть существует конечный или счетный набор чисел

$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  такой, что  $p(\xi = x_i) = p_i > 0$  и  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$

Таким образом, дискретная случайная величина (ДСВ) задается законом распределения:

$\xi$	$x_1$	$x_1$	$\dots$	$x_n$	$\dots$	- значения случайной величины
$p$	$p_1$	$p_1$	$\dots$	$p_n$	$\dots$	- вероятности этих значений

$(\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$  - условие нормировки)

Ex. 1. кость,  $\xi(\omega) = i$  - число выпавших очков

$\xi$	1	2	3	4	5	6
$p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ex. 2. все распределения из предыдущих лекций (биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, Пуассона)

Ex. 3. индикатор события  $A$ :  $I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A - \text{событие } A \text{ не происходит} \\ 1, & \omega \in A - \text{событие } A \text{ происходит} \end{cases}$

## Числовые характеристики дискретных случайных величин

### I. Математическое ожидание (среднее значение, полезность)

**Def.** Математическим ожиданием  $E\xi$  случайной величины  $\xi$  называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

при условии, что данный ряд сходится абсолютно

*Nota.* Если  $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \infty$ , то говорят, что матожидание не существует

При условной сходимости ряда при перестановке членов сумма изменяется, поэтому необходима абсолютная

**Физический смысл:** Среднее значение - число, вокруг которого группируются значения случайной величины, центр тяжести точек  $x_i$  с весами  $p_i$

**Статистический смысл:** среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины при большом числе реальных экспериментов

## II. Дисперсия

**Def.** Дисперсией  $D\xi$  случайной величины  $\xi$  называют среднее квадратов ее отклонения от математического ожидания:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 \text{ или } D\xi = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E\xi)^2 p_i \text{ при условии, что данный ряд сходится}$$

В противном случае говорится, что дисперсии не существует

*Nota.* Дисперсию обычно удобно считать по формуле  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E\xi^2$

**Смысл** - квадрат среднего разброса (рассеивания) значения случайной величины относительно ее математического ожидания

## III. Среднее квадратическое отклонение

**Def.** Средним квадратическим отклонением (СКО)  $\sigma_\xi$  называется величина  $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

**Смысл** - средний разброс

*Ex. 1.* Кость

$\xi$	1	2	3	4	5	6
$p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E\xi = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = 3.5 \text{ (в данном случае ср. арифм.)}$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^6 (x_i - E\xi)^2 p_i = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 = \frac{35}{12}$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} \approx 1.79$$

*Ex. 2.* Индикатор события  $A$ :  $I_A(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \notin A - \text{событие } A \text{ не происходит} \\ 1, \omega \in A - \text{событие } A \text{ происходит} \end{cases}$

$\xi$	0	1
$p$	$1 - P(A)$	$P(A)$

$$E\xi = 0 \cdot (1 - P(A)) + 1 \cdot P(A) = P(A)$$

$$D\xi = 0^2 \cdot (1 - P(A)) + 1^2 P(A) - P(A)^2 = P(A)(1 - P(A)) = pq$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{pq}$$

## Свойства матожидания и дисперсии

**Th. 1.** Случайная величина  $\xi$  имеет вырожденное распределение, если  $\xi(\omega) = \text{const} \quad \forall \omega \in \Omega$

$\xi$	$C$
$p$	$1$

$E\xi = C \quad D\xi = 0$

**Th. 2.** Свойство сдвига:  $E(\xi + C) = E\xi + C$ ;  $D(\xi + C) = D\xi$

**Th. 3.** Свойство растяжения:

$$E(C\xi) = CE\xi$$

$$D(C\xi) = C^2 D\xi$$

Lab. 2-3 доказать

**Th. 4.**  $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$  (из третьего свойства матожидание - линейная функция)

□

□  $x_i, y_i$  - значения случайных величин  $\xi, \eta$ , а  $p_i$  и  $q_i$  - их соответствующие вероятности

$$E(\xi + \eta) = \sum_{i,j} (x_i + y_j) p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) + \sum_j y_j \sum_i p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) = \sum_i x_i p(\xi = x_i) + \sum_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi + E\eta$$

□

**Def.** Дискретные случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, если  $p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i) \cdot p(\eta = y_j) \quad \forall i, j$

То есть случайные величины принимают свои величины независимо друг от друга

**Th. 5.** Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$ ; обратное неверно

□

$$E(\xi\eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi = x_i) p(\eta = y_j) =$$

$$\sum_i x_i p(\xi = x_i) \sum_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi \cdot E\eta$$

**Th. 6.**  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

□

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E((E\xi)^2) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

□

**Def.**  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$ , где  $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$  - ковариация случайных величин (равна 0 при независимых величинах) - индикатор наличия связи между случайными величинами

□

$$D(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^2 - (E(\xi + \eta))^2 = E\xi^2 + 2E(\xi\eta) + E\eta^2 - (E\xi + E\eta)^2 = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E(\xi\eta) - (E\xi)^2 - (E\eta)^2 - 2E\xi E\eta = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

□

**Th. 7.** Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

□

Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$  и  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

□

**Th. 8.** Общая формула дисперсии суммы:  $D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i,j (i \neq j)} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$

## Другие числовые характеристики

Моменты старших порядков

а)  $m_k = E\xi^k$  - момент  $k$ -ого порядка случайной величины  $\xi$  (также называют начальным моментом)

б)  $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$  - центральный момент  $k$ -ого порядка

$E\xi = m_1$  - момент первого порядка

$E\xi^2 = m_2$  - момент второго порядка

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$  - центральный момент второго порядка

*Nota.* Центральные моменты можно выразить через обычный момент:

$$\mu_2 = D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = m_2^2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_2 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

*Ex.* Разберем задачу Бюффона с точки зрения матожидания (для простоты  $l$  - ширина доски): пусть  $p(A)$  - пересечет стык,  $\xi = I_A$  - число пересечений. Тогда матожидание  $E\xi = EI_A = P(A)$ . Заметим, что при изменении длины иглы с  $l$  до  $2l$  матожидание пересекаемых стыков увеличивается в два раза. Помимо этого можно составить из  $k$  игл ломаную, матожидание стыков которой будет равно  $kE\xi$

Заметим, что такое работает и в обратную сторону: при уменьшении иглы в  $k$  раз матожидание равно  $\frac{E\xi}{k}$

Теперь сделаем замкнутый многоугольник из игл, получим, что матожидание в таком случае  $P\frac{E\xi}{l}$ , где  $P$  - периметр

В пределе строим круг диаметра  $l$  - он всегда пересечет линии стыка 2 раза, значит матожидание  $E_o = P_o \frac{E\xi}{l} = 2$

Длина окружность  $P_o = \pi l$ , получаем  $E\xi = \frac{2l}{P_o} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$