

## 1.4. Комплексная функция

### 1° Определение

*Mem.*  $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{\iff}$  отображение такое, что  $\forall x \in E \exists! y \in D \mid y = f(x)$

**Def.**  $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{\iff}$  отображение такое, что  $\forall z \in D \exists w \in G \mid f(z) = w$

**Def.** Если  $\forall z \in D \exists! w \in G$ , то  $f$  называется однозначной функцией

**Def.** Если  $\forall z_1, z_2 \in D (z_1 \neq z_2) \implies f(z_1) \neq f(z_2)$ , то  $f$  называется однолистной функцией

*Ex. 1.*  $w = \sqrt{z}$  - неоднозначная функция

$$\square z = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{1} \left( \cos \frac{2\pi k}{2} + i \sin \frac{2\pi k}{2} \right)$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = -1$$

*Ex. 2.*  $w = z^2$  - однолистная функция

$$z_1 = 1, z_2 = -1 \quad w(z_1) = w(z_2) = 1$$

*Nota.* Если  $f(z)$  однозначна и однолистка, то  $f(z)$  - взаимно однозначное соответствие (биекция).

Тогда  $\exists g(x) \mid g(f(x)) = x$

Комплексную функцию  $f(z)$  можно представить как  $u(x, y) + iv(x, y)$ , где  $x + iy = z$

$$\text{Ex. } w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$$

$$u(x, y) = (x^2 - y^2), \quad v(x, y) = 2xy$$

### 2° Предел

**Def.**  $L \in \mathbb{C}, f : D \longrightarrow G, \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid z \in D, z \in U_\delta^\circ(z_0) \implies f(z) \in U_\varepsilon(L)$

В определении существование и значение  $L$  не должно зависеть от пути, по которому  $z$  приближается к точке сгущения  $z_0$ . Может быть так, что для любого направления стремления предел есть, но в общем смысле не существует

$$\text{Ex. } f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right) \quad \square z = \rho e^{i\varphi}$$

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}} - \frac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} \right) = \frac{1}{2i} (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}) = \frac{1}{2i} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi - \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = \sin 2\varphi$$

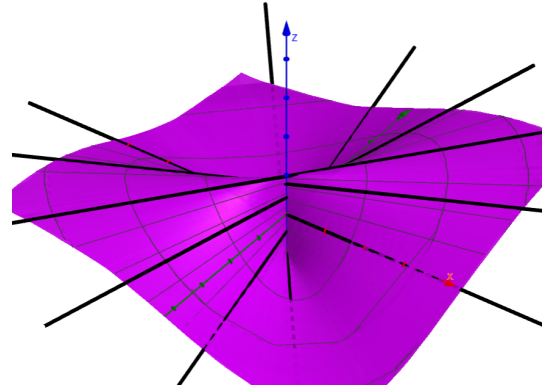
Зафиксируем  $\varphi = \varphi^* \in [0; 2\pi)$ , тогда  $\sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi = \varphi^*}} f(z) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi = \varphi^*}} \sin 2\varphi = \sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$$

Значения предела занимает отрезок  $[-1; 1] \Rightarrow$

$$\nexists \lim_{z \rightarrow 0} f(z)$$

На рисунке изображена  $\sin 2\varphi$ , на оси  $Oz$  изображена  $\text{Re} w$ . Черные линии - это возможные пути приближения  $z$  к 0



*Nota.* Путь следования предела аналогичен левостороннему и правостороннему пределами  $\mathbb{R}$ -функций

**Def. Непрерывность функций в точке  $z_0$ .**

$f : D \rightarrow G, z_0 \in D, f(z)$  называется непрерывной в  $z_0$ , если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

На языке приращений:  $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$

$$\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta \rho \rightarrow 0$$

### 3° Элементарные комплексные функции

*Ex. 1.* Линейная  $f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$

Эта функция однозначная, однолистная  $\Rightarrow \exists f^{-1}(z) = g(z) = \frac{z - b}{a}$

Геометрический смысл:

$$a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$$

$az = |a||z|(\cos(\varphi_a + \varphi_z) + i \sin(\varphi_a + \varphi_z))$  - поворот и растяжение ( $\varphi_a = \arg a, \varphi_z = \arg z$ )

$az + b = (x_{az} + x_b) + i(y_{az} + y_b)$  - сдвиг

То есть линейная функция - композиция из поворота, растяжения и сдвига

*Ex. 2.* Степенная  $w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$  - однозначная, может быть неоднолистной

Для  $n \in \mathbb{Q}$  функция становится неоднозначной

$$\text{Ex. } w = z^2 \quad z = \rho e^{i\varphi}, w = \rho^2 e^{2i\varphi}$$

Пусть  $z_1 \neq z_2$  и  $w(z_1) = w(z_2)$ , тогда  $\arg z_1 = \arg z_2 \pm \pi$

$$w(z_1) = \rho^2 e^{2i \arg z_1} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + 2\pi k)}$$

$$w(z_2) = \rho^2 e^{2i \arg z_2} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + \pi)} = \rho^2 e^{i(2 \arg z_1 + 2\pi)} = w(z_1)$$

Область однолистности  $z^2$  - множество точек, для которых  $\arg z \in [0; \pi)$

Точку  $w = 0$  называют точкой разветвления

Ex.  $w = z^{-1} = \frac{1}{z}$   $w(0) = \infty, w(\infty) = 0$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  - функция обратима

$$w = re^{i\psi} = \frac{1}{\rho e^{i\phi}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \implies |w| = \frac{1}{|z|}, \arg w = -\arg z$$

Преобразование  $|w| = \frac{1}{|z|}$  называется инверсией, а  $\arg w = -\arg z$  дает симметрию относительно  $\text{Re} z$

Ex. 3. Рациональная  $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \quad n, m \in \mathbb{N}$

Ex. 4. Показательная  $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

Свойства:

1.  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
2.  $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$
3.  $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$  - показательная функция периодична с периодом  $2\pi i$

Ex. 5. Логарифмическая  $w = \text{Ln} z$

Если  $e^w = e^{u+vi} = e^u (\cos v + i \sin v) = z = |z| e^{i \arg z}$ , то  $u = \ln |z|$ ,  $v = \arg z + 2\pi k$

Тогда  $\boxed{\text{Ln} z = \ln |z| (\cos(\arg z + 2\pi k) + i \sin(\arg z + 2\pi k))}$

$\ln z = \text{Ln} z$  при  $k = 0$  - т. н. главное значение

