

Содержание

| | |
|---|-----------|
| §1. Ряды | 2 |
| 1. Числовые ряды. Определения | 2 |
| 2. Свойства числовых рядов | 3 |
| 3. Условия сходимости рядов | 6 |
| 3.1. Необходимое | 6 |
| 3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия) | 6 |
| 3.3. Достаточное условие (признаки сходимости) | 6 |
| 4. Знакопеременные ряды | 10 |
| §2. Функциональные ряды | 13 |
| 1. Определения | 13 |
| 2. Степенные ряды | 16 |
| 3. Ряд Тейлора | 18 |
| 3.1. Стандартные разложения элементарных функций | 19 |
| 3.2. Приложения | 21 |
| 4. Ряды Фурье | 21 |
| 4.1. Определение | 21 |
| 4.2. Оценка коэффициентов Фурье | 26 |
| 4.3. Интеграл Фурье | 27 |
| Х. Программа экзамена в 2024/2025 | 29 |
| Х.1. Числовые ряды. | 29 |
| Х.2. Функциональные ряды. | 31 |

§1. Ряды

1. Числовые ряды. Определения

Mem. Числовая последовательность: $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}, u_n \in \mathbb{R}$

Ex. 1. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: $u_n = bq^n$, $\frac{1}{2^n} \stackrel{n=0,1,\dots}{=} \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$

Ex. 2. $u_n = 1, -1, 1, -1, \dots$

Def. $\{u_n\}$ - последовательность

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ называется числовым рядом

Nota. Начальное значение n произвольно (целое)

Ex. $u_n = \frac{1}{(n-4)^3}, \quad n = 5, 6, \dots$

$u_n = \frac{1}{n^3}, \quad n = 2024, 2025, \dots$

Nota. u_n называется общим членом ряда

Nota. Существует ли сумма $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и в каком смысле?

Ex. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$ - существует, но бесконечная

Ex. 4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \begin{cases} 0 + 0 + \dots = 0 \\ 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{cases}$

Ex. 5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$

Def. Частичная сумма ряда $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n u_k$

Nota. Последовательность частичных сумм - $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$

Ex. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$S_1 = u_1 = 1 \quad S_2 = \frac{3}{2} \quad S_3 = \frac{7}{4} \quad S_4 = \frac{15}{8}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$, но проблема заключается в том, что бы найти формулу для S_n

Def. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называют сходящимся, а S называют суммой ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$

Nota. В противном случае ряд расходится, суммы не может быть или она бесконечна

Ex. Поиск суммы по определению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Nota. При исследовании на сходимость используются эталонные ряды

Ex. Геометрический ряд (эталонный): $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^n bq^k = b(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = b \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Исследуем предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$:

$$|q| < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^{n+1}) = \frac{b}{1 - q}$$

$$|q| > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \quad (q^n \rightarrow \infty)$$

$$|q| = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b \frac{0}{0} ? \quad \sum_{n=0}^{\infty} bq^n = \sum_{n=0}^{\infty} b = \infty \quad (b \neq 0)$$

$$q = -1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} b(-1)^n - \text{расходится (из четвертого примера)}$$

Lab. Доказать при $q = -1$ по def ($S_n = ?$)

2. Свойства числовых рядов

Nota. Свойства рядов используются в арифметических операциях с рядами и при исследовании на сходимость

Th. 1. Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но влияет на сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ и } \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n \text{ одновременно сходятся или расходятся}$$

□

$$S_n^u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$$

$$S_n^v = \sum_{n=k}^{\infty} v_n \quad u_n = v_n \quad \forall n \geq k$$

$$S_n^u = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1}}_{\sigma \in \mathbb{R}} + \underbrace{u_k + \dots + u_n}_{S_n^v} = \sigma + S_n^v$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^u = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma + S_n^v) = \sigma + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^v$$

Оба предела либо существуют (либо конечны, либо нет), либо не существуют

□

Th. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Тогда $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$

□ По свойству пределов □

Th. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$ - сходится

□ По свойству пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S \pm \sigma$ □

Nota. Обратное неверно! Теорема разрешает складывать и вычитать сходящиеся ряды, но из сходимости суммы рядов не следует сходимость каждого из них

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, но: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходятся

Nota. Докажем расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Ex. Гармонический ряд (эталонный)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

А так как нижний ряд почленно меньше верхнего, а нижний расходится, то и верхний расходится

Так как $u_n \geq v_n$, то $S_n \geq \sigma_n$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot n \rightarrow \infty \implies S_n \rightarrow \infty$$

Th. 4. Если ряд сходится к числу S , то члены ряда можно группировать произвольным образом, не переставляя, и сумма всех рядов будет равна S

Группировка означает выделение различных подпоследовательностей из последовательности частичных сумм

□

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} S_n^{(k)} = S$, где $S_n^{(k)}$ - подпоследовательность S_n

□

$$Ex. \text{ Было } \sum (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \text{ так как ряд расходится}$$

Nota. В условиях **Th.** важно, что переставлять члены ряда нельзя

$$Ex. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots$$

Далее будет доказано, что этот ряд сходится

Найдем сумму, переставив члены ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) + \dots$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = \frac{1}{2} S \quad ?!$$

Nota. Можно доказать, что в подобных рядах перестановкой членов можно получить любое наперед заданное число

Nota. Сходящиеся ряды допускают умножение, но почленное. В действительности используют формулы перемножения рядов (см. литературу)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$$

$$\text{Тогда } \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = S\sigma$$

3. Условия сходимости рядов

3.1. Необходимое

$$\text{Th. } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

□

Nota. Обратное неверно! (см. гармонический ряд)

$$\text{Ex. } \sum_{n=1}^{\infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 \neq 0$$

3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия)

Мет. Критерий Коши для последовательности:

$$\{x_n\} \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

$n_0 = n_0(\varepsilon)$

Th. (без док-ва)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad \begin{matrix} |u_{n+1} + \dots + u_m| < \varepsilon \\ |S_m - S_n| < \varepsilon \end{matrix}$$

Nota. Хвост ряда попадает в ε -трубу

Nota. Критерий не удобен для непосредственного исследования на сходимость, в отличие от признаков

3.3. Достаточное условие (признаки сходимости)

Здесь мы рассмотрим:

1. Признак сравнения (в неравенствах)
2. Предельный признак сравнения
3. Признак Даламбера
4. Признак Коши (радикальный)

5. Признак Коши (интегральный)

Далее $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый ряд, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - вспомогательный (уже исследован на сходимость),
для простоты $v_n, u_n > 0$ (для отрицательных доказывается аналогично)

Th. 1. Признак сравнения (в неравенствах)

а) $\exists 0 < u_n \leq v_n$. Тогда $\sum v_n$ сходится $\Rightarrow \sum u_n$ сходится

б) $\exists 0 \leq v_n \leq u_n$. Тогда $\sum v_n$ расходится $\Rightarrow \sum u_n$ расходится

□

а) Строим частичные суммы:

$$\sum v_n \text{ сходится} \iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$$

S_n, σ_n возрастают и обе ограничены числом σ

Следовательно $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq \sigma$

Аналогично пункт б)

□

Th. 2. Предельный признак

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \begin{cases} \sum u_n \text{ сходится, если } \sum v_n \text{ сходится} \\ \sum u_n \text{ расходится, если } \sum v_n \text{ расходится} \end{cases}$$

□

По определению предела

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \left| \frac{u_n}{v_n} - q \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - q \right| < \varepsilon \iff q - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)v_n < u_n < (q + \varepsilon)v_n$$

а) Если $\sum v_n$ сходится, то из правой части неравенства: $0 < u_n < (q + \varepsilon)v_n$

По признаку сравнения $\sum u_n$ также сходится

б) Если $\sum v_n$ расходится, то из левой части неравенства: $0 < (q - \varepsilon)v_n < u_n$

Тогда по пункту б) Th. 1. $\sum u_n$ расходится

□

Nota. При $q = 0$ можем говорить, что u_n - бесконечно малая высшего порядка, чем v_n , а значит, если ряд v_n сходится, то u_n сходится

$$\begin{aligned}
 \text{Ex. 1. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходитс} \\
 \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходитс} \text{ по признаку сравнения}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ex. 2. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходитс}
 \end{aligned}$$

Начиная с некоторого n_0 $n! > 2^n$. Тогда $u_n < v_n$ при $n > n_0$, по признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходитс

$$\text{Ex. 3. } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n}$$

Nota. Члены рядов u_n и v_n - бесконечно малые последовательности. Иначе ряды расходятс по необходимому условию. Тогда в **Th. 2.** сравниваются порядки бесконечно малых, и ряды одновременно сходятс или расходятс, если u_n и v_n одного порядка малости. По этому принципу подбирается вспомогательный ряд

$$u_n = \arcsin \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} = v_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходитс}$$

Th. 3. Признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{исследуемый, } \exists \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{а) } 0 \leq \mathcal{D} < 1 \implies \sum u_n \text{ сходитс}$$

$$\text{б) } \mathcal{D} > 1 \implies \sum u_n \text{ расходитс}$$

$$\text{в) } \mathcal{D} = 1 \implies \text{ничего не следует, требуется другое исследование}$$

□

$$\text{а) По определению предела } \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad 0 \leq \mathcal{D} < 1 \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \mathcal{D} \right| < \varepsilon \iff \mathcal{D} - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \mathcal{D} + \varepsilon$$

Так как $0 \leq \mathcal{D} < 1$, можно втиснуть число r между \mathcal{D} и 1: $\mathcal{D} < r < 1$

Положим $\varepsilon = r - \mathcal{D}$, то есть $\mathcal{D} + \varepsilon = r$

Смотрим правую часть $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$ для $\forall n > n_0$, где $n_0 = n_0(\varepsilon)$, $\varepsilon = r - \mathcal{D}$

$$u_{n_0+1} < ru_{n_0}$$

$$u_{n_0+2} < ru_{n_0+1} < r^2 u_{n_0}$$

$$u_{n_0+l} < r^l u_{n_0}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0-1} + u_{n_0} + \dots}_{k} = k + \sum_{m=1}^{\infty} v_m$$

Члены $v_m < r^l u_{n_0}$; u_{n_0} - фикс. число, а $\sum_{l=1}^{\infty} r^l$ сходится как геометрический при $|r| < 1$

Итак ряд $\sum_{l=1}^{\infty} r^l u_{n_0}$ сходится и почленно превышает $\sum v_m = (\sum u_n) - k$

То есть $\sum u_n$ сходится

б) Lab. (взять r между \mathcal{D} и 1, $1 < r < \mathcal{D}$, $\mathcal{D} - r = \varepsilon$)

Сравнить $\sum u_n$ с $\sum r^l$ (расходящимся)

□

$$Ex. 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 - \text{сходится}$$

$$Ex. 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 - \text{расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 - \text{сходится}$$

Th. 4. Радикальный признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad u_n \geq 0 \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R}$$

а) $0 \leq K < 1 \Rightarrow \sum u_n$ сходится

б) $K > 1 \Rightarrow \sum u_n$ расходится

Nota. $K = 1$ - ничего не следует

□

а) По определению предела $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid \sqrt[n]{u_n} - K \mid < \varepsilon$

$\Leftrightarrow K - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < K + \varepsilon$ Положим $\varepsilon = r - K$, где $K < r < 1$

$\Rightarrow 0 \leq u_n < r^n$ - геом. ряд с $|r| < 1$, то есть $\sum r^n$ сходится

б) Аналогично

□

$$Ex. 1. \sum_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \quad K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n}$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{-1} \neq 0$ - необходимое условие не выполняется

Ex. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = e^{-1} < 1$ - сходится

Th. 5. Интегральный признак Коши

Если существует $f(x) : [1; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x)$ монотонно убывает, $f(n) = u_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ одновременно сходятся или расходятся

$$\begin{aligned} \square \quad \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx \\ \sum_{n=2}^b u_n &= u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 + \dots < \int_1^b f(x) dx < u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + \dots = \sum_{n=1}^{b-1} u_n \end{aligned}$$

Обозначим $\sum_{n=1}^{b-1} u_n = S_{b-1}$, $\sum_{n=2}^b u_n = S_{b-1} - u_1 + u_b$

$$0 < S_{b-1} - u_1 + u_b < \int_1^b f(x) dx < S_{b-1}$$

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1 + u_b < \int_1^{\infty} f(x) dx < \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Если \int сходится, то смотрим левую часть

Если \int расходится, то смотрим правую часть неравенства

□

4. Знакопередающие ряды

Def. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ ($u_n > 0$) - знакопередающийся ряд

Th. Признак Лейбница

Если для знакопередающегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ верно, что $u_n \rightarrow 0$ и $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n|$,

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ сходится

$$\square$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_n + \dots$$

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

Все слагаемые в скобках будут больше нуля, тогда частичные суммы будут возрастать

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$$

Здесь же тоже все слагаемые больше нуля - их мы вычитаем из u_1 и получаем число гарантированно меньшее u_1

По **Th.** о монотонности и ограниченности последовательность $\square \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} \stackrel{0}{=} S \in \mathbb{R}$$

\square

$$Ex. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \implies \text{ряд сходится}$$

Nota. Оценка остатка ряда

$$\text{Запишем ряд: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots \pm u_n \mp u_{n+1} = S + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k = S_n + R_n$$

\uparrow остаток ряда

В доказательстве **Th.** было установлено, что сумма ряда не превышает своего первого члена

$$R_{n+1} < |(-1)^{k+1} u_k| = u_k = u_{n+1}$$

$$Ex. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \underbrace{\frac{1}{32}}_{R_4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

$$|R_4| < \frac{1}{32}$$

$$\text{Проверка: } -\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) - \left(\frac{1}{128} - \frac{1}{256}\right) - \dots = -\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} - \underline{\text{Lab.}} \text{ досчитать и сравнить с } \frac{1}{32}$$

Nota. Оценка не работает в знакоположительных рядах

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$R_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots\right) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} > \frac{1}{16}$$

Def. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ где } u_n - \text{любого знака и не все } u_n \text{ одного знака}$$

$$Ex. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

Nota. Исследование таких рядов (в том числе знакочередующихся) на сходимость можно проводить при помощи ряда из модулей

Th. Абсолютная сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится}$$

Mem. См. абсолютную сходимость в [несобственных интегралах](#)

□

По критерию Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad ||u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m|| < \varepsilon$$

$n_0 = n_0(\varepsilon)$

По неравенству треугольника:

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < |u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < \varepsilon$$

□

Nota. Обратное неверно!

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ сходится

Но $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ сходится, он называется **абсолютно сходящимся**

Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ расходится, он называется **условно сходящимся**

Nota. Для абсолютно сходящихся рядов перестановка членов безболезненна и сохраняет сумму ряда

Nota. На абсолютно сходящиеся ряды распространяются признаки сходимости знакоположительных рядов

1) Признак сравнения: $|u_n| < |v_n| : \sum |v_n| \text{ сходится} \implies \sum |u_n| \text{ сходится}$

2) Предельный признак: $\lim \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) $D = \lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$

4) $K = \lim \sqrt[n]{|u_n|} < 1$

5) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сравнивается с $\sum |u_n|$

§2. Функциональные ряды

1. Определения

Def. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется функциональным

Nota. При фиксации переменной x ряд становится числовым

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$x = 2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ расходится

$x = \frac{1}{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится

Таким образом для $|x| < 1$ ряд будет сходящимся, для $|x| > 1$ расходящимся

Def. Множество значений x , при которых $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется областью сходимости

Def. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится при всех x из некоторого множества E , то сумма ряда - функция $S(x)$

Nota. То есть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$

Запишем остаток: $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Часто удобно исследовать $R_n(x) \rightarrow 0$. Также работает критерий Коши

Th. Критерий Коши

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области $D \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \mid u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_m(x) \mid < \varepsilon$
 $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$

Nota. Очень неприятно, что n_0 зависит от ε и всякого x

Def. Равномерная сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области $D \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid R_n(x) \mid < \varepsilon$
 $n_0 = n_0(\varepsilon)$

Nota. Доказательства равномерной сходимости по определению сложно, пользуются другими способами

Th. Признак Вейерштрасса

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - числовой ряд такой, что $\alpha_n > 0$, $\sum \alpha_n$ сходится, $|u_n(x)| \leq \alpha_n \forall n$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходящийся

Nota. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ называется мажорирующим (то есть преобладающим), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - мажорируемым

\square
 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid R_n^\alpha \mid < \varepsilon$
 $n_0 = n_0(\varepsilon)$

Заменим на условие $|\alpha_n + \dots + \alpha_m| < \varepsilon$ (кр. Коши)

$|u_n(x) + \dots + u_m(x)| \leq |u_n(x)| + \dots + |u_m(x)| \leq \alpha_n + \dots + \alpha_m \leq \varepsilon$

При этом номер n_0 зависит только от ε

\square

Nota. Таким образом всякий мажорируемый ряд равномерно сходится, но не всякий равномерно сходящийся ряд мажорируем

Nota. Установим свойство суммы равномерно сходящегося ряда

Ex. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) = (x^{\frac{1}{3}} - x^1) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}) + \dots;$

$S_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$

При $x > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x) = 1 - x$

При $x < 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt[2n+1]{|x|} - x) = -1 - x$

При $x = 0$ $S_n = 0$

Th. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ($u_n(x) \in C_{[a,b]}$) мажорируем в $D = [a, b]$, то его сумма $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$

\square

$S(x)$ непрерывна на $x \in [a, b] \iff \Delta S \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$

$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$, $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$

$\Delta S_n(x) = S_n(x + \Delta x) - S_n(x)$

$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) = S_n(x + \Delta x) + r_n(x + \Delta x) - S_n(x) - r_n(x)$

$$\Delta S(x) = \Delta S_n(x) + r_n(x + \Delta x) - r_n(x)$$

$$|\Delta S(x)| \leq |\Delta S_n(x)| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)|$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ мажорируем } \iff \exists \text{ сходящийся } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mid |u_n(x)| \leq \alpha_n$$

$$\text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{и } \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid |r_n(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ (так как } N \text{ не зависит от } x; x + \Delta x \in [a, b])$$

$$\Delta S_n = S_n(x + \Delta x) - S(x) = u_1(x + \Delta x) - u_1(x) + \dots + u_n(x + \Delta x) - u_n(x) - \text{конечная сумма}$$

$$\text{непрерывна}$$

$$\text{Сама } \Delta S_n(x) \text{ непрерывна, тогда } \forall \varepsilon > 0 \text{ (при фиксированном } N) \exists \delta > 0 \mid |\Delta S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } |\Delta x| < \delta$$

$$\begin{aligned} \text{Итак: } \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \text{ и } \delta > 0 \mid \forall x \in D \mid_{|\Delta x| < \delta} \quad & |\Delta S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ & + |r_n(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ & + |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ & = |\Delta S(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{То есть } S(x) \in C_{[a,b]}$$

□

Nota. Не все равномерно сходящиеся мажорируются, но у всех $S(x)$ непрерывна

Это позволяет определить $\int_{x_0}^y S(x)dx$, а если $S(x) \in C'_{[a,b]}$, то и $\frac{dS(x)}{dx}$

Th. Если ряд мажорируется на $[a, b]$ и $u_n(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то определен $\int_{x_0}^y S(x)dx$

$$\text{и } \int_{x_0}^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x)dx$$

□

$S(x) = S_n(x) + r_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + r_n(x)$ - конечное число слагаемых из непрерывных функций ($r_n(x)$ как хвост равномерно сходящегося ряда)

Тогда для $x_0, x \in [a, b]$ $\int_{x_0}^x S(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(x)dx + \int_{x_0}^x r_n(x)dx$ - это будет верно, если

$$\int_{x_0}^x r_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{По свойству интегралов } \left| \int_{x_0}^x r_n(x)dx \right| \leq \int_{x_0}^x |r_n(x)|dx$$

$$\left| \int_{x_0}^x r_n(x)dx \right| \leq \int_{x_0}^x |r_n(x)|dx < \int_{x_0}^x \varepsilon_n dx = \varepsilon_n(x - x_0) \text{ (} x, x_0 \text{ - фикс.)}$$

То есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x r_n(x) dx = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(x) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x r_n(x) dx$$

$$\int_{x_0}^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x) dx$$

□

Nota. Почленно интегрируются не просто равномерно сходящиеся, а мажорируемые, иначе остаток необязательно стремится к 0

Th. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем на $[a, b]$ и $u_n(x) \in C'_{[a,b]}$

Тогда $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

□

Пусть $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. Докажем, что $g(x) = S'(x)$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x g(x) dx &= \int_{x_0}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^x u'_n(x) dx \right) = u_1(x) \Big|_{x_0}^x + u_2(x) \Big|_{x_0}^x + \dots \\ &= (u_1(x) - u_1(x_0)) + (u_2(x) - u_2(x_0)) + \dots = S(x) - S(x_0) - \text{разность сходящихся рядов} \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^x g(x) dx = S(x) - S(x_0) \implies \left(\int_{x_0}^x g(x) dx \right)' = g(x) = S'(x)$$

□

2. Степенные ряды

Def. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, $c_n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ - степенной ряд с центром x_0 (в точке x_0 , по степеням $(x-x_0)$)

Nota. В частности $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ - степенной с центром в $x_0 = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ легко сводится заменой $x-x_0 = t$ к $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

Th. Абеля.

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_1 . Тогда ряд сходится для любого x , который $|x| < |x_1|$
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в точке x_2 . Тогда ряд расходится $\forall x$ $|x| > |x_2|$

□

- 1) В точке x_1 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots$ - числовой ряд, сходящийся

$$\text{В точке } x \ (|x| < |x_1|) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = c_0 + c_1 x_1 \frac{x}{x_1} + c_1 x_1^2 \frac{x^2}{x_1^2} + \dots$$

Для этого ряда докажем абсолютную сходимость

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = |c_0| + |c_1 x_1| \left| \frac{x}{x_1} \right| + |c_1 x_1^2| \left| \frac{x^2}{x_1^2} \right| + \dots$$

При этом ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится $\implies \exists M > 0 : |c_n x_1^n| \leq M$

И $\left| \frac{x^k}{x_1^k} \right| < 1$, так как $|x| < |x_1|$

Тогда $|c_0| + |c_1 x_1| \left| \frac{x}{x_1} \right| + |c_1 x_1^2| \left| \frac{x^2}{x_1^2} \right| + \dots + |c_k x_1^k| \left| \frac{x^k}{x_1^k} \right| < M \left(1 + \left| \frac{x}{x_1} \right| + \left| \frac{x}{x_1} \right|^2 + \dots + \left| \frac{x}{x_1} \right|^k \right)$ - геометрическая прогрессия с $|q| < 1$

Таким образом $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \sim M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$, который сходится

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ абсолютно сходится (и равномерно?)

б) От противного, используя пункт а)

□

Nota. Заметим, что должно существовать такое R , для которого для всех x меньше R ряд сходится

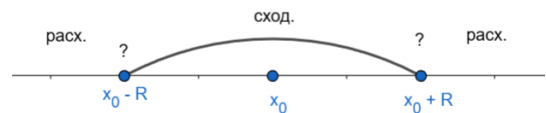
Зафиксируем между x_0 и R число $x_0 < r < R$ - тогда $\sum c_n r^n$ - мажорирует $c_n x^n$, то есть ряд сходится равномерно



Def. $R \in \mathbb{R}^+$ $\left| \forall |x| < R \right.$ ряд сходится, а $\forall |x| > R$ ряд расходится, тогда R называют радиусом сходимости

Для сдвинутого ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \forall x : |x - x_0| < R$ - сходится; $\forall x : |x - x_0| > R$ - расходится

Сходимость ряда в $x_0 \pm R$ нужно проверять специально



Nota. Чаще всего исследование на сходимость проводится по признакам Даламбера, Коши

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x|^{n+1} \frac{n}{|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| = |x| < 1$$

Предварительно $D = (-1; 1)$.

Далее, рассмотрим $x = \pm 1$:

$$(x = 1) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \text{сходится}$$

$$(x = -1) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} - \text{расходится}$$

Итак, $D = (-1; 1]$

3. Ряд Тейлора

Мет. Формула Тейлора: $f(x) \in C_{U_\delta(x_0)}^{n+1}$, тогда $f(x) \stackrel{x \in U_\delta(x_0)}{=} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$

Чтобы $f(x)$ в пределе равнялось $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, нужно, чтобы $r_n(x) \rightarrow 0$

Формула: $f(x) \in C_{U_0(x_0)}^\infty$ и $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$, ξ между x и x_0

Th. Если $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ - ряд Тейлора

Nota. Если $x_0 = 0$, то ряд Маклорена

3.1. Стандартные разложения элементарных функций

$$1^\circ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\text{Nota. } e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$2^\circ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\text{Nota. } \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$3^\circ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\text{Nota. } 1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$4^\circ \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$$

$$\text{Def. } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Сложим и вычтем ряды для e^x и e^{-x}

$$\text{Причем } e^{-x} \stackrel{t=-x}{\underset{x, t \in u(0)}{=}} e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Из этого получаем:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n)}}{(2n)!}$$

Формула Эйлера

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \dots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \dots) = \cos x + i \sin x$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$5^\circ \text{ Биномиальный ряд}$$

$$f(x) = (1+x)^m, m \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Заметим, что } f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

$$(1+x)f'(x) = m(1+x)^m = mf(x)$$

Получаем дифференциальное уравнение: $(1+x)f'(x) = mf(x)$

Nota. Если дополнить ДУ начальными условиями, то задача Коши будет решаться единственным образом, то есть, найдя ряд $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ как единственное решение, получим, что $S(x) = f(x)$ и не надо исследовать остаток R_n на убывание к нулю

Задача Коши:

$$\begin{cases} (1+x)f'(x) = mf(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда $S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + ka_kx^{k-1} + \dots$$

$$(1+x)S'(x) = a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + \dots + (ka_k + (k+1)a_{k+1})x^k + \dots$$

$$mS(x) = ma_0 + ma_1x + ma_2x^2 + \dots + ma_kx^k + \dots$$

Начальные условия: $a_0 = 1$. Тогда приравниваем коэффициенты: $a_1 = m, a_2 = \frac{m(m-1)}{2}, a_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$

Выявили закономерность: $a_k = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{k!}$

Таким образом: $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} C_m^k x^k$

При $m \in \mathbb{N}$ ряд - конечная сумма, при остальных - бесконечная

Lab. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} = (\arcsin x)'$ $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin t$

6° $\ln(1+x)$

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n \right) dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Интервал сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}n}{(n+1)x^n} \right| = |x| < 1 \quad D = (-1, 1)$

При $x = 1$ $\ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ - сходится $D = (-1, 1]$

Nota. Сходимость остатка требует исследования

Nota. Заметим, если $x = \frac{1}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$, то $\ln(1 + \frac{1}{k}) = \ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$ - рекуррентная формула логарифмов натуральных чисел

7° $\arctg x$ - Lab. $((\arctg x))' = \frac{1}{1+x^2}$

3.2. Приложения

$$\text{Ex. 1. } I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad x = \frac{1}{2} \in u(0)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots) dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \dots \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 3 \cdot 6} + \frac{1}{32 \cdot 5 \cdot 120} - \dots$$

Ряд знакопеременный - можем найти такой u_n , который будет меньше заданной точности вычисления ε

$$\text{Ex. 2. } \int_0^a e^{-x^2} dx = \int_0^a (1 + (-x^2) + \frac{x^4}{2!} + \dots) dx = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{10} + \dots \Big|_0^a = a - \frac{a^3}{5} + \frac{a^5}{10} - \dots$$

Отсюда были вычислены таблицы для функции Лапласа $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Ex. 3. Вычисление пределов

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctg x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3}) + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

4. Ряды Фурье

4.1. Определение

Мет. Линейное функциональное пространство со скалярным произведением

$$f(x) \in C_{[a,b]}$$

$$\text{Скалярное произведение } (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\text{Из этого норма } \|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Главное приложение евклидовых пространств - задача о перпендикуляре: найти перпендикуляр h из конца вектора f на подпространство L' . Иначе: ищем расстояние $\|f - h\|$ (метрика) или ортогональную проекция f_0 вектора f на L' , такую, что $f_0 + h = f$

Будем искать f_0 , задав подпространство L' множеством функций $\{\sin mx, \cos mx\}$

Тригонометрические функции полезны для описания периодических явлений

Раньше рассматривали тригонометрический многочлен

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + \dots + b_m \sin mx + a_m \cos mx$$

Дальше стоит задача: при каких a_i, b_i многочлен $T_m(x)$ будет наименее отстоящим от данной $f(x)$

Мет. Решаем задачу о перпендикуляре, ищем f_0 - наименьшую из проекций и минимально отстоящую от f

Координаты f_0 в выбранном ортонормированном базисе L' равны соответствующим координатам f в этом базисе

$$f_0 = f_1 e_1 + f_2 e_2 + \dots + f_k e_k = (f, e_1) e_1 + (f, e_2) e_2 + \dots + (f, e_k) e_k$$

$k = \dim L', n = \dim L$

$$(f, e_1) = \int_a^b f(x) e_1(x) dx$$

Nota. Итак, $\exists L \in C_{[-\pi, \pi]}, L' = l_{\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}}$

Тогда можно искать многочлен $P_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$, который наилучшим образом приближает $f(x)$

Если нормировать систему $\{\sin nx, \cos nx\}$, то коэффициентами многочлена $P_n(x)$ будут скалярные произведения $f(x)$ на функция ортонормированной системы.

Получим $\left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{\sin x}{\pi}, \frac{\cos x}{\pi}, \dots, \frac{\sin nx}{\pi}, \frac{\cos nx}{\pi} \right\}$

Тогда,

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \end{cases} \quad \text{- коэффициенты Фурье}$$

Nota. Если увеличивать степень n , то получим ряд Фурье. Запишем формально:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{- сходится ли этот ряд и сходится ли к } f(x)?$$

Ответ дает теорема (доказательство будет приведено позже)

Th. $f(x)$ - 2π -периодична, на $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ - кусочно монотонна и ограничена (то есть имеет конечное число конечных разрывов). Тогда в точках непрерывности $f(x)$ представляется рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = S(x)$$

а в точках разрыва $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$

Сейчас только тригонометрический ряд Фурье, хотя подобное разложение возможно по различным ортогональным системам функций

Nota. В концах отрезках $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ может быть не определена, но в любом случае ограничена $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))$

Разложение периодичных функций (на $[-\pi, \pi]$)

1°: $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$, $f(x + 2\pi) = f(x)$

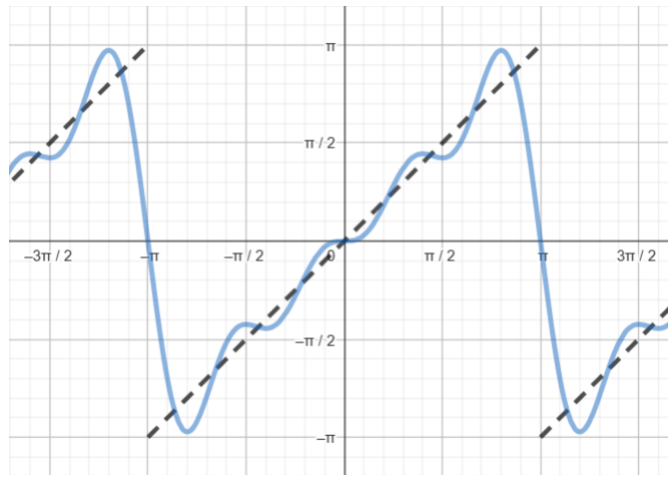
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{-2}{\pi n} \int_0^{\pi} x d \cos nx = -\frac{2}{\pi n} \left(x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = -\frac{2}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$-\frac{2}{n} \cos \pi n = \begin{cases} -\frac{2}{n}, & n = 2m \\ \frac{2}{n}, & n = 2m + 1 \end{cases} = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

$$\text{Итак } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{n} \sin nx$$



$$2^\circ: f(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } [0, \pi] \\ -1 & \text{на } [-\pi, 0) \end{cases}$$

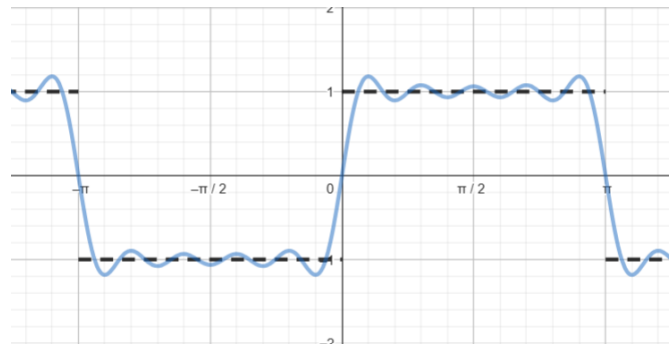
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{1}{2n} \left(\int_{-\pi}^0 d \cos nx - \int_0^{\pi} d \cos nx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi n} \left(\cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi n} (1 - \cos \pi n - \cos \pi n + 1) = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \pi n) = \frac{4}{\pi(2m-1)}$$

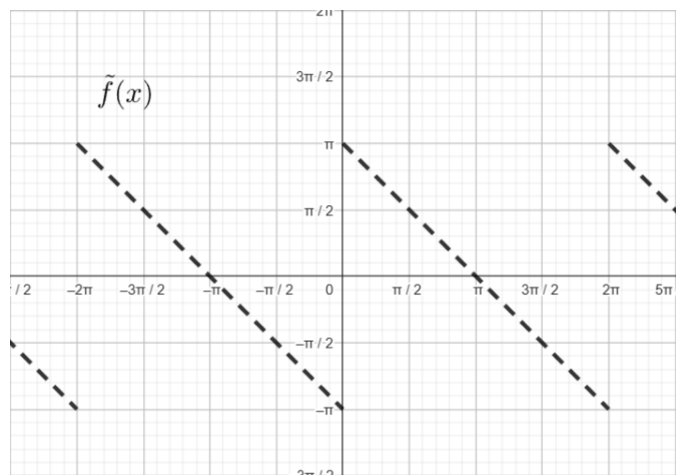
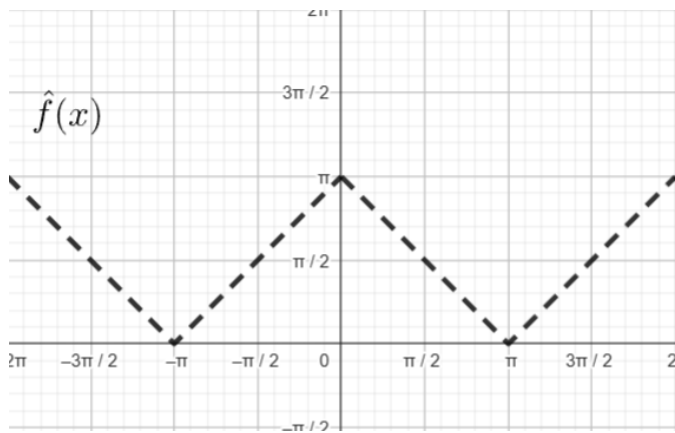
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m-1)} \sin(2m-1)x$$



Nota. Заметим, что если $f(x)$ - четная, то $b_n = 0$, а если нечетная, то $a_n = 0$. Иногда в задаче требуется разложить $f(x)$, заданную только на отрезке $[0, \pi]$. Такую функцию можно продолжить четным или нечетным образом на $[-\pi, \pi]$. Говорят о разложении в ряд по косинусам и синусам соответственно

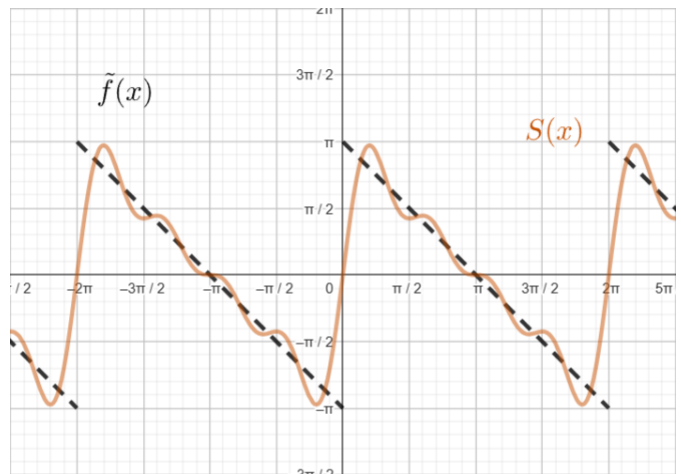
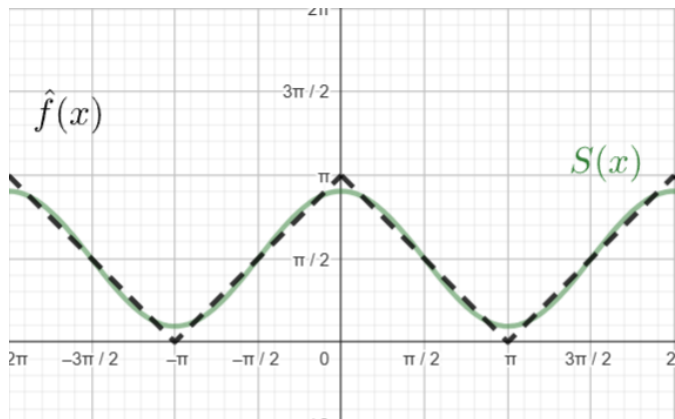
3°: $f(x) = \pi - x$, $x \in [0, \pi]$

Дополним $f(x)$ двумя способами



В ряд Фурье раскладываются периодические функции \hat{f}, \tilde{f}

$$\text{Lab. } \hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$



Заметим, что \tilde{f} на $[0, 2\pi]$ имеет одно аналитическое задание (удобно интегрировать). Изменится ли ряд Фурье, если сдвинуть отрезок?

Th. о сдвиге. Сдвиг промежутка длиной 2π не меняет ряда Фурье

Th. о растяжении. Для $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ растяжение промежутка приводит к разложению:

$b - a = 2l = T$ - период

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$$

Th. 1. о сдвиге:

Ряд Фурье не изменится, если $[-\pi, \pi]$ заменить на $[a; a + 2\pi]$

Докажем, что если $\varphi(t)$ - 2π -периодична, то $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = \int_a^{a+2\pi} \varphi(t) dt$

У нас $f(x)$ с периодом $[-\pi, \pi]$, обозначим $x = t - 2\pi$ ($t = x + 2\pi$).

Рассмотрим $\int_b^a f(x) dx = \int_{b+2\pi}^{a+2\pi} f(t - 2\pi) dt = \int_{b+2\pi}^{c+2\pi} f(t) dt = \int_{b+2\pi}^{c+2\pi} f(x) dx$

Пусть $b = -\pi, c = a$, тогда $\int_b^c f(x) dx = \int_{-\pi}^a f(x) dx = \int_{-\pi+2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^{\pi} f(x) dx$

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{a+2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Th. 2. о растяжении:

$f(x)$ - $2l$ -периодична: ($T : [-l, l]$)

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$$

$$\text{Тогда } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$f(x)$ - $2l$ -периодична: $(T : [-l, l])$

Обозначим $x = \frac{lt}{\pi}$ $t \uparrow_{-\pi}^{\pi}$ $x \uparrow_{-l}^l$

$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t)$ - 2π -периодична

Ряд Фурье для $\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$, где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ktdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ktdt = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ktd\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx \end{aligned}$$

Аналогично b_k .

Ex. 1. $f(x) = x$ $x \in [-1, 1]$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x \cos \frac{k\pi x}{d} dx = \int_{-1}^1 x \cos k\pi x dx = \frac{1}{k\pi} \left(x \sin k\pi x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \sin k\pi x dx \right) = -\frac{1}{k\pi} \cdot 0 = 0$$

$$b_k = \int_{-1}^1 x \sin k\pi x dx = -\frac{1}{k\pi} \left(x \cos k\pi x \Big|_{-1}^1 - \int_0^1 \cos k\pi x dx \right) = -\frac{2}{k\pi} \left((-1)^k - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_0^1 \right) = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2}{k\pi}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2}{k\pi} \sin k\pi x$$

4.2. Оценка коэффициентов Фурье

Nota. Вернемся к приближению $f(x)$ тригонометрическим многочленом $T_n(x)$. Ранее говорились, что из всех многочленов типа $\sum_{m=0}^n a_m \cos mx + b_m \sin mx$ минимально отстоящим будет многочлен Фурье, то есть с a_m и b_m , равными коэффициентам Фурье.

Зададим расстояние δ_n между $f(x)$ и многочленом $T_n(x)$ формулой

$$\delta_n^2 = \|f - T_n\|^2 = (f - T_n, f - T_n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - T_n(x))^2 dx = \left[[a, b] = [-\pi, \pi] \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{m=1}^n a_m \cos mx + b_m \sin mx \right)^2 dx$$

Далее, честно интегрируя, можно убедиться, что δ будет наименьшим, если a_m и b_m - коэффициенты Фурье

Преобразуем $\|f - f_0\|^2$:

$$\delta_n^2 = \|f - \sum_{m=0}^n (f, e_m) e_m\|^2 = \|f\|^2 - 2 \left(f, \sum_{m=0}^n (f, e_m) e_m \right) + \left\| \sum_{m=0}^n (f, e_m) e_m \right\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{m=0}^n (f, e_m)^2 +$$

$$\sum_{m=0}^n (f, e_m)^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=0}^n (f, e_m)^2 - \text{квадраты коэффициентов разложения}$$

Тогда $\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2)$

Так как $\delta_n^2 \geq 0$, то $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^k (a_m^2 + b_m^2)$

Так как $\sum_{m=1}^n$ растёт и ограничена, то ряд $\sum_{m=1}^{\infty}$ сходится

Можем записать: $\boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)}$ - неравенство Бесселя

Можем усилить неравенство, если доказать, что при $n \rightarrow \infty$ $\delta_n^2 \rightarrow 0$. В этом случае $f(x)$ раскладывается по полной системе функций $\{\cos mx, \sin mx\}$

Def. Система $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ называется полной, если $\forall f(x) \notin \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0 \implies f(x) = 0$

$\boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)}$ - равенство Парсеваля

Заметим, что из оценки ранее $\|f\|^2 = \sum_{m=1}^n (f, e_m)^2 = \sum_{m=1}^n f_m^2$

В ∞ -мерном пространстве $\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^2$ - «теорема Пифагора»

Nota. Эти утверждения верны для любых ортогональных систем функций, а не только для тригонометрических

4.3. Интеграл Фурье

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = I \in \mathbb{R}$

\exists ряд Фурье для $f(x)$ на $[-l, l]$ $\forall l > 0$, то есть

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{m\pi t}{l} dt \right) \cos \frac{m\pi x}{l} + \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{m\pi t}{l} dt \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \right] = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \frac{m\pi}{l} (t-x) dt \end{aligned}$$

Исследуем при $l \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \frac{I}{2l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

Обозначим $\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \alpha_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \Delta a_m = \frac{\pi}{l}$

Рассмотрим $\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{m\pi(t-x)}{l} dt}_{\text{функция переменной } l} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_m(t-x) dt \right) \Delta \alpha_m$

Рассмотрим переменную $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha_m = \alpha(m)$, $\Delta \alpha_m = \Delta \alpha$ - дифференциальное

Имеем аналог интегральной суммы $\sum_{m=1}^n \varphi(\alpha_m) \Delta \alpha_m$, $n \rightarrow \infty$

Тогда $\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha}$ - интеграл Фурье

Nota. От дискретного спектра частот $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ перешли к непрерывному спектру α

Nota. В точках разрыва $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha$

Преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos at \cos ax + \sin at \sin ax) dt \right) d\alpha = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cos at \cos ax dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin at \sin ax dt \right) d\alpha \end{aligned}$$

Если $f(x)$ - четная, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos at dt = 2 \int_0^{+\infty} \dots; \int_{-\infty}^{\infty} \sin at dt = 0$

Если $f(x)$ - нечетная, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin at dt = 2 \int_0^{+\infty} \dots; \int_{-\infty}^{\infty} \cos at dt = 0$

Обозначим $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos at dt$ $\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin at dt$

Тогда $f(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos ax d\alpha}_{\text{косинус-преобразование Фурье}}, \quad f(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \sin ax d\alpha}_{\text{синус-преобразование Фурье}}$

Ex. $f(x) = e^{-\beta x}, \quad (\beta > 0, x \geq 0)$ Lab.
 $F(\alpha) = ? \quad \Phi(\alpha) = ? \quad e^{-\beta x} = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha$

Х. Программа экзамена в 2024/2025

Х.1. Числовые ряды.

1. Определение числового ряда, понятие суммы ряда.

Определение числового ряда: $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\} = \{u_n\}$ называется числовым рядом
 u_n называется общим членом ряда

Понятие суммы ряда: Частичная сумма ряда $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n u_k$

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называют сходящимся, а S называют суммой ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

2. Сходимость числового ряда. Эталонные ряды: геометрический, гармонический.

Сходимость числового ряда: Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называют сходящимся

Геометрический ряд: $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n$ - сходится при $|q| < 1$, тогда $S = \frac{b}{1-q}$

Гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится

3. Условия сходимости рядов: необходимое условие, критерий Коши.

Необходимое условие:

Th. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то верно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Критерий Коши:

Th. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad |u_{n+1} + \dots + u_m| < \varepsilon$
 $|S_m - S_n| < \varepsilon$

4. Знакоположительные числовые ряды, свойства.

Знакоположительный ряд - ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ такой, что $u_n > 0$

Свойства рядов:

(а) Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но влияет на сумму

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma - \text{сходится}$$

5. Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: признаки сравнения.

Признак сравнения в неравенствах:

- а) $0 < u_n \leq v_n$. Тогда $\sum v_n$ сходится $\Rightarrow \sum u_n$ сходится
 б) $0 \leq v_n \leq u_n$. Тогда $\sum v_n$ расходится $\Rightarrow \sum u_n$ расходится

Предельный признак сравнения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \sum u_n \text{ сходится, если } \sum v_n \text{ сходится} \\ \sum u_n \text{ расходится, если } \sum v_n \text{ расходится} \end{cases}$$

6. Признак Даламбера, радикальный признак Коши.

Признак Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{исследуемый, } \exists \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R}^+$$

- а) $0 \leq \mathcal{D} < 1 \Rightarrow \sum u_n$ сходится
 б) $\mathcal{D} > 1 \Rightarrow \sum u_n$ расходится
 в) $\mathcal{D} = 1 \Rightarrow$ ничего не следует, требуется другое исследование

Радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad u_n \geq 0 \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R}$$

- а) $0 \leq K < 1 \Rightarrow \sum u_n$ сходится
 б) $K > 1 \Rightarrow \sum u_n$ расходится
 в) $K = 1 \Rightarrow$ требуется другое исследование

7. Интегральный признак сходимости.

Интегральный признак Коши:

Если существует $f(x) : [1; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x)$ монотонно убывает, $f(n) = u_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \text{ одновременно сходятся или расходятся}$$

8. Знакопередающие ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка ряда.

Знакопередающие ряды: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ ($u_n > 0$) - знакопередающийся ряд

Признак Лейбница: Если для знакопередающегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ верно, что $u_n \rightarrow 0$ и

$$|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n|, \text{ то ряд } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n \text{ сходится}$$

Оценка остатка ряда: для знакопередающегося ряда $R_{n+1} < u_{n+1}$

9. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Знакопеременные ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где u_n - любого знака и не все u_n одного знака

Абсолютная сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно

Условная сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, если $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится

Х.2. Функциональные ряды.

10. Функциональные ряды. Сходимость. Поточечная и равномерная сходимость ряда. Мажорирующий ряд.

Функциональные ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется функциональным

Сходимость: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится при всех x из некоторого множества E , то сумма ряда - функция $S(x)$

Поточечная сходимость: Ряд сходится поточечно, если $\forall x \in D \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$

Равномерная сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области $D \stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid R_n(x) \mid < \varepsilon$$

$n_0 = n_0(\varepsilon)$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ на $[0, 1)$ сходится поточечно, но не сходится равномерно

Мажорирующий ряд: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ называется мажорирующим, если по признаку Вейер-

штрасса с помощью него можно сказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится

11. Признак Вейерштрасса.

Признак Вейерштрасса: $\exists \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - числовой ряд такой, что $\alpha_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится, $|u_n(x)| \leq \alpha_n \forall n$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходящийся, а $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ называют мажорирующим

12. Непрерывность суммы ряда.

Непрерывность суммы ряда: Th. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ($u_n(x) \in C_{[a,b]}$) мажорируем в $D = [a, b]$, то его сумма $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$

13. Свойства равномерно сходящихся рядов (дифференцирование и интегрирование суммы ряда).

Интегрирование: Th. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем на $[a, b]$ и $u_n(x) \in C'_{[a,b]}$. Тогда $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

Дифференцирование: Th. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем на $[a, b]$ и $u_n(x) \in C'_{[a,b]}$. Тогда $S'(x) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

14. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости.

Степенной ряд: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, $c_n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ - степенной ряд с центром x_0 (в точке x_0 , по степеням $(x - x_0)$)

Теорема Абеля: Th. Абеля.

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_1 . Тогда ряд сходится для любого x , который $|x| < |x_1|$
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в точке x_2 . Тогда ряд расходится $\forall x$ $|x| > |x_2|$

Радиус сходимости: $R \in \mathbb{R}^+ \mid \forall |x| < R$ ряд сходится, а $\forall |x| > R$ ряд расходится, тогда R называют радиусом сходимости

15. Ряд Тейлора. Стандартные разложения элементарных функций.
16. Ортогональные системы функций и ряды Фурье. Определение тригонометрического ряда Фурье для функции на отрезке $[-\pi, \pi]$. Теорема Дирихле.
17. Тригонометрический ряд Фурье на произвольном отрезке (сдвиг, растяжение)