Содержание

1. Евклидовы пространства

1.1. Скалярное произведение

Пусть L - линейное пространство (ЛП). Тогда $\forall x, y \in L$ величину $\underset{x,y \to c \in \mathbb{R}}{c = (x, y)}$ будем называть скалярным произведением

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$
4. $\forall x \in L\ (x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

Nota. Если векторы и коэффициенты комплексно-значные, то определения будут другими

Def. Скалярная функция $c = (x, y)$ со свойствами 1-4 называется скалярным произведением элементов x и y

Def. Линейное пространство со скалярным произведением называется Евклидовым

Ex. 1. ЛП - пространство геометрических векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) \stackrel{def}{=} \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi, & \vec{a}, \vec{b} \neq 0 \\ 0, & \vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0 \end{cases}$$

Ex. 2. $L = C_{[a;b]}$

$$(f(x), g(x)) \stackrel{def}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Очевидно, что свойства 1-3 выполняются, проверим 4:

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0 \stackrel{?}{\Longrightarrow} f(x) = 0$$

Ex. 3. ЛП - пространство числовых строк вида $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$(x, y) = x_1y_1 + \ldots x_ny_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$ - сумма произведений компонент

1.2. Свойства евклидова пространства - E

Th. Неравенство Коши-Буняковского

$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

Нетрудно заметить, что:

$(\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x - y, \lambda x) - (\lambda x - y, y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y, y) = \lambda^2(x, x) -$

$2\lambda(x,y)+(y,y)$
Приравняем полученное выражение к 0, получаем квадратное уравнение. Решим относительно λ:
$D=4(x,y)^2-4(x,x)(y,y) \Longrightarrow \dfrac{D}{4}=(x,y)^2-(x,x)(y,y)$
Так как $(\lambda x-y,\lambda x-y)\geq 0$ (4-ое свойство скалярного произведения), то уравнение имеет ≤ 1 корня, значит $\dfrac{D}{4}=(x,y)^2-(x,x)(y,y)\leq 0$

1.3. Норма

ЛП $=L, \forall x\in L$ определена функция так, что выполняется $x\to n\in\mathbb{R}, n=\|x\|$

1. $\|x\|\geq 0$ и $\|x\|=0 \Longrightarrow x=0$
2. $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\| \quad \lambda\in\mathbb{R}$
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\| \quad \forall x,y\in L$ - неравенство треугольника

Евклидово пространство с нормой называется нормированным

Th. E^n является нормированным, если $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$

Свойства 1-2 очевидны, докажем 3 свойство:
$\|x+y\|=\sqrt{(x+y,x+y)}\leq\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}=\|x\|+\|y\|$
$\sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)}\leq\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}$
$(x,x)+2(x,y)+(y,y)\leq(x,x)+(y,y)+2\sqrt{(x,x)(y,y)}$
$(x,y)\leq\sqrt{(x,x)(y,y)}$
$(x,y)^2\leq(x,x)(y,y)$ - верно по неравенству Коши-Буняковского

Обобщим геометрические понятия ортогональности и косинуса угла на случай произвольных векторов

Def. x,y - ортогональны, если $(x,y)=0$ и $x\neq 0$ и $y\neq 0 \quad x\perp y$

Def. $\cos(\widehat{x,y})=\dfrac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$ - косинус угла между векторами

Def. $x,y\in E^n, x\perp y$, тогда $z=x+y$ - гипотенуза

Th. $x\perp y$, тогда $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x)^2 + \underbrace{2(x,y)}_{=0, x\perp y} + (y,y)^2 = (x,x)^2 + (y,y)^2$$

Def. $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис L^n

На L^n введены (x,y) и $\|x\|$ (то есть $L^n \to E^n_{\|\cdot\|}$ - нормированное евклидово)

B называют ортонормированным базисом, если $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$

Nota. Докажем, что всякая такая система из n векторов линейно независима (то есть всякая нулевая комбинация тривиальная):

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \forall \lambda_i = 0$$

$$\left(e_k, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_k, e_i) \overset{k\neq i \Rightarrow (e_k,e_i)=0}{=\!=} \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k = 0 \quad \forall k$$

Th. Во всяком E^n можно выделить ортонормированный базис

В $E^n_{\|\cdot\|}$ $\exists B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ - базис

Покажем, что можно выделить ортонормированный базис $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ при помощи метода математической индукции

База: построим один ортогональный вектор для $\beta_1 = e_1'$ (потом $e_1 = \dfrac{e_1'}{\|e_1'\|}$)

Рассмотрим $e_2' = \beta_1 - \lambda e_1'$. Требуем $e_2' \perp e_1'$, то есть $(e_1', e_2') = 0$

Отсюда найдем нужный $\lambda : (e_1', e_2') = (e_1', \beta_2 - \lambda e_1') = (e_1', \beta_2) - \lambda(e_1', e_1') = 0$

Тогда $\lambda = \dfrac{(e_1', \beta_2)}{(e_1', e_1')}$

Переход: Пусть построена система ортогональных векторов $\{e_1', e_2', \ldots, e_k'\}$

Построим $k+1$ систему:

Рассмотрим $e_{k+1}' = \beta_{k+1} - \lambda_k e_k' - \lambda_{k-1}' e_{k-1}' - \cdots - \lambda_1 e_1' \quad (*)$

Требуем $e_{k+1}' \perp e_i \quad \forall i \in [1;k]$

$(e_{k+1}', e_k') = (\beta_{k+1}, e_k') - \lambda_k(e_k', e_k') = 0$, так как $(e_i', e_j') = 0 \quad i \neq j$

$$\lambda_k = \frac{(\beta_{k+1}, e_k')}{(e_k', e_k')}$$

Аналогично: $(e_{k+1}', e_{k-1}') = (\beta_{k+1}, e_{k-1}') - \lambda_{k-1}(e_{k-1}', e_{k-1}')$

$$\lambda_{k-1} = \frac{(\beta_{k+1}, e_{k-1}')}{(e_{k-1}', e_{k-1}')}$$

Получаем $e_{k+1}' = \beta_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^k \frac{(\beta_{k+1}, e_i')}{(e_i', e_i')}$

Изложенный метод называется методом ортогонализации базиса, при этом (∗) определяет ненулевой вектор, иначе получим нулевую тривиальную линейную комбинацию векторов β_i (e_i выражается через них), но это невозможно, так как вектора базисные. При этом полученную систему стоит нормировать

Ex. Формула скалярного произведения в ортонормированном базисе
$E_{\|\cdot\|}, B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ - какой-либо базис
Рассмотрим $x = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n$ и $y = y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n$
Найдем (x, y), как произведение компонент: $(x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n, y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j (\beta_i, \beta_j)$
Обозначим $(\beta_i, \beta_j) = a_{ij} \in \mathbb{R}$
Таким образом, $(x, y) = \sum\limits_{i}\sum\limits_{j} a_{ij} x_i y_j$ - дальше назовем квадратичной формой
Ранее (в аналитической геометрии) $(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ - произведение координат векторов $\vec{a}, \vec{b}$ в декартовой прямоугольной системе координат (с ортонормированным базисом)
Действительно: если $\beta_i = e_i$, $\beta_j = e_j$, вектора e_i, e_j принадлежат ортонормированному базису, а $a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, то $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$
Причем $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Longrightarrow x_i = (x, e_i)$

Ex. Система функций, непрерывных на $[0, 2\pi]$
$\Phi = \{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \dots, \sin nt, \cos nt\}$
Система ортогональна (Lab.), но не нормированная (Lab.)
$\Phi_{\|\cdot\|} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \dots\}$ - нормированная система
Тогда функция, определенная и непрерывная на $[0, 2\pi]$ может быть разложена по базису $\Phi_{\|\cdot\|}$ и ее координат (как вектора): $f_i = \int_0^{2\pi} f \cdot e_i dx$, где $e_i \in \Phi_{\|\cdot\|}$

Nota. Изоморфизм $E^n \to E'^n$ позволяет переносить свойства скалярного произведения из одного в другое пространство

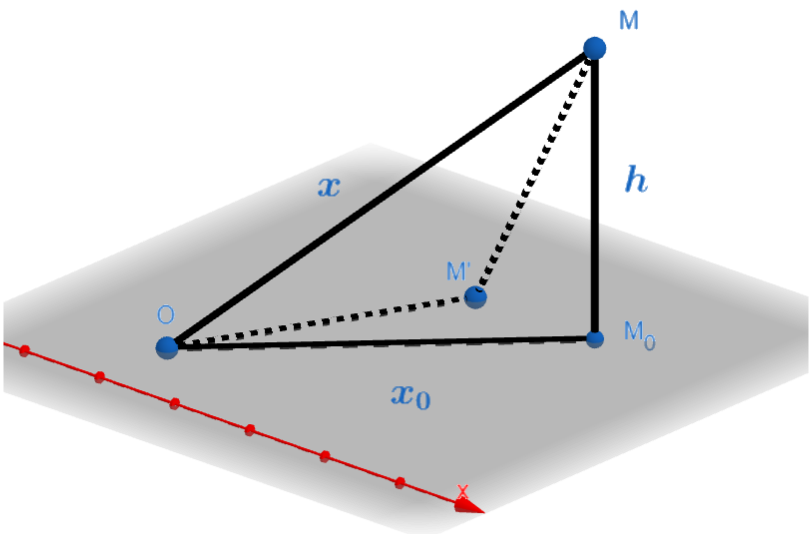
Ex. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - арифметические векторы со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

$E'^n \in C_{[a;b]}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_a^b f \cdot g dx$

$$\sqrt{\int_a^b (f \cdot g)^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx} + \sqrt{\int_a^b g^2 dx}$$

1.4. Задача о перпендикуляре

Постановка: Нужно опустить перпендикуляр из точки пространства E^n на подпространство G



Точка M - конец вектора x в пространстве E^n. Нужно найти M_0 (конец вектора x_0, проекции x на G), причем $x_0 + h = x$, где $h \perp G$. Правда ли что, длина перпендикулярного вектора h - минимальная длина от точки M до G?

Th. $h \perp G, x_0 \in G, x = x_0 + h$. Тогда $\forall x' \in G (x' \neq x_0) \quad \|x - x'\| > \|x - x_0\|$

$$\|x - x'\| = \|x - x_0 + x_0 - x'\| \overset{\text{по теореме Пифагора}}{=\!=} \|x - x_0\| + \|x_0 - x'\| = \|h\| + \|x_0 - x'\| > \|x - x_0\|$$

Nota. x_0 называется ортогональной проекцией, возникает вопрос о ее вычислении (так находятся основания перпендикуляров)

Алгоритм: представим $x_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k$, $\{e_i\}_{i=1}^k$ - базис G (необязательно ортонормированный)

Дан вектор x, пространство G, нужно найти λ_i

$h = x - x_0$, $h \perp G \quad (h, e_i) = 0$, так как $h \perp e_i \ \forall i$

$(x - x_0, e_i) = (x, e_i) - (x_0, e_i) = 0 \Longrightarrow (x, e_i) = (x_0, e_i)$

Тогда $\forall i \ (x_0, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \dots + \lambda_k (e_k, e_i)$. Здесь (e_k, e_i) - числа, а λ_i - неизвестные переменные. Из этого получаем СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_k, e_1) & (e_k, e_2) & \dots & (e_k, e_k) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \Gamma \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{pmatrix}$$

Nota. В матрице Γ нет нулевых строк, так как e_i - вектор базиса и $e_i^2 \neq 0$

Таким образом по теореме Крамера $\exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

Def. Матрицу $\Gamma = \{(e_i, e_j)\}_{i,j=1\dots k}$ называют матрицей Грама

В простейшем случае, $\Gamma = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$, если базис ортонормированный

Далее, I - единичная матрица Грама

Nota. Тогда $I \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{pmatrix}$

Приложения задачи о перпендикуляре

1. Метод наименьших квадратов

   В качестве простейшей модели зависимости $y = y(x)$ берем линейную функцию $y = \lambda x$

   Ищем минимально отстоящую прямую от данных (x_i, y_i), то есть ищем λ

   Определим расстояние (в этом методе) как $\sigma^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - y_{0i})^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \lambda x_i)^2$ - наша задача состоит в минимизации этой величины[1]

   Таким образом, ищем y_0 (ортогональная проекция) такой, что $(y - y_0)^2 = \sigma^2$ минимальна.

   Найдем производную функции $\sigma^2(\lambda)$:

   $\left(\sigma^2(\lambda)\right)' = \sum\limits_{i=1}^{n} (2\lambda x_i^2 - 2x_i y_i) = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

   Отсюда получаем $\lambda = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

   В общем случае для аппроксимирующей функции $f(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ с k неизвестными параметрами составляем $\sigma^2(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, \lambda_1, \dots, \lambda_k))^2$,

   решаем систему $\begin{cases} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \sigma^2}{\partial \lambda_k} = 0 \end{cases}$ и получаем $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

2. Многочлен Фурье

[1] Эта величина также известна как *дисперсия*

$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots a_n \cos nt + b_n \sin nt$ - линейная комбинация

Функции $1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt$ - ортогональны

Задача в том, чтобы для функции $f(t)$, определенной на отрезке $[0; 2\pi]$, найти минимально отстоящий многочлен $P(t)$ при том, что расстояние определяется как $\sigma^2 = \int_0^{2\pi} (f(t) - P(t))^2 dt$

Нужно найти a_i и b_i - обычные скалярные произведения $a_i = k \int_0^{2\pi} f(t) \cos(it) dt$, $b_i = m \int_0^{2\pi} f(t) \sin(it) dt$ (k, m - нормирующие множители)

2. Линейный оператор

2.1. Определение

Def. *Линейный оператор* - это отображение $V^n \overset{\mathcal{A}}{\Longrightarrow} W^m$ (V^n, W^m - линейные пространства размерностей $n \neq m$ в общем случае), которое $\forall x \in V^n$ сопоставляет один какой-либо $y \in W^m$ и $\boxed{\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \mathcal{A} x_1 + \mu \mathcal{A} x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2}$

Nota. Заметим, что если 0 представим как $0 \cdot x$, где $x \neq 0$, то $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(0 \cdot x) = 0 \cdot \mathcal{A}x \overset{0 \cdot y}{=} 0$

Nota. Если $V = W$, то $\mathcal{A}$ называют линейным преобразованием, но далее будем рассматривать в основном операторы $\mathcal{A}: \quad V \to V$, $\mathcal{A}: \quad V^n \to W^n$

Ex. 1. $V = \mathbb{R}^2$ - пространство направленных отрезков

$\mathcal{A} : V \to V$

$\mathcal{A}x = y = \lambda y_1 + \mu y_2$ для таких $\mathcal{A}$ как сдвиг, поворот, гомотетия, симметрия

Ex. 2. $V^n = W^m$, где $m < n$

$\mathcal{A}$ - оператор проектирования (убедиться, что он линейный)

Ex. 3. V^n - пространство числовых строк длины n

$\mathcal{A} : V^n \to V^n$

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$

Выражение $\mathcal{A}x = y$ можно представить как $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} x = y$

2.2. Действия с операторами

Def. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to W$, тогда определены операции:

1. Сумма операторов: $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x \overset{def}{=} \mathcal{A}x + \mathcal{B}x = \mathcal{C}x$
2. Произведение оператора на число: $(\lambda \mathcal{A})x \overset{def}{=} \lambda(\mathcal{A}x)$ - $\lambda \mathcal{A} = \mathcal{D}x$

Nota. Сформируем линейное пространство из операторов $\mathcal{A} : V \to W$

1. Ассоциативность сложения (очевидно)
2. Коммутативность (очевидно)
3. Нейтральный элемент $\mathcal{O}x = 0$
4. Противоположный: $-\mathcal{A} = (-1) \cdot A$

5. …Lab.

Def. $\mathcal{I}$ - тождественный оператор, если $\forall x \in V \ \mathcal{I}x = x$

Def. Пусть $\mathcal{A}: V \to W$; $\mathcal{B}: U \to V$, тогда $\mathcal{AB}$ - произведение операторов (композиция), причем $(\mathcal{AB})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$; $\quad x \in U$

Свойства:

1° $\lambda(\mathcal{AB}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$

2° $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$

3° $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$

4° $\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$

Lab. доказать

Nota. Можно обобщить 4° на n равных $\mathcal{A}$

Def. $\mathcal{A}^n = \underbrace{\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}\cdot\dots\cdot\mathcal{A}}_{n \text{ раз}}$ - степень оператора

Свойства: $\mathcal{A}^{m+n} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

2.3. Обратимость оператора

Def. $\mathcal{A}: V \to W$ так, что $\mathcal{A}V = W$ и $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V)$ $\begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \implies y_1 \neq y_2$

Тогда $\mathcal{A}$ называется взаимно-однозначно действующим

Nota: Проще сказать «линейный изоморфизм»

Th. $\{x_i\}$ - линейно независима $\stackrel{\mathcal{A}x=y}{\Longrightarrow}$ $\{y_i\}$ - линейно независима

В обратную сторону верно, если $\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен

Пусть $\mathcal{A}: V \to W$ и $0_V, 0_W$ - нули V и W соответственно

1. $\mathcal{A}(0_V) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{k} 0 \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot \mathcal{A}e_i = 0_W$
2. Докажем, что если $x_i \subset V$ - линейно независима, то $y_i \subset W$ - линейно независима

   Составим $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j = 0_W$

   От противного пусть $\{y_i\}$ - линейно зависима, тогда $\exists \lambda_k \neq 0$

   При этом $\forall j \quad y_j = \mathcal{A}x_j$ (т. к. $\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен, то $n' = m'$: кол-во x_i и y_i равно)

$\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j \mathcal{A} x_j \overset{\text{линейность}}{=} \mathcal{A}(\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j) = 0_W$

Так как $\mathcal{A}0_V = 0_W$, то 0_W - образ $x = 0_V$, но так как $\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен, то $\nexists x' \neq x \mid \mathcal{A}(x') = 0_W$

Значит $\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j = 0_V$, но $\exists \lambda_k \neq 0 \Longrightarrow \{x_j\}$ - линейно зависима - <u>противоречие</u>

3. Пусть теперь $\{y_i\}$ - линейно независима, а $\{x_i\}$ (по предположению от противного) - линейно зависима

$\sum\limits_{i=1}^{n'} \lambda_i x_i \overset{\exists \lambda_k \neq 0}{=} 0_V \quad \Big| \mathcal{A}$

$\sum\limits_{i=1}^{n'} \lambda_i \mathcal{A} x_i = 0_W$

При этом $\exists \lambda_k \neq 0 \Longrightarrow \{y_i\}$ - линейно зависима - <u>противоречие</u>

Следствие: $\dim V = \dim W \Longrightarrow \mathcal{A}$ - линейный изоморфизм

Def. $\mathcal{B} : W \to V$ называется обратным оператором для $\mathcal{A} : V \to W$, если $\mathcal{BA} = \mathcal{AB} = \mathcal{I}$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$)

Следствие: $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}x = x$

Th. $\mathcal{A}x = 0$ и $\exists \mathcal{A}^{-1}$, тогда $x = 0$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1}0_W = 0_V \Longrightarrow x = 0$

Th. Необходимые и Достаточные условия существования $\mathcal{A}^{-1}$

$\exists \mathcal{A}^{-1} \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ - взаимно-однозначный

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\exists \mathcal{A}^{-1}$, но $\sqsupset$ $\mathcal{A}$ - не взаимно-однозначен, то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0_W \overset{\exists \mathcal{A}^{-1}}{\Longrightarrow} x = 0_V \Longleftrightarrow x_1 = x_2$ - противоречие

$\boxed{\Longleftarrow}$ Так как $\mathcal{A}$ - изоморфизм (не учитывая линейность), то $\exists \mathcal{A}'$ - обратное отображение (не обязательно линейное)

Докажем, что $\mathcal{A}' : W \to V$ - линейный оператор

$\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен $\Longleftrightarrow \forall x_i \longleftrightarrow y_i \quad \Big| \cdot \lambda_i, \sum$

$\mathcal{A}\left(\sum \lambda_i x_i\right) = \mathcal{A}x = y = \sum \lambda_i y_i$ и y имеет только один прообраз x

Применим $\mathcal{A}'$ к $y = \sum \lambda_i y_i$, получим $\mathcal{A}'y = x = \sum \lambda_i x_i$ - единственный прообраз y

Таким образом, $\mathcal{A}'$ переводит линейную комбинацию в такую же линейную комбинацию прообразов, то есть $\mathcal{A}'$ - линейный: $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$

2.4. Матрица линейного оператора

Пусть $\mathcal{A} : V^n \to W^m$

Возьмем вектор $x \in V^n$ и разложим по какому-либо базису $\{e_j\}_{j=1}^n$

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n c_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{A} e_j$$

$$\mathcal{A}e_j \overset{\text{образ базисного вектора}}{=} y_j \overset{\{f_i\}-\text{ базис } W^m}{=} \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$$

$$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{A} e_j = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_j a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} f_i$$

Иллюстрация:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Def. Матрица $A = \{a_{ij}\}_{i=1..m, j=1..n}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V^n \to W^m$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства V^n

1. Для каждого ли оператора $\mathcal{A}$ существует матрица A?
   При выбранном базисе $\{e_j\}$ $\forall \mathcal{A}$ $\exists A$ (алгоритм выше)
2. Для каждой ли матрицы A существует оператор $\mathcal{A}$?
   $\forall A_{m\times n}$ можно взять пару ЛП V^n, W^m и определить $\mathcal{A} : V^n \to W^m$ по правилу $\mathcal{A}e_V = e'_W$
3. Если существует матрица A для оператора $\mathcal{A}$, то она единственная?
   Такая A единственная $\Longrightarrow$ в разных базисах матрицы ЛО $\mathcal{A}$ $\quad A_e \neq A_{e'}$
4. Если существует оператор $\mathcal{A}$ для матрицы A, то он единственный?
   Lab.

Nota. Далее будем решать две задачи:

1. преобразование координат как действие оператора
2. поиск наиболее простой матрицы в некотором базисе

2.5. Ядро и образ оператора

Def. Ядро оператора $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \overset{def}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$

Def. Образ оператора $\operatorname{Im}\mathcal{A} \overset{def}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$

Nota. $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ - подпространства V $(\mathcal{A} : V \to V)$

В общем случае $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \subset V, \operatorname{Im}\mathcal{A} \subset W$ $(\mathcal{A} : V \to W)$

Заметим, что если $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0$, то $\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен

Докажем от противного:
$\sqsupset \mathcal{A}$ - не взаимно-однозначен, то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longleftrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ - противоречие, так как $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0$

Nota. Обратное также верно:

$\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен $\Longleftrightarrow y_1 = y_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$
Докажем от противного: $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} \neq 0$, значит найдется $x = x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ $(x_1 \neq x_2)$, причем по определению ядра $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0$
А так как $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0$, то $\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$ - противоречие

Nota. Также очевидно, что
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = V$
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = V \Longrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = 0$ и $\mathcal{A} = 0$

Th. $\mathcal{A} : V \to V$, тогда $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim V$

Так как $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ - подпространство V, то можно построить дополнение до прямой суммы (взяв базисные векторы ядра, дополнить их набор до базиса V: $e_1^k, \dots e_m^k, e_{m+1}^k, \dots e_n^k$)
Обозначим дополнение W, тогда $Ker\mathcal{A} \oplus W = V \Longrightarrow \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim W = \dim V$
Докажем, что W и $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ - изоморфны
$\mathcal{A} : W \to \operatorname{Im}\mathcal{A}$
$\mathcal{A} : Ker\mathcal{A} \to 0$
Докажем, что $\mathcal{A}$ действует из W в $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ взаимно-однозначно
$\sqsupset \mathcal{A}$ не взаимно-однозначный, тогда $\exists x_1, x_2 \in W (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$
Из этого $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 \overset{\text{обозн.}}{=} x \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, причем $x \neq 0$, так как $x_1 \neq x_2$
Но так как W - дополнение до прямой суммы ($Ker\mathcal{A} \oplus W = V$, то есть $W \cup \operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0$), а $x \in W \cup \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ - противоречие $(x \neq 0)$
Из этого следует, что $\mathcal{A}$ - линейный и взаимно-однозначный $\Longrightarrow \dim W = \dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$
Получается, что V можно представить как прямую сумму $W_1 \oplus W_2$, причем $W_1 = \operatorname{Ker}\mathcal{A}, W_2 = \operatorname{Im}\mathcal{A}$

Def. Рангом оператора $\mathcal{A}$ называется $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$: $\operatorname{rang}\mathcal{A} \overset{def}{=} \dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$ (также обозначается $\mathrm{r}(\mathcal{A})$ или $\operatorname{rank}\mathcal{A}$)

Nota. Сравним ранг оператора с рангом его матрицы

$\mathcal{A}x = y \quad \mathcal{A} : V^n \to W^m$

A - матрица $\mathcal{A}, x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, y = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$

$$\mathcal{A}x = y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Или при преобразовании базиса $Ae_i = e'_i$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{pmatrix}$$

Здесь $\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T$ - это матрица $\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots \end{pmatrix}$

Nota. Поиск матрицы $\mathcal{A}$ можно осуществить, найдя ее в «домашнем» базисе $\{e_i\}$, то есть $A(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_m)$

Затем, можно найти матрицу в другом (нужном) базисе, используя формулы преобразований (см. **Th.** позже)

Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = K$ - множество векторов, которые решают систему

$AX = 0 \quad (\dim K = m = \dim \text{ФСР} = n - \operatorname{rang} A)$ и при этом $\dim K = n - \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$

$\operatorname{rang} \mathcal{A} = \operatorname{rang} A = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$

Следствия (без доказательств):

1. $\operatorname{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \leq \operatorname{rang}(\mathcal{A})$ (или $\operatorname{rang} \mathcal{B}$)
2. $\operatorname{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \geq \operatorname{rang}(\mathcal{A}) + \operatorname{rang}(\mathcal{B}) - \dim V$

Nota. Рассмотрим преобразование координат, как линейный оператор $T : V^n \to V^n$ (переход из системы $Ox_i \to Ox'_i, \ i = 1..n$)

$\dim \operatorname{Im} T = n, \dim \operatorname{Ker} T = 0 \Longrightarrow T$ - взаимно-однозначен

Поставим задачу отыскания матрицы в другом базисе, используя $T_{e \to e'}$

2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису

Th. $\mathcal{A} : V^n \to V^n$
$\{e_i\} \overset{\text{об}}{=} e$ и $\{e'_i\} \overset{\text{об}}{=} e'$ - базисы пространства V
$\mathcal{T} : V^n \to V^n$ - преобразование координат, то есть $Te_i = e'_i$
$\sqsupset A, A'$ - матрицы $\mathcal{A}$ в базисах e и e'
Тогда $A' = TAT^{-1}$ $(A'_{e'} = T_{e\to e'}AT^{-1}_{e\to e'})$

Пусть $y = \mathcal{A}x$, где x, y - векторы в базисе e ($x_e = x'_{e'}$ - один вектор)
$y' = \mathcal{A}x'$, где x', y' - векторы в базисе e'
$\mathcal{T}x = x', \mathcal{T}y = y'$
$y = Ax,\ y' = A'x'$, тогда $Ty = A'(Tx) \quad \Big| \cdot T^{-1}$
$T^{-1}Ty = (T^{-1}A'T)x$
$Ax = y = (T^{-1}A'T)x$
$A = T^{-1}A'T \Longrightarrow A' = TAT^{-1}$

Th. $A' = T_{e\to e'}AT^{-1}_{e\to e'}$

Nota. $C = A + \lambda B$

Следствия:

1. $TCT^{-1} = T(A+\lambda B)T^{-1} = TAT^{-1} + \lambda TBT^{-1}$
2. $B = I \quad TBT^{-1} = TIT^{-1} = I$, т. к. $TI = T, TT^{-1} = I$
3. $\det A^{-1} = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A \det T^{-1} = \det A \cdot 1$

Nota. То есть характеристика нашего объекта - инвариант при преобразовании T

Def. Матрица A называется ортогональной если $A^{-1} = A^T$
Следствие: $AA^{-1} = AA^T = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Для элементов матрицы:

$$\forall i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ij} = (A_i, A_i) = 1$$

$\forall i, j (i \neq j) \sum\limits_{kk=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = (A_i, A_j) = 0$

В общем, $(A_i, A_j) = \begin{bmatrix} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{bmatrix}$

Def. Оператор $\mathcal{A}$ называется ортогональным, если его матрица ортогональна

Возникает вопрос: A ортогональна в каком-либо базисе или во всех сразу?

Свойство: если $\mathcal{A}$ - ортогонален, то $\det A = \pm 1$ (следует из определения $\det(AA^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = \det(A) \cdot \det(A) = \det(I) = 1 \Longrightarrow \det(A) = \pm\sqrt{1}$)

Th. $T_{e \to e'}$ - преобразование координат в V^n. Тогда T - ортогональный оператор

Здесь базис e - ортонормированный базис

Пусть в базисе e матрица $T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$ - неортогональна

Тогда $e_1' = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_{1i} e_i \quad \Big| \cdot e_1'$

$1 = (e_1', e_1') = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \tau_{1i} e_i \right)^2 = \tau_{11}^2 e_1^2 + \tau_{11} e_1 \tau_{12} e_2 + \dots = \tau_{11}^2 + \dots + \tau_{1n}^2 = 1$, то есть строка - это единичный вектор

$0 = (e_1', e_2') = (\tau_{11} e_1 + \tau_{12} e_1 + \dots) \cdot (\tau_{21} e_1 + \tau_{22} e_2 + \dots) =$ произведение 1-ой строки на 2-ую, то есть строки ортогональны

Таким образом, матрица T - ортогональна

Nota. Тогда $A' = TAT^{-1} = TAT^T$

2.7. Собственные векторы и значения оператора

Def. Инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A} : V \to V$ - это $U = \{x \in V_1 \in V \mid \mathcal{A}x \in V_1\}$

Ex. $V = \mathcal{P}_n(t)$ - пространство многочленов степени $\leq n$ на $[a; b]$, $\mathcal{D} = \dfrac{d}{dt}$

Nota. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}, \operatorname{Im} \mathcal{A}$ - инвариантные $(A : V \to V)$

Def. Характеристическим многочленом оператора $\mathcal{A} : V \to V$ $(\mathcal{A}x = Ax, A$ - матрица в неком базисе) называют $\xi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Nota. Определитель $|A-\lambda I|$ представляет собой $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$

Nota. Уравнение $\xi(\lambda)=0$ называется вековым

Def. Собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ, называется вектор $x \neq 0$ такой, что $\mathcal{A}x = \lambda x$

Def. Собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее числу λ_i, определяется как $U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$

Def. $\dim U_{\lambda_i} = \beta$ - геометрическая кратность числа λ_i

Th. $\mathcal{A}x = \lambda x \Longleftrightarrow \det(A-\lambda I) = 0, \quad A : V^n \to V^n$

$|A-\lambda I| = 0 \Longleftrightarrow rang(A-\lambda I) < n \Longleftrightarrow \dim \operatorname{Im}(A-\lambda I) < n \Longleftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I) \geq 1$
$\exists x \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I), x \neq 0 \mid (A-\lambda I)x = 0 \Longleftrightarrow Ax - \lambda Ix = 0 \Longleftrightarrow Ax = \lambda x$

Nota. По основной теореме алгебры вековое уравнение имеет n корней (не всех из них вещественные). В конкретном множестве $\mathcal{K} \ni \lambda$ их может не быть

Def. Кратность корня λ_i называется алгебраической кратностью

Th. $\lambda_1 \neq \lambda_2 (\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2) \Longrightarrow x_1, x_2$ - линейно независимы

Составим комбинацию: $c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \quad \Big| \cdot \mathcal{A}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0, \sqsupset \lambda_2 \neq 0$
$c_1\mathcal{A}x_1 + c_2\mathcal{A}x_2 = 0 \Longleftrightarrow c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 = 0$
Умножим $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ на λ_2: $c_1\lambda_2x_1 + c_2\lambda_2x_2 = 0$
$c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 - c_1\lambda_2x_1 - c_2\lambda_2x_2 = 0$
$c_1x_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$
Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по условию, $x_1 \neq 0$ - собственный вектор, поэтому $c_1 = 0$, а комбинация линейно независима
Если $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$: $c_2\lambda_2x_2 = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$

Nota. Приняв доказательство за базу индукции, можно доказать линейную независимость для k-ой системы собственных векторов для попарно различных k чисел λ

Th. $\lambda_1, \dots \lambda_p$ - различные собственные значения $\mathcal{A} : V \to V$, им соответствуют U_{λ_i} - собственные подпространства V для λ_i
Пусть $e^{(1)} = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}\}, e^{(2)} = \{e_1^{(2)}, \dots, e_{k_2}^{(2)}\}, \dots$ - базисы $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots$
Составим систему $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$
Тогда система e - линейно независима

Составим линейную комбинацию:

1. Пусть $\overbrace{\alpha_1 e_1^{(1)} + \dots + \alpha_{k_1} e_{k_1}^{(1)}}^{x_1 \in U_{\lambda_1}} + \dots + \overbrace{\gamma_1 e_1^{(p)} + \dots + \gamma_{k_p} e_{k_p}^{(p)}}^{x_p \in U_{\lambda_p}} = 0$
   Тогда $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0$ (x_i - линейно независимы, так как λ_i - различны) - этого не может быть, так как $\forall i \; x_i \neq 0$ (как собственный вектор)
2. В $\forall U_{\lambda_i}$ содержится 0-вектор. Тогда $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \iff \forall x_i = 0$
   Но $x_j = \sum_{j=1}^{k_i} c_i e_i^{(j)} = 0$ ($e_i^{(j)}$ - базисные, то есть линейно независимы) $\implies \forall c_j = 0$ (комбинация должна быть тривиальна)

Nota. Таким образом, объединение базисов собственных подпространств U_{λ_i} образует линейно независимую систему в V^n
Что можно сказать о размерности системы $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$?
Обозначим $S = \sum_{i=1}^{p} \dim U_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{p} \beta_i$, где β_i - геометрическая кратность λ_i
Очевидно, что $S \le n$

Th. $S = n \iff \exists$ базис V^n, составленный из собственных векторов

Система $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$ состоит из собственных векторов
Если $S = n$, получаем n собственных векторов, линейно независимых - базис V^n
Если $\exists$ базис из n лин. незав. собственных векторов, тогда $\dim e = S = n$

Nota. Условие **Th.** равносильно: $V^n = \bigoplus_{i=1}^{p} U_{\lambda_i} (\lambda_i \neq \lambda_j)$

Действительно: $\dim V^n = \sum_{i=1}^{p} \dim U_{\lambda_i}$ и $\forall i, j \; U_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_j} = 0$

Ex. Если $\exists n$ различных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то $\dim U_{\lambda_i} = 1 \forall i$

Def. Оператор $\mathcal{A}$ диагонализируемый, если существует базис e такой, что A_e - диагональна

Th. $\mathcal{A}$ - диагонализируем $\Longleftrightarrow$ существует базис из собственных векторов

$\boxed{\Longleftarrow}$ $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис собственных векторов

Собственный вектор по определению: $\exists \lambda_i \mid \mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + 0 \cdot e_n$

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1 + \sum_{k \neq 1} 0 \cdot e_k \\ \mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2 + \sum_{k \neq 2} 0 \cdot e_k \\ \vdots \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}_e \cdots e_i = \mathcal{A}e_i$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\exists f$ - базис, в котором A_f - диагональная (по **Def.** $\mathcal{A}$ - диагонализируем)

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Применим $\mathcal{A}$ к $f_i \in f$

$\mathcal{A}f_i = A_f f_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} f_i = \alpha_i f_i \Longrightarrow \alpha_i$ - собственное число (по def), а f_i - собственный вектор

Nota. О связи алгебраической и геометрической кратностей (α - алгебраическая, β - геометрическая кратность)

1. α, β не зависят от выбора базиса

   β_i по определению $\dim U_{\lambda_i}$ и не связана с базисом

   Для α: строим вековое уравнение $|A_f - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda_i$ с кратностью α_i, $\alpha = \sum \alpha_i$

   $\exists\, A_g$ - матрица $\mathcal{A}$ в базисе g

   Но $A_g = T_{f \to g} A_f T_{g \to f}$ или для оператора

   $A_g - \lambda I = T_{f \to g}(A_f - \lambda I) T_{g \to f} = \overbrace{T_{f \to g} A_f T_{g \to f}}^{=A_g} - \overbrace{\lambda T_{f \to g} I T_{g \to f}}^{=\lambda I} = A_g - \lambda I$

   Таким образом, матрицы $A_g - \lambda I$, $A_f - \lambda I$ - подобные

   Def. Подобные матрицы - матрицы, получаемые при помощи преобразования координат

   Тогда $\det(A_f - \lambda I) = \det(A_g - \lambda I)$ (инвариант) $\Longrightarrow$ одинаковая кратность

2. Геометрическая кратность не превышает алгебраической. У диагонализируемого опера-

тора $\alpha = \beta$

2.8. Самосопряженные операторы

1* Сопряженные операторы

Далее будем рассматривать операторы только в евклидовом пространстве над вещественном полем. Пространство со скалярным произведением над комплексным полем называется унитарным

Мет. Скалярное произведение $(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - функция, со свойствами:

1. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
3. $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$
4. $(x, y) = (y, x)$ в $\mathbb{R}$. Но в комплексном множестве: $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Тогда $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)}$

Важно, что линейность по первому аргументу присутствует и в $\mathbb{R}$, и в $\mathbb{C}$, то есть $(\lambda x, y) \overset{\mathbb{R}, C}{=} \lambda(x, y)$

Однако:

- $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ в $\mathbb{R}$
- $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$ в C

Def. 1. Оператор $\mathcal{A}^*$ называется сопряженным для $\mathcal{A} : V \to V$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$

Def. 2. $\mathcal{A}^*$ сопряженный для $\mathcal{A}$, если $A^* = A^T$ в любом ортонормированном базисе

Def. 1. $\Longleftrightarrow$ **Def. 2.**

$$(\mathcal{A}x, y) \overset{\text{на языке матриц}}{=\!=\!=} (AX, Y) = (AX)^T \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y$$
$$||$$
$$(x, \mathcal{A}^* y) = X^T \cdot (A^* Y) = (X^T A^*) \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y \Longrightarrow A^* = A^T$$

Lab. Очевидно существование $\mathcal{A}^*$ для всякого $\mathcal{A}$ (определяется в ортонормированном базисе действием $\mathcal{A}^T$). Доказать единственность $\mathcal{A}^*$ рассмотреть от противного $(x, \mathcal{A}_1^* y) \neq (x, \mathcal{A}_2^* y)$

Свойства:

1. $\mathcal{I} = \mathcal{I}^* \quad \square (\mathcal{I} x, y) = (x, y) = (x, \mathcal{I} y) \quad \square$
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
3. $(\lambda \mathcal{A})^* = \lambda \mathcal{A}^*$
4. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
5. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$ (св-во транспонирования матриц)
   или $((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^* y) = (x, \mathcal{B}^* \mathcal{A}^* y)$
6. $\mathcal{A}^*$ - линейный оператор $(\mathcal{A}x = x', \mathcal{A}y = y' \Longrightarrow \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda x' + \mu y')$
   Можно использовать линейные свойства умножения матриц $A^*(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathcal{A}^* X + \mu \mathcal{A}^* Y$

2* Самосопряженный оператор

Def. $\mathcal{A}$ называется самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Следствие: $A^T = A \Longrightarrow$ матрица A симметричная

Свойства самосопряженных операторов:

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, $\lambda:\ \mathcal{A}x = \lambda x (x \neq 0)$. Тогда, $\lambda \in \mathbb{R}$

$(\mathcal{A}x, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad (x, \mathcal{A}^* y) = (x, \mathcal{A}y) = (x, \lambda y) \overset{\text{в } C}{=} \overline{\lambda}(x, y)$

$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \Longrightarrow \lambda(x, y) = \overline{\lambda}(x, y) \Longrightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

2. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $x_1 \perp x_2$

Хотим доказать, что $(x_1, x_2) = 0$, при том, что $x_{1,2} \neq 0$

$\lambda_1(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = (\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = (x_1, x_2)\lambda_2$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \Longrightarrow (x_1, x_2) = 0$

Th. Лемма. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, e - собственный вектор ($l_{\{e\}}$ - линейная оболочка e - инвариантное подпространство для $\mathcal{A}$)

$V_1 = \{x \in V \mid x \perp e\}$

Тогда V_1 - инвариантное для $\mathcal{A}$

Нужно доказать, что $\forall x \in V_1\ \mathcal{A}x \in V_1$ и так как $x \in V_1 \mid x \perp e$, то покажем, что $\mathcal{A}x \perp e$

$(\mathcal{A}x, e) = (x, \mathcal{A}e) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) \overset{x \perp e}{=\!=} 0$

Th. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ($\mathcal{A}: V^n \to V^n$), тогда $\exists e_1, \dots, e_n$ - набор собственных векторов $\mathcal{A}$ и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

Другими словами: $\mathcal{A}$ - диагонализируем

Наводящие соображения:

Ex. 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$\mathcal{I}x = x = 1 \cdot x, \quad \lambda_{1,2,3} = 1$

Здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ - базис из собственных векторов, ортонормированный

Ex. 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$

$\mathcal{O}x = 0, \quad \lambda_{1,2,3} = 0$

И здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, так как $0 \in U_\lambda$ и $\forall x\ \mathcal{O}x = 0 \in U_\lambda$

Ex. 3. Поворот $\mathbb{R}^2$ на $\dfrac{\pi}{4}$

$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)^2 + \dfrac{1}{2} = 0$ - вещественных корней нет

Пусть e_1 - собственный вектор $\mathcal{A}$

e_1 найдется, если $\mathcal{A}x = \lambda x$ имеет нетривиальное решение $\Longleftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0$ $\overset{\mathcal{A}\text{ - самосопряженный}}{\Longrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R}$

Для вектора e_1 строим инвариантное подпространство $V_1 \perp e_1$ (см. лемму), $\dim V_1 = n - 1$

В подпространстве V_1 $\mathcal{A}$ действует как самосопряженный и имеет собственный вектор $e_2 \perp e_1$. Для e_2 строим $V_2 \perp e_2, e_1$

Затем, $V_3, V_4, V_5, \ldots,$ в котором, найдя e_i, ортогональный всем предыдущим

Составили ортогональный базис из e_i, который можно нормировать

Nota. Чтобы упорядочить построение базиса, в котором V_i может брать $\max \lambda_i$

Nota. Из теоремы следует, что самосопряженный оператор диагонализируется: сумма алгебраический кратностей равна n (степень уравнения), а сумма геометрических - $\dim\{e_1, \ldots, e_n\} = n$

Разложение самосопряженного оператора в спектр:

$x \in V^n \quad \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис из собственных векторов $\mathcal{A}$ (ортонормированный)

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = (x, e_1)e_1 + \cdots + (x, e_n)e_n = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i$$

Def. Оператор $P_i x = (x, e_i)e_i$ называется проектором на одномерное пространство, порожденное e_i (линейная оболочка)

Свойства:

1. $P_i^2 = P_i$ (более того $P_i^m = P_i$)
2. $P_i P_j = 0$
3. $P_i = P_i^* \quad ((P_i x, y) \overset{?}{=} (x, P_i y)) \Longleftrightarrow (P_i x, y) = ((x, e_i)e_i, y) = (x, e_i)(e_i, y) = (x, (y, e_i)e_i) = (x, P_i y)$

Итак, если $\mathcal{A} : V^n \to V^n$ - самосопряженный и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис собственных векторов $\mathcal{A}$, то

$x = \sum_{i=1}^{n} P_i x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$

$\mathcal{A}x \overset{y=\Sigma(y,e_i)e_i}{=} \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{A}x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} (x, \mathcal{A}e_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} (x, \lambda_i e_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x$

$\Longleftrightarrow \mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$ - спектральное разложение $\mathcal{A}$, спектр $= \{\lambda_1, \dots, \lambda_n \mid \lambda_i \leq \dots \leq \lambda_n\}$

Ex. $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 = (y, e_1) e_1 + (y, e_2) e_2 = (\mathcal{A}x, e_1) e_1 + (\mathcal{A}x, e_2) e_2 = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$

2.9. Ортогональный оператор

Мет. Ортогональный оператор $T : V^n \to V^n \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ для любого ортонормированного базиса матрица T - ортогональная $T^{-1} = T^T$

Nota. Иначе говоря, T - ортогональный оператор $\Longleftrightarrow T^{-1} = T^* \Longrightarrow TT^* = I$

Def. T - ортогональный оператор, если $(Tx, Ty) = (x, y)$
Следствие: $\|Tx\| = \|x\|$, то есть T сохраняет расстояние

Nota. Ранее в теореме об изменении матрицы A при преобразовании координат T - ортогональный оператор
Это необязательно, то есть можно переходить в другой произвольный базис (доказательство теоремы позволяет)
Диагонализация самосопряженного оператора: для матрицы A_f

1. Находим $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
2. Находим $e_1, \dots e_n$ - ортогональный базис собственных векторов
3. Составляем $T = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица поворота базиса
4. Находим $T_{e \to f} A_f T_{f \to e} = A_e$ - диагональная

Таким образом диагонализация самосопряженного $\mathcal{A}$ - это нахождение композиции поворотов и симметрий, как приведение пространства к главным направлением

3. Билинейные и квадратичные формы

3.1. Билинейные формы

Def. Пусть $x, y \in V^n$. Отображение $\mathcal{B} : V^n \to \mathbb{R}$ (обозначается $\mathcal{B}(x, y)$) называется билинейной формой, если выполнены

1. $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\mathcal{B}(x, z) + \mu\mathcal{B}(y, z)$
2. $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\mathcal{B}(x, y) + \mu\mathcal{B}(x, z)$

Ex. 1. $\mathcal{B}(x, y) \overset{\text{в } E^n_{\mathbb{R}}}{=} (x, y)$

Ex. 2. $\mathcal{B}(x, y) = P_y x$ - проектор x на y

Для билинейной формы можно определить матрицу

Th. $\{e_i{}_{i=1}^n$ - базис V_n, $u, v \in V^n$. Тогда $\mathcal{B}(u, v) = \sum\limits_{j=1}^n \sum\limits_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j$, где $b_{ij} \in \mathbb{R}$

$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$

$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$

$$\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{B}(e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j) = \sum_{i=1}^n u_i (\sum_{j=1}^n v_j \mathcal{B}(e_i, e_j)) \overset{\text{обозн. } \mathcal{B}(e_i, e_j) = b_{ij}}{=} \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n v_j b_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j b_{ij}$$

Nota. Составим из $\mathcal{B}(e_i, e_j)$ матрицу $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$

Def. 1. Если $\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}(v, u)$, то $\mathcal{B}$ - симметричная

Def. 2. Если $\mathcal{B}(u, v) = -\mathcal{B}(v, u)$, то $\mathcal{B}$ - антисимметричная

Def. 3. Если $\mathcal{B}(u, v) = \overline{\mathcal{B}(v, u)}$, то $\mathcal{B}$ - кососимметричная (в $\mathcal{C}$)

Def. $\operatorname{rang} \mathcal{B}(u, v) \overset{def}{=} \operatorname{rang} B$

Nota. 1. $\mathcal{B}$ называется невырожденной, если $\operatorname{rang} \mathcal{B} = n$

Nota. 2. $\operatorname{rang}\mathcal{B}_e = \operatorname{rang}\mathcal{B}_{e'}$ (e, e' - различные базисы V^n), то есть $\operatorname{rang}\mathcal{B}$ инвариантно относительно преобразования $e \to e'$

Ex. $\mathcal{B}(u,v) \overset{\text{ск. пр.}}{=} (u,v)$
$u = u_1e_1 + u_2e_2, v = v_1e_1 + v_2e_2$, тогда $\mathcal{B}(e_i,e_j) \overset{\text{об}}{=} b_{ij} = (e_i,e_j)$
Таким образом, $B = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) \end{pmatrix}$ - матрица Грама

Ex. $u(t) = 1+3t, v(t) = 2-t$, $\{e_i\} = (1,t)$, $\mathcal{B}(u,v) = (u,v) = \displaystyle\int_{-1}^{1} uvdt$
Тогда, $B = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 dt & \int_{-1}^1 tdt \\ \int_{-1}^1 tdt & \int_{-1}^1 t^2dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Nota. Особое значение имеют симметричные билинейные формы. Если рассмотреть матрицы симметричную билинейную форму как матрицу самосопряженного оператора, то можно найти базис (ортонормированный базис собственных векторов), в котором матрица билинейной формы диагонализируется
Этот базис называется каноническим базисом билинейной формы

3.2. Квадратичные формы

Def. Квадратичной формой называется форма $\mathcal{B}(u,u)$, порожденная билинейной формой $\mathcal{B}(u,v)$

Ex. Поверхность: $u = (x,y), v = (x,y,z)$
$\mathcal{B}(u,u) = b_{11}u_1u_1 + b_{12}u_1u_2 + b_{21}u_2u_1 + b_{22}u_2u_2 = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{21}xy + b_{22}y^2$
$$\begin{aligned}\mathcal{B}(v,v) &= \beta_{11}x^2 + \beta_{12}xy + \beta_{13}xz + \beta_{21}xy + \beta_{22}y^2 + \beta_{23}yz + \beta_{31}xz + \beta_{32}yz + \beta_{33}z^2 \\ &= \beta_{11}x^2 + \beta_{22}y^2 + \beta_{33}z^2 + (\beta_{12}+\beta_{21})xy + (\beta_{23}+\beta_{32})yz + (\beta_{13}+\beta_{31})xz\end{aligned}$$
Mem. Ранее уравнение поверхности второго порядка (без линейной группы, то есть сдвига):
$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = c$

Nota. Заметим, что здесь коэффициент a_{ij} соответствуют матрице симметричной билинейной форме:
$B(v,v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$
Если диагонализировать $B(v,v)$, то уравнение поверхности приводится к каноническому виду:
$\mathcal{B}(v,v)_{\text{канон.}} = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2$

Поэтому квадратичная форма, соответствующая поверхности второго порядка, рассматривается, как форма, порожденная симметричной билинейной формой

Def. Положительно определенная форма

1) Оператор $\mathcal{A}$ называется положительно определенным, если $\exists\gamma > 0 \mid \forall x \in V \quad (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma\|x\|^2$
2) $\mathcal{A}$ называется положительным, если $\forall x \in V,\ x \neq 0 \quad (\mathcal{A}x, x) > 0$

Nota. Можно говорить о положительно определенном операторе $\mathcal{A} : V^n \to V^n$

Th. Определения 1), 2) $\iff \forall\lambda_i$ - собственное число $\mathcal{A}$, $\lambda_i > 0$

$\boxed{\implies}$ λ_i - собственное число, e_i - соответствующий ему собственный вектор

$\forall x \in V \quad x = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i$

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \overbrace{\mathcal{A}e_i}^{\lambda_i e_i}, \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\min} c_i^2 = \lambda_{\min} \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \lambda_{\min}\|x\|^2$$

Если $0 < \lambda_{\min} < \lambda_i, \lambda_i \neq \lambda_{\min}$, то $(\mathcal{A}x, x) > 0$

$\boxed{\impliedby}$ 1) $\iff \exists\gamma > 0 \mid (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma\|x\|^2 \quad \forall x \in V$ в том числе $x = e_i \neq 0$

$(\mathcal{A}e_i, e_i) = \lambda_i(e_i, e_i) = \lambda_i > 0\ \forall i$

Nota. $\det A$ инвариантен при замене базиса, $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n > 0$. Тогда $\exists\mathcal{A}^{-1}$

Th. Критерий Сильвестра.

$$\mathcal{A} : V^n \to V^n \text{ - положительно определен} \iff \forall k = 1..n\ \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

Угловой минор матрицы положительно определенного оператора больше нуля

$\boxed{\implies}$ $\mathcal{A}$ - положительно определен, значит, $\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ собственных векторов. Тогда, $\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_k\}$, $k \leq n$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \Delta_k = \det A_k \overset{inv}{=} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix} > 0$$

$\boxed{\impliedby}$ Метод математической индукции

$\forall k = 1..n, \Delta_k > 0$, тогда:

1. База: для $k = 1 \quad \mathcal{A}$ - положительно определен
   $\mathcal{A}x = a_{11}x \quad |a_{11}| > 0 \implies \mathcal{A}$ - положительно определен

2. Шаг индукции: $\mathcal{A}_{n-1}$ - положительно определен $\Longrightarrow \mathcal{A}_n$ - положительно определен

   $\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе e_i, в этом базисе:

$$\mathcal{A}_e x = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n \qquad \text{Для } i \le n-1 \text{ все } \lambda_i > 0$$

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n, \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i \right) = \overbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i^2}^{>0} + \lambda_n c_n^2 \text{ - знак зависит от } \lambda_n$$

$$\Delta_n = \underbrace{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}_{>0} \cdot \lambda_n \Longrightarrow \lambda_n > 0 \Longrightarrow (\mathcal{A}x, x) > 0$$

Ex. Поверхность: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\mathcal{B}(u,u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_k = 1 > 0 \ \forall k$$

Положительная определенность - наличие экстремума[2]

Def. Оператор $\mathcal{A}$ называется отрицательно определенным, если $-\mathcal{A}$ - положительно определенный

Nota. Для $-\mathcal{A}$ работает критерий Сильвестра: $\Delta_k(-\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k(\mathcal{A}) > 0$

Таким образом, $\mathcal{A}$ - отрицательно определен $\Longleftrightarrow \Delta_k$ чередует знаки

Nota. Аналогично операторам определяются положительно или отрицательно билинейные формы

$$\mathcal{B}(u,v) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i = (\mathcal{A}u, v)$$

Так как $\mathcal{B}(u,v)$ и $\mathcal{B}(u,u)$ - числа, то $\mathcal{B}$ называется положительно определенным, если $\mathcal{B}(u,v) > 0$

Nota. После приведения $\mathcal{B}(u,v)$ к каноническому виду, получаем $\mathcal{B}(u,u)_{\text{канон.}} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ В общем случае λ_i любого знака, но можно доказать, что количества $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$ постоянны по отношению к способу приведения к каноническому виду (так называемый закон инерции квадратичной формы)

[2] Точнее положительная определенность матрицы Гессе $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$ в критической точке, в которой $\nabla f = 0$, является достаточным условием для наличия в этой точке строгого локального минимума функции

4. Дифференциальные уравнения

4.1. Общие понятия

4.1.1. Постановка задачи

Pr. 1. Скорость распада радия в текущий момент времени t пропорциональна его наличному количеству Q. Требуется найти закон распада радия:

$$Q = Q(t),$$

если в начальный момент времени $t_0 = 0$ количество равнялось $Q(t_0) = Q_0$
Коэффициент пропорциональности k найден эмпирически.

Решение. Имеем уравнение $\dfrac{dQ(t)}{dt} = kQ$, ищем $Q(t)$

$dQ(t) = kQdt$

$\underbrace{\dfrac{dQ(t)}{Q}}_{\text{содержит только } Q} = \underbrace{kdt}_{\text{содержит только } t}$ «разделение переменных»

$d\ln Q = kdt = dkt$ вносим k в дифференциал

Получаем $d(\ln Q - kt) = 0$. Находим семейство первообразных:

$\ln Q - kt = \tilde{C} \Longrightarrow \ln Q = \tilde{C} + kt$

$Q = e^{\tilde{C}+kt} \overset{e^{\tilde{C}}=C}{=\!=} Ce^{kt}$

По смыслу $k < 0$, так как Q уменьшается. Обозначим $n = -k, n > 0$

Тогда $\boxed{Q(t) = Ce^{-nt}}$

Получили вид закона распада. Выбор константы C определен начальными условиями (НУ):

$t_0 = 0 \quad Q(t_0) = Q_0 = C$

Тогда, закон – $\boxed{Q^*(t) = Q_0 e^{-nt}}$

Nota. Оба закона – общий $Q(t) = Ce^{-nt}$ и частный $Q^*(t) = Q_0e^{-nt}$ – являются решением дифференциального уравнения:

Явный вид	В дифференциалах
$Q'(t) = kQ$	$d\ln Q(t) - kdt = 0$

Pr. 2 Тело массой m брошено вверх с начальной скоростью v_0. Нужно найти закон движения $y = y(t)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

По II закону Ньютона:

$m\vec{a} = m\vec{g} \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$a = \boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g}$ - дифференциальное уравнение

<u>Решение.</u> $y''(t) = -g$

$(y'(t))' = -g$

$y'(t) = -\int g dt = -gt + C_1$

$y(t) = \int (-gt + C_1)dt = \boxed{-\dfrac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = y(t)}$ - общий закон

Коэффициенты $C_{1,2}$ ищем из начальных условий

В задаче нет условия для $y(t_0)$. Возьмем $y_0 = y(t_0) = 0$

Кроме того $y'(t_0) = v(t_0) = v_0$

Таким образом, $\begin{cases} y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$

Найдем C_1: $y'(t_0) = y(0) = -gt_0 + C_1 = v_0 \quad C_1 = v_0$

Найдем C_2: $y(t_0) = y(0) = -\dfrac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = C_2 = 0$

Частный закон: $\boxed{y^*(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}}$

4.1.2. Основные определения

Def. 1. Уравнение $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ - называется обыкновенным ДУ n-ого порядка $(*)$

Ex. $Q' + nQ = 0$ и $y'' + g = 0$

Def. 2. Решением ДУ $(*)$ называется функция $y(x)$, которая при подстановке обращает $(*)$ в тождество

Def. 2′. Если $y(x)$ имеет неявное задание $\Phi(x, y(x)) = 0$, то $\Phi(x, y)$ называется интегралом уравнения $(*)$

Nota. Разделяют общее решение ДУ - семейство функций, при этом каждое из них - решение; и частное решение - отдельная функция

Def. 3. Кривая с уравнением $y = y(x)$ или $\Phi(x, y(x)) = 0$ называют интегральной кривой

Def. 4. $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$ - система начальных условий $(**)$

Тогда $\begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases}$ - задача Коши (ЗК)

Nota. Задача Коши может не иметь решений или иметь множество решений

Th. $y' = f(x, y)$ - ДУ

$M_0(x_0, y_0) \in D$ - точка, принадлежащая ОДЗ

Если $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в M_0, то задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $\varphi(x, y) = 0$, удовлетворяющее начальным условиям (без док-ва)

Nota. Преобразуем ДУ: $\underbrace{y' - f(x, y)}_{F(x, y(x), y'(x))} = 0$

См. определения обыкновенных и особых точек

Def. 5. Точки, в которых нарушаются условия теоремы, называются особыми, а решения, у которых каждая точка особая, называются особыми

Def. 6. Общим решением ДУ $(*)$ называется $y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$

Nota. $\Phi(x, y(x), C_1, \ldots, C_n) = 0$ - общий интеграл

Def. 7. Решением $(*)$ с определенными значениями $C_1^*, \ldots, C_n^*$ называется частным

Nota. Форма записи:

Разрешенное относительно производной $y' = f(x, y)$

Сведем к виду: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x, y)}{-Q(x, y)} \Longrightarrow -Q(x, y)dy = P(x, y)dx \Longrightarrow \boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0}$ - форма в дифференциалах

4.2 ДУ первого порядка (ДУ$_1$)

Nota. Среди ДУ$_1$ рассмотрим несколько типов точно интегрируемых ДУ

1. Уравнение с разделяющимися переменными (УРП)
2. Однородное уравнение (ОУ)
3. Уравнение полных дифференциалов (УПД)
4. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (ЛДУ$_1$)

Кроме этого интегрируются дифференциальные уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Рикатти и др. (см. литературу)

4.2.1. УРП

Def. $\boxed{m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0}$ – уравнение с разделяющимися переменными

<u>Решение</u>: при $N(y)M(x) \neq 0$ получаем

$$\frac{m(x)}{M(x)}dx + \frac{n(y)}{N(y)}dy = 0,$$

где $y = y(x)$ – неизвестная функция (ее ищем, решая ДУ)

$$\left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y'\right)dx = 0$$

Интегрируем по dx:

$$\int \left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y'\right)dx = const$$

По свойствам интеграла:

$$\int \frac{m(x)}{M(x)}dx + \int \frac{n(y)}{N(y)}dy = const$$

или: $\boxed{\int \frac{m(x)}{M(x)}dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)}dy}$

Ex. $xdy - ydx = 0$

$xdy = ydx \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad (x, y \neq 0)$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + \tilde{C} = \ln|\tilde{\tilde{C}}x|$

$|y| = |\tilde{\tilde{C}}x|$

$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$

Заметим, $x = y = 0$ – решение, но они учтены общим решением $y = Cx$, (при $C = 0, y = 0$) и подстановкой в ДУ $x = 0$

Nota. В процессе решения нужно проверить $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$

$M(x) = 0$ при $x = a$ и $N(y) = 0$ при $y = b$

$m(a)\underbrace{N(b)}_{=0}dx + n(b)\underbrace{M(a)}_{=0}dy = 0$

То есть $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$ - решение

4.2.2. ОУ

Def. 1. Однородная функция n-ого порядка называется функция $f(x, y)$ такая, что

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

Ex. $f=\cos\left(\dfrac{x}{y}\right), \cos\left(\dfrac{\lambda x}{\lambda y}\right)=\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ – нулевой порядок однородности

$f=\sqrt{x^2+y^2}$ – первый порядок

Def. 2. $\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0}$, где $P(x,y), Q(x,y)$ – однородные функции одного порядка, называется однородным уравнением

Решение: $P(x,y)=P\left(x\cdot 1, x\cdot\dfrac{y}{x}\right)=x^kP\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$

$Q(x,y)=x^kQ\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$

Тогда, $P\left(1,\dfrac{y}{x}\right)dx+Q\left(1,\dfrac{y}{x}\right)dy=0.$

Обозначим $\dfrac{y}{x}=t, \quad y'=\dfrac{dy}{dx}\overset{y=tx}{=}t'_xx+tx'_x=t'_xx+t$

$P(1,t)+Q(1,t)y'=P(1,t)+Q(1,t)(t'x+t)=0$

$t'x+t=-\dfrac{P(1,t)}{Q(1,t)}\overset{\text{обозн}}{=}f(t)$

$t'x=f(t)-t$

- Если $f(t)-t\neq 0$, то получаем уравнение с разделяющимися переменными:
  $\dfrac{dt}{f(t)-t}=\dfrac{dx}{x}$
  $\displaystyle\int\dfrac{dt}{f(t)-t}=\int\dfrac{dx}{x}=\ln|Cx|$
  $Cx=e^{\int\frac{dt}{f(t)-t}}=\varphi(x,y)$ - общий интеграл
- Если $f(t)-t=0$, а $t=k$ - корень уравнения $f(t)-t=0$, тогда $y=kx$ - тоже решение

Ex. $(x+y)dx+(x-y)dy=0$

$\dfrac{y}{x}=t \quad y'=t'x+t \quad dy=(t'x+t)dx$

$(x+tx)dx+(x-tx)(t'x+t)dx=0$

$(1+t)+(1-t)(t'x+t)=0$

$t'(1-t)x+t-t^2+1+t=0$

$t'(1-t)x=t^2-2t-1$

$\dfrac{(1-t)dx}{t^2-2t-1}=\dfrac{dx}{x}$ - УРП

$\dfrac{(1-t)dt}{(1-t)^2-2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{d((1-t)^2)-2}{(1-t)^2-2}=-\dfrac{1}{2}\ln|(1-t)^2-2|=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(1-t)^2-2}}=\ln|Cx|$

$\tilde{C}x=\dfrac{1}{\sqrt{(1-t)^2-2}}\iff Cx^2=\dfrac{1}{(1-t)^2-2}\iff Cx^2((1-t)^2-2)=1$

$C((y-x)^2-2x^2)=1$

$C(y^2-2xy-x^2)=1$

$y^2-2xy-x^2=C$ - гиперболы

$(t-1)^2-2=0 \quad \dfrac{y}{x}=1\pm\sqrt{2} \quad y=(1\pm\sqrt{2})x$ - асимптоты

4.2.3. УПД

Def. $\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0}$ при $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ – уравнение в полных дифференциалах

Решение:

Мет. **Th. Об интеграле НЗП.** $\exists\Phi(x,y)\mid d\Phi=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$\Phi(x,y)=\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$

Ex. $(x+y)dx+(x-y)dy=0\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$\Phi(x,y)=\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_{(0,0)}^{(x,0)}xdx+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(x-y)dy=\frac{x^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(x,0)}+\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{(x,0)}^{(x,y)}=\frac{x^2}{2}+$
$xy-\dfrac{y^2}{2}+C$ - общий интеграл

$x^2+2xy-y^2=C$

4.2.4. ЛДУ

Def. $\boxed{y'+p(x)y=q(x)}$, где $p,q\in C_{[a,b]}$, – линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Nota. Будем решать методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Принцип: если удалось найти частное решение ДУ$_{\text{однор}}$ (обозначим y_0), то общее решение ДУ$_{\text{неод}}$ можно искать в виде $y=C(x)y_0$

Def. Однородное (ЛОДУ): $y'+p(x)y=0$

Def. Неоднородное (ЛНДУ): $y'+p(x)y=q(x)$

Ex. Пусть $y(x)=x^2e^{-x}$ - частное решение ЛНДУ

А $y_0=xe^{-x}$, тогда $y=xxe^{-x}=C(x)xe^{-x}$

То есть $C(x)$ варьируется, чтобы получить решение $y=y(x)$

Решение:

1. для ЛОДУ $y'+p(x)y=0$
   $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$ – УРП, тогда $\dfrac{dy}{y}=-p(x)dx$
   $\ln|\tilde{C}y|=-\displaystyle\int p(x)dx$
   $\overline{y}=Ce^{-\int p(x)dx}=Cy_0$ – общее решение ЛОДУ
2. для ЛНДУ $y'+p(x)y=q(x)$

Ищем $y(x)$ в виде $y = C(x)y_0$

$C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$

$C'(x)y_0 + C(x)\underbrace{(y_0' + p(x)y_0)}_{=0} = q(x)$

$C'(x) = \dfrac{q(x)}{y_0} = q(x)e^{\int p(x)dx}$

$C(x) = \displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

Окончательно, $y(x) = \left(\left(\displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C\right)dx\right)e^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int pdx} + e^{-\int pdx}\displaystyle\int qe^{\int pdx} = \overline{y} + y^*$

4.3. Существование и единственность решения

Мет. **Th.** Для задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$ если $\exists U(M_0)$, в которой $f(x,y) \in C_{U(M_0)}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ограничена в $U(M_0)$, то в M_0 $\exists! y(x)$ – решение ДУ

Решение ДУ называется особым, если в любой его точке нарушается **Th.** существования и единственности, то есть через каждую точку проходит несколько интегральных кривых

Def. Уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ задает поле интегральных кривых, заполняющих область D. Соответственно точки D могут быть особыми или обыкновенными (выполняются условия **Th.**)

Условия особого решения $P(x,y)$ или $Q(x,y) = 0$

Ex. 1.

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \longrightarrow \sqrt{1-y^2}dx - dy = 0$$

Обычное решение	Особое решение:
$\arcsin y = x + C$	$p = \sqrt{1-y^2} = 0$
$y = \sin(x+C)$	$1 - y^2 = 0 \to y = \pm 1$

Ex. 2.

$$\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy = dx \longrightarrow y^{-\frac{2}{3}}dy - 3dx = 0$$

$y^{\frac{1}{3}} = x + C$	$dy - 3y^{-\frac{2}{3}} = 0$
$y = (x+C)^3$	$P = 0 \Longrightarrow y = 0$

4.4. ДУ высших порядков

Nota. Рассмотрим три типа интегрируемых ДУ

1* Непосредственно интегрирование

$y^{(n)} = f(x)$

Решение: $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$

$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + C_1\right) dx + C_2$

Ex. См. Задачу 2 в начале

2* ДУ$_2$, не содержащие $y(x)$

$F(x, y'(x), y''(x)) = 0$

Замена $y'(x) = z(x)$, получаем:

$F(x, z(x), z'(x)) = 0$ – ДУ$_1$

Ex. $(1+x^2)y'' + (1+y'^2) = 0 \quad y' = z$

$(1+x^2)z' + 1 + z^2 = 0$

$z' + \dfrac{1+z^2}{1+x^2} = 0 \Longleftrightarrow z' = -\dfrac{1+z^2}{1+x^2} \Longleftrightarrow \dfrac{dz}{1+z^2} = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

$\arctan x = \arctan(-x) + C$

$z = \dfrac{-x+\tan(C)}{1+x\tan C} = y'$

$y = \int \dfrac{-x+\tan(C)}{1+x\tan C} dx = \ldots$

3* ДУ$_2$, не содержащие x

$F(y(x), y'(x), y''(x)) = 0$

Замена $y'(x) = z(y) \quad y''(x) = \dfrac{dz(y(x))}{dx} = \dfrac{dz}{dx}\dfrac{dy}{dx} = z'_y y' = z'z$

ДУ: $F(y, z(y), z'(y)) = 0$

Ex. $y'' + y'^2 = yy'$

$y' = z(y) \quad y'' = z'z$

$z'z + z^2 = yz \quad | \ : z \neq 0 \qquad z = 0 \Longrightarrow y = const$

$z' + z = y$ – ЛДУ

1) $z' + z = 0$

$\ln|z| = -y + C$

$z = Ce^{-y}$

2) $C'(y)e^{-y} = y$

$C'(y) = ye^y$

$C(y) = \int ye^y dy = \int y de^y = ye^y - e^y + C_1$

$z(y) = (ye^y - e^y + C_1)e^{-y} = \underbrace{y-1}_{z^*} + \underbrace{C_1e^{-y}}_{\bar{z}}$

$y' = C_1e^{-y} + y - 1 \Longrightarrow ? \ldots$

4.5. ЛДУ$_2$

4.5.1. Определения

Def. $a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(x)}+\dots+a_{n-1}y'(x)+a^n(x)y=f(x)$, где $y=y(x)$ – неизвестная функция, – это линейное дифференциальное уравнение n-ого порядка

Nota. Если $n=2$, то ЛДУ$_2$, $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y=f(x)$ – разрешенное относительно старших производных ЛДУ$_2$

Nota. Если $a_i(x)=a_i\in\mathbb{R}$ – ЛДУ$_n$ с постоянными коэффициентами

4.5.2. Решение ЛДУ$_2$ с постоянными коэффициентами

$y''+py'+qy=f(x),\quad p,q\in\mathbb{R}$

Для любых $p,q\in\mathbb{R}$ существует уравнение: $\lambda^2+p\lambda+q=0$ и $\lambda_{1,2}\in\mathbb{C}\mid\lambda_1+\lambda_2=-p,\lambda_1\lambda_2=q$ - корни

Назовем уравнение характеристическим (ХрУ)

Nota. $\lambda_{1,2}$ могут быть только

1. вещественными различными;
2. вещественными одинаковыми ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ - корень 2-ой кратности);
3. $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta\in\mathbb{C}$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Запишем ЛДУ$_2$ через $\lambda_{1,2}$:

$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=f(x)$

$y''-\lambda_1y'-\lambda_2y'+\lambda_1\lambda_2y=f(x)$

$(y'-\lambda_2y)'-\lambda_1(y'-\lambda_2y)=f(x)$

Обозначим $u(x)=y'-\lambda_2y$

Тогда ДУ: $\begin{cases}y'-\lambda_2y=u(x)\\u'-\lambda_1u=f(x)\end{cases}$

Решим: $u'-\lambda_1u=f(x)$

1) $u'-\lambda_1u=0$	2) $u'-\lambda_1u=f(x)$
$\dfrac{du}{u}=\lambda_1dx$	$u(x)=C_1(x)e^{\lambda_1x}$
$\overline{u}=C_1e^{\lambda_1x}$	Далее $u(x)$ следует подставить в ДУ с $f(x)$

Поступим лучше, решим ЛОДУ$_2$ ($f(x)=0$)

Эта система $\begin{cases}y'-\lambda_2y=u(x)\\u'-\lambda_1u=0\end{cases}\iff\begin{cases}y'-\lambda_2y=u(x)\\u=C_1e^{\lambda_1x}\end{cases}$

Решим $y'-\lambda_2y=C_1e^{\lambda_1x}$:

1) $y' - \lambda_2 y = 0$
$\overline{y} = C_2 e^{\lambda_2 x}$

2) $y' - \lambda_2 y = C_1 e^{\lambda_1 x}$
$y(x) = C_2(x) e^{\lambda_2 x}$
$C_2'(x) e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\lambda_1 x}$
$C_2'(x) = C_1 e^{\lambda_1 - \lambda_2} x$

Далее все зависит от $\lambda_{1,2}$

Мет. $y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$
Для начала $y'' + py' + qy = 0$ – ЛОДУ$_2$
$C_2'(x) = C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$
Рассмотрим три случай для $\lambda_{1,2}$:

1. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ – случай различных вещественных корней
   $$C_2(x) = \int C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = \frac{C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_2 = \underbrace{\frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}_{\tilde{C_1}} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} + C_2$$
   Тогда, $y(x) = C_2(x) e^{\lambda_2 x} = (\tilde{C_1} e^{\lambda_1 - \lambda_2} x + C_2) e^{\lambda_2 x} = \boxed{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$ – решение ЛОДУ, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ – случай вещественных кратных корней
   $$C_2'(x) = C_1 e^{0x} = C_1 \Longrightarrow C_2(x) = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$$
   $y(x) = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x} = \boxed{C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} = y(x)}$ – решение ЛОДУ, $\lambda_1 = \lambda_2$
3. $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ – случай комплексно сопряженных корней
   Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то аналогично первому случаю $y(x) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x + C_2 e} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ – решение ЛОДУ
   Получим $\mathbb{R}$-решения:
   $y(x) = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)) = e^{\alpha x}(C_1 + C_2)\cos\beta x + e^{\alpha x} i(C_1 - C_2)\sin\beta x$
   $\operatorname{Re} y(x) = \underbrace{(C_1 + C_2) e^{\alpha x} \cos\beta x,}_{u(x)} \operatorname{Im} y(x) = \underbrace{(C_1 + C_2) e^{\alpha x} \sin\beta x}_{v(x)} \quad y(x) = u(x) + iv(x)$
   Так как $y(x)$ – решение ЛОДУ:
   $u'' + iv'' + pu' + ipv\prime + qu + iqv = 0$
   $(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv\prime + qv) = 0 \quad \forall x \in [\alpha; \beta]$, то есть $z \in \mathbb{C}$ и $z = 0$
   $$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0, \\ v'' + pv\prime + qv = 0 \end{cases}$$
   Тогда можно считать решением $y(x) = u(x) + v(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x$ – решение ЛОДУ, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

Nota. Ни про одно из полученных решений нельзя сказать, что оно общее (см. след. пункт)
Также еще не решено ЛНДУ$_2$

4.5.3. Свойства решений ЛДУ$_2$

Def. $Ly \overset{def}{=} y''(x) + py'(x) + qy(x)$ – линейный дифференциальный оператор
$L : E \subset C^2_{[a;b]} \to F \subset C_{[a;b]}$
Nota. Все определения линейного пространства, базиса, линейной независимости, линейной оболочки сохраняются. А ЛОДУ$_2$ записывается как $Ly = 0$, ЛНДУ$_2$ – $Ly = f(x)$

Th. 1. $\exists y_1, y_2$ - частные решения ЛОДУ, то есть $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$
Тогда $Ly = 0$, если $y = C_1y_1 + C_2y_2$

$$Ly = y'' + py' + qy = (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1Ly_1 + C_2Ly_2 = 0$$

Def. y_1, y_2 – линейно независимы $\iff C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \implies \forall C_1 = 0 \iff \nexists k : y_2 = ky_1, k \in \mathbb{R}$

Мет. Для определения линейной независимости в Линейной алгебре мы использовали $\operatorname{rang} A$ или $\det A$
Введем индикатор линейной независимости. Заметим, что если y_1, y_2 – линейно зависимы, то y_1', y_2' – линейно зависимы

Def. $W \overset{\text{обозн}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1(x)}{dx} & \frac{dy_2(x)}{dx} \end{vmatrix}$ – определитель Вронского или вронскиан

Th. 2. y_1, y_2 – линейно зависимы $\implies W = 0$ на $[a; b]$

$$\begin{matrix} y_2 = ky_1 \\ y_2' = ky_1' \end{matrix} \implies W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

Th. 3. $x_0 \in [a; b]$, пусть $W(x_0) = W_0$. Тогда:
$W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \forall x \in [a; b]$
$W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – решения ЛОДУ,
$$\begin{cases} Ly_1 = 0 & | \cdot y_2 \\ Ly_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1''y_2 + py_1'y_2 + qy_1y_2 = 0 \\ y_2''y_1 + py_2'y_1 + qy_1y_2 = 0 \end{cases}$$
$(y_1''y_2 - y_2''y_1) + p(y_1'y_2 - y_2'y_1) = 0$

исходники найдутся тут:
https://github.com/pelmesh619/itmo_conspects

$W'(x)+pW(x)=0$
$\dfrac{dW(x)}{W(x)}=-pdx$
$W(x)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}pdx}$
$W_0=Ce^{-\int_{x_0}^{x_0}pdx}=C$

Тогда $W(x)=W_0e^{-\int_{x_0}^{x}pdx} \iff \left[\begin{array}{l} W_0=0 \Longrightarrow W(x)=0 \\ W_0\neq 0 \Longrightarrow W(x)\neq 0 \end{array}\right. \quad \forall x\in[a;b]$

Th. 4. y_1, y_2 – линейно независимы $\Longrightarrow W(x)\neq 0$ на $[a;b]$

Докажем от противного

Пусть $\exists x_0\in[a;b] \mid W(x_0)=0 \Longrightarrow W(x)=0\ \forall x\in[a;b] \iff \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\ \forall x\in[a;b]$

Можно поделить на y_1^2, так как y_1, y_2 – линейно независимы. Тогда $\dfrac{W}{y_1^2}=\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)'=0 \Longrightarrow \dfrac{y_2}{y_1}=k\in\mathbb{R} \iff y_2=ky_1$ – линейно зависимы, противоречие

Nota. Общее решение ЛОДУ$_2$ – это семейство всех решений (интегральных кривых), каждое из которых проходит через точку $(x_0,y_0)\in D$ и ему соответствует свой и единственный набор (C_1,C_2)

Th. 5. y_1, y_2 – линейно независимые решения ЛОДУ, тогда $\overline{y}(x)=C_1y_1+C_2y_2$ – общее решение ЛОДУ$_2$

Нужно убедиться, что через точку $(x_0,y_0)\in D$ проходит и только одна кривая $\overline{y}(x_0)$

Зададим НУ: $\begin{cases} y_1(x_0)=y_{10}, \\ y_2(x_0)=y_{20}, \end{cases}$ тогда $\begin{array}{l}\overline{y}(x_0)=C_1y_{10}+C_2y_{20} \\ \overline{y}'(x_0)=C_1y_{10}'+C_2y_{20}'\end{array}$ – задача Коши

Знаем, что $\overline{y}=C_1y_1+C_2y_2$ – решение (просто, не общее)

Тогда в x_0 $\begin{cases} C_1y_{10}+C_2y_{20}=\overline{y}_0 \\ C_1y_{10}'+C_2y_{20}'=\overline{y}_0' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{y}_0 \\ \overline{y}_0'\end{pmatrix}$ - система крамеровского типа

$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}'\end{vmatrix}=W_0\neq 0 \iff \exists!(C_1,C_2)$ – решение СЛАУ

Таким образом через всякую x_0 проходит одна кривая $\overline{y}(x)=C_1y_1+C_2y_2$

Nota. Вывод: если найдены какие-либо линейно независимые y_1, y_2, то общее решение ЛОДУ$_2$ будет $C_1y_1 + C_2y_2 = \overline{y}$

Def. Такие $\{y_1, y_2\}$ называется ФСР ЛОДУ$_2$

Nota. Тогда, найденные решения ЛОДУ – все общие

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$: ФСР $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}, \lambda_i \in \mathbb{R}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: ФСР $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$
3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$: ФСР $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

Th. 6. Решение ЛНДУ $Ly = f(x)$
$\overline{y}(x) : L\overline{y} = 0$ – общее решение ЛОДУ
$y^*(x) : Ly^*(x) = f(x)$ – частное решение ЛНДУ
Тогда $y(x) = \overline{y} + y^*$ – общее решение ЛНДУ

Lab.

Мет. ЛДУ$_2$
1) Решим $y'' + py' + qy = 0$ (ХрУ: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$)
ФСР для всех случаев:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \to \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \to \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$
3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \to \{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

$\overline{y} = l_{\{\text{ФСР}\}}$
2) Изначально $y'' + py' + qy = f(x)$
Доказали: $y(x) = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i$ - вектора из ФСР, а y^* – частное решение (какое-либо) ЛНДУ

Nota. Рассмотрим два метода поиска y^* для ЛДУ$_2$

1. Метод неопределенных коэффициентов для случая специальной правой части
2. Метод (Лагранжа) вариации произвольных постоянных (универсальный)

1. **Специальная правая часть**

Ex. $y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} \quad (\heartsuit)$
Наводящие соображения: заметим, что $y = e^{ax}$ не меняет свой вид при дифференцировании, так же как и $y = P_n(x)$, $y = A\cos bx + B\sin bx$

Имеет смысл искать частные решения для (♡) в виде $y = Ae^{3x}$

$(Ae^3x)'' - 3(Ae^{3x})' + 2Ae^{3x} = 2e^{3x}$

$9A - 9A + 2A = 2 \Longrightarrow A = 1$, то есть $y^* = e^{3x}$

Nota. Если правая часть ЛНДУ содержит произведения $e^{ax}, P_n(x), \cos bx, \sin bx$, то y^* ищем в виде специальной правой части

Def. Специальная правая часть (СПЧ) – функция $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$ (обозначим $k = a \pm ib$)

Частные случаи:

1. $f(x) = P_n(x)e^{ax} \quad (b = 0)$
2. $f(x) = A\cos bx + B\sin bx$ – гармоника $\quad (a = 0, n = m = 0)$
3. $f(x) = P_n(x) \quad (a = b = 0)$

Метод: Решение ищется в виде $y^* = e^{ax}(\overline{P}_l \cos bx + \overline{Q}_l(x)\sin bx)$, где a, b – коэффициенты СПЧ, $l = \max(m, n), \overline{P}_l, \overline{Q}_l$ – многочлены в неопределенных коэффициентах

Ex. 1. (♡): $y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} = e^{3x}(2\cos 0x) \quad (k = 3 \pm 0 = 3)$

$y^* = e^{3x}(\overline{P}_{l=0}(x)\cos 0x) = e^{3x} \cdot A$

Ex. 2. Однако, для этого уравнения: $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

СПЧ: $e^{2x} = e^{2x}(1\cos 0x + B\sin 0x) \quad k = a \pm ib = 2$

$$\left.\begin{aligned} y^* &= Ae^{2x} \\ y^{*\prime} &= 2Ae^{2x} \\ y^{*\prime\prime} &= 4Ae^{2x} \end{aligned}\right\} \text{ДУ} \longrightarrow \begin{gathered} 4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = e^{2x} \\ 4A - 6A + 2A = 1 \\ 0A = 1 \end{gathered} \quad \text{– нельзя найти } A$$ 🤯

Решим ХрУ: $\lambda_2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

В этом случае число k, соответствующее СПЧ, совпадает с корнем ХрУ

Исследуем ситуацию на примере СПЧ $f(x) = P_n(x)e^{ax}$

Пусть дано ДУ: $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}$

Для него ХрУ: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2}$ - корни

Ищем $y^* = \overline{P}_n(x)e^{ax}$

$y^{*\prime} = \overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\overline{P}_n(x)e^{ax}$

$y^{*\prime\prime} = \overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\overline{P}_n(x)e^{ax}$

Получаем:

$\overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\overline{P}_n(x)e^{ax} + (\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\overline{P}_n(x)e^{ax})p + \overline{P}_n(x)e^{ax}q = P_n(x)e^{ax}$

$\overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + (2a + p)\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + (a^2 + pa + q)\overline{P}_n(x)e^{ax} = P_n(x)e^{ax}$

$\overline{P}_{n-2}(x) + (2a + p)\overline{P}_{n-1}(x) + (a^2 + pa + q)\overline{P}_n(x) = P_n(x)$

Заметим, что если a – корень ХрУ, то есть $a \pm ib = a = k = \lambda_i$ (пусть 1-ой кратности), то $a^2+pa+q=0$ и степень левой части понижается до $n-1$

Если a – корень ХрУ 2-ой кратности, то есть $a^2+pa+q=\left(a+\frac{p}{2}\right)^2=0 \Longleftrightarrow 2a+p=0$, то степень левой части понижается на 2

Чтобы сделать уравнение для $\overline{P}_n$ решаемым, домножим y^* на x^r, где r – число совпадений $k=a\pm ib$ с корнем ХрУ λ_i (другими словами, кратность λ_i, с которым совпадает k)

Окончательно, метод выглядит так: для уравнения $y''+py'+qy=e^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx)$, где $\lambda_{1,2}$ – корни ХрУ, $k=a\pm ib$

Частное решение выглядит так: $\boxed{y^*=x^r e^{ax}(\overline{P}_l(x)\cos bx+\overline{Q}_l(x)\sin bx}$, где $l=\max(m,n)$, r - кратность корня ХрУ $\lambda_i=k$

Обобщим для ЛДУ$_n$: $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\dots+p_ny=f(x)$

ХрУ выглядит так: $\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\dots+p_n=0$

Правило построения ФСР для $\overline{y}$, общего решения однородного ДУ:

1. Всякому λ_i – одиночному $\mathbb{R}$-корню ХрУ сопоставляем $y_i=e^{\lambda_i x}$
2. $\mathbb{R}$-корню λ кратности s сопоставляем набор $\{y_1,y_2,\dots,y_s\}=\{e^{\lambda x},xe^{\lambda x},\dots,x^{s-1}e^{\lambda x}\}$
3. Всякой одиночной паре $\lambda_{j_1,j_2}=\alpha_j\pm i\beta_j$ соответствует пара $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$
4. Комплексной паре $\lambda=\alpha\pm i\beta$ кратности t соответствует набор $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,\dots,x^{t-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{t-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

Nota. Количество векторов y_i в ФСР равно порядку n дифференциального уравнения

Специальная правая часть ищется в виде $y^*=x^re^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx)$, где r - кратность $\mathbb{R}$-корня или $\mathbb{C}$-пары, с которыми совпадает $k=a\pm ib$

Ex. Вернемся к $y''-3y'+2y=e^{2x}$

$$\left.\begin{aligned} &y^*=Ax^1e^{2x}\\ &y^{*\prime}=Ae^{2x}2Axe^{2x}\\ &y^{*\prime\prime}=2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4Axe^{2x}\end{aligned}\right\}\to(4-6+2)Axe^{2x}+(4-3)Ae^{2x}=e^{2x}\quad A=1$$

$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{2x}+xe^{2x}$

Лагранжа

Мет. Решение ЛДУ$_1$: $y'+py=f(x)$

1) Решаем ЛОДУ $y'+py=0$, получаем ФСР $\overline{y}=Cy_0$
2) Решаем ЛНДУ, ищем решения в виде $y(x)=C(x)y_0$, получаем $C'(x)y_0=f(x)\to C(x)$

Nota. Введем аналогичный метод для ЛДУ$_2$:

1 этап) $y'' + py' + qy = 0$ – ЛОДУ, $\lambda_{1,2}$ – корни, соответствующие ФСР $\{y_1, y_2\}$
Получаем общее решение $\overline{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2 этап) Варьируем C_1 и C_2, но теперь нужны два условия для их определения. Одним из них является само ДУ

Ex. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$
$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + y^*$
$(g(x) + C_1)e^x + (h(x) + C_2)e^{2x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + g(x)e^x + h(x)e^{2x}$
Подберем g, h: $\underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{g} e^x + \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{h} e^{2x} = e^{3x}$ или $\underbrace{-e^{2x}}_{g} e^x + \underbrace{2e^x}_{h} e^{2x} = e^{3x}$
Заметим, что $C_1'(x)$ во втором случае $g' = -2e^{2x}$, а $C_2' = 2e^x$
Тогда $C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = -2e^{3x} + 2e^{3x} = 0$

Nota. Подставим $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ в ДУ
Получаем производную $y'(x) = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'$
Требуем $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$
Тогда вторая производная: $y''(x) = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''$
$C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2'' + pC_1(x)y_1' + pC_2(x)y_2' + qC_1(x)y_1 + qC_2(x)y_2 = f(x)$
$C_1(x)\underbrace{Ly_1}_{=0} + C_2(x)\underbrace{Ly_2}_{=0} + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$

<u>Итак</u>, система для определения $C_1(x), C_2(x)$: $\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=W} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{по Крамеру}} \begin{matrix} C_1'(x) = \frac{W_1}{W} \\ C_2'(x) = \frac{W_2}{W} \end{matrix}$$

Nota. Обобщив метод на n-ый порядок систему, получим

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(x) \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

<u>Lab.</u> Доказать, что $\overline{y} + y^*$ - общее решение ЛНДУ

Th. $Ly = f(x), y = \overline{y} + y^*$ - решение $Ly = f(x)$.
Тогда $\overline{y} + y^*$ - общее решение

Правда ли, что найдется единственный набор констант $C_1, \ldots, C_n$, которые удовлетворяют начальным условиям $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \vdots \end{cases}$

Так как $\overline{y} + y^*$ - решение, то $\begin{cases} y_0 = C_1 y_{01} + C_2 y_{02} + \dots + C_n y_{0n} + y_0^* \\ y_0' = C_1 y_{01}' + \dots + y_0^{*\prime} \\ \vdots \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} y_0 - y_0^* = \sum_{i=1}^n C_i y_{0i} \\ y_0' - y_0^{*\prime} = \sum_{i=1}^n C_i y_{0i}' \\ \vdots \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} y_{01} & y_{02} & \dots & y_{0n} \\ y_{01}' & y_{02}' & \dots & y_{0n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{01}^{(n)} & y_{02}^{(n)} & \dots & y_{0n}^{(n)} \end{pmatrix}}_{\det W \neq 0} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - y_0^* \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Таким образом система имеет единое решение $(C_1, \ldots, C_n)$, которое удовлетворяет начальным условиям

Th. $Ly = f_1(x) + f_2(x)$
Пусть $Ly_1^* = f_1(x)$ и $Ly_2^* = f_2(x)$, тогда $Ly^* = f_1 + f_2$, где $y^* = y_1^* + y_2^*$

$Ly^* = L(y_1^* + y_2^*) = Ly_1^* + Ly_2^* = f_1(x) + f_2(x)$

4.6. Системы ДУ

Def. Пусть дан набор функций $y_1, \ldots, y_n$. Система, связывающие эти функции, то есть $\begin{cases} F_1(x_1, y_1, \ldots y_n, \ldots, y_1^{(n)}, \ldots y_n^{(n)}) = 0 \\ \vdots \end{cases}$, называется системой дифференциальных уравнений (СДУ)

<u>Механический смысл</u>: пусть $\mathbb{R}^n$ – фазовое пространство, пространство состояний системы, t – время, x_i – координаты точки M в $\mathbb{R}^n$
Тогда такая система ДУ

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, \{x_i\}) \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(t, \{x_i\}) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, \{x_i\}) \end{cases}$$

описывает состояние исследуемой системы во времени, причем $\dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$ – скорости

Nota. Такая система называется нормальной, то есть все уравнения разрешены относительно производных

Nota. Всякое ДУ$_n$ можно рассмотреть как СДУ: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \iff \begin{cases} y = y_1(x) \\ y' = y_2(x, y_1) \\ \vdots \end{cases}$

Можно сделать и обратное – свести СДУ к ДУ$_n$ с помощью метода исключения. Рассмотрим на примере СДУ 2-ого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y, t) \\ \frac{dx}{dt} = g(x, y, t) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{y} = f(x, y, t) \\ \dot{x} = g(x, y, t) \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial f}{\partial y}f \\ \dot{x} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Свели систему ДУ к ДУ$_2$: $\ddot{y} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial x}g + \dfrac{\partial f}{\partial y}f$

Nota. Чтобы свести к ДУ систему ДУ $\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

нужно исключить $n-1$ выражение $\dot{x}_i$, для этого взять производные $\dfrac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}$

Таким образом общий порядок СДУ (сумма порядков старших производных) будет равен порядку ДУ

Ex. $\begin{cases} \dot{y} = y + 5x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5\dot{x} \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5\dot{(-y - 3x)} \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 15x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff$

$\begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 3(\dot{y} - y) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0$

ХрУ: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i \Longrightarrow \overline{y} = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

Найдем $x(t)$ из 1-ого ДУ: $\dot{\overline{y}} = -e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = e^{-t}((C_2 - C_1)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t)$

$5x = \dot{\overline{y}} - \overline{y} = e^{-t}((C_2 - 2C_1)\cos t - (C_1 + 2C_2)\sin t)$

$$\begin{cases} y(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ x(t) = \frac{1}{5}e^{-t}((C_2 - 2C_1)\cos t - (C_1 + 2C_2)\sin t) \end{cases}$$

Nota. Метод исключения сохраняет линейность, поэтому линейная СДУ (с постоянными коэффициентами) сводится к ЛДУ (с постоянными коэффициентами)

Nota. СДУ из *Ex.* не содержала t в явном виде. Такие СДУ называются автономными

Матричный метод

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_n + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Обозначим $(y_1, \dots, y_n) = Y$ – вектор функций, $\{a_{ij}\} = A$ – матрица СДУ

Тогда СДУ запишется в виде $Y' = AY$ (однородная СДУ, так как нет $f(x)$)

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа A и h_i – собственный вектор для λ_i

Будем искать решение Y в виде $Y = \ln e^{\lambda_i x}$

Подставим в СДУ: $Y' = \lambda_i h_i = e^{\lambda_i x} = A\underbrace{h_i e^{\lambda_i x}}_{Y} = AY$

Ex. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 8x + 3y \end{cases} \qquad x(0) = 0, y(0) = 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$

$h_1 : \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$h_2 : \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{5t}$

Задача Коши: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ -2C_1 + 4C_2 \end{pmatrix} \to C_1 = -\dfrac{1}{3}, C_2 = \dfrac{1}{3}$

Итак $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{5t} \end{cases}$

Решения в *Ex.* линейно независимы (то есть $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$, где $Y_1 = h_i e^{\lambda_i t}$), так как $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

Для кратных собственных $\mathbb{R}$-чисел нельзя построить базис из h_i, а чтобы составить общее решение СДУ, нужно n линейно независимых решений Y_i (ФСР). В этом случае используют жорданов базис (см. литературу)

Для $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ можно искать решения в том же виде, но потом свести к вещественным функциям (см. литературу🧐)

4.7. Теория устойчивости (элементы)

Наводящие соображения: возьмем грузик, подвешенный на стержне. Когда он находится снизу, он находится в устойчивом равновесии, но когда сверху – в неустойчивом

Def. Пусть даны СДУ$_2$: $\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y) \\ \dot{y} = f_2(t, x, y) \end{cases}$, НУ$_1$: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ и НУ$_2$: $\begin{cases} \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$

Решение СДУ $x = x(t), y = y(t)$ называется устойчивым по Ляпунову при $t \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \underset{\begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases}}{\forall x, y} \quad \forall t > 0 \begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \varepsilon \end{cases}$

Или $\begin{matrix} \Delta x(t) \to 0 \\ \Delta y(t) \to 0 \end{matrix}$ при $t \to +\infty$ и $\begin{cases} \Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0 \end{cases}$

Nota. Малое воздействие приводит к малым отклонениям от исходной траектории

Nota. Обычно рассматривают отклонение решений от нулевого, то есть $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

Ex. $\dot{y} + y = 1$, НУ: $y(0) = 1, \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$ (малое отклонение)

$\begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \to C = 0 \quad \begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \to C = \tilde{y} - 1$

$\tilde{y} - y = (\tilde{y}_0 - y)e^{-t} + 1 - 1 = (\tilde{y}_0 - 1)e^{-t} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ - устойчива🥳

Классификация точек покоя. Будем рассматривать СДУ (автономную)

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = kx + my \end{cases} \qquad \dot{X} = AX \Longrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$

Далее все зависит от $\lambda_{1,2}$

Заметим, что функции $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями (подстановка)

Причем, точка $(0, 0)$ – особая, так как СДУ $\to \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{kx + my}{ax + by}$

Рассмотрим различные случаи значений $\lambda_{1,2}$:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}^-$

   Тогда решения СДУ будут $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dot{x}(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$

   Подставляем в первое уравнение, из него получаем $y(t) = \dfrac{1}{b}(C_1(\lambda_1 - a)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - a)e^{\lambda_2 t})$

   Введем начальные условия $y(0) = y_0, x(0) = x_0$

   Решение задачи Коши: $\begin{cases} x(t) = \frac{ax_0 + by_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - ax_0 - by_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = \frac{1}{b}\left(\frac{ax_0 + by_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 - a)e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - ax_0 - by_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 - a)e^{\lambda_2 t}\right) \end{cases}$

При $t \to +\infty$ $|e^{\lambda_i t}| < 1$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \\ |\tilde{y}(t) - y(t)| < \varepsilon \end{cases}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$, то есть $(0,0)$ – устойчивое решение

Ex. 1. $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = -dt \\ \frac{dy}{y} = -2dt \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = C_1 e^{-t} \\ y = C_2 e^{-2t} \end{cases}$ + Н.У. $\Longrightarrow \begin{cases} x = x_0 e^{-t} \\ y = y_0 e^{-2t} \end{cases}$

Изобразим интегральные кривые (фазовый портрет системы): СДУ $\Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} \Longrightarrow y = Cx^2$

В этом примере получается семейство парабол, при $t \to +\infty$ они все стремятся к $(0,0)$ – устойчивому узлу

2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

Ex. 2. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_0 e^{t} \\ y = y_0 e^{-2t} \end{cases}$

Фазовый портрет $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2y}{x} \Longrightarrow y = \dfrac{C}{x^2}$

Гиперболы при $t \to \infty$ стремятся к точками $(\pm\infty, 0)$ и образуют так называемое седло неустойчивости

3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$

Ex. 3. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$ $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$

$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(x_0 \cos t + y_0 \sin t) \\ y(t) = e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t) \end{cases}$ – устойчивая

Фазовый портрет: перейдем в ПСК $\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi & x_0 = A\cos\varphi_0 \\ y = \rho\sin\varphi & y_0 = A\sin\varphi_0 \end{matrix}$

Тогда $\begin{cases} \rho\cos\varphi = e^{-t} = A\cos(t - \varphi_0) \\ \rho\sin\varphi = e^{-t} = A\sin(t - \varphi_0) \end{cases} \Longrightarrow \rho^2 = A^2 e^{-2t} \Longrightarrow \rho = Ae^{-t}$

Выразим t через φ: $\tan\varphi = \tan(t - \varphi_0)$

Получаем $\rho = Ae^{-(\varphi + \varphi_0 + \pi n)}$

Получается семейство логарифмических спиралей $(\rho = Ae^{\varphi})$

3′) $\lambda_{1,2} = \pm i\beta(\alpha = 0)$

$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos\beta t + y_0 \sin\beta t \\ y(t) = y_0 \cos\beta t - x_0 \sin\beta t \end{cases}.$

Фазовый портрет – семейство соосных и концентрических эллипсов. Центр этих эллипсов устойчивый

4) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$

Lab.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -0 \end{cases}$

Обобщим: если хотя бы один $\lambda \neq 0$ и лежит слева от $\operatorname{Im} \lambda$, то решение устойчивое

X. Программа экзамена в 2023/2024

Линейная алгебра.

1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.

   Скалярное произведение - функция (x, y), обладающая свойствами:

   (a) $(x, y) = (y, x)$
   (b) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$
   (c) $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$
   (d) $\forall x \in L\ (x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

   Евклидовым называет такое линейное пространство, на котором определено скалярное произведение

   Неравенство Коши-Буняковского: $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

   Норма - функция $\|x\|$, такая что

   (a) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$
   (b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$
   (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in L$ - неравенство треугольника

   Нормированное Евклидово пространство: E^n является нормированным, если $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама. Инвариантность евклидовых пространств.

   Ортонормированный базис - такой базис, что $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$

   Теорема о существовании ортонормированного базиса (доказывается по матиндукции)

   Матрица Грама: Матрицу $\Gamma = (e_i, e_j)_{i,j=1...k}$ называют матрицей Грама

3. Ортогональность вектора подпространству, ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре.

   Задача о перпендикуляре: Постановка: Нужно опустить перпендикуляр из точки пространства E^n на подпространство G

   Точка M - конец вектора x в пространстве E^n. Нужно найти M_0 (конец вектора x_0, проекции x на G)

   Th. $h \perp G, x_0 \in G, x = x_0 + h$. Тогда $\forall x' \in G (x' \neq x_0) \quad \|x - x'\| > \|x - x_0\|$

4. Линейный оператор: определение, основные свойства.

   Линейный оператор - это отображение $V^n \overset{\mathcal{A}}{\Longrightarrow} W^m$

   Свойства:

   1* $\lambda(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$

   2* $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}$

   3* $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}$

4* $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$

5. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор.

   Обратный оператор: $\mathcal{B} : W \to V$ называется обратным оператором для $\mathcal{A} : V \to W$ если $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{I}$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$)

   Взаимно-однозначный оператор: $\mathcal{A} : V \to W$ так, что $\mathcal{A}V = W$ и $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V)$ $\begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \implies y_1 \neq y_2$

   Тогда $\mathcal{A}$ называется взаимно-однозначно действующим

6. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.

   Матрица оператора: Матрица $A = a_{ij}{}_{i=1..m, j=1..n}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V^n \to W^m$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства V^n

   Преобразование к другому базису: $\mathcal{T} : V^n \to V^n$ - преобразование координат, то есть $Te_i = e_i'$

   Тогда $A' = TAT^{-1}$ $(A'_{e'} = T_{e \to e'} A T^{-1}_{e \to e'})$

7. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.

   Ядро и образ:

   Ядро оператора - $Ker\mathcal{A} \overset{def}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$

   Образ оператора - $Im\mathcal{A} \overset{def}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$

   Теорема о размерностях: $\mathcal{A} : V \to V$, тогда $\dim Ker\mathcal{A} + \dim Im\mathcal{A} = \dim V$

8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.

   Собственное число λ - такое, что удовлетворяет вековому уравнению $|A - \lambda I| = 0$

   Кратность корня λ_i называется алгебраической кратностью

   Собственный вектор - такой вектор x, что $\mathcal{A}x = \lambda x$

   $U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$

   $\dim U_{\lambda_i}$ - геометрическая кратность числа λ_i

   Теорема о диагонализации: $\mathcal{A}$ - диаг.-ем $\iff \exists$ базис из собственных векторов $\iff$ сумма алгебраических кратностей равна сумме геометрических

9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.

   Сопряженный оператор: Оператор $\mathcal{A}^*$ называется сопряженным для $\mathcal{A} : V \to V$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$

   $\mathcal{A}^*$ сопряженный для $\mathcal{A}$, если $A^* = A^T$ в любом ортонормированном базисе

   Свойства:

   1) $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$

   2) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$

   3) $(\lambda\mathcal{A})^* = \lambda\mathcal{A}^*$

4) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$

5) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$ (св-во транспонирования матриц)

или $((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*y)$

6) $\mathcal{A}^*$ - линейный оператор ($\mathcal{A}x = x', \mathcal{A}y = y' \Longrightarrow \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda x' + \mu y'$)

Самосопряженный оператор: $\mathcal{A}$ называется самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Следствие. $A^T = A \Longrightarrow$ матрица A симметричная

Свойства:

1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,\ \lambda:\ \mathcal{A}x = \lambda x (x \neq 0)$. Тогда, $\lambda \in \mathbb{R}$

2) $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,\ \mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $x_1 \perp x_2$

Теорема о базисе собственных векторов: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ $(\mathcal{A}: V^n \to V^n)$, тогда $\exists e_1, \ldots, e_n$ - набор собственных векторов $\mathcal{A}$ и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

(другими словами: $\mathcal{A}$ - диагонализируем)

10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.

    Проектор: Оператор $P_i x = (x, e_i)e_i$ называется проектором на одномерное пространство, порожденное e_i (линейная оболочка)

    Спектральное разложение: $\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$

11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Геометрический смысл ортогонального преобразования.

    Ортогональный оператор: T - ортогональный оператор, если $(Tx, Ty) = (x, y)$

    Следствие: $\|Tx\| = \|x\|$, то есть T сохраняет расстояние

    Ортогональная матрица: Матрица A называется ортогональной если $A^{-1} = A^T$

12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.

    Билинейная форма: $x, y \in V^n$ Отображение $\mathcal{B}: V^n \to \mathbb{R}$ (обозн. $\mathcal{B}(x, y)$) называется билинейной формой, если выполнены

    1) $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\mathcal{B}(x, z) + \mu\mathcal{B}(y, z)$

    2) $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\mathcal{B}(x, y) + \mu\mathcal{B}(x, z)$

    Матрица: $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис V_n, $u, v \in V^n$. Тогда $\mathcal{B}(u, v) = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}u_i v_j$, где $b_{ij} \in \mathbb{R}$ - матрица

13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.

    Квадратичная форма: Квадратичной формой, порожденной Б. Ф. $\mathcal{B}(u, v)$, называется форма $\mathcal{B}(u, u)$

14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные условия. Критерий Сильвестра.

    Положительно определенный оператор: 1) Оператор $\mathcal{A}$ называется положительно определенным, если $\exists \gamma > 0 \mid \forall x \in V \quad (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma\|x\|^2$

    2) $\mathcal{A}$ называется положительным, если $\forall x \in V,\ x \neq 0 \quad (\mathcal{A}x, x) > 0$

    Критерий Сильвестра: $\mathcal{A}: V^n \to V^n$ - положительно определен $\Longleftrightarrow$

$\forall k = 1..n$ угловые миноры $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$

Дифференциальные уравнения.

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

   Задача о распаде: Скорость распада радия в текущий момент времени t пропорциональна его наличному количеству Q. Требуется найти закон распада радия: $Q = Q(t)$ если в начальный момент времени $t_0 = 0$ количество равнялось Q_0

   $\boxed{Q(t) = Ce^{-nt}}$

   Задача о падении тела: Тело массой m брошено вверх с начальной скоростью v_0. Нужно найти закон движения $y = y(t)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

   $y(t) = \int (-gt + C_1)dt = \boxed{-\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = y(t)}$ - общий закон

   $\boxed{y^*(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$ - частный закон при $y(t_0) = 0, y'(t_0) = v_0$

   Определение: Уравнение $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ - называется обыкновенным ДУ n-ого порядка $(*)$

   Решением ДУ $(*)$ называется функция $y(x)$, которая при подстановке обращает $(*)$ в тождество

   Задача Коши: $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$ - система начальных условий $(**)$

   Тогда $\begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases}$ - задача Коши (ЗК)

2. Уравнение с разделяющимися переменными.

   УРП: $m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$

   Решение: $\int \frac{m(x)}{M(x)}dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)}dy$

3. Однородное уравнение.

   ОУ: $\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \text{ где } P(x,y), Q(x,y) \text{ - однородные функции одного порядка}}$ - однородное уравнение

   Решение: $Cx = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}}$, где $t = \frac{y}{x}$

4. Уравнение в полных дифференциалах.

   Уравнение в полных дифференциалах: $\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$ - УПД

Решение: $\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = 0$

5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.
   ЛДУ: $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ - ЛДУ$_1$
   Метод Лагранжа: Принцип: если удалось найти частное решение ДУ$_{\text{однор}}$ (обозначим y_0), то общее решение ДУ$_{\text{неод}}$ можно искать в виде $y = C(x)y_0$
   Решение: $y_0 = e^{-\int p(x)dx}, C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$
   $y = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}$
6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.
   Теорема существования и единственности: **Th.** Если $\exists U(M_0) \mid \begin{cases} f(x,y) \in C_{U(M_0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \text{ - огр. в } U(M_0), \end{cases}$ то в M_0 $\exists! y(x)$ - решение ДУ
7. Уравнения n-ого порядка, допускающие понижение порядка.
   ДУ высших порядков: 1* Непосредственно интегрирование
   $y^{(n)} = f(x)$
   Решение: $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$
   $y^{(n-2)} = \int (\int f(x)dx + C_1)dx + C_2$
   2* ДУ$_2$, не содержащие $y(x)$
   $F(x, y'(x), y''(x)) = 0$
   Замена $y'(x) = z(x)$, получаем:
   $F(x, z(x), z'(x)) = 0$ - ДУ$_1$
   3* ДУ$_2$, не содержащие x
   $F(y(x), y'(x), y''(x)) = 0$
   Замена $y'(x) = z(y) \quad y''(x) = \frac{dz(y(x))}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dx} = z'_y y' = z'z$
8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ): определения, решение ЛОДУ2 с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.
   Определение: $a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(x)} + \cdots + a_{n-1}y'(x) + a^n(x)y = f(x)$, где $y = y(x)$ - неизв. функция, - это ЛДУ$_n$
   Решение ЛОДУ$_2$: $y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$
   $\forall p, q \in \mathbb{R} \exists$ уравнение: $\quad \lambda^2 + p\lambda + q = 0$ и $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 + \lambda_2 = -p, \lambda_1\lambda_2 = q$ - корни
   1 случай: $\lambda_{1.2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C^2 e^{\lambda_2 x}$
9. Решение ЛОДУ2 с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.
   2 случай: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow y(x) = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}$
10. Решение ЛОДУ2 с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней

характеристического уравнения.

3 случай: $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \Longrightarrow y(x) = C_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_2 e^{\alpha x}\cos\beta x$

11. Свойства решений ЛОДУ2: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.

Линейная независимость: **Def.** y_1, y_2 – линейно независимы $\Longleftrightarrow C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \Longrightarrow \forall C_1 = 0 \Longleftrightarrow \nexists k : y_2 = ky_1, k \in \mathbb{R}$

Определитель Вронского: **Def.** $W \overset{\text{обозн}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1(x)}{dx} & \frac{dy_2(x)}{dx} \end{vmatrix}$ – определитель Вронского или вронскиан

Th. 1. $\exists y_1, y_2$ - частные решения ЛОДУ, то есть $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$
Тогда $Ly = 0$, если $y = C_1y_1 + C_2y_2$

Th. 2. y_1, y_2 – линейно зависимы $\Longrightarrow W = 0$ на $[a; b]$

12. Свойства решений ЛОДУ2: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.

Th. 3. $x_0 \in [a; b]$, пусть $W(x_0) = W_0$. Тогда:
$W_0 = 0 \Longrightarrow W(x) = 0 \forall x \in [a; b]$
$W_0 \neq 0 \Longrightarrow W(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$

Th. 4. y_1, y_2 – линейно независимы $\Longrightarrow W(x) \neq 0$ на $[a; b]$

13. Свойства решений ЛОДУ2: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ2. Фундаментальная система решений (определение).

Th. 5. y_1, y_2 – линейно независимые решения ЛОДУ, тогда $\overline{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2$ – общее решение ЛОДУ$_2$

14. Свойства решений ЛНДУ2: теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.

Th. 6. Решение ЛНДУ $Ly = f(x)$
$\overline{y}(x) : L\overline{y} = 0$ – общее решение ЛОДУ
$y^*(x) : Ly^*(x) = f(x)$ – частное решение ЛНДУ
Тогда $y(x) = \overline{y} + y^*$ – общее решение ЛНДУ

15. Структура решения ЛОДУn: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.

    ФСР для всех случаев:

    (a) Всякому λ_i – одиночному $\mathbb{R}$-корню ХрУ сопоставляем $y_i = e^{\lambda_i x}$
    (b) $\mathbb{R}$-корню λ кратности s сопоставляем набор $\{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{s-1}e^{\lambda x}\}$
    (c) Всякой одиночной паре $\lambda_{j_1, j_2} = \alpha_j \pm i\beta_j$ соответствует пара $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$
    (d) Комплексной паре $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности t соответствует набор $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{t-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{t-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

    $\overline{y} = l_{\{\text{ФСР}\}}$

16. Решение ЛНУ2 с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.

    Специальная правая часть: для линейного неоднородного уравнения второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$ с постоянными коэффициентами, где правая часть $f(x)$ является специальной, частное решение y^* ищут методом неопределённых коэффициентов:

    (a) Анализ корней характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$;
    (b) Определение структуры y^* в виде $x^r e^{ax}(\overline{P}_l(x)\cos(bx) + \overline{Q}_l(x)\sin(bx))$, где a, b берутся из $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos(bx) + Q_m(x)\sin(bx))$, $l = \max(n, m)$, r – кратность корня $k = a \pm ib$ в характеристическом уравнении ($r = 0$ при отсутствии совпадения)
    (c) Подстановку y^* в уравнение и определение коэффициентов $\overline{P}_l$, $\overline{Q}_l$ приравниванием аналогичных членов. Метод эффективен для правых частей вида $e^{\alpha x}$, x^k, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$ и их произведений.

17. Решение ЛНУ2: метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).

    Метод Лагранжа: подход для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ с произвольной непрерывной правой частью:

    (a) Нахождение фундаментальной системы решений (ФСР) $y_1(x), y_2(x)$ соответствующего однородного уравнения
    (b) Поиск частного решения в виде $y^*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, где функции $C_1(x), C_2(x)$ заменяют константы из общего решения однородного уравнения
    (c) Решение системы для производных $C_1'(x), C_2'(x)$:
    $$\begin{cases} C_1^{1^{+C_2^{2^{=0}}}} \\ C_1^{1'^{+C_2^{2'^{=f(x)}}}} \end{cases}$$
    с использованием вронскиана $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$
    (d) Интегрирование выражений:
    $$C_1(x) = \int -\frac{y_2 f}{W}dx, \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f}{W}dx$$

18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.

    Система ДУ: **Def.** Пусть дан набор функций $y_1, \dots, y_n$. Система, связывающие эти функции, то есть $\begin{cases} F_1(x_1, y_1, \dots y_n, \dots, y_1^{(n)}, \dots y_n^{(n)}) = 0 \\ \vdots \end{cases}$, называется системой дифференциальных уравнений (СДУ)

Метод исключения: чтобы свести к ДУ систему ДУ $\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

нужно исключить $n-1$ выражение $\dot{x}_i$, для этого взять производные $\dfrac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}$

19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.

Матричный метод:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_n + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Обозначим $(y_1, \dots, y_n) = Y$ – вектор функций, $\{a_{ij}\} = A$ – матрица СДУ

Тогда СДУ запишется в виде $Y' = AY$ (однородная СДУ, так как нет $f(x)$)

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа A и h_i – собственный вектор для λ_i

Будем искать решение Y в виде $Y = \ln e^{\lambda_i x}$

Подставим в СДУ: $Y' = \lambda_i h_i = e^{\lambda_i x} = A\underbrace{h_i e^{\lambda_i x}}_{Y} = AY$

20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения.

Устойчивость: Решение СДУ $x = x(t), y = y(t)$ называется устойчивым по Ляпунову при $t \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \underset{\begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases}}{\forall x, y} \quad \forall t > 0 \begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \varepsilon \end{cases}$

Или $\begin{matrix} \Delta x(t) \to 0 \\ \Delta y(t) \to 0 \end{matrix}$ при $t \to +\infty$ и $\begin{cases} \Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0 \end{cases}$