Содержание

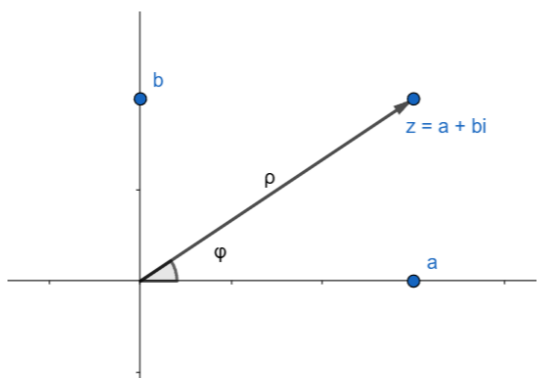
1. Основные понятия

1.1. Комплексное число

Мет. $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
Обозначение: $z = (a, b) = a + bi$, где $i = (0, -1) = \sqrt{-1}$
Основные операции:

1. $\operatorname{Re} z = a$ - вещественная часть, $\operatorname{Im} z = b$ - мнимая часть
2. $z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4. $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ - **формула Муавра**, где $\rho = |z|, \varphi = \arg z$
5. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, где $\rho = |z|, \varphi = \arg z, k \in \mathbb{Z}$
6. При $n = 2$ $\sqrt{z} = \sqrt{a + bi} = \pm(c + di)$, где $c = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, d = \operatorname{sign}(b)\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$

Тригонометрическая форма:
$z = a + bi = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$
$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
По формуле Эйлера $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$



1.2. Комплексная плоскость

Def. Окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ определяется как $U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$
Тогда $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0) = U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ - выколотая окрестность

Def. Для данной множества точек A точка z_0 считается

- внутренней, если для любого δ $U_\delta(z_0) \subset A$
- граничной, если для любого δ $\exists z \in U_\delta(z_0) \big| z \in A$ и $\exists z \in U_\delta(z_0) \big| z \notin A$

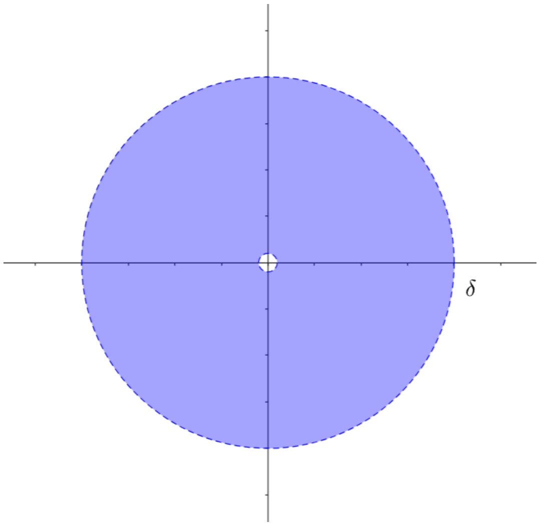
Def. Открытое множество состоит только из внутренних точек
Def. Закрытое множество содержит все свои граничные точки
Def. Границей Γ_D (иногда обозн. δD) для множества D называют множество всех граничных точек D
Def. Если любые две точки множества можно соединить ломаной линией конечной длины, то множество считается связным
Def. Множество $D \subset \mathbb{C}$ называется областью, если D - открытая и связная

Def. Кривая $l \subset \mathbb{C}$ считается непрерывной, если $l = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \varphi(t) + i\psi(t), t \in \mathbb{R}\}$, где $\varphi(t), \psi(t)$ - непрерывные функции

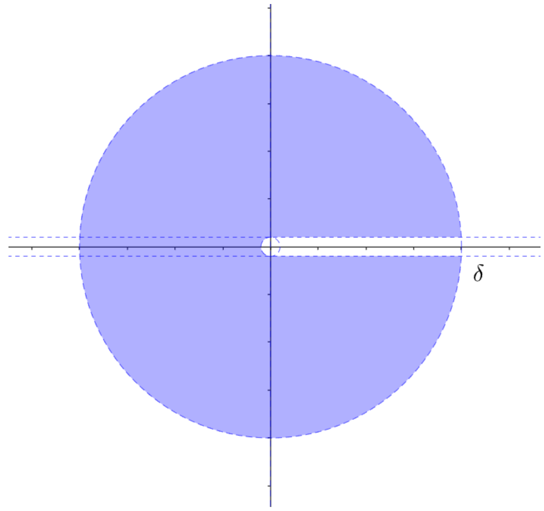
Nota. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и их производные непрерывные, то кривая l гладкая

Def. Непрерывная замкнутая (то есть начальная и конечная точки совпадают) без самопересечений кривая называется контуром

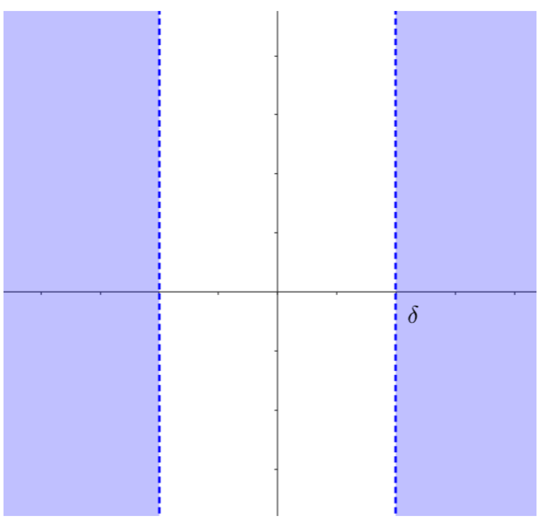
Nota. Односвязную область можно стянуть в точку



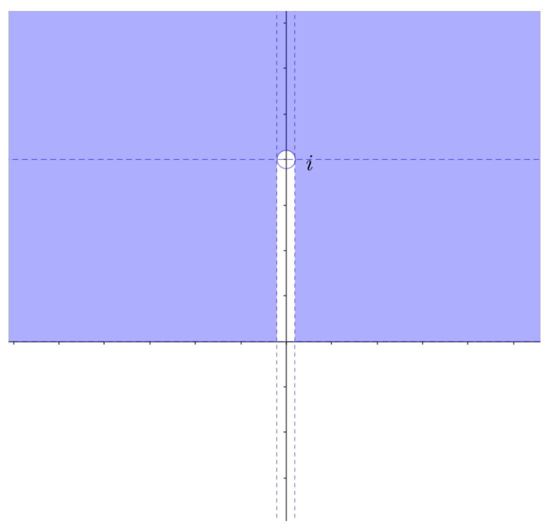
Ex. 1. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \delta\}$ - область связаная, но не односвязная, ее нельзя стянуть из-за дырки



Ex. 2. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \delta, \arg z \neq 0\}$ - область связная и односвязная



Ex. 3. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < \delta\}$ - несвязная область



Ex. 4. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0, z \notin [0, i]\}$ - здесь под $[0, i]$ подразумевается линейный отрезок на оси

Nota. Дальше все рассматриваемые Γ_D будут состоять из кусочногладких и изолированных кривых

1.3. Предел

Мет. Последовательность $\{z_n\} = z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$

Def. Пределом $\{z_n\}$ называют число z такое, что
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{n_0 = \mathbb{N}} \ \Big| \ \forall n > n_0 \ |z_n - z| < \varepsilon$
Обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$

Nota. $\{z_n\}$ можно представить как $x_n + iy_n$, то есть двумя $\mathbb{R}$-последовательностями

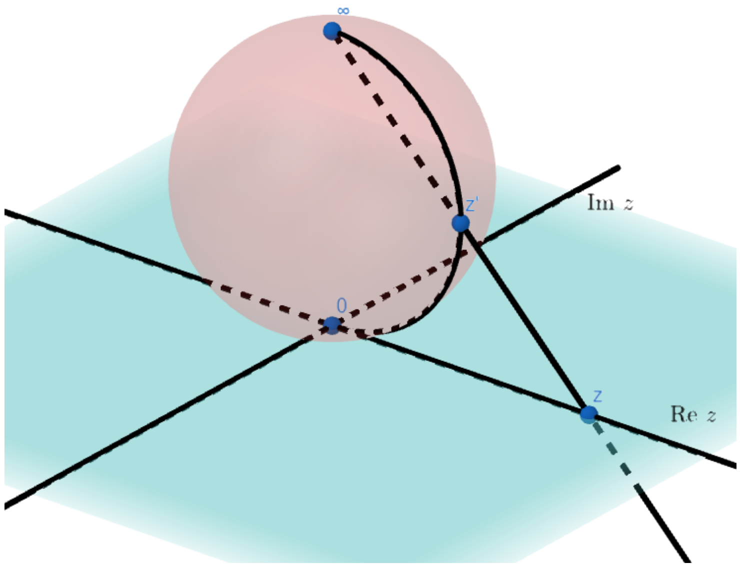
Th. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \underset{x,y\in\mathbb{R}}{x + iy} \Longleftrightarrow \begin{matrix} \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = x \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = y \end{matrix}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = \max(n_{0x}, n_{0y})}{n_0 \in \mathbb{N}} \ \Big| \ \forall n > n_0 \ \begin{matrix} |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$
$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$
То есть $\forall \varepsilon > 0 \ldots |z_n - z| < \varepsilon$
$\boxed{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ |z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} |x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \\ |y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow$
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$

Nota. Для комплексных чисел работают теоремы для пределов (сумма пределов, произведение пределов и т.д.), критерий Коши и другие

Def. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{n_0 \in \mathbb{N}} \ \Big| \ n > n_0 \ |z| > \varepsilon$
Def. Точка z, определенная как предел, равный ∞, называется бесконечно удаленной. Но существует множество последовательностей, чьи пределы удаляются на бесконечность разными путями на плоскости

Def. Стереографическая проекция (сфера Римана)



Поместим сферу на комплексную плоскость и сделаем биекцию точек плоскости на точки сферы: проведем из верхней точки сферы лучи вниз на плоскость, и точка, где луч пересекает сфера, будет считаться отображением для данной точки. Заметим, что в этом случае бесконечно удаленные точки будут отображаться в верхнюю точку сферы

Def. $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ - расширенная комплексная плоскость

Однако $z + \infty$ не определена, $\infty + \infty$ не определена. Но $\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n}$ при $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; $\infty = \infty \cdot \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ при $z_n \longrightarrow z$

Записью $[-\infty; +\infty]$ обозначается ось $\overline{\mathbb{R}}$;

$[-i\infty; +i\infty]$ - мнимая расширенная ось

Путь $x \pm i\infty$ при фикс. x - вертикальная прямая;

$iy \pm \infty$ - горизонтальная прямая;

$e^{i\varphi} \cdot \infty$ - прямая, проходящая через начало координат

2. Комплексная функция

2.1. Определение

Mem. $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R} \overset{def}{\iff}$ отображение такое, что $\forall x \in E\ \exists! y \in D \mid y = f(x)$

Def. $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \overset{def}{\iff}$ отображение такое, что $\forall z \in D\ \exists w \in G \mid f(z) = w$

Def. Если $\forall z \in D\ \exists! w \in G$, то f называется однозначной функцией

Def. Если $\forall z_1, z_2 \in D (z_1 \neq z_2) \Longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, то f называется однолистной функцией

Ex. 1. $w = \sqrt{z}$ - неоднозначная функция

$\sqsupset z = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

$\sqrt{z} = \sqrt{1}\left(\cos\dfrac{2\pi k}{2} + i\sin\dfrac{2\pi k}{2}\right)$

$w_1 = 1, \quad w_2 = -1$

Ex. 2. $w = z^2$ - неоднолистная функция

$z_1 = 1, z_2 = -1 \qquad w(z_1) = w(z_2) = 1$

Nota. Если $f(z)$ однозначна и однолистна, то $f(z)$ - взаимно однозначное соответствие (биекция). Тогда $\exists g(x) \mid g(f(x)) = x$

Комплексную функцию $f(z)$ можно представить как $u(x,y) + iv(x,y)$, где $x + iy = z$

Ex. $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$

$u(x,y) = (x^2 - y^2), \qquad v(x,y) = 2xy$

2.2. Предел функции

Def. $L \in \mathbb{C}, f : D \longrightarrow G, \quad L \overset{def}{=} \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{\delta = \delta(\varepsilon)}{\delta > 0} \Big|\ z \in D, z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)\ f(x) \in U_\varepsilon(L)$

В определении существование и значение L не должно зависеть от пути, по которому z приближается к точке сгущения z_0. Может быть так, что для любого направления стремления предел есть, но в общем смысле не существует

Ex. $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}\right) \qquad \sqsupset z = \rho e^{i\varphi}$

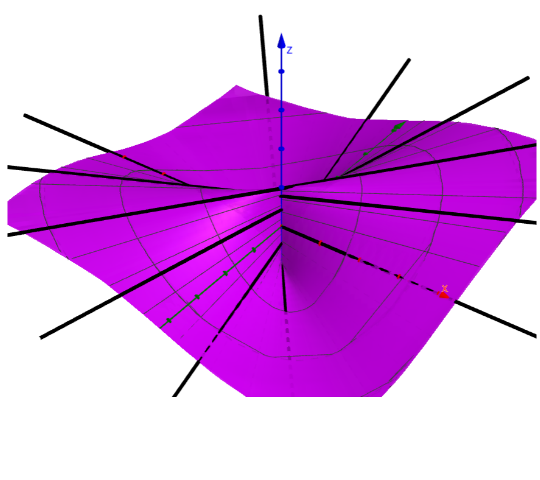
$f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}} - \dfrac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right) = \dfrac{1}{2i}(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi - \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = \sin 2\varphi$

Зафиксируем $\varphi = \varphi^* \in [0; 2\pi)$, тогда $\sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{\substack{\rho \to 0 \\ \varphi = \varphi^*}} f(z) = \lim\limits_{\substack{\rho \to 0 \\ \varphi = \varphi^*}} \sin 2\varphi = \sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$

Значения предела занимает отрезок $[-1;1] \Longrightarrow \nexists \lim\limits_{z \to 0} f(z)$

На рисунке изображена $\sin 2\varphi$, на оси Oz изображена $\operatorname{Re} w$. Черные линии - это возможные пути приближения z к 0



Nota. Путь следования предела аналогичен левостороннему и правостороннему пределами $\mathbb{R}$-функций

Def. Непрерывность функций в точке z_0.

$f : D \longrightarrow G, z_0 \in D$, $f(z)$ называется непрерывной в z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

На языке приращений: $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \underset{\Delta z \to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y \to 0 \Longrightarrow \begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases} \Longrightarrow \Delta\rho \to 0$$

2.3. Элементарные комплексные функции

Ex. 1. Линейная $f(z) = az + b, \qquad a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$

Эта функция однозначная, однолистная $\Longrightarrow \exists f^{-1}(z) = g(z) = \dfrac{z - b}{a}$

Геометрический смысл:

$a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$

$az = |a||z|(\cos(\varphi_a + \varphi_z) + i\sin(\varphi_a + \varphi_z))$ - поворот и растяжение ($\varphi_a = \arg a$, $\varphi_z = \arg z$)

$az + b = (x_{az} + x_b) + i(y_{az} + y_b)$ - сдвиг

То есть линейная функция - композиция из поворота, растяжения и сдвига

Ex. 2. Степенная $w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$ - однозначная, может быть неоднолистной

Для $n \in \mathbb{Q}$ функция становится неоднозначной

Ex. $w = z^2 \qquad z = \rho e^{i\varphi}, w = \rho^2 e^{2i\varphi}$

Пусть $z_1 \neq z_2$ и $w(z_1) = w(z_2)$, тогда $\arg z_1 = \arg z_2 \pm \pi$

$w(z_1) = \rho^2 e^{2i\arg z_1} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + 2\pi k)}$

$w(z_2) = \rho^2 e^{2i\arg z_2} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + \pi)} = \rho^2 e^{i(2\arg z_1 + 2\pi)} = w(z_1)$

Область однолистности z^2 - множество точек, для которых $\arg z \in [0; \pi)$

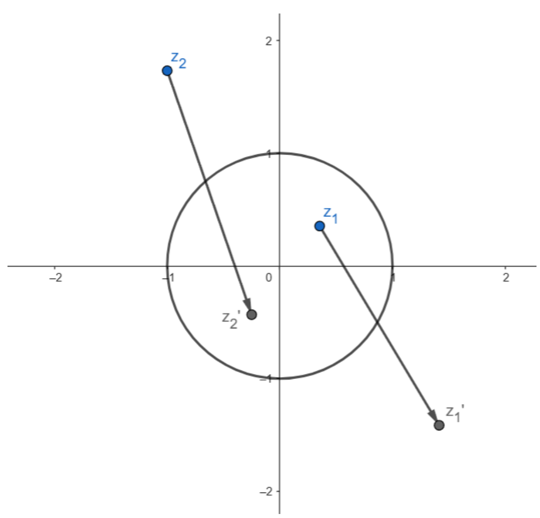
Точку $w = 0$ называют точкой разветвления

Ex. $w = z^{-1} = \dfrac{1}{z} \qquad w(0) = \infty, w(\infty) = 0$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - функция обратима

$w = re^{i\psi} = \dfrac{1}{\rho e^{i\phi}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \Longrightarrow |w| = \dfrac{1}{|z|}, \arg w = -\arg z$

Преобразование $|w| = \dfrac{1}{|z|}$ называется инверсией, а $\arg w = -\arg z$ дает симметрию относительно $\operatorname{Re} z$



Ex. 3. Рациональная $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \qquad n, m \in \mathbb{N}$

Ex. 4. Показательная $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Свойства:

1. $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
2. $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$

3. $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ - показательная функция периодична с периодом $2\pi i$

Ex. 5. Логарифмическая $w = \operatorname{Ln} z$
Если $e^w = e^{u+vi} = e^u(\cos v + i \sin v) = z = |z| e^{i \arg z}$, то $u = \ln|z|$, $v = \arg z + 2\pi k$
Тогда $\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)}$
$\ln z = \operatorname{Ln} z$ при $k = 0$ - т. н. главное значение
Заметим, что $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ - многолистная функция, а $w = \operatorname{Ln} z = \ln \rho + i(\arg z + 2\pi k)$ - многозначная

Ex. 6. Тригонометрические и гиперболические

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Nota. Рассмотрим уравнение $\sin z = A \in \mathbb{C}$
$\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = A \Longrightarrow e^{2iz} - 2iAe^{iz} - 1 = 0$
При $t = e^{iz}$ получаем квадратное уравнение, у которого в $\mathbb{C}$ всегда будет два корня. Это значит, что в $\mathbb{C}$ sin и cos принимают любые значения (то есть $|\sin z| > 1$)

2.4. Дифференцирование ФКП

Def. $w = f(z), w : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z_0 \in D$. **Производная** функции $w(z_0)$ - это предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$, если он существует и не зависит от пути $z \to z_0$

Mem. Дифференцирование $y = f(x)$:
В $\Phi_1\Pi$: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \underset{A \in \mathbb{R}}{=} A\Delta x + o(\Delta x)$
В $\Phi_2\Pi$: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)$

Def. $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0, если $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$
Def. Дифференцируемая в точке z_0 функция $w = f(z)$, производная $f'(z_0)$ которой непрерывна в z_0, называется аналитической (или аналитичной) функцией в z_0

Th. Критерий аналитичности (или Условие Коши-Римана)

$$f(x) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ аналитична в точке } z_0 = x + iy$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ непрерывны в } z \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Причем, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

$\boxed{\Longrightarrow}$ f аналитическая в $z \Longleftrightarrow \exists$ непрерывная $f'(z) =$
$= \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} =$ [предел не зависит от пути] $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - v(x,y)}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\dfrac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right) =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + i\dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x$
Аналогично при $i\Delta y \to 0$ получаем $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{i\Delta y} =$
$= \lim\limits_{\Delta y \to 0} \left(\dfrac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + \dfrac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} \right) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y v}{\Delta y} - i \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y u}{\Delta y} = v_y - iu_y$
Итак, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

Отсюда $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\exists$ непрерывные $u_x, u_y, v_x, v_y \Longleftrightarrow u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в (x,y), тогда
$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha_1(x, y, \Delta x, \Delta y) + \alpha_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$

$\alpha_1 = o(\Delta \rho), \quad \Delta \rho = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta_y + \beta_1 + \beta_2$

$\Delta f = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - (u(x,y) + iv(x,y)) = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y + \beta)$
$\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{u_x \Delta x + u_y \Delta y + iv_x \Delta x + iv_y \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \dfrac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = \dfrac{u_x(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \dfrac{v_x(i\Delta x - \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \dfrac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = u_x +$
$v_x i + \dfrac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y}$
Тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} = u_x + iv_x + \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = u_x + iv_x \Longleftrightarrow f' = u_x + iv_y$, существует и непрерывна в (x,y)

Nota. Используя Условие Коши-Римана, получим равенство $u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$
Nota. Коши-Риман в ПСК:

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$

Тогда $f'(z) = \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} - i\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = \dfrac{\rho}{z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + i\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\right)$

$u_\rho = u_x\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + u_y\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = u_x\cos\varphi + u_y\sin\varphi$

$v_\varphi = v_x\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + v_y\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = -\rho v_x\sin\varphi + \rho v_y\cos\varphi = \rho u_y\sin\varphi + \rho u_x\cos\varphi = \rho u_\rho$

Lab. $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \rho}$

Свойства аналитических функций

Пусть f, g - аналитические функции, тогда:

1° Линейность: $af + bg$ - аналитическая

2° Композиция: $f(g(z))$ - аналитическая

3° Произведение: $f \cdot g$ - аналитическая

Nota. Доказательства свойств элементарные, все сводится к сведению к u и v

Ex. $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2} = u(x,y) + iv(x,y)$

$u_x = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$v_y = \dfrac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = u_x$

$u_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$v_x = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u_y$

Таким образом, $\dfrac{1}{z}$ - аналитическая функция

Ex. $w = \overline{z} = x - iy$

$u_x = 1$, $v_y = -1 \neq u_x$ - не аналитическая функция

4° $f(z)$ аналитична в D $(f: D \longrightarrow D')$, $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in D$. Тогда $\exists g(w) = f^{-1}(z)$ $(g: D' \longrightarrow D)$ и $\forall z_0 \in D$ $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$, где $w_0 = w(z)$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Заметим, что $f'(z) \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J \neq 0$

Действительно, если якобиан равен 0, то $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0.$

Аналогично $\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

Значит, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ – противоречие

Если $J \neq 0$, то преобразование $f(z)$ приводит (x, y) в (u, v) взаимно однозначно. Тогда $\exists!$ решение $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$, то есть взаимно однозначно определены $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$

Обозначим $g(w) = x(u, v) + iy(u, v)$

Найдем $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$. Рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta z}{\Delta w} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{\Delta w \to 0} \lim\limits_{\substack{\Delta w \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \dfrac{\Delta z}{\Delta w} = \lim\limits_{\substack{\Delta w \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \dfrac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} =$

$\dfrac{1}{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \dfrac{1}{f'_z(z_0)} \Longrightarrow \lim\limits_{\Delta w \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta w} = g'_w(w_0) = \dfrac{1}{f'_z(z_0)}$ или $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$

5° $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D. Тогда $u(x, y), v(x, y)$ – гармонические функции в D

Функция считается гармонической, если $\Delta u = 0$ (здесь $\Delta = \nabla^2$ – лапласиан) $\Longleftrightarrow$ $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Lab.

6° Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D и известна $u(x, y)$ или $v(x, y)$, то $f(z)$ определяется однозначно с точностью до const

Пусть известна $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. Нужно найти $v(x, y)$. По условию Коши-Римана $\int u(x, y), \int v(x, y)$ не зависят от пути (Lab. доказать, что $\int_{AB} dv$ не зависит от пути)

$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x dx + v_y dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y) dx + u_x dy$

Интеграл будет найден с точностью до const $= C(x_0, y_0)$

2.5. Конформные отображения

Найдем геометрический смысл производной. Рассмотрим отображение $w = f(z)$ $(w : D \longrightarrow G)$ – дифференцируема в точке $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$

Аргумент: В области D рассмотрим гладкую кривую $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$. Образ $\gamma(t)$ – кривая $\sigma(t)$ в G

$\gamma(t)$ в окрестности некоторой точки z_0 гладкая, $\exists$ касательная с углом $\theta = \arg \gamma'(t)$

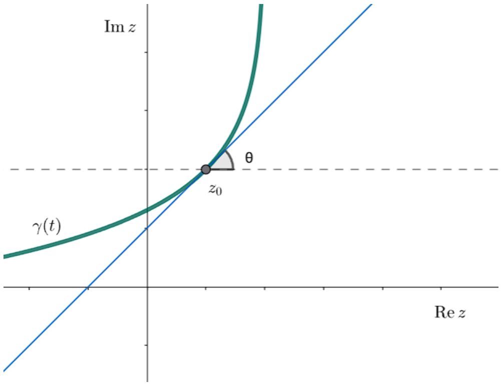
$\sigma(t)$ в окрестности $w_0 = w(z_0)$ гладкая, $\exists$ касательная с углом $\theta' = \arg \sigma'(t)$

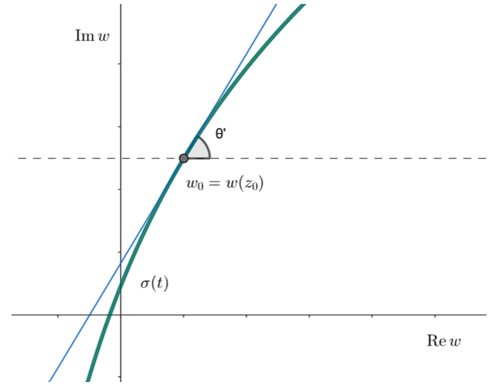
А $\sigma'(t_0) = w'(t_0) = f'(z_0) \cdot \underbrace{\gamma'(t_0)}_{z'(t_0)}$

$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0)$

$\theta' = \arg f'(z_0) + \theta$

$\theta' - \theta = \arg f'(z_0)$ – поворот кривой $\gamma(t)$ вокруг z_0 на угол $\arg f'(z_0)$ при отображении $w = f(z)$





Модуль: $w = f(z)$ – дифференцируема $\Longleftrightarrow \Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$

Рассмотрим $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| \dfrac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)| \Longrightarrow |\Delta w| = |f'(z_0)| \cdot |\Delta z| + o(|\Delta z|)$

Рассмотрим малый контур $|\Delta z| = |z - z_0| = \rho$. Тогда $|\Delta w| = |w(z) - w(z_0)| = |f'(z)|\rho + o(\rho)$

Таким образом $w(z)$ растягивает круг $|z - z_0| = \rho$ в $|f'(z_0)|$ раз с точностью до малых высших порядков

Итак, $w = f(z)$ в точке z_0 поворачивает точку у окрестности на угол $\alpha = \arg f'(z_0)$ и растягивает отрезки $[z_0, z]$ в $k = |f'(z_0)|$ раз

Def. Конформное отображение – отображение $w(z)$, сохраняющее углы (между образами и прообразами) и постоянство растяжений

Th. Условия конформности: $\begin{cases} \text{дифференцируемость} \\ \text{однолистность} \\ f'(z) \neq 0 \text{ в } D \end{cases} \Longleftrightarrow$ конформно

Ex. $w = az + b$

Mem. Геометрический смысл линейного отображения: b - перенос $z = 0$ в точку $z = b$; $a = |a|e^{i\varphi}$, тогда $|a|$ - коэффициент растяжения, φ - угол поворота

Заметим, $w' = (az + b)' = a$, тогда $k = |w'(z_0)| = |a|$, $\varphi = \arg w'(z_0) = \arg a$

Lab. Проверить, что $w = z^2$ не конформное отображение, найдя $w'(z_0)$

3. Интеграл по комплексной переменной

3.1. Определения

В $\mathbb{C}$ задана кусочно-гладкая кривая K (с концами в точках M и N) параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) & t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ y = \psi(t) & \varphi, \psi - \mathbb{R}\text{-функции} \end{cases}$$

Тогда $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ - задание K в $\mathbb{C}$. Введем отображение $w = f(z)$, действующее на K

Определим интегральные суммы:

1. Дробление отрезка MN на частичные дуги: $M = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = N$
   Тогда $\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = \beta$
2. Выбор средних точек в отрезках кривой $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$
3. Сопоставим интегральную сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i$
4. Интегралом от $w = f(z)$ по кривой K называется $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max \Delta z_i \to 0}} \sigma_n = \int_K f(z)dz$, если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения, выбора средних точек и т. д.

При этом интеграл можно представить как $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)(\Delta x_i + i\Delta y_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u(\xi_i, \eta_i) + iv(\xi_i, \eta_i))(\Delta x_i + i\Delta y_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i\Delta x_i - v_i\Delta y_i) + i \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i\Delta y_i + v_i\Delta x_i) = \int_K udx - vdy + i\int_K udy + vdx$

Nota. Мы свели $\mathbb{C}$-интеграл к двум криволинейным $\mathbb{R}$-интегралам, все свойства интегралов сохраняются

Ex. $\int_{\gamma=[0;1+i]} \overline{z}dz = \int_\gamma (x - iy)(dx + idy) = \int_\gamma xdx + ydy + i\int_\gamma xdy - ydx = 2\int_0^1 xdx = 1$

Свойства комплексного интеграла:

1° Линейность

2° Аддитивность

3° Смена знака: $\int_{K^+} = -\int_{K^-}$

4° Оценка, модуль: $\left|\int_K\right| \le \int_K |f(z)|dz$

5° $\int_K f(z)dz \overset{z=g(w)}{=} \int_C f(g(w))g'(w)dw = [\text{В частности переход к параметру } t] = \int_{C(t)} f(t)g'(t)dt$

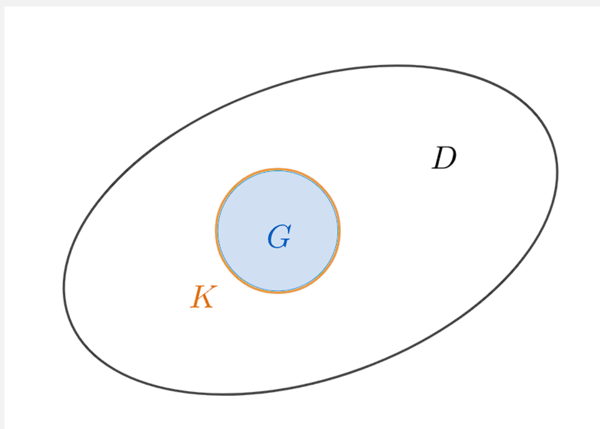
Ex. $I = \displaystyle\int_{K:|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z-z_0} \overset{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=} \int_K \frac{d\rho e^{i\varphi}}{\rho e^i\varphi} = \int_K \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^i\varphi} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$

Интеграл I не зависит от радиуса и центра окружности (то есть контура интегрирования), то есть интеграл функции $\dfrac{1}{z-z_0}$ будет равен $2\pi i$ для любой окружности в качестве контура

3.2. Теорема Коши

Th. 1. $f(z)$ аналитическая и однозначная в односвязной области D

Если $f(z)$ непрерывна на Γ_D, то $\displaystyle\oint_{\Gamma_D} f(z)dz = 0$



Запишем интеграл по контуру $K \subset D$ (K - кусочно гладкая):

$$\int_K f(z)dz = \int_K udx - vdy + i\int_K udy + vdx = I_1 + I_2 i$$

$$I_1 = \int_K \underbrace{u(x,y)dx}_{P(x,y)} - \underbrace{v(x,y)dy}_{Q(x,y)} = \begin{bmatrix} f(z) \text{ - аналитическая} \Longrightarrow \\ u_x, u_y, v_x, v_y \text{ существуют} \\ \text{и непрерывны} \end{bmatrix} = \underset{\text{Формула Грина}}{\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy} =$$

$$\iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Аналогично $I_2 = \displaystyle\int_k udy + vdx = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy = 0$

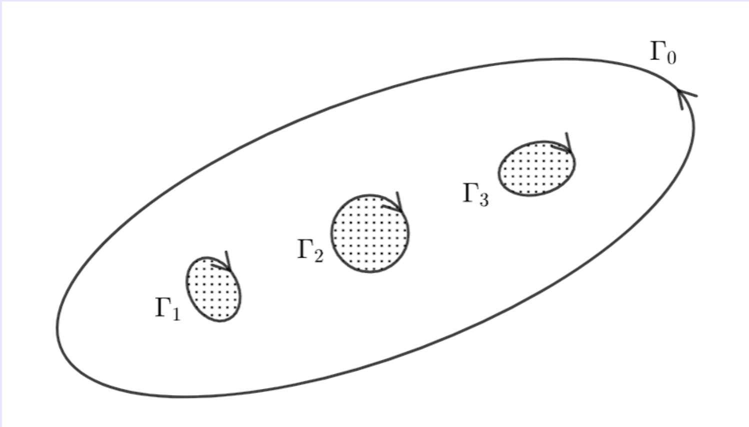
Таким образом, $\displaystyle\oint_{K\subset D} f(z)dz = 0$ - формула Коши

Так как $f(z)$ непрерывна на Γ_D, то можно взять $K = \Gamma_D$

Nota. Получим, что интеграл по любому замкнутому Γ_D контуру в области аналитичности равен нулю

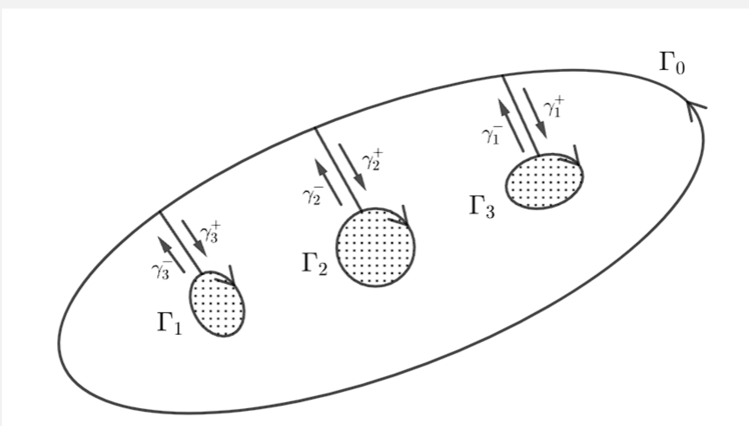
То есть $\displaystyle\int_{AB} f(z)dz$ в условиях **Th. 1.** не зависит от пути, и его можно решать как $\displaystyle\int_{AB} = \int_A^B$

Nota. Обобщим **Th. 1.** на многосвязную область. Выколотые области тоже имеют границы, которые включены в границу всей области



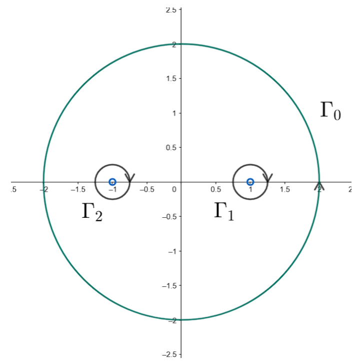
Th. 2. Дана многосвязная область D, $f(z)$ - аналитична в D и непрерывна на Γ_D
Граница $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$, где положительным обходом области считается тот, при котором область обхода слева
Тогда $\displaystyle\int_{\Gamma_D^+} f(z)dz = 0$ или $\displaystyle\int_{\Gamma_0 \circlearrowleft} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i \circlearrowleft} f(z)dz$

Сделаем разрезы как на картинке. Разрезы превратили область D в односвязную с границей $\Gamma' = \Gamma_0 \cup (\gamma_1^+ \cup \gamma_1^- \cup \Gamma_1) \cup \dots = \Gamma_0 \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\gamma_i^+ \cup \gamma_i^- \cup \Gamma_i)$



По **Th. 1.** $\displaystyle\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0 \Longleftrightarrow \int_{\Gamma_D} f(z)dz + \int_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \dots = 0$
Но $\displaystyle\int_{\gamma_1^+} = -\int_{\gamma_1^-}$, поэтому $\displaystyle\int_{\Gamma_D^+} = \sum \int_{\Gamma_i^-}$ или $\displaystyle\int_{\Gamma_0 \circlearrowleft} = \sum \int_{\Gamma_i \circlearrowleft}$

Ex. $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)dz$



По **Th. 2.** $\displaystyle\int_{\Gamma_0\circlearrowleft} f(z)dz + \int_{\Gamma_1\circlearrowright} f(z)dz + \int_{\Gamma_2\circlearrowright} f(z)dz = 0$

Тогда $\displaystyle\int_{|z|=2\circlearrowleft} f(z)dz = \int_{|z-1|=\rho_1\circlearrowleft} f(z)dz + \int_{|z+1|=\rho_2\circlearrowleft} f(z)dz$, где $\rho_1,\ \rho_2$ - радиусы бесконечно малой длины

3.3. Неопределенный интеграл

Мет. По теореме Барроу $\Phi(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом

Тогда $\Phi(x)$ - дифференцируема, и $\Phi'(x) = f(x)$, то есть $\Phi(x)$ - первообразная $f(x)$

Th. $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и $\forall \Gamma \subset D$ $\displaystyle\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

Тогда при фиксированном $z_0 \in D$ $\Phi(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ аналитична в D и $\Phi'(z) = f(z)$

Если $\forall\Gamma$ $\displaystyle\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$, то $\Phi(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} F(\zeta)d\zeta$ - интеграл, не зависящий от пути, а только от z_0 и z

Рассмотрим $\dfrac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} = \dfrac{1}{\Delta z}\left(\displaystyle\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right) = \dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta =$
$\dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z) + f(z))d\zeta = \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta + \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta =$

$\zeta\Big|_z^{z+\Delta z}$

$\Delta z f(z) + \dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta)-f(z))d\zeta$

$\left|\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta)-f(z))d\zeta\right| \le \int_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta)-f(z)|d\zeta \le \max_{[z,z+\Delta z]} |f(\zeta)-f(z)|\Delta z$

Так как $f(z)$ непрерывна в D и $z,\zeta \in D$, то $\lim\limits_{\zeta\to z} f(\zeta) = f(z) \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta\ |f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$

Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta\ \max|f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$

То есть $\left|\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta)-f(z))d\zeta\right| \le \varepsilon\Delta z$

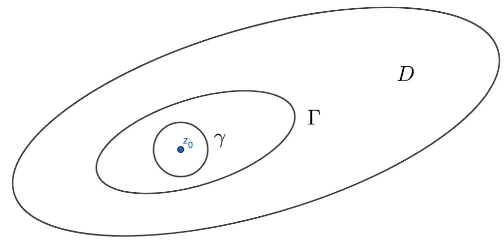
Или $\dfrac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} \le f(z)+\varepsilon$, то есть $\left|\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon$, или $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z)$

Def. $\Phi(z)=\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ называют первообразной для $f(z)$

Следствие - формула Ньютона-Лейбница: $\boxed{\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta=\Phi(z_2)-\Phi(z_1)}$

3.4. Интеграл Коши

Nota. Установим связь между значениями $f(z)$ во внутренних точках области и на ее границе
$f(z)$ аналитична в односвязной области D, $z_0\in D$. Окружаем z_0 контуром $\Gamma\in D$ и меньшим контуром $\gamma:|z-z_0|=\rho$
В кольце между γ и Γ рассмотрим функцию $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ (в кольце $\varphi(z)$ аналитична)



По **Th. 2.** для $\varphi(z)$ в многосвязной области $\displaystyle\int_{\Gamma\circlearrowleft}\varphi(\zeta)d\zeta=\int_{\gamma\circlearrowleft}\varphi(\zeta)d\zeta$ - не зависит от пути

То есть выбор окружности в качестве γ не важен:

$$\int_{\gamma\circlearrowleft}\varphi(\zeta)d\zeta\overset{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=}\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)\rho ie^{i\varphi}d\varphi}{\rho e^{i\varphi}}=i\int_0^{2\pi}f(\zeta)d\varphi=\underbrace{i\int_0^{2\pi}(f(\zeta)-f(z_0))d\varphi}_{\text{стягиваем } \gamma \text{ в точку } z_0, \int\to 0}+i\int_0^{2\pi}f(z_0)d\varphi=$$
$$if(z_0)\cdot 2\pi$$

Тогда $\displaystyle\int_\Gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_\gamma\varphi(\zeta)d\zeta=2\pi if(z_0)$

Nota. Доказали теорему: в области аналитичности $\forall z_0\in D$ $\displaystyle\int_{\Gamma_D}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi if(z_0)$

Ex. $\displaystyle\int_{|z|=2\circlearrowleft}\frac{f(z)}{(z-1)(z+1)}dz=\int_{|z-1|=\rho_1\circlearrowleft}\frac{\frac{f(z)}{z+1}}{z-1}dz+\int_{|z+1|=\rho_2\circlearrowleft}\frac{\frac{f(z)}{z-1}}{z+1}dz=2\pi i\left(\frac{f(1)}{2}+\frac{f(-1)}{-2}\right)$

4. Ряды

4.1. Числовой ряд в комплексной плоскости

Def. 1. $z_1+z_2+\dots+z_n+\dots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z_n$, где $z_n\in\mathbb{C}$ - числовой ряд

Def. 2. Сумма ряда - $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k$

Если сумма существует и конечна, то ряд называют сходящимся.

Def. $f(z)$ называется регулярной в точке z_0, если $f(z_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Для комплексных числовых рядов остаются справедливыми:

1. Необходимое условие сходимости
2. Признак Даламбера
3. Радикальный признак Коши
4. Критерий Коши
5. Абсолютная сходимость

4.2. Функциональный ряд в комплексной плоскости

Def. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, где $u_n(z):\ D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ - функциональный ряд

Th. Признак Вейерштрасса.
$\exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n,\ \alpha_n \in \mathbb{R}_0^+,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R},\ |u_n(z)| \le \alpha_n\ \forall z \in D \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Lab. Сверить формулировку и доказательства для $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$-случая

Nota. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывна

Th. $u_n(z)$ непрерывна в D и $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Тогда $\int_K f(\zeta)d\zeta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_K u_n(\zeta)d\zeta$, где $K \subset D$ - кусочно гладкая кривая

Докажем, что $\left| \int_K f(\zeta)d\zeta - \sum\limits_{k=1}^{n} \int_K u_k(\zeta)d\zeta \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\left| \int_K \left(f(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta) \right) d\zeta \right| = \left| \int_K \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta) \right) d\zeta \right| = \left| \int_K \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(\zeta)d\zeta \right| = \left| \int_K r_n(\zeta)d\zeta \right| \le \int_K |r_n(\zeta)||d\zeta| \underset{\text{по кр. Коши}}{\le \varepsilon}$$

4.3. Степенной ряд

Def. Степенной ряд - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \left(a = 0 : \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)$, $c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Область сходимости - круг с центром a, $|z-a| \leq R$ - радиус сходимости
$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z-a| < 1 \Longrightarrow |z-a| < \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

Nota. Также справедлива теорема Абеля

Th. Абеля.
Если степенной ряд сходится в точке z_1, то он сходится абсолютно и равномерно в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| > |z-z_2|$
Если степенной ряд расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| < |z-z_2|$

Следствие: Если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, то $f(z)$ - непрерывна в круге сходимости ряда

Th. Почленное дифференцирование суммы ряда.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ - сходящийся в круге радиуса $R \neq 0$. Тогда $f(z)$ дифференцируема и $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$

Рассмотрим ряд (и его сумму) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ - он сходится в круге радиуса ρ таком, что $0 \leq |z| \leq \rho < R$ (см. сходимость по Даламберу) (Обозначим круг $K_1 : |z| = \rho$)
Докажем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} = S(z) = f'(z)$
В круге K_1 выберем кривую γ, соединяющую $z_0 = 0$ и z
Рассмотрим $\int_\gamma \zeta^k d\zeta$, функция ζ^k аналитическая, тогда $\int_\gamma \zeta^k d\zeta$ не зависит от пути
$\int_\gamma \zeta^k d\zeta = \int_0^z \zeta^k d\zeta = \left.\frac{\zeta^{k+1}}{k+1}\right|_0^z = \frac{z^{k+1}}{k+1}$
Тогда $\int_0^z n c_n \zeta^{n-1} d\zeta = \left.\frac{n c_n \zeta^n}{n}\right|_0^z = c_n z^n$
Возьмем интеграл от суммы $\int_0^z S(\zeta) d\zeta = \int_0^z \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n \zeta^{n-1}\right) d\zeta = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^z n c_n \zeta^{n-1} d\zeta =$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$
Таким образом, $f(z)$ является первообразной для $S(z)$, то есть $S(z) = f'(z)$
При этом $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1} = \sum\limits_{m}^{\infty} c_m z^m$ - этот ряд можно дифференцировать дальше, и область, в которой функция дифференцируется, - круг K_1, где ρ вплотную подходит к R
Таким образом, доказали, что если $f(z)$ регулярна $\forall z$ в круге $|z| < R$, то $f(z)$ сколько угодно раз дифференцируема в этом круге и $f'(z) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)'$

Следствие: $f'(z) = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots)'$ или $f'(z) = (c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots)' \Longrightarrow c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = \dfrac{f''(z)}{2!}$ и так далее
Получили ряд Тейлора $f(z) \underset{|z-a|<\rho}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

Th. $f(z)$ аналитическая в области $D \Longrightarrow f(z)$ регулярна в области D

По формуле Коши $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ $\forall z \in K$, где $K = \{z \mid |z-a| < \rho\}$, $\gamma_\rho = \{\zeta \mid |\zeta - a| = \rho\}$ и $K \subset D$
Разложим в ряд $\dfrac{1}{\zeta - z}$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - (z-a) - a} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n, \text{ где } \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$$

То есть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся
Тогда $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta\right)(z-a)^n$$

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$ - единственное разложение по Тейлору, где $b_n = \displaystyle\int_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$
Итак $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Th. Морера. $f(z)$ непрерывна в D и $\forall \gamma \subset D$ $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0 \Longrightarrow f(z)$ аналитична в D

При данных условиях $\exists\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \mid \Phi'(z) = f(z)$ и $\Phi(z)$ аналитична
Так как $\Phi(z)$ дифференцируема, то она дифференцируема сколько угодно раз. Таким образом, существуют $f'(z), f''(z)$ и так далее, а из этого означает, что $f(z)$ – аналитична

Th. Лиувилля. $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ и $\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid |f(z)| \le M \ \forall z \in \mathbb{C}$
Тогда $f(z) \equiv \text{const}$

Докажем, что $f'(z) = 0$
$|f'(z)| = \left[\text{контур } \gamma \text{ – круг } z+\rho e^{i\varphi}\right] = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+\rho e^{i\varphi})\rho i e^{i\varphi}}{\rho^2 e^{2i\varphi}}d\varphi\right| \le$
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z+\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}}\right|d\varphi \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M}{\rho}d\varphi = \frac{M}{\rho} \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0 \Longrightarrow f(z) = \text{const}$

Nota. $w = \sin z \ne \text{const} \Longrightarrow \sin z$ – неограниченная функция

4.4. Ряд Лорана

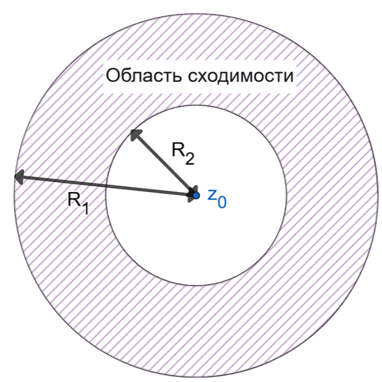
Def. Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$, где $C_n, z_0 \in \mathbb{C}$, называется рядом Лорана в точке z_0

Nota. Исследуем ряд. Обозначим $f_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$

$f_2 = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} C_n(z-z_0)^n \overset{m=-n}{\Longrightarrow} \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$

Тогда ряд можно записать так: $C_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(C_n(z-z_0)^n + \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}\right)$

Рассмотрим $f_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ – ряд согласно теореме Абеля сходится в круге с центром z_0 и радиусом $R_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$

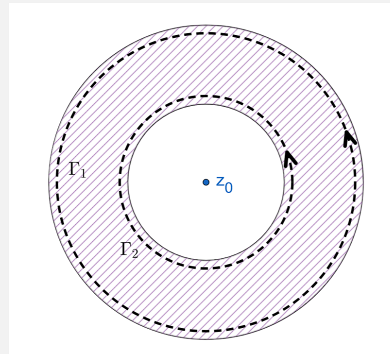


Рассмотрим $f_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} \overset{t=\frac{1}{z-z_0}}{=\!=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{-n}t^n$ – ряд сходится в круге $|t| < r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{-n}}{C_{-n-1}}\right|$ или $|z-z_0| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{-n-1}}{C_{-n}}\right| = R_2$

Таким образом, ряд Лорана сходится в *кольце* с внутренним радиусом R_2 и внешним радиусом R_1 и центром z_0 к значению некой аналитической функции $f(z)$

$f(z)$, аналитичная в кольце $K = (z_0, R_2, R_1)$, однозначно представима рядом Лорана в кольце K

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \overset{\Gamma=\Gamma_2\cup\Gamma_1}{=\!=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$



Разложим $\dfrac{1}{\zeta - z}$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{(\zeta-z_0)(1-(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \\ \frac{1}{-(z-z_0)(1-(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}))} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \end{array}\right.$$

1. Первый ряд сходится, если $\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| < |\zeta - z_0|$ – это Γ_1

Также $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$

По теореме Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

Из этого $C_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_1} \dfrac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$

2. Второй ряд сходится, если $\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| > |\zeta - z_0|$ – это Γ_2

Lab.

Nota. Таким образом, коэффициенты ряда Лорана $C_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_i} \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$

Def. Изолированной особой точкой однозначного характера называется точка $a \in \mathbb{C} \mid f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - a| < \rho$, но не определена в $z = a$

Def. Точка $a = \infty$ называется изолированной особой, если $f(z)$ аналитична в кольце $\rho < |z| < \infty$

Def. Устранимой особой точкой a называется точка, для которой $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$, в a функция не определена

Полюсом a называется точка, для которой $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$

Существенно особой точкой a называется точка, для которой $\nexists \lim\limits_{z\to a} f(z)$

Ex. 1. Для $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ точка $z = 0$ является устранимой особой – $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$

Ex. 2. Для $f(z) = \dfrac{z}{(z+i)^2}$ $\quad \lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z}{(z+i)^2} = \left[\dfrac{1}{0^2} = \infty^2\right]$, $a = -i$ - полюс 2-ого порядка

Ex. 3. Для $f(z) = \sin z \quad \nexists \lim\limits_{z\to\infty} \sin z$

Def. Для ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности особой точки $z = a \in \mathbb{C}$ $f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n}_{\text{это правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}}_{\text{это главная часть}}$

Def. Для ряда Лорана в $a = \infty$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n}_{\text{это главная часть}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}}_{\text{это правильная часть}}$

Def. Вычетом $\operatorname{res}(f(z), z_0)$ функции $f(z)$ в точке z_0 называется C_{-1} коэффициент ряда Лорана, если $z_0 \in \mathbb{C}$, и $-C_{-1}$, если $z_0 = \infty$

Из определения ясно, что для конечной точки $\operatorname{res}(f(z), z_0) = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta) d\zeta$

Для бесконечной $\operatorname{res}(f(z), z_0) = -C_{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} f(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(\zeta)d\zeta$

Здесь вместо γ берут для простоты окружность

Nota. Для вычисления вычетов используют более простые формулы, которые зависят от типа особых точек

Th. 1. z_0 – устранимая особая точка ($z_0 \in \mathbb{C}$) функции $f(z) \iff$ главная часть ряда Лорана равна 0

То есть $f(z)$ в z_0 представима как $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

$\boxed{\Longrightarrow}$ z_0 – устранимая $\iff \lim_{z\to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$

Тогда в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ функция ограничена – $|f(z)| \le M, M \in \mathbb{R}$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{-n+1}} = \left[\gamma_\delta : \zeta = z_0 + \delta e^{i\phi}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\delta i e^{i\varphi} d\varphi}{(\delta e^{i\varphi})^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\delta^n e^{ni\varphi} d\varphi$$

$$|C_{-n}| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\delta^n d\varphi = M\delta^n \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $C_{-n} = 0 \Longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n = C_0 + C_1(z - z_0) + \dots$

$\lim_{z\to z_0} f(z) = C_0 \in \mathbb{C}$ – устранимая

Следствие: вычет в устранимой точке равен 0

Th. 2. z_0 – полюс m-ого порядка $\iff$ главная часть ряда Лорана содержит не более m ненулевых членов подряд (то есть для $i > m$ $C_{-i} = 0$)

Полюс m-ого порядка функции $f(z)$ – точка z_0, для которой $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$ и z_0 – ноль функции $g(z)$ порядка m

То есть $g(z)$ представима как $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, где $h(z)$ – аналитическая в z_0 и $h(z_0) \neq 0$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Рассмотрим $\frac{1}{h(z)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, при этом $\frac{1}{h(z_0)} = b_0 \neq 0$ ($h(z)$ – аналитическая $\Longrightarrow \frac{1}{h(z)}$ – аналитическая $\Longrightarrow \frac{1}{h(z)}$ – регулярная)

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^m}(b_0 + b_1(z - z_0) + \dots) = \underbrace{\frac{b_0}{(z - z_0)^m}}_{\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} \neq 0} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^{m-n}} + \dots = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

При этом $C_{-n} = 0$ при $n \geq m + 1$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \frac{C_{-m}}{z - z_0}^m + \dots + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots =$

$$\frac{1}{(z - z_0)^m} \underbrace{(C_{-n} + \dots + C_{-1}(z - z_0)^{m-1} + C_0(z - z_0)^m + \dots)}_{\text{аналитическая } \frac{1}{h(z)} \text{ в } z_0} = \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)} \Longrightarrow$$

z_0 – ноль функции $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$

Тогда $f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} \infty \Longrightarrow z_0$ – полюс (порядок бесконечно большой равен m)

Th. 3. z_0 – существенно особая точка $\iff$ главная часть содержит бесконечное число члено

Очевидно, так как в другом случае, точка была бы полюсом или устранимой

Nota. Для особой точки $z_0 = \infty$ **Th. 1.**, **Th. 2.**, **Th. 3.** справедливы и доказываются аналогично:

1. z_0 – устранимая $\iff$ главная часть равна 0
2. z_0 – m-полюс $\iff$ главная часть содержит не более m членов и $C_m \neq 0$
3. z_0 – существенно особая $\iff$ главная часть содержит бесконечное число членов

Ex. 1. $f(z) = \frac{(e^z - 1)^2}{1 - \cos z}$, $z_0 = 0$

$f(z) = \dfrac{(e^z-1)^2}{1-\cos z} \underset{z\to 0}{\sim} \dfrac{z^2}{\frac{z^2}{2}} = 2$ – устранимая

Ex. 2. $f(z) = \operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z},\ z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}-\dots}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\left(\frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}-\dots}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots} - 1\right) \sim \frac{1}{z}\cdot k\frac{z^2}{1} \xrightarrow[z\to 0]{} 0 \text{ – устранимая}$$

Ex. 3. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)},\ z_0 = \infty$

$z = \dfrac{1}{w} \quad f(z) = \tilde{f}(w) = w\dfrac{1}{\frac{1}{w}-1} = w^2\dfrac{1}{1-w} = w^2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}$ – устранимая (главной части нет)

Вычисления вычетов

Nota. z_0 – устранимая $\Longrightarrow \operatorname{res}(f(z), z_0) = 0$

z_0 – существенно особая $\Longrightarrow \operatorname{res}(f(z), z_0) = \pm C_{-1}$

Th. z_0 – простой полюс ($m = 1$). Тогда $\operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$, где $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots$$

$$(z-z_0)f(z) = C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+1} \Longrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = C_{-1}$$

Th. z_0 – m-полюс. Тогда $\operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{(m-1)!}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m)$

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots \quad \Big|\cdot (z-z_0)^m$$

$$f(z)(z-z_0)^m = C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \dots \quad \Big|\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m) = C_{-1}(m-1)! + C_0(z-z_0)(m-1)! + C_1(z-z_0)^2\frac{(m-1)!}{2!} + \dots$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m) = C_{-1} + C_0(z-z_0) + C_1(z-z_0)^2\frac{1}{2!} + \dots$$

Далее переход к пределу, аналогичному доказательству выше

Th. Теорема о вычетах.

1. $f(z)$ аналитична в D кроме особых точек $z_1, \ldots, z_n$. Тогда $\int_{\Gamma_0} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{res}(f(z), z_k)$
2. $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ кроме особых точек $z_1, \ldots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\sum_{k=1}^{n} \text{res}(f(z), z_k) = 0$

1. По теореме Коши (о многосвязной области)
$\int_{\Gamma_0} f(\zeta)d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(\zeta)d\zeta = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i C_{-1}^{(k)} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{res}(f(z), z_k)$, где $C_{-1}^{(k)}$ – коэффициент для ряда Лорана в точке z_k
2. Очевидно по теореме Коши

X. Программа экзамена в 2024/2025

Часть 1.

1. Функции комплексного переменного (ФКП). Геометрия ФКП.

   Def. Функция $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \overset{def}{\iff}$ отображение такое, что $\forall z \in D\ \exists w \in G \mid f(z) = w$

   Def. Если $\forall z \in D\ \exists! w \in G$, то f называется однозначной функцией

   Def. Если $\forall z_1, z_2 \in D (z_1 \neq z_2) \Longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, то f называется однолистной функцией

   Ex. $w = \sqrt{z}$ - неоднозначная функция, $w = z^2$ - неоднолистная функция

   Nota. Если $f(z)$ однозначна и однолистна, то $f(z)$ - взаимно однозначное соответствие (биекция). Тогда $\exists g(x) \mid g(f(x)) = x$

   Комплексную функцию $f(z)$ можно представить как $u(x, y) + iv(x, y)$, где $x + iy = z$

2. Предел, непрерывность функции комплексного переменного.

   Def. Предел. $L \in \mathbb{C}, f : D \longrightarrow G, \quad L \overset{def}{=} \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \underset{\delta = \delta(\varepsilon)}{\exists \delta > 0} \Big| \ z \in D, z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)\ f(x) \in U_\varepsilon(L)$

   В определении существование и значение L не должно зависеть от пути, по которому z приближается к точке сгущения z_0. Может быть так, что для любого направления стремления предел есть, но в общем смысле не существует

   Def. Непрерывность функций в точке z_0. $f : D \longrightarrow G, z_0 \in D$, $f(z)$ называется непрерывной в z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

   На языке приращений: $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \underset{\Delta z \to 0}{\longrightarrow} 0$

3. Элементарные функции. Степень и корень. Показательная функция и логарифм. Тригонометрические и гиперболические функции.

   Элементарные функции:

   Ex. 1. Линейная $f(z) = az + b, \qquad a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$

   Эта функция однозначная, однолистная $\Longrightarrow \exists f^{-1}(z) = g(z) = \dfrac{z - b}{a}$. Линейная функция - композиция из поворота, растяжения и сдвига

   Ex. 2. Степенная $w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$ - однозначная, может быть неоднолистной

   Для $n \in \mathbb{Q}$ функция становится неоднозначной

   Ex. $w = z^2 \qquad z = \rho e^{i\varphi}, w = \rho^2 e^{2i\varphi}$. Область однолистности z^2 - множество точек, для которых $\arg z \in [0; \pi)$. Точку $w = 0$ называют точкой разветвления

   Ex. $w = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$, при этом $w(0) = \infty, w(\infty) = 0$. Для $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция обратима

   Преобразование $|w| = \dfrac{1}{|z|}$ называется инверсией, а $\arg w = -\arg z$ дает симметрию относительно $\operatorname{Re} z$

Ex. 3. Рациональная $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, $n, m \in \mathbb{N}$

Ex. 4. Показательная $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ - многолистная функция. Свойства:

(a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

(b) $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$

(c) $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ - показательная функция периодична с периодом $2\pi i$

Ex. 5. Логарифмическая $w = \operatorname{Ln} z$ - многозначная функция

Если $e^w = e^{u+vi} = e^u(\cos v + i \sin v) = z = |z|e^{i \arg z}$, то $u = \ln|z|$, $v = \arg z + 2\pi k$. Тогда $\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)}$

$\ln z = \operatorname{Ln} z$ при $k = 0$ - т. н. главное значение

Ex. 6. Тригонометрические и гиперболические

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

В $\mathbb{C}$ область значений этих функций является $\mathbb{C}$ - эти функции не ограничены

4. Дифференцирование и аналитичность функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Свойства аналитических функций.

Def. $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0, если $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$

Def. Дифференцируемая в точке z_0 функция $w = f(z)$, производная $f'(z_0)$ которой непрерывна в z_0, называется аналитической (или аналитичной) функцией в z_0

Th. Критерий аналитичности (или Условие Коши-Римана)

$$f(x) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ аналитична в точке } z_0 = x + iy$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ непрерывны в } z \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Причем, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

Свойства аналитических функций: пусть f, g - аналитические функции, тогда:

1° Линейность: $af + bg$ - аналитическая

2° Композиция: $f(g(z))$ - аналитическая

3° Произведение: $f \cdot g$ - аналитическая

4° $f(z)$ аналитична в D $(f: D \longrightarrow D')$, $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$. Тогда $\exists g(w) = f^{-1}(z)$ $(g: D' \longrightarrow D)$ и $\forall z_0 \in D$ $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$, где $w_0 = w(z)$

5° $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична в D. Тогда $u(x,y), v(x,y)$ – гармонические функции в D

6° Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична в D и известна $u(x,y)$ или $v(x,y)$, то $f(z)$ определяется однозначно с точностью до const

5. Понятие конформного отображения. Геометрический смысл производной.

Def. Конформное отображение – отображение $w(z)$, сохраняющее углы (между образами и прообразами) и постоянство растяжений

Th. Условия конформности: $\begin{cases} \text{дифференцируемость} \\ \text{однолистность} \\ f'(z) \neq 0 \text{ в } D \end{cases} \iff$ конформно

Геометрический смысл: Функция $w = f(z)$ в точке z_0 поворачивает точку у окрестности на угол $\alpha = \arg f'(z_0)$ и растягивает отрезки $[z_0, z]$ в $k = |f'(z_0)|$ раз

6. Интеграл по комплексной переменной. Теорема Коши. Первообразная.

В $\mathbb{C}$ задана кусочно-гладкая кривая K (с концами в точках M и N) параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = \varphi(t) & t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ y = \psi(t) & \varphi, \psi - \mathbb{R}\text{-функции} \end{cases}$

Тогда $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ - задание K в $\mathbb{C}$. Введем отображение $w = f(z)$, действующее на K

Определим интегральные суммы:

(a) Дробление отрезка MN на частичные дуги: $M = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = N$
Тогда $\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = \beta$

(b) Выбор средних точек в отрезках кривой $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$

(c) Сопоставим интегральную сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i$

(d) Интегралом от $w = f(z)$ по кривой K называется $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max \Delta z_i \to 0}} \sigma_n = \int_K f(z)dz$, если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения, выбора средних точек и т. д.

При этом интеграл можно представить как $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \int_K f(z)dz = \int_K udx - vdy + i\int_K udy + vdx$

Th. **Теорема Коши для односвязной области.** $f(z)$ аналитическая и однозначная в односвязной области D

Если $f(z)$ непрерывна на Γ_D, то $\oint_{\Gamma_D} f(z)dz = 0$

Th. Теорема Коши для многосвязной области. Дана многосвязная область D, $f(z)$ - аналитична в D и непрерывна на Γ_D

Граница $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$, где положительным обходом области считается тот, при котором область обхода слева

Тогда $\displaystyle\int_{\Gamma_D^+} f(z)dz = 0$ или $\displaystyle\int_{\Gamma_0 \circlearrowleft} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i \circlearrowleft} f(z)dz$

По теореме Барроу $\Phi(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом

Тогда $\Phi(x)$ - дифференцируема, и $\Phi'(x) = f(x)$, то есть $\Phi(x)$ - первообразная $f(x)$

Th. $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и $\forall \Gamma \subset D$ $\displaystyle\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

Тогда при фиксированном $z_0 \in D$ $\Phi(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ аналитична в D и $\Phi'(z) = f(z)$

$\Phi(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ называют первообразной для $f(z)$

Следствие - формула Ньютона-Лейбница: $\boxed{\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)}$

Часть 2.

7. Числовые ряды. Регулярная функция. Функциональные ряды. Признаки сходимости.

Def. 1. $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, где $z_n \in \mathbb{C}$ - числовой ряд

Def. 2. Сумма ряда - $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$. Если сумма существует и конечна, то ряд называют сходящимся.

Def. $f(z)$ называется регулярной в точке z_0, если $f(z_0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n \in \mathbb{C}$

Def. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, где $u_n(z):\ D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ - функциональный ряд

Th. Признак Вейерштрасса.
$\exists \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\alpha_n \in \mathbb{R}_0^+$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}$, $|u_n(z)| \le \alpha_n\ \forall z \in D \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

8. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряд Тейлора.

Def. Степенной ряд - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \left(a = 0 : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)$, $c_n \in \mathbb{C}$. Область сходимости - круг с центром a, $|z-a| \le R$ - радиус сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z-a| < 1 \Longrightarrow |z-a| < \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Th. **Абеля.**
Если степенной ряд сходится в точке z_1, то он сходится абсолютно и равномерно в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| > |z-z_2|$
Если степенной ряд расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| < |z-z_2|$

Th. Почленное дифференцирование суммы ряда.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ - сходящийся в круге радиуса $R \neq 0$. Тогда $f(z)$ дифференцируема и $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$

Ряд Тейлора $f(z) \underset{|z-a|<\rho}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

9. Бесконечная дифференцируемость регулярной функции. Формула n-ой производной.

Th. $f(z)$ аналитическая в области $D \Longrightarrow f(z)$ регулярна в области D

Для функции $f(z)$ в точке a $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

10. Ряды Лорана в конечной и бесконечно удаленной точке. Главная и правильная части.

Def. Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$, где $C_n, z_0 \in \mathbb{C}$, называется рядом Лорана в точке z_0. Ряд Лорана сходится в кольце с внутренним радиусом R_2 и внешним радиусом R_1 и центром z_0 к значению аналитической функции $f(z)$

$f(z)$, аналитичная в кольце $K = (z_0, R_2, R_1)$, однозначно представима рядом Лорана в кольце K

Nota. Таким образом, коэффициенты ряда Лорана $C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$

Def. Для ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности особой точки $z = a \in \mathbb{C}$ $\quad f(z) = \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n}_{\text{это правильная часть}} + \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}}_{\text{это главная часть}}$

Def. Для ряда Лорана в $a = \infty$: $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n z^n}_{\text{это главная часть}} + \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}}_{\text{это правильная часть}}$

11. Классификация изолированных особых точек однозначной аналитической функции.

    Def. Изолированной особой точкой однозначного характера называется точка $a \in \mathbb{C} \mid f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z-a| < \rho$, но не определена в $z = a$

    Def. Точка $a = \infty$ называется изолированной особой, если $f(z)$ аналитична в кольце $\rho < |z| < \infty$

    Def. Устранимой особой точкой a называется точка, для которой $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$, в a функция не определена

    Полюсом a называется точка, для которой $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$

    Существенно особой точкой a называется точка, для которой $\nexists \lim\limits_{z\to a} f(z)$

12. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Определение и формулы вычисления вычета. Основные теоремы теории вычетов.

    Def. Вычетом $\operatorname{res}(f(z), z_0)$ функции $f(z)$ в точке z_0 называется C_{-1} коэффициент ряда Лорана, если $z_0 \in \mathbb{C}$, и $-C_{-1}$, если $z_0 = \infty$

    Th. 1. z_0 – устранимая особая точка ($z_0 \in \mathbb{C}$) функции $f(z) \iff$ главная часть ряда Лорана равна 0

    Th. 2. z_0 – полюс m-ого порядка $\iff$ главная часть ряда Лорана содержит не более m ненулевых членов подряд (то есть для $i > m$ $C_{-i} = 0$)

    Th. 3. z_0 – существенно особая точка $\iff$ главная часть содержит бесконечное число члено

    Nota. z_0 – устранимая $\implies \operatorname{res}(f(z), z_0) = 0$

    z_0 – существенно особая $\implies \operatorname{res}(f(z), z_0) = \pm C_{-1}$

    Th. z_0 – простой полюс ($m = 1$). Тогда $\operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)$, где $z_0 \in \mathbb{C}$

    Th. z_0 – m-полюс. Тогда $\operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{(m-1)!} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m)$

Th. Теорема о вычетах.

(a) $f(z)$ аналитична в D кроме особых точек $z_1, \ldots, z_n$. Тогда $\displaystyle\int_{\Gamma_0} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k)$

(b) $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ кроме особых точек $z_1, \ldots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k) = 0$