Th. $\lambda_1, \dots \lambda_p$ - различные собственные значения $\mathcal{A} : V \to V$, им соответствуют U_{λ_i} - собственные подпространства V для λ_i
Пусть $e^{(1)} = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}\}, e^{(2)} = \{e_1^{(2)}, \dots, e_{k_2}^{(2)}\}, \dots$ - базисы $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots$
Составим систему $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$
Тогда система e - линейно независима

Составим линейную комбинацию:

1) Пусть $\overbrace{\alpha_1 e_1^{(1)} + \dots + \alpha_{k_1} e_{k_1}^{(1)}}^{x_1 \in U_{\lambda_1}} + \dots + \overbrace{\gamma_1 e_1^{(p)} + \dots + \gamma_{k_p} e_{k_p}^{(p)}}^{x_p \in U_{\lambda_p}} = 0$

   Тогда $\sum\limits_{i=1}^{p} x_i = 0$ (x_i - линейно независимы, так как λ_i - различны) - этого не может быть, так как $\forall i \ x_i \neq 0$ (как собственный вектор)

2) В $\forall U_{\lambda_i}$ содержится 0-вектор. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longleftrightarrow \forall x_i = 0$

   Но $x_j = \sum\limits_{j=1}^{k_i} c_i e_i^{(j)} = 0$ ($e_i^{(j)}$ - базисные, то есть линейно независимы) $\Longrightarrow \forall c_j = 0$ (комбинация должна быть тривиальна)

Nota. Таким образом, объединение базисов собственных подпространств U_{λ_i} образует линейно независимую систему в V^n
Что можно сказать о размерности системы $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$?
Обозначим $S = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim U_{\lambda_i} = \sum\limits_{i=1}^{p} \beta_i$, где β_i - геометрическая кратность λ_i
Очевидно, что $S \leq n$

Th. $S = n \Longleftrightarrow \exists$ базис V^n, составленный из собственных векторов

Система $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$ состоит из собственных векторов
Если $S = n$, получаем n собственных векторов, линейно независимых - базис V^n
Если $\exists$ базис из n лин. незав. собственных векторов, тогда $\dim e = S = n$

Nota. Условие **Th.** равносильно: $V^n = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} U_{\lambda_i} (\lambda_i \neq \lambda_j)$
Действительно: $\dim V^n = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim U_{\lambda_i}$ и $\forall i, j \ U_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_j} = 0$

Ex. Если $\exists n$ различных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то $\dim U_{\lambda_i} = 1 \forall i$

Def. Оператор $\mathcal{A}$ диагонализируемый, если существует базис e такой, что A_e - диагональна

Th. $\mathcal{A}$ - диагонализируем $\Longleftrightarrow$ существует базис из собственных векторов

$\boxed{\Longleftarrow}$ $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис собственных векторов

Собственный вектор по определению: $\exists \lambda_i \mid \mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + 0 \cdot e_n$

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1 + \sum_{k \neq 1} 0 \cdot e_k \\ \mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2 + \sum_{k \neq 2} 0 \cdot e_k \\ \vdots \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}_e \dots e_i = \mathcal{A}e_i$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\exists f$ - базис, в котором A_f - диагональная (по **Def.** $\mathcal{A}$ - диагонализируем)

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \text{Применим } \mathcal{A} \text{ к } f_i \in f$$

$\mathcal{A}f_i = A_f f_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} f_i = \alpha_i f_i \Longrightarrow \alpha_i$ - собственное число (по def), а f_i - собственный вектор

Nota. О связи алгебраической и геометрической кратностей (α - алгебраическая, β - геометрическая кратность)

1) α, β не зависят от выбора базиса

β_i по определению $\dim U_{\lambda_i}$ и не связана с базисом

Для α: строим вековое уравнение $|A_f - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda_i$ с кратностью α_i, $\alpha = \sum \alpha_i$

$\sqsupset A_g$ - матрица $\mathcal{A}$ в базисе g

Но $A_g = T_{f \to g} A_f T_{g \to f}$ или для оператора

$$A_g - \lambda I = T_{f \to g}(A_f - \lambda I)T_{g \to f} = \overbrace{T_{f \to g} A_f T_{g \to f}}^{=A_g} - \overbrace{\lambda T_{f \to g} I T_{g \to f}}^{=\lambda I} = A_g - \lambda I$$

Таким образом, матрицы $A_g - \lambda I$, $A_f - \lambda I$ - подобные

Def. Подобные матрицы - матрицы, получаемые при помощи преобразования координат

Тогда $\det(A_f - \lambda I) = \det(A_g - \lambda I)$ (инвариант) $\Longrightarrow$ одинаковая кратность

2) Геометрическая кратность не превышает алгебраической. У диагонализируемого оператора $\alpha = \beta$

2.8. Самосопряженные операторы

1* Сопряженные операторы

Далее будем рассматривать операторы только в евклидовом пространстве над вещественном полем. Пространство со скалярным произведением над комплексным полем называется унитарным

Def. Скалярное произведение $(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - функция, со свойствами:

1) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
3) $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$
4) $(x, y) = (y, x)$ в $\mathbb{R}$. Но в комплексном множестве: $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Тогда $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)}$