

Содержание

| | |
|---|-----------|
| Лекция 1 | 5 |
| Статистическое определение вероятности | 5 |
| Пространство элементарных исходов. Случайные события | 5 |
| Операции над событиями | 6 |
| Вероятность | 6 |
| Лекция 2 | 8 |
| Построение модели случайных явлений | 8 |
| Свойства вероятности | 8 |
| Аксиома непрерывности | 9 |
| Независимые события | 10 |
| Лекция 3 | 11 |
| Условная вероятность | 11 |
| Полная группа событий | 13 |
| Лекция 4 | 15 |
| Серия испытаний Бернулли | 15 |
| Наиболее вероятное число успехов | 16 |
| Статистическое понятие вероятности | 18 |
| Закон больших чисел Бернулли | 18 |
| Лекция 5 | 19 |
| Схема испытаний и соответствующее распределение | 19 |
| I. Схема Бернулли | 19 |
| II. Схема до первого успешного испытания | 20 |
| III. Схема испытаний с несколькими исходами | 20 |
| IV. Урновая схема | 21 |
| V. Схема Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли | 22 |
| Лекция 6 | 23 |
| Случайные величины | 23 |
| Основные типы распределения | 24 |
| Дискретная случайная величина | 24 |
| Числовые характеристики дискретных случайных величин | 25 |
| I. Математическое ожидание (среднее значение, полезность) | 25 |
| II. Дисперсия | 25 |

| | |
|---|-----------|
| III. Среднее квадратическое отклонение | 26 |
| Свойства математического ожидания и дисперсии | 26 |
| Другие числовые характеристики | 28 |
| Лекция 7 | 29 |
| Стандартное дискретное распределение | 29 |
| I. Распределение Бернулли | 29 |
| II. Биномиальное распределение | 29 |
| III. Геометрическое распределение | 30 |
| IV. Распределение Пуассона | 30 |
| Задача о разорении игрока | 31 |
| Случайное блуждание на прямой | 32 |
| Лекция 8 | 33 |
| Функция распределения | 33 |
| Свойства функции распределения | 34 |
| Абсолютно непрерывное распределение | 35 |
| Свойства плотности абсолютно непрерывного распределения | 36 |
| Числовые характеристики | 37 |
| Другие числовые характеристики | 37 |
| Сингулярное распределение | 38 |
| Лекция 9 | 39 |
| Стандартное абсолютно непрерывное распределение | 39 |
| I. Равномерное распределение | 39 |
| II. Показательное распределение | 40 |
| III. Нормальное распределение (Гауссовское) | 41 |
| Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями | 42 |
| Коэффициенты асимметрии и эксцесса | 43 |
| Лекция 10 | 44 |
| Преобразование случайных величин | 44 |
| Стандартизация случайной величины | 44 |
| Линейное преобразование | 44 |
| Монотонное преобразование | 45 |
| Квантильное преобразование | 45 |
| Характеристики преобразованной случайной величины | 47 |
| Свойства моментов | 47 |

| | |
|---|-----------|
| Лекция 11 | 48 |
| Сходимость случайных величин | 48 |
| Связь между видами сходимости | 49 |
| Ключевые неравенства | 49 |
| I. Неравенство Маркова | 50 |
| II. Неравенство Чебышева | 50 |
| III. Правило «трех сигм» | 50 |
| Среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин | 50 |
| Законы больших чисел | 51 |
| I. Закон больших чисел Чебышева | 51 |
| II. Закон больших чисел Бернулли | 51 |
| III. Закон больших чисел Хинчина | 52 |
| IV. Усиленный закон больших чисел Колмогорова | 52 |
| V. Закон больших чисел Маркова | 52 |
| Центральная предельная теорема | 52 |
| Лекция 12 | 53 |
| Совместное распределение случайных величин | 53 |
| Функция распределения | 53 |
| Свойства функции распределения | 54 |
| Независимость случайных величин | 54 |
| Дискретная система двух случайных величин | 55 |
| Абсолютно непрерывная система двух случайных величин | 56 |
| Многомерное равномерное распределение | 57 |
| Лекция 13 | 58 |
| Математическое ожидание и дисперсия случайного вектора | 58 |
| Функции от двух случайных величин | 58 |
| Сумма стандартных распределений. Устойчивость относительно суммирования | 59 |
| Условное распределение | 61 |
| I. Условное распределение в дискретной системе двух случайных величин | 61 |
| II. Условное распределение в непрерывной системе двух случайных величин . . . | 61 |
| Лекция 14 | 62 |
| Пространство случайных величин | 62 |
| Условное математическое ожидание | 63 |
| Числовые характеристики. Зависимости случайных величин | 64 |
| Коэффициент линейной корреляции | 65 |

| | |
|---|-----------|
| Лекция 15 | 66 |
| Характеристические функции | 66 |
| Характеристические функции стандартных распределений | 67 |
| Доказательства теорем через свойства характеристических функций | 68 |
| Закон больших чисел Хинчина | 68 |
| Центральная предельная теорема | 69 |
| Предельная теорема Муавра-Лапласа | 70 |
| Лекция 16 | 71 |
| Условная дисперсия | 71 |
| Энтропия | 71 |
| Энтропия при непрерывном распределении | 73 |
| Х. Программа экзамена в 2024/2025 | 74 |

Лекция 1

В теории вероятности обычно изучают случайные события

Обычно наука занимается закономерностями, но так как в случайных экспериментах нет закономерностей, теория вероятности занимается поиском закономерности в сериях случайных экспериментах

Итак, в XVI веке начали с экспериментов бросков монеты:

| число бросков | число гербов | частота |
|---------------|--------------|---------|
| 4040 | 2048 | 0.5069 |
| 12000 | 6019 | 0.5016 |
| 24000 | 12012 | 0.5005 |

Как можно видеть, частота стремится к 0.5 - появляется статистическая закономерность

Статистическое определение вероятности

Пусть проводится n реальных экспериментов, при которых событие A появилось n_A раз

Отношение $\frac{n_A}{n}$ называется частотой события A

Эксперименты показывают, что при увеличении числа n частота стабилизируется у некоторого числа, при котором мы понимаем статистическую вероятность: $P(A) \approx \frac{n_A}{n}$ при $n \rightarrow \infty$

Пространство элементарных исходов. Случайные события

Def. Пространством элементарных исходов Ω называется множество, содержащее все возможные исходы экспериментов, из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются элементарными исходами и обозначаются ω

Def. Случайными событиями называется подмножество $A \subset \Omega$. События A наступают, если произошел один из элементарных исходов из множества A

Ex. 1. Бросок монеты: $\Omega = \{\Gamma, P\}$, $A = \{\Gamma\}$ - выпал герб

Ex. 2. Игральная кость: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$

Ex. 3. Монета бросается дважды.

а) Учитываем порядок: $\Omega = \{\Gamma\Gamma, PP, P\Gamma, \Gamma P\}$

а) Не учитываем порядок: $\Omega = \{\Gamma\Gamma, PP, \Gamma P\}$

Ex. 4. Кубик дважды: $\Omega = \{\langle i, j \rangle \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$

$A = \{\text{разность } \dot{=} 3\} = \{\langle 1, 4 \rangle; \langle 4, 1 \rangle; \langle 2, 5 \rangle; \langle 5, 2 \rangle; \dots\}$

Ex. 5. Монета бросается до первого герба: $\Omega = \{\Gamma, P\Gamma, PP\Gamma, \dots\}$ - счетно-бесконечное множество

Ex. 6. Монета бросается на плоскость: $\Omega = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R}, \langle x, y \rangle - \text{центр монеты}\}$ - несчетное число исходов

Операции над событиями

Ω - достоверные события (наступают всегда)

\emptyset - невозможное события (никогда не наступает, так как не содержит ни одного элем. исхода)

Введем операции:

Def. 1. Суммой $A + B$ называется событие, состоящее в том, что произошло события A или событие B (хотя бы одно из них)

Def. 2. Произведением $A \cdot B$ называется событие, состоящее в том, что произошло событие A и событие B (оба из них)

Nota. $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ - произошло хотя бы одно из этих событий

$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots$ - произошли все эти события

Def. 3. Противоположным A событием называется событие \bar{A} , состоящее в том, что событие A не произошло

Nota. $\bar{\bar{A}} = A$

Def. 4. Дополнение (разность) $A \setminus B$ называется событие $A \cdot \bar{B}$

Def. 5. События A и B называются несовместными, если их произведение - пустое множество (не могут произойти одновременно при одном эксперименте)

Def. 6. События A влекут события B , если $A \subset B$ (если наступает A , то наступит B)

Вероятность

Мы хотим присвоить какую-то числовую характеристику к каждому событию, отражающее его частоту наступления: $0 \leq P(A) \leq 1$ - вероятность наступления события A

Классическое определение вероятности

Пусть пространство случайных событий Ω содержит конечное число равновозможных исходов, тогда применимо классическое определение вероятности

Def. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$, где n - число всех возможных исходов, m - число благоприятных исходов

В частности, если $\Omega = n$ и A_i - элем. исх., то $P(A_i) = \frac{1}{n}$

Свойства:

- 1) $0 \leq P(A) \leq 1$
- 2) $P(\Omega) = 1 \quad (m = n)$
- 3) $P(\emptyset) = 0 \quad (m = 0)$
- 4) Если события A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Геометрическое определение вероятности (граф де Бюффон)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутая ограниченная область

$\mu(\Omega)$ - мера Ω в \mathbb{R}^n (например, длина отрезка, площадь области на плоскости, объем тела в пространстве)

В эту область наугад бросаем точку. «Наугад» означает, что вероятность попадания в A зависит только от меры A и не зависит от ее расположения

В этом случае применимо геометрическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Ех. 1. Монета диаметром в 6 см бросается на пол, вымощенной квадратной плиткой со стороной 20 см, какова вероятность, что монета окажется целиком внутри одной плитки

$$\mu(\Omega) = 20^2 = 400$$

$$\mu(A) = (20 - 3 - 3)^2 = 196$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{196}{400} = 0.49$$

Ех. 2. Задача Бюффона об игле: пусть пол вымощен ламинатом, $2l$ - ширина доски, на пол бросается игла длины, равной ширине доски, найти вероятность того, что игла пересечет стык доски

Определим положение иглы координатами центра и углом, между иглой и стыком доски, причем можно считать, что эти величины независимы

$\exists x \in [0; l]$ - расстояние от центра до ближайшего края,

$\varphi \in [0; \pi]$ - угол

$$\Omega = [0; l] \times [0; \pi]$$

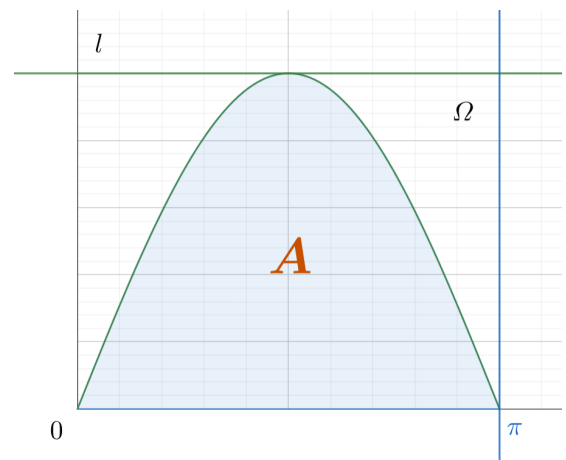
Событие A (пересечет стык) наступает, если $x \leq l \sin \varphi$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

$$S(\Omega) = \pi l$$

$$S(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^\pi = -l(-1 - 1) = 2l$$

$$P(A) = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$



Лекция 2

Построение модели случайных явлений

1. Задаем пространство элементарных исходов Ω
2. **Def.** Система \mathcal{F} подмножеств Ω называется σ -алгеброй событий, если:

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- 2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$;
- 3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Свойства:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$, так как $\Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
- (b) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \quad \square$$

- (c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A, \bar{B} \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B = A \cdot \bar{B} \in \mathcal{F} \quad \square$$

Ex. 1. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

Ex. 2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$

Ex. 3. **Def.** Борелевская σ -алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - минимальная σ -алгебра, содержащая все возможные интервалы на прямой

3. **Def.** \square Ω - пространство элементарных исходов, \mathcal{F} - его σ -алгебра событий. Вероятностью на (Ω, \mathcal{F}) называется функция $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами:

- (a) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность)
- (b) Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ - несовместное, то $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (свойство счетной аддитивности)
- (c) $P(\Omega) = 1$ (условие нормированности)

Def. Из этого тройка (Ω, \mathcal{F}, P) называется вероятностным пространством

Свойства вероятности

1. Так как \emptyset и Ω - несовместные, то $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

2. Формула обратной вероятности: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$\square \quad A \text{ и } \bar{A} - \text{несовместные и } A + \bar{A} = \Omega \implies P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1 \quad \square$$

3. $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$

Аксиома непрерывности

Th. Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$
 Тогда $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 При непрерывном изменении области $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность $P(A)$ также должна изменяться непрерывно

Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

\square

Ясно, что $A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1} + \prod_{i=n}^{\infty} A_i$
 $\prod_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^n A_i \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1}$ и так как эти события
 несовместны, то по свойству счетной аддитивности $P(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1})$ - это остаток
 (хвост) сходящегося ряда
 $P(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \bar{A}_{i+1}) + P(A_n)$ и $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ по необходимому признаку
 сходимости

\square

Nota. Аксиому счетной аддитивности можно вывести из конечной аддитивности и аксиомы счетной непрерывности

Свойства операций сложения и умножения

1. Свойство дистрибутивности: $A \cdot (B + C) = AB + AC$
2. Формула сложения: если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$
3. Формула сложения вероятностей: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

□

$$A + B = \overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\overline{B} - \text{несовместные события} \implies P(A + B) = P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}\overline{B}) = (P(\overline{A}B) + P(A\overline{B})) + (P(A\overline{B}) + P(\overline{A}\overline{B})) - P(A\overline{B}) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

□

Ех. Из колоды в 36 карт достали одну карту. Какова вероятность того, что будет дама или пика

Пусть Д - дама, П - пика, $P(Д + П) = P(Д) + P(П) - P(ДП) = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$

Формула сложения при $N = 3$: $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) - P(A_1A_2) + P(A_1A_2A_3)$

Общий случай: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_iA_j) + \sum_{i < j < k} P(A_iA_jA_k) + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1A_2 \dots A_n)$ - формула включения и исключения

Ех. n писем случайно раскладывается по n конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо окажется в своем конверте

□ A_i - i -ое письмо в своем конверте

$$P(A_i) = \frac{1}{n}; P(A_iA_j) = \frac{1}{A_n^2}; P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{A_n^3}; P(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

Слагаемых вида A_i - n штук; A_iA_j - C_n^2 ; $A_iA_jA_k$ - C_n^3 ; $A_1A_2 \dots A_n$ - 1 штука

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{A_n^2} + C_n^3 \frac{1}{A_n^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Так как $e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \dots$, то при $n \rightarrow \infty$ $P(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-1} \approx 0.63$

Независимые события

Под независимыми событиями логично подразумевать события, не связанные причинно-следственной связью (то есть когда факт наступления одного не влияет на оценку вероятности другого)

$$\square |\Omega| = n; |A| = m_1; |B| = m_2$$

Проведем пару независимых испытаний. Тогда получаем пространство элементарных исходов $\Omega \times \Omega$ и $|\Omega \times \Omega| = n^2$

По основному принципу комбинаторики $|A \cdot B| = m_1 \cdot m_2$

$$P(AB) = \frac{|A \cdot B|}{|\Omega \times \Omega|} = \frac{m_1 m_2}{n^2} = P(A) \cdot P(B)$$

Def. События A и B называются независимыми, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Lab. $\square P(A), P(B) \neq 0$, доказать, что если A и B несовместны, то они зависимы

Свойство: Если A и B независимы, то независимы \overline{A} и \overline{B} , A и \overline{B} , \overline{A} и B

Доказательство: $A = A \cdot (B + \bar{B}) = AB + A\bar{B}$ - несовместные события $\implies P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \implies P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}) \implies$ независимы

Def. События A_1, A_2, \dots, A_n - независимы в совокупности, если для любого набора i_1, i_2, \dots, i_k ($2 \leq k \leq n$) $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

Nota. Из независимости в совокупности при $k = 2$ получаем попарную независимость. Обратное утверждение неверно

Ex. (С. Бернштейн)

Пусть имеется правильный тетраэдр, одна грань окрашена в красный, вторая в синий, третья в зеленый, а четвертая во все эти три цвета.

Подбросили тетраэдр, $\square A$ - грань, которая содержит красный цвет, B - синий, C - зеленый.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Так как } P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B) \text{ - попарная независимость}$$

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) \text{ - но вот независимость в совокупности не соблюдается}$$

Ex. (Шевалье де Мере, Паскаль, Ферма, ≈ 1650 г.)

Какова вероятность того, что при 4 бросании кости выпадет одна шестерка

A_1 - при первом броске шестерка, A_2 - при втором, A_3 - при третьем, A_4 - при четвертом

B - выпала хотя бы одна шестерка при 4 бросках

$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ - совместные события, но независимые

Найдем обратную вероятность: \bar{B} - ни разу не выпала шестерка

$$\bar{B} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4$$

$$P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_4) = \frac{5}{6}$$

$$\bar{B} = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.482$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) \approx 0.52$$

Лекция 3

Условная вероятность

Условная вероятность $P(A|B)$ (или $P_B(A)$) - вероятность события A , вычисленная в предположении, что событие B уже произошло

Ех. Бросается кость один раз, известно, что выпало больше 3 очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков

A - выпало четное число очков

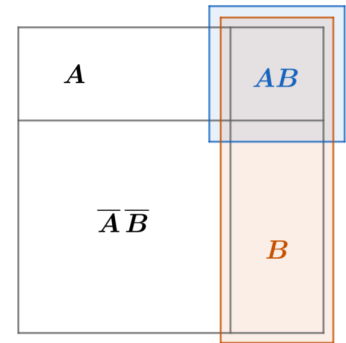
B - выпало больше трех очков

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |\Omega| = 6; A = \{2, 4, 6\}; B = \{4, 5, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Интерпретация с помощью геометрической вероятности:

$$P(A|B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{\frac{S_{AB}}{S_{\Omega}}}{\frac{S_B}{S_{\Omega}}}$$



Def. Условной вероятностью события A при условии, что имело место событие B , называется величина $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Ех. Известно, что среди населения 1% воров. В комнате, где находилось 10 гостей, у хозяина пропал кошелек. Какова вероятность того, что произвольный гость является вором.

A - гость является вором $P(A) = 0.01$

B - пропал кошелек (хотя бы один вор среди гостей есть)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{1 - P(\bar{B})} = \frac{P(A)}{1 - 0.99^{10}} = \frac{0.01}{1 - 0.99^{10}} = 0.105$$

Формула умножения:

В качестве следствия условной вероятности получаем:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \implies P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Общий случай:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

□

База индукции $P(AB) = P(B)P(A|B)$

Шаг индукции: пусть верно при $n - 1$:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2})$$

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) =$$

$$P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

□

Ех. Студент выучил 1 билет из n , в группе n студентов. Каким по очереди ему нужно зайти, чтобы вероятность сдать экзамен была наибольшей

Пусть A_i - билет, вытянутый на i -ом шаге ($1 \leq i \leq n$)

A - студент сдал экзамен

$$P(A) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i-1}} \cdot A_i) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-(i-1)}{n-(i-2)} \cdot \frac{1}{n-(i-1)} = \frac{1}{n}$$

Полная группа событий

Def. События $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и содержат все возможные элементарные исходы

$$H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i, j \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$$

Следствие: $\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) = 1$

Th. Формула полной вероятности. $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ - полная группа событий.

Тогда $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$

□

$$P(A) = P(\Omega A) = P((H_1 + H_2 + H_3 + \dots)A) = P(H_1A + H_2A + H_3A + \dots) = [H_i \cdot A \cdot H_j \cdot A = \emptyset \cdot A] = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$$

□

Th. Формула Байеса. $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий, и известно, что событие A уже произошло

Тогда $P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$

□

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

□

Ex. 1. В первой коробке 4 белых и 2 черных шара, во второй 1 белый и 2 черных. Из первой коробки во вторую переложили 2 шара, затем из второй коробки достали шар. Какова вероятность того, что он оказался белым

$\sqsupset H_1$ - переложили 2 белых H_2 - 2 черных

H_3 - разного цвета

A - из второй коробки достали белый шар

$$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

$$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{75} + \frac{1}{75} + \frac{16}{75} = \frac{35}{75} = \frac{7}{15}$$

Ех. 2. Вероятность попадания первого стрелка в цель 0.9, а второго 0.3. Наугад вызванный стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что это бы первый стрелок?

H_1 - вызван первый стрелок

H_2 - вызван второй стрелок

A - стрелок попал

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_1) = 0.9 \quad P(A|H_2) = 0.3$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.9}{\frac{1}{2} \cdot 0.9 + \frac{1}{2} \cdot 0.3} = \frac{9}{9 + 3} = 0.75$$

Ех. 3. По статистике раком болеет 1% населения. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительный. Найти вероятность того, что человек болен.

H_1 - человек болен

H_2 - человек здоров

A - анализ положительный

$$P(H_1) = 0.01$$

$$P(H_2) = 0.99$$

$$P(A|H_1) = 0.99$$

$$P(A|H_2) = 0.01$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{0.01 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.01} = \frac{1}{2} = 0.5$$




Допустим, что второй независимый с первым анализ также оказался положительным. Найти вероятность того, что человек болен.

$$P(H_1) = 0.01 \quad P(H_2) = 0.99$$

$$P(AA|H_1) = 0.99^2 \quad P(AA|H_2) = 0.01^2$$

$$P(H_1|AA) = \frac{0.01 \cdot 0.99^2}{0.01 \cdot 0.99^2 + 0.99 \cdot 0.01^2} = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$$

Интуитивно вероятность $\frac{1}{2}$ может поддаваться непониманию, однако можно рассуждать так: пусть в городе живут 10000 человек, из них 100 болеют, а у 99 из них положительный анализ; у других 9900 положительный анализ всего лишь у 99, отсюда выходит $\frac{1}{2}$

Ех. 4. В телевизионной студии 3 двери , за одной из них приз . Игрок выбрал наугад одну из 3 дверей, после чего ведущий открывает одну из двух оставшихся дверей и показывает, что там приза нет . После чего предлагает игроку поменять свой выбор. Стоит ли игроку соглашаться?

H_1 - игрок угадал

H_2 - игрок не угадал

A - ведущий открыл дверь без приза

$$P(H_1) = \frac{1}{3} \quad P(H_2) = \frac{2}{3}$$

$$P(A|H_1) = 1 \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Но это неправильно, так как действия ведущего неслучайны - он всегда откроет дверь без приза

В этом случае, если мы гипотетически выберем 300 дверей, в 100 случаях мы отгадаем, ведущий откроет любую дверь без приза; но в 200 случаях мы не отгадаем, ведущий откроет вторую дверь без приза, и в этом случае мы сможем поменяться на дверь с призом, отсюда шанс $\frac{2}{3}$, если мы поменяем свой выбор

Ех. 5. Вероятность того, что в семье с детьми ровно k детей, равна $\frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \dots$. Какова вероятность того, что в семье один мальчик, если известно, что нет девочки? Рождения мальчиков и девочек равновероятны.

H_i - в семье i детей ($1 \leq i < \infty$)

$$P(H_i) = \frac{1}{2^i}$$

A - в семье нет девочки

$$P(A|H_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|H_i) = \frac{1}{2^i}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^i}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Лекция 4

Серия испытаний Бернулли

Схемой Бернулли - называется серия одинаковых независимых экспериментов, каждый из которых имеет 2 исхода: произошло интересующее нас событие или нет

$p = p(A)$ - вероятность успеха при одном испытании

$q = 1 - p$ - вероятность неудачи

v_n - число успехов в серии из n испытаний

$p(v_n = k) = p_n(k)$

Из этого получаем формулу Бернулли:

Th. Вероятность того, что при n испытаниях произойдет ровно k успехов, равна
 $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

□

Рассмотрим один из элементарных исходов, благоприятных данному событию:

$A_n = \underbrace{УУУ \dots У}_{k} \underbrace{ННН \dots Н}_{n-k}$ - k успехов, $n - k$ неудачи

$$p(Y) = p, p(H) = q$$

Так как испытания независимы, то $p(A_n) = p^k q^{n-k}$

Остальные элементарные исходы имеют ту же вероятность, перебираем все расстановки исходов, получаем C_n^k , в итоге, получаем формулу Бернулли

□

Ex. Вероятность попадания стрелка при одном выстреле - 0.8. Какова вероятность того, что из пяти выстрелов точными будут три

$$n = 5 \quad p = 0.8 \quad q = 1 - p = 0.2 \quad k = 3$$

$$p_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0.2048$$

Наиболее вероятное число успехов

Выясним, при каком значении k вероятность предшествующего числа успехов $k - 1$ будет не более, чем вероятность k успехов

$$p_n(k-1) \leq p_n(k)$$

$$C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} \leq C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q \leq \frac{n!}{(k)!(n-k)!} p$$

$$\frac{q}{(k-1)!(n-k+1)!} \leq \frac{p}{(k)!(n-k)!}$$

$$\frac{q}{n-k+1} \leq \frac{p}{k}$$

$$k \leq np + p$$

$$\text{Отсюда } np + p - 1 \leq k \leq np + p$$

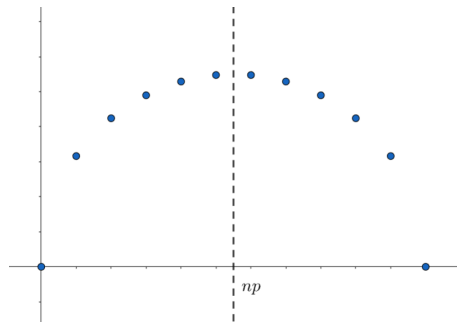
Рассмотрим 3 ситуации:

1) np - целое, тогда $np + p$ - нецелое, и $k = np$ - наиболее вероятное

2) $np + p$ - нецелое, тогда $k = \lfloor np + p \rfloor$

3) $np + p$ - целое, тогда $np + p - 1$ - целое, и 2 наиболее вероятных числа успеха

Геометрическая интерпретация:



При увеличении числа n точки превращаются в кривую Гаусса



При увеличении числа испытаний n формула Бернулли вырождается в следующие асимптотические формы (применяем, если требуется найти вероятность точного числа успеха)

1) Локальная формула Муавра-Лапласа

$$p_n(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \text{функция Гаусса}$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства $\varphi(x)$:

1. $\varphi(x) = \varphi(-x)$ - функция четная
2. при $x > 5$ $\varphi(x) \approx 0$

2) Интегральная формула Муавра-Лапласа (если требуется найти вероятность того, что число успехов в данном диапазоне)

$$p_n(k_1 \leq k \leq k_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \text{функция Лапласа}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} - \text{отклонение от левой границы, } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} - \text{отклонение от правой}$$

Свойства $\Phi(x)$

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ - функция нечетная
2. при $x > 5$ $\Phi(x) \approx 0.5$

Nota. Эти формулы обычно можно применять при $n \geq 100$ и $0.1 \leq p \leq 0.9$

Nota. В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевают другую функцию: $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - стандартное отклонение. Эта функция отличается от $F_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ - интеграл Пуассона

Ex. Вероятность попадания стрелка в цель 0.8, стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, что:

а) произошло ровно 330 попаданий

б) произошло от 312 до 336 попаданий

$$\text{а) } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{330 - 320}{8} = 1.25$$

$$p_{400}(330) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(1.25) = \frac{1}{8} \varphi(1.25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0.1826 \approx 0.0228$$

$$\text{б) } x_1 = \frac{312 - 320}{8} = -1, x_2 = \frac{336 - 320}{8} = 2$$

$$p_{400}(312 \leq k \leq 336) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$$

Статистическое понятие вероятности

Пусть проводим n реальных экспериментов, n_A - число появления события A , $\frac{n_A}{n}$ - относительная частота события A .

Эксперименты с монетой показали, что при больших n , $\frac{n_A}{n} \approx p(A)$ - явление стабилизации

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности события

n - число испытаний, $p = p(A)$, $\frac{n_A}{n}$ - экспериментальная частота

$$p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = p\left(-\varepsilon \leq \frac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon\right) = p(-n\varepsilon \leq n_A - np \leq n\varepsilon) = p(np - n\varepsilon \leq n_A \leq n\varepsilon + np) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [\text{по}$$

$$\text{интегральной формуле Лапласа}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

$$\text{Итак, получили, что нужная нам вероятность } p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

Закон больших чисел Бернулли

$$\text{Итак, } p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right)$$

$$\text{при } n \rightarrow \infty, \sqrt{n} \rightarrow \infty, \frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} \rightarrow \infty, \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right) \rightarrow 0.5, p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \rightarrow 2 \cdot 0.5 = 1 - \text{закон больших}$$

чисел показывает, что вероятность попадания относительной частоты в ε -трубу приближается к 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1 \text{ или } \frac{n_A}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p - \text{сходимость по вероятности}$$

Ex. Для оценки доли p курящих людей берется выборка объема n , и делается оценка доли курящих людей по формуле $p^* = \frac{n_A}{n}$. Каким должен быть объем n , чтобы с вероятностью $\gamma = 0.95$ данная оценка отличалась от истинного значения не более, чем на $\varepsilon = 0.01$

По формуле вероятности отклонения частоты от вероятности $p(|p^* - p| \leq \varepsilon) = p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx$

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right) = 0.95$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right) = 0.475$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} = 1.96$$

$$\frac{1}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} = 196$$

$$\frac{1}{pq} = 38416$$

$$n \geq 38416pq$$

$$\text{В самой худшей ситуации } pq \leq 0.5^2 = \frac{1}{4}$$

$$n \geq \frac{38416}{4} = 9604$$

Лекция 5

Схема испытаний и соответствующее распределение

Введем обозначения:

n - число испытаний

p - вероятность успеха при одном испытании

$q = 1 - p$ - вероятность неудачи

I. Схема Бернулли

$\exists v_n$ - число успехов в серии из n испытаний

$$P_n(v_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Def. Соответствие $k \rightarrow C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, \dots, n$ называется биномиальным распределением (обозначается $B_{n,p}$ или $B(n, p)$)

II. Схема до первого успешного испытания

Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успешного испытания под номером τ

$$\text{Th. } P(\tau = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

□

$$P(\tau = k) = P(\underbrace{H \dots H}_{k-1} Y) = q^{k-1}p$$

□

Def. Соответствие $k \rightarrow q^{k-1}p, k \in \mathbb{N}$ называется геометрическим распределением вероятности (обозначается G_p или $G(p)$)

Nota. Геометрическое распределение обладает свойством нестарения или свойством отсутствия последствия

$$\text{Th. } \exists P(\tau = k) = q^{k-1}p, k \in \mathbb{N}. \text{ Тогда } \forall n, k \geq 0 \quad P(\tau > n+k \mid \tau > n) = P(\tau > k)$$

□

Заметим, что $P(\tau > m) = q^m$, первые m - неудачи

$$P(\tau > n+k \mid \tau > n) = \frac{P(\tau > n+k, \tau > n)}{P(\tau > n)} = \frac{P(\tau > n+k)}{P(\tau > n)} = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k$$

□

Nota. $P(\tau = n+k \mid \tau > n) = p(\tau = k)$ - Lab. доказать

III. Схема испытаний с несколькими исходами

Пусть при n независимых испытаний могут произойти m исходов (несовместных)

p_i - вероятность i -ого исхода при одном испытании

Th. Вероятность того, что при n испытаниях первый исход появится n_1 раз, второй - n_2 раз, m -ый - n_m ($\sum_{i=1}^m n_i = n$) равно

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

При $m = 2$ получаем формулу Бернулли

□

Рассмотрим следующий благоприятный исход, обозначим A_1

$$A_1 = \underbrace{11 \dots 1}_{n_1} \underbrace{22 \dots 2}_{n_2} \dots \underbrace{mm \dots m}_{n_m}$$

$$p(A_1) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

Все остальные благоприятные исходы имеют ту же вероятность и отличаются лишь расположением i -ых исходов на n позициях, получаем мультиномиальную теорему:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

В итоге получаем требуемую формулу

□

Ех. Два одинаковых сильных шахматиста играют шесть партий

Вероятность ничьи в партии - 0.5. Какова вероятность того, что второй игрок выиграет две партии, а еще три сведет к ничьей

1-ый исход - выиграл 1 игрок

2-ой исход - выиграл 2 игрок

3-ий исход - ничья

$$n = 6; \quad p_3 = 0.5; \quad p_1 = p_2 = \frac{1 - p_3}{2} = 0.25$$

$$P_6(1; 2; 3) = \frac{6!}{1!2!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} \frac{1}{2^9} \approx 0.12$$

IV. Урновая схема

В урне N шаров, из которых K шаров белые, $N - K$ - черные

Из урны вынимаем (без учета порядка) n шаров. Найти вероятность, что из них k белых

а) Схема с возвратом (после каждого раза кладем шар обратно). В этом случае вероятность вынуть белый шар одинакова и равна $\frac{K}{N}$. Получаем схему Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$

б) Схема без возврата - вынутый шар мы выбрасываем, тогда $P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$

Def. Соответствие $k \rightarrow \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, \dots, n$ называется гипергеометрическим распределением

Nota. Если $K, N \rightarrow \infty$ так, что $\frac{K}{N} \approx p$ (не меняется), а n и k зафиксировать, то после выбора n шаров пропорции состава шаров не сильно изменятся, поэтому логично предположить, что гипергеометрическое распределение будет сходиться к биномиальному

Th. Если $K, N \rightarrow \infty$ таким образом, что $\frac{K}{N} \rightarrow p \in (0; 1)$, а n и $0 \leq k \leq n$ фиксированы, то вероятность при гипергеометрическом распределении будет стремиться к биномиальному:

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$$

Воспользуемся леммой: $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном k

Доказательство леммы: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{n^k}{k!} = 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{n^k}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$

□

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \sim \frac{K^k}{k!} \frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{N^n} = \frac{n!}{k!} \frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{K^k}{N^n} = C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k} \rightarrow C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$$

□

V. Схема Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли

Nota. Если вероятность успеха p в схеме Бернулли мала или близка к 1, то предельная формула Лапласа при недостаточно большом числе испытаний дает достаточно большую погрешность.

В этой ситуации следует использовать формулу Пуассона (формула редких событий)

Схема: вероятность числа успеха при одном испытании p_n зависит от числа испытаний n , причем таким образом, что $np_n \approx \lambda = \text{const}$

λ - интенсивность появления редких событий в единицу времени в потоке испытаний

Th. 1. (формула Пуассона) Пусть $n \rightarrow \infty, p_n \rightarrow 0$ таким образом, что $np_n \rightarrow \lambda = \text{const} > 0$

Тогда вероятность k успехов при n испытаниях: $P_n(k) = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

□

Обозначим $\lambda_n = np_n$. Тогда $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$ и

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k!} \frac{\lambda_n^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n =$$

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \left(\left(1 - \frac{\lambda_n}{n} \right)^{-\frac{n}{\lambda_n}} \right)^{-\frac{\lambda_n}{n} n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

□

Th. 2. (оценка погрешности в формуле Пуассона) Пусть v_n - число успехов при n испытаниях в схеме Бернулли

p - вероятность успеха при одном испытании, $\lambda = np$, $A \subset \{0, 1, \dots, n\}$ - произвольное подмножество чисел

Тогда $|P_n(v_n \in A) - \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \min(p, np^2) = \min(p, p\lambda)$
(без доказательства)

Def. Соответствие $k \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \dots$ называется распределением Пуассона с параметром $\lambda > 0$ (обозначается Π_λ)

Ex. Прибор состоит из 1000 элементов, вероятность отказа каждого элемента равна 0.001. Какова вероятность отказа больше двух элементов

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$n = 1000, p = 0.001, \lambda = 1$$

$$P_n(k > 2) = 1 - P_n(k \leq 2) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) \approx 1 - \left(\frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1} + \frac{1^2}{2!} e^{-1} \right) = 1 - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} \right) e^{-1} \approx 0.0803$$

Лекция 6

Случайные величины

Примеры случайных величин:

Ex. 1. Бросаем кость, может выпасть 6 граней, здесь случайная величина ξ - число выпавших очков

Ex. 2. ξ - время работы микросхемы, в этом случае время может быть:

а) дискретным - $\xi \in \{0, 1, 2, \dots\}$

б) непрерывным - $\xi \in [0; \infty)$

Ex. 3. Температура за окном: $\xi \in (-50, +50)$

Def. На вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, p) функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется \mathcal{F} -измеримой,

если $\forall x \in \mathbb{R} \{ \omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x \} \in \mathcal{F}$ (то есть $\xi^{-1}(y) \in \mathcal{F}$, где $y \in (-\infty; x)$)

Def. Случайной величиной, заданной на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, p) , называется \mathcal{F} -измеримая функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, которая сопоставляет каждому элементарному исходу некоторое вещественное число

Nota. Не все функции являются \mathcal{F} -измеримыми

Ex. Кость: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$

Пусть $\xi(\omega) = i$ - число выпавших очков. Тогда при $x = 4$: $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{F} \implies$ случайная величина не является \mathcal{F} -измеримой

В данном случае следует сделать ξ таким, что $\xi(2) = \xi(4) = \xi(6) = 1$, $\xi(1) = \xi(3) = \xi(5) = 0$

Nota. Смысл измеримости: если задана случайная величина ξ , то мы можем задать вероятность попадания случайной величины в интервал $(-\infty; x)$: $p(\xi \in (-\infty; x)) = p(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\})$

А из интервалов $(-\infty; x)$ с помощью операций пересечения, объединения и дополнения можно получить все другие интервалы (включая точки) и также приписать им вероятности

Из матанализа известно, что мера из интервалов однозначно продолжается до меры на всей Борелевской σ -алгебры на \mathbb{R} и, таким образом, с помощью случайной величины каждому Борелевскому множеству B также приписывается вероятность $p(\xi \in B)$

Итак, пусть ξ задана на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, p) , с помощью нее получаем новой вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_\xi)$

Получая новое вероятностное пространство, мы упрощаем и формализуем работу, так как можем не учитывать природу и структуру исходного пространства

Def. Функция $p(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ставящая в соответствие каждому Борелевскому множеству вероятность, называется распределением случайной величины ξ

Основные типы распределения

- a) Дискретное
- b) Абсолютно непрерывное
- c) Сингулярное
- d) Смешанное

Дискретная случайная величина

Def. Случайная величина ξ имеет дискретное распределение, если она принимает не более, чем счетное число значений. То есть существует конечный или счетный набор чисел

$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ такой, что $p(\xi = x_i) = p_i > 0$ и $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$

Таким образом, дискретная случайная величина (ДСВ) задается законом распределения:

| | | | | | | |
|-------|-------|-------|---------|-------|---------|-------------------------------|
| ξ | x_1 | x_1 | \dots | x_n | \dots | - значения случайной величины |
| p | p_1 | p_1 | \dots | p_n | \dots | - вероятности этих значений |

$(\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ - условие нормировки)

Ex. 1. кость, $\xi(\omega) = i$ - число выпавших очков

| | | | | | | |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| ξ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| p | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Ex. 2. все распределения из предыдущих лекций (биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, Пуассона)

Ex. 3. индикатор события A : $I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A - \text{событие } A \text{ не происходит} \\ 1, & \omega \in A - \text{событие } A \text{ происходит} \end{cases}$

Числовые характеристики дискретных случайных величин

I. Математическое ожидание (среднее значение, полезность)

Def. Математическим ожиданием $E\xi$ случайной величины ξ называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

при условии, что данный ряд сходится абсолютно

Nota. Если $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \infty$, то говорят, что матожидание не существует

При условной сходимости ряда при перестановке членов сумма изменяется, поэтому необходима абсолютная

Физический смысл: Среднее значение - число, вокруг которого группируются значения случайной величины, центр тяжести точек x_i с весами p_i

Статистический смысл: среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины при большом числе реальных экспериментов

II. Дисперсия

Def. Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называют среднее квадратов ее отклонения от математического ожидания:

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ или $D\xi = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - E\xi)^2 p_i$ при условии, что данный ряд сходится

В противном случае говорится, что дисперсии не существует

Nota. Дисперсию обычно удобно считать по формуле $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E\xi^2$

Смысл - квадрат среднего разброса (рассеивания) значения случайной величины относительно ее математического ожидания

III. Среднее квадратическое отклонение

Def. Средним квадратическим отклонением (СКО) σ_ξ называется величина $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

Смысл - средний разброс

Ex. 1. Кость

| | | | | | | |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| ξ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| p | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

$$E\xi = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = 3.5 \text{ (в данном случае ср. арифм.)}$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^6 (x_i - E\xi)^2 p_i = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 = \frac{35}{12}$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} \approx 1.79$$

Ex. 2. Индикатор события A : $I_A(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \notin A - \text{событие } A \text{ не происходит} \\ 1, \omega \in A - \text{событие } A \text{ происходит} \end{cases}$

| | | |
|-------|------------|--------|
| ξ | 0 | 1 |
| p | $1 - P(A)$ | $P(A)$ |

$$E\xi = 0 \cdot (1 - P(A)) + 1 \cdot P(A) = P(A)$$

$$D\xi = 0^2 \cdot (1 - P(A)) + 1^2 P(A) - P(A)^2 = P(A)(1 - P(A)) = pq$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{pq}$$

Свойства матожидания и дисперсии

Th. 1. Случайная величина ξ имеет вырожденное распределение, если $\xi(\omega) = \text{const } \forall \omega \in \Omega$

| | |
|------------|------------|
| ξ | C |
| p | 1 |
| $E\xi = C$ | $D\xi = 0$ |

Th. 2. Свойство сдвига: $E(\xi + C) = E\xi + C$; $D(\xi + C) = D\xi$

Th. 3. Свойство растяжения:

$$E(C\xi) = CE\xi$$

$$D(C\xi) = C^2 D\xi$$

Lab. 2-3 доказать

Th. 4. $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ (из третьего свойства математического ожидания - линейная функция)

□

Пусть x_i, y_j - значения случайных величин ξ, η , а p_i и q_j - их соответствующие вероятности

$$E(\xi + \eta) = \sum_{i,j} (x_i + y_j) p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) + \sum_j y_j \sum_i p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) = \sum_i x_i p(\xi = x_i) + \sum_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi + E\eta$$

□

Def. Дискретные случайные величины ξ и η независимы, если $p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i) \cdot p(\eta = y_j) \forall i, j$

То есть случайные величины принимают свои значения независимо друг от друга

Th. 5. Если случайные величины ξ и η независимы, то $E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$; обратное неверно

□

$$E(\xi\eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi = x_i) p(\eta = y_j) = \sum_i x_i p(\xi = x_i) \sum_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi \cdot E\eta$$

□

Th. 6. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

□

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E((E\xi)^2) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

□

Def. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$, где $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$ - ковариация случайных

величин (равна 0 при независимых величинах) - индикатор наличия связи между случайными величинами

□

$$D(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^2 - (E(\xi + \eta))^2 = E\xi^2 + 2E(\xi\eta) + E\eta^2 - (E\xi + E\eta)^2 = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E(\xi\eta) - (E\xi)^2 - (E\eta)^2 - 2E\xi E\eta = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

□

Th. 7. Если случайные величины ξ и η независимы, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

□

Если ξ и η независимы, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ и $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

□

Th. 8. Общая формула дисперсии суммы: $D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i,j (i \neq j)} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$

Другие числовые характеристики

Моменты старших порядков

а) $m_k = E\xi^k$ - момент k -ого порядка случайной величины ξ (также называют начальным моментом)

б) $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$ - центральный момент k -ого порядка

$E\xi = m_1$ - момент первого порядка

$E\xi^2 = m_2$ - момент второго порядка

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ - центральный момент второго порядка

Nota. Центральные моменты можно выразить через обычный момент:

$$\mu_2 = D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

Ex. Разберем задачу Бюффона с точки зрения матожидания (для простоты l - ширина доски):

пусть $p(A)$ - пересечет стык, $\xi = I_A$ - число пересечений. Тогда матожидание $E\xi = EI_A = P(A)$

Заметим, что при изменении длины иглы с l до $2l$ матожидание пересекаемых стыков увеличивается в два раза. Помимо этого можно составить из k игл ломаную, матожидание стыков которой будет равно $kE\xi$

Заметим, что такое работает и в обратную сторону: при уменьшении иглы в k раз матожидание равно $\frac{E\xi}{k}$

Теперь сделаем замкнутый многоугольник из игл, получим, что матожидание в таком случае $P \frac{E\xi}{l}$, где P - периметр

В пределе строим круг диаметра l - он всегда пересечет линии стыка 2 раза, значит матожидание $E_o = P_o \frac{E\xi}{l} = 2$

Длина окружность $P_o = \pi l$, получаем $E\xi = \frac{2l}{P_o} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$

Лекция 7

Стандартное дискретное распределение

I. Распределение Бернулли

Распределение Бернулли B_p (с параметром $0 < p < 1$)

ξ - число успехов при одном испытании, p - вероятность успеха при одном испытании

| | | |
|-------|------------|--------|
| ξ | 0 | 1 |
| p | $1 - P(A)$ | $P(A)$ |

Матожидание: $E\xi = p$

Дисперсия: $D\xi = p(1 - p) = pq$

Ех. Индикатор события $I_A \in B_p$ как раз имеет распределение Бернулли, где $p = P(A)$

II. Биномиальное распределение

Биномиальное распределение $B_{n,p}$ (с параметрами n, p)

ξ - число успехов в серии из n испытаний, p - вероятность успеха при одном испытании

$p(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n \iff \xi \in B_{n,p}$

| | | | | | | |
|-------|-------|-------------|-----|---------------------|-----|-------|
| ξ | 0 | 1 | ... | k | ... | n |
| p | q^n | $nq^{n-1}p$ | ... | $C_n^k p^k q^{n-k}$ | ... | p^n |

Заметим, что $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, где $\xi_i \in B_p$ - число успехов при i -ой испытании

$E\xi_i = p$; $D\xi_i = pq$

$E\xi = E\xi_1 + \dots + E\xi_n = p + \dots + p = \boxed{np}$

$D\xi = D\xi_1 + \dots + D\xi_n = pq + \dots + pq = \boxed{npq}$

III. Геометрическое распределение

Геометрическое распределение G_p (с параметром p)

ξ - номер 1-ого успешного испытания в бесконечной серии

$$p(\xi = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots \iff \xi \in G_p$$

| | | | | | |
|-------|-----|------|-----|------------|-----|
| ξ | 1 | 2 | ... | k | ... |
| p | p | qp | ... | $q^{k-1}p$ | ... |

$$\text{Матожидание } E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} (q^k) \right)' = p \left(\frac{1}{1-q} \right)' =$$

$$\frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = pq \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + E\xi = pq \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)'' + \frac{1}{p} =$$

$$pq \left(\frac{1}{1-q} \right)'' + \frac{1}{p} = 2pq \frac{1}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} = 2pq \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

IV. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона Π_λ (с параметром $\lambda > 0$)

Def. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если $p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

| | | | | | |
|-------|----------------|------------------------|-----|-------------------------------------|-----|
| ξ | 0 | 1 | ... | k | ... |
| p | $e^{-\lambda}$ | $\lambda e^{-\lambda}$ | ... | $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ | ... |

Покажем корректность определения - докажем, что сумма нижней строки равна 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{ряд Тейлора для } e^\lambda} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda = np$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda + \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Задача о разорении игрока

Постановка задачи: играют 2 игрока, вероятность выигрыша первого игрока в одной игре равна p , $q = 1 - p$ - вероятность его проигрыша (выигрыш второго)

В каждой игре разыгрывается 1 биткоин. Капитал первого игрока - k биткоинов, $m - k$ биткоинов - капитал второго

Найти вероятность разорения первого игрока

Траектория капитала первого игрока будет выглядеть как-то так:



Пусть r_k - интересующая нас вероятность разорения игрока при капитале k (то есть достижения оси абсцисс на графике)

$$r_k = p \cdot r_{k+1} + q r_{k-1}$$

$$p r_{k+1} - r_k + (1 - p) r_{k-1} = 0, \quad r_0 = 1, r_m = 0$$

$$p \lambda^2 - \lambda + (1 - p) = 0$$

$$D = 1 - 4p(1 - p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p - 1)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm (2p - 1)}{2p}; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = \frac{2 - 2p}{2p} = \frac{q}{p}$$

$$\text{Обозначим } \lambda = \frac{q}{p}$$

Рассмотрим два случая:

- $p \neq \frac{1}{2}$

Тогда общее решение: $r_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k = C_1 + C_2 \lambda^k$

Найдем частное решение:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 + C_2 \lambda^m \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ 1 - C_2 + C_2 \lambda^m = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ C_2(1 - \lambda^m) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - \frac{1}{1 - \lambda^m} = \frac{-\lambda^m}{1 - \lambda^m} \\ C_2 = \frac{1}{1 - \lambda^m} \end{cases}$$

$$r_k = \frac{-\lambda^m}{1 - \lambda^m} + \frac{1}{1 - \lambda^m} \lambda^k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m}$$

Посмотрим, что будет происходить при бесконечной игре (то есть когда $m \rightarrow \infty$ - капитал неограничен)

1) $p < q$, то есть $\lambda > 1$. Тогда $\lambda^m \rightarrow \infty$, $r_k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m} = \frac{\frac{\lambda^k}{\lambda^m} - 1}{\frac{1}{\lambda^m} - 1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$ - то есть первый игрок гарантированно разорится

2) $p > q$, то есть $\lambda < 1$. Тогда $\lambda^m \rightarrow 0$, $r_k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \lambda^k$ - то есть $r_k = \left(\frac{q}{p}\right)^k$

• $p = \frac{1}{2} \implies D = 0$

Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Общее решение: $r_k = C_1 \lambda^k + C_2 k \lambda_k = C_1 + C_2 k$

Частное решение:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 0 = C_1 + C_2 m \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = C_1 \\ -1 = C_2 m \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = C_1 \\ C_2 = -\frac{1}{m} \end{cases}$$

$$r_k = 1 - \frac{k}{m}$$

При бесконечной игре:

$$r_k = 1 - \frac{k}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1 \text{ - то есть при равной игре игрок неминуемо разорится}$$

Случайное блуждание на прямой

Пусть в начальный момент времени находимся в начале координат. С вероятностью p идем на единицу вправо, с вероятностью q - влево

При $p = \frac{1}{2}$ мы рано или поздно попадем в любую точку числовой прямой

Можно привести аналогию с орлянкой: рано или поздно каждый игрок будет при сколь угодно большом выигрыше

Посмотрим на орлянку как на распределение Бернулли:

| | | |
|-------|---------------|---------------|
| ξ | -1 | 1 |
| p | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

$$E\xi = 0; \quad D\xi = 1$$

Пусть ξ - выигрыш первого после n игр.

$$E\xi = \sum_{i=1}^n E\xi_i = 0$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^n D\xi_i = n$$

$\sigma_\xi = \sqrt{n}$ - среднее квадратическое отклонение

Это означает, что при большом n СКО поглотит всю числовую прямую

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow E\xi$$

Закон больших чисел в этой ситуации говорит, что точка останется у 0, однако в то же время она может оказаться на любой точке на числовой прямой

Ex. По n конвертам случайным образом раскладывается m писем. Случайная величина ξ - число писем в своих конвертах

$$\square A_i - \text{число } i \text{ письма в своем конверте, } \xi_i = I_A = \begin{cases} 0, & i\text{-ое письмо в не своем конверте} \\ 1, & i\text{-ое письмо в своем конверте} \end{cases}$$

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$E\xi_i = P(A_i) = \frac{1}{n}$$

$$D\xi_i = pq = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$$

$$E\xi = \sum_{i=1}^n E\xi_i = n \frac{1}{n} = 1 - \text{в среднем будет одно письмо в своем конверте}$$

$$D\xi = D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

Найдем ковариацию:

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = E\xi_i \xi_j - E\xi_i E\xi_j = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{n - (n-1)}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$\text{Заметим, что для любых } i, j, i < j: \xi_i \xi_j = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы одно не в своем} \\ 1, & \text{если оба в своем} \end{cases}$$

$$\text{То есть } \xi_i \xi_j \in B_p \text{ и } E\xi_i \xi_j = P(\text{оба письма в своих}) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\text{Получаем: } D\xi = n \frac{n-1}{n^2} + 2 \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$$

Лекция 8

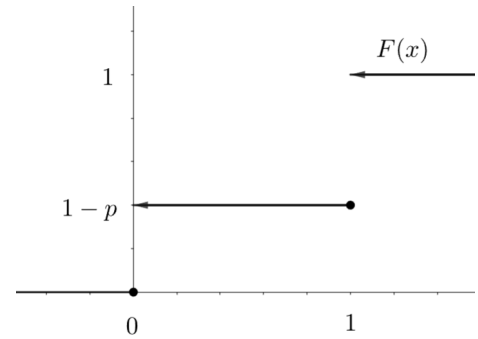
Функция распределения

Def. Функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P(\xi < x)$



$$\text{Ex. } \xi \in B_p \quad \begin{array}{c|c|c} \xi & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1-p & 0 < x \leq 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



Свойства функции распределения

- 1) $F(x)$ ограничена $0 \leq F(x) \leq 1$
- 2) $F(x)$ неубывающая функция: $x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$

$$x_1 < x_2 \implies \{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\} \implies p(\xi < x_1) \leq p(\xi < x_2), \text{ то есть } F(x_1) \leq F(x_2)$$

- 3) $p(\alpha \leq \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

$$p(\xi < \beta) = p(\xi < \alpha) + p(\alpha \leq \xi < \beta) \implies F(\beta) = F(\alpha) + p(\alpha \leq \xi < \beta)$$

Nota. Функция распределения $F(x)$ - вероятность попадания в интервал $(-\infty; x)$. Так как Борелевская σ -алгебра порождается такими интервалами, то распределение полностью задается этой функцией

- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Так как $F(x)$ монотонна и ограничена, то эти пределы существуют. Поэтому достаточно доказать эти пределы для некоторой последовательности $x_n \rightarrow \pm\infty$

$\square A_n = \{n-1 \leq \xi < n, n \in \mathbb{Z}\}$ - несовместные события, так как $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A_n$, то по аксиоме

счетной аддитивности, вероятность $p(\xi \in \mathbb{R}) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N p(n-1 \leq \xi < n) =$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N (F(n) - F(n-1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} (F(N) - F(-N-1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) - \lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) = 1$$

$$\implies \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1 + \lim_{N \rightarrow -\infty} F(N)$$

Так как $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) \leq 1$ и $\lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) \geq 0$, то $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1$ и $\lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) = 0$

- 5) $F(x)$ непрерывна слева: $F(x_0 - 0) = F(x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий $B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < x_0, n \in \mathbb{Z}\}$

Так как $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$

То по аксиоме непрерывности $p(B_n) \rightarrow 0$

$$P(B_n) = F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) \rightarrow 0$$

$$F(x_0 - \frac{1}{n}) \rightarrow F(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$$

6) Скачок в точке x_0 равен вероятности попадания в данную точку: $F(x_0 + 0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$
или $F(x_0 + 0) = p(\xi = x_0) + p(\xi < x_0) = p(\xi \leq x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий $C_n = \{x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$

Так как $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$

То по аксиоме непрерывности $p(C_n) \rightarrow 0$

$$P(C_n) = F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \rightarrow 0$$

$$p(x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}) + p(\xi = x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

7) Если функция распределения непрерывна в точке $x = x_0$, то очевидно, что вероятность попадания в эту точку $p(\xi = x_0) = 0$ (следствие из 6 пункта)

8) Если $F(x)$ непрерывна $\forall x \in \mathbb{R}$, то $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Th. Случайная величина ξ имеет дискретное распределение тогда и только тогда, когда ее функция распределения имеет ступенчатый вид

Абсолютно непрерывное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует

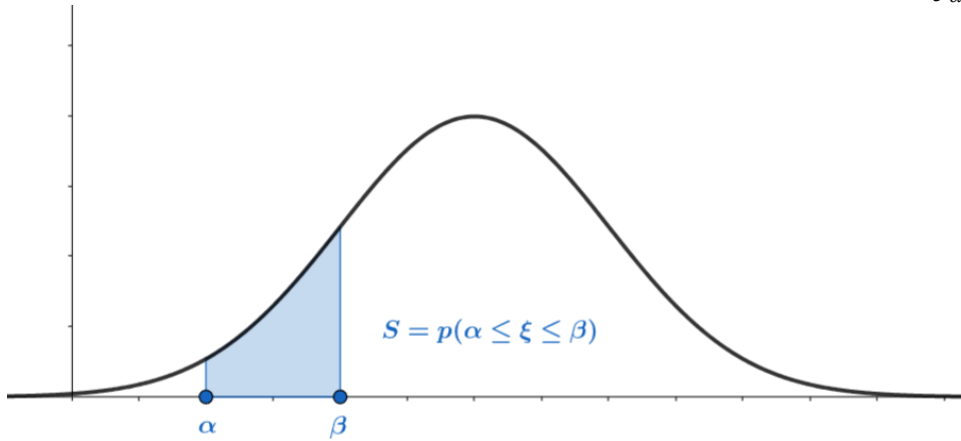
$$f_{\xi}(x) \text{ такая, что } \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad p(\xi \in B) = \int_B f_{\xi}(x) dx$$

Функция f_{ξ} называется плотностью распределения случайной величины

(в определении использует интеграл Лебега, так как B может быть не просто интервалом на \mathbb{R})

Свойства плотности абсолютно непрерывного распределения

- 1) Вероятностно-геометрический смысл плотности: $p(\alpha \leq \xi < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_{\xi}(x) dx$



- 2) Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x) dx = 1$

Из определения, если $B = \mathbb{R}$

- 3) $F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) dx$

Если $B = (-\infty; x)$, то $F_{\xi}(x) = p(\xi \in (-\infty; x)) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) dx$

- 4) $F_{\xi}(x)$ непрерывна

Из свойства непрерывности интеграла с верхним переменным пределом

- 5) $F_{\xi}(x)$ дифференцируема почти везде и $f_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x)$ для почти всех x

По теореме Барроу

- 6) $f_{\xi}(x) \geq 0$ по определению и как производная неубывающей $F_{\xi}(x)$
- 7) $p(\xi = x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ - так как $F_{\xi}(x)$ непрерывна
- 8) $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$
- 9) **Th.** Если $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (выполнены свойства 2 и 6), то $f(x)$ - плотность некоторого распределения

Числовые характеристики

Def. Математическим ожиданием $E\xi$ случайной абсолютно непрерывной величины ξ называется величина $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$ при условии, что данный интеграл сходится абсолютно, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx < \infty$

Def. Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называется величина $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f_{\xi}(x) dx$ при условии, что данный интеграл сходится

Nota. Вычислять удобно по формуле $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx - (E\xi)^2$

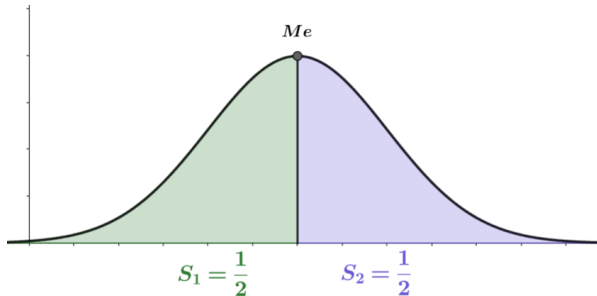
Def. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$ определяется, как корень дисперсии. Смысл этих величин такой же, как и при дискретном распределении. Также свойства аналогичны тем, что и при дискретном распределении

Другие числовые характеристики

$m_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\xi}(x) dx$ - момент k -ого порядка

$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k f_{\xi}(x) dx$ - центральный момент k -ого порядка

Def. Медианой Me абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется значение случайной величины ξ , такое что $p(\xi < Me) = p(\xi > Me) = \frac{1}{2}$



Def. Модой Mo случайной величины ξ называется точка локального максимума плотности



Сингулярное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет сингулярное распределение, если $\exists B$ - Борелевское множество с нулевой мерой Лебега $\lambda(B) = 0$, такое что $p(\xi \in B) \in 1$, но $P(\xi = x) = 0 \quad \forall x \in B$

Nota. Такое Борелевское множество состоит из несчетного множества точек, так как в противном случае по аксиоме счетной аддитивности $p(\xi \in B) = 0$. То есть при сингулярном распределении случайная величина ξ распределена на несчетном множестве меры 0

Nota. Так как $p(\xi = x) = 0 \quad \forall x$, F_ξ непрерывна.

Ex. Сингулярное распределение получим, если возьмем случайную величину, функция распределения которой - лестница Кантора

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}F(3x) & 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2) & \frac{2}{3} < x \leq 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



Th. Лебега.

$\square F_\xi(x)$ - функция распределения ξ . Тогда $F_\xi(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$, где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

F_1 - функция дискретного распределения

F_2 - функция абсолютно непрерывного распределения

F_3 - функция сингулярного распределения

То есть существуют только дискретное, абсолютно непрерывное, сингулярное распределения и их смеси

Лекция 9

Стандартное абсолютно непрерывное распределение

I. Равномерное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение $\xi \in U(a, b)$, если ее плотность на этом отрезке постоянна

Получаем функцию плотности $f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$ $\frac{1}{b-a}$ из усл. нормировки



Из этого функция распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$



Числовые характеристики:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \text{ при условии, что } \alpha, \beta \in [a, b]$$

Nota. Примеры равномерного распределения: задача со временем, датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение $U(0, 1)$

II. Показательное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет показательное (или экспоненциальное) распределение с параметром $\alpha > 0$ (обозн. $\xi \in E_\alpha$), если ее плотность имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



Функция распределения $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \alpha e^{-\alpha x} = 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$



Числовые характеристики:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x}dx = \left[\begin{array}{ll} u=x & du=dx \\ dv=\alpha e^{-\alpha x} & v=-e^{-\alpha x} \end{array} \right] = -xe^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx =$$

$$-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\alpha x}} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha e^{\alpha x}} - \frac{1}{\alpha} (\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} - 1) = \frac{1}{\alpha}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x}dx = \left[\begin{array}{ll} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\alpha e^{-\alpha x} & v=-e^{-\alpha x} \end{array} \right] = -x^2 e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x}dx =$$

$$\frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x} = \frac{2}{\alpha} E\xi = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\alpha}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\alpha\alpha} - e^{-\beta\alpha} \quad a, b \geq 0$$

Nota. Из непрерывных случайных величин только показательная обладает свойством нестарения

Th. $\zeta \in E_\alpha$. Тогда $p(\xi > x + y \mid \xi > x) = p(\xi > y) \quad \forall x, y > 0$

□

$$p(\xi > x + y \mid \xi > x) = \frac{p(\xi > x + y, \xi > x)}{p(\xi > x)} = \frac{1 - p(\xi < x + y)}{1 - p(\xi < x)} = \frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} = \frac{e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} = e^{-\alpha y} = 1 - (1 - e^{-\alpha y}) = 1 - p(\xi < y) = p(\xi > y)$$

□

Ex. 1. Время работы надежной микросхемы до поломки

Ex. 2. Время между появлениями двух редких событий (через схему Пуассона)

Nota. Применится в системах массового обслуживания, теория надежности

III. Нормальное распределение (Гауссовское)

Def. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2 (обозн. $\xi \in N(a, \sigma^2)$), если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$



Смысл параметров распределения: $a = E\xi$ - матожидание и медиана, σ - СКО, а $D\xi = \sigma^2$

Функция распределения: $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$



Проверим корректность определения - условие нормировки. Покажем, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{ll} t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} & dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} \\ t(\pm\infty) = \pm\infty & dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1 - \text{верно}$$

Ясно, что $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$ - интеграл сходится абсолютно для любого k (степень e задавит полином)

$$E\xi = m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a \text{ в силу симметрии}$$

Найдем дисперсию при помощи дифференцирования интеграла по параметру:

$$\text{Из условия нормировки } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{(x-a)^2}{2} (-2\sigma^{-3}) \right) dx = 1$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 = D\xi, \text{ получаем, что } \sigma - \text{СКО}$$

Стандартное нормальное распределение

Def. Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma^2 = 1$: $\xi \in N(0, 1)$

Плотность: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса

$$E\xi = 0; D\xi = 1$$

Распределение: $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - функция стандартного нормального распределения

Заметим, что $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа

Функция Лапласа нечетная и из соображения симметрии легко вычисляется для отрицательных x , однако большинство ПО используют $F_0(x)$

Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями

1) $\square \xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $F_\xi(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

\square

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left[\begin{array}{lll} z = \frac{t-a}{\sigma} & t = \sigma z + a & dt = \sigma dz \\ z(-\infty) = -\infty & z(x) = \frac{x-a}{\sigma} & \end{array} \right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

\square

2) Если $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0, 1)$ (процесс $\xi \rightarrow \eta$ называется стандартизацией)

□

$$F_\eta(x) = p(\eta < x) = p\left(\frac{\xi - a}{\sigma} < x\right) = p(\xi < \sigma x + a) = F_\xi(\sigma x + a) = F_0\left(\frac{\sigma x + a - a}{\sigma}\right) = F_0(x), \text{ так как}$$

$$F_\eta(x) = F_0(x), \text{ то } \eta \in N(0, 1)$$

□

3) $\square \xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = F_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

4) Вероятность попадания в симметричный интервал (вероятность отклонения случайной величины от матожидания) $p(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$

$$p(|\xi - a| < t) = p(-t < \xi - a < t) = p(a - t < \xi < a + t) = \Phi\left(\frac{a + t - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - t - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{t}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

Nota. Если через $F_0(x)$, то $p(|\xi - a| < t) = 2F_0\left(\frac{t}{\sigma}\right) - 1$

5) Правило 3 «сигм»: $p(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973$ - попадание случайной величины нормального распределения в интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ близко к 1

$$p(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0.49685 = 0.9973$$

6) Свойство линейности: если случайная величина $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $\eta = \gamma\xi + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$ (можем доказать при помощи свойств ранее, но мы докажем позже, используя другие методы)

7) Устойчивость относительно суммирования: если случайные величины $\xi_1 \in N(a_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \in N(a_2, \sigma_2^2)$, и они независимы, то $\xi_1 + \xi_2 \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Def. 1. Асимметрией распределения называется число $A_s = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^3 = \frac{\mu^3}{\sigma^3}$

Def. 2. Эксцессом распределения называется число $E_s = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3$

Nota. Если случайная величина $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $A_\xi = E_\xi = 0$, таким образом, отличие этих характеристик от нуля характеризует степень отклонения распределения. Благодаря этим и другим параметрам, можно проверять на практике, является ли распределение нормальным

Лекция 10

Преобразование случайных величин

Стандартизация случайной величины

Def. Пусть имеется случайная величина ξ . Соответствующей ей стандартной величиной называется случайная величина $\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sigma}$

Свойства:

$$E\eta = 0; D\eta = 1$$

$$E\eta = E\frac{\xi - E\xi}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}(E\xi - E\xi) = 0$$

$$D\eta = D\frac{\xi - E\xi}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}D\xi = 1$$

Стандартизованная случайная величина не имеет единиц измерения, таким образом, ее свойства от них не зависят

Задача: пусть имеется функция $g(x)$ и случайная величина ξ , $\eta = g(\xi)$. Определить ее характеристики

Nota. Если ξ - дискретная случайная величина, то ее законы распределения находятся просто: значения x_i в верхней строке заменяем $g(x_i)$, вероятности остаются прежние. Поэтому будем рассматривать непрерывной случайной величины ξ

Nota. Возможна ситуация, когда ξ - абсолютно непрерывная случайная величина, $g(x)$ - непрерывна, но $g(\xi)$ имеет дискретное распределение

Линейное преобразование

Th. Пусть ξ имеет плотность $f_\xi(x)$, тогда $\eta = a\xi + b$, где $a \neq 0$, имеет плотность $f_\eta(x) = \frac{1}{|a|}f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

Пусть $a > 0$, тогда $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(a\xi + b < x) = p(\xi < \frac{x-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t) dt =$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{y-b}{a} \quad dt = \frac{1}{a} dy \quad y = at + b \\ y(-\infty) = -\infty \quad y(\frac{x-b}{a}) = x \end{array} \right] = \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} f_\xi(\frac{y-b}{a}) dy \Rightarrow \eta = \frac{1}{|a|} f_\xi(\frac{x-b}{a})$$

Пусть $a < 0$, тогда $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(a\xi + b < x) = p(\xi > \frac{x-b}{a}) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{\infty} f_\xi(t) dt =$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{y-b}{a} \quad dt = \frac{1}{a} dy \quad y = at + b \\ y(\infty) = -\infty \quad y(\frac{x-b}{a}) = x \end{array} \right] = - \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} f_\xi(\frac{y-b}{a}) dy \Rightarrow \eta = \frac{1}{|a|} f_\xi(\frac{x-b}{a})$$

Следствие

1) Если $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $\eta = \gamma\xi + b \in N(a\gamma + b; \gamma^2\sigma^2)$

Так как $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$

Тогда $f_\eta(x) = \frac{1}{|\gamma|} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{x-b}{\gamma}-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|\gamma|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b-a\gamma)^2}{2\sigma^2\gamma^2}} \Rightarrow \eta \in N(b+a\gamma; \sigma^2\gamma^2)$

- 2) Если $\eta \in N(0, 1)$ - стандартное нормальное распределение, то $\xi = \sigma\eta + a \in N(a, \sigma^2)$
- 3) Если $\eta \in U(0, 1)$ - стандартное равномерное распределение и $a > 0$, то $\xi = a\eta + b \in U(b, a+b)$
- 4) Если $\xi \in E_\alpha$, то $\alpha\xi \in E_1$

Монотонное преобразование

Th. Пусть $f_\xi(x)$ - плотность случайной величины ξ , $g(x)$ - строго монотонная функция. Тогда случайная величина $\eta = g(\xi)$ имеет плотность

$$f_\eta(x) = |h'(x)| f_\xi(h(x)), \quad \text{где } h(g(x)) = x$$

Если $g(x)$ не является монотонной функцией, то поступаем следующим образом: разбиваем $g(x)$ на интервалы монотонности, для каждого i -ого интервала находим $h_i(x)$ и плотность случайной величины ищем по формуле Смирнова: $f_\eta(x) = \sum_{i=0}^n |h'_i(x)| f_\xi(h_i(x))$

Квантильное преобразование

Th. 1. Пусть функция распределения случайной величины ξ $F_\xi(x)$ - непрерывная функция. Тогда $\eta = F(\xi) \in U(0, 1)$ - стандартное равномерное распределение

Ясно, что $0 \leq \eta \leq 1$

а) $F(x)$ - строго возрастающая функция. Тогда $\exists F^{-1}(x)$ - обратная, $F_\eta(x) = p(\eta < x) =$

$$p(F(\xi) < x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ p(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} - \text{функция распределения } U(0, 1)$$

б) $F(x)$ - не является строго возрастающей функцией - то есть существуют участки постоянства, в этом случае определим F^{-1} как $F^{-1}(x) = \min_t (t \mid F(t) = x)$ - то есть берем самую левую точку такого интервала

Тогда снова будет при $0 \leq x \leq 1$ $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(F(\xi) < x) = F(F^{-1}(x)) = x$

Сформулируем обратную теорему: пусть $F(x)$ - функция распределения (необязательно непрерывная) случайной величины ξ , обозначим $F^{-1}(x) = \inf_t (t \mid F(t) \geq x)$.

В случае непрерывной $F(x)$ это определение совпадает с предыдущим

Th. 2. Пусть $\eta \in U(0, 1)$ - стандартное равномерное распределение, $F(x)$ - произвольная функция распределения. Тогда $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$

Данное преобразование $\xi = F^{-1}(\eta)$ называют квантильным

Доказательство аналогично предыдущей теореме

Смысл: датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение, из теоремы следует, что при помощи датчика случайных чисел и квантильного преобразования мы сможем смоделировать любое нужное распределение

Ех. 1. Смоделируем показательное распределение E_α : $F_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$\eta = 1 - e^{-\alpha x}$, $e^{-\alpha x} = 1 - \eta$, $x = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta)$ - функция, обратная к $F_\alpha(x)$

Если $\eta \in U(0, 1)$, то $\xi = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta) \in E_\alpha$

Ех. 2. $\xi \in N(0, 1)$, $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

Пусть $F_0^{-1}(x)$ - функция обратная к $F_0(x)$

Если $\eta \in U(0, 1)$, то $F_0^{-1}(\eta) \in N(0, 1)$

Характеристики преобразованной случайной величины

Th. Если ξ - дискретная случайная величина, то $Eg(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p(\xi = x_i)$

Для непрерывной случайной величины $Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx$

Свойства моментов

- 1) Если $\xi \geq 0$, то $E\xi \geq 0$
- 2) Если $\xi \leq \eta$, то $E\xi \leq E\eta$

$$\xi \leq \eta \implies \eta - \xi \geq 0 \implies E(\eta - \xi) \geq 0 \implies E\eta - E\xi \geq 0 \implies E\eta \geq E\xi$$

- 3) Если $|\xi| \leq |\eta|$, то $E|\xi|^k \leq E|\eta|^k$
- 4) Если существует момент m_t случайной величины ξ , то существует m_s при $s < t$ (при условии, что интеграл/сумма сходятся)

Пусть $s < t$. Тогда $|x|^s \leq \min(1, |x|^t) \leq 1 + |x|^t$, так как при $|x| < 1$, $|x|^s \leq 1$ и при $|x| \geq 1$, $|x|^s \leq |x|^t$
 $E|\xi|^s \leq E|\xi|^t + 1$ и если $E|\xi|^t$ существует (конечно), то $\exists E|\xi|^s$

Th. Неравенство Йенсена. Пусть функция $g(x)$ выпукла вниз, тогда для любой случайной величины ξ

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

Nota. Если $g(x)$ выпукла вверх, знак неравенства меняется

Если $g(x)$ выпукла вниз, то в любой ее точке, можно провести прямую, лежащую не выше графика функции. То есть для любой x_0 существует $k(x_0)$ такой, что $g(x) \geq g(x_0) + k(x_0)(x - x_0)$

Пусть $x_0 = E\xi$, $g(E\xi) \geq g(E\xi) + k(E\xi)(x - E\xi)$

$$Eg(\xi) \geq Eg(E\xi) + k(E\xi)(E\xi - E\xi)$$

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

Следствие:

$$Ee^\xi \geq e^{E\xi}, \quad E\xi^2 \geq (E\xi)^2, \quad E|\xi| \geq |E\xi|, \quad E \ln(\xi) \leq \ln(E\xi), \quad E\frac{1}{\xi} \geq \frac{1}{E\xi} \text{ при } \xi > 0$$

Ех. на формулу Смирнова: дана плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{4}{3x^2}, & 1 \leq x \leq 4, \\ 0 & x > 4 \end{cases}$$

Найти f_η для $\eta = |\xi - 2|$

Решение

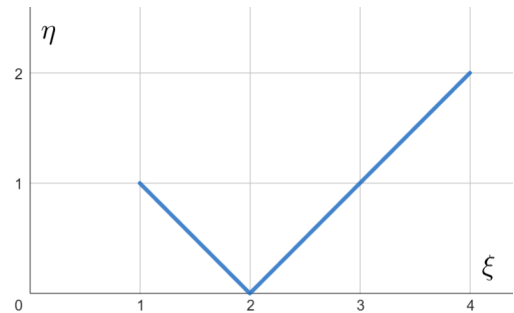
$$\xi \in [1, 4], \quad \eta \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1 \implies h_1(\eta) = \eta + 2 \text{ и } h_2(\eta) = 2 - \eta & - 2 \text{ ветви} \\ 1 < \eta \leq 2 \implies h_1(\eta) = \eta + 2 & - 1 \text{ ветвь} \end{cases}$$

$$h'_1(\eta) = 1, h'_2(\eta) = -1 \quad |h'_1(\eta)| = |h'_2(\eta)| = 1$$

$$f_\eta(x) = \sum_i |h'_i(x)| f_\xi(h_i(x))$$

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{4}{3} \left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} \right), & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4}{3} \frac{1}{(x+2)^2}, & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$



Лекция 11

Сходимость случайных величин

Рассмотрим 3 вида сходимости:

- Сходимость «почти наверное»

Def. Случайная величина ξ имеет свойство Cond «почти наверное», если вероятность $p(\xi \text{ имеет свойство Cond}) = 1$

Nota. То есть $p(\xi \text{ не имеет свойство Cond}) = 0$

$p(\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \text{ не имеет св-во Cond})$

Def. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится «почти наверное» к случайной величине ξ при $n \rightarrow \infty$ ($\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi$), если $p(\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(\omega)) = 1$

- Сходимость по вероятности

Def. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ при $n \rightarrow \infty$ ($\xi_n \xrightarrow{p} \xi$), если $\forall \varepsilon > 0 \quad p(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Nota. Не надо думать, что из сходимости по вероятности следует сходимость математического ожидания $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \not\Rightarrow E\xi_n \rightarrow E\xi$

Th. Пусть $|\xi_n| \leq C = \text{const} \quad \forall n$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow E\xi_n \rightarrow E\xi$

- Слабая сходимость

Def. Последовательность случайных величин ξ_n слабо сходится к случайной величине ξ при $n \rightarrow \infty$ ($\xi_n \Rightarrow \xi$), если $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\xi(x) \forall x$, где $F_\xi(x)$ - непрерывна

Связь между видами сходимости

Th. $\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \xi_n \Rightarrow \xi$

Th. Если $\xi_n \Rightarrow C = \text{const}$, то $\xi_n \xrightarrow{p} C$

Если $\xi_n \Rightarrow C$, то по определению $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_C(x) = \begin{cases} 0, & x \leq C \\ 1, & x > C \end{cases} \quad \forall x \neq C$

$\forall \varepsilon > 0 \quad p(|\xi_n - C| < \varepsilon) = p(-\varepsilon < \xi_n - C < \varepsilon) = p(C - \varepsilon < \xi_n < C + \varepsilon) \geq p\left(C - \frac{\varepsilon}{2} < \xi_n < C + \varepsilon\right) = F_{\xi_n}(C + \varepsilon) - F_{\xi_n}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - 0 = 1$

Так как $p(|\xi_n - C| < \varepsilon) \leq 1$, то по теореме о 2 милиционерах $p(|\xi_n - C| < \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ то есть по определению $\xi_n \xrightarrow{p} C$

Nota. В общем случае не только из слабой сходимости не следует сходимость по вероятности, но и бессмысленно говорить об этом, так как слабая сходимость - это сходимость не случайных величин, а их распределений

Ex. $\exists \xi_n \Rightarrow \xi \in N(0, 1)$, тогда $\eta = -\xi \in N(0, 1)$, но ясно, что $\xi_n \xrightarrow{p} \eta = -\xi$ - неверно

Ключевые неравенства

В дальнейшем будем считать, что у случайных величин первый момент существует

I. Неравенство Маркова

$$\text{Th. } p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A & - A \text{ нет} \\ 1, & \omega \in A & - A \text{ есть} \end{cases}$$

$$EI_A = p(A)$$

$$|\xi| \geq |\xi| \cdot I(|\xi| \geq \varepsilon) \geq \varepsilon I(|\xi| \geq \varepsilon)$$

$$E|\xi| \geq E(\varepsilon \cdot I(|\xi| \geq \varepsilon))$$

$$E|\xi| \geq \varepsilon \cdot E(I(|\xi| \geq \varepsilon)) = \varepsilon \cdot p(|\xi| \geq \varepsilon) \implies p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon}$$

II. Неравенство Чебышева

$$\text{Th. } P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

$$p(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = p((\xi - E\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

III. Правило «трех сигм»

$$\text{Th. } P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$$

$$\text{По неравенству Чебышева } P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{D\xi}{(3\sigma)^2} = \frac{D\xi}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$$

Среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным вторым моментом

Обозначим $a = E\xi_i, d = D\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}, \quad 1 \leq i \leq n$

$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ - их сумма

$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$ - среднее арифметическое

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E\xi_1 + \dots + E\xi_n) = \frac{1}{n}na = a = E\xi_1 - \text{математическое ожидание не меняется}$$

$$D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D\xi_1 + \dots + D\xi_n) = \frac{1}{n^2}nd = \frac{d}{n} = \frac{D\xi_1}{n} - \text{дисперсия уменьшилась в } n \text{ раз}$$

$$\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \text{СКО уменьшилось в } \sqrt{n} \text{ раз}$$

Законы больших чисел

I. Закон больших чисел Чебышева

Th. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - последовательность независимых одинаково распределенных с конечным вторым моментом, тогда $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} E\xi_1$

Обозначим $a = E\xi_i, d = D\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}, \quad 1 \leq i \leq n$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

Тогда по неравенству Чебышева $p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) = p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{d}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$
 $\Rightarrow p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, то есть $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} a$

Среднее арифметическое большого числа независимых одинаковых случайных величин «стабилизируется» около математического ожидания, «при $n \rightarrow \infty$ случайность переходит в закономерность»

Статистический смысл: при большом объеме n статистических данных среднее арифметическое данных дает достаточно точную оценку теоретического математического ожидания

Nota. При доказательстве получили полезную, хотя и грубую оценку: $p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi_i}{n\varepsilon^2}$

II. Закон больших чисел Бернулли

Th. Пусть v_n - число успехов из n независимых испытаний, $p = P(A)$ - вероятность успеха при одном испытании. Тогда $\frac{v_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} P(A)$

При этом $P\left(\left|\frac{v_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

$v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, где $\xi_i \in B_p$ - число успехов при i -ом испытании

$$E\xi_i = p; D\xi_i = pq$$

$$\frac{v_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1 = p$$

$$p\left(\left|\frac{v_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

III. Закон больших чисел Хинчина

Th. $v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом, тогда $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_i$

IV. Усиленный закон больших чисел Колмогорова

В условиях теоремы Хинчина $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1$

V. Закон больших чисел Маркова

Th. Пусть имеется последовательность случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ с конечными вторыми моментами, таких что $D(S_n) = o(n^2)$. Тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} E\left(\frac{S_n}{n}\right)$ или $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} \frac{1}{n}(E\xi_1 + \dots + E\xi_n)$

$$\text{По неравенству Чебышева } p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{o(n^2)}{n^2} \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \varepsilon\right) \rightarrow 1$$

Центральная предельная теорема

Th. Центральная предельная теорема (ЦПТ Ляпунова, ≈ 1901 год)

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией ($D\xi_1 < \infty$) и $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Тогда имеет место слабая сходимость:

$$\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \Rightarrow N(0, 1)$$

Теорема показывает, что стандартизованная сумма слабо сходится к стандартному нормальному распределению

Nota. Можно представить в ином виде: $\exists a = E\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}$, тогда $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = a, \sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, а $\frac{\frac{S_n}{n} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow N(0, 1)$

Nota. Другая, грубая, формулировка: $\frac{S_n}{n} \Rightarrow N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Лекция 12

Совместное распределение случайных величин

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ заданы на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, p)

Def. Случайным вектором $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называется упорядоченный набор случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве

Случайный вектор задает отображение $(\xi_1, \dots, \xi_n)(\omega) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Поэтому случайный вектор еще называют многомерной случайной величиной, а соответствующее ей распределение многомерным распределением:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad P(B) = P(\omega \in \Omega \mid (\xi_1, \dots, \xi_n) \in B)$$

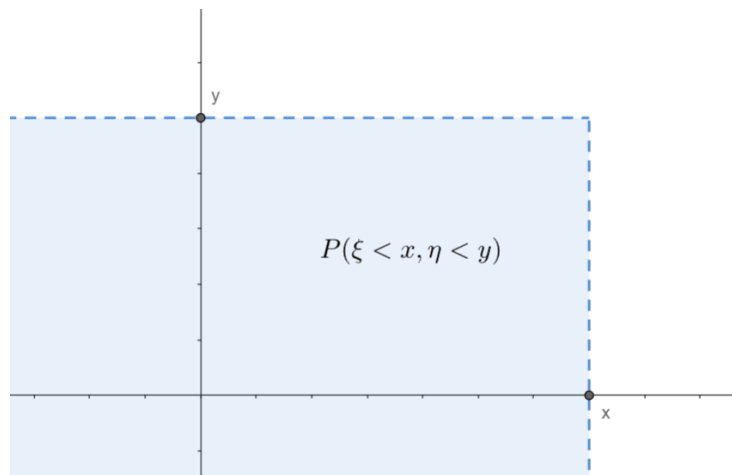
Таким образом, получили новое вероятностное пространство. В качестве элементарных исходов берем точки многомерного пространства, а σ -алгебра - многомерное Борелевская σ -алгебра $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P(B))$

Функция распределения

Def. Функцией совместного распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называется функция $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$

Nota. Распределение полностью задается функцией распределения

Nota. В дальнейшем, в основном, будем рассматривать системы из 2 случайных величин. Функция распределения в данном случае $F_{\xi, \eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$ - вероятность попадания в эту область.



Свойства функции распределения

1. $0 \leq F_{\xi, \eta}(x, y) \leq 1$
2. $F_{\xi, \eta}(x, y)$ - неубывающая по каждому аргументу
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\eta}(y)$, и наоборот - $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x)$
4. Восстановление маргинального (частного) распределения: $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\eta}(y)$, и наоборот - $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x)$
5. $F_{\xi, \eta}(x, y)$ - непрерывна слева по каждому аргументу
6. $P(x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2) = F_{\xi, \eta}(x_2, y_2) - F_{\xi, \eta}(x_2, y_1) - F_{\xi, \eta}(x_1, y_2) + F_{\xi, \eta}(x_1, y_1)$

Независимость случайных величин

Def. Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы в совокупности, если для любого набора Борелевских множеств из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, B_1, B_2, \dots, B_n

$$p(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = p(\xi_1 \in B_1) \cdot p(\xi_2 \in B_2) \cdot \dots \cdot p(\xi_n \in B_n)$$

Def. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ попарно независимы, если независимы любые две из них

Nota. Из независимости в совокупности следует попарная независимость:

ξ_1, \dots, ξ_n независимы в совокупности, тогда покажем $\forall i, j$ ξ_i и ξ_j - независимы

Возьмем набор $B_i, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, при $k \neq i, j$ $B_k = \mathbb{R}$

$$P(\xi_k \in B_k) = 1$$

Тогда $p(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_i \in B_i, \xi_j \in B_j) = P(\xi_i \in B_i) \cdot P(\xi_j \in B_j)$

Nota. Из попарной независимости не следует независимость в совокупности, как видно из примера Бернштейна

Под независимыми величинами будем понимать независимые в совокупности

Дискретная система двух случайных величин

Def. Случайные величины ξ, η имеют совместное дискретное распределение, если случайный вектор (ξ, η) принимает не более, чем счетное число значений, то есть существует конечный или счетный набор пар чисел (x_i, y_i) , таких что $P(\xi = x_i, \eta = y_i) > 0$, $\sum_{i,j} P(\xi = x_i, \eta = y_i) = 1$

Таким образом двумерная дискретная случайная величина задается законом распределения - таблице вероятностей

| $\xi \backslash \eta$ | y_1 | y_2 | \dots | y_m |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|
| x_1 | p_{11} | p_{12} | \dots | p_{1m} |
| x_2 | p_{21} | p_{22} | \dots | p_{2m} |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots |
| x_n | p_{n1} | p_{n2} | \dots | p_{nm} |

Условие нормировки: $\sum_{i,j} p_{i,j} = 1$

Зная общий закон распределения, можно восстановить частное (маргинальное) распределение по формулам:

$$p_i = \sum_{j=1}^m p_{i,j} \quad q_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j}$$

Def. Дискретные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, если для любых x_1, x_2, \dots, x_n $p(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n) = p(\xi_1 = x_1) \cdot p(\xi_2 = x_2) \cdot \dots \cdot p(\xi_n = x_n)$

При $n = 2$: $p_{i,j} = p_i \cdot q_j \quad \forall i, j$

Ex.

| $\xi \backslash \eta$ | -1 | 0 | 1 | p_i |
|-----------------------|-----|-----|-----|--------------|
| -1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.4 |
| 2 | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.6 |
| q_j | 0.3 | 0.5 | 0.2 | $\Sigma = 1$ |

Найти маргинальное распределение и проверить независимость случайных величин

| ξ | -1 | 2 | | |
|--------|-----|-----|-----|--|
| p_i | 0.4 | 0.6 | | |
| η | -1 | 0 | 1 | |
| q_j | 0.3 | 0.5 | 0.2 | |

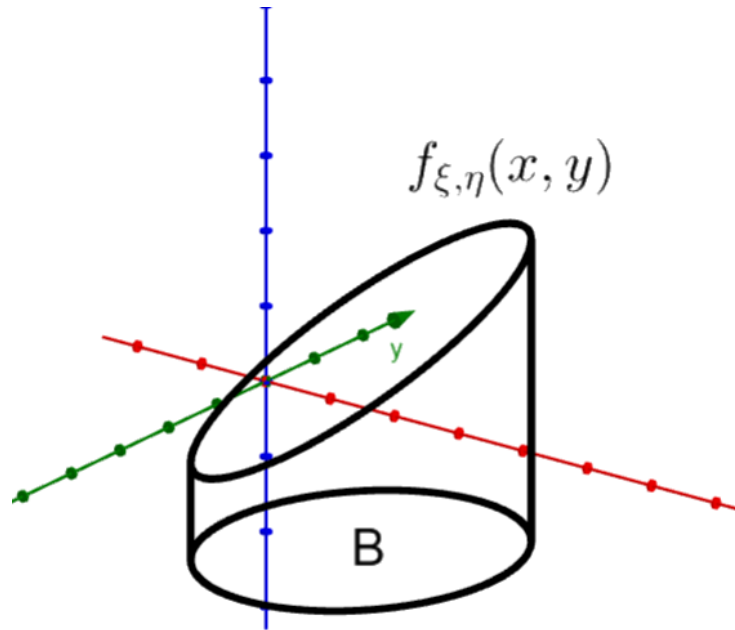
$$p_{11} = 0.1 \neq 0.12 = p_1 \cdot q_1 \quad \implies \xi, \eta - \text{зависимы}$$

Абсолютно непрерывная система двух случайных величин

Def. Случайные величины ξ и η имеют абсолютно непрерывное совместное распределение, если $\exists f_{\xi,\eta}(x, y)$, такая что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ $P((\xi, \eta) \in B) = \iint_B f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy$

Функцию $f_{\xi,\eta}(x, y)$ будем называть функцией плотности совместного распределения случайных величин ξ и η

Геометрический смысл плотности:



Свойства плотности:

1. $f_{\xi,\eta}(x, y) \geq 0$
2. Условие нормировки: $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy = 1$
3. $F_{\xi,\eta} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi,\eta}(x, y) dy dx$
4. $f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x, y)}{\partial x \partial y}$
5. Если случайные величины ξ, η имеют абсолютно непрерывное совместное распределение с плотностью $f(x, y)$, то маргинальное распределение величин ξ, η также имеют абсолютно непрерывное распределение с плотностями $f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dy$, $f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dx$

$$F_{\xi}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx$$

$$\text{Из этого } \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) = f_{\xi}(x)$$

6. Так как вероятность попадания в Борелевские множества полностью задается функцией распределения, то условие независимости случайных величин эквивалентно следующему: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, если функция общего распределения распадается в произведение отдельных функций распределения

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

7. *Равносильное определение*: абсолютно непрерывные случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы в совокупности тогда и только тогда, когда плотность совместного распределения
- $$f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot f_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(x_n)$$

$$\text{При } n = 2 \text{ случайные величины } \xi \text{ и } \eta \text{ независимы} \iff F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) dx \cdot \int_{-\infty}^y f_{\eta}(y) dy = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y) dx dy \implies f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y)$$

Аналогично для высших размерностей

Nota. Совместное распределение абсолютно непрерывных случайных величин не обязано быть абсолютно непрерывным, оно может быть сингулярным

Ex. Бросаем точку на отрезок прямой $y = x$ ($0 \leq x, y \leq 1$), ξ - абсцисса точки, η - ордината точки

Случайный вектор (ξ, η) имеют сингулярное распределение (непрерывное с нулевой областью) - так как число элементарных исходов несчетно, но мера Лебега в \mathbb{R}^2 отрезка равна 0

Nota. Совместное распределение $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ будет сингулярным, если одна из координат является функцией других (наблюдается функциональная зависимость)

Многомерное равномерное распределение

Def. $\exists D \subset \mathbb{R}^n$ - Борелевское множество в \mathbb{R}^n с конечной мерой Лебега ($0 < \lambda(D) < \infty$), случайный вектор (ξ_1, \dots, ξ_n) имеет равномерное распределение, если плотность совместного распределения постоянна в данной области и равна нулю вне данной области

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(D)}, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in D \\ 0, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \notin D \end{cases}$$

Лекция 13

Математическое ожидание и дисперсия случайного вектора

$\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ - случайный вектор, $\forall 1 \leq i \leq n$ ξ_i - случайная величина

Def. Математическим ожиданием случайного вектора называется вектор с координатами из математических ожиданий его компонент: $E\vec{\xi} = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$

Def. Дисперсией (или матрицей ковариаций) случайного вектора называется матрица $D\vec{\xi} = E(\vec{\xi} - E\vec{\xi})^T \cdot (\vec{\xi} - E\vec{\xi})$, состоящая из элементов $d_{i,j} = (\xi_i, \xi_j)$. В частности $d_{i,i} = (\xi_i, \xi_i) = D\xi_i$

Функции от двух случайных величин

Th. Пусть ξ_1, ξ_2 - случайные величины с общим плотностью $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y)$, и есть функция $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда случайная величина $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$ имеет функцию распределения $F_\eta(z) = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy$, где $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) < z\}$

$$F_\eta = p(\eta < z) = p(g(\xi_1, \xi_2) < z) = p((\xi_1, \xi_2) \in D_z) = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy$$

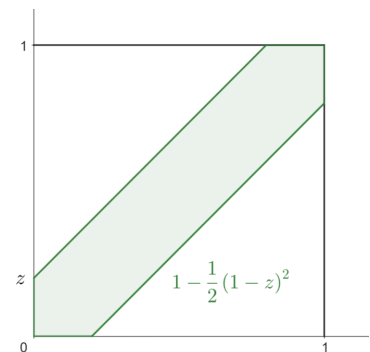
Ex. Задача о встрече. двое договорились встретится между 12:00 и 13:00. Случайная величина η - время ожидания. Найти функцию распределения

ξ_1 - время прихода первого, ξ_2 - второго; $\xi_1, \xi_2 \in U(0, 1)$, они независимы, $\forall x, y \in [0, 1]$ $f_{\xi_1}(x) = 1, f_{\xi_2}(y) = 1$

Поэтому $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y) = 1, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$

$$\eta = |\xi_1 - \xi_2| \implies D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < z\}$$

$$F_\eta = \iint_{D_z} f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) dx dy = \iint_{D_z} dx dy = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} (1 - z)^2 = 2z - z^2, z \in [0, 1]$$



Th. ξ_1, ξ_2 - независимые абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(y)$

Тогда плотность суммы $\xi_1 + \xi_2$ равна $f_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x) dx}_{\text{т. н. свертка}}$

Так как случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y)$

И согласно предыдущей теореме

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \iint_{D_z} f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) dx dy = \iint_{D_z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dx dy,$$

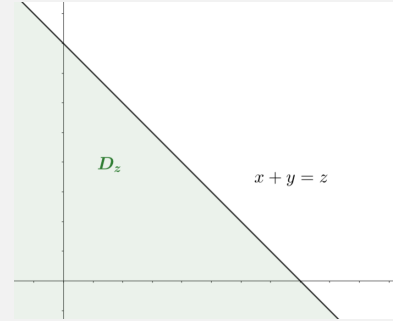
где $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < z\}$

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dy =$$

$$\left[\begin{array}{l} y = t - x; \quad dy = dt; \quad t = y + x \\ t(-\infty) = -\infty; \quad t(z - x) = z \end{array} \right] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) dx \int_{-\infty}^z f_{\xi_2}(t - x) dt =$$

$$\int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x) dx \right) dt \Rightarrow f_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x) dx$$



Следствие: сумма двух независимых абсолютно непрерывных случайных величин также имеет абсолютно непрерывное распределение

Nota. Условие независимости существенно, контр-пример: $\xi_1; \xi_2 = -\xi_1$, тогда $\xi_1 + \xi_2 \equiv 0$

Сумма стандартных распределений. Устойчивость относительно суммирования

Def. Если сумма двух независимых случайных величин одного типа распределения также будет этого же типа, то говорят, что распределение устойчиво относительно суммирования

Ex. 1. $\xi \in B_{n,p}; \eta \in B_{m,p}$. Тогда ясно, что $\xi + \eta \in B_{n+m,p}$ (по определению биномиального распределения $B_{n,p}$ - число успехов из n испытаний, где p - вероятность успеха)

Ex. 2. $\xi \in \Pi_\lambda, \eta \in \Pi_\mu$, они независимы. Тогда $\xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}$

$$\begin{aligned} \xi + \eta = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \exists k \geq 0. \text{ Тогда } p(\xi + \eta = k) &= \sum_{i=0}^k P(\xi = i, \eta = k - i) = \sum_{i=0}^k P(\xi = i) P(\eta = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} = e^{-\lambda-\mu} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{i!(k-i)!} = e^{-\lambda-\mu} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i \mu^{k-i} k!}{i!(k-i)!} = e^{-\lambda-\mu} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \lambda^i \mu^{k-i} C_k^i = \\ &= e^{-\lambda-\mu} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} \Rightarrow \xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

Ex. 3. $\xi, \eta \in N(0, 1)$ и независимы. Тогда $\xi + \eta \in N(0, 2)$

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; f_{\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{По формуле свертки } f_{\xi+\eta}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - tx + \frac{t^2}{2})} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x - \frac{t}{2})^2} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2(\sqrt{2})^2}} \Rightarrow \\ &\xi + \eta \in N(0, 2) \end{aligned}$$

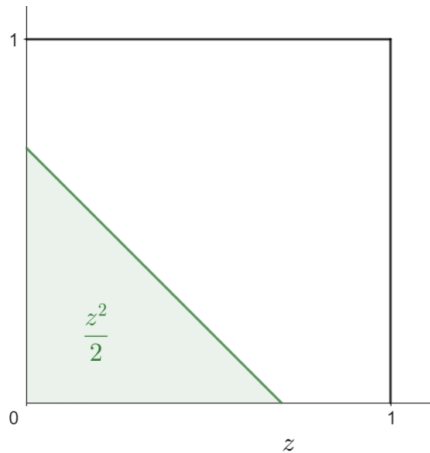
Ex. 4. В общности для независимых $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2), \eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$ $\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Ex. 5. Равномерное распределение неустойчиво относительно суммирования, контрпример:

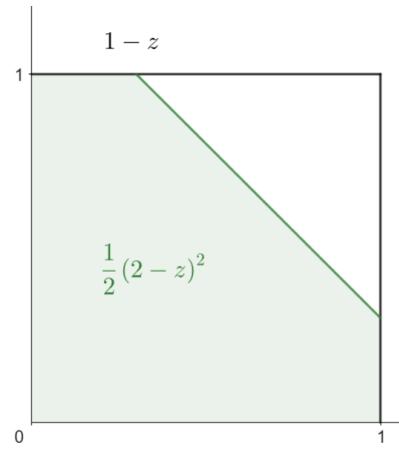
$\xi, \eta \in U(0, 1)$ - независимы

$\forall x, y \in [0, 1] \quad f_{\xi}(x) = 1, f_{\eta}(y) = 1$ и $f_{\xi, \eta}(x, y) = 1$

По первой теореме $F_{\xi, \eta}(x, y) = \iint_{D_z} f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy = \iint_{D_z} dx dy = S_{D_z}$, где $D_z = \{(x, y) \mid x + y < z\}$



а) $0 < z \leq 1$



б) $1 < z \leq 2$

$$S_{D_z} = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{z^2}{2}, & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(2-z)^2 & 1 \leq z \leq 2 \\ 0, & z > 2 \end{cases}$$

$$f_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z, & 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z, & 1 \leq z \leq 2 \\ 0, & z > 2 \end{cases} \neq C \Rightarrow \xi + \eta \text{ не имеют равномерное распределение}$$

Nota. FUN FACT: сумма нескольких величин с равномерным распределением приближается к

нормальному распределению

Условное распределение

Def. Условным распределением случайной величины из системы случайных величин (ξ, η) называется ее распределение, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение. Обозначается $\xi|\eta = y$

Def. A.: Условным математическим ожиданием (обозначается $E(\xi|\eta = y)$) называется математическим ожиданием случайной величины ξ при соответствующем условном распределении

I. Условное распределение в дискретной системе двух случайных величин

Пусть (ξ, η) задана законом распределения:

| $\xi \backslash \eta$ | y_1 | y_2 | \dots | y_m |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|
| x_1 | p_{11} | p_{12} | \dots | p_{1m} |
| x_2 | p_{21} | p_{22} | \dots | p_{2m} |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots |
| x_n | p_{n1} | p_{n2} | \dots | p_{nm} |

Формула условной вероятности: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Вероятности условных распределений считаем по формулам:

$$\xi|\eta = y_j: p_i = p(\xi = x_i | \eta = y_j) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j} = \frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}$$

$$\eta|\xi = x_i: q_j = p(\eta = y_j | \xi = x_i) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\xi = x_i)} = \frac{q_{ij}}{p_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j p_{ij}}$$

То есть вероятность в соответствующем столбце/строке делим на суммарную вероятность по строке или столбцу, в зависимости от того, какое условие мы рассматриваем

II. Условное распределение в непрерывной системе двух случайных величин

Пусть (ξ, η) задана плотностью $f_{\xi, \eta}(x, y)$ совместного распределения, тогда плотность условного распределения $\xi|\eta = y$:

$$f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{\xi, \eta}(x, y) dx} = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$$

Def. Функция $f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$ называется условной плотностью

Def. Условное математическое ожидание вычисляется по формуле $E(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx$

Аналогично $E(\eta|\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy$

Nota. При фиксированном значении x $f(y|x)$ зависит только от y , а $E(\eta|\xi = x) \in \mathbb{R}$. Если рассматривать x как переменную, то условное математическое ожидание $E(\eta|\xi = x)$ является функцией от x и называется функцией регрессии η на ξ . График такой функции называют линией регрессии

Nota. Так как значение x - значение случайной величины ξ , то условное матожидание $E(\eta|\xi = x)$ можно рассматривать как случайную величину

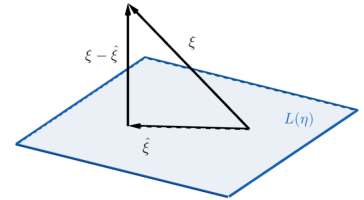
Лекция 14

Пространство случайных величин

Nota. Если две случайных величин $\xi \stackrel{\text{п.н.}}{=} \eta$, то считаем, что $\xi = \eta$

Пусть имеется вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P)

Введем пространство $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{\xi \mid D\xi < \infty\}$ - множество случайных величин на данном пространстве с конечной дисперсией. Ясно, что L_2 - линейное пространство. Введем на нем скалярное произведение



Def. Скалярным произведением случайных величин ξ и η из $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется число $(\xi, \eta) = E(\xi\eta)$

Nota. Если (ξ, η) - дискретная система случайных величин $(p(\xi = x_i, \eta = y_i) = p_{ij})$, то $E(\xi\eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$

Если же (ξ, η) - непрерывная система с плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$, то $E(\xi\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy$

Свойства:

1. $(\xi, \eta) = (\eta, \xi)$
2. $(C\xi, \eta) = C(\xi, \eta)$
3. $(\xi_1 + \xi_2, \eta) = (\xi_1, \eta) + (\xi_2, \eta)$
4. $(\xi, \xi) \geq 0$
5. $(\xi, \xi) = 0 \implies \xi = 0$ п.н.

То есть это действительно скалярное произведение

Def. Норма вектора равна числу $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}$

Def. Метрикой (расстоянием) между случайными величинами называют число $d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$

Th. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Пусть случайные величины ξ и η имеют конечный второй момент, тогда $|E(\xi, \eta)| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$ (или $|(\xi, \eta)| \leq \| \xi \| \cdot \| \eta \|$)

Причем $|E(\xi, \eta)| = \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2} \iff \eta = C\xi$, где $C = \text{const}$

$$P_2(x) = E(x\xi - \eta)^2 = x^2 E\xi^2 - 2xE(\xi\eta) + E\eta^2 \geq 0 \implies D = 4(E(\xi\eta))^2 - 4E\xi^2 - E\eta^2 \leq 0 \implies |E(\xi\eta)| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

$$|E(\xi, \eta)| = \sqrt{E\xi^2 - E\eta^2} \implies D = 0 \implies \exists \text{ какая-либо точка касания } C, \text{ из этого } E(C\xi - \eta)^2 = 0 \implies C\xi - \eta = 0 \iff \eta = C\xi \text{ п.н.}$$

Условное математическое ожидание

В $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ возьмем линейное подпространство $L(\eta) = \{g(\eta) \mid Dg(\eta) < \infty\}$

Def. В. Условным математическим ожиданием (УМО, обозначается $E(\xi|\eta) = \hat{\xi}$) случайной величины ξ относительно случайной величины η называется ортогональная проекция случайной величины ξ на $L(\eta)$

Свойства:

1. Тождество ортопроекции: $\exists \hat{\xi} \in L(\eta)$, тогда $\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \iff E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta)) \forall g(\eta) \in L(\eta)$

$$\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \iff (\xi - \hat{\xi}) \perp L(\eta) \iff (\xi - \hat{\xi}, g(\eta)) = 0 \forall g(\eta) \in L(\eta) \iff E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta))$$

2. Формула полного математического ожидания

$$E\xi = E(E(\xi|\eta)) \text{ или } E\xi = E\hat{\xi}$$

Nota. При распределении Бернулли получаем обычную формулу полной вероятности

$$\text{Верно из тождества ортопроекции при } g(\eta) = 1$$

3. Линейность: $E(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 \mid \eta) = C_1E(\xi_1|\eta) + C_2E(\xi_2|\eta)$
4. Если ξ и η независимы, то $E(\xi|\eta) = E\xi$

$$\xi, \eta \text{ независимы} \implies \xi \text{ и } g(\eta) \text{ независимы} \\ \text{Из этого } E(\xi \cdot g(\eta)) = E\xi \cdot E(g(\eta)) = E(E\xi \cdot g(\eta)) \implies E\xi = \hat{\xi}$$

5. Если ξ и η независимы, то $(\xi - E\xi) \perp g(\eta) \forall g(\eta) \in L(\eta)$, в частности $(\xi - E\xi) \perp \eta$

Докажем, что **Def. A.** согласуется с **Def. B.**

По **Def. A.** $E(\xi|\eta) = h(\eta)$, где $h(y) = E(\xi|\eta = y)$

Рассмотрим случай абсолютно непрерывной системы (ξ, η) с плотностью $f_{\xi, \eta}(x, y)$. Тогда

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx, \text{ где } f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$$

Следует доказать, что функция $h(y)$ удовлетворяет тождеству ортопроекции $E(\xi g(\eta)) = E(h(\eta)g(\eta)) \quad \forall g(\eta) \in L(\eta)$

$$E(\xi \cdot g(\eta)) = \iint_{\mathbb{R}^2} x g(y) f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy$$

$$E(h(\eta)g(\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)g(y)f_{\eta}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)} dx \right) g(y)f_{\eta}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} x g(y) f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy = E(\xi g(\eta))$$

Числовые характеристики. Зависимости случайных величин

Мет. Если случайные величины ξ и η , то $E(\xi\eta) = E\xi E\eta \implies E(\xi\eta) - E\xi E\eta = 0$

Поэтому в качестве индикатора наличия связи берем величину $E(\xi\eta) - E\xi E\eta = \text{cov}(\xi, \eta)$

Def. Ковариацией (ξ, η) называется величина $\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$

Свойства:

$$1. \text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)) = E(\xi\eta - \eta E\xi - \xi E\eta + E\xi E\eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$$

$$2. \text{cov}(\xi, \xi) = D\xi$$

$$\text{cov}(\xi, \xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$3. \text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$$

$$4. \text{cov}(C_1\xi_1 + C_2\xi_2, \eta) = C_1\text{cov}(\xi_1, \eta) + C_2\text{cov}(\xi_2, \eta)$$

$$5. D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

$$6. D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i, j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

$$7. (a) \text{ Если } \xi \text{ и } \eta - \text{независимы, то } \text{cov}(\xi, \eta) = 0$$

$$(b) \text{ Если } \text{cov}(\xi, \eta) \neq 0, \text{ то } \xi \text{ и } \eta - \text{зависимы}$$

$$(c) \text{ Если } \text{cov}(\xi, \eta) = 0, \text{ то неясно}$$

$$8. \text{ Если } \text{cov}(\xi, \eta) > 0, \text{ то зависимость прямая, если } \text{cov}(\xi, \eta) < 0, \text{ то обратная}$$

Nota. Ковариация зависит от единиц измерения случайных величин, поэтому по ее величине нельзя судить о силе зависимости

Коэффициент линейной корреляции

Def. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η с конечными вторыми моментами, называется величина $r_{\xi,\eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{E(\xi\eta) - E\xi E\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$

Можно записать в другой форме: $r_{\xi,\eta} = \frac{E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))}{\sqrt{E(\xi - E\xi)^2} \sqrt{E(\eta - E\eta)^2}} = \frac{(\xi - E\xi, \eta - E\eta)}{\|\xi - E\xi\| \|\eta - E\eta\|} = \cos(\xi - E\xi, \eta - E\eta)$
 - косинус угла между величинами (грубая интерпретация)

Свойства:

1. $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$
2. (а) Если ξ и η - независимы, то $r_{\xi,\eta} = 0$
 (б) Если $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то ξ и η - зависимы
 (с) Если $r_{\xi,\eta} = 0$, то неясно
3. $|r_{\xi,\eta}| \leq 1$

По неравенству Коши-Буняковского-Шварца $|E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))| \leq \sqrt{E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2}$

4. $|r_{\xi,\eta}| = 1 \iff \eta = a\xi + b$ п.н.

По неравенству Коши-Буняковского-Шварца $|r_{\xi,\eta}| = 1 \iff |E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))| = \sqrt{E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2} \implies \eta - E\eta = C(\xi - E\xi) \implies \eta = C\xi + (E\eta - CE\xi)$ п.н.

5. (а) Если $r_{\xi,\eta} = 1$, то $\eta = a\xi + b$ и $a > 0$ (прямая линейная зависимость)
 (б) Если $r_{\xi,\eta} = -1$, то $\eta = a\xi + b$ и $a < 0$ (обратная линейная зависимость)

Так как $|r_{\xi,\eta}| = 1$, то по свойству 4) $\eta = a\xi + b$ и $r_{\xi,\eta} = \frac{E(\xi\eta) - E\xi E\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{E(\xi(a\xi + b)) - E\xi E(a\xi + b)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D(a\xi + b)}} = \frac{aE\xi^2 + bE\xi - a(E\xi)^2 - bE\xi}{\sqrt{D\xi} \sqrt{a^2 D\xi}} = \frac{a(E\xi^2 - (E\xi)^2)}{|a| D\xi} = \frac{a}{|a|} = \text{sign } a$

Def. Если $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то говорят, что случайные величины коррелированы друг с другом. Если $r_{\xi,\eta} > 0$, то имеет прямая корреляция, если $r_{\xi,\eta} < 0$ - обратная

Nota. Корреляция не транзитивна: $r_{\xi_1, \xi_2} > 0 \wedge r_{\xi_2, \xi_3} > 0 \not\Rightarrow r_{\xi_1, \xi_3} > 0$

Лекция 15

Характеристические функции

Mem. i - комплексная единица

Mem. $e^{it} = \cos t + i \sin t$

Пусть $\xi + i\eta$ - комплексная случайная величина, где ξ - вещественная часть, а η - мнимая часть

Def. $E(\xi + i\eta) = E\xi + iE\eta$

Def. Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, t \in \mathbb{R}$$

Свойства:

1. Любая случайная величина ξ имеет характеристическую функцию, причем $|\varphi_\xi(t)| \leq 1$

Характеристическая функция существует по теореме об абсолютной сходимости интеграла от произведения ограниченной и нормированной функций

Докажем неравенство:

$$|\varphi_\xi(t)|^2 = |Ee^{it\xi}|^2 = |E \cos t\xi + iE \sin t\xi|^2 = (E \cos \xi t)^2 + (E \sin \xi t)^2 \leq$$

[по неравенству Йенсена] $\leq E \cos^2 \xi t + E \sin^2 \xi t = E(\cos^2 \xi t + \sin^2 \xi t) = E1 = 1$

2. Пусть $\varphi_\xi(t)$ - характеристическая функция случайной величины ξ . Тогда характеристическая функция случайной величины $a + b\xi$ равна $\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita}\varphi_\xi(bt)$

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = Ee^{it(a+b\xi)} = E(e^{ita} \cdot e^{itb\xi}) = e^{ita} Ee^{itb\xi} = e^{ita} \varphi_\xi(bt)$$

3. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций

Пусть случайные величины ξ и η - независимы. Тогда

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = E(e^{it\xi} \cdot e^{it\eta}) = [\text{так как они независимы}] = Ee^{it\xi} \cdot Ee^{it\eta} = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

Аналогично для большего числа величин

4. Пусть $E\xi^k < \infty$. Тогда

$$\varphi_{\xi}(t) = 1 + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + o(|t|^k)$$

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{it\xi} = E\left(1 + it\xi + \frac{(it\xi)^2}{2!} + \dots + \frac{(it\xi)^k}{k!} + o(|t|^k)\right) = 1 + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + o(|t|^k)$$

5. Пусть $E\xi^k < \infty$. Тогда $\varphi_{\xi}^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$

$$E\xi^k < \infty \implies \text{существует } k \text{ членов разложения в ряд Маклорена: } \frac{\varphi_{\xi}^{(k)}(0)}{k!}t^k = \frac{i^k E\xi^k}{k!}t^k;$$

$$\frac{\varphi_{\xi}^{(k)}(0)}{k!}t^k = i^k E\xi^k$$

6. Существует взаимно-однозначное соответствие между распределениями и характеристическими функциями. Зная характеристическую функцию можно восстановить распределение.

Ех. Если распределение абсолютно непрерывное, то его можно восстановить по преобразованию Фурье

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_{\xi}(t) dt$$

7. Теорема о непрерывном соответствии

Th. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ слабо сходится к ξ тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций сходится поточечно к $\varphi_{\xi}(t)$

$$\{\xi_n\} \Rightarrow \xi \iff \varphi_{\xi_n}(t) \longrightarrow \varphi_{\xi}(t) \forall t \in \mathbb{R}$$

Характеристические функции стандартных распределений

- Распределение Бернулли

| | | |
|-------|-------|-----|
| ξ | 0 | 1 |
| p | $1-p$ | p |

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{i\xi t} = e^{i \cdot 0 \cdot t} p(\xi = 0) + e^{i \cdot 1 \cdot t} p(\xi = 1) = 1 - p + pe^{it}$$

- Биномиальное распределение

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Если $t \in B_{n,p}$, то $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n$, где $\xi_i \in B_p$ - независимы

$$\varphi_{\xi}(t) = (\varphi_{\xi_n}(t))^n = (1 - p + pe^{it})^n$$

- Распределение Пуассона

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Следствие: распределение Пуассона устойчиво относительно суммирования

$\zeta \in \Pi_{\lambda}, \eta \in \Pi_{\mu}$, они независимы. Тогда $\xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}$

По третьему свойству $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}$ - характеристическая функция распределения Пуассона $\Pi_{\lambda+\mu}$

- Стандартное нормальное распределение

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(t) &= Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2itx)} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2itx-t^2)} e^{-\frac{t^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} d(x-it) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

- Нормальное распределение

$$\xi \in N(a, \sigma^2)$$

Если $\eta \in N(0, 1)$, то $\xi = a + \sigma\eta \in N(a, \sigma^2)$

По второму свойству $\varphi_{\xi}(t) = e^{ita} \varphi_{\eta}(\sigma t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Следствие: нормальное распределение устойчиво относительно суммирования

Если $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2), \eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$ и они независимы, то $\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \varphi_{\eta}(t) = e^{ita_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{ita_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{it(a_1+a_2) - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$ - характеристическая функция $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Доказательства теорем через свойства характеристических функций

Докажем некоторые теоремы с помощью характеристических функций

Закон больших чисел Хинчина

Для доказательства закона больших чисел Хинчина докажем такую лемму:

$$\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$$

$$\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)} = e^{n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{x + no\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$$

Th. Закон больших чисел Хинчина

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным матожиданием. Тогда $\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1$

Обозначим $a = E\xi_1$

Ранее было доказано, что сходимость по вероятности к константе эквивалентно к слабой сходимости. Поэтому достаточно доказать, что $\frac{S_n}{n} \Rightarrow a$

По теореме о непрерывном соответствии остается доказать, что $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \longrightarrow \varphi_a(t) = e^{ita}$

По четвертому свойству $\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + itE\xi_1 + o(|t|) = 1 + ita + o(|t|)$

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = [\text{по второму свойству}] = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\left|\frac{t}{n}\right|\right)\right)^n \xrightarrow{\text{по лемме}} e^{ita} = \varphi_a(t)$$

Центральная предельная теорема

Th. Центральная предельная теорема Ляпунова, 1901 г.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом ($D\xi_1 < \infty$)

Обозначим $a = E\xi_1$, $\sigma^2 = D\xi_1$. Тогда

$$\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1)$$

Пусть $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma}$ - стандартизованная случайная величина

$$E\eta_i = 0, D\eta_i = 1$$

$$\text{Обозначим } Z_n = \eta_1 + \dots + \eta_n = \frac{(\xi_1 + \dots + \xi_n) - na}{\sigma} = \frac{S_n - na}{\sigma}$$

Надо доказать, что если $\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1)$

$$\text{По четвертому свойству } \varphi_{\eta_1}(t) = 1 + itE\eta_1 - \frac{t^2}{2}E\eta_1^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{n}}} = \varphi_{Z_n} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \left(\varphi_{\eta_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = \left(1 - \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} + o \left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o \left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}} -$$

характеристическая функция $N(0, 1)$

Предельная теорема Муавра-Лапласа

Th. Пусть $v_n(A)$ - число появления события A при n независимых испытаний, p - вероятность успеха при одном испытании, $q = 1 - p$. Тогда $\frac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow N(0, 1)$

$v_n(A) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = S_n$, где $\xi_i \in B_p$ и независимы, $E\xi_1 = p, D\xi_1 = pq$

По ЦПТ $\frac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} = \frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \Rightarrow N(0, 1)$

Следствие. Интегральная формула Лапласа:

$$p(k_1 \leq v_n \leq k_2) = p \left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{v_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right). \text{ Обозначим } \eta = \frac{v_n - np}{\sqrt{npq}}$$

$$p \left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{v_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) = F_\eta \left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - F_\eta \left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_0 \left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - F_0 \left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \right), \text{ где}$$

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Nota. Аналогичным образом ЦПТ применяется для приближенного вычисления вероятностей, связанных с суммами большого числа независимых одинаковых случайных величин, заменяя стандартизованную сумму на стандартное нормальное распределение. Возникает вопрос: какова погрешность данного вычисления?

Th. Неравенство Берри-Эссеена

В условиях ЦПТ для ξ_1 с конечным третьим моментом можно оценить так:

$$\left| p \left(\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < x \right) - F_0(x) \right| \leq C \frac{E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sqrt{n}(D\xi_1)^{3/2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nota. На практике берут $C = 0.4$, точная оценка сверху $C < 0.77$

Лекция 16

Условная дисперсия

Def. Условной дисперсией случайной величины ξ относительно случайной величины η называется случайная величина $D(\xi|\eta) = E((\xi - E(\xi|\eta))^2|\eta)$

Nota. То есть дисперсия соответствующего условного распределения

Свойства

1. $D(\xi|\eta) = E(\xi^2|\eta) - E^2(\xi|\eta)$
2. Закон полной дисперсии

$$\text{Th. } D\xi = E(D(\xi|\eta)) + D(E(\xi|\eta))$$

Из первого свойства $E(\xi^2|\eta) = D(\xi|\eta) + E^2(\xi|\eta)$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E(E\xi^2|\eta) - E^2(E(\xi|\eta)) = E(D(\xi|\eta) + E^2(\xi|\eta)) - E^2(E(\xi|\eta)) = E(D(\xi|\eta)) + E(E^2(\xi|\eta)) - E^2(E(\xi|\eta)) = E(D(\xi|\eta)) + D(E(\xi|\eta))$$

Следствие и смысл:

- Если ξ и η независимы (некоррелированы), то $D(E(\xi|\eta)) = D(E\xi) = 0$ и $D\xi = E(D(\xi|\eta))$
- Если имеется функциональная зависимость (то есть $\xi = g(\eta)$), то $D(E(\xi|\eta)) = D(E(g(\eta)|\eta)) = D(g(\eta)) = D\xi$
- Таким образом по величине $R^2 = \frac{D(E(\xi|\eta))}{D\xi}$ ($0 \leq R^2 \leq 1$) можно судить о силе корреляционной зависимости. Такая величина называется корреляционным отношением

Энтропия

Пусть ξ - результат эксперимента с исходами A_1, A_2, \dots, A_N , вероятности которых p_1, p_2, \dots, p_N

Def. Энтропией эксперимента называется величина $H(\xi) = - \sum_{i=1}^N p_i \cdot \log_2 p_i$

Свойства энтропии:

1. Очевидно, что $H(\xi) \geq 0$, так как $p \geq 0$, а $\log_2 p_i \leq 0$
2. $H(\xi) = 0 \iff \exists i$, такой что $p_i = 1, p_j = 0 \forall j \neq i$ - то есть эксперимент заканчивается всегда одним исходом, нет неопределенности
3. Максимум $H(\xi) = \log_2 N = H_0$ достигается при $p_1 = p_2 = \dots = \frac{1}{N}$ - то есть когда все вероятности одинаковы, ни одному исходу нельзя отдать предпочтение, и результат эксперимента получается максимально неопределенным

Рассмотрим $\varphi(x) = x \log_2 x$. Так как $\varphi''(x) = \frac{1}{x \ln 2} > 0$ при $x > 0$, следовательно $\varphi(x)$ выпукла вниз

Рассмотрим случайную величину η

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \eta & p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \hline p & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \end{array}$$

По неравенству Йенсена $\varphi(E\eta) = \varphi\left(\sum_{i=1}^N \frac{p_i}{N}\right) = \varphi\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i\right) = \varphi\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{\log_2 \frac{1}{N}}{N} \leq E(\varphi(\eta)) =$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i = -\frac{1}{N} H(\eta)$$

Получаем $\frac{\log_2 \frac{1}{N}}{N} \leq -\frac{1}{N} H(\eta)$, то есть $H \leq \log_2 N$

Следствие: Энтропию можно рассматривать как меру неопределенности эксперимента

Ex. $\xi \in B_p$

$$\begin{array}{c|c|c} \xi & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array}$$

$$H(\xi) = -(1-p) \log_2(1-p) - p \log_2 p$$

Ex. 1. Психолог Р. Хайман проводил такой эксперимент: перед человеком загорались с некоторой частотой лампочки, замерялась время реакции на загоревшуюся лампочку. Если лампочки загорались с одинаковой частотой, то энтропия была пропорциональна H_0

Ex. 2. Также с помощью энтропии определен второй закон термодинамики

Ex. 3. Теория кодирования информации

Если алфавит сообщения состоит из N символов, то каждому символу присваиваем последовательность одинаковой длины из 0 и 1, причем ее длина будет $\lceil \log_2 N \rceil$

Для передачи n символов потребуется последовательность длиной $n \lceil \log_2 N \rceil$

Цель: сократить длину последовательности

Для больших по объему сообщений можно заметно уменьшить эту величину, используя, что разные символы встречаются с разными частотами.

Если p_1, p_2, \dots, p_N - эти частоты, то в сообщении длиной N i -ый символ появляется $v_i \approx np_i$ раз

Def. Сообщение длины N называется типичным с параметрами n и δ , если $|v_i - np_i| < \delta \forall 1 \leq i \leq N$

Пусть $M_{n,\delta}$ - число таких сообщений

Th. (частный случай теоремы Макмиллана)

$$\frac{1}{n} \log_2 M_{n,\delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i$$

Следствие: существует $\varepsilon > 0$ | $\frac{1}{n} \log_2 M_{n,\delta} < H + \varepsilon$ (или $M_{n,\delta} < 2^{n(H+\varepsilon)}$)

Если можно занумеровать эти типичные сообщения, то для них потребуется число символов $\log_2 2^{n(H+\varepsilon)} = n \cdot (H + \varepsilon)$

И поэтому с вероятностью приблизительно 1 можно сократить длины сообщения с коэффициентом сжатия $\gamma \approx \frac{nH}{nH_0} = \frac{H}{H_0}$, где $H_0 = \log_2 N$

Если все символы встречаются независимо, то дальнейшее сжатие невозможно, но так как буквы встречаются в определенных сочетаниях, то можно сжать информации дальше, используя этот факт

Пусть γ_∞ - коэффициент итогового сжатия

В русском языке $\gamma \approx 0.87$. Если считать слова символами нашего алфавита, то получится $\gamma_\infty \approx 0.24$ для литературного языка и $\gamma_\infty \approx 0.17$ для делового языка

Def. $1 - \gamma_\infty$ называют коэффициентом избыточности языка

Энтропия при непрерывном распределении

Def. Пусть ξ абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$ и носителем $A = \{x \mid f(x) > 0\}$. Энтропией $H(\xi)$ называется величина $-\int_A f(x) \log_2 f(x) dx$

Th. Следующие распределения имеют наибольшую энтропию:

1. Если $A = [0, 1]$, то $U(0, 1)$
2. Если $A = [0, \infty)$ и $E\xi = 1$, то показательное E_1
3. Если $A = \mathbb{R}$ и $E\xi = 0$, а $D\xi = 1$, то $N(0, 1)$

Х. Программа экзамена в 2024/2025

1. Пространство элементарных исходов. Случайные события. Операции над событиями.

Пространство элементарных исходов: Пространством элементарных исходов Ω называется множество, содержащее все возможные исходы экспериментов, из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются элементарными исходами и обозначаются ω

Случайное событие: Случайными событиями называется подмножество $A \subset \Omega$. События A наступают, если произошел один из элементарных исходов из множества A

Операции над событиями: Суммой $A + B$ называется событие, состоящее в том, что произошло события A или события B (хотя бы одно из них)

Произведением $A \cdot B$ называется событие, состоящее в том, что произошло событие A и события B (оба из них)

Противоположным A событием называется событие \bar{A} , состоящее в том, что событие A не произошло

Дополнение (разность) $A \setminus B$ называется событие $A \cdot \bar{B}$

События A и B называются несовместными, если их произведение - пустое множество (не могут произойти одновременно при одной эксперименте)

События A влечет события B , если $A \subset B$ (если наступает A , то наступит B)

2. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности.

Статистическое определение вероятности: Пусть проводится n реальных экспериментов, при которых событие A появилось n_A раз. Отношение $\frac{n_A}{n}$ называется частотой события A . Эксперименты показывают, что при увеличении числа n частота стабилизируется у некоторого числа, при котором мы понимаем статистическую вероятность: $P(A) \approx \frac{n_A}{n}$ при $n \rightarrow \infty$

Классическое определение вероятности: Пусть пространство случайных событий Ω содержит конечное число равновозможных исходов, тогда применимо классическое определение вероятности: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$, где n - число всех возможных исходов, m - число благоприятных исходов

3. Геометрическое определение вероятности. Задача Бюффона об игле.

Геометрическое определение вероятности: Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутая ограниченная область, $\mu(\Omega)$ - мера Ω в \mathbb{R}^n (например, длина отрезка, площадь области на плоскости, объем тела в пространстве), в этом случае применимо геометрическое определение вероятности: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Задача Бюффона об игле: пусть пол вымощен ламинатом, $2l$ - ширина доски, на пол бросается игла длины, равной ширине доски, найти вероятность того, что игла пересечет стык доски

Определим положение иглы координатами центра и углом, между иглой и стыком доски, причем можно считать, что эти величины независимы

$\exists x \in [0; l]$ - расстояние от центра до ближайшего края, $\varphi \in [0; \pi]$ - угол

$$\Omega = [0; l] \times [0; \pi]$$

Событие A (пересечет стык) наступает, если $x \leq l \sin \varphi$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi}{\pi l} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$

4. *Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятности.*

Аксиоматическое определение вероятности: Ω - пространство элементарных исходов, \mathcal{F} - его σ -алгебра событий. Вероятностью на (Ω, \mathcal{F}) называется функция $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами:

- (a) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность)
- (b) Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ - несовместное, то $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (свойство счетной аддитивности)
- (c) $P(\Omega) = 1$ (условие нормированности)

Вероятностное пространство: Вероятностное пространство - тройка (Ω, \mathcal{F}, P)

Свойства вероятности:

- (a) Так как \emptyset и Ω - несовместные, то $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = 1 + P(\emptyset) \implies P(\emptyset) = 0$
- (b) Формула обратной вероятности: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- (c) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$

5. *Аксиома непрерывности. Ее смысл и вывод.*

Аксиома непрерывности: Th. Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Тогда $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

При непрерывном изменении области $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность $P(A)$ также должна изменяться непрерывно

$$\text{Ясно, что } A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1} + \prod_{i=n}^{\infty} A_i$$

$$\prod_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^n A_i \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1} \text{ и так как эти события}$$

несовместны, то по свойству счетной аддитивности $P(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1})$ - это остаток (хвост) сходящегося ряда

$$P(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \bar{A}_{i+1}) + P(A_n) \text{ и } P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ по необходимому признаку сходимости}$$

6. Свойства операций сложения и умножения. Формула сложения вероятностей.

Свойства операций сложения и умножения:

(a) Свойство дистрибутивности: $A \cdot (B + C) = AB + AC$ (b) Формула сложения: если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$ (c) Формула сложения вероятностей: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

7. Независимость событий. Независимые события в совокупности и попарно. Пример Бернштейна.

Независимые события: События A и B называются независимыми, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ События A_1, A_2, \dots, A_n - независимы в совокупности, если для любого набора i_1, i_2, \dots, i_k ($2 \leq k \leq n$) $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ **Пример Бернштейна:** Пусть имеется правильный тетраэдр, одна грань окрашена в красный, вторая в синий, третья в зеленый, а четвертая во все эти три цвета.Подбросили тетраэдр, $\square A$ - грань, которая содержит красный цвет, B - синий, C - зеленый.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Так как } P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B) \text{ - попарная независимость}$$

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) \text{ - но вот независимость в совокупности не соблюдается}$$

8. Условная вероятность. Формула умножения событий.

Условная вероятность $P(A|B)$ (или $P_B(A)$) - вероятность события A , вычисленная в предположении, что событие B уже произошло. $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ **Формула умножения событий:**Для двух событий: $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$ В общем случае: $P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$

9. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Полная группа событий: События $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и содержат все возможные элементарные исходы**Формула полной вероятности:** $\square H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ - полная группа событий. Тогда $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$ **Формула Байеса:** $\square H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий, и известно, что событие A уже произошло

$$\text{Тогда } P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

10. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли.

Схемой Бернулли называется серия одинаковых независимых экспериментов, каждый

из которых имеет 2 исхода: произошло интересное нас событие или нет

Формула Бернулли: Вероятность того, что при n испытаниях произойдет ровно k успехов, равна $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Наиболее вероятное число успехов:

- (а) np - целое, тогда $np + p$ - нецелое, и $k = np$ - наиболее вероятное
- (б) $np + p$ - нецелое, тогда $k = \lfloor np + p \rfloor$
- (с) $np + p$ - целое, тогда $np + p - 1$ - целое, тогда $k \in \{np + p - 1, np + p\}$

11. *Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа (без док-ва).*

Локальная формула: $p_n(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$

Интегральная формула: $p_n(k_1 \leq k \leq k_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ -

функция Лапласа, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ - отклонение от левой границы, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ - отклонение от правой

12. *Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности события. Закон больших чисел Бернулли.*

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности события

n - число испытаний, $p = p(A)$, $\frac{n_A}{n}$ - экспериментальная частота

$$p \left(\left| \frac{n_A}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) = p \left(-\varepsilon \leq \frac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\Phi \left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}} \right)$$

Закон больших чисел Бернулли: $p \left(\left| \frac{n_A}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\Phi \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}} \sqrt{n} \right) \rightarrow 1$ - закон больших чисел показывает, что вероятность попадания относительной частоты в ε -трубу приближается к 1

13. *Схемы испытаний: Бернулли, до первого успеха. Биномиальное и геометрическое распределения. Свойство отсутствия последействия.*

Схема Бернулли: $\exists v_n$ - число успехов в серии из n испытаний; $P_n(v_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$

Биномиальное распределение: Соответствие $k \rightarrow C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, \dots, n$ называется биномиальным распределением (обозначается $B_{n,p}$ или $B(n, p)$)

Схема до первого успеха: Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успешного испытания под номером τ , тогда вероятность $P(\tau = k) = q^{k-1}p$, $k = 1, 2, \dots$

Геометрическое распределение: Соответствие $k \rightarrow q^{k-1}p$, $k \in \mathbb{N}$ называется геометрическим распределением вероятности (обозначается G_p или $G(p)$)

Геометрическое распределение обладает свойством нестарения или свойством отсутствия последействия: **Th.** $\exists P(\tau = k) = q^{k-1}p$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n, k \geq 0 \quad P(\tau > n+k \mid \tau > n) = P(\tau > k)$

14. *Урновая схема с возвратом и без возврата. Гипергеометрическое распределение. Теорема об его асимптотическом приближении к биномиальному.*

Урновая схема: В урне N шаров, из которых K шаров белые, $N - K$ - черные. Из урны вынимаем (без учета порядка) n шаров. Найти вероятность, что из них k белых

а) Схема с возвратом (после каждого раза кладем шар обратно). В этом случае вероятность вынуть белый шар одинакова и равна $\frac{K}{N}$. Получаем схему Бернулли: $P_n(k) =$

$$C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$$

б) Схема без возврата - вынутый шар мы выбрасываем, тогда $P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$

Гипергеометрическое распределение: Соответствие $k \rightarrow \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, \dots, n$ называется гипергеометрическим распределением

Теорема о приближении к биномиальному: **Th.** Если $K, N \rightarrow \infty$ таким образом, что $\frac{K}{N} \rightarrow p \in (0; 1)$, а n и $0 \leq k \leq n$ фиксированы, то вероятность при гипергеометрическом распределении будет стремиться к биномиальному: $P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$

15. *Схема Пуассона. Формула Пуассона. Оценка погрешности в формуле Пуассона.*

Схема Пуассона: вероятность числа успеха при одном испытании p_n зависит от числа испытаний n , причем таким образом, что $np_n \approx \lambda = \text{const}$, λ - интенсивность появления редких событий в единицу времени в потоке испытаний. Применимо при p близком к 0 или к 1.

Формула Пуассона: **Th.** Пусть $n \rightarrow \infty, p_n \rightarrow 0$ таким образом, что $np_n \rightarrow \lambda = \text{const} > 0$.

Тогда вероятность k успехов при n испытаниях: $P_n(k) = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Оценка погрешности: **Th.** Пусть v_n - число успехов при n испытаниях в схеме Бернулли p - вероятность успеха при одном испытании, $\lambda = np$, $A \subset \{0, 1, \dots, n\}$ - произвольное подмножество чисел

Тогда $|P_n(v_n \in A) - \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \min(p, np^2) = \min(p, p\lambda)$

16. *Случайные величины, определение. Измеримость функции, ее смысл. Вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$. Распределение случайной величины.*

Случайной величиной, заданной на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, p) , называется \mathcal{F} -измеримая функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, которая сопоставляет каждому элементарному исходу некоторое вещественное число

Измеримость: На вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, p) функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется \mathcal{F} -измеримой, если $\forall x \in \mathbb{R} \{ \omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x \} \in \mathcal{F}$ (то есть $\xi^{-1}(y) \in \mathcal{F}$, где $y \in (-\infty; x)$)

Смысл измеримости: если задана случайная величина ξ , то мы можем задать вероятность попадания случайной величины в интервал $(-\infty; x)$: $p(\xi \in (-\infty; x)) = p(\{ \omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x \})$

Вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$: Пусть ξ задана на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, p) , с помощью нее получаем новое вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_\xi)$, с которым проще работать

Распределение случайной величины: Функция $p(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ставящая в соответствие каждому Борелевскому множеству вероятность, называется распределением случайной величины ξ

17. *Дискретные случайные величины. Определение, закон распределения, числовые характеристики.*

Дискретная случайная величина: Случайная величина ξ имеет дискретное распределение, если она принимает не более, чем счетное число значений. То есть существует конечный или счетный набор чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ такой, что $p(\xi = x_i) = p_i > 0$ и $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$

Таким образом, дискретная случайная величина (ДСВ) задается законом распределения:

| | | | | | | |
|-------|-------|-------|---------|-------|---------|-------------------------------|
| ξ | x_1 | x_1 | \dots | x_n | \dots | - значения случайной величины |
| p | p_1 | p_1 | \dots | p_n | \dots | - вероятности этих значений |

Характеристики дискретной случайной величины:

Математическим ожиданием $E\xi$ случайной величины ξ называется число $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называют среднее квадратов ее отклонения от математического ожидания: $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ или $D\xi = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - E\xi)^2 p_i$ при условии, что данный ряд сходится

Дисперсию обычно удобно считать по формуле $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E\xi^2$

Средним квадратическим отклонением (СКО) σ_ξ называется величина $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

$m_k = E\xi^k$ - момент k -ого порядка случайной величины ξ (также называют начальным моментом)

$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$ - центральный момент k -ого порядка

18. *Свойства математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.*

Свойства:

Th. 1. Случайная величина ξ имеет вырожденное распределение, если $\xi(\omega) = \text{const } \forall \omega \in \Omega$

| | |
|-------|-----|
| ξ | C |
| p | 1 |

$E\xi = C \quad D\xi = 0$

Th. 2. Свойство сдвига: $E(\xi + C) = E\xi + C; D(\xi + C) = D\xi$

Th. 3. Свойство растяжения: $E(C\xi) = CE\xi, D(C\xi) = C^2 D\xi$

Th. 4. $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ (из третьего свойства математического ожидания - линейная функция)

Def. Дискретные случайные величины ξ и η независимы, если $p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i) \cdot p(\eta = y_j) \forall i, j$. То есть случайные величины принимают свои значения независимо друг от друга

Th. 5. Если случайные величины ξ и η независимы, то $E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$; обратное неверно

Th. 6. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

Def. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$, где $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$ - ковариация случайных величин (равна 0 при независимых величинах) - индикатор наличия связи между случайными величинами

Th. 7. Если случайные величины ξ и η независимы, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

Th. 8. Общая формула дисперсии суммы: $D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i,j(i \neq j)} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$

19. Стандартные дискретные распределения и их числовые характеристики (Бернулли, биномиальное, геометрическое, Пуассона).

Распределение Бернулли: B_p (с параметром $0 < p < 1$), ξ - число успехов при одном испытании, p - вероятность успеха при одном испытании

| | | | | |
|-------|------------|--------|------------|------------------------|
| ξ | 0 | 1 | | |
| p | $1 - P(A)$ | $P(A)$ | $E\xi = p$ | $D\xi = p(1 - p) = pq$ |

Биномиальное распределение $B_{n,p}$ (с параметрами n, p), ξ - число успехов в серии из n испытаний, p - вероятность успеха при одном испытании

$$p(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \iff \xi \in B_{n,p}$$

$$E\xi_i = p; \quad D\xi_i = pq$$

$$E\xi = E\xi_1 + \dots + E\xi_n = p + \dots + p = np$$

$$D\xi = D\xi_1 + \dots + D\xi_n = pq + \dots + pq = npq$$

Геометрическое распределение G_p (с параметром p), ξ - номер 1-ого успешного испытания в бесконечной серии

$$p(\xi = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots \iff \xi \in G_p$$

$$E\xi = \frac{1}{p}, \quad D\xi = \frac{q}{p^2}$$

Распределение Пуассона Π_λ (с параметром $\lambda > 0$)

Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если $p(\xi =$

$$k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E\xi = \lambda = np, \quad D\xi = \lambda$$

20. Функция распределения и ее свойства (в свойствах 4, 5, 6 достаточно привести одно из доказательств).

Функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P(\xi < x)$

Свойства:

$$1) F(x) \text{ ограничена } 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$2) F(x) \text{ неубывающая функция: } x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$3) p(\alpha \leq \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$5) F(x) \text{ непрерывна слева: } F(x_0 - 0) = F(x_0)$$

$$6) \text{ Скачок в точке } x_0 \text{ равен вероятности попадания в данную точку: } F(x_0 + 0) - F(x_0) =$$

$$p(\xi = x_0) \text{ или } F(x_0 + 0) = p(\xi = x_0) + p(\xi < x_0) = p(\xi \leq x_0)$$

$$7) \text{ Если функция распределения непрерывна в точке } x = x_0, \text{ то очевидно, что вероятность}$$

попадания в эту точка $p(\xi = x_0) = 0$ (следствие из 6 пункта)

8) Если $F(x)$ непрерывна $\forall x \in \mathbb{R}$, то $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

21. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность и ее свойства.

Абсолютно непрерывные случайные величины: Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует $f_\xi(x)$ такая, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $p(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x) dx$

Функция плотности: Функция f_ξ называется плотностью распределения случайной величины

Свойства:

1) Вероятностно-геометрический смысл плотности: $p(\alpha \leq \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta f_\xi(x) dx$

2) Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = 1$

3) $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(x) dx$

4) $F_\xi(x)$ непрерывна

5) $F_\xi(x)$ дифференцируема почти везде и $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$ для почти всех x

6) $f_\xi(x) \geq 0$ по определению и как производная неубывающей $F_\xi(x)$

7) $p(\xi = x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ - так как $F_\xi(x)$ непрерывна

8) $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

9) **Th.** Если $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (выполнены свойства 2 и 6), то $f(x)$ - плотность некоторого распределения

22. Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины, их свойства.

Характеристики:

Математическим ожиданием $E\xi$ случайной абсолютно непрерывной величины ξ называется величина $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$ при условии, что данный интеграл сходится абсолютно, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$

Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называется величина $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f_\xi(x) dx$ при условии, что данный интеграл сходится. Вычислять удобно по формуле $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x) dx - (E\xi)^2$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ определяется, как корень дисперсии

$m_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\xi(x) dx$ - момент k -ого порядка

$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k f_\xi(x) dx$ - центральный момент k -ого порядка

Медианой Me абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется значение случайной величины ξ , такое что $p(\xi < Me) = p(\xi > Me) = \frac{1}{2}$

Модой M_0 случайной величины ξ называется точка локального максимума плотности

23. Равномерное распределение.

Равномерное распределение: Случайная величина ξ имеет равномерное распределение $\xi \in U(a, b)$, если ее плотность на этом отрезке постоянна. Получаем функцию плотности

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \quad \frac{1}{b-a} \text{ из усл. нормировки}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

$$E\xi = \frac{a+b}{2}, \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \text{ при условии, что } \alpha, \beta \in [a, b]$$

24. Показательное распределение. Свойство нестарения.

Показательное распределение: Случайная величина ξ имеет показательное (или экспоненциальное) распределение с параметром $\alpha > 0$ (обозн. $\xi \in E_{\alpha}$), если ее плотность имеет

$$\text{вид: } f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E\xi = \frac{1}{\alpha}, \quad D\xi = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\alpha}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F(b) - F(a) = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha} \quad a, b \geq 0$$

Из непрерывных случайных величин только показательная обладает свойством нестарения: **Th.** $\square \xi \in E_{\alpha}$. Тогда $p(\xi > x+y \mid \xi > x) = p(\xi > y) \quad \forall x, y > 0$

25. Нормальное распределение. Стандартное нормальное распределение, его числовые характеристики.

Нормальное распределение: Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2 (обозн. $\xi \in N(a, \sigma^2)$), если ее плотность имеет вид: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$E\xi = a, \quad D\xi = \sigma^2, \quad \sigma = \sigma$$

Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma^2 = 1$: $\xi \in N(0, 1)$

Плотность: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса

Распределение: $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - функция стандартного нормального распределения

$$E\xi = 0; D\xi = 1$$

26. *Связь между стандартным нормальным и нормальным распределениями. Следствия.*

Связь:

$$1) \square \xi \in N(a, \sigma^2). \text{ Тогда } F_\xi(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$$2) \text{ Если } \xi \in N(a, \sigma^2), \text{ то } \eta = \frac{\xi-a}{\sigma} \in N(0, 1) \text{ (процесс } \xi \rightarrow \eta \text{ называется стандартизацией)}$$

$$3) \square \xi \in N(a, \sigma^2). \text{ Тогда } p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

$$4) \text{ Вероятность попадания в симметричный интервал (вероятность отклонения случайной величины от матожидания) } p(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

$$5) \text{ Правило 3 «сигм»: } p(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973 - \text{попадание случайной величины нормального распределения в интервал } (a - 3\sigma, a + 3\sigma) \text{ близко к } 1$$

$$6) \text{ Свойство линейности: если случайная величина } \xi \in N(a, \sigma^2), \text{ то } \eta = \gamma\xi + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$$

$$7) \text{ Устойчивость относительно суммирования: если случайные величины } \xi_1 \in N(a_1, \sigma_1^2), \xi_2 \in N(a_2, \sigma_2^2), \text{ и они независимы, то } \xi_1 + \xi_2 \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

27. *Сингулярные распределения. Теорема Лебега (без док-ва).*

Сингулярное распределение: Случайная величина ξ имеет сингулярное распределение, если $\exists B$ - Борелевское множество с нулевой мерой Лебега $\lambda(B) = 0$, такое что $p(\xi \in B) = 1$, но $P(\xi = x) = 0 \quad \forall x \in B$

Теорема Лебега: Th. Лебега.

$\square F_\xi(x)$ - функция распределения ξ . Тогда $F_\xi(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$, где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

F_1 - функция дискретного распределения

F_2 - функция абсолютно непрерывного распределения

F_3 - функция сингулярного распределения

То есть существуют только дискретное, абсолютно непрерывное, сингулярное распределения и их смеси

28. *Преобразования случайных величин. Стандартизация случайной величины.*

Стандартизация: Пусть имеется случайная величина ξ . Соответствующей ей стандартной величиной называется случайная величина $\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sigma}$

$$E\eta = 0; D\eta = 1$$

Преобразование: Если ξ - дискретная случайная величина, то ее законы распределения находятся просто: значения x_i в верхней строке заменяем $g(x_i)$, вероятности остаются прежние.

29. *Теорема о монотонном преобразовании. Линейное преобразование случайной величины. (без док-ва).*

Теорема о монотонном преобразовании: **Th.** Пусть $f_\xi(x)$ - плотность случайной величины ξ , $g(x)$ - строго монотонная функция. Тогда случайная величина $\eta = g(\xi)$ имеет плотность $f_\eta(x) = |h'(x)|f_\xi(h(x))$, где $h(g(x)) = x$

Если $g(x)$ не является монотонной функцией, то поступаем следующим образом: разбиваем $g(x)$ на интервалы монотонности, для каждого i -ого интервала находим $h_i(x)$ и плотность случайной величины ищем по формуле Смирнова: $f_\eta(x) = \sum_{i=0}^n |h'_i(x)|f_\xi(h_i(x))$

Линейное преобразование: **Th.** Пусть ξ имеет плотность $f_\xi(x)$, тогда $\eta = a\xi + b$, где $a \neq 0$, имеет плотность $f_\eta(x) = \frac{1}{|a|}f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

30. *Квантильное преобразование. Моделирование случайной величины с помощью датчика случайных чисел.*

Квантильное преобразование: Пусть функция распределения случайной величины ξ $F_\xi(x)$ - непрерывная функция. Тогда $\eta = F(\xi) \in U(0, 1)$ - стандартное равномерное распределение. Пусть $\eta \in U(0, 1)$ - стандартное равномерное распределение, $F(x)$ - произвольная функция распределения. Тогда $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$

Преобразование $\xi = F^{-1}(\eta)$ называют квантильным

Смысл: датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение, из теоремы следует, что при помощи датчика случайных чисел и квантильного преобразования мы сможем смоделировать любое нужно распределение

31. *Виды сходимостей случайных величин, связь между ними. Теорема об эквивалентности сходимостей к константе (все без док-ва).*

Виды сходимостей:

- Сходимость «почти наверное»

Def. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится «почти наверное» к случайной величине ξ при $n \rightarrow \infty$ ($\xi_n \xrightarrow{п. н.} \xi$), если $p(\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(\omega)) = 1$

- Сходимость по вероятности

Def. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ при $n \rightarrow \infty$ ($\xi_n \xrightarrow{p} \xi$), если $\forall \varepsilon > 0 \quad p(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

- Слабая сходимость

Def. Последовательность случайных величин ξ_n слабо сходится к случайной величине ξ при $n \rightarrow \infty$ ($\xi_n \rightrightarrows \xi$), если $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\xi(x) \forall x$, где $F_\xi(x)$ - непрерывна

Связь:

Th. $\xi_n \xrightarrow{п. н.} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{p} \xi \implies \xi_n \rightrightarrows \xi$

Th. Если $\xi_n \rightrightarrows C = \text{const}$, то $\xi_n \xrightarrow{p} C$

Nota. В общем случае не только из слабой сходимости не следует сходимость по вероятности, но и бессмысленно говорить об этом, так как слабая сходимость - это сходимость не случайных величин, а их распределений

32. Математическое ожидание преобразованной случайной величины. Свойства моментов.

Матожидание: Th. Если ξ - дискретная случайная величина, то $Eg(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p(\xi = x_i)$

Для непрерывной случайной величины $Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{\xi}(x)dx$

Свойства моментов: 1) Если $\xi \geq 0$, то $E\xi \geq 0$

2) Если $\xi \leq \eta$, то $E\xi \leq E\eta$

3) Если $|\xi| \leq |\eta|$, то $E|\xi|^k \leq E|\eta|^k$

4) Если существует момент m_t случайной величины ξ , то существует m_s при $s < t$ (при условии, что интеграл/сумма сходятся)

33. Неравенство Йенсена, следствие.

Неравенство Йенсена: Th. Пусть функция $g(x)$ выпукла вниз, тогда для любой случайной величины ξ $Eg(\xi) \geq g(E\xi)$

Nota. Если $g(x)$ выпукла вверх, знак неравенства меняется

Следствие: $Ee^{\xi} \geq e^{E\xi}$, $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$, $E|\xi| \geq |E\xi|$, $E \ln(\xi) \leq \ln(E\xi)$, $E\frac{1}{\xi} \geq \frac{1}{E\xi}$ при $\xi > 0$

34. Неравенства Маркова, Чебышева, правило трех сигм.

Для ξ , у которой существует матожидание, верно:

Неравенство Маркова: Th. $p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$

Неравенство Чебышева: Th. $P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$

Правило «трех сигм»: Th. $P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$

35. Среднее арифметическое одинаковых независимых случайных величин. Закон больших чисел Чебышева.

Среднее арифметическое: $\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$

$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E\xi_1 + \dots + E\xi_n) = \frac{1}{n}na = a = E\xi_1$ - математическое ожидание не меняется

$D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D\xi_1 + \dots + D\xi_n) = \frac{1}{n^2}nd = \frac{d}{n} = \frac{D\xi_1}{n}$ - дисперсия уменьшилась в n раз

$\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ - СКО уменьшилось в \sqrt{n} раз

Закон больших чисел Чебышев: Th. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - последовательность независимых одинаково распределенных с конечным вторым моментом, тогда $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} E\xi_1$

36. Вывод закона больших чисел Бернулли из закона больших чисел Чебышева. Законы больших чисел Хинчина и Колмогорова (только формулировки).

ЗБЧ Бернулли: Th. Пусть v_n - число успехов из n независимых испытаний, $p = P(A)$ - вероятность успеха при одном испытании. Тогда $\frac{v_n}{n} \xrightarrow{P} P(A)$

$v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, где $\xi_i \in B_p$ - число успехов при i -ом испытании

$$E\xi_i = p; D\xi_i = pq$$

$$\frac{v_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1 = p$$

$$p \left(\left| \frac{v_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

ЗБЧ Хинчина: **Th.** $v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом, тогда $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_i$

ЗБЧ Колмогорова: В условиях теоремы Хинчина $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1$

37. Совместные распределения случайных величин. Функция совместного распределения, ее свойства. Независимость случайных величин.

Совместное распределение: Случайным вектором $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называется упорядоченный набор случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве

Случайный вектор задает отображение $(\xi_1, \dots, \xi_n)(\omega) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Функция совместного распределения: Функцией совместного распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называется функция $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$

Свойства:

(a) $0 \leq F_{\xi, \eta}(x, y) \leq 1$

(b) $F_{\xi, \eta}(x, y)$ - неубывающая по каждому аргументу

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = 1$

(d) Восстановление маргинального (частного) распределения: $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\eta}(y)$, и наоборот - $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x)$

(e) $F_{\xi, \eta}(x, y)$ - непрерывна слева по каждому аргументу

(f) $P(x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2) = F_{\xi, \eta}(x_2, y_2) - F_{\xi, \eta}(x_2, y_1) - F_{\xi, \eta}(x_1, y_2) + F_{\xi, \eta}(x_1, y_1)$

Независимость величин: Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы в совокупности, если для любого набора Борелевских множеств из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, B_1, B_2, \dots, B_n верно $p(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = p(\xi_1 \in B_1) \cdot p(\xi_2 \in B_2) \cdot \dots \cdot p(\xi_n \in B_n)$

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ попарно независимы, если независимы любые две из них

38. Дискретная система двух случайных величин. Закон совместного распределения. Маргинальные распределения.

Дискретная система: Случайные величины ξ, η имеют совместное дискретное распределение, если случайный вектор (ξ, η) принимает не более, чем счетное число значений, то есть существует конечный или счетный набор пар чисел (x_i, y_i) , таких что $P(\xi = x_i, \eta = y_i) > 0, \sum_{i,j} P(\xi = x_i, \eta = y_i) = 1$

Таким образом двумерная дискретная случайная величина задается законом распределения - таблице вероятностей

| $\xi \backslash \eta$ | y_1 | y_2 | \dots | y_m |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|
| x_1 | p_{11} | p_{12} | \dots | p_{1m} |
| x_2 | p_{21} | p_{22} | \dots | p_{2m} |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots |
| x_n | p_{n1} | p_{n2} | \dots | p_{nm} |

Зная общий закон распределения, можно восстановить частное (маргинальное) распределение по формулам:

$$p_i = \sum_{j=1}^m p_{i,j} \quad q_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j}$$

39. Абсолютно непрерывная система двух случайных величин. Плотность совместного распределения, ее свойства.

Непрерывная система: Случайные величины ξ и η имеют абсолютно непрерывное совместное распределение, если $\exists f_{\xi,\eta}(x, y)$, такая что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ $P((\xi, \eta) \in B) = \iint_B f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy$. Функцию $f_{\xi,\eta}(x, y)$ будем называть функцией плотности совместного распределения случайных величин ξ и η .

Свойства:

(a) $f_{\xi,\eta}(x, y) \geq 0$

(b) Условие нормировки: $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy = 1$

(c) $F_{\xi,\eta} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi,\eta}(x, y) dy dx$

(d) $f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x, y)}{\partial x \partial y}$

(e) Если случайные величины ξ, η имеют абсолютно непрерывное совместное распределение с плотностью $f(x, y)$, то маргинальное распределение величин ξ, η также имеют абсолютно непрерывное распределение с плотностями $f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dy$, $f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dx$

(f) Так как вероятность попадания в Борелевские множества полностью задается функцией распределения, то условие независимости случайных величин эквивалентно следующему:

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, если функция общего распределения распадается в произведение отдельных функций распределения

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

- (g) **Равносильное определение:** абсолютно непрерывные случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы в совокупности тогда и только тогда, когда плотность совместного распределения $f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot f_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(x_n)$

40. *Функции от двух случайных величин. Теорема о функции распределения. Формула свертки.*

Функция от двух случайных величин: **Th.** Пусть ξ_1, ξ_2 - случайные величины с общим плотностью $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y)$, и есть функция $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда случайная величина $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$ имеет функцию распределения $F_\eta(z) = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy$, где $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) < z\}$

Плотность суммы: **Th.** $\square \xi_1, \xi_2$ - независимые абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(y)$

Тогда плотность суммы $\xi_1 + \xi_2$ равна $f_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t-x)}_{\text{т. н. свертка}} dx$

41. *Суммы стандартных распределений, устойчивость по суммированию (биномиальное, Пуассона, стандартное нормальное).*

Суммы стандартных распределений: *Ех. 1.* $\xi \in B_{n,p}; \eta \in B_{m,p}$. Тогда ясно, что $\xi + \eta \in B_{n+m,p}$ (по определению биномиального распределения $B_{n,p}$ - число успехов из n испытаний, где p - вероятность успеха)

Ех. 2. $\xi \in \Pi_\lambda, \eta \in \Pi_\mu$, они независимы. Тогда $\xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}$

Ех. 3. $\xi, \eta \in N(0, 1)$ и независимы. Тогда $\xi + \eta \in N(0, 2)$

Ех. 4. В общности для независимых $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2), \eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$ $\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Ех. 5. Равномерное распределение неустойчиво относительно суммирования, контрпример:

$\xi, \eta \in U(0, 1)$ - независимы

$\forall x, y \in [0, 1] \quad f_\xi(x) = 1, f_\eta(y) = 1$ и $f_{\xi, \eta}(x, y) = 1$

По первой теореме $F_{\xi, \eta}(x, y) = \iint_{D_z} f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy = \iint_{D_z} 1 dx dy = S_{D_z}$, где $D_z = \{(x, y) \mid x + y < z\}$

42. *Условные распределения и условные математические ожидания. Случаи дискретной и абсолютно непрерывной систем двух случайных величин.*

Условным распределением случайной величины из системы случайных величин (ξ, η) называется ее распределение, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение. Обозначается $\xi | \eta = y$

Условным математическим ожиданием (обозначается $E(\xi | \eta = y)$) называется математическим ожиданием случайной величины ξ при соответствующем условном распределении

Дискретная система: Пусть (ξ, η) задана законом распределения:

| $\xi \backslash \eta$ | y_1 | y_2 | \dots | y_m |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|
| x_1 | p_{11} | p_{12} | \dots | p_{1m} |
| x_2 | p_{21} | p_{22} | \dots | p_{2m} |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots |
| x_n | p_{n1} | p_{n2} | \dots | p_{nm} |

Вероятности условных распределений считаем по формулам:

$$\xi|\eta = y_j: p_i = p(\xi = x_i | \eta = y_j) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j} = \frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}$$

$$\eta|\xi = x_i: q_j = p(\eta = y_j | \xi = x_i) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\xi = x_i)} = \frac{q_{ij}}{p_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j p_{ij}}$$

Матожидание $E(\xi|\eta = y_j) = \sum_i x_i p(\xi = x_i, \eta = y_j)$

Непрерывная система: Пусть (ξ, η) задана плотностью $f_{\xi, \eta}(x, y)$ совместного распределения, тогда плотность условного распределения $\xi|\eta = y: f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{\xi, \eta}(x, y) dx} = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$

Def. Функция $f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$ называется условной плотностью

Def. Условное математическое ожидание вычисляется по формуле $E(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx$

43. *Пространство случайных величин. Скалярное произведение, неравенство Коши-Буняковского-Шварца.*

Пространство $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{\xi \mid D\xi < \infty\}$ - множество случайных величин на данном пространстве с конечной дисперсией

Скалярным произведением случайных величин ξ и η из $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется число $(\xi, \eta) = E(\xi\eta)$

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца: **Th.** Пусть случайные величины ξ и η имеют конечный второй момент, тогда $|E(\xi, \eta)| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$ (или $|(\xi, \eta)| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|$)

Причем $|E(\xi, \eta)| = \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2} \iff \eta = C\xi$, где $C = \text{const}$

44. *Условное математическое ожидание как случайная величина, его свойства. Формула полного математического ожидания.*

Условным математическим ожиданием (УМО, обозначается $E(\xi|\eta) = \hat{\xi}$) случайной величины ξ относительно случайной величины η называется ортогональная проекция случайной величины ξ на $L(\eta)$

Свойства:

- (a) Тожество ортопроекций: $\exists \hat{\xi} \in L(\eta)$, тогда $\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \iff E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta)) \forall g(\eta) \in L(\eta)$
- (b) Формула полного математического ожидания
 $E\xi = E(E(\xi|\eta))$ или $E\xi = E\hat{\xi}$

Nota. При распределении Бернулли получаем обычную формулу полной вероятности

(c) Линейность: $E(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 | \eta) = C_1E(\xi_1|\eta) + C_2E(\xi_2|\eta)$

(d) Если ξ и η независимы, то $E(\xi|\eta) = E\xi$

(e) Если ξ и η независимы, то $(\xi - E\xi) \perp g(\eta) \forall g(\eta) \in L(\eta)$, в частности $(\xi - E\xi) \perp \eta$

45. *Условная дисперсия. Закон полной дисперсии. Смысл второго слагаемого в разложении дисперсии.*

Условной дисперсией случайной величины ξ относительно случайной величины η назы-

вается случайная величина $D(\xi|\eta) = E((\xi - E(\xi|\eta))^2|\eta)$

Закон полной дисперсии: **Th.** $D\xi = E(D(\xi|\eta)) + D(E(\xi|\eta))$

Следствие и смысл:

- Если ξ и η независимы (некоррелированы), то $D(E(\xi|\eta)) = D(E\xi) = 0$ и $D\xi = E(D(\xi|\eta))$
- Если имеется функциональная зависимость (то есть $\xi = g(\eta)$), то $D(E(\xi|\eta)) = D(E(g(\eta)|\eta)) = D(g(\eta)) = D\xi$

46. Числовые характеристики зависимости случайных величин. Ковариация, ее свойства. Коэффициент корреляции, его свойства. Корреляция случайных величин.

Ковариацией (ξ, η) называется величина $\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$

Свойства:

- $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$
- $\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi$
- $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$
- $\text{cov}(C_1\xi_1 + C_2\xi_2, \eta) = C_1\text{cov}(\xi_1, \eta) + C_2\text{cov}(\xi_2, \eta)$
- $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$
- $D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$
- Если ξ и η - независимы, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$
 - Если $\text{cov}(\xi, \eta) \neq 0$, то ξ и η - зависимы
 - Если $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, то неясно
- Если $\text{cov}(\xi, \eta) > 0$, то зависимость прямая, если $\text{cov}(\xi, \eta) < 0$, то обратная

Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η с конечными вторыми моментами, называется величина $r_{\xi,\eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{E(\xi\eta) - E\xi E\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$

Свойства:

- $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$
- Если ξ и η - независимы, то $r_{\xi,\eta} = 0$
 - Если $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то ξ и η - зависимы
 - Если $r_{\xi,\eta} = 0$, то неясно
- $|r_{\xi,\eta}| \leq 1$
- $|r_{\xi,\eta}| = 1 \iff \eta = a\xi + b$ п.н.
- Если $r_{\xi,\eta} = 1$, то $\eta = a\xi + b$ и $a > 0$ (прямая линейная зависимость)
 - Если $r_{\xi,\eta} = -1$, то $\eta = a\xi + b$ и $a < 0$ (обратная линейная зависимость)

Если $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то говорят, что случайные величины коррелированы друг с другом. Если $r_{\xi,\eta} > 0$, то имеет прямая корреляция, если $r_{\xi,\eta} < 0$ - обратная

47. Характеристическая функция случайной величины, ее свойства. Теорема о непрерывном соответствии (формулировка).

Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}$, $t \in$

\mathbb{R}

Свойства:

- (а) Любая случайная величина ξ имеет характеристическую функцию, причем $|\varphi_\xi(t)| \leq 1$
- (б) Пусть $\varphi_\xi(t)$ - характеристическая функция случайной величины ξ . Тогда характеристическая функция случайной величины $a + b\xi$ равна $\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita}\varphi_\xi(bt)$
- (с) Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций
- (d) Пусть $E\xi^k < \infty$. Тогда $\varphi_\xi(t) = 1 + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + o(|t|^k)$
- (е) Пусть $E\xi^k < \infty$. Тогда $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$
- (f) Существует взаимно-однозначное соответствие между распределениями и характеристическими функциями. Зная характеристическую функцию можно восстановить распределение.
- (g) Теорема о непрерывном соответствии

Th. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ слабо сходится к ξ тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций сходится поточечно к $\varphi_\xi(t)$

$$\{\xi_n\} \Rightarrow \xi \iff \varphi_{\xi_n}(t) \longrightarrow \varphi_\xi(t) \forall t \in \mathbb{R}$$

48. *Характеристические функции стандартных распределений (Бернулли, биномиальное, Пуассона, нормальное). Следствия.*

Характеристические функции:

- Распределение Бернулли

| | | |
|-------|-------|-----|
| ξ | 0 | 1 |
| p | $1-p$ | p |

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\xi t} = e^{i \cdot 0 \cdot t}p(\xi=0) + e^{i \cdot 1 \cdot t}p(\xi=1) = 1-p+pe^{it}$$

- Биномиальное распределение

$$P(\xi=k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0, 1, \dots, n$$

Если $t \in B_{n,p}$, то $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n$, где $\xi_i \in B_p$ - независимы

$$\varphi_\xi(t) = (\varphi_{\xi_n}(t))^n = (1-p+pe^{it})^n$$

- Распределение Пуассона

$$P(\xi=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0, 1, \dots, n$$

$$\varphi_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Следствие: распределение Пуассона устойчиво относительно суммирования: $\exists \xi \in \Pi_\lambda, \eta \in \Pi_\mu$, они независимы. Тогда $\xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}$

- Стандартное нормальное распределение

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- Нормальное распределение

$$\xi \in N(a, \sigma^2)$$

$$\varphi_{\xi}(t) = e^{ita} \varphi_{\eta}(\sigma t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Следствие: нормальное распределение устойчиво относительно суммирования: если $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2)$, $\eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$ и они независимы, то $\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

49. Доказательство закона больших чисел Хинчина.

Закон больших чисел Хинчина

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным матожиданием. Тогда $\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1$

Обозначим $a = E\xi_1$

Ранее было доказано, что сходимость по вероятности к константе эквивалентно к слабой сходимости. Поэтому достаточно доказать, что $\frac{S_n}{n} \Rightarrow a$

По теореме о непрерывном соответствии остается доказать, что $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \rightarrow \varphi_a(t) = e^{ita}$

По четвертому свойству $\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + itE\xi_1 + o(|t|) = 1 + ita + o(|t|)$

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = [\text{по второму свойству}] = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\left|\frac{t}{n}\right|\right)\right)^n \xrightarrow{\text{по лемме}} e^{ita} = \varphi_a(t)$$

50. Центральная предельная теорема. Вывод из нее предельной теоремы Муавра-Лапласа. Неравенство Берри-Эссеена (формулировка).

ЦПТ Ляпунова Th. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией ($D\xi_1 < \infty$) и $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Тогда имеет место слабая сходимость:

$$\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \Rightarrow N(0, 1)$$

Предельная теорема Муавра-Лапласа: Пусть $v_n(A)$ - число появления события A при n независимых испытаний, p - вероятность успеха при одном испытании, $q = 1 - p$. Тогда $\frac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow N(0, 1)$

$$v_n(A) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = S_n, \text{ где } \xi_i \in B_p \text{ и независимы, } E\xi_1 = p, D\xi_1 = pq$$

$$\text{По ЦПТ } \frac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} = \frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \Rightarrow N(0, 1)$$

Неравенство Берри-Эссеена: В условиях ЦПТ для ξ_1 с конечным третьим моментом можно оценить так:

$$\left| p\left(\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < x\right) - F_0(x) \right| \leq C \frac{E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sqrt{n(D\xi_1)^3}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$