**Th.** $A' = T_{e\to e'} A T_{e\to e'}^{-1}$

*Nota.* $C = A + \lambda B$

Следствия:

1. $TCT^{-1} = T(A+\lambda B)T^{-1} = TAT^{-1} + \lambda TBT^{-1}$
2. $B = I \quad TBT^{-1} = TIT^{-1} = I$, т. к. $TI = T, TT^{-1} = I$
3. $\det A^{-1} = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A \det T^{-1} = \det A \cdot 1$

*Nota.* То есть характеристика нашего объекта - инвариант при преобразовании $T$

**Def.** Матрица $A$ называется ортогональной если $A^{-1} = A^T$

Следствие: $AA^{-1} = AA^T = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Для элементов матрицы:

$$\forall i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ij} = (A_i, A_i) = 1$$

$$\forall i, j (i \neq j) \sum_{kk=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = (A_i, A_j) = 0$$

В общем, $(A_i, A_j) = \left[\begin{array}{ll} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{array}\right.$

**Def.** Оператор $\mathcal{A}$ называется ортогональным, если его матрица ортогональна

Возникает вопрос: $A$ ортогональна в каком-либо базисе или во всех сразу?

Свойство: если $\mathcal{A}$ - ортогонален, то $\det A = \pm 1$ (следует из определения $\det(AA^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = \det(A) \cdot \det(A) = \det(I) = 1 \implies \det(A) = \pm\sqrt{1}$)

**Th.** $T_{e\to e'}$ - преобразование координат в $V^n$. Тогда $T$ - ортогональный оператор

Здесь базис $\boldsymbol{e}$ - ортонормированный базис

Пусть в базисе $\boldsymbol{e}$ матрица $T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$ - неортогональна

Тогда $e_1' = \sum_{i=1}^{n} \tau_{1i} e_i \quad \Big| \cdot e_1'$

$1 = (e_1', e_1') = \left( \sum_{i=1}^{n} \tau_{1i} e_i \right)^2 = \tau_{11}^2 e_1^2 + \tau_{11} e_1 \tau_{12} e_2 + \dots = \tau_{11}^2 + \dots + \tau_{1n}^2 = 1$, то есть строка - это единичный вектор

$0 = (e_1', e_2') = (\tau_{11} e_1 + \tau_{12} e_1 + \dots) \cdot (\tau_{21} e_1 + \tau_{22} e_2 + \dots) =$ произведение 1-ой строки на 2-ую, то есть строки ортогональны

Таким образом, матрица $T$ - ортогональна

*Nota.* Тогда $A' = TAT^{-1} = TAT^T$

## 2.7. Собственные векторы и значения оператора

**Def.** Инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ - это $U = \{x \in V_1 \in V \mid \mathcal{A}x \in V_1\}$

*Ex.* $V = \mathcal{P}_n(t)$ - пространство многочленов степени $\le n$ на $[a; b]$, $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$

*Nota.* $\operatorname{Ker} \mathcal{A}, \operatorname{Im} \mathcal{A}$ - инвариантные $(A : V \longrightarrow V)$

**Def.** Характеристическим многочленом оператора $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ ($\mathcal{A}x = Ax, A$ - матрица в неком базисе) называют $\xi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

*Nota.* Определитель $|A - \lambda I|$ представляет собой $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$

*Nota.* Уравнение $\xi(\lambda) = 0$ называется вековым

**Def.** Собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda$, называется вектор $x \neq 0$ такой, что $\mathcal{A}x = \lambda x$

**Def.** Собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее числу $\lambda_i$, определяется как $U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$

**Def.** $\dim U_{\lambda_i} = \beta$ - геометрическая кратность числа $\lambda_i$

**Th.** $\mathcal{A}x = \lambda x \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0, \quad A : V^n \longrightarrow V^n$

$|A-\lambda I|=0 \Longleftrightarrow rang(A-\lambda I)<n \Longleftrightarrow \dim \operatorname{Im}(A-\lambda I)<n \Longleftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I) \geq 1$
$\exists x \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I), x \neq 0 \mid (A-\lambda I)x=0 \Longleftrightarrow Ax-\lambda Ix=0 \Longleftrightarrow Ax=\lambda x$

*Nota.* По основной теореме алгебры вековое уравнение имеет $n$ корней (не всех из них вещественные). В конкретном множестве $\mathcal{K} \ni \lambda$ их может не быть

**Def.** Кратность корня $\lambda_i$ называется алгебраической кратностью

**Th.** $\lambda_1 \neq \lambda_2 (\mathcal{A}x_1=\lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2=\lambda_2 x_2) \Longrightarrow x_1, x_2$ - линейно независимы

Составим комбинацию: $c_1x_1+c_2x_2=0 \quad \Big| \cdot \mathcal{A}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow \lambda_1^2+\lambda_2^2 \neq 0, \sqsupset \lambda_2 \neq 0$
$c_1\mathcal{A}x_1+c_2\mathcal{A}x_2=0 \Longleftrightarrow c_1\lambda_1x_1+c_2\lambda_2x_2=0$
Умножим $c_1x_1+c_2x_2=0$ на $\lambda_2$: $c_1\lambda_2x_1+c_2\lambda_2x_2=0$
$c_1\lambda_1x_1+c_2\lambda_2x_2-c_1\lambda_2x_1-c_2\lambda_2x_2=0$
$c_1x_1(\lambda_1-\lambda_2)=0$
Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по условию, $x_1 \neq 0$ - собственный вектор, поэтому $c_1=0$, а комбинация линейно независима
Если $\lambda_1=0, \lambda_2 \neq 0$: $c_2\lambda_2x_2=0 \Longrightarrow c_2=0$

*Nota.* Приняв доказательство за базу индукции, можно доказать линейную независимость для $k$-ой системы собственных векторов для попарно различных $k$ чисел $\lambda$