Вычислительная геометрия

Содержание

1. Преобразование изображений. Геометрическое моделирование

1.1 Основные понятия

Мет. Линейное пространство – это множество векторов V с определенными операциями сложения $+$ и умножения на число $\cdot\,\lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, которые удовлетворяют свойствам:

1.-4. свойства абелево-аддитивной группы:
    1. $x + y = y + x$ для $x, y \in V$
    2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ для $x, y, z \in V$
    3. Существует такой 0, что $x + 0 = x$ для $x \in V$
    4. Для любого $x \in V$ существует такой $-x$, что $x + (-x) = 0$

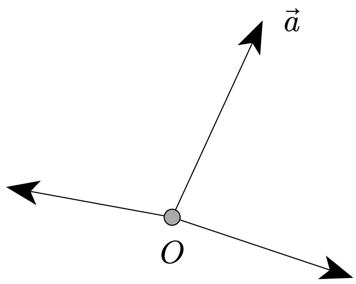
5. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ для $x \in V$
6. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ для $x \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ для $x \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ для $x, y \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

В общем случае умножение определено на комплексное число, но мы будем рассматривать вещественные

Def. Линейная комбинация векторов $x, y, z, \ldots$ называется сумма $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \ldots$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1.2 Модели линейных пространств

Геометрическое



Линейное пространство – направленные отрезки с общим началов

Арифметическое

$x = (x_1, x_2)$ в $\mathbb{R}^2$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ в $\mathbb{R}^3$

В общем случае $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в $\mathbb{R}^n$

Линейное пространство – множество упорядоченных совокупностей n чисел

Между этими моделями вводится изоморфизм с помощью базиса, например, $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Тогда всякий геометрический вектор можно преобразовать в арифметический и наоборот: $\vec{x} = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath} = (x_1, x_2)$

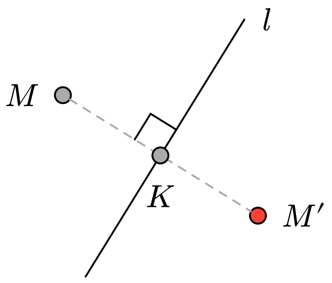
1.3 Геометрические преобразования

Def. Геометрическое преобразование – это биекция, которая переводит пространство Ω в себя

Def. Движение – геометрическое преобразование, сохраняющее расстояние между двумя любыми точками (изометрия)

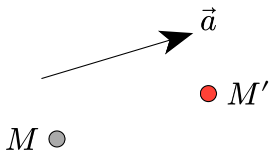
Виды движения на плоскости $\mathbb{R}^2$:

1. Осевая симметрия S_l относительно оси l



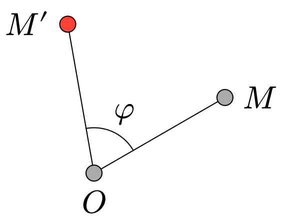
$M' = S_l(M)$ так, что $\begin{cases} MM' \perp l \\ MK = KM' \end{cases}$

2. Перенос $T_{\vec{a}}$ на вектор $\vec{a}$



$M' = T_{\vec{a}}(M)$ так, что $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$

3. Поворот R_O^{φ} относительно точки O на ориентированный угол φ



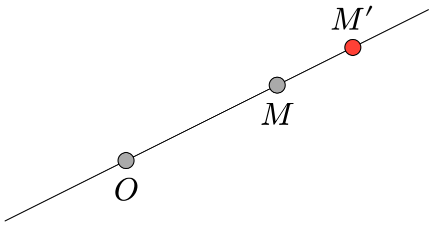
$M' = R_O^{\varphi}(M)$ так, что $\begin{cases} \angle(MOM') = \varphi \\ OM = OM' \end{cases}$

Традиционно принимаем положительный угол за поворот против часовой стрелки

Def. Конформное преобразование – преобразование, сохраняющее углы

Виды конформных преобразований на плоскости $\mathbb{R}^2$:

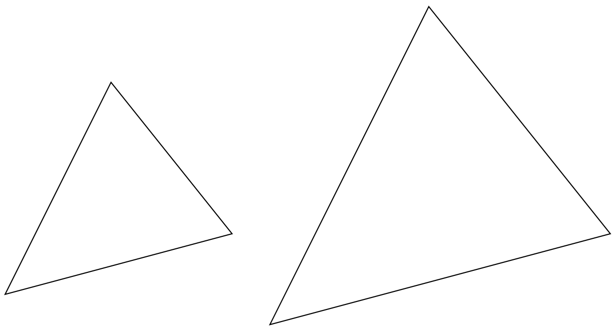
1. Гомотетия H_O^k относительно точки O с коэффициентом $k \in \mathbb{R}$



$M' = H_O^k(M)$ так, что $\begin{cases} M' \in OM \\ \frac{OM'}{OM} = k \end{cases}$

Nota. Если $k < 0$, то точки M и M' будут по разные стороны от точки O

2. Подобие P_k с коэффициентом k – композиция движения и гомотетии $P_k = F \circ H_O^k$ (здесь $(f \circ g)(x) = f(g(x))$)



1.4 Линейные операторы

Def. Линейный оператор $\mathcal{A}$ – отображение $\mathcal{A} : V \to V$ (в общем случае $\mathcal{A} : V \to W$), для которого соблюдаются свойства:

1. $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$

Если для V определен базис $\varepsilon_V = \{e_1, ..., e_n\}$, а для W базис $\varepsilon_W = \{e'_1, ..., e'_m\}$, то действие оператора можно представить так:

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e'_j$$

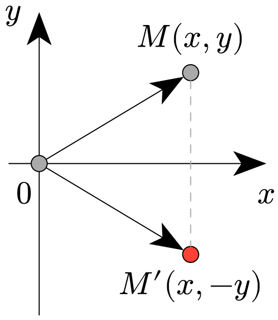
Def. Матрица $A = \{a_{ij}\}_{i=1..n, j=1..m} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V \to W$

Тогда $\mathcal{A}x = y \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

Найдем матрицы геометрических преобразований на $\mathbb{R}^2$

1. Осевая симметрия S_l

   Чаще всего на практике используются S_{Ox} и S_{Oy}



Для S_{Ox} это матрица $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}$

А для Oy это $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix}$

2. Перенос $T_{\vec{a}}$ на вектор

   Перенос точки на вектор выносит ее из линейного пространства, где точки имеют общее начало, поэтому перенос не является линейным оператором: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

3. Поворот

   Активным преобразованием называется поворот плоскости, а пассивным – поворот системы координат. Такие преобразования взаимно обратны

   Тогда поворот системы координат задается матрицей $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

   А поворот плоскости задается обратной матрицей $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

4. Гомотетия

   Для гомотетии H_O^k матрица оператора равна $\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

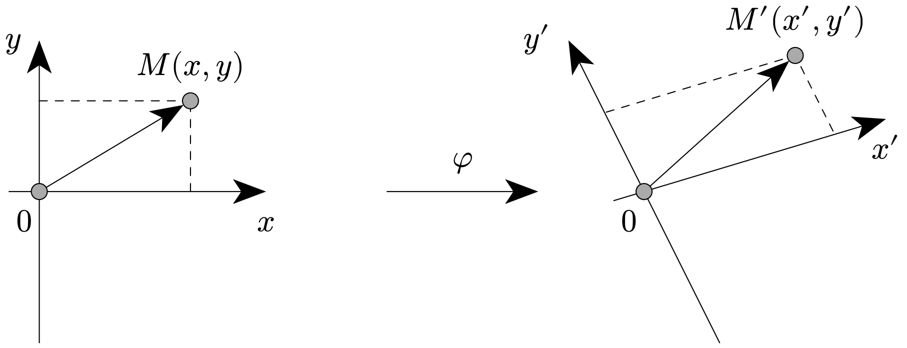
1.5 Аффинное преобразование

Def. 1. Преобразование $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется аффинным преобразованием, если φ – биекция, и для всяких точек на прямой $A, B, C \in l$ справедливо, что $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \in \varphi(l)$ и $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\varphi(A)\varphi(B)}{\varphi(B)\varphi(C)}$

Nota. Аффинное преобразование не сохраняет углы и расстояния, но сохраняет параллельность

Nota. Кроме этого все треугольник аффинно-эквивалентны, то есть один треугольник можно перевести в любой другой с помощью аффинного преобразования

Def. 2. Преобразование φ – аффинное преобразование, если оно переводит одну систему координат в другую систему координат



Мет. Система координат – это определенные точка отсчета, координатная сетка, порядок осей и единичные отрезки

Для дальнейшего нам потребуются уравнения прямых:

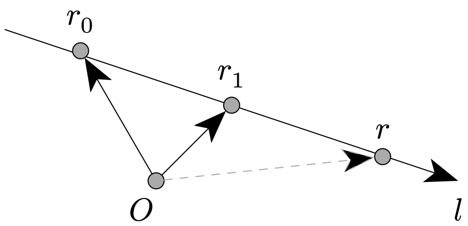
1. По двум точкам на плоскости:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0$$

2. По коэффициентам на плоскости:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$$

3. Векторное: $\vec{r} - \vec{r_0} = \vec{a}t$, где t – параметр



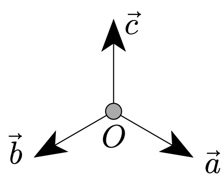
$$\vec{r} - \vec{r_0} = (\vec{r_1} - \vec{r_0})t$$

Также нам понадобятся:

- Уравнения плоскостей в пространстве
- Уравнения кривых второго порядка, специальных кривых (спирали, гипоциклоиды)
- Индикатор ориентации

Мет. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

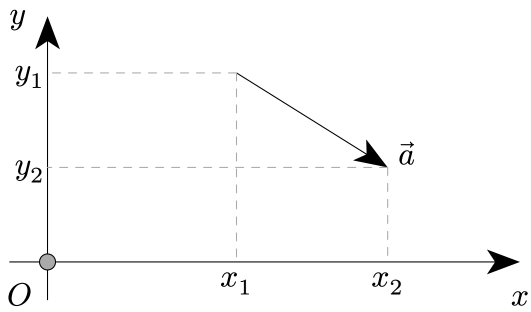
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \vec{c} : \begin{cases} |\vec{c}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\mathrm{\vec{a}}, \mathrm{\vec{b}}}\right) \\ \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \\ \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \ \text{ - правая тройка векторов} \end{cases}$$



Def. Псевдоскалярное (или косое) произведение $\vec{a} \vee \vec{b} \overset{\text{def}}{=} \pm\, |\vec{a}|\, |\vec{b}| \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, причем со знаком плюс, если угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положителен (то есть против часовой), и со знаком минус, если угол отрицателен (то есть по часовой)

1.5 Однородные координаты

Мет. В плоскости $\mathbb{R}^2$ существует линейное пространство направленных отрезков. Проблема состоит в том, что нам нужно представить вектор с другим началом



Тогда такие вектора можно представить двумя точками

Чтобы работать с точками, а не векторами с общим началом O, обобщим понятие линейного пространства. Тогда понятие линейного пространства обобщается до аффинного, где элементы – это точки, а не векторы

Def. Пространство $\mathcal{A}$ – аффинное пространство, ассоциированное с линейным пространством V, если:

1. Заданы аксиомы для V
2. Существует $f : \mathcal{A} \to V$ такое, что для всякой пары сопоставляется вектор из линейного: $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad f(A, B) = \overrightarrow{AB} \in V$
3. Для всяких $A \in \mathcal{A}$ и $\vec{a} \in V$ существует единственная $B \in A \mid \overrightarrow{AB} = \vec{a}$
4. Для всяких точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ справедливо, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

В аффинном пространстве $\mathcal{A}$ можно ввести аффинные преобразования. Те, что не связаны с переносом, можно считать линейными в пространстве V:

1. Осевая симметрия S_l, если $O \in l$
2. Поворот R_O^{φ}
3. Гомотетия H_O^k

Их можно представить в виде матрицы. Но перенос выводит из линейного пространства. Нам нужно все преобразования свести к алгебраическому действию $x' = \mathcal{F}x$, где $\mathcal{F}$ – преобразование с матрицей F

Движение плоскости и гомотетия дают формулу:

$$X' = FX + T_{\vec{a}}$$

Вместо

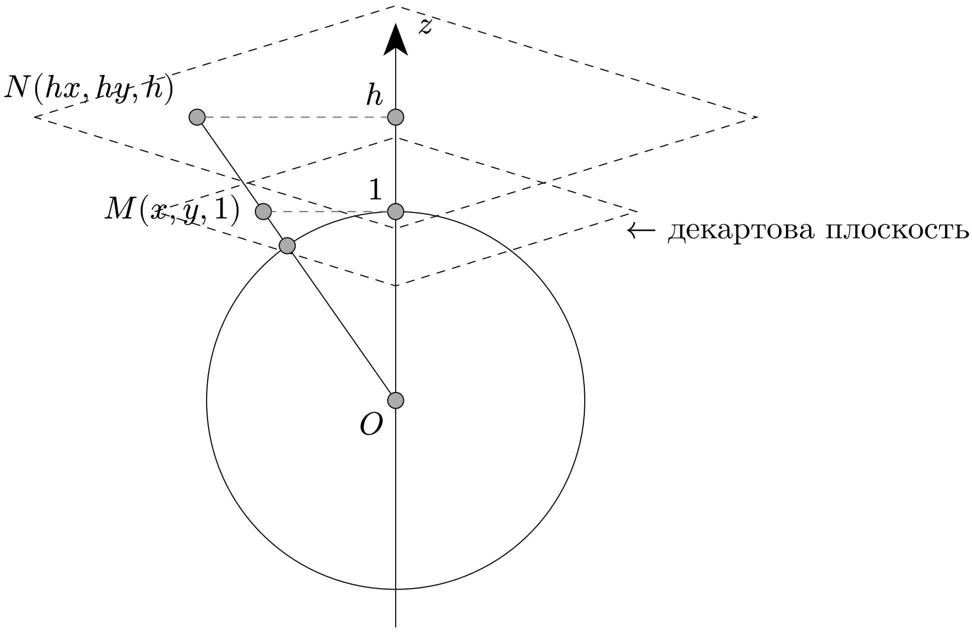
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

рассмотрим векторы с добавленной координатой $z = 1$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:c} f_{11} & f_{12} & x_0 \\ f_{21} & f_{22} & y_0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}x + f_{12}y + x_0 \\ f_{21}x + f_{22}y + y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Координаты $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ называют однородными

Геометрическая интерпретация – стереографическая проекция Римана



Далее происходит центральное проектирование на плоскость $z = h, p(x, y) \to$ $N(hx, hy, h)$

Таким образом, каждой точке декартовой плоскости ставится в соответствии точка сферы, а она центрально проектируется на плоскость $z = h$, где h отвечает за масштаб. В результате точкам декартовой плоскости (x, y) соответствуют точки $(x, y, 1) = (hx, hy, h)$, а однородные координаты $(x, y, 0)$ представляют бесконечно удаленную точку декартовой плоскости в направлении вектора $\vec{a} = (x, y)$

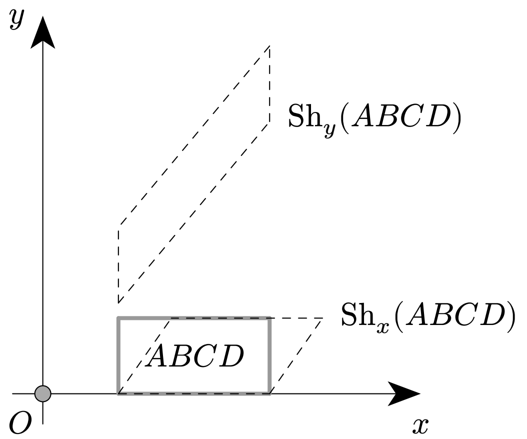
Рассмотрим матрицы преобразований в однородных координатах:

$$F = \left(\begin{array}{cc:c} a & b & m \\ b & d & h \\ \hdashline p & q & s \end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ представляет композицию из симметрии, поворота, гомотетии и сдвига

Def. Сдвиг (shear) Sh_x – наклонной перекос такой, что $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$, а $k = \mathrm{sh}_x$

Аналогично по оси Oy сдвиг $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \mathrm{sh}_y\, x \end{cases}$



Вектор $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ – вектор переноса $T_{(m,n)}$, число s – масштаб

Рассмотрим смысл (p, q):

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline p & q & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ px + qy + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ h \end{pmatrix}$$

При фиксированных p и q выражение $h = px + qy + 1$ задает наклонную плоскость в трехмерном пространстве, что позволяет изменять перспективу. На этом курсе операции, использующие p и q, рассматриваться не будут

Рассмотрим частные виды преобразований:

- Перенос $T_{m,n} = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- Поворот $R_O^{\varphi} = \left(\begin{array}{cc:c} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- Симметрия по оси $S_{Ox} = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- Симметрия по биссектрисе $S_{x=y} = \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- Сдвиг $\mathrm{Sh}_x = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \mathrm{sh}_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Ex. Дан $\triangle\, ABC$ с вершинами в координатах $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти $\triangle\, A'B'C' = \mathcal{F}(\triangle\, ABC)$

Найдем матрицу координат вершин $\triangle ABC$: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Преобразование осуществляется так:

$$\left(\begin{array}{cc:c} a & b & m \\ b & d & h \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$