Содержание

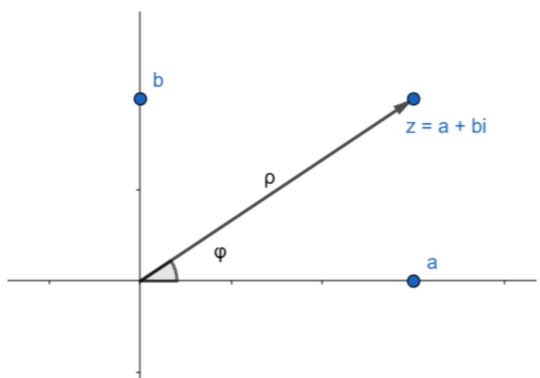
1. Основные понятия

1.1. Комплексное число

Мет. $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
Обозначение: $z = (a, b) = a + bi$, где $i = (0, -1) = \sqrt{-1}$
Основные операции:

1. $\operatorname{Re} z = a$ - вещественная часть, $\operatorname{Im} z = b$ - мнимая часть
2. $z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4. $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ - **формула Муавра**, где $\rho = |z|, \varphi = \arg z$
5. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, где $\rho = |z|, \varphi = \arg z, k \in \mathbb{Z}$
6. При $n = 2$ $\sqrt{z} = \sqrt{a + bi} = \pm(c + di)$, где $c = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, d = \operatorname{sign}(b)\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$

Тригонометрическая форма:
$z = a + bi = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$
$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
По формуле Эйлера $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$



1.2. Комплексная плоскость

Def. Окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ определяется как $U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$
Тогда $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0) = U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ - выколотая окрестность

Def. Для данной множества точек A точка z_0 считается

- внутренней, если для любого δ $U_\delta(z_0) \subset A$
- граничной, если для любого δ $\exists z \in U_\delta(z_0) \big| z \in A$ и $\exists z \in U_\delta(z_0) \big| z \notin A$

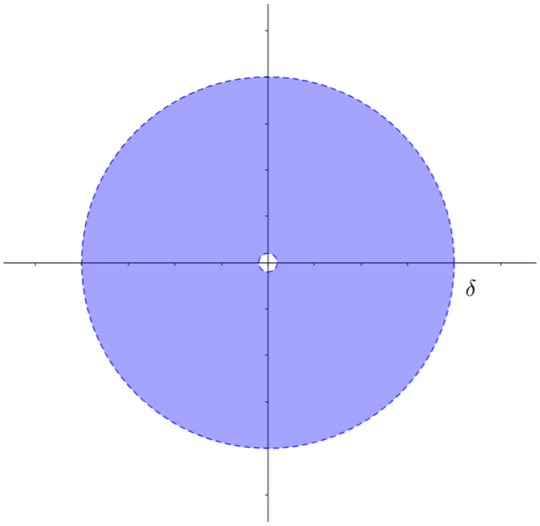
Def. Открытое множество состоит только из внутренних точек
Def. Закрытое множество содержит все свои граничные точки
Def. Границой Γ_D (иногда обозн. δD) для множества D называют множество всех граничных точек D
Def. Если любые две точки множества можно соединить ломаной линией конечной длины, то множество считается связным
Def. Множество $D \subset \mathbb{C}$ называется областью, если D - открытая и связная

Def. Кривая $l \subset \mathbb{C}$ считается непрерывной, если $l = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \varphi(t) + i\psi(t), t \in \mathbb{R}\}$, где $\varphi(t), \psi(t)$ - непрерывные функции

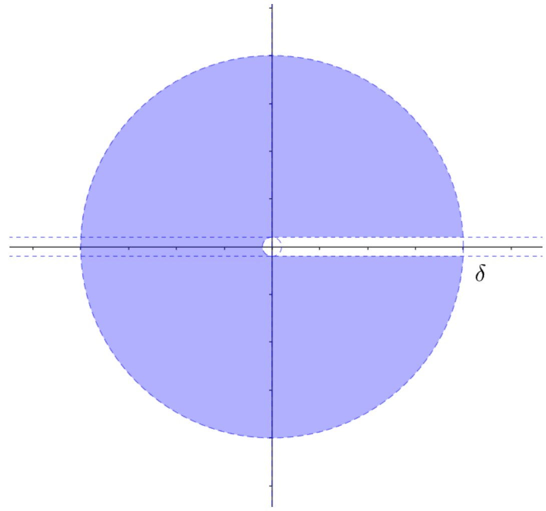
Nota. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и их производные непрерывные, то кривая l гладкая

Def. Непрерывная замкнутая (то есть начальная и конечная точки совпадают) без самопересечений кривая называется контуром

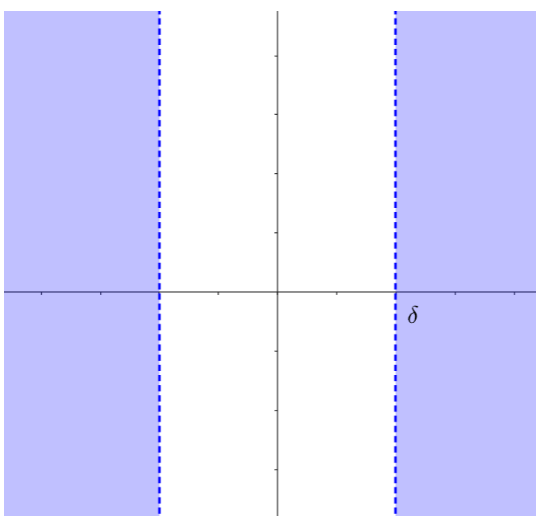
Nota. Односвязную область можно стянуть в точку



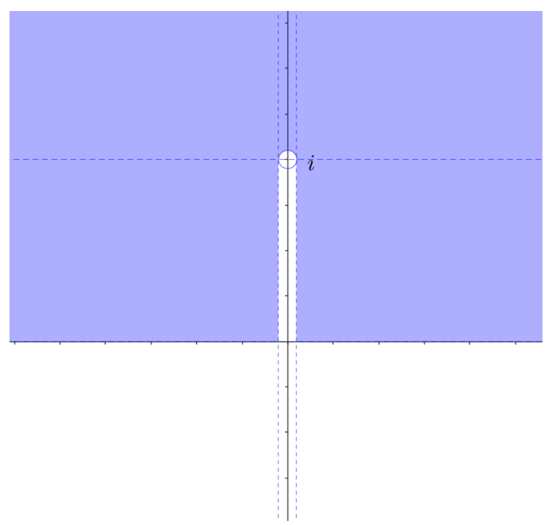
Ex. 1. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < \delta\right\}$ - область связаная, но не односвязная, ее нельзя стянуть из-за дырки



Ex. 2. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < \delta, \arg z \neq 0\right\}$ - область связная и односвязная



Ex. 3. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\operatorname{Re} z| < \delta\right\}$ - несвязная область



Ex. 4. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im} z \geq 0, z \notin [0, i]\right\}$ - здесь под $[0, i]$ подразумевается линейный отрезок на оси

Nota. Дальше все рассматриваемые Γ_D будут состоять из кусочногладких и изолированных кривых

1.3. Предел

Мет. Последовательность $\{z_n\} = z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$

Def. Пределом $\{z_n\}$ называют число z такое, что
$\forall \varepsilon > 0 \ \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 = \mathbb{N}} \ \Big| \ \forall n > n_0 \ |z_n - z| < \varepsilon$
Обозначается $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$

Nota. $\{z_n\}$ можно представить как $x_n + iy_n$, то есть двумя $\mathbb{R}$-последовательностями

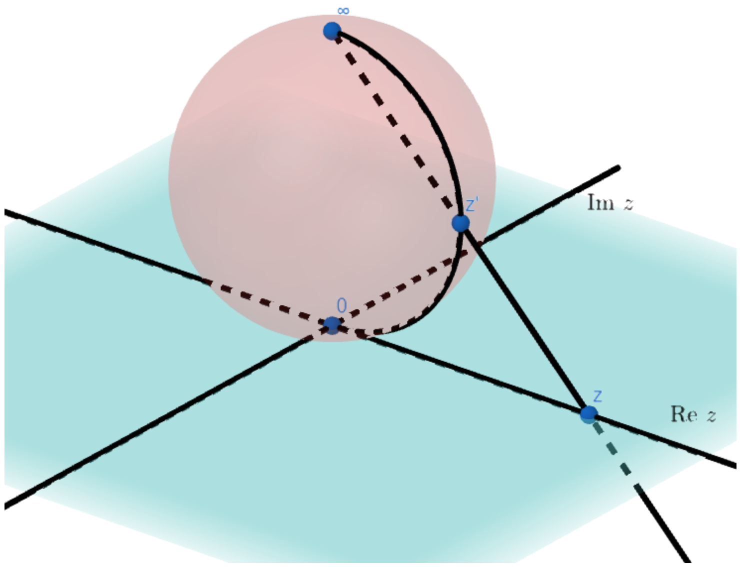
Th. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \underset{x,y\in\mathbb{R}}{x + iy} \Longleftrightarrow \begin{matrix} \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = x \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = y \end{matrix}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = \max(n_{0x}, n_{0y})}{n_0 \in \mathbb{N}} \ \Big| \ \forall n > n_0 \ \begin{matrix} |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$
$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$
То есть $\forall \varepsilon > 0 \dots |z_n - z| < \varepsilon$
$\boxed{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ |z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} |x_n - x| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \\ |y_n - y| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow$
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$

Nota. Для комплексных чисел работают теоремы для пределов (сумма пределов, произведение пределов и т.д.), критерий Коши и другие

Def. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \ \Big| \ n > n_0 \ |z| > \varepsilon$
Def. Точка z, определенная как предел, равный ∞, называется бесконечно удаленной. Но существует множество последовательностей, чьи пределы удаляются на бесконечность разными путями на плоскости

Def. Стереографическая проекция (сфера Римана)



Поместим сферу на комплексную плоскость и сделаем биекцию точек плоскости на точки сферы: проведем из верхней точки сферы лучи вниз на плоскость, и точка, где луч пересекает сфера, будет считаться отображением для данной точки. Заметим, что в этом случае бесконечно удаленные точки будут отображаться в верхнюю точку сферы

Def. $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ - расширенная комплексная плоскость

Однако $z + \infty$ не определена, $\infty + \infty$ не определена. Но $\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n}$ при $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; $\infty = \infty \cdot \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ при $z_n \longrightarrow z$

Записью $[-\infty; +\infty]$ обозначается ось $\overline{\mathbb{R}}$;

$[-i\infty; +i\infty]$ - мнимая расширенная ось

Путь $x \pm i\infty$ при фикс. x - вертикальная прямая;

$iy \pm \infty$ - горизонтальная прямая;

$e^{i\varphi} \cdot \infty$ - прямая, проходящая через начало координат

2. Комплексная функция

2.1. Определение

Мет. $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ отображение такое, что $\forall x \in E\ \exists! y \in D \mid y = f(x)$

Def. $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ отображение такое, что $\forall z \in D\ \exists w \in G \mid f(z) = w$

Def. Если $\forall z \in D\ \exists! w \in G$, то f называется однозначной функцией

Def. Если $\forall z_1, z_2 \in D (z_1 \neq z_2) \Longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, то f называется однолистной функцией

Ex. 1. $w = \sqrt{z}$ - неоднозначная функция
$\exists z = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$
$\sqrt{z} = \sqrt{1}\left(\cos\dfrac{2\pi k}{2} + i\sin\dfrac{2\pi k}{2}\right)$
$w_1 = 1, \quad w_2 = -1$

Ex. 2. $w = z^2$ - неоднолистная функция
$z_1 = 1, z_2 = -1 \qquad w(z_1) = w(z_2) = 1$

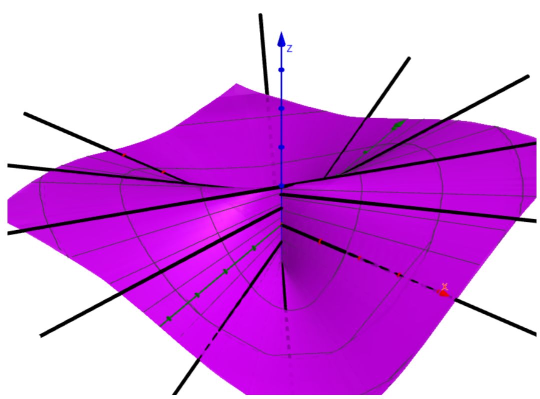
Nota. Если $f(z)$ однозначна и однолистна, то $f(z)$ - взаимно однозначное соответствие (биекция). Тогда $\exists g(x) \mid g(f(x)) = x$
Комплексную функцию $f(z)$ можно представить как $u(x, y) + iv(x, y)$, где $x + iy = z$

Ex. $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$
$u(x, y) = (x^2 - y^2), \qquad v(x, y) = 2xy$

2.2. Предел функции

Def. $L \in \mathbb{C}, f : D \longrightarrow G, \quad L \overset{def}{=} \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{\delta = \delta(\varepsilon)}{\delta > 0} \ \Big| \ z \in D, z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0) \ f(x) \in U_\varepsilon(L)$
В определении существование и значение L не должно зависеть от пути, по которому z приближается к точке сгущения z_0. Может быть так, что для любого направления стремления предел есть, но в общем смысле не существует

Ex. $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}\right) \qquad \exists z = \rho e^{i\varphi}$
$f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}} - \dfrac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right) = \dfrac{1}{2i}(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi - \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = \sin 2\varphi$
Зафиксируем $\varphi = \varphi^* \in [0; 2\pi)$, тогда $\sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$
$\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \lim\limits_{\substack{\rho \to 0 \\ \varphi = \varphi^*}} f(z) = \lim\limits_{\substack{\rho \to 0 \\ \varphi = \varphi^*}} \sin 2\varphi = \sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$
Значения предела занимает отрезок $[-1; 1] \Longrightarrow \nexists \lim\limits_{z \to 0} f(z)$
На рисунке изображена $\sin 2\varphi$, на оси Oz изображена $\operatorname{Re} w$. Черные линии - это возможные пути приближения z к 0



Nota. Путь следования предела аналогичен левостороннему и правостороннему пределами $\mathbb{R}$-функций

Def. Непрерывность функций в точке z_0.

$f: D \longrightarrow G, z_0 \in D$, $f(z)$ называется непрерывной в z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

На языке приращений: $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \underset{\Delta z \to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y \to 0 \Longrightarrow \begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases} \Longrightarrow \Delta\rho \to 0$$

2.3. Элементарные комплексные функции

Ex. 1. Линейная $f(z) = az + b, \qquad a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$

Эта функция однозначная, однолистная $\Longrightarrow \exists f^{-1}(z) = g(z) = \dfrac{z-b}{a}$

Геометрический смысл:

$a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$

$az = |a||z|(\cos(\varphi_a + \varphi_z) + i\sin(\varphi_a + \varphi_z))$ - поворот и растяжение ($\varphi_a = \arg a$, $\varphi_z = \arg z$)

$az + b = (x_{az} + x_b) + i(y_{az} + y_b)$ - сдвиг

То есть линейная функция - композиция из поворота, растяжения и сдвига

Ex. 2. Степенная $w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$ - однозначная, может быть неоднолистной

Для $n \in \mathbb{Q}$ функция становится неоднозначной

Ex. $w = z^2 \qquad z = \rho e^{i\varphi}, w = \rho^2 e^{2i\varphi}$

Пусть $z_1 \neq z_2$ и $w(z_1) = w(z_2)$, тогда $\arg z_1 = \arg z_2 \pm \pi$

$w(z_1) = \rho^2 e^{2i\arg z_1} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + 2\pi k)}$

$w(z_2) = \rho^2 e^{2i\arg z_2} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + \pi)} = \rho^2 e^{i(2\arg z_1 + 2\pi)} = w(z_1)$

Область однолистности z^2 - множество точек, для которых $\arg z \in [0; \pi)$

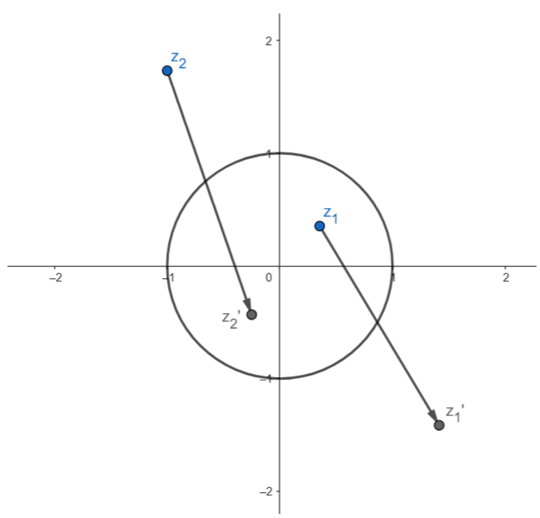
Точку $w = 0$ называют точкой разветвления

Ex. $w = z^{-1} = \dfrac{1}{z} \qquad w(0) = \infty, w(\infty) = 0$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - функция обратима

$w = re^{i\psi} = \dfrac{1}{\rho e^{i\phi}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \Longrightarrow |w| = \dfrac{1}{|z|}, \arg w = -\arg z$

Преобразование $|w| = \dfrac{1}{|z|}$ называется инверсией, а $\arg w = -\arg z$ дает симметрию относительно $\operatorname{Re} z$



Ex. 3. Рациональная $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \qquad n, m \in \mathbb{N}$

Ex. 4. Показательная $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Свойства:

1. $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
2. $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$

3. $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ - показательная функция периодична с периодом $2\pi i$

Ex. 5. Логарифмическая $w = \operatorname{Ln} z$

Если $e^w = e^{u+vi} = e^u(\cos v + i \sin v) = z = |z|e^{i \arg z}$, то $u = \ln|z|$, $v = \arg z + 2\pi k$

Тогда $\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)}$

$\ln z = \operatorname{Ln} z$ при $k = 0$ - т. н. главное значение

Заметим, что $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ - многолистная функция, а $w = \operatorname{Ln} z = \ln \rho + i(\arg z + 2\pi k)$ - многозначная

Ex. 6. Тригонометрические и гиперболические

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Nota. Рассмотрим уравнение $\sin z = A \in \mathbb{C}$

$\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = A \Longrightarrow e^{2iz} - 2iAe^{iz} - 1 = 0$

При $t = e^{iz}$ получаем квадратное уравнение, у которого в $\mathbb{C}$ всегда будет два корня. Это значит, что в $\mathbb{C}$ sin и cos принимают любые значения (то есть $|\sin z| > 1$)

2.4. Дифференцирование ФКП

Def. $w = f(z), w : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z_0 \in D$. **Производная** функции $w(z_0)$ - это предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$, если он существует и не зависит от пути $z \to z_0$

Mem. Дифференцирование $y = f(x)$:

В $\Phi_1\Pi$: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \underset{A \in \mathbb{R}}{=} A\Delta x + o(\Delta x)$

В $\Phi_2\Pi$: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)$

Def. $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0, если $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$

Def. Дифференцируемая в точке z_0 функция $w = f(z)$, производная $f'(z_0)$ которой непрерывна в z_0, называется аналитической (или аналитичной) функцией в z_0

Th. Критерий аналитичности (или Условие Коши-Римана)

$$f(x) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ аналитична в точке } z_0 = x + iy$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ непрерывны в } z \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Причем, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

$\boxed{\Longrightarrow}$ f аналитическая в $z \Longleftrightarrow \exists$ непрерывная $f'(z) =$
$= \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} =$ [предел не зависит от пути] $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - v(x,y)}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right) =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i\frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x$
Аналогично при $i\Delta y \to 0$ получаем $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{i\Delta y} =$
$= \lim\limits_{\Delta y \to 0} \left(\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} \right) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta y} - i \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = v_y - iu_y$
Итак, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y + iu_y$

Отсюда $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\exists$ непрерывные $u_x, u_y, v_x, v_y \Longleftrightarrow u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в (x,y), тогда
$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha_1(x, y, \Delta x, \Delta y) + \alpha_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$

$\alpha_1 = o(\Delta\rho), \quad \Delta\rho = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta_y + \beta_1 + \beta_2$

$\Delta f = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - (u(x,y) + iv(x,y)) = u_x\Delta x + u_y \Delta y + \alpha + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y + \beta)$
$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u_x \Delta x + u_y \Delta y + iv_x \Delta x + iv_y \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{u_x(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{v_x(i\Delta x - \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = u_x +$
$v_x i + \frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y}$
Тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = u_x + iv_x + \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = u_x + iv_x \Longleftrightarrow f' = u_x + iv_y$, существует и непрерывна в (x,y)

Nota. Используя Условие Коши-Римана, получим равенство $u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$
Nota. Коши-Риман в ПСК:

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$

Тогда $f'(z) = \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} - i\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = \dfrac{\rho}{z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + i\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\right)$

$u_\rho = u_x \dfrac{\partial x}{\partial \rho} + u_y \dfrac{\partial y}{\partial \rho} = u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi$

$v_\varphi = v_x \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + v_y \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = -\rho v_x \sin\varphi + \rho v_y \cos\varphi = \rho u_y \sin\varphi + \rho u_x \cos\varphi = \rho u_\rho$

Lab. $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \rho}$

Свойства аналитических функций

Пусть f, g - аналитические функции, тогда:

1° Линейность: $af + bg$ - аналитическая

2° Композиция: $f(g(z))$ - аналитическая

3° Произведение: $f \cdot g$ - аналитическая

Nota. Доказательства свойств элементарные, все сводится к сведению к u и v

Ex. $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2} = u(x,y) + iv(x,y)$

$u_x = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$v_y = \dfrac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = u_x$

$u_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$v_x = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u_y$

Таким образом, $\dfrac{1}{z}$ - аналитическая функция

Ex. $w = \overline{z} = x - iy$

$u_x = 1$, $v_y = -1 \neq u_x$ - не аналитическая функция

4° $f(z)$ аналитична в D $(f: D \longrightarrow D')$, $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in D$. Тогда $\exists g(w) = f'(z)$ $(g: D' \longrightarrow D)$ и $\forall z_0 \in D$ $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$, где $w_0 = w(z)$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Заметим, что $f'(z) \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J \neq 0$

Действительно, если якобиан равен 0, то $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0.$

Аналогично $\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

Значит, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ – противоречие

Если $J \neq 0$, то преобразование $f(z)$ приводит (x, y) в (u, v) взаимно однозначно. Тогда $\exists!$ решение $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$, то есть взаимно однозначно определены $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$

Обозначим $g(w) = x(u, v) + iy(u, v)$

Найдем $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$. Рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta z}{\Delta w} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{\Delta w \to 0} \lim\limits_{\substack{\Delta w \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \dfrac{\Delta z}{\Delta w} = \lim\limits_{\substack{\Delta w \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \dfrac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \dfrac{1}{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \dfrac{1}{f'_z(z_0)} \Longrightarrow \lim\limits_{\Delta w \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta w} = g'_w(w_0) = \dfrac{1}{f'_z(z_0)}$ или $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$

5° $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D. Тогда $u(x, y), v(x, y)$ – гармонические функции в D

Функция считается гармонической, если $\Delta u = 0$ (здесь $\Delta = \nabla^2$ – лапласиан) $\Longleftrightarrow$ $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Lab.

6° Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D и известна $u(x, y)$ или $v(x, y)$, то $f(z)$ определяется однозначно с точностью до const

Пусть известна $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. Нужно найти $v(x, y)$. По условию Коши-Римана $\int u(x, y), \int v(x, y)$ не зависят от пути (Lab. доказать, что $\int_{AB} dv$ не зависит от пути)

$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x dx + v_y dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y) dx + u_x dy$

Интеграл будет найден с точностью до const $= C(x_0, y_0)$

2.5. Конформные отображения

Найдем геометрический смысл производной. Рассмотрим отображение $w = f(z)$ ($w : D \longrightarrow G$) – дифференцируема в точке $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$

Аргумент: В области D рассмотрим гладкую кривую $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$. Образ $\gamma(t)$ – кривая $\sigma(t)$ в G

$\gamma(t)$ в окрестности некоторой точки z_0 гладкая, $\exists$ касательная с углом $\theta = \arg \gamma'(t)$

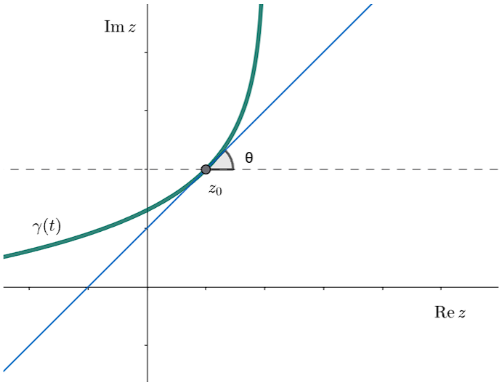
$\sigma(t)$ в окрестности $w_0 = w(z_0)$ гладкая, $\exists$ касательная с углом $\theta' = \arg\sigma'(t)$

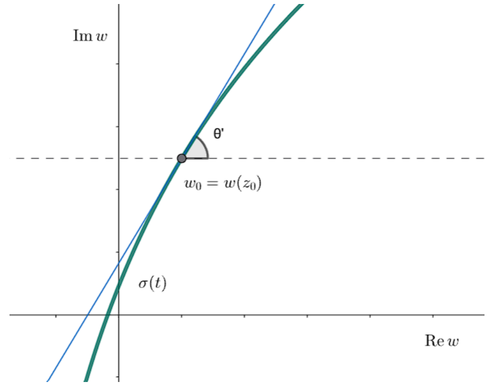
А $\sigma'(t_0) = w'(t_0) == f'(z_0) \cdot \underbrace{\gamma'(t_0)}_{z'(t_0)}$

$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg\gamma'(t_0)$

$\theta' = \arg f'(z_0) + \theta$

$\theta' - \theta = \arg f'(z_0)$ – поворот кривой $\gamma(t)$ вокруг z_0 на угол $\arg f'(z_0)$ при отображении $w = f(z)$





Модуль: $w = f(z)$ – дифференцируема $\iff \Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$

Рассмотрим $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| = |f'(z_0)| \Longrightarrow |\Delta w| = |f'(z_0)| \cdot |\Delta z| + o(|\Delta z|)$

Рассмотрим малый контур $|\Delta z| = |z - z_0| = \rho$. Тогда $|\Delta w| = |w(z) - w(z_0)| = |f'(z)|\rho + o(\rho)$

Таким образом $w(z)$ растягивает круг $|z - z_0| = \rho$ в $|f'(z_0)|$ раз с точностью до малых высших порядков

Итак, $w = f(z)$ в точке z_0 поворачивает точку у окрестности на угол $\alpha = \arg f'(z_0)$ и растягивает отрезки $[z_0, z]$ в $k = |f'(z_0)|$ раз

Def. Конформное отображение – отображение $w(z)$, сохраняющее углы (между образами и прообразами) и постоянство растяжений

Th. Условия конформности: $\begin{cases} \text{дифференцируемость} \\ \text{однолистность} \\ f'(z) \neq 0 \text{ в } D \end{cases} \iff$ конформно

Ex. $w = az + b$

Мет. Геометрический смысл линейного отображения: b - перенос $z = 0$ в точку $z = b$; $a = |a|e^{i\varphi}$, тогда $|a|$ - коэффициент растяжения, φ - угол поворота

Заметим, $w' = (az + b)' = a$, тогда $k = |w'(z_0)| = |a|$, $\varphi = \arg w'(z_0) = \arg a$

Lab. Проверить, что $w = z^2$ не конформное отображение, найдя $w'(z_0)$

3. Интеграл по комплексной переменной

3.1. Определения

В $\mathbb{C}$ задана кусочно-гладкая кривая K (с концами в точках M и N) параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) & t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ y = \psi(t) & \varphi, \psi - \mathbb{R}\text{-функции} \end{cases}$$

Тогда $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ - задание K в $\mathbb{C}$. Введем отображение $w = f(z)$, действующее на K
Определим интегральные суммы:

1. дробление отрезка MN на частичные дуги: $M = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = N$
   Тогда $\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = \beta$
2. Выбор средных точек в отрезках кривой $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$
3. Сопоставим интегральную сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i$
4. Интегралом от $w = f(z)$ по кривой K называется $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max\Delta z_i\to 0}} = \int_K f(z)dz$, если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения, выбора средних точек и т. д.

При этом интеграл можно представить как $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)(\Delta x_i + i\Delta y_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u(\xi_i, \eta_i) + iv(\xi_i, \eta_i))(\Delta x_i + i\Delta y_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i\Delta x_i - v_i\Delta y_i) + i \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i\Delta y_i + v_i\Delta x_i) = \int_K udx - vdy + i\int_K udy + vdx$

Nota. Мы свели $\mathbb{C}$-интеграл к двум криволинейным $\mathbb{R}$-интегралам, все свойства интегралов сохраняются

Ex. $\int_{\gamma=[0;1+i]} \overline{z}dz = \int_\gamma (x - iy)(dx + idy) = \int_\gamma xdx + ydy + i\int_\gamma xdy - ydx = 2\int_0^1 xdx = 1$
Свойства комплексного интеграла:

1° Линейность
2° Аддитивность
3° Смена знака: $\int_{K^+} = -\int_{K^-}$
4° Оценка, модуль: $\left|\int_K\right| \leq \int_K |f(z)|dz$
5° $\int_K f(z)dz \overset{z=g(w)}{=} \int_C f(g(w))g'(w)dw = [\text{В частности переход к параметру } t] = \int_{C(t)} f(t)g'(t)dt$

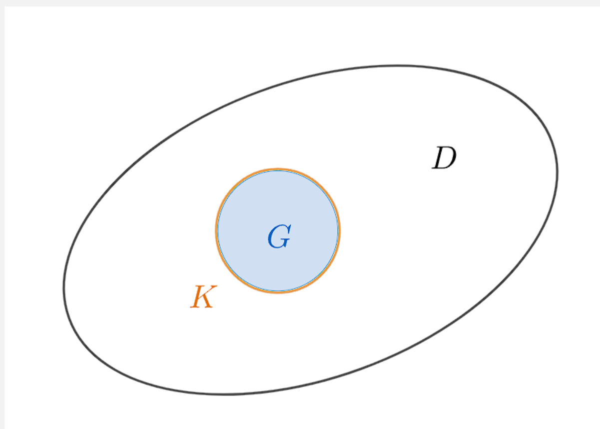
Ex. $I = \int_{K:|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z-z_0} \overset{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=} \int_K \frac{d\rho e^{i\varphi}}{\rho e^i\varphi} = \int_K \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^i\varphi} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$

Интеграл I не зависит от радиуса и центра окружности (то есть контура интегрирования), то есть интеграл функции $\frac{1}{z-z_0}$ будет равен $2\pi i$ для любой окружности в качестве контура

3.2. Теорема Коши

Th. 1. $f(z)$ аналитическая и однозначная в односвязной области D

Если $f(z)$ непрерывна на Γ_D, то $\oint_{\Gamma_D} f(z)dz = 0$



Запишем интеграл по контуру $K \subset D$ (K - кусочно гладкая):

$\int_K f(z)dz = \int_K udx - vdy + i\int_K udy + vdx = I_1 + I_2 i$

$$I_1 = \int_K \underbrace{P(x,y)}\underbrace{u(x,y)}dx - \underbrace{Q(x,y)}\underbrace{v(x,y)}dy = \begin{bmatrix} f(z) \text{ - аналитическая} \Longrightarrow \\ u_x, u_y, v_x, v_y \text{ существуют} \\ \text{и непрерывны} \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}_{\text{Формула Грина}} = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Аналогично $I_2 = \int_k udy + vdx = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy = 0$

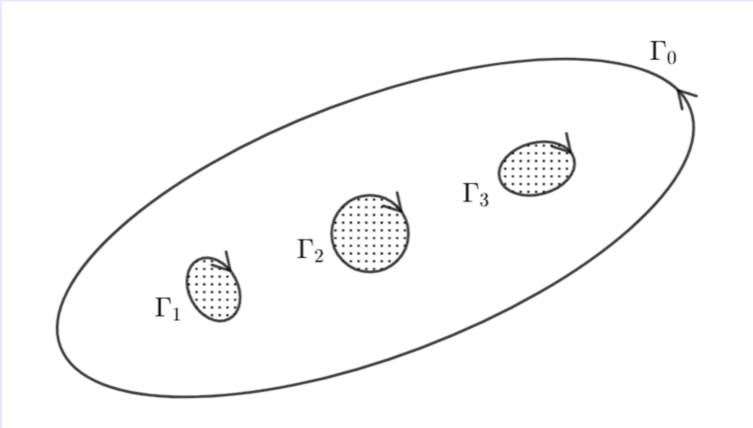
Таким образом, $\oint_{K\subset D} f(z)dz = 0$ - формула Коши

Так как $f(z)$ непрерывна на Γ_D, то можно взять $K = \Gamma_D$

Nota. Получим, что интеграл по любому замкнутому Γ_D контуру в области аналитичности равен нулю

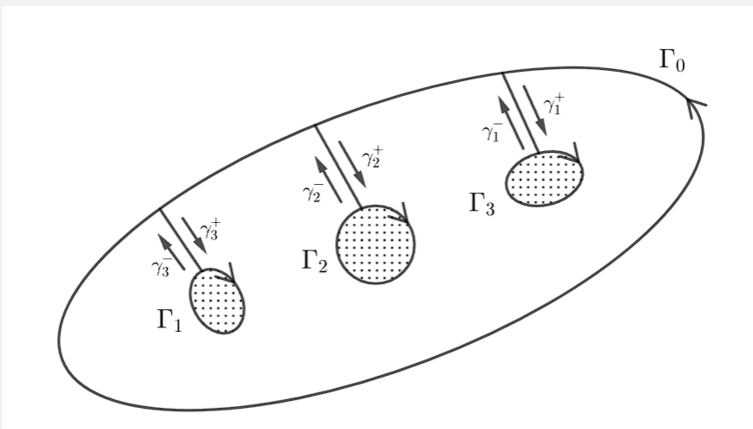
То есть $\int_{AB} f(z)dz$ в условиях **Th. 1.** не зависит от пути, и его можно решать как $\int_{AB} = \int_A^B$

Nota. Обобщим **Th. 1.** на многосвязную область. Выколотые области тоже имеют границы, которые включены в границу всей области

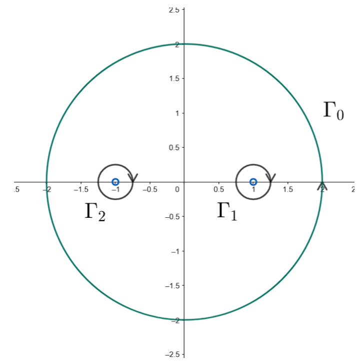


Th. 2. Дана многосвязная область D, $f(z)$ - аналитична в D и непрерывна на Γ_D
Граница $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$, где положительным обходом области считается тот, при котором область обхода слева
Тогда $\displaystyle\int_{\Gamma_D^+} f(z)dz = 0$ или $\displaystyle\int_{\Gamma_0 \circlearrowleft} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i \circlearrowleft} f(z)dz$

Сделаем разрезы как на картинке. Разрезы превратили область D в односвязную с границей $\Gamma' = \Gamma_0 \cup (\gamma_1^+ \cup \gamma_1^- \cup \Gamma_1) \cup \dots = \Gamma_0 \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\gamma_i^+ \cup \gamma_i^- \cup \Gamma_i)$



По **Th. 1.** $\displaystyle\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0 \Longleftrightarrow \int_{\Gamma_D} f(z)dz + \int_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \dots = 0$
Но $\displaystyle\int_{\gamma_1^+} = -\int_{\gamma_1^-}$, поэтому $\displaystyle\int_{\Gamma_D^+} = \sum \int_{\Gamma_i^-}$ или $\displaystyle\int_{\Gamma_0 \circlearrowleft} = \sum \int_{\Gamma_i \circlearrowleft}$



Ex. $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)dz$

По **Th. 2.** $\displaystyle\int_{\Gamma_0\circlearrowleft} f(z)dz + \int_{\Gamma_1\circlearrowright} f(z)dz + \int_{\Gamma_2\circlearrowright} f(z)dz = 0$

Тогда $\displaystyle\int_{|z|=2\circlearrowleft} f(z)dz = \int_{|z-1|=\rho_1\circlearrowleft} f(z)dz + \int_{|z+1|=\rho_2\circlearrowleft} f(z)dz$, где $\rho_1,\ \rho_2$ - радиусы бесконечно малой длины

3.3. Неопределенный интеграл

Мет. По теореме Барроу $\Phi(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом

Тогда $\Phi(x)$ - дифференцируема, и $\Phi'(x) = f(x)$, то есть $\Phi(x)$ - первообразная $f(x)$

Th. $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и $\forall\Gamma \subset D\ \displaystyle\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

Тогда при фиксированном $z_0 \in D$ $\Phi(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ аналитична в D и $\Phi'(z) = f(z)$

Если $\forall\Gamma\ \displaystyle\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$, то $\Phi(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} F(\zeta)d\zeta$ - интеграл, не зависящий от пути, а только от z_0 и z

Рассмотрим $\dfrac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \dfrac{1}{\Delta z}\left(\displaystyle\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right) = \dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta =$
$\dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z) + f(z))d\zeta = \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta + \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta =$

$\zeta\Big|_z^{z+\Delta z}$

$\Delta z f(z) + \dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta$

$\left|\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta\right| \le \int_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)|d\zeta \le \max_{[z,z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)|\Delta z$

Так как $f(z)$ непрерывна в D и $z, \zeta \in D$, то $\lim\limits_{\zeta\to z} f(\zeta) = f(z) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta\ |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta\ \max|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

То есть $\left|\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta\right| \le \varepsilon\Delta z$

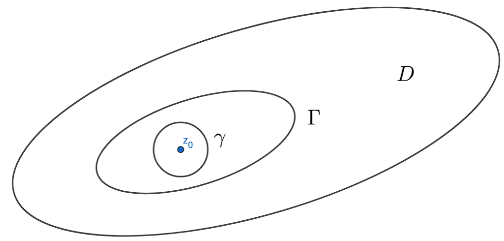
Или $\dfrac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} \le f(z) + \varepsilon$, то есть $\left|\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon$, или $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z)$

Def. $\Phi(z)=\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ называют первообразной для $f(z)$

Следствие - формула Ньютона-Лейбница: $\boxed{\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta=\Phi(z_2)-\Phi(z_1)}$

3.4. Интеграл Коши

Nota. Установим связь между значениями $f(z)$ во внутренних точках области и на ее границе
$f(z)$ аналитична в односвязной области D, $z_0\in D$. Окружаем z_0 контуром $\Gamma\in D$ и меньшим контуром $\gamma:|z-z_0|=\rho$
В кольце между γ и Γ рассмотрим функцию $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ (в кольце $\varphi(z)$ аналитична)



По **Th. 2.** для $\varphi(z)$ в многосвязной области $\displaystyle\int_{\Gamma\circlearrowleft}\varphi(\zeta)d\zeta=\int_{\gamma\circlearrowleft}\varphi(\zeta)d\zeta$ - не зависит от пути

То есть выбор окружности в качестве γ не важен:

$$\int_{\gamma\circlearrowleft}\varphi(\zeta)d\zeta\overset{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=}\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)\rho i e^{i\varphi}d\varphi}{\rho e^{i\varphi}}=i\int_0^{2\pi}f(\zeta)d\varphi=\underbrace{i\int_0^{2\pi}(f(\zeta)-f(z_0))d\zeta}_{\text{стягиваем }\gamma\text{ в точку }z_0,\int\to 0}+i\int_0^{2\pi}f(z_0)d\zeta=$$

$$if(z_0)\cdot 2\pi$$

Тогда $\displaystyle\int_\Gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_\gamma\varphi(\zeta)d\zeta=2\pi i f(z_0)$

Nota. Доказали теорему: в области аналитичности $\forall z_0\in D$ $\displaystyle\int_{\Gamma_D}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$

Ex. $\displaystyle\int_{|z|=2\circlearrowleft}\frac{f(z)}{(z-1)(z+1)}dz=\int_{|z-1|=\rho_1\circlearrowleft}\frac{\frac{f(z)}{z+1}}{z-1}dz+\int_{|z+1|=\rho_2\circlearrowleft}\frac{\frac{f(z)}{z-1}}{z+1}dz=2\pi i\left(\frac{f(1)}{2}+\frac{f(-1)}{-2}\right)$

4. Ряды

4.1. Числовой ряд в комплексной плоскости

Def. 1. $z_1+z_2+\dots+z_n+\dots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z_n$, где $z_n\in\mathbb{C}$ - числовой ряд

Def. 2. Сумма ряда - $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k$

Если сумма существует и конечна, то ряд называют сходящимся.

Def. $f(z)$ называется регулярной в точке z_0, если $f(z_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Для комплексных числовых рядов остаются справедливыми:

1. Необходимое условие сходимости
2. Признак Даламбера
3. Радикальный признак Коши
4. Критерий Коши
5. Абсолютная сходимость

4.2. Функциональный ряд в комплексной плоскости

Def. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, где $u_n(z):\ D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ - функциональный ряд

Th. Признак Вейерштрасса.
$\exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n,\ \alpha_n \in \mathbb{R}_0^+,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R},\ |u_n(z)| \le \alpha_n\ \forall z \in D \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Lab. Сверить формулировку и доказательства для $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$-случая

Nota. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывна

Th. $u_n(z)$ непрерывна в D и $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Тогда $\int_K f(\zeta)d\zeta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_K u_n(\zeta)d\zeta$, где $K \subset D$ - кусочно гладкая кривая

Докажем, что $\left|\int_K f(\zeta)d\zeta - \sum\limits_{k=1}^{n} \int_K u_k(\zeta)d\zeta\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\left|\int_K \left(f(\zeta) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(\zeta)\right) d\zeta\right| = \left|\int_K \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\zeta) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(\zeta)\right) d\zeta\right| = \left|\int_K \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(\zeta)d\zeta\right| = \left|\int_K r_n(\zeta)d\zeta\right| \le$
$\int_K |r_n(\zeta)||d\zeta| \underset{\text{по кр. Коши}}{\le \varepsilon}$

4.3. Степенной ряд

Def. Степенной ряд - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \left(a=0: \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)$, $c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Область сходимости - круг с центром a, $|z-a| \leq R$ - радиус сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z-a| < 1 \Longrightarrow |z-a| < \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Nota. Также справедлива теорема Абеля

Th. Абеля.

Если степенной ряд сходится в точке z_1, то он сходится абсолютно и равномерно в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| > |z-z_2|$

Если степенной ряд расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| < |z-z_2|$

Следствие: Если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, то $f(z)$ - непрерывна в круге сходимости ряда

Th. Почленное дифференцирование суммы ряда.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ - сходящийся в круге радиуса $R \neq 0$. Тогда $f(z)$ дифференцируема и $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$

Рассмотрим ряд (и его сумму) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ - он сходится в круге радиуса ρ таком, что $0 \leq |z| \leq \rho < R$ (см. сходимость по Даламберу) (Обозначим круг $K_1 : |z| = \rho$)

Докажем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1} = S(z) = f'(z)$

В круге K_1 выберем кривую γ, соединяющую $z_0 = 0$ и z

Рассмотрим $\int_\gamma \zeta^k d\zeta$, функция ζ^k аналитическая, тогда $\int_\gamma \zeta^k d\zeta$ не зависит от пути

$$\int_\gamma \zeta^k d\zeta = \int_0^z \zeta^k d\zeta = \frac{\zeta^{k+1}}{k+1}\Big|_0^z = \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

Тогда $\int_0^z nc_n\zeta^{n-1}d\zeta = \frac{nc_n\zeta^n}{n}\Big|_0^z = c_n z^n$

Возьмем интеграл от суммы $\int_0^z S(\zeta)d\zeta = \int_0^z \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n\zeta^{n-1}\right)d\zeta = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^z nc_n\zeta^{n-1}d\zeta =$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$

Таким образом, $f(z)$ является первообразной для $S(z)$, то есть $S(z) = f'(z)$

При этом $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1} = \sum\limits_{m}^{\infty} c_m z^m$ - этот ряд можно дифференцировать дальше, и область, в которой функция дифференцируется, - круг K_1, где ρ вплотную подходит к R

Таким образом, доказали, что если $f(z)$ регулярна $\forall z$ в круге $|z| < R$, то $f(z)$ сколько угодно раз дифференцируема в этом круге и $f'(z) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)'$

Следствие: $f'(z) = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots)'$ или $f'(z) = (c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots)' \Longrightarrow c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = \dfrac{f''(z)}{2!}$ и так далее

Получили ряд Тейлора $f(z) \underset{|z-a|<\rho}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

Th. $f(z)$ аналитическая в области $D \Longrightarrow f(z)$ регулярна в области D

По формуле Коши $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ \forall z \in K$, где $K = \{z \mid |z-a|, \rho\}$, $\gamma_\rho = \{\zeta \mid |\zeta - a| = \rho\}$ и $K \subset D$

Разложим в ряд $\dfrac{1}{\zeta - z}$:

$\dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{\zeta - (z-a) - a} = \dfrac{1}{\zeta - a} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \dfrac{1}{\zeta - a} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$, где $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$

То есть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся

Тогда $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся

$\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \dfrac{1}{2\pi i} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta (z-a)^n$

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$ - едиственное разложение по Тейлору

Итак $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$