Лекция 11

Сходимость случайных величин

Рассмотрим 3 вида сходимости:

- Сходимость «почти наверное»

  Def. Случайная величина ξ имеет свойство Cond «почти наверное», если вероятность $p(\xi$ имеет свойство Cond$) = 1$

  Nota. То есть $p(\xi$ не имеет свойство Cond$) = 0$
  $p(\omega \in \Omega \mid \xi(\omega)$ не имеет св-во Cond$) = 0$

  Def. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится «почти наверное» к случайной величине ξ при $n \to \infty$ ($\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi$), если $p(\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(\omega)) = 1$
- Сходимость по вероятности

  Def. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ при $n \to \infty$ ($\xi_n \xrightarrow{p} \xi$), если $\forall \varepsilon > 0 \quad p(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

  Nota. Не надо думать, что из сходимости по вероятности следует сходимости математического ожидания $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \not\Longrightarrow E\xi_n \longrightarrow E\xi$

  Th. Пусть $|\xi_n| \le C = \text{const} \quad \forall n$
  Тогда $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Longrightarrow E\xi_n \longrightarrow E\xi$
- Слабая сходимость

  Def. Последовательность случайных величин ξ_n слабо сходится к случайной величине ξ при $n \to \infty$ ($\xi_n \rightrightarrows \xi$), если $F_{\xi_n}(x) \longrightarrow F_\xi(x) \forall x$, где $F_\xi(x)$ - непрерывна

Связь между видами сходимости

Th. $\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \Longrightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi \Longrightarrow \xi_n \rightrightarrows \xi$

Th. Если $\xi_n \rightrightarrows C = \text{const}$, то $\xi_n \xrightarrow{p} C$

Если $\xi_n \rightrightarrows C$, то по определению $F_{\xi_n}(x) \longrightarrow F_C(x) = \begin{cases} 0, & x \le C \\ 1, & x > C \end{cases} \quad \forall x \ne C$

$\forall \varepsilon > 0 \quad p(|\xi_n - C| < \varepsilon) = p(-\varepsilon < \xi_n - C < \varepsilon) = p(C - \varepsilon < \xi_n < C + \varepsilon) \geq p\left(C - \frac{\varepsilon}{2} < \xi_n < C + \varepsilon\right) =$
$F_{\xi_n}(C + \varepsilon) - F_{\xi_n}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - 0 = 1$
Так как $p(|\xi_n - C| < \varepsilon) \leq 1$, то по теореме о 2 милиционерах $p(|\xi_n - C| < \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ то есть по определению $\xi_n \xrightarrow{p} C$

Nota. В общем случае не только из слабой сходимости не следует сходимость по вероятности, но и бессмысленно говорить об этом, так как слабая сходимость - это сходимость не случайных величин, а их распределений

Ex. $\exists \xi_n \rightrightarrows \xi \in N(0,1)$, тогда $\eta = -\xi \in N(0,1)$, но ясно, что $\xi_n \xrightarrow{p} \eta = -\xi$ - неверно

Ключевые неравенства

В дальнейшем будем считать, что у случайных величин первый момент существует

I. Неравенство Маркова

Th. $p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$

$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A \quad - A \text{ нет} \\ 1, & \omega \in A \quad - A \text{ есть} \end{cases}$
$EI_A = p(A)$
$|\xi| \geq |\xi| \cdot I(|\xi| \geq \varepsilon) \geq \varepsilon I(|\xi| \geq \varepsilon)$
$E|\xi| \geq E(\varepsilon \cdot I(|\xi| \geq \varepsilon))$
$E|\xi| \geq \varepsilon \cdot E(I(|\xi| \geq \varepsilon)) = \varepsilon \cdot p(|\xi| \geq \varepsilon) \Longrightarrow p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon}$

II. Неравенство Чебышева

Th. $P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$

$p(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = p((\xi - E\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$

III. Правило «трех сигм»

Th. $P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \dfrac{1}{9}$

По неравенству Чебышева $P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \dfrac{D\xi}{(3\sigma)^2} = \dfrac{D\xi}{9\sigma^2} = \dfrac{1}{9}$

Среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным вторым моментом

Обозначим $a = E\xi_i, d = D\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}, \quad 1 \leq i \leq n$

$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ - их сумма

$\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n}$ - среднее арифметическое

$E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}(E\xi_1 + \cdots + E\xi_n) = \dfrac{1}{n}na = a = E\xi_1$ - математическое ожидание не меняется

$D\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}(D\xi_1 + \cdots + D\xi_n) = \dfrac{1}{n^2}nd = \dfrac{d}{n} = \dfrac{D\xi_1}{n}$ - дисперсия уменьшилась в n раз

$\sigma\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ - СКО уменьшилось в $\sqrt{n}$ раз

Законы больших чисел

I. Закон больших чисел Чебышева

Th. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ - последовательность независимых одинаково распределенных с конечным вторым моментом, тогда $\dfrac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p} E\xi_1$

Обозначим $a = E\xi_i, d = D\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}, \quad 1 \leq i \leq n$

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$

Тогда по неравенству Чебышева $p\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) = p\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \dfrac{d}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longrightarrow p\left(|\dfrac{S_n}{n} - a| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, то есть $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{p} a$

Среднее арифмитическое большое числа независимых одинаковых случайных величин «стабилизируется» около математического ожидания, «при $n \to \infty$ случайность переходит в закономерность»

Статистический смысл: при большом объеме n статистических данных среднее арифмитическое данных дает достаточно точную оценку теоретического математического ожидания

Nota. При доказательстве получили полезную, хотя и грубую оценку: $p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi_i}{n\varepsilon^2}$

II. Закон больших чисел Бернулли

Th. Пусть v_n - число успехов из n независимых испытаний, $p = P(A)$ - вероятность успеха при одном испытании. Тогда $\frac{v_n}{n} \xrightarrow{p} P(A)$

При этом $P\left(\left|\frac{v_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

$v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, где $\xi_i \in B_p$ - число успехов при i-ом испытании

$E\xi_i = p; D\xi_i = pq$

$\frac{v_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1 = p$

$p\left(\left|\frac{v_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$

III. Закон больших чисел Хинчина

Th. $v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом, тогда $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_i$

IV. Усиленный закон больших чисел Колмогорова

В условиях теоремы Хинчина $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1$

V. Закон больших чисел Маркова

Th. Пусть имеется последовательность случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ с конечными вторыми моментами, таких что $D(S_n) = o(n^2)$. Тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} E\left(\frac{S_n}{n}\right)$ или $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} \frac{1}{n}(E\xi_1 + \dots + E\xi_n)$

По неравенству Чебышева $p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{o(n^2)}{n^2} \longrightarrow 0 \Longrightarrow$
$p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \varepsilon\right) \longrightarrow 1$

Центральная предельная теорема

Th. Центральная предельная теорема (ЦПТ Ляпунова, ≈1901 год)
Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией $(D\xi_1 < \infty)$ и $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Тогда имеет место слабая сходимость:

$$\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \rightrightarrows N(0,1)$$

Теорема показывает, что стандартизованная сумма слабо сходится к стандартному нормальному распределению

Nota. Можно представить в ином виде: $\exists a = E\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}$, тогда $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = a, \sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, а $\frac{\frac{S_n}{n} - a}{\sigma\sqrt{n}} \rightrightarrows N(0,1)$

Nota. Другая, грубая, формулировка: $\frac{S_n}{n} \rightrightarrows N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$