

Свойства комплексного интеграла:

1° Линейность

2° Аддитивность

3° Смена знака:  $\int_{K^+} = - \int_{K^-}$

4° Оценка, модуль:  $\left| \int_K \right| \leq \int_K |f(z)| dz$

5°  $\int_K f(z) dz \stackrel{z=g(w)}{=} \int_C f(g(w)) g'(w) dw = [\text{В частности переход к параметру } t] = \int_{C(t)} f(t) g'(t) dt$

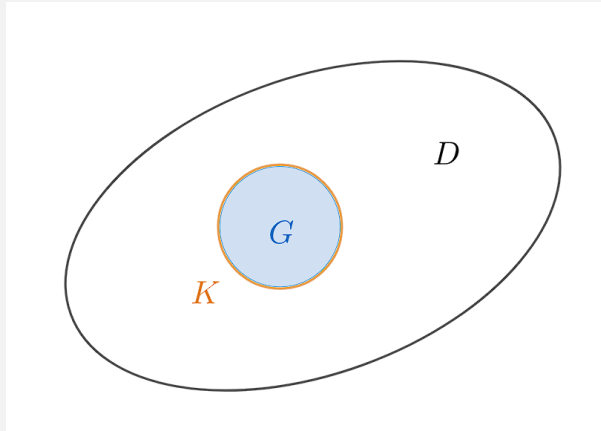
$$\text{Ex. } I = \int_{K: |z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z-z_0} \stackrel{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=} \int_K \frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} = \int_K \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$

Интеграл  $I$  не зависит от радиуса и центра окружности (то есть контура интегрирования), то есть интеграл функции  $\frac{1}{z-z_0}$  будет равен  $2\pi i$  для любой окружности в качестве контура

### 3.2. Теорема Коши

**Th. 1.**  $f(z)$  аналитическая и однозначная в односвязной области  $D$

Если  $f(z)$  непрерывна на  $\Gamma_D$ , то  $\oint_{\Gamma_D} f(z) dz = 0$



Запишем интеграл по контуру  $K \subset D$  ( $K$  - кусочно гладкая):

$$\int_K f(z) dz = \int_K u dx - v dy + i \int_K u dy + v dx = I_1 + I_2 i$$

$$I_1 = \int_K \underbrace{P(x, y) u(x, y)}_{\substack{P(x, y) = u_x - v_y \\ Q(x, y) = u_y + v_x}} dx - \underbrace{Q(x, y) v(x, y)}_{\substack{Q(x, y) = u_y + v_x \\ P(x, y) = u_x - v_y}} dy = \left[ \begin{array}{l} f(z) - \text{аналитическая} \implies \\ u_x, u_y, v_x, v_y \text{ существуют} \\ \text{и непрерывны} \end{array} \right] =$$

$$\iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Формула Грина

Аналогично  $I_2 = \int_k udy + vdx = \iint_G \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = \iint_G \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dxdy = 0$

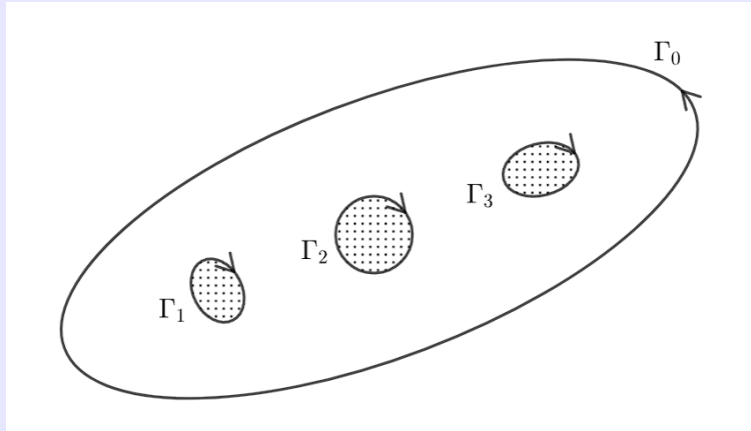
Таким образом,  $\oint_{K \subset D} f(z)dz = 0$  - формула Коши

Так как  $f(z)$  непрерывна на  $\Gamma_D$ , то можно взять  $K = \Gamma_D$

*Nota.* Получим, что интеграл по любому замкнутому  $\Gamma_D$  контуру в области аналитичности равен нулю

То есть  $\int_{AB} f(z)dz$  в условиях **Th. 1.** не зависит от пути, и его можно решать как  $\int_{AB} = \int_A^B$

*Nota.* Обобщим **Th. 1.** на многосвязную область. Выколотые области тоже имеют границы, которые включены в границу всей области

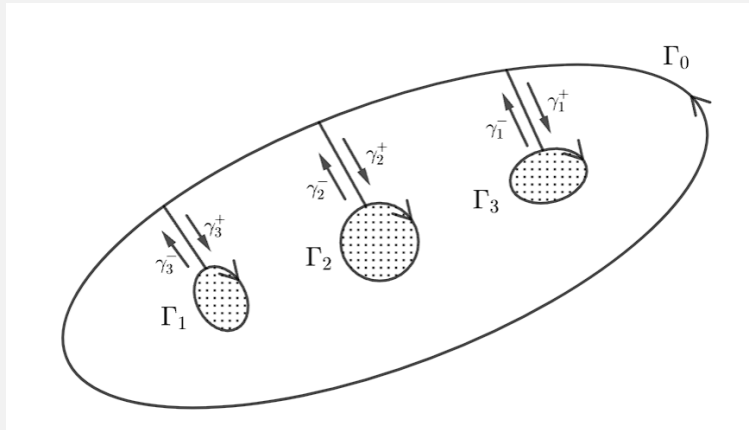


**Th. 2.** Дана многосвязная область  $D$ ,  $f(z)$  - аналитична в  $D$  и непрерывна на  $\Gamma_D$

Граница  $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$ , где положительным обходом области считается тот, при котором область обхода слева

Тогда  $\int_{\Gamma_D^+} f(z)dz = 0$  или  $\int_{\Gamma_0^+} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i^+} f(z)dz$

Сделаем разрезы как на картинке. Разрезы превратили область  $D$  в односвязную с границей  $\Gamma' = \Gamma_0 \cup (\gamma_1^+ \cup \gamma_1^- \cup \Gamma_1) \cup \dots = \Gamma_0 \cup \bigcup_{i=1}^n (\gamma_i^+ \cup \gamma_i^- \cup \Gamma_i)$



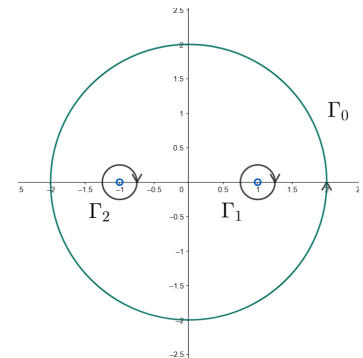
По **Th. 1.**  $\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0 \iff \int_{\Gamma_D} f(z)dz + \int_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz + \dots = 0$

Но  $\int_{\gamma_1^+} = -\int_{\gamma_1^-}$ , поэтому  $\int_{\Gamma_D^+} = \sum \int_{\gamma_i^-}$  или  $\int_{\Gamma_0} = \sum \int_{\gamma_i}$

Ex.  $\int_{|z|=2} f(z)dz$

По **Th. 2.**  $\int_{\Gamma_0} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$

Тогда  $\int_{|z|=2} f(z)dz = \int_{|z-1|=\rho_1} f(z)dz + \int_{|z+1|=\rho_2} f(z)dz$ , где  $\rho_1, \rho_2$  - радиусы бесконечно малой длины



### 3.3. Неопределенный интеграл

Мет. По теореме Барроу  $\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$  - интеграл с переменным верхним пределом

Тогда  $\Phi(x)$  - дифференцируема, и  $\Phi'(x) = f(x)$ , то есть  $\Phi(x)$  - первообразная  $f(x)$

**Th.**  $f(z)$  непрерывна в односвязной области  $D$  и  $\forall \Gamma \subset D \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

Тогда при фиксированном  $z_0 \in D$   $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$  аналитична в  $D$  и  $\Phi'(z) = f(z)$

Если  $\forall \Gamma \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ , то  $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$  - интеграл, не зависящий от пути, а только от  $z_0$  и  $z$

Рассмотрим  $\frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left( \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta =$

$$\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} (f(\zeta) - f(z) + f(z)) d\zeta = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) d\zeta + \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta =$$

$$\Delta z f(z) + \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta$$

$$\left| \int_z^{z + \Delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \int_z^{z + \Delta z} |f(\zeta) - f(z)| d\zeta \leq \max_{[z, z + \Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| \Delta z$$

Так как  $f(z)$  непрерывна в  $D$  и  $z, \zeta \in D$ , то  $\lim_{\zeta \rightarrow z} f(\zeta) = f(z) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta \implies |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta \implies \max |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

То есть  $\left| \int_z^{z + \Delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \varepsilon \Delta z$

Или  $\frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} \leq f(z) + \varepsilon$ , то есть  $\left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon$ , или  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z)$

**Def.**  $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$  называют первообразной для  $f(z)$

Следствие - формула Ньютона-Лейбница:  $\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

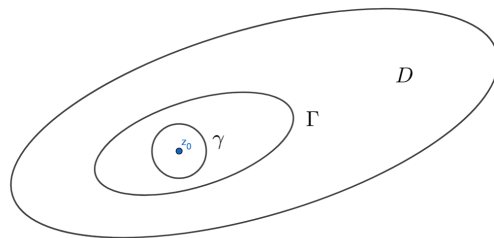
### 3.4. Интеграл Коши

*Nota.* Установим связь между значениями  $f(z)$  во внутренних точках области и на ее границе

$f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ ,  $z_0 \in D$ .

Окружаем  $z_0$  контуром  $\Gamma \in D$  и меньшим контуром  $\gamma: |z - z_0| = \rho$

В кольце между  $\gamma$  и  $\Gamma$  рассмотрим функцию  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$  (в кольце  $\varphi(z)$  аналитична)



По **Th. 2.** для  $\varphi(z)$  в многосвязной области  $\int_{\Gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta$  - не зависит от пути

То есть выбор окружности в качестве  $\gamma$  не важен:

$$\int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta \stackrel{z - z_0 = \rho e^{i\varphi}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta) \rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} f(\zeta) d\varphi = i \underbrace{\int_0^{2\pi} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta}_{\text{стягиваем } \gamma \text{ в точку } z_0, \int \rightarrow 0} + i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\zeta =$$

$$if(z_0) \cdot 2\pi$$

Тогда  $\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = 2\pi i f(z_0)$

*Nota.* Доказали теорему: в области аналитичности  $\forall z_0 \in D$   $\int_{\Gamma_D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$

*Ex.*  $\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)(z+1)} dz = \int_{|z-1|=\rho_1} \frac{\frac{f(z)}{z+1}}{z-1} dz + \int_{|z+1|=\rho_2} \frac{\frac{f(z)}{z-1}}{z+1} dz = 2\pi i \left( \frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{-2} \right)$