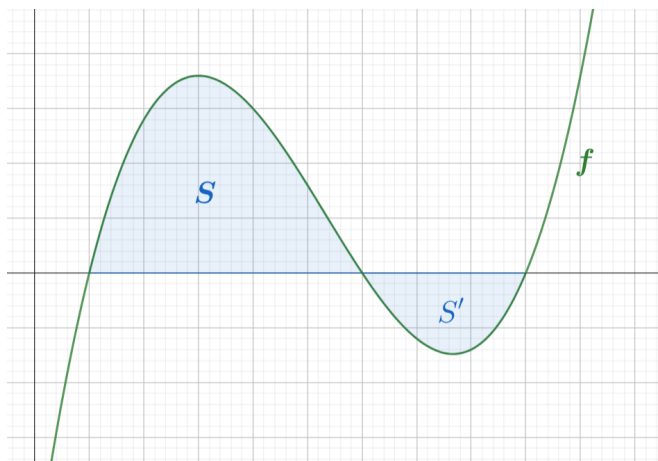


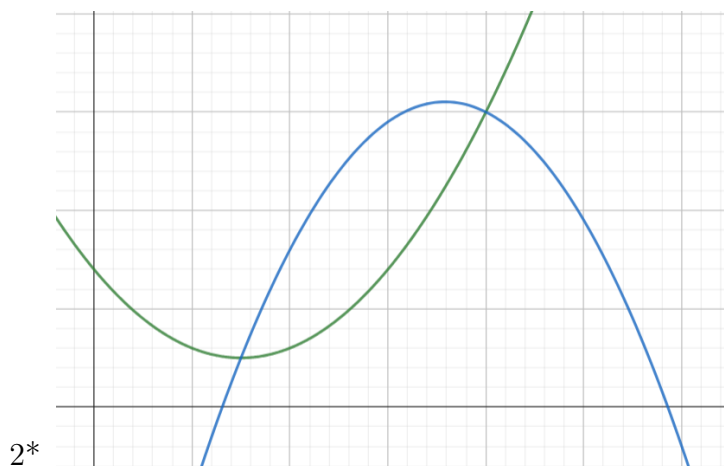
1.4. Приложения определенного интеграла

1.4.1. Площади

1* *Мет.* Значение интеграла - площадь фигуры под графиком



Геом. смысл. $S = \int_a^b f(x)dx$ $S' = - \int_b^c f(x)dx$



Площадь фигуры, окруженной графиками функций $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$, a, b - абсциссы точек пересечения

Nota. Симметрия

Если $f(x)$ – четная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

1.4.2. Площадь в ПСК

В ДПСК мы производили дробление фигуры на элементарные прямоугольники. Сделаем подобное в ПСК для $\rho(\varphi)$:

1. Дробление $[\alpha; \beta]$ на угловые сектора $[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$
 $\Delta\varphi_i$ - угол сектора
2. Выбор средней точки $\psi_i \in [\varphi_{i-1}; \varphi_i]$, площадь сектора $S_i = \frac{1}{2}\Delta\varphi_i \rho^2(\psi_i)$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho^2(\varphi_i) \Delta\varphi_i$
4. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho^2(\varphi_i) \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$

Ex. Кардиоида:

$$\rho = 1 + \cos \varphi$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \rho^2(\varphi) \Delta\varphi = \int_0^{\pi} \rho^2(\varphi) \Delta\varphi = \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 \Delta\varphi = \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) \Delta\varphi = \varphi \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \Delta\varphi = \pi + \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{2} \pi$$

Nota. Если фигура задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

то площадь будет равна $S = \int_a^b y(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt$

1.4.3. Длина кривой дуги

Пусть дуга AB задана уравнением $y = f(x)$ $x \in [a; b]$

1. Производим дробление дуги на элементарные дуги точками $A = M_0 < M_1 < \dots < M_n = B$
Здесь порядок M_i таков, что их абсциссы $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ $\Delta x_i > 0$
2. Стягиваем сумму элементарными хордами. Сумма длин этих хорд при уменьшении их длин будет приближать длину этой дуги

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2}$$

По **Th.** Лагранжа существует такая точка $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, что значение производной в этой точке равно наклону отрезка: $f'(\xi_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

3. Интегральная сумма $\sigma_n = \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2} \Delta x_i$
4. Предельный переход $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sigma_n = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = l_{\text{дуги}}$

Nota. Очевидно, что требуется гладкость дуги, то есть ее спрямляемость. Только при этом условии $\Delta l_i \approx \Delta s_i$, и работает **Th.** Лагранжа

Параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta]$$

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\varphi'(\theta_i)\Delta t)^2 + (\psi'(\theta_i)\Delta t)^2} = |\Delta t| \sqrt{(\varphi'(\theta_i))^2 + (\psi'(\theta_i))^2}$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} |dt|$$

Ex. Длина эллипса

$$L = 4l = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{c^2 \sin^2 t + b^2} dt = 4 \frac{b}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2 \sin^2 t} dt - \text{эллиптический интеграл}$$

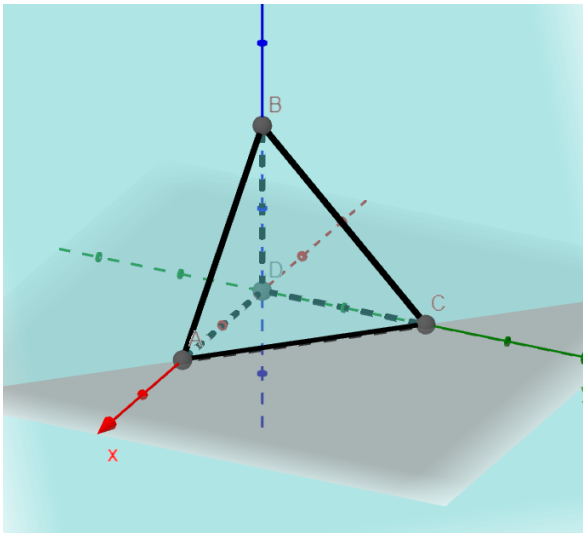
1.4.4. Объемы тел

1* Объемы тел с известными площадями сечений

Для тела известна площадь сечения перпендикулярной Ox плоскости $S(x)$

Аналогично обычному дроблению $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} v_n = \int_a^b S(x) dx = V_{\text{тела}}$

Ex. Тело отсечено от I октанта плоскостью $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$



$$S(x) = S_{DBC} = \frac{(a-x)^2}{2}$$

$$\text{Тогда } V = \int_0^a \frac{1}{2} (a-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a (x-a)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a (x-a)^2 d(x-a) = \frac{1}{6} (x-a)^3 \Big|_0^a = \frac{a^3}{6}$$

Nota. Объем тела вращения

Пусть дана функция $r(x)$, задающая радиус тела вращения на уровне x , тогда объем

тела вращения будет равен $\int_a^b \pi r^2(x) dx$

