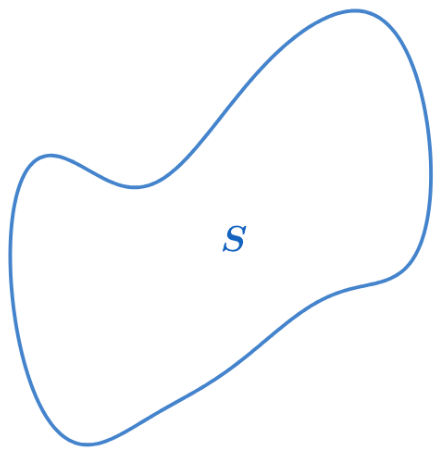
1. Определенный интеграл

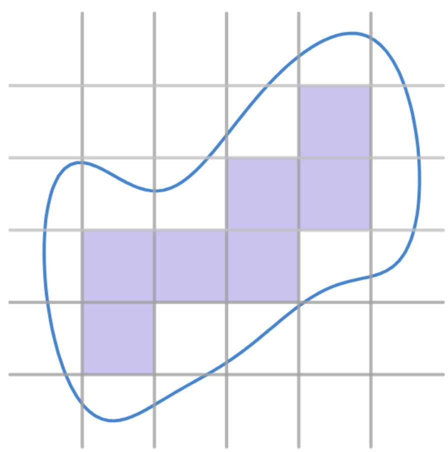
1.1. Задача и определение

Задача. Дана криволинейная фигура:



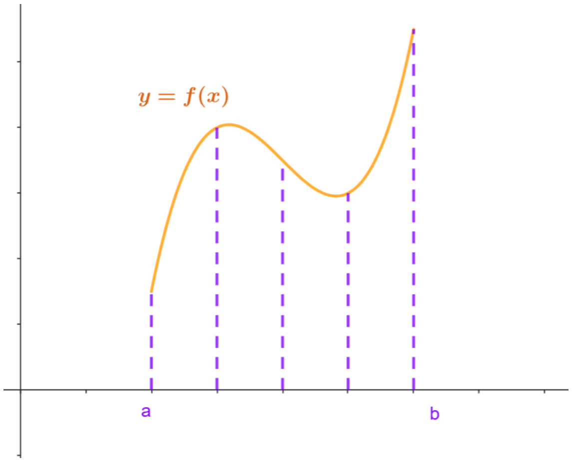
Надо найти ее площадь S

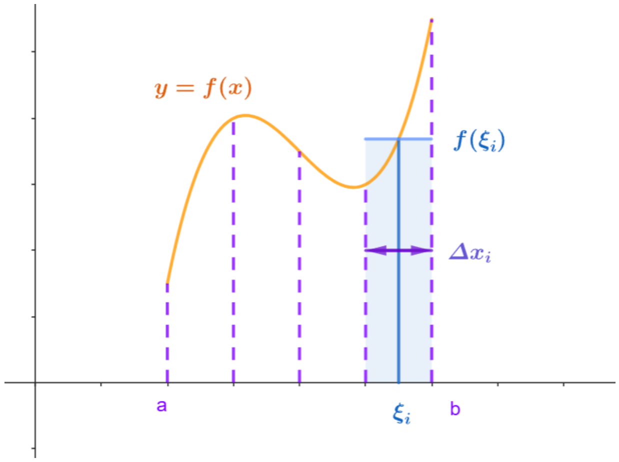
Произведем ее дробление на маленькие элементарные фигуры, площадь которых мы можем посчитать:



Уменьшаем дробление, чтобы свести погрешность к 0 (погрешность между истинной площадью и суммарной площадью прямоугольников)

Сведем задачу к простейшей в ДПСК:





1. Вводим разбиение отрезка $[a; b]$ $(a < b)$ точками $a < x_0 < \cdots < x_n < b$
   $T = \{x_i\}_{i=0}^n$
2. Выбираем средние точки на частичных отрезках $[x_{i-1}, x_i]_{i=1}^n$
   $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ – набор средних точек
   $\Delta x_i \overset{\text{обозн.}}{=} x_i - x_{i-1}$ – длина отрезка
3. Строим элементарные прямоугольники
4. Составляем сумму площадей всех таких прямоугольников:

   $$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i)$$

   Такая сумма называется интегральной суммой Римана
5. Заменяя разбиение, выбор ξ_i при каждом n, получаем последовательность $\{\sigma_n\}$
   При этом следим, чтобы ранг разбиения $\tau = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$
   Иначе получим неуничтожаемую погрешность

6. **Def.** Если существует конечный предел интегральной суммы и он не зависит от типа, ранга дробления и выбора средних точек, то он называется определенным интегралом

   $$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sigma_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)dx$$

Nota. Независимость от дробления и выбора средних точек существенна

Ex. $\mathcal{D} = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1], x \in \mathbb{Q} \end{cases}$
Сумма Римана для этой функции неопределенна, так как все зависит от выбора средних точек:

- если средние точки иррациональные, то сумма равна единице
- иначе сумма равна нулю

В обозначении определенного интеграла a и b называют нижним и верхним пределами интегрирования соответственно

Дифференциал dx имеет смысл Δx, понимается как бесконечно малая, то есть $f(x)dx$ – площадь элементарных прямоугольников, тогда $\int_a^b f(x)dx$ – сумма этих прямоугольников

1. $\int_a^a f(x)dx \overset{\text{def}}{=} 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Можно доказать, что определенный интеграл существует для всякой непрерывной на отрезке функции

Геометрический смысл: Заметим, что в определении интеграл – площадь подграфика функции $(f(x) \geq 0)$

Заметим, что для $f(x) \leq 0 \quad \int_a^b f(x)dx = -S$

1.2. Свойства

1. Линейность пределов $\Longrightarrow$ линейность интегралов
   $\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$
2. Аддитивность (часто для кусочно-непрерывных функций с конечным числом точек разбивается на участки непрерывности)
   $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
   Доказательства строятся на свойствах конечных сумм и пределов
3. Оценка определенного интеграла
   $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, $f(x)$ имеет наименьшее (m) и наибольшее (M) значения. Тогда:
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

   Доказательство: по теореме Вейерштрасса 2 $f(x)$ принимает наименьшее и наибольшее значения и для всякого x из $[a;b]$: $m <= f(x) <= M$
   Так как все средние точки принадлежат $[a;b]$, то
   $m \leq f(\xi_i) \leq M \quad \forall \xi_i$
   $m\Delta_i \leq f(\xi_i)\Delta_i \leq M\Delta_i$
   $m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq f(\xi_i)\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$
   Предельный переход:
   $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$

$$m \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

4. *Мет.* Теорема Лагранжа о среднем: $f(x) \in C'_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)\ f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Th. Лагранжа о среднем в интегральной форме

$f(x) \in C_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)\ f(\xi)(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

$m \leq \underbrace{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx}_{\text{некоторое число}} \leq M$ по свойству выше

По теореме Больцано-Коши $f(x)$ непрерывна, поэтому пробегает все значения от m до M

Значит найдется такая точка ξ, что $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

5. Сравнение интегралов

$f(x), g(x) \in C_{[a,b]} \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq g(x)$

Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(f(\xi_i)-g(\xi_i))}_{\geq 0}\underbrace{\Delta x_i}_{\geq 0} \geq 0$$

6. Интеграл и модуль

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$

Так как определен $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \in \mathbb{R}$, то можно рассмотреть случаи

$S > 0 : \quad \exists n_0\ \forall n > n_0\ \sigma_n > 0$ (вблизи S)
$\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$
$S > 0 : \quad \exists n_0\ \forall n > n_0\ \sigma_n < 0$ (вблизи S)
$\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = -\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$
$S = 0 : \lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n| = 0$
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i$ (модуль суммы меньше или равен сумме модулей)

Nota. Интеграл и разрыв: изъятие из отрезка не более, чем счетного числа точек, не меняет значение интеграла, что позволяет считать интеграл на интервале

Nota. Сходимость интеграла в определении интеграла подчеркивает, что это число. Если предел интегральных сумм не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится

Nota. Вычисления. Определение дает способ вычисления и его можно упростить:
$\forall i\ \Delta x_i = \Delta x, \quad \xi_i = \left[\begin{array}{l} x_{i-1} \\ x_i \end{array}\right.$ - концы отрезка
Так вычисляют «неберущиеся интегралы»
Для функций, у которых первообразные выражаются в элементарных функциях используется не этот метод, а формула Ньютона-Лейбница

1.3. Вычисление определенного интеграла

1.3.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Дана $f(x) : [a; +\infty), f(x) \in C_{[a;+\infty)}$
$\forall x \in [a; +\infty)$ определен $\int_a^x f(x)dx$
Таким образом определена функция $S(x) = \int_a^x f(x)dx$ – переменная площадь
В общем случае обозначим $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad t \in [a, x]$
Итак, различают три объекта:

1. Семейство функций: $\int f(x)dx = F(x) + C$
2. Функция $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$
3. Число $\int_a^b f(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$

Выявим связь между ними.

Th. Об интеграле с переменным верхним пределом (Барроу)

$f(x) : [a; +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) \in C_{[a;+\infty]}$

Тогда $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ – первообразная для $f(x)$, то есть $\Phi(x) = F(x)$

Докажем по определению

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = [\text{по } \mathbf{Th.} \text{ Лагранжа } \exists \xi \in [x; x+\Delta x]] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \xi \to x}} f(\xi) = f(x)$$

Th. Основная теорема математического анализа (формула Ньютона-Лейбница, N-L)

$f(x) \in C_{[a;b]}, F(x)$ – какая-либо первообразная $f(x)$

Тогда $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$

Для $f(x)$ определена $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$

Найдем значения $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$

$$\Phi(a) = F(a) + C = \int_a^a f(t)dt = 0 \Longrightarrow F(a) + C = 0 \Longrightarrow F(a) = -C$$

$$\Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1.3.2. Методы интегрирования

1* Замена переменной в определенном интеграле

Th. $f(x) \in C_{[a;b]} \quad x = \varphi(t) \in C'_{[\alpha;\beta]}, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

N-L: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$

Докажем, что $F(x) = F(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$\dfrac{dF(\varphi(t))}{dt} = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$

$\dfrac{dF(\varphi(t))}{d\varphi(t)}\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = \dfrac{dF(x)}{dx}\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t)$

Ex. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ x \uparrow_0^{\frac{1}{2}} \quad t \uparrow_0^{\frac{\pi}{6}} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{|\cos t|} \cos t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

2* По частям

Th. $u, v \in C'_{[a;b]} \quad uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

Тогда: $\displaystyle\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

$u(x)v(x)$ – первообразная для $u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

Или $d(uv) = udv + vdu$

По формуле N-L $\displaystyle\int_a^b (udv + vdu) = \int_a^b d(uv) = u(x)v(x)\Big|_a^b$

$\displaystyle\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

Ex. $\displaystyle\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e xd\ln x = e\ln e - 1\ln 1 - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = 1$

Nota. Не всякий интеграл вида $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ является определенным

Ex. $\displaystyle\int_0^e \ln x dx = x\ln x\Big|_0^e - x\Big|_0^e = e\ln e - \underbrace{0\ln 0}_{0\cdot\infty} - e$ – несобственный интеграл