

# Содержание

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Евклидовы пространства</b>                                    | <b>3</b>  |
| 1.1. Скалярное произведение   | 3         |
| 1.2. Свойства евклидова пространства - $E$                          | 3         |
| 1.3. Норма  | 4         |
| 1.4. Задача о перпендикуляре  | 7         |
| Приложения задачи о перпендикуляре                                  | 8         |
| <b>2. Линейный оператор</b>   | <b>10</b> |
| 2.1. Определение  | 10        |
| 2.2. Действия с операторами   | 10        |
| 2.3. Обратимость оператора  | 11        |
| 2.4. Матрица линейного оператора                                    | 13        |
| 2.5. Ядро и образ оператора   | 13        |
| 2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису | 16        |
| 2.7. Собственные векторы и значения оператора                       | 17        |
| 2.8. Самосопряженные операторы                                      | 21        |
| 2.9. Ортогональный оператор   | 24        |
| <b>3. Билинейные и квадратичные формы</b>                           | <b>25</b> |
| 3.1. Билинейные формы   | 25        |
| 3.2. Квадратичные формы   | 26        |
| <b>4. Дифференциальные уравнения</b>                                | <b>29</b> |
| 4.1. Общие понятия  | 29        |
| 4.1.1. Постановка задачи  | 29        |
| 4.1.2. Основные определения   | 30        |
| 4.2. ДУ первого порядка (ДУ <sub>1</sub> )                          | 31        |
| 4.2.1. УРП  | 32        |
| 4.2.2. ОУ   | 32        |
| 4.2.3. УПД  | 34        |
| 4.2.4. ЛДУ  | 34        |
| 4.3. Существование и единственность решения                         | 35        |
| 4.4. ДУ высших порядков   | 36        |
| 4.5. ЛДУ <sub>2</sub>   | 37        |
| 4.5.1. Определения  | 37        |
| 4.5.2. Решение ЛДУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами        | 37        |

|  |           |
|--|-----------|
| 4.5.3. Свойства решений ЛДУ <sub>2</sub> . . . . . | 39        |
| 4.6. Системы ДУ . . . . .                          | 45        |
| 4.7. Теория устойчивости (элементы) . . . . .      | 48        |
| <b>X. Программа экзамена в 2023/2024</b>           | <b>51</b> |

# 1. Евклидовы пространства

## 1.1. Скалярное произведение

Пусть  $L$  - линейное пространство (ЛП). Тогда  $\forall x, y \in L$  величину  $c = (x, y)$  будем называть скалярным произведением  $x, y \rightarrow c \in \mathbb{R}$

1.  $(x, y) = (y, x)$
2.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3.  $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$
4.  $\forall x \in L \quad (x, x) \geq 0$  и  $(x, x) = 0 \implies x = 0$

*Nota.* Если векторы и коэффициенты комплексно-значные, то определения будут другими

**Def.** Скалярная функция  $c = (x, y)$  со свойствами 1-4 называется скалярным произведением элементов  $x$  и  $y$

**Def.** Линейное пространство со скалярным произведением называется Евклидовым

*Ex. 1.* ЛП - пространство геометрических векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi, & \vec{a}, \vec{b} \neq 0 \\ 0, & \vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0 \end{cases}$$

*Ex. 2.*  $L = C[a; b]$

$$(f(x), g(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Очевидно, что свойства 1-3 выполняются, проверим 4:

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0 \stackrel{?}{\implies} f(x) = 0$$

*Ex. 3.* ЛП - пространство числовых строк вида  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i - \text{сумма произведений компонент}$$

## 1.2. Свойства евклидова пространства - E

**Th.** Неравенство Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Нетрудно заметить, что:

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x - y, \lambda x) - (\lambda x - y, y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y, y) = \lambda^2(x, x) -$$

$$2\lambda(x, y) + (y, y)$$

Приравняем полученное выражение к 0, получаем квадратное уравнение. Решим относительно  $\lambda$ :

$$D = 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \implies \frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y)$$

Так как  $(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0$  (4-ое свойство скалярного произведения), то уравнение имеет  $\leq 1$  корня, значит  $\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$

### 1.3. Норма

ЛП  $= L, \forall x \in L$  определена функция так, что выполняется  $x \rightarrow n \in \mathbb{R}, n = \|x\|$

1.  $\|x\| \geq 0$  и  $\|x\| = 0 \implies x = 0$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in L$  - неравенство треугольника

Евклидово пространство с нормой называется нормированным

**Th.**  $E^n$  является нормированным, если  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

Свойства 1-2 очевидны, докажем 3 свойство:

$$\|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} = \|x\| + \|y\|$$

$$\sqrt{(x, x) + 2(x, y) + (y, y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}$$

$$(x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq (x, x) + (y, y) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)}$$

$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$$

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) \text{ - верно по неравенству Коши-Буняковского}$$

Обобщим геометрические понятия ортогональности и косинуса угла на случай произвольных векторов

**Def.**  $x, y$  - ортогональны, если  $(x, y) = 0$  и  $x \neq 0$  и  $y \neq 0 \quad x \perp y$

**Def.**  $\cos(\widehat{x, y}) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$  - косинус угла между векторами

**Def.**  $x, y \in E^n, x \perp y$ , тогда  $z = x + y$  - гипотенуза

**Th.**  $x \perp y$ , тогда  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x)^2 + \underbrace{2(x, y)}_{=0, x \perp y} + (y, y)^2 = (x, x)^2 + (y, y)^2$$

**Def.**  $B = \{e_i\}_{i=1}^n$  - базис  $L^n$

На  $L^n$  введены  $(x, y)$  и  $\|x\|$  (то есть  $L^n \rightarrow E_{\|\cdot\|}^n$  - нормированное евклидово)

$B$  называют ортонормированным базисом, если  $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$

*Nota.* Докажем, что всякая такая система из  $n$  векторов линейно независима (то есть всякая нулевая комбинация тривиальная):

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \stackrel{?}{\implies} \forall \lambda_i = 0$$

$$\left( e_k, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_k, e_i) \stackrel{k \neq i \implies (e_k, e_i) = 0}{=} \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k = 0 \quad \forall k$$

**Th.** Во всяком  $E^n$  можно выделить ортонормированный базис

В  $E_{\|\cdot\|}^n \exists B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  - базис

Покажем, что можно выделить ортонормированный базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  при помощи метода математической индукции

База: построим один ортогональный вектор для  $\beta_1 = e'_1$  (потом  $e_1 = \frac{e'_1}{\|e'_1\|}$ )

Рассмотрим  $e'_2 = \beta_1 - \lambda e'_1$ . Требуем  $e'_2 \perp e'_1$ , то есть  $(e'_1, e'_2) = 0$

Отсюда найдем нужный  $\lambda : (e'_1, e'_2) = (e'_1, \beta_1 - \lambda e'_1) = (e'_1, \beta_1) - \lambda(e'_1, e'_1) = 0$

Тогда  $\lambda = \frac{(e'_1, \beta_1)}{(e'_1, e'_1)}$

Переход: Пусть построена система ортогональных векторов  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_k\}$

Построим  $k+1$  систему:

Рассмотрим  $e'_{k+1} = \beta_{k+1} - \lambda_k e'_k - \lambda'_{k-1} e'_{k-1} - \dots - \lambda_1 e'_1$  (\*)

Требуем  $e'_{k+1} \perp e_i \quad \forall i \in [1; k]$

$(e'_{k+1}, e'_k) = (\beta_{k+1}, e'_k) - \lambda_k (e'_k, e'_k) = 0$ , так как  $(e'_i, e'_j) = 0 \quad i \neq j$

$\lambda_k = \frac{(\beta_{k+1}, e'_k)}{(e'_k, e'_k)}$

Аналогично:  $(e'_{k+1}, e'_{k-1}) = (\beta_{k+1}, e'_{k-1}) - \lambda_{k-1} (e'_{k-1}, e'_{k-1})$

$\lambda_{k-1} = \frac{(\beta_{k+1}, e'_{k-1})}{(e'_{k-1}, e'_{k-1})}$

Получаем  $e'_{k+1} = \beta_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(\beta_{k+1}, e'_i)}{(e'_i, e'_i)} e'_i$

Изложенный метод называется методом ортогонализации базиса, при этом (\*) определяет ненулевой вектор, иначе получим нулевую тривиальную линейную комбинацию векторов  $\beta_i$  ( $e_i$  выражается через них), но это невозможно, так как вектора базисные. При этом полученную систему стоит нормировать

*Ex.* Формула скалярного произведения в ортонормированном базисе

$E_{\|\cdot\|}, B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  - какой-либо базис

Рассмотрим  $x = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n$  и  $y = y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n$

Найдем  $(x, y)$ , как произведение компонент:  $(x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n, y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\beta_i, \beta_j)$

Обозначим  $(\beta_i, \beta_j) = a_{ij} \in \mathbb{R}$

Таким образом,  $(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$  - дальше назовем квадратичной формой

Ранее (в аналитической геометрии)  $(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$  - произведение координат векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  в декартовой прямоугольной системе координат (с ортонормированным базисом)

Действительно: если  $\beta_i = e_i, \beta_j = e_j$ , вектора  $e_i, e_j$  принадлежат ортонормированному базису, а

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \text{ то } (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Причем  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies x_i = (x, e_i)$

*Ex.* Система функций, непрерывных на  $[0, 2\pi]$

$\Phi = \{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \dots, \sin nt, \cos nt\}$

Система ортогональна (Lab.), но не нормированная (Lab.)

$\Phi_{\|\cdot\|} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \dots \right\}$  - нормированная система

Тогда функция, определенная и непрерывная на  $[0, 2\pi]$  может быть разложена по базису  $\Phi_{\|\cdot\|}$

и ее координат (как вектора):  $f_i = \int_0^{2\pi} f \cdot e_i dx$ , где  $e_i \in \Phi_{\|\cdot\|}$

*Nota.* Изоморфизм  $E^n \rightarrow E'^n$  позволяет переносить свойства скалярного произведения из одного в другое пространство

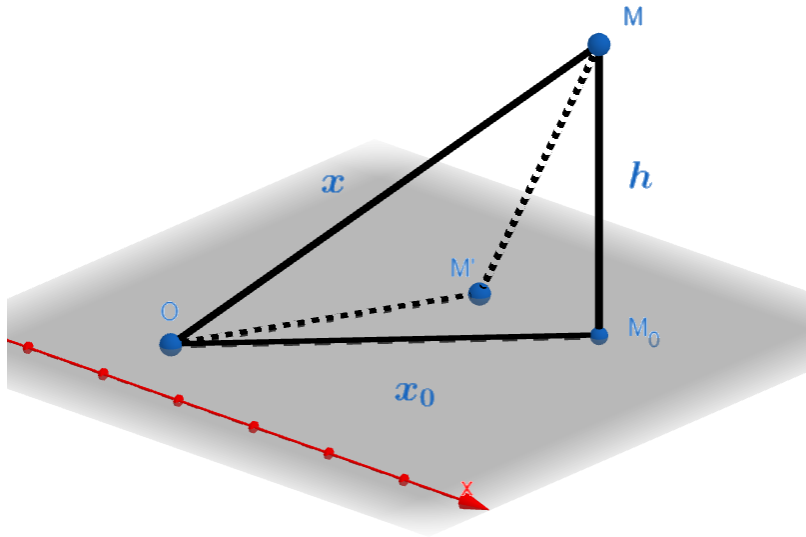
*Ex.*  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  - арифметические векторы со скалярным произведением  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$E'^n \in C_{[a;b]}$  со скалярным произведением  $(f, g) = \int_a^b f \cdot g dx$

$$\sqrt{\int_a^b (f \cdot g)^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx} + \sqrt{\int_a^b g^2 dx}$$

## 1.4. Задача о перпендикуляре

Постановка: Нужно опустить перпендикуляр из точки пространства  $E^n$  на подпространство  $G$



Точка  $M$  - конец вектора  $x$  в пространстве  $E^n$ . Нужно найти  $M_0$  (конец вектора  $x_0$ , проекции  $x$  на  $G$ ), причем  $x_0 + h = x$ , где  $h \perp G$ . Правда ли что, длина перпендикулярного вектора  $h$  - минимальная длина от точки  $M$  до  $G$ ?

**Th.**  $h \perp G, x_0 \in G, x = x_0 + h$ . Тогда  $\forall x' \in G (x' \neq x_0) \quad \|x - x'\| > \|x - x_0\|$

$$\|x - x'\| = \|x - x_0 + x_0 - x'\| \stackrel{\text{по теореме Пифагора}}{=} \|x - x_0\| + \|x_0 - x'\| = \|h\| + \|x_0 - x'\| > \|x - x_0\|$$

*Nota.*  $x_0$  называется ортогональной проекцией, возникает вопрос о ее вычислении (так находятся основания перпендикуляров)

*Алгоритм:* представим  $x_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k$ ,  $\{e_i\}_{i=1}^k$  - базис  $G$  (необязательно ортонормированный)

Дан вектор  $x$ , пространство  $G$ , нужно найти  $\lambda_i$

$h = x - x_0$ ,  $h \perp G$   $(h, e_i) = 0$ , так как  $h \perp e_i \forall i$

$(x - x_0, e_i) = (x, e_i) - (x_0, e_i) = 0 \implies (x, e_i) = (x_0, e_i)$

Тогда  $\forall i \quad (x_0, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \dots + \lambda_k (e_k, e_i)$ . Здесь  $(e_k, e_i)$  - числа, а  $\lambda_i$  - неизвестные переменные. Из этого получаем СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_k, e_1) & (e_k, e_2) & \dots & (e_k, e_k) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \Gamma \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{pmatrix}$$

*Nota.* В матрице  $\Gamma$  нет нулевых строк, так как  $e_i$  - вектор базиса и  $e_i^2 \neq 0$

Таким образом по теореме Крамера  $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

**Def.** Матрицу  $\Gamma = \{(e_i, e_j)\}_{i,j=1\dots k}$  называют матрицей Грама

В простейшем случае,  $\Gamma = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ , если базис ортонормированный

Далее,  $I$  - единичная матрица Грама

*Nota.* Тогда  $I \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{pmatrix}$

## Приложения задачи о перпендикуляре

### 1. Метод наименьших квадратов

В качестве простейшей модели зависимости  $y = y(x)$  берем линейную функцию  $y = \lambda x$

Ищем минимально отстоящую прямую от данных  $(x_i, y_i)$ , то есть ищем  $\lambda$

Определим расстояние (в этом методе) как  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{0i})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \lambda x_i)^2$  - наша задача состоит в минимизации этой величины<sup>1</sup>

Таким образом, ищем  $y_0$  (ортогональная проекция) такой, что  $(y - y_0)^2 = \sigma^2$  минимальна.

Найдем производную функции  $\sigma^2(\lambda)$ :

$$\left(\sigma^2(\lambda)\right)' = \sum_{i=1}^n (2\lambda x_i^2 - 2x_i y_i) = 0 \implies \sum_{i=1}^n \lambda x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\text{Отсюда получаем } \lambda = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

В общем случае для аппроксимирующей функции  $f(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$  с  $k$  неизвестными параметрами составляем  $\sigma^2(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \lambda_1, \dots, \lambda_k))^2$ ,

$$\text{решаем систему } \begin{cases} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \sigma^2}{\partial \lambda_k} = 0 \end{cases} \quad \text{и получаем } \lambda_1, \dots, \lambda_k$$

### 2. Многочлен Фурье

<sup>1</sup> Эта величина также известна как *дисперсия*



$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$  - линейная комбинация

Функции  $1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt$  - ортогональны

Задача в том, чтобы для функции  $f(t)$ , определенной на отрезке  $[0; 2\pi]$ , найти минимально отстоящий многочлен  $P(t)$  при том, что расстояние определяется как  $\sigma^2 = \int_0^{2\pi} (f(t) - P(t))^2 dt$

Нужно найти  $a_i$  и  $b_i$  - обычные скалярные произведения  $a_i = k \int_0^{2\pi} f(t) \cos(it) dt$ ,  $b_i = m \int_0^{2\pi} f(t) \sin(it) dt$  ( $k, m$  - нормирующие множители)

## 2. Линейный оператор

### 2.1. Определение

**Def.** *Линейный оператор* - это отображение  $V^n \xrightarrow{\mathcal{A}} W^m$  ( $V^n, W^m$  - линейные пространства размерностей  $n \neq m$  в общем случае), которое  $\forall x \in V^n$  сопоставляет один какой-либо  $y \in W^m$  и

$$\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \mathcal{A}x_1 + \mu \mathcal{A}x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2$$

*Nota.* Заметим, что если 0 представим как  $0 \cdot x$ , где  $x \neq 0$ , то  $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(0 \cdot x) = 0 \cdot \mathcal{A}x \stackrel{0 \cdot y}{=} 0$

*Nota.* Если  $V = W$ , то  $\mathcal{A}$  называют линейным преобразованием, но далее будем рассматривать в основном операторы  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ ,  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^n$

*Ex. 1.*  $V = \mathbb{R}^2$  - пространство направленных отрезков

$$\mathcal{A}: V \rightarrow V$$

$\mathcal{A}x = y = \lambda y_1 + \mu y_2$  для таких  $\mathcal{A}$  как сдвиг, поворот, гомотетия, симметрия

*Ex. 2.*  $V^n = W^m$ , где  $m < n$

$\mathcal{A}$  - оператор проектирования (убедиться, что он линейный)

*Ex. 3.*  $V^n$  - пространство числовых строк длины  $n$

$$\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$

Выражение  $\mathcal{A}x = y$  можно представить как 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} x = y$$

### 2.2. Действия с операторами

**Def.** Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V \rightarrow W$ , тогда определены операции:

1. Сумма операторов:  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x \stackrel{def}{=} \mathcal{A}x + \mathcal{B}x = \mathcal{C}x$
2. Произведение оператора на число:  $(\lambda \mathcal{A})x \stackrel{def}{=} \lambda(\mathcal{A}x) = \mathcal{D}x$

*Nota.* Сформируем линейное пространство из операторов  $\mathcal{A}: V \rightarrow W$

1. Ассоциативность сложения (очевидно)
2. Коммутативность (очевидно)
3. Нейтральный элемент  $\mathcal{O}x = 0$
4. Противоположный:  $-\mathcal{A} = (-1) \cdot \mathcal{A}$

## 5. ... Lab.

**Def.**  $I$  - тождественный оператор, если  $\forall x \in V \quad Ix = x$

**Def.** Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow W$ ;  $\mathcal{B}: U \rightarrow V$ , тогда  $\mathcal{AB}$  - произведение операторов (композиция), причем  $(\mathcal{AB})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$ ;  $x \in U$

Свойства:

$$1^\circ \lambda(\mathcal{AB}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$$

$$2^\circ (\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$$

$$3^\circ \mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$$

$$4^\circ \mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$$

Lab. доказать

*Nota.* Можно обобщить  $4^\circ$  на  $n$  равных  $\mathcal{A}$

**Def.**  $\mathcal{A}^n = \underbrace{\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \cdot \dots \cdot \mathcal{A}}_{n \text{ раз}}$  - степень оператора

Свойства:  $\mathcal{A}^{m+n} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

## 2.3. Обратимость оператора

**Def.**  $\mathcal{A}: V \rightarrow W$  так, что  $\mathcal{A}V = W$  и  $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V) \quad \begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \implies y_1 \neq y_2$

Тогда  $\mathcal{A}$  называется взаимно-однозначно действующим

*Nota:* Проще сказать «линейный изоморфизм»

**Th.**  $\{x_i\}$  - линейно независима  $\xRightarrow{\mathcal{A}x=y} \{y_i\}$  - линейно независима

В обратную сторону верно, если  $\mathcal{A}$  - взаимно-однозначен

Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow W$  и  $0_V, 0_W$  - нули  $V$  и  $W$  соответственно

$$1. \mathcal{A}(0_V) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^k 0 \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^k 0 \cdot \mathcal{A}e_i = 0_W$$

2. Докажем, что если  $x_i \subset V$  - линейно независима, то  $y_i \subset W$  - линейно независима

$$\text{Составим } \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j = 0_W$$

От противного пусть  $\{y_i\}$  - линейно зависима, тогда  $\exists \lambda_k \neq 0$

При этом  $\forall j \quad y_j = \mathcal{A}x_j$  (т. к.  $\mathcal{A}$  - взаимно-однозначен, то  $n' = m'$ : кол-во  $x_i$  и  $y_i$  равно)

$$\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j \mathcal{A}x_j \stackrel{\text{линейность}}{=} \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j\right) = 0_W$$

Так как  $\mathcal{A}0_V = 0_W$ , то  $0_W$  - образ  $x = 0_V$ , но так как  $\mathcal{A}$  - взаимно-однозначен, то  $\nexists x' \neq x \mid \mathcal{A}(x') = 0_W$

Значит  $\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j = 0_V$ , но  $\exists \lambda_k \neq 0 \implies \{x_j\}$  - линейно зависима - противоречие

3. Пусть теперь  $\{y_i\}$  - линейно независима, а  $\{x_i\}$  (по предположению от противного) - линейно зависима

$$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i x_i \stackrel{\exists \lambda_k \neq 0}{=} 0_V \quad \Big| \mathcal{A}$$

$$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i \mathcal{A}x_i = 0_W$$

При этом  $\exists \lambda_k \neq 0 \implies \{y_i\}$  - линейно зависима - противоречие

Следствие:  $\dim V = \dim W \implies \mathcal{A}$  - линейный изоморфизм

**Def.**  $\mathcal{B} : W \rightarrow V$  называется обратным оператором для  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ , если  $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = I$  (обозначается  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$ )

Следствие:  $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}x = x$

**Th.**  $\mathcal{A}x = 0$  и  $\exists \mathcal{A}^{-1}$ , тогда  $x = 0$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1}0_W = 0_V \implies x = 0$$

**Th.** Необходимые и Достаточные условия существования  $\mathcal{A}^{-1}$

$\exists \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A}$  - взаимно-однозначный

$\implies \exists \mathcal{A}^{-1}$ , но  $\nexists \mathcal{A}$  - не взаимно-однозначен, то есть  $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \iff \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 \iff \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0_W \stackrel{\exists \mathcal{A}^{-1}}{\implies} x = 0_V \iff x_1 = x_2$  - противоречие

$\iff$  Так как  $\mathcal{A}$  - изоморфизм (не учитывая линейность), то  $\exists \mathcal{A}'$  - обратное отображение (не обязательно линейное)

Докажем, что  $\mathcal{A}' : W \rightarrow V$  - линейный оператор

$$\mathcal{A} - \text{взаимно-однозначен} \iff \forall x_i \longleftrightarrow y_i \quad \Big| \cdot \lambda_i, \sum$$

$$\mathcal{A}\left(\sum \lambda_i x_i\right) = \mathcal{A}x = y = \sum \lambda_i y_i \quad \text{и } y \text{ имеет только один прообраз } x$$

Применим  $\mathcal{A}'$  к  $y = \sum \lambda_i y_i$ , получим  $\mathcal{A}'y = x = \sum \lambda_i x_i$  - единственный прообраз  $y$

Таким образом,  $\mathcal{A}'$  переводит линейную комбинацию в такую же линейную комбинацию

прообразов, то есть  $\mathcal{A}'$  - линейный:  $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$

## 2.4. Матрица линейного оператора

Пусть  $\mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$

Возьмем вектор  $x \in V^n$  и разложим по какому-либо базису  $\{e_j\}_{j=1}^n$

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A} \left( \sum_{j=1}^n c_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{A}e_j$$

$$\mathcal{A}e_j \overset{\text{образ базисного вектора}}{=} y_j \overset{\{f_i\} - \text{базис } W^m}{=} \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$$

$$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_j a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} f_i$$

Иллюстрация:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

**Def.** Матрица  $A = \{a_{ij}\}_{i=1..m, j=1..n}$  называется матрицей оператора  $\mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$  в базисе  $\{e_j\}_{j=1}^n$  пространства  $V^n$

1. Для каждого ли оператора  $\mathcal{A}$  существует матрица  $A$ ?

При выбранном базисе  $\{e_j\} \forall \mathcal{A} \exists A$  (алгоритм выше)

2. Для каждой ли матрицы  $A$  существует оператор  $\mathcal{A}$ ?

$\forall A_{m \times n}$  можно взять пару ЛП  $V^n, W^m$  и определить  $\mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$  по правилу  $\mathcal{A}e_V = e'_W$

3. Если существует матрица  $A$  для оператора  $\mathcal{A}$ , то она единственная?

Такая  $A$  единственная  $\implies$  в разных базисах матрицы ЛО  $\mathcal{A}$   $A_e \neq A_{e'}$

4. Если существует оператор  $\mathcal{A}$  для матрицы  $A$ , то он единственный?

Lab.

*Nota.* Далее будем решать две задачи:

1. преобразование координат как действие оператора
2. поиск наиболее простой матрицы в некотором базисе

## 2.5. Ядро и образ оператора

**Def.** Ядро оператора  $\text{Ker } \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$

**Def.** Образ оператора  $\text{Im } \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$

*Nota.*  $\text{Ker } \mathcal{A}$  и  $\text{Im } \mathcal{A}$  - подпространства  $V$  ( $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ )

В общем случае  $\text{Ker } \mathcal{A} \subset V, \text{Im } \mathcal{A} \subset W$  ( $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ )

Заметим, что если  $\text{Ker } \mathcal{A} = 0$ , то  $\mathcal{A}$  - взаимно-однозначен

Докажем от противного:

$\square$   $\mathcal{A}$  - не взаимно-однозначен, то есть  $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \iff \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 \in \text{Ker } \mathcal{A}$  - противоречие, так как  $\text{Ker } \mathcal{A} = 0$

*Nota.* Обратное также верно:

$\mathcal{A}$  - взаимно-однозначен  $\iff y_1 = y_2 \implies x_1 = x_2$

Докажем от противного:  $\dim \text{Ker } \mathcal{A} \neq 0$ , значит найдется  $x = x_1 - x_2 \in \text{Ker } \mathcal{A}$  ( $x_1 \neq x_2$ ), причем по определению ядра  $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0$

А так как  $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0$ , то  $\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \implies x_1 = x_2$  - противоречие

*Nota.* Также очевидно, что

$\text{Ker } \mathcal{A} = 0 \iff \text{Im } \mathcal{A} = V$

$\text{Ker } \mathcal{A} = V \implies \text{Im } \mathcal{A} = 0$  и  $\mathcal{A} = 0$

**Th.**  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , тогда  $\dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim V$

Так как  $\text{Ker } \mathcal{A}$  - подпространство  $V$ , то можно построить дополнение до прямой суммы (взяв базисные векторы ядра, дополнить их набор до базиса  $V$ :  $e_1^k, \dots, e_m^k, e_{m+1}^k, \dots, e_n^k$ )

Обозначим дополнение  $W$ , тогда  $\text{Ker } \mathcal{A} \oplus W = V \implies \dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim W = \dim V$

Докажем, что  $W$  и  $\text{Im } \mathcal{A}$  - изоморфны

$\mathcal{A} : W \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$

$\mathcal{A} : \text{Ker } \mathcal{A} \rightarrow 0$

Докажем, что  $\mathcal{A}$  действует из  $W$  в  $\text{Im } \mathcal{A}$  взаимно-однозначно

$\square$   $\mathcal{A}$  не взаимно-однозначный, тогда  $\exists x_1, x_2 \in W (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \in \text{Im } \mathcal{A}$

Из этого  $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 \stackrel{\text{обозн.}}{=} x \in \text{Ker } \mathcal{A}$ , причем  $x \neq 0$ , так как  $x_1 \neq x_2$

Но так как  $W$  - дополнение до прямой суммы ( $\text{Ker } \mathcal{A} \oplus W = V$ , то есть  $W \cup \text{Ker } \mathcal{A} = 0$ ), а  $x \in W \cup \text{Ker } \mathcal{A}$  - противоречие ( $x \neq 0$ )

Из этого следует, что  $\mathcal{A}$  - линейный и взаимно-однозначный  $\implies \dim W = \dim \text{Im } \mathcal{A}$

Получается, что  $V$  можно представить как прямую сумму  $W_1 \oplus W_2$ , причем  $W_1 = \text{Ker } \mathcal{A}, W_2 = \text{Im } \mathcal{A}$

**Def.** Рангом оператора  $\mathcal{A}$  называется  $\dim \text{Im } \mathcal{A}$ :  $\text{rang } \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Im } \mathcal{A}$  (также обозначается  $r(\mathcal{A})$  или  $\text{rank } \mathcal{A}$ )

*Nota.* Сравним ранг оператора с рангом его матрицы

$$\mathcal{A}x = y \quad \mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$$

$A$  - матрица  $\mathcal{A}$ ,  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ ,  $y = y_1f_1 + \dots + y_mf_m$

$$\mathcal{A}x = y \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Или при преобразовании базиса  $Ae_i = e'_i$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Здесь } \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T \text{ - это матрица } \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots \end{pmatrix}$$

*Nota.* Поиск матрицы  $\mathcal{A}$  можно осуществить, найдя ее в «домашнем» базисе  $\{e_i\}$ , то есть

$$A(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_m)$$

Затем, можно найти матрицу в другом (нужном) базисе, используя формулы преобразований (см. **Th.** позже)

Тогда  $\text{Ker } \mathcal{A} = K$  - множество векторов, которые решают систему

$$AX = 0 \quad (\dim K = m = \dim \Phi CP = n - \text{rang } A) \text{ и при этом } \dim K = n - \dim \text{Im } \mathcal{A}$$

$$\text{rang } \mathcal{A} = \text{rang } A = \dim \text{Im } \mathcal{A}$$

Следствия (без доказательств):

1.  $\text{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \leq \text{rang}(\mathcal{A})$  (или  $\text{rang } \mathcal{B}$ )
2.  $\text{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \geq \text{rang}(\mathcal{A}) + \text{rang}(\mathcal{B}) - \dim V$

*Nota.* Рассмотрим преобразование координат, как линейный оператор  $T : V^n \rightarrow V^n$  (переход из системы  $Ox_i \rightarrow Ox'_i$ ,  $i = 1..n$ )

$$\dim \text{Im } T = n, \dim \text{Ker } T = 0 \implies T \text{ - взаимно-однозначен}$$

Поставим задачу отыскания матрицы в другом базисе, используя  $T_{e \rightarrow e'}$

## 2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису

**Th.**  $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$

$\{e_i\} \stackrel{\text{об}}{=} e$  и  $\{e'_i\} \stackrel{\text{об}}{=} e'$  - базисы пространства  $V$

$\mathcal{T} : V^n \rightarrow V^n$  - преобразование координат, то есть  $\mathcal{T}e_i = e'_i$

$\square A, A'$  - матрицы  $\mathcal{A}$  в базисах  $e$  и  $e'$

Тогда  $A' = TAT^{-1}$  ( $A'_{e'} = T_{e \rightarrow e'}AT_{e \rightarrow e'}^{-1}$ )

Пусть  $y = \mathcal{A}x$ , где  $x, y$  - векторы в базисе  $e$  ( $x_e = x'_{e'}$  - один вектор)

$y' = \mathcal{A}x'$ , где  $x', y'$  - векторы в базисе  $e'$

$\mathcal{T}x = x', \mathcal{T}y = y'$

$y = Ax, y' = A'x'$ , тогда  $Ty = A'(Tx) \quad \Big| \cdot T^{-1}$

$T^{-1}Ty = (T^{-1}A'T)x$

$Ax = y = (T^{-1}A'T)x$

$A = T^{-1}A'T \implies A' = TAT^{-1}$

**Th.**  $A' = T_{e \rightarrow e'}AT_{e \rightarrow e'}^{-1}$

*Nota.*  $C = A + \lambda B$

Следствия:

1.  $TCT^{-1} = T(A + \lambda B)T^{-1} = TAT^{-1} + \lambda TBT^{-1}$
2.  $B = I \quad TBT^{-1} = TIT^{-1} = I$ , т. к.  $TI = T, TT^{-1} = I$
3.  $\det A^{-1} = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A \det T^{-1} = \det A \cdot 1$

*Nota.* То есть характеристика нашего объекта - инвариант при преобразовании  $T$

**Def.** Матрица  $A$  называется ортогональной если  $A^{-1} = A^T$

Следствие:  $AA^{-1} = AA^T = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Для элементов матрицы:

$$\forall i \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ij} = (A_i, A_i) = 1$$



$$\forall i, j (i \neq j) \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = (A_i, A_j) = 0$$

$$\text{В общем, } (A_i, A_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

**Def.** Оператор  $\mathcal{A}$  называется ортогональным, если его матрица ортогональна

Возникает вопрос:  $A$  ортогональна в каком-либо базисе или во всех сразу?

Свойство: если  $\mathcal{A}$  - ортогонален, то  $\det A = \pm 1$  (следует из определения  $\det(AA^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = \det(A) \cdot \det(A) = \det(I) = 1 \implies \det(A) = \pm \sqrt{1}$ )

**Th.**  $T_{e \rightarrow e'}$  - преобразование координат в  $V^n$ . Тогда  $T$  - ортогональный оператор

Здесь базис  $e$  - ортонормированный базис

Пусть в базисе  $e$  матрица  $T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$  - неортогональна

$$\text{Тогда } e'_1 = \sum_{i=1}^n \tau_{1i} e_i \quad \left| \cdot e'_1 \right.$$

$$1 = (e'_1, e'_1) = \left( \sum_{i=1}^n \tau_{1i} e_i \right)^2 = \tau_{11}^2 e_1^2 + \tau_{11} e_1 \tau_{12} e_2 + \dots = \tau_{11}^2 + \dots + \tau_{1n}^2 = 1, \text{ то есть строка - это единичный вектор}$$

$$0 = (e'_1, e'_2) = (\tau_{11} e_1 + \tau_{12} e_2 + \dots) \cdot (\tau_{21} e_1 + \tau_{22} e_2 + \dots) = \text{произведение 1-ой строки на 2-ую, то есть строки ортогональны}$$

Таким образом, матрица  $T$  - ортогональна

*Nota.* Тогда  $A' = TAT^{-1} = TAT^T$

## 2.7. Собственные векторы и значения оператора

**Def.** Инвариантное подпространство оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  - это  $U = \{x \in V_1 \in V \mid \mathcal{A}x \in V_1\}$

*Ex.*  $V = \mathcal{P}_n(t)$  - пространство многочленов степени  $\leq n$  на  $[a; b]$ ,  $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$

*Nota.*  $\text{Ker } \mathcal{A}, \text{Im } \mathcal{A}$  - инвариантные ( $A : V \rightarrow V$ )

**Def.** Характеристическим многочленом оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  ( $\mathcal{A}x = Ax, A$  - матрица в некоем базисе) называют  $\xi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

*Nota.* Определитель  $|A - \lambda I|$  представляет собой

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

*Nota.* Уравнение  $\xi(\lambda) = 0$  называется вековым

**Def.** Собственным вектором оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающим собственному значению  $\lambda$ , называется вектор  $x \neq 0$  такой, что  $\mathcal{A}x = \lambda x$

**Def.** Собственное подпространство оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающее числу  $\lambda_i$ , определяется как  $U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$

**Def.**  $\dim U_{\lambda_i} = \beta$  - геометрическая кратность числа  $\lambda_i$

**Th.**  $\mathcal{A}x = \lambda x \iff \det(A - \lambda I) = 0, \quad A : V^n \rightarrow V^n$

$|A - \lambda I| = 0 \iff \text{rang}(A - \lambda I) < n \iff \dim \text{Im}(A - \lambda I) < n \iff \dim \text{Ker}(A - \lambda I) \geq 1$   
 $\exists x \in \text{Ker}(A - \lambda I), x \neq 0 \mid (A - \lambda I)x = 0 \iff Ax - \lambda Ix = 0 \iff Ax = \lambda x$

*Nota.* По основной теореме алгебры вековое уравнение имеет  $n$  корней (не всех из них вещественные). В конкретном множестве  $\mathcal{K} \ni \lambda$  их может не быть

**Def.** Кратность корня  $\lambda_i$  называется алгебраической кратностью

**Th.**  $\lambda_1 \neq \lambda_2 (\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2) \implies x_1, x_2$  - линейно независимы

Составим комбинацию:  $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \quad \Big| \cdot \mathcal{A}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0, \square \lambda_2 \neq 0$

$c_1 \mathcal{A}x_1 + c_2 \mathcal{A}x_2 = 0 \iff c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$

Умножим  $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$  на  $\lambda_2$ :  $c_1 \lambda_2 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$

$c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 - c_1 \lambda_2 x_1 - c_2 \lambda_2 x_2 = 0$

$c_1 x_1 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$

Так как  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  по условию,  $x_1 \neq 0$  - собственный вектор, поэтому  $c_1 = 0$ , а комбинация линейно независима

Если  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ :  $c_2 \lambda_2 x_2 = 0 \implies c_2 = 0$

*Nota.* Приняв доказательство за базу индукции, можно доказать линейную независимость для  $k$ -ой системы собственных векторов для попарно различных  $k$  чисел  $\lambda$

**Th.**  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  - различные собственные значения  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , им соответствуют  $U_{\lambda_i}$  - собственные подпространства  $V$  для  $\lambda_i$

Пусть  $e^{(1)} = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}\}, e^{(2)} = \{e_1^{(2)}, \dots, e_{k_2}^{(2)}\}, \dots$  - базисы  $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots$

Составим систему  $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$

Тогда система  $e$  - линейно независима

Составим линейную комбинацию:

$$1. \text{ Пусть } \overbrace{\alpha_1 e_1^{(1)} + \dots + \alpha_{k_1} e_{k_1}^{(1)}}^{x_1 \in U_{\lambda_1}} + \dots + \overbrace{\gamma_1 e_1^{(p)} + \dots + \gamma_{k_p} e_{k_p}^{(p)}}^{x_p \in U_{\lambda_p}} = 0$$

Тогда  $\sum_{i=1}^p x_i = 0$  ( $x_i$  - линейно независимы, так как  $\lambda_i$  - различны) - этого не может быть, так как  $\forall i \ x_i \neq 0$  (как собственный вектор)

$$2. \text{ В } \forall U_{\lambda_i} \text{ содержится } 0\text{-вектор. Тогда } \sum_{i=1}^n x_i = 0 \iff \forall x_i = 0$$

Но  $x_j = \sum_{j=1}^{k_i} c_i e_i^{(j)} = 0$  ( $e_i^{(j)}$  - базисные, то есть линейно независимы)  $\implies \forall c_j = 0$   
(комбинация должна быть тривиальна)

*Nota.* Таким образом, объединение базисов собственных подпространств  $U_{\lambda_i}$  образует линейно независимую систему в  $V^n$

Что можно сказать о размерности системы  $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$ ?

Обозначим  $S = \sum_{i=1}^p \dim U_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^p \beta_i$ , где  $\beta_i$  - геометрическая кратность  $\lambda_i$

Очевидно, что  $S \leq n$

**Th.**  $S = n \iff \exists$  базис  $V^n$ , составленный из собственных векторов

Система  $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$  состоит из собственных векторов

Если  $S = n$ , получаем  $n$  собственных векторов, линейно независимых - базис  $V^n$

Если  $\exists$  базис из  $n$  лин. незав. собственных векторов, тогда  $\dim e = S = n$

*Nota.* Условие **Th.** равносильно:  $V^n = \bigoplus_{i=1}^p U_{\lambda_i} (\lambda_i \neq \lambda_j)$

Действительно:  $\dim V^n = \sum_{i=1}^p \dim U_{\lambda_i}$  и  $\forall i, j \ U_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_j} = 0$

*Ex.* Если  $\exists n$  различных собственных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , то  $\dim U_{\lambda_i} = 1 \forall i$

**Def.** Оператор  $\mathcal{A}$  диагоназируемый, если существует базис  $e$  такой, что  $A_e$  - диагональна

**Th.**  $\mathcal{A}$  - диагоналируем  $\iff$  существует базис из собственных векторов

$\Leftarrow$   $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  - базис собственных векторов

Собственный вектор по определению:  $\exists \lambda_i \mid \mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + 0 \cdot e_n$

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1 + \sum_{k \neq 1} 0 \cdot e_k \\ \mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2 + \sum_{k \neq 2} 0 \cdot e_k \\ \vdots \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}_e \cdots e_i = \mathcal{A}e_i$$

$\Rightarrow$   $\exists f$  - базис, в котором  $A_f$  - диагональная (по **Def.**  $\mathcal{A}$  - диагоналируем)

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{Применим } \mathcal{A} \text{ к } f_i \in f$$

$$\mathcal{A}f_i = A_f f_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} f_i = \alpha_i f_i \implies \alpha_i - \text{собственное число (по def), а } f_i - \text{собственный вектор}$$

*Nota.* О связи алгебраической и геометрической кратностей ( $\alpha$  - алгебраическая,  $\beta$  - геометрическая кратность)

1.  $\alpha, \beta$  не зависят от выбора базиса

$\beta_i$  по определению  $\dim U_{\lambda_i}$  и не связана с базисом

Для  $\alpha$ : строим вековое уравнение  $|A_f - \lambda I| = 0 \implies \lambda_i$  с кратностью  $\alpha_i$ ,  $\alpha = \sum \alpha_i$

$\sqsupset A_g$  - матрица  $\mathcal{A}$  в базисе  $g$

Но  $A_g = T_{f \rightarrow g} A_f T_{g \rightarrow f}$  или для оператора

$$A_g - \lambda I = T_{f \rightarrow g} (A_f - \lambda I) T_{g \rightarrow f} = \overbrace{T_{f \rightarrow g} A_f T_{g \rightarrow f}}^{=A_g} - \overbrace{\lambda T_{f \rightarrow g} I T_{g \rightarrow f}}^{=\lambda I} = A_g - \lambda I$$

Таким образом, матрицы  $A_g - \lambda I$ ,  $A_f - \lambda I$  - подобные

**Def.** Подобные матрицы - матрицы, получаемые при помощи преобразования координат

Тогда  $\det(A_f - \lambda I) = \det(A_g - \lambda I)$  (инвариант)  $\implies$  одинаковая кратность

2. Геометрическая кратность не превышает алгебраической. У диагоналируемого опера-

тора  $\alpha = \beta$

## 2.8. Самосопряженные операторы

### 1\* Сопряженные операторы

Далее будем рассматривать операторы только в евклидовом пространстве над вещественным полем. Пространство со скалярным произведением над комплексным полем называется унитарным

*Мет.* Скалярное произведение  $(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  - функция, со свойствами:

1.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
2.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
3.  $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \implies x = 0$
4.  $(x, y) = (y, x)$  в  $\mathbb{R}$ . Но в комплексном множестве:  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ . Тогда  $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)}$

Важно, что линейность по первому аргументу присутствует и в  $\mathbb{R}$ , и в  $\mathbb{C}$ , то есть  $(\lambda x, y) \stackrel{\mathbb{R}, \mathbb{C}}{=} \lambda(x, y)$

Однако:

- $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$  в  $\mathbb{R}$
- $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$  в  $\mathbb{C}$

**Def. 1.** Оператор  $\mathcal{A}^*$  называется сопряженным для  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , если  $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$

**Def. 2.**  $\mathcal{A}^*$  сопряженный для  $\mathcal{A}$ , если  $A^* = A^T$  в любом ортонормированном базисе

**Def. 1.**  $\iff$  **Def. 2.**

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}x, y) &\stackrel{\text{на языке матриц}}{=} (AX, Y) = (AX)^T \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y \\ (x, \mathcal{A}^*y) &\stackrel{\parallel}{=} X^T \cdot (A^*Y) = (X^T A^*) \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y \implies A^* = A^T \end{aligned}$$

Lab. Очевидно существование  $\mathcal{A}^*$  для всякого  $\mathcal{A}$  (определяется в ортонормированном базисе действием  $\mathcal{A}^T$ ). Доказать единственность  $\mathcal{A}^*$  рассмотреть от противного  $(x, \mathcal{A}_1^*y) \neq (x, \mathcal{A}_2^*y)$

Свойства:

1.  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^* \quad \square (\mathcal{I}x, y) = (x, y) = (x, \mathcal{I}y) \quad \square$
2.  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
3.  $(\lambda \mathcal{A})^* = \lambda \mathcal{A}^*$
4.  $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
5.  $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$  (св-во транспонирования матриц)  
или  $((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*y)$
6.  $\mathcal{A}^*$  - линейный оператор  $(\mathcal{A}x = x', \mathcal{A}y = y' \implies \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda x' + \mu y')$

Можно использовать линейные свойства умножения матриц  $A^*(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathcal{A}^*X + \mu \mathcal{A}^*Y$

## 2\* Самосопряженный оператор

**Def.**  $\mathcal{A}$  называется самосопряженным, если  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Следствие:  $A^T = A \implies$  матрица  $A$  симметричная

Свойства самосопряженных операторов:

1.  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ,  $\lambda: \mathcal{A}x = \lambda x (x \neq 0)$ . Тогда,  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}x, y) &= (\lambda x, y) = \lambda(x, y) & (x, \mathcal{A}^*y) &= (x, \mathcal{A}y) = (x, \lambda y) \stackrel{B.C}{=} \bar{\lambda}(x, y) \\ (\mathcal{A}x, y) &= (x, \mathcal{A}y) \implies \lambda(x, y) = \bar{\lambda}(x, y) \implies \lambda = \bar{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ,  $\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1$ ,  $\mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2$  и  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Тогда  $x_1 \perp x_2$

Хотим доказать, что  $(x_1, x_2) = 0$ , при том, что  $x_{1,2} \neq 0$   
 $\lambda_1(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = (\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = (x_1, x_2)\lambda_2$   
 Так как  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то  $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \implies (x_1, x_2) = 0$

**Th.** Лемма.  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ,  $e$  - собственный вектор ( $l_{\{e\}}$  - линейная оболочка  $e$  - инвариантное подпространство для  $\mathcal{A}$ )

$$V_1 = \{x \in V \mid x \perp e\}$$

Тогда  $V_1$  - инвариантное для  $\mathcal{A}$

Нужно доказать, что  $\forall x \in V_1 \mathcal{A}x \in V_1$  и так как  $x \in V_1 \mid x \perp e$ , то покажем, что  $\mathcal{A}x \perp e$   
 $(\mathcal{A}x, e) = (x, \mathcal{A}e) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) \stackrel{x \perp e}{=} 0$

**Th.**  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$  ( $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ ), тогда  $\exists e_1, \dots, e_n$  - набор собственных векторов  $\mathcal{A}$  и  $\{e_i\}$  - ортонормированный базис

Другими словами:  $\mathcal{A}$  - диагонализирруем

Наводящие соображения:

$$Ex. 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$Ix = x = 1 \cdot x, \quad \lambda_{1,2,3} = 1$$

Здесь  $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$ ,  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  - базис из собственных векторов, ортонормированный

$$\text{Ex. 2. } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$Ox = 0, \quad \lambda_{1,2,3} = 0$$

И здесь  $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$ , так как  $0 \in U_\lambda$  и  $\forall x \quad Ox = 0 \in U_\lambda$

Ex. 3. Поворот  $\mathbb{R}^2$  на  $\frac{\pi}{4}$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \right)^2 + \frac{1}{2} = 0 - \text{ вещественных корней нет}$$

Пусть  $e_1$  - собственный вектор  $\mathcal{A}$

$e_1$  найдется, если  $\mathcal{A}x = \lambda x$  имеет нетривиальное решение  $\iff \det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0$

$\mathcal{A}$  - самосопряженный  $\implies \exists \lambda \in \mathbb{R}$

Для вектора  $e_1$  строим инвариантное подпространство  $V_1 \perp e_1$  (см. лемму),  $\dim V_1 = n - 1$

В подпространстве  $V_1$   $\mathcal{A}$  действует как самосопряженный и имеет собственный вектор

$e_2 \perp e_1$ . Для  $e_2$  строим  $V_2 \perp e_2, e_1$

Затем,  $V_3, V_4, V_5, \dots$ , в котором, найдя  $e_i$ , ортогональный всем предыдущим

Составили ортогональный базис из  $e_i$ , который можно нормировать

*Nota.* Чтобы упорядочить построение базиса, в котором  $V_i$  может брать  $\max \lambda_i$

*Nota.* Из теоремы следует, что самосопряженный оператор диагонализуется: сумма алгебраических кратностей равна  $n$  (степень уравнения), а сумма геометрических -  $\dim\{e_1, \dots, e_n\} = n$

Разложение самосопряженного оператора в спектр:

$x \in V^n \quad \{e_i\}_{i=1}^n$  - базис из собственных векторов  $\mathcal{A}$  (ортонормированный)

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (x, e_1) e_1 + \dots + (x, e_n) e_n = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

**Def.** Оператор  $P_i x = (x, e_i) e_i$  называется проектором на одномерное пространство, порожденное  $e_i$  (линейная оболочка)

Свойства:

$$1. \quad P_i^2 = P_i \quad (\text{более того } P_i^m = P_i)$$

$$2. \quad P_i P_j = 0$$

$$3. \quad P_i = P_i^* \quad ((P_i x, y) \stackrel{?}{=} (x, P_i y)) \iff (P_i x, y) = ((x, e_i) e_i, y) = (x, e_i) (e_i, y) = (x, (y, e_i) e_i) = (x, P_i y)$$

Итак, если  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  - самосопряженный и  $\{e_i\}$  - ортонормированный базис собственных векторов  $\mathcal{A}$ , то

$$x = \sum_{i=1}^n P_i x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

$$\mathcal{A}x \stackrel{y=\sum_{i=1}^n (y, e_i) e_i}{=} \sum_{i=1}^n (\mathcal{A}x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^n (x, \mathcal{A}e_i) e_i = \sum_{i=1}^n (x, \lambda_i e_i) e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i x$$

$$\iff \mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - \text{спектральное разложение } \mathcal{A}, \text{ спектр} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n \mid \lambda_i \leq \dots \leq \lambda_n\}$$

$$Ex. y = y_1 e_1 + y_2 e_2 = (y, e_1) e_1 + (y, e_2) e_2 = (\mathcal{A}x, e_1) e_1 + (\mathcal{A}x, e_2) e_2 = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$$

## 2.9. Ортогональный оператор

*Мет.* Ортогональный оператор  $T : V^n \rightarrow V^n \stackrel{def}{\iff}$  для любого ортонормированного базиса матрица  $T$  - ортогональная  $T^{-1} = T^T$

*Nota.* Иначе говоря,  $T$  - ортогональный оператор  $\iff T^{-1} = T^* \implies TT^* = I$

**Def.**  $T$  - ортогональный оператор, если  $(Tx, Ty) = (x, y)$

Следствие:  $\|Tx\| = \|x\|$ , то есть  $T$  сохраняет расстояние

*Nota.* Ранее в теореме об изменении матрицы  $A$  при преобразовании координат  $T$  - ортогональный оператор

Это необязательно, то есть можно переходить в другой произвольный базис (доказательство теоремы позволяет)

Диагонализация самосопряженного оператора: для матрицы  $A_f$

1. Находим  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
2. Находим  $e_1, \dots, e_n$  - ортогональный базис собственных векторов
3. Составляем  $T = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$  - матрица поворота базиса
4. Находим  $T_{e \rightarrow f} A_f T_{f \rightarrow e} = A_e$  - диагональная

Таким образом диагонализация самосопряженного  $\mathcal{A}$  - это нахождение композиции поворотов и симметрий, как приведение пространства к главным направлениям



## 3. Билинейные и квадратичные формы

### 3.1. Билинейные формы

**Def.** Пусть  $x, y \in V^n$ . Отображение  $\mathcal{B} : V^n \rightarrow \mathbb{R}$  (обозначается  $\mathcal{B}(x, y)$ ) называется билинейной формой, если выполнены

1.  $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \mathcal{B}(x, z) + \mu \mathcal{B}(y, z)$
2.  $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \mathcal{B}(x, y) + \mu \mathcal{B}(x, z)$

Ex. 1.  $\mathcal{B}(x, y) \stackrel{\text{в } F_{\mathbb{R}}^n}{=} (x, y)$

Ex. 2.  $\mathcal{B}(x, y) = P_y x$  - проектор  $x$  на  $y$

Для билинейной формы можно определить матрицу

**Th.**  $\{e_{i=1}^n\}$  - базис  $V_n$ ,  $u, v \in V^n$ . Тогда  $\mathcal{B}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j$ , где  $b_{ij} \in \mathbb{R}$

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$$

$$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$$

$$\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{B}\left(e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n u_i \left(\sum_{j=1}^n v_j \mathcal{B}(e_i, e_j)\right) \stackrel{\text{обозн. } \mathcal{B}(e_i, e_j) = b_{ij}}{=}$$

$$\sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n v_j b_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j b_{ij}$$

*Nota.* Составим из  $\mathcal{B}(e_i, e_j)$  матрицу  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$

**Def. 1.** Если  $\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}(v, u)$ , то  $\mathcal{B}$  - симметричная

**Def. 2.** Если  $\mathcal{B}(u, v) = -\mathcal{B}(v, u)$ , то  $\mathcal{B}$  - антисимметричная

**Def. 3.** Если  $\mathcal{B}(u, v) = \overline{\mathcal{B}(v, u)}$ , то  $\mathcal{B}$  - косоимметричная (в  $C$ )

**Def.**  $\text{rang } \mathcal{B}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \text{rang } B$

*Nota.* 1.  $\mathcal{B}$  называется невырожденной, если  $\text{rang } \mathcal{B} = n$

*Nota.* 2.  $\text{rang } \mathcal{B}_e = \text{rang } \mathcal{B}_{e'}$  ( $e, e'$  - различные базисы  $V^n$ ), то есть  $\text{rang } \mathcal{B}$  инвариантно относительно преобразования  $e \rightarrow e'$

*Ex.*  $\mathcal{B}(u, v) \stackrel{\text{ск. пр.}}{=} (u, v)$

$u = u_1 e_1 + u_2 e_2, v = v_1 e_1 + v_2 e_2$ , тогда  $\mathcal{B}(e_i, e_j) \stackrel{\text{об}}{=} b_{ij} = (e_i, e_j)$

Таким образом,  $B = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{pmatrix}$  - матрица Грама

*Ex.*  $u(t) = 1 + 3t, v(t) = 2 - t, \{e_i\} = (1, t), \mathcal{B}(u, v) = (u, v) = \int_{-1}^1 uv dt$

Тогда,  $B = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 dt & \int_{-1}^1 t dt \\ \int_{-1}^1 t dt & \int_{-1}^1 t^2 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

*Nota.* Особое значение имеют симметричные билинейные формы. Если рассмотреть матрицы симметричную билинейную форму как матрицу самосопряженного оператора, то можно найти базис (ортонормированный базис собственных векторов), в котором матрица билинейной формы диагонализируется

Этот базис называется каноническим базисом билинейной формы

## 3.2. Квадратичные формы

**Def.** Квадратичной формой называется форма  $\mathcal{B}(u, u)$ , порожденная билинейной формой  $\mathcal{B}(u, v)$

*Ex.* Поверхность:  $u = (x, y), v = (x, y, z)$

$\mathcal{B}(u, u) = b_{11}u_1u_1 + b_{12}u_1u_2 + b_{21}u_2u_1 + b_{22}u_2u_2 = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{21}xy + b_{22}y^2$

$\mathcal{B}(v, v) = \beta_{11}x^2 + \beta_{12}xy + \beta_{13}xz + \beta_{21}xy + \beta_{22}y^2 + \beta_{23}yz + \beta_{31}xz + \beta_{32}yz + \beta_{33}z^2$   
 $= \beta_{11}x^2 + \beta_{22}y^2 + \beta_{33}z^2 + (\beta_{12} + \beta_{21})xy + (\beta_{23} + \beta_{32})yz + (\beta_{13} + \beta_{31})xz$

*Мет.* Ранее уравнение поверхности второго порядка (без линейной группы, то есть сдвига):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = c$$

*Nota.* Заметим, что здесь коэффициент  $a_{ij}$  соответствуют матрице симметричной билинейной форме:

$$B(v, v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Если диагонализировать  $B(v, v)$ , то уравнение поверхности приводится к каноническому виду:

$$\mathcal{B}(v, v)_{\text{канон.}} = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2$$

Поэтому квадратичная форма, соответствующая поверхности второго порядка, рассматривается, как форма, порожденная симметричной билинейной формой

**Def.** Положительно определенная форма

- 1) Оператор  $\mathcal{A}$  называется положительно определенным, если  $\exists \gamma > 0 \mid \forall x \in V \quad (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2$
- 2)  $\mathcal{A}$  называется положительным, если  $\forall x \in V, x \neq 0 \quad (\mathcal{A}x, x) > 0$

*Nota.* Можно говорить о положительно определенном операторе  $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$

**Th.** Определения 1), 2)  $\iff \forall \lambda_i$  - собственное число  $\mathcal{A}$ ,  $\lambda_i > 0$

$\implies \lambda_i$  - собственное число,  $e_i$  - соответствующий ему собственный вектор

$$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

$$(\mathcal{A}x, x) = \left( \sum_{i=1}^n c_i \overbrace{\mathcal{A}e_i}^{\lambda_i e_i}, \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_{\min} c_i^2 = \lambda_{\min} \sum_{i=1}^n c_i^2 = \lambda_{\min} \|x\|^2$$

Если  $0 < \lambda_{\min} < \lambda_i, \lambda_i \neq \lambda_{\min}$ , то  $(\mathcal{A}x, x) > 0$

$\iff 1) \iff \exists \gamma > 0 \mid (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall x \in V$  в том числе  $x = e_i \neq 0$

$$(\mathcal{A}e_i, e_i) = \lambda_i(e_i, e_i) = \lambda_i > 0 \quad \forall i$$

*Nota.*  $\det A$  инвариантен при замене базиса,  $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n > 0$ . Тогда  $\exists \mathcal{A}^{-1}$

**Th. Критерий Сильвестра.**

$$\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n \text{ - положительно определен } \iff \forall k = 1..n \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

Угловой минор матрицы положительно определенного оператора больше нуля

$\implies \mathcal{A}$  - положительно определен, значит,  $\mathcal{A}$  диагонализуется в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  собственных векторов. Тогда,  $\mathcal{A}$  диагонализуется в базисе  $\{e_1, \dots, e_k\}, k \leq n$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \Delta_k = \det A_k \stackrel{inv}{=} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix} > 0$$

$\iff$  Метод математической индукции

$\forall k = 1..n, \Delta_k > 0$ , тогда:

1. База: для  $k = 1$   $\mathcal{A}$  - положительно определен

$$\mathcal{A}x = a_{11}x \quad |a_{11}| > 0 \implies \mathcal{A} \text{ - положительно определен}$$

2. Шаг индукции:  $\mathcal{A}_{n-1}$  - положительно определен  $\implies \mathcal{A}_n$  - положительно определен  
 $\mathcal{A}$  диагонализуется в базисе  $e_i$ , в этом базисе:

$$\mathcal{A}_e x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n \quad \text{Для } i \leq n-1 \text{ все } \lambda_i > 0$$

$$(\mathcal{A}x, x) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n, \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i^2 + \lambda_n c_n^2 - \text{знак зависит от } \lambda_n$$

$$\Delta_n = \underbrace{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}_{>0} \cdot \lambda_n \implies \lambda_n > 0 \implies (\mathcal{A}x, x) > 0$$

Ex. Поверхность:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\mathcal{B}(u, u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_k = 1 > 0 \quad \forall k$$

Положительная определенность - наличие экстремума (точнее положительная определенность матрицы Гессе  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$  в критической точке, в которой  $\nabla f = 0$ , является достаточным условием для наличия в этой точке строгого локального минимума функции)

**Def.** Оператор  $\mathcal{A}$  называется отрицательно определенным, если  $-\mathcal{A}$  - положительно определенный

$$\text{Nota. Для } -\mathcal{A} \text{ работает критерий Сильвестра: } \Delta_k(-\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k(\mathcal{A}) > 0$$

Таким образом,  $\mathcal{A}$  - отрицательно определен  $\iff \Delta_k$  чередует знаки

*Nota.* Аналогично операторам определяются положительно или отрицательно билинейные формы

$$\mathcal{B}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j = \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i = (\mathcal{A}u, v)$$

Так как  $\mathcal{B}(u, v)$  и  $\mathcal{B}(u, u)$  - числа, то  $\mathcal{B}$  называется положительно определенным, если  $\mathcal{B}(u, u) > 0$

*Nota.* После приведения  $\mathcal{B}(u, v)$  к каноническому виду, получаем  $\mathcal{B}(u, u)_{\text{канон.}} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$   
В общем случае  $\lambda_i$  любого знака, но можно доказать, что количества  $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$  постоянны по отношению к способу приведения к каноническому виду (так называемый закон инерции квадратичной формы)

## 4. Дифференциальные уравнения

### 4.1. Общие понятия

#### 4.1.1. Постановка задачи

*Пр. 1.* Скорость распада радия в текущий момент времени  $t$  пропорциональна его наличному количеству  $Q$ . Требуется найти закон распада радия:

$$Q = Q(t),$$

если в начальный момент времени  $t_0 = 0$  количество равнялось  $Q(t_0) = Q_0$   
Коэффициент пропорциональности  $k$  найден эмпирически.

Решение. Имеем уравнение  $\frac{dQ(t)}{dt} = kQ$ , ищем  $Q(t)$

$$dQ(t) = kQdt$$

$$\frac{dQ(t)}{Q} = \frac{kdt}{1}$$

содержит только  $Q$

$$d \ln Q = kdt = dk t$$

«разделение переменных»

вносим  $k$  в дифференциал

Получаем  $d(\ln Q - kt) = 0$ . Находим семейство первообразных:

$$\ln Q - kt = \tilde{C} \implies \ln Q = \tilde{C} + kt$$

$$Q = e^{\tilde{C} + kt} \stackrel{e^{\tilde{C}} = C}{=} Ce^{kt}$$

По смыслу  $k < 0$ , так как  $Q$  уменьшается. Обозначим  $n = -k, n > 0$

Тогда  $Q(t) = Ce^{-nt}$

Получили вид закона распада. Выбор константы  $C$  определен начальными условиями (НУ):

$$t_0 = 0 \quad Q(t_0) = Q_0 = C$$

Тогда, закон –  $Q^*(t) = Q_0 e^{-nt}$

*Nota.* Оба закона – общий  $Q(t) = Ce^{-nt}$  и частный  $Q^*(t) = Q_0 e^{-nt}$  – являются решением дифференциального уравнения:

Явный вид

$$Q'(t) = kQ$$

В дифференциалах

$$d \ln Q(t) - kdt = 0$$

*Пр. 2* Тело массой  $m$  брошено вверх с начальной скоростью  $v_0$ . Нужно найти закон движения  $y = y(t)$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

По II закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} \iff \vec{a} = \vec{g}$$

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -g \text{ - дифференциальное уравнение}$$

Решение.  $y''(t) = -g$

$$(y'(t))' = -g$$

$$y'(t) = - \int g dt = -gt + C_1$$

$$y(t) = \int (-gt + C_1) dt = \left[ -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2 = y(t) \right] \text{ - общий закон}$$

Коэффициенты  $C_{1,2}$  ищем из начальных условий

В задаче нет условия для  $y(t_0)$ . Возьмем  $y_0 = y(t_0) = 0$

Кроме того  $y'(t_0) = v(t_0) = v_0$

Таким образом, 
$$\begin{cases} y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Найдем  $C_1$ :  $y'(t_0) = y'(0) = -gt_0 + C_1 = v_0 \quad C_1 = v_0$

Найдем  $C_2$ :  $y(t_0) = y(0) = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2 = C_2 = 0$

Частный закон: 
$$y^*(t) = v_0t - \frac{gt^2}{2}$$

#### 4.1.2. Основные определения

**Def. 1.** Уравнение  $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$  - называется обыкновенным ДУ  $n$ -ого порядка (\*)

Ex.  $Q' + nQ = 0$  и  $y'' + g = 0$

**Def. 2.** Решением ДУ (\*) называется функция  $y(x)$ , которая при подстановке обращает (\*) в тождество

**Def. 2'.** Если  $y(x)$  имеет неявное задание  $\Phi(x, y(x)) = 0$ , то  $\Phi(x, y)$  называется интегралом уравнения (\*)

*Nota.* Разделяют общее решение ДУ - семейство функций, при этом каждое из них - решение; и частное решение - отдельная функция

**Def. 3.** Кривая с уравнением  $y = y(x)$  или  $\Phi(x, y(x)) = 0$  называют интегральной кривой

**Def. 4.** 
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \text{ - система начальных условий (**)}$$

Тогда  $\begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases}$  - задача Коши (ЗК)

*Nota.* Задача Коши может не иметь решений или иметь множество решений

**Th.**  $y' = f(x, y)$  - ДУ

$M_0(x_0, y_0) \in D$  - точка, принадлежащая ОДЗ

Если  $f(x, y)$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрерывны в  $M_0$ , то задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение  $\varphi(x, y) = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям (без док-ва)

*Nota.* Преобразуем ДУ:  $\underbrace{y' - f(x, y)}_{F(x, y(x), y'(x))} = 0$

См. определения обыкновенных и особых точек

**Def. 5.** Точки, в которых нарушаются условия теоремы, называются особыми, а решения, у которых каждая точка особая, называются особыми

**Def. 6.** Общим решением ДУ  $(*)$  называется  $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$

*Nota.*  $\Phi(x, y(x), C_1, \dots, C_n) = 0$  - общий интеграл

**Def. 7.** Решением  $(*)$  с определенными значениями  $C_1^*, \dots, C_n^*$  называется частным

*Nota.* Форма записи:

Разрешенное относительно производной  $y' = f(x, y)$

Сведем к виду:  $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{-Q(x, y)} \implies -Q(x, y)dy = P(x, y)dx \implies \boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0}$  - форма в дифференциалах

## 4.2 ДУ первого порядка (ДУ<sub>1</sub>)

*Nota.* Среди ДУ<sub>1</sub> рассмотрим несколько типов точно интегрируемых ДУ

1. Уравнение с разделяющимися переменными (УРП)
2. Однородное уравнение (ОУ)
3. Уравнение полных дифференциалов (УПД)
4. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (ЛДУ<sub>1</sub>)

Кроме этого интегрируются дифференциальные уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Рикатти и др. (см. литературу)

#### 4.2.1. УРП

**Def.**  $m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$  – уравнение с разделяющимися переменными

Решение: при  $N(y)M(x) \neq 0$  получаем

$$\frac{m(x)}{M(x)}dx + \frac{n(y)}{N(y)}dy = 0,$$

где  $y = y(x)$  – неизвестная функция (ее ищем, решая ДУ)

$$\left( \frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y' \right) dx = 0$$

Интегрируем по  $dx$ :

$$\int \left( \frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y' \right) dx = \text{const}$$

По свойствам интеграла:

$$\int \frac{m(x)}{M(x)}dx + \int \frac{n(y)}{N(y)}dy = \text{const}$$

или: 
$$\int \frac{m(x)}{M(x)}dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)}dy$$

Ex.  $xdy - ydx = 0$

$$xdy = ydx \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad (x, y \neq 0)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + \tilde{C} = \ln |\tilde{C}x|$$

$$|y| = |\tilde{C}x|$$

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$$

Заметим,  $x = y = 0$  – решение, но они учтены общим решением  $y = Cx$ , (при  $C = 0, y = 0$ ) и подстановкой в ДУ  $x = 0$

*Nota.* В процессе решения нужно проверить  $M(x) = 0$  и  $N(y) = 0$

$M(x) = 0$  при  $x = a$  и  $N(y) = 0$  при  $y = b$

$$\underbrace{m(a)N(b)}_{=0}dx + \underbrace{n(b)M(a)}_{=0}dy = 0$$

То есть  $M(x) = 0$  и  $N(y) = 0$  – решение

#### 4.2.2. ОУ

**Def. 1.** Однородная функция  $n$ -ого порядка называется функция  $f(x, y)$  такая, что

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$



Ex.  $f = \cos\left(\frac{x}{y}\right), \cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$  – нулевой порядок однородности  
 $f = \sqrt{x^2 + y^2}$  – первый порядок

**Def. 2.**  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , где  $P(x, y), Q(x, y)$  – однородные функции одного порядка, называется однородным уравнением

Решение:  $P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^k P\left(1, \frac{y}{x}\right)$

$Q(x, y) = x^k Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$

Тогда,  $P\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0$ .

Обозначим  $\frac{y}{x} = t, y' = \frac{dy}{dx} \stackrel{y=tx}{=} t'_x x + t x'_x = t'_x x + t$

$P(1, t) + Q(1, t)y' = P(1, t) + Q(1, t)(t'_x x + t) = 0$

$t'_x x + t = -\frac{P(1, t)}{Q(1, t)} \stackrel{\text{обозн}}{=} f(t)$

$t'_x x = f(t) - t$

- Если  $f(t) - t \neq 0$ , то получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x} = \ln |Cx|$$

$Cx = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} = \varphi(x, y)$  – общий интеграл

- Если  $f(t) - t = 0$ , а  $t = k$  – корень уравнения  $f(t) - t = 0$ , тогда  $y = kx$  – тоже решение

Ex.  $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$

$\frac{y}{x} = t \quad y' = t'_x x + t \quad dy = (t'_x x + t)dx$

$(x + tx)dx + (x - tx)(t'_x x + t)dx = 0$

$(1 + t) + (1 - t)(t'_x x + t) = 0$

$t'(1 - t)x + t - t^2 + 1 + t = 0$

$t'(1 - t)x = t^2 - 2t - 1$

$\frac{(1 - t)dx}{t^2 - 2t - 1} = \frac{dx}{x}$  – УРП

$\frac{(1 - t)dt}{(1 - t)^2 - 2} = -\frac{1}{2} \frac{d((1 - t)^2 - 2)}{(1 - t)^2 - 2} = -\frac{1}{2} \ln |(1 - t)^2 - 2| = \ln \frac{1}{\sqrt{(1 - t)^2 - 2}} = \ln |Cx|$

$\tilde{C}x = \frac{1}{\sqrt{(1 - t)^2 - 2}} \iff Cx^2 = \frac{1}{(1 - t)^2 - 2} \iff Cx^2((1 - t)^2 - 2) = 1$

$C((y - x)^2 - 2x^2) = 1$

$C(y^2 - 2xy - x^2) = 1$

$y^2 - 2xy - x^2 = C$  – гиперболы

$(t - 1)^2 - 2 = 0 \quad \frac{y}{x} = 1 \pm \sqrt{2} \quad y = (1 \pm \sqrt{2})x$  – асимптоты

### 4.2.3. УПД

**Def.**  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  при  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  – уравнение в полных дифференциалах

Решение:

*Мет. Th. Об интеграле НЗП.*  $\exists \Phi(x, y) \mid d\Phi = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

*Ex.*  $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$   $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (x + y)dx + (x - y)dy = \int_{(0,0)}^{(x,0)} xdx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x - y)dy = \frac{x^2}{2} \Big|_{(0,0)}^{(x,0)} + \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{(x,0)}^{(x,y)} = \frac{x^2}{2} +$$

$$xy - \frac{y^2}{2} + C - \text{общий интеграл}$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = C$$

### 4.2.4. ЛДУ

**Def.**  $y' + p(x)y = q(x)$ , где  $p, q \in C[a, b]$ , – линейное дифференциальное уравнение первого порядка

*Nota.* Будем решать методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Принцип: если удалось найти частное решение ЛДУ<sub>однор</sub> (обозначим  $y_0$ ), то общее решение ЛДУ<sub>неод</sub> можно искать в виде  $y = C(x)y_0$

**Def.** Однородное (ЛОДУ):  $y' + p(x)y = 0$

**Def.** Неоднородное (ЛНДУ):  $y' + p(x)y = q(x)$

*Ex.* Пусть  $y(x) = x^2 e^{-x}$  – частное решение ЛНДУ

А  $y_0 = x e^{-x}$ , тогда  $y = x x e^{-x} = C(x) x e^{-x}$

То есть  $C(x)$  варьируется, чтобы получить решение  $y = y(x)$

Решение:

1. для ЛОДУ  $y' + p(x)y = 0$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 - \text{УРП, тогда } \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln |\tilde{C}y| = - \int p(x)dx$$

$$\bar{y} = C e^{-\int p(x)dx} = C y_0 - \text{общее решение ЛОДУ}$$

2. для ЛНДУ  $y' + p(x)y = q(x)$

Ищем  $y(x)$  в виде  $y = C(x)y_0$

$$C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$$

$$C'(x)y_0 + C(x)\underbrace{(y_0' + p(x)y_0)}_{=0} = q(x)$$

$$C'(x) = \frac{q(x)}{y_0} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$$

$$\text{Окончательно, } y(x) = \left( \left( \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C \right) dx \right) e^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int qe^{\int p(x)dx} = \bar{y} + y^*$$

### 4.3. Существование и единственность решения

*Мет. Th.* Для задачи Коши  $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$  если  $\exists U(M_0)$ , в которой  $f(x, y) \in C_{U(M_0)}$  и

$\frac{\partial f}{\partial y}$  ограничена в  $U(M_0)$ , то в  $M_0$   $\exists! y(x)$  – решение ДУ

Решение ДУ называется особым, если в любой его точке нарушается **Th.** существования и единственности, то есть через каждую точку проходит несколько интегральных кривых

**Def.** Уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  задает поле интегральных кривых, заполняющих область  $D$ . Соответственно точки  $D$  могут быть особыми или обыкновенными (выполняются условия **Th.** )

Условия особого решения  $P(x, y)$  или  $Q(x, y) = 0$

$$\text{Ex. 1.} \quad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \quad \longrightarrow \quad \sqrt{1-y^2}dx - dy = 0$$

Обычное решение

$$\arcsin y = x + C$$

$$y = \sin(x + C)$$

Особое решение:

$$p = \sqrt{1-y^2} = 0$$

$$1 - y^2 = 0 \rightarrow y = \pm 1$$

$$\text{Ex. 2.} \quad \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy = dx \quad \longrightarrow \quad y^{-\frac{2}{3}}dy - 3dx = 0$$

$$y^{\frac{1}{3}} = x + C$$

$$y = (x + C)^3$$

$$dy - 3y^{-\frac{2}{3}} = 0$$

$$P = 0 \implies y = 0$$

## 4.4. ДУ высших порядков

*Nota.* Рассмотрим три типа интегрируемых ДУ

1\* Непосредственно интегрирование

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\text{Решение: } y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int \left( \int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2$$

*Ex.* См. Задачу 2 в начале

2\* ДУ<sub>2</sub>, не содержащие  $y(x)$

$$F(x, y'(x), y''(x)) = 0$$

Замена  $y'(x) = z(x)$ , получаем:

$$F(x, z(x), z'(x)) = 0 - \text{ДУ}_1$$

$$\text{Ex. } (1+x^2)y'' + (1+y'^2) = 0 \quad y' = z$$

$$(1+x^2)z' + 1 + z^2 = 0$$

$$z' + \frac{1+z^2}{1+x^2} = 0 \iff z' = -\frac{1+z^2}{1+x^2} \iff \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\arctan x = \arctan(-x) + C$$

$$z = \frac{-x + \tan(C)}{1 + x \tan C} = y'$$

$$y = \int \frac{-x + \tan(C)}{1 + x \tan C} dx = \dots$$

3\* ДУ<sub>2</sub>, не содержащие  $x$

$$F(y(x), y'(x), y''(x)) = 0$$

$$\text{Замена } y'(x) = z(y) \quad y''(x) = \frac{dz(y(x))}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{dy}{dx} = z'_y y' = z'_y z$$

$$\text{ДУ: } F(y, z(y), z'(y)) = 0$$

$$\text{Ex. } y'' + y'^2 = yy'$$

$$y' = z(y) \quad y'' = z'_y z$$

$$z'_y z + z^2 = yz \quad | : z \neq 0 \quad z = 0 \implies y = \text{const}$$

$$z' + z = y - \text{ЛДУ}$$

$$1) \quad z' + z = 0$$

$$\ln |z| = -y + C$$

$$z = Ce^{-y}$$

$$2) \quad C'(y)e^{-y} = y$$

$$C'(y) = ye^y$$

$$C(y) = \int ye^y dy = \int y de^y = ye^y - e^y + C_1$$

$$z(y) = (ye^y - e^y + C_1)e^{-y} = \underbrace{y - 1}_{z^*} + \underbrace{C_1 e^{-y}}_{\bar{z}}$$

$$y' = C_1 e^{-y} + y - 1 \implies ? \dots$$

## 4.5. ЛДУ<sub>2</sub>

### 4.5.1. Определения

**Def.**  $a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y = f(x)$ , где  $y = y(x)$  – неизвестная функция, – это линейное дифференциальное уравнение  $n$ -ого порядка

*Nota.* Если  $n = 2$ , то ЛДУ<sub>2</sub>,  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = f(x)$  – разрешенное относительно старших производных ЛДУ<sub>2</sub>

*Nota.* Если  $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$  – ЛДУ<sub>n</sub> с постоянными коэффициентами

### 4.5.2. Решение ЛДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Для любых  $p, q \in \mathbb{R}$  существует уравнение:  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  и  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 + \lambda_2 = -p, \lambda_1\lambda_2 = q$  – корни

Назовем уравнение характеристическим (ХрУ) 🐾

*Nota.*  $\lambda_{1,2}$  могут быть только

1. вещественными различными;
2. вещественными одинаковыми ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  – корень 2-ой кратности);
3.  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Запишем ЛДУ<sub>2</sub> через  $\lambda_{1,2}$ :

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2y = f(x)$$

$$y'' - \lambda_1y' - \lambda_2y' + \lambda_1\lambda_2y = f(x)$$

$$(y' - \lambda_2y)' - \lambda_1(y' - \lambda_2y) = f(x)$$

Обозначим  $u(x) = y' - \lambda_2y$

$$\text{Тогда ДУ: } \begin{cases} y' - \lambda_2y = u(x) \\ u' - \lambda_1u = f(x) \end{cases}$$

Решим:  $u' - \lambda_1u = f(x)$

$$1) \quad u' - \lambda_1u = 0$$

$$2) \quad u' - \lambda_1u = f(x)$$

$$\frac{du}{u} = \lambda_1 dx$$

$$u(x) = C_1(x)e^{\lambda_1 x}$$

$$\bar{u} = C_1 e^{\lambda_1 x}$$

Далее  $u(x)$  следует подставить в ДУ с  $f(x)$

Поступим лучше, решим ЛОДУ<sub>2</sub> ( $f(x) = 0$ )

$$\text{Эта система } \begin{cases} y' - \lambda_2y = u(x) \\ u' - \lambda_1u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' - \lambda_2y = u(x) \\ u = C_1 e^{\lambda_1 x} \end{cases}$$

Решим  $y' - \lambda_2y = C_1 e^{\lambda_1 x}$ :

$$\begin{array}{ll} 1) y' - \lambda_2 y = 0 & 2) y' - \lambda_2 y = C_1 e^{\lambda_1 x} \\ \bar{y} = C_2 e^{\lambda_2 x} & y(x) = C_2(x) e^{\lambda_2 x} \\ & C_2'(x) e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\lambda_1 x} \\ & C_2'(x) = C_1 e^{\lambda_1 - \lambda_2 x} \end{array}$$

Далее все зависит от  $\lambda_{1,2}$

Мет.  $y'' + py' + qy = f(x)$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$

Для начала  $y'' + py' + qy = 0$  – ЛОДУ<sub>2</sub>

$$C_2'(x) = C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$$

Рассмотрим три случая для  $\lambda_{1,2}$ :

1.  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$  – случай различных вещественных корней

$$C_2(x) = \int C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = \frac{C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_2 = \frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} + C_2$$

Тогда,  $y(x) = C_2(x) e^{\lambda_2 x} = (\tilde{C}_1 e^{\lambda_1 - \lambda_2 x} + C_2) e^{\lambda_2 x} = \boxed{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$  – решение ЛОДУ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

2.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$  – случай вещественных кратных корней

$$C_2'(x) = C_1 e^{0x} = C_1 \implies C_2(x) = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$$

$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x} = \boxed{C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} = y(x)}$  – решение ЛОДУ,  $\lambda_1 = \lambda_2$

3.  $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$  – случай комплексно сопряженных корней

Так как  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то аналогично первому случаю  $y(x) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x+C_2e} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$  – решение ЛОДУ

Получим  $\mathbb{R}$ -решения:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (C_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)) = e^{\alpha x} (C_1 + C_2) \cos \beta x + e^{\alpha x} i (C_1 - C_2) \sin \beta x$$

$$\operatorname{Re} y(x) = \underbrace{(C_1 + C_2) e^{\alpha x} \cos \beta x}_{u(x)}, \operatorname{Im} y(x) = \underbrace{(C_1 - C_2) e^{\alpha x} \sin \beta x}_{v(x)} \quad y(x) = u(x) + iv(x)$$

Так как  $y(x)$  – решение ЛОДУ:

$$u'' + iv'' + pu' + ipv' + qu + iqv = 0$$

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0 \quad \forall x \in [\alpha; \beta], \text{ то есть } z \in \mathbb{C} \text{ и } z = 0$$

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0, \\ v'' + pv' + qv = 0 \end{cases}$$

Тогда можно считать решением  $y(x) = u(x) + v(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$  – решение ЛОДУ,  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

*Nota.* Ни про одно из полученных решений нельзя сказать, что оно общее (см. след. пункт)

Также еще не решено ЛНДУ<sub>2</sub>

### 4.5.3. Свойства решений ЛДУ<sub>2</sub>

**Def.**  $Ly \stackrel{\text{def}}{=} y''(x) + py'(x) + qy(x)$  – линейный дифференциальный оператор

$$L : E \subset C^2_{[a;b]} \rightarrow F \subset C_{[a;b]}$$

*Nota.* Все определения линейного пространства, базиса, линейной независимости, линейной оболочки сохраняются. А ЛОДУ<sub>2</sub> записывается как  $Ly = 0$ , ЛНДУ<sub>2</sub> –  $Ly = f(x)$

**Th. 1.**  $\exists y_1, y_2$  – частные решения ЛОДУ, то есть  $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$

Тогда  $Ly = 0$ , если  $y = C_1y_1 + C_2y_2$

$$Ly = y'' + py' + qy = (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1Ly_1 + C_2Ly_2 = 0$$

**Def.**  $y_1, y_2$  – линейно независимы  $\iff C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \implies \forall C_1 = 0 \iff \nexists k : y_2 = ky_1, k \in \mathbb{R}$

*Mem.* Для определения линейной независимости в Линейной алгебре мы использовали rang A или  $\det A$

Введем индикатор линейной независимости. Заметим, что если  $y_1, y_2$  – линейно зависимы, то  $y'_1, y'_2$  – линейно зависимы

**Def.**  $W \stackrel{\text{обозн}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1(x)}{dx} & \frac{dy_2(x)}{dx} \end{vmatrix}$  – определитель Вронского или вронскиан

**Th. 2.**  $y_1, y_2$  – линейно зависимы  $\implies W = 0$  на  $[a; b]$

$$\begin{matrix} y_2 = ky_1 \\ y'_2 = ky'_1 \end{matrix} \implies W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = 0$$

**Th. 3.**  $x_0 \in [a; b]$ , пусть  $W(x_0) = W_0$ . Тогда:

$$W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \forall x \in [a; b]$$

$$W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$$

Пусть  $y_1(x), y_2(x)$  – решения ЛОДУ,

$$\begin{cases} Ly_1 = 0 \\ Ly_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y''_1 y_2 + p y'_1 y_2 + q y_1 y_2 = 0 \\ y''_2 y_1 + p y'_2 y_1 + q y_1 y_2 = 0 \end{cases}$$

$$(y'_1 y_2 - y'_2 y_1) + p(y_1 y_2 - y_2 y_1) = 0$$

$$W'(x) + pW(x) = 0$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -pdx$$

$$W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^x p dx}$$

$$W_0 = Ce^{-\int_{x_0}^{x_0} p dx} = C$$

$$\text{Тогда } W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^x p dx} \iff \begin{cases} W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \\ W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \end{cases} \quad \forall x \in [a; b]$$

**Th. 4.**  $y_1, y_2$  – линейно независимы  $\implies W(x) \neq 0$  на  $[a; b]$

Докажем от противного

$$\text{Пусть } \exists x_0 \in [a; b] \mid W(x_0) = 0 \implies W(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b] \iff \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \quad \forall x \in [a; b]$$

Можно поделить на  $y_1^2$ , так как  $y_1, y_2$  – линейно независимы. Тогда  $\frac{W}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \implies$

$$\frac{y_2}{y_1} = k \in \mathbb{R} \iff y_2 = ky_1 \text{ – линейно зависимы, противоречие}$$

*Nota.* Общее решение ЛОДУ<sub>2</sub> – это семейство всех решений (интегральных кривых), каждое из которых проходит через точку  $(x_0, y_0) \in D$  и ему соответствует свой и единственный набор  $(C_1, C_2)$

**Th. 5.**  $y_1, y_2$  – линейно независимые решения ЛОДУ, тогда  $\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$  – общее решение ЛОДУ<sub>2</sub>

Нужно убедиться, что через точку  $(x_0, y_0) \in D$  проходит и только одна кривая  $\bar{y}(x_0)$

$$\text{Зададим НУ: } \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}, \end{cases} \quad \text{тогда } \begin{cases} \bar{y}(x_0) = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} \\ \bar{y}'(x_0) = C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' \end{cases} \text{ – задача Коши}$$

Знаем, что  $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$  – решение (просто, не общее)

$$\text{Тогда в } x_0 \begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = \bar{y}_0 \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = \bar{y}_0' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_0' \end{pmatrix} \text{ – система крамеровского типа}$$

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = W_0 \neq 0 \iff \exists! (C_1, C_2) \text{ – решение СЛАУ}$$

Таким образом через всякую  $x_0$  проходит одна кривая  $\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$



*Nota.* Вывод: если найдены какие-либо линейно независимые  $y_1, y_2$ , то общее решение ЛОДУ<sub>2</sub> будет  $C_1 y_1 + C_2 y_2 = \bar{y}$

**Def.** Такие  $\{y_1, y_2\}$  называется ФСР ЛОДУ<sub>2</sub>

*Nota.* Тогда, найденные решения ЛОДУ – все общие

1.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ : ФСР  $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}, \lambda_i \in \mathbb{R}$
2.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ : ФСР  $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\}$
3.  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ : ФСР  $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

**Th. 6.** Решение ЛНДУ  $Ly = f(x)$

$\bar{y}(x) : L\bar{y} = 0$  – общее решение ЛОДУ

$y^*(x) : Ly^*(x) = f(x)$  – частное решение ЛНДУ

Тогда  $y(x) = \bar{y} + y^*$  – общее решение ЛНДУ

Lab.

*Mem.* ЛДУ<sub>2</sub>

1) Решим  $y'' + py' + qy = 0$  (ХрУ:  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ )

ФСР для всех случаев:

1.  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$
2.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\}$
3.  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \rightarrow \{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

$\bar{y} = l_{\{\text{ФСР}\}}$

2) Изначально  $y'' + py' + qy = f(x)$

Доказали:  $y(x) = \bar{y} + y^*$ , где  $\bar{y} = \sum_{i=1}^n C_i y_i$  – вектора из ФСР, а  $y^*$  – частное решение (какое-либо) ЛНДУ

*Nota.* Рассмотрим два метода поиска  $y^*$  для ЛДУ<sub>2</sub>

1. Метод неопределенных коэффициентов для случая специальной правой части
2. Метод (Лагранжа) вариации произвольных постоянных (универсальный)

## 1. Специальная правая часть

Ех.  $y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x}$  (♥)

Наводящие соображения: заметим, что  $y = e^{\alpha x}$  не меняет свой вид при дифференцировании, так же как и  $y = P_n(x)$ ,  $y = A \cos bx + B \sin bx$

Имеет смысл искать частные решения для (♡) в виде  $y = Ae^{3x}$

$$(Ae^{3x})'' - 3(Ae^{3x})' + 2Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

$$9A - 9A + 2A = 2 \implies A = 1, \text{ то есть } y^* = e^{3x}$$

*Nota.* Если правая часть ЛНДУ содержит произведения  $e^{ax}, P_n(x), \cos bx, \sin bx$ , то  $y^*$  ищем в виде специальной правой части

**Def.** Специальная правая часть (СПЧ) – функция  $f(x) = e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$  (обозначим  $k = a \pm ib$ )

Частные случаи:

$$1. f(x) = P_n(x)e^{ax} \quad (b = 0)$$

$$2. f(x) = A \cos bx + B \sin bx \text{ – гармоника} \quad (a = 0, n = m = 0)$$

$$3. f(x) = P_n(x) \quad (a = b = 0)$$

Метод: Решение ищется в виде  $y^* = e^{ax}(\bar{P}_l \cos bx + \bar{Q}_l(x) \sin bx)$ , где  $a, b$  – коэффициенты СПЧ,  $l = \max(m, n)$ ,  $\bar{P}_l, \bar{Q}_l$  – многочлены в неопределенных коэффициентах

$$\text{Ex. 1. (♡): } y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} = e^{3x}(2 \cos 0x) \quad (k = 3 \pm 0 = 3)$$

$$y^* = e^{3x}(\bar{P}_{l=0}(x) \cos 0x) = e^{3x} \cdot A$$

$$\text{Ex. 2. Однако, для этого уравнения: } y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

$$\text{СПЧ: } e^{2x} = e^{2x}(1 \cos 0x + B \sin 0x) \quad k = a \pm ib = 2$$

$$\left. \begin{aligned} y^* &= Ae^{2x} \\ y^{*'} &= 2Ae^{2x} \\ y^{*''} &= 4Ae^{2x} \end{aligned} \right\} \text{ДУ} \longrightarrow \begin{aligned} 4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} + 2Ae^{2x} &= e^{2x} \\ 4A - 6A + 2A &= 1 \\ 0A &= 1 \end{aligned} \quad \text{– нельзя найти } A \quad \text{😬}$$

$$\text{Решим ХрУ: } \lambda_2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

В этом случае число  $k$ , соответствующее СПЧ, совпадает с корнем ХрУ

Исследуем ситуацию на примере СПЧ  $f(x) = P_n(x)e^{ax}$

$$\text{Пусть дано ДУ: } y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}$$

$$\text{Для него ХрУ: } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \implies \lambda_{1,2} \text{ – корни}$$

$$\text{Ищем } y^* = \bar{P}_n(x)e^{ax}$$

$$y^{*'} = \bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\bar{P}_n(x)e^{ax}$$

$$y^{*''} = \bar{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\bar{P}_n(x)e^{ax}$$

Получаем:

$$\bar{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\bar{P}_n(x)e^{ax} + (\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\bar{P}_n(x)e^{ax})p + \bar{P}_n(x)e^{ax}q = P_n(x)e^{ax}$$

$$\bar{P}_{n-2}(x)e^{ax} + (2a + p)\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + (a^2 + pa + q)\bar{P}_n(x)e^{ax} = P_n(x)e^{ax}$$

$$\bar{P}_{n-2}(x) + (2a + p)\bar{P}_{n-1}(x) + (a^2 + pa + q)\bar{P}_n(x) = P_n(x)$$

Заметим, что если  $a$  – корень ХрУ, то есть  $a \pm ib = a = k = \lambda_i$  (пусть 1-ой кратности), то  $a^2 + pa + q = 0$  и степень левой части понижается до  $n - 1$

Если  $a$  – корень ХрУ 2-ой кратности, то есть  $a^2 + pa + q = \left(a + \frac{p}{2}\right)^2 = 0 \iff 2a + p = 0$ , то степень левой части понижается на 2

Чтобы сделать уравнение для  $\bar{P}_n$  решаемым, домножим  $y^*$  на  $x^r$ , где  $r$  – число совпадений  $k = a \pm ib$  с корнем ХрУ  $\lambda_i$  (другими словами, кратность  $\lambda_i$ , с которым совпадает  $k$ )

Окончательно, метод выглядит так: для уравнения  $y'' + py' + qy = e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$ , где  $\lambda_{1,2}$  – корни ХрУ,  $k = a \pm ib$

Частное решение выглядит так:  $y^* = x^r e^{ax} (\bar{P}_l(x) \cos bx + \bar{Q}_l(x) \sin bx)$ , где  $l = \max(m, n)$ ,  $r$  – кратность корня ХрУ  $\lambda_i = k$

Обобщим для ЛДУ<sub>n</sub>:  $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$

ХрУ выглядит так:  $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0$

Правило построения ФСР для  $\bar{y}$ , общего решения однородного ДУ:

1. Всякому  $\lambda_i$  – одиночному  $\mathbb{R}$ -корню ХрУ сопоставляем  $y_i = e^{\lambda_i x}$
2.  $\mathbb{R}$ -корню  $\lambda$  кратности  $s$  сопоставляем набор  $\{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda x}\}$
3. Всякой одиночной паре  $\lambda_{j_1, j_2} = \alpha_j \pm i \beta_j$  соответствует пара  $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$
4. Комплексной паре  $\lambda = \alpha \pm i \beta$  кратности  $t$  соответствует набор  $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{t-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{t-1} e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

*Nota.* Количество векторов  $y_i$  в ФСР равно порядку  $n$  дифференциального уравнения

Специальная правая часть ищется в виде  $y^* = x^r e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$ , где  $r$  – кратность  $\mathbb{R}$ -корня или  $\mathbb{C}$ -пары, с которыми совпадает  $k = a \pm ib$

*Ex.* Вернемся к  $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

$$\left. \begin{aligned} y^* &= Ax^1 e^{2x} \\ y^{*'} &= Ae^{2x} 2Ax e^{2x} \\ y^{*''} &= 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Ax e^{2x} \end{aligned} \right\} \rightarrow (4 - 6 + 2)Ax e^{2x} + (4 - 3)Ae^{2x} = e^{2x} \quad A = 1$$

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + x e^{2x}$$

## Лагранжа

*Мет.* Решение ЛДУ<sub>1</sub>:  $y' + py = f(x)$

- 1) Решаем ЛОДУ  $y' + py = 0$ , получаем ФСР  $\bar{y} = Cy_0$
- 2) Решаем ЛНДУ, ищем решения в виде  $y(x) = C(x)y_0$ , получаем  $C'(x)y_0 = f(x) \rightarrow C(x)$

*Nota.* Введем аналогичный метод для ЛДУ<sub>2</sub>:

1 этап)  $y'' + py' + qy = 0$  – ЛОДУ,  $\lambda_{1,2}$  – корни, соответствующие ФСР  $\{y_1, y_2\}$

Получаем общее решение  $\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2 этап) Варьируем  $C_1$  и  $C_2$ , но теперь нужны два условия для их определения. Одним из них является само ДУ

$$\text{Ex. } y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$$

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + y^*$$

$$(g(x) + C_1)e^x + (h(x) + C_2)e^{2x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + g(x)e^x + h(x)e^{2x}$$

$$\text{Подберем } g, h: \frac{e^{2x}}{g}e^x + \frac{e^x}{h}e^{2x} = e^{3x} \text{ или } \frac{-e^{2x}}{g}e^x + \frac{2e^x}{h}e^{2x} = e^{3x}$$

Заметим, что  $C'_1(x)$  во втором случае  $g' = -2e^{2x}$ , а  $C'_2 = 2e^x$

$$\text{Тогда } C'_1(x)e^x + C'_2(x)e^{2x} = -2e^{3x} + 2e^{3x} = 0$$

*Nota.* Подставим  $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$  в ДУ

$$\text{Получаем производную } y'(x) = C'_1(x)y_1 + C_1(x)y'_1 + C'_2(x)y_2 + C_2(x)y'_2$$

$$\text{Требуем } C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0$$

$$\text{Тогда вторая производная: } y''(x) = C'_1(x)y'_1 + C_1(x)y''_1 + C'_2(x)y'_2 + C_2(x)y''_2$$

$$C'_1(x)y'_1 + C_1(x)y''_1 + C'_2(x)y'_2 + C_2(x)y''_2 + pC_1(x)y'_1 + pC_2(x)y'_2 + qC_1(x)y_1 + qC_2(x)y_2 = f(x)$$

$$\begin{matrix} C_1(x)Ly_1 + C_2(x)Ly_2 + C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = f(x) \\ = 0 \qquad \qquad = 0 \end{matrix}$$

$$\text{Итак, система для определения } C_1(x), C_2(x): \begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0 \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = f(x) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix}}_{=W} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{по Крамеру}} \begin{matrix} C'_1(x) = \frac{W_1}{W} \\ C'_2(x) = \frac{W_2}{W} \end{matrix}$$

*Nota.* Обобщив метод на  $n$ -ый порядок систему, получим

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ \vdots \\ C'_{n-1}(x) \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Lab. Доказать, что  $\bar{y} + y^*$  - общее решение ЛНДУ

**Th.**  $Ly = f(x), y = \bar{y} + y^*$  - решение  $Ly = f(x)$ .

Тогда  $\bar{y} + y^*$  - общее решение

Правда ли, что найдется единственный набор констант  $C_1, \dots, C_n$ , которые удовлетворяют

начальным условиям 
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \end{cases}$$

Так как  $\bar{y} + y^*$  - решение, то 
$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_{01} + C_2 y_{02} + \dots + C_n y_{0n} + y_0^* \\ y'_0 = C_1 y'_{01} + \dots + y_0^{*'} \\ \vdots \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y_0 - y_0^* = \sum_{i=1}^n C_i y_{0i} \\ y'_0 - y_0^{*'} = \sum_{i=1}^n C_i y'_{0i} \\ \vdots \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} y_{01} & y_{02} & \dots & y_{0n} \\ y'_{01} & y'_{02} & \dots & y'_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{01}^{(n)} & y_{02}^{(n)} & \dots & y_{0n}^{(n)} \end{pmatrix}}_{\det W \neq 0} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - y_0^* \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Таким образом система имеет единое решение  $(C_1, \dots, C_n)$ , которое удовлетворяет начальным условиям

**Th.**  $Ly = f_1(x) + f_2(x)$

Пусть  $Ly_1^* = f_1(x)$  и  $Ly_2^* = f_2(x)$ , тогда  $Ly^* = f_1 + f_2$ , где  $y^* = y_1^* + y_2^*$

$$Ly^* = L(y_1^* + y_2^*) = Ly_1^* + Ly_2^* = f_1(x) + f_2(x)$$

## 4.6. Системы ДУ

**Def.** Пусть дан набор функций  $y_1, \dots, y_n$ . Система, связывающие эти функции, то есть 
$$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$
, называется системой дифференциальных уравнений (СДУ)

Механический смысл: пусть  $\mathbb{R}^n$  – фазовое пространство, пространство состояний системы,  $t$  – время,  $x_i$  – координаты точки  $M$  в  $\mathbb{R}^n$

Тогда такая система ДУ

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, \{x_i\}) \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(t, \{x_i\}) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, \{x_i\}) \end{cases}$$

описывает состояние исследуемой системы во времени, причем  $\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$  – скорости

*Nota.* Такая система называется нормальной, то есть все уравнения разрешены относительно производных

*Nota.* Всякое ДУ<sub>n</sub> можно рассмотреть как СДУ:  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \iff \begin{cases} y = y_1(x) \\ y' = y_2(x, y_1) \\ \vdots \end{cases}$

Можно сделать и обратное – свести СДУ к ДУ<sub>n</sub> с помощью метода исключения. Рассмотрим на примере СДУ 2-ого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y, t) \\ \frac{dx}{dt} = g(x, y, t) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{y} = f(x, y, t) \\ \dot{x} = g(x, y, t) \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} g + \frac{\partial f}{\partial y} f \\ \dot{x} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Свели систему ДУ к ДУ<sub>2</sub>:  $\ddot{y} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} g + \frac{\partial f}{\partial y} f$

*Nota.* Чтобы свести к ДУ систему ДУ  $\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

нужно исключить  $n - 1$  выражение  $\dot{x}_i$ , для этого взять производные  $\frac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}$

Таким образом общий порядок СДУ (сумма порядков старших производных) будет равен порядку ДУ

$$\begin{aligned} Ex. \quad \begin{cases} \dot{y} = y + 5x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} &\iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5\dot{x} \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5(-y - 3x) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 15x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \\ \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 3(\dot{y} - y) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} &\iff \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0 \end{aligned}$$

ХрУ 🐼:  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i \implies \bar{y} = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

Найдем  $x(t)$  из 1-ого ДУ:  $\dot{\bar{y}} = -e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = e^{-t}((C_2 - C_1) \cos t - (C_1 + C_2) \sin t)$

$5x = \dot{\bar{y}} - \bar{y} = e^{-t}((C_2 - 2C_1) \cos t - (C_1 + 2C_2) \sin t)$

$$\begin{cases} y(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ x(t) = \frac{1}{5}e^{-t}((C_2 - 2C_1) \cos t - (C_1 + 2C_2) \sin t) \end{cases}$$

*Nota.* Метод исключения сохраняет линейность, поэтому линейная СДУ (с постоянными коэффициентами) сводится к ЛДУ (с постоянными коэффициентами)

*Nota.* СДУ из *Ex.* не содержала  $t$  в явном виде. Такие СДУ называются автономными

### Матричный метод

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Обозначим  $(y_1, \dots, y_n) = Y$  – вектор функций,  $\{a_{ij}\} = A$  – матрица СДУ

Тогда СДУ запишется в виде  $Y' = AY$  (однородная СДУ, так как нет  $f(x)$ )

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – собственные числа  $A$  и  $h_i$  – собственный вектор для  $\lambda_i$

Будем искать решение  $Y$  в виде  $Y = \ln e^{\lambda_i x}$

Подставим в СДУ:  $Y' = \lambda_i h_i = e^{\lambda_i x} = \underbrace{A h_i e^{\lambda_i x}}_Y = AY$

$$Ex. \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 8x + 3y \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 8 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

$$h_1 : \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h_2 : \left( \begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{5t}$$

$$\text{Задача Коши: } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ -2C_1 + 4C_2 \end{pmatrix} \rightarrow C_1 = -\frac{1}{3}, C_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Итак } \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{5t} \end{cases}$$

Решения в *Ex.* линейно независимы (то есть  $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$ , где  $Y_1 = h_1 e^{\lambda_1 t}$ ), так как  $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

Для кратных собственных  $\mathbb{R}$ -чисел нельзя построить базис из  $h_i$ , а чтобы составить общее решение СДУ, нужно  $n$  линейно независимых решений  $Y_i$  (ФСР). В этом случае используют жорданов базис (см. литературу)

Для  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$  можно искать решения в том же виде, но потом свести к вещественным функциям (см. литературу 🐶)

## 4.7. Теория устойчивости (элементы)

Наводящие соображения: возьмем грузик, подвешенный на стержне. Когда он находится снизу, он находится в устойчивом равновесии, но когда сверху – в неустойчивом

**Def.** Пусть даны СДУ<sub>2</sub>:  $\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y) \\ \dot{y} = f_2(t, x, y) \end{cases}$ , НУ<sub>1</sub>:  $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$  и НУ<sub>2</sub>:  $\begin{cases} \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$

Решение СДУ  $x = x(t), y = y(t)$  называется устойчивым по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \begin{cases} \forall x, y \\ |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases} \quad \forall t > 0 \begin{cases} |\tilde{x} - x| < \varepsilon \\ |\tilde{y} - y| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{Или } \begin{cases} \Delta x(t) \rightarrow 0 \\ \Delta y(t) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ при } t \rightarrow +\infty \text{ и } \begin{cases} \Delta x_0 \rightarrow 0 \\ \Delta y_0 \rightarrow 0 \end{cases}$$

*Nota.* Малое воздействие приводит к малым отклонениям от исходной траектории

*Nota.* Обычно рассматривают отклонение решений от нулевого, то есть  $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

*Ex.*  $\dot{y} + y = 1$ , НУ:  $y(0) = 1, \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$  (малое отклонение)

$$\begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow C = 0 \quad \begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \rightarrow C = \tilde{y} - 1$$

$\tilde{y} - y = (\tilde{y}_0 - y)e^{-t} + 1 - 1 = (\tilde{y}_0 - 1)e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  - устойчива 🤖

Классификация точек покоя. Будем рассматривать СДУ (автономную)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = kx + my \end{cases} \quad \dot{X} = AX \implies \det(A - \lambda E) = 0$$

Далее все зависит от  $\lambda_{1,2}$

Заметим, что функции  $x = 0$  и  $y = 0$  являются решениями (подстановка)

Причем, точка  $(0, 0)$  – особая, так как СДУ  $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{kx + my}{ax + by}$

Рассмотрим различные случаи значений  $\lambda_{1,2}$ :

1)  $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}^-$

Тогда решения СДУ будут  $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ ,  $\dot{x}(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$

Подставляем в первое уравнение, из него получаем  $y(t) = \frac{1}{b}(C_1(\lambda_1 - a)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - a)e^{\lambda_2 t})$

Введем начальные условия  $y(0) = y_0, x(0) = x_0$

$$\text{Решение задачи Коши: } \begin{cases} x(t) = \frac{ax_0 + by_0 - x_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0 \lambda_1 - ax_0 - by_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = \frac{1}{b} \left( \frac{ax_0 + by_0 - x_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 - a) e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0 \lambda_1 - ax_0 - by_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 - a) e^{\lambda_2 t} \right) \end{cases}$$



При  $t \rightarrow +\infty$   $|e^{\lambda_i t}| < 1$  и  $\forall \varepsilon > 0$   $\begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases} \implies \begin{cases} |\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \\ |\tilde{y}(t) - y(t)| < \varepsilon \end{cases}$   
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ , то есть  $(0, 0)$  – устойчивое решение

$$Ex. 1. \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{dx}{x} = -dt \\ \frac{dy}{y} = -2dt \end{cases} \iff \begin{cases} x = C_1 e^{-t} \\ y = C_2 e^{-2t} \end{cases} + \text{Н.У.} \implies \begin{cases} x = x_0 e^{-t} \\ y = y_0 e^{-2t} \end{cases}$$

Изобразим интегральные кривые (фазовый портрет системы): СДУ  $\implies \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \implies y = Cx^2$

В этом примере получается семейство парабол, при  $t \rightarrow +\infty$  они все стремятся к  $(0, 0)$  – устойчивому узлу

2)  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

$$Ex. 2. \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \begin{cases} x = x_0 e^t \\ y = y_0 e^{-2t} \end{cases}$$

Фазовый портрет  $\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{x} \implies y = \frac{C}{x^2}$

Гиперболы при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к точками  $(\pm\infty, 0)$  и образуют так называемое седло неустойчивости

3)  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$

$$Ex. 3. \begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(x_0 \cos t + y_0 \sin t) \\ y(t) = e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t) \end{cases} \quad - \text{устойчивая}$$

Фазовый портрет: перейдем в ПСК  $\begin{matrix} x = \rho \cos \varphi & x_0 = A \cos \varphi_0 \\ y = \rho \sin \varphi & y_0 = A \sin \varphi_0 \end{matrix}$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \rho \cos \varphi = e^{-t} = A \cos(t - \varphi_0) \\ \rho \sin \varphi = e^{-t} = A \sin(t - \varphi_0) \end{cases} \implies \rho^2 = A^2 e^{-2t} \implies \rho = A e^{-t}$$

Выразим  $t$  через  $\varphi$ :  $\tan \varphi = \tan(t - \varphi_0)$

Получаем  $\rho = A e^{-(\varphi + \varphi_0 + \pi n)}$

Получается семейство логарифмических спиралей ( $\rho = A e^{\varphi}$ )

3')  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta (\alpha = 0)$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \beta t + y_0 \sin \beta t \\ y(t) = y_0 \cos \beta t - x_0 \sin \beta t \end{cases}$$

Фазовый портрет – семейство соосных и концентрических эллипсов. Центр этих эллипсов устойчивый

4)  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$

Lab.

1.  $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

2.  $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

3.  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

Обобщим: если хотя бы один  $\lambda \neq 0$  и лежит слева от  $\text{Im } \lambda$ , то решение устойчивое

## Х. Программа экзамена в 2023/2024

### Линейная алгебра.

1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.

**Скалярное произведение** - функция  $(x, y)$ , обладающая свойствами:

- (a)  $(x, y) = (y, x)$
- (b)  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- (c)  $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$
- (d)  $\forall x \in L \quad (x, x) \geq 0 \text{ и } (x, x) = 0 \implies x = 0$

**Евклидовым** называют такое линейное пространство, на котором определено скалярное произведение

**Неравенство Коши-Буняковского:**  $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

**Норма** - функция  $\|x\|$ , такая что

- (a)  $\|x\| \geq 0 \text{ и } \|x\| = 0 \implies x = 0$
- (b)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- (c)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in L$  - неравенство треугольника

**Нормированное Евклидово пространство:**  $E^n$  является нормированным, если  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама. Инвариантность евклидовых пространств.

**Ортонормированный базис** - такой базис, что  $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

**Теорема о существовании ортонормированного базиса** (доказывается по математической индукции)

**Матрица Грама:** Матрицу  $\Gamma = (e_i, e_j)_{i,j=1\dots k}$  называют матрицей Грама

3. Ортогональность вектора подпространству, ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре.

**Задача о перпендикуляре:** Постановка: Нужно опустить перпендикуляр из точки пространства  $E^n$  на подпространство  $G$

Точка  $M$  - конец вектора  $x$  в пространстве  $E^n$ . Нужно найти  $M_0$  (конец вектора  $x_0$ , проекции  $x$  на  $G$ )

**Th.**  $h \perp G, x_0 \in G, x = x_0 + h$ . Тогда  $\forall x' \in G (x' \neq x_0) \quad \|x - x'\| > \|x - x_0\|$

4. Линейный оператор: определение, основные свойства.

**Линейный оператор** - это отображение  $V^n \xrightarrow{\mathcal{A}} W^m$

**Свойства:**

- 1\*  $\lambda(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$
- 2\*  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}$
- 3\*  $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}$

$$4^* \mathcal{A}(\mathcal{B}C) = (\mathcal{A}B)C$$

5. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор.

**Обратный оператор:**  $\mathcal{B} : W \rightarrow V$  называется обратным оператором для  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  если  $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = I$  (обозначается  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$ )

**Взаимно-однозначный оператор:**  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  так, что  $\mathcal{A}V = W$  и  $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V)$

$$\begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \implies y_1 \neq y_2$$

Тогда  $\mathcal{A}$  называется взаимно-однозначно действующим

6. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.

**Матрица оператора:** Матрица  $A = a_{ij} \, i=1..m, j=1..n$  называется матрицей оператора  $\mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$  в базисе  $\{e_j\}_{j=1}^n$  пространства  $V^n$

**Преобразование к другому базису:**  $\mathcal{T} : V^n \rightarrow V^n$  - преобразование координат, то есть  $Te_i = e'_i$

Тогда  $A' = TAT^{-1}$  ( $A'_{e'} = T_{e \rightarrow e'} A T_{e \rightarrow e'}^{-1}$ )

7. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.

**Ядро и образ:**

Ядро оператора -  $\text{Ker } \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$

Образ оператора -  $\text{Im } \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$

**Теорема о размерностях:**  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , тогда  $\dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim V$

8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.

**Собственное число**  $\lambda$  - такое, что удовлетворяет вековому уравнению  $|A - \lambda I| = 0$

Кратность корня  $\lambda_i$  называется алгебраической кратностью

**Собственный вектор** - такой вектор  $x$ , что  $\mathcal{A}x = \lambda x$

$$U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$$

$\dim U_{\lambda_i}$  - геометрическая кратность числа  $\lambda_i$

**Теорема о диагонализации:**  $\mathcal{A}$  - диаг.-ем  $\iff \exists$  базис из собственных векторов  $\iff$  сумма алгебраических кратностей равна сумме геометрических

9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.

**Сопряженный оператор:** Оператор  $\mathcal{A}^*$  называется сопряженным для  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , если  $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$

$\mathcal{A}^*$  сопряженный для  $\mathcal{A}$ , если  $A^* = A^T$  в любом ортонормированном базисе

**Свойства:**

$$1) I = I^*$$

$$2) (\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$$

$$3) (\lambda \mathcal{A})^* = \lambda \mathcal{A}^*$$

4)  $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$

5)  $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$  (св-во транспонирования матриц)

или  $((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*y)$

6)  $\mathcal{A}^*$  - линейный оператор  $(\mathcal{A}x = x', \mathcal{A}y = y' \implies \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda x' + \mu y')$

**Самосопряженный оператор:**  $\mathcal{A}$  называется самосопряженным, если  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Следствие.  $A^T = A \implies$  матрица  $A$  симметричная

**Свойства:**

1)  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ,  $\lambda : \mathcal{A}x = \lambda x (x \neq 0)$ . Тогда,  $\lambda \in \mathbb{R}$

2)  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ,  $\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2$  и  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Тогда  $x_1 \perp x_2$

**Теорема о базисе собственных векторов:**  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$  ( $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$ ), тогда  $\exists e_1, \dots, e_n$  - набор собственных векторов  $\mathcal{A}$  и  $\{e_i\}$  - ортонормированный базис

(другими словами:  $\mathcal{A}$  - диагонализируем)

10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.

**Проектор:** Оператор  $P_i x = (x, e_i)e_i$  называется проектором на одномерное пространство, порожденное  $e_i$  (линейная оболочка)

**Спектральное разложение:**  $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$

11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Геометрический смысл ортогонального преобразования.

**Ортогональный оператор:**  $T$  - ортогональный оператор, если  $(Tx, Ty) = (x, y)$

Следствие:  $\|Tx\| = \|x\|$ , то есть  $T$  сохраняет расстояние

**Ортогональная матрица:** Матрица  $A$  называется ортогональной если  $A^{-1} = A^T$

12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.

**Билинейная форма:**  $x, y \in V^n$  Отображение  $\mathcal{B} : V^n \rightarrow \mathbb{R}$  (обозн.  $\mathcal{B}(x, y)$ ) называется билинейной формой, если выполнены

1)  $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \mathcal{B}(x, z) + \mu \mathcal{B}(y, z)$

2)  $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \mathcal{B}(x, y) + \mu \mathcal{B}(x, z)$

**Матрица:**  $\{e_i\}_{i=1}^n$  - базис  $V_n$ ,  $u, v \in V^n$ . Тогда  $\mathcal{B}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j$ , где  $b_{ij} \in \mathbb{R}$  - матрица

13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.

**Квадратичная форма:** Квадратичной формой, порожденной Б. Ф.  $\mathcal{B}(u, v)$ , называется форма  $\mathcal{B}(u, u)$

14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные условия. Критерий Сильвестра.

**Положительно определенный оператор:** 1) Оператор  $\mathcal{A}$  называется положительно определенным, если  $\exists \gamma > 0 \mid \forall x \in V \quad (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2$

2)  $\mathcal{A}$  называется положительным, если  $\forall x \in V, x \neq 0 \quad (\mathcal{A}x, x) > 0$

**Критерий Сильвестра:**  $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$  - положительно определен  $\iff$

$$\forall k = 1..n \text{ угловые миноры } \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

## Дифференциальные уравнения.

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

**Задача о распаде:** Скорость распада радия в текущий момент времени  $t$  пропорциональна его наличному количеству  $Q$ . Требуется найти закон распада радия:  $Q = Q(t)$  если в начальный момент времени  $t_0 = 0$  количество равнялось  $Q_0$

$$Q(t) = Ce^{-nt}$$

**Задача о падении тела:** Тело массой  $m$  брошено вверх с начальной скоростью  $v_0$ . Нужно найти закон движения  $y = y(t)$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

$$y(t) = \int (-gt + C_1) dt = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = y(t) \quad \text{- общий закон}$$

$$y^*(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{- частный закон при } y(t_0) = 0, y'(t_0) = v_0$$

**Определение:** Уравнение  $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$  - называется обыкновенным ДУ  $n$ -ого порядка (\*)

Решением ДУ (\*) называется функция  $y(x)$ , которая при подстановке обращает (\*) в тождество

$$\text{Задача Коши: } \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad \text{- система начальных условий (**)}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases} \quad \text{- задача Коши (ЗК)}$$

2. Уравнение с разделяющимися переменными.

$$\text{УПД: } m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$$

$$\text{Решение: } \int \frac{m(x)}{M(x)} dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)} dy$$

3. Однородное уравнение.

$$\text{ОУ: } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \text{ где } P(x, y), Q(x, y) \text{ - однородные функции одного порядка}$$

- однородное уравнение

$$\text{Решение: } Cx = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}}, \text{ где } t = \frac{y}{x}$$

4. Уравнение в полных дифференциалах.

$$\text{Уравнение в полных дифференциалах: } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{- УПД}$$

Решение:  $\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy = 0$

5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.

**ЛДУ:**  $y' + p(x)y = q(x)$  - ЛДУ<sub>1</sub>

**Метод Лагранжа:** Принцип: если удалось найти частное решение ДУ<sub>однор</sub> (обозначим  $y_0$ ), то общее решение ДУ<sub>неод</sub> можно искать в виде  $y = C(x)y_0$

Решение:  $y_0 = e^{-\int p(x)dx}$ ,  $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$

$y = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$

6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

**Теорема существования и единственности:** **Th.** Если  $\exists U(M_0) \mid \begin{cases} f(x, y) \in C_{U(M_0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \text{огр. в } U(M_0), \end{cases}$  то в  $M_0$   $\exists! y(x)$  - решение ДУ

7. Уравнения n-ого порядка, допускающие понижение порядка.

**ДУ высших порядков:** 1\* Непосредственно интегрирование

$y^{(n)} = f(x)$

Решение:  $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$

$y^{(n-2)} = \int (\int f(x)dx + C_1)dx + C_2$

2\* ДУ<sub>2</sub>, не содержащие  $y(x)$

$F(x, y'(x), y''(x)) = 0$

Замена  $y'(x) = z(x)$ , получаем:

$F(x, z(x), z'(x)) = 0$  - ДУ<sub>1</sub>

3\* ДУ<sub>2</sub>, не содержащие  $x$

$F(y(x), y'(x), y''(x)) = 0$

Замена  $y'(x) = z(y)$   $y''(x) = \frac{dz(y(x))}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z'_y y' = z'_y z$

8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ): определения, решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.

**Определение:**  $a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y = f(x)$ , где  $y = y(x)$  - неизв. функция, - это ЛДУ<sub>n</sub>

**Решение ЛОДУ<sub>2</sub>:**  $y'' + py' + qy = f(x)$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$

$\forall p, q \in \mathbb{R} \exists$  уравнение:  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  и  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 + \lambda_2 = -p, \lambda_1 \lambda_2 = q$  - корни

**1 случай:**  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \implies y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

9. Решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.

**2 случай:**  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \implies y(x) = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x}$

10. Решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней

характеристического уравнения.

**3 случай:**  $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \implies y(x) = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$

11. Свойства решений ЛОДУ2: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.

**Линейная независимость:** Def.  $y_1, y_2$  – линейно независимы  $\iff C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \implies \forall C_1 = 0 \iff \nexists k : y_2 = k y_1, k \in \mathbb{R}$

**Определитель Вронского:** Def.  $W \stackrel{\text{обозн}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1(x)}{dx} & \frac{dy_2(x)}{dx} \end{vmatrix}$  – определитель Вронского или вронскиан

**Th. 1.**  $\exists y_1, y_2$  – частные решения ЛОДУ, то есть  $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$

Тогда  $Ly = 0$ , если  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

**Th. 2.**  $y_1, y_2$  – линейно зависимы  $\implies W = 0$  на  $[a; b]$

12. Свойства решений ЛОДУ2: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.

**Th. 3.**  $x_0 \in [a; b]$ , пусть  $W(x_0) = W_0$ . Тогда:

$W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \forall x \in [a; b]$

$W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$

**Th. 4.**  $y_1, y_2$  – линейно независимы  $\implies W(x) \neq 0$  на  $[a; b]$

13. Свойства решений ЛОДУ2: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ2. Фундаментальная система решений (определение).

**Th. 5.**  $y_1, y_2$  – линейно независимые решения ЛОДУ, тогда  $\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$  – общее решение ЛОДУ<sub>2</sub>

14. Свойства решений ЛНДУ2: теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.

**Th. 6.** Решение ЛНДУ  $Ly = f(x)$

$\bar{y}(x) : L\bar{y} = 0$  – общее решение ЛОДУ

$y^*(x) : Ly^*(x) = f(x)$  – частное решение ЛНДУ

Тогда  $y(x) = \bar{y} + y^*$  – общее решение ЛНДУ



15. Структура решения ЛОДУ<sub>н</sub>: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.

ФСР для всех случаев:

- (a) Всякому  $\lambda_i$  – одиночному  $\mathbb{R}$ -корню ХрУ сопоставляем  $y_i = e^{\lambda_i x}$
- (b)  $\mathbb{R}$ -корню  $\lambda$  кратности  $s$  сопоставляем набор  $\{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda x}\}$
- (c) Всякой одиночной паре  $\lambda_{j_1, j_2} = \alpha_j \pm i\beta_j$  соответствует пара  $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$
- (d) Комплексной паре  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  кратности  $t$  соответствует набор  $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{t-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{t-1} e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

$$\bar{y} = l_{\{\text{ФСР}\}}$$

16. Решение ЛНУ2 с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.

Специальная правая часть: для линейного неоднородного уравнения второго порядка  $y'' + py' + qy = f(x)$  с постоянными коэффициентами, где правая часть  $f(x)$  является специальной, частное решение  $y^*$  ищут методом неопределённых коэффициентов:

- (a) Анализ корней характеристического уравнения  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ ;
- (b) Определение структуры  $y^*$  в виде  $x^r e^{ax} (\bar{P}_l(x) \cos(bx) + \bar{Q}_l(x) \sin(bx))$ , где  $a, b$  берутся из  $f(x) = e^{ax} (P_n(x) \cos(bx) + Q_m(x) \sin(bx))$ ,  $l = \max(n, m)$ ,  $r$  – кратность корня  $k = a \pm ib$  в характеристическом уравнении ( $r = 0$  при отсутствии совпадения)
- (c) Подстановку  $y^*$  в уравнение и определение коэффициентов  $\bar{P}_l, \bar{Q}_l$  приравниванием аналогичных членов. Метод эффективен для правых частей вида  $e^{ax}, x^k, \cos \beta x, \sin \beta x$  и их произведений.

17. Решение ЛНУ2: метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).

Метод Лагранжа: подход для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  с произвольной непрерывной правой частью:

- (a) Нахождение фундаментальной системы решений (ФСР)  $y_1(x), y_2(x)$  соответствующего однородного уравнения
- (b) Поиск частного решения в виде  $y^*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ , где функции  $C_1(x), C_2(x)$  заменяют константы из общего решения однородного уравнения
- (c) Решение системы для производных  $C_1'(x), C_2'(x)$ :

$$\begin{cases} C_1^{1+C_2^{2=0}} \\ C_1^{1+C_2^{2=f(x)}} \end{cases}$$

с использованием вронскиана  $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$

- (d) Интегрирование выражений:

$$C_1(x) = \int -\frac{y_2 f}{W} dx, \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f}{W} dx$$

18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.

Система ДУ: Def. Пусть дан набор функций  $y_1, \dots, y_n$ . Система, связывающие эти

функции, то есть  $\begin{cases} F_1(x_1, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}) = 0 \\ \vdots \end{cases}$ , называется системой дифференциальных уравнений (СДУ)

**Метод исключения:** чтобы свести к ДУ систему ДУ  $\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

нужно исключить  $n - 1$  выражение  $\dot{x}_i$ , для этого взять производные  $\frac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}$

19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.

**Матричный метод:**

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Обозначим  $(y_1, \dots, y_n) = Y$  – вектор функций,  $\{a_{ij}\} = A$  – матрица СДУ

Тогда СДУ запишется в виде  $Y' = AY$  (однородная СДУ, так как нет  $f(x)$ )

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – собственные числа  $A$  и  $h_i$  – собственный вектор для  $\lambda_i$

Будем искать решение  $Y$  в виде  $Y = \ln e^{\lambda_i x}$

Подставим в СДУ:  $Y' = \lambda_i h_i = e^{\lambda_i x} = \underbrace{A h_i e^{\lambda_i x}}_Y = AY$

20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения.

**Устойчивость:** Решение СДУ  $x = x(t), y = y(t)$  называется устойчивым по Ляпунову при

$$t \rightarrow +\infty, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \begin{cases} \forall x, y & \forall t > 0 \\ \begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases} \end{cases} \begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{Или } \begin{cases} \Delta x(t) \rightarrow 0 \\ \Delta y(t) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ при } t \rightarrow +\infty \text{ и } \begin{cases} \Delta x_0 \rightarrow 0 \\ \Delta y_0 \rightarrow 0 \end{cases}$$