Следствие формулы Грина: $S_D = \dfrac{1}{2}\oint_K xdy - ydx$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

Формула Грина: $\iint_D \left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy = \iint_D \left(\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)\right) dxdy = \iint_D dxdy = S_D \overset{\text{Ф. Гр.}}{=} \oint_{K^+} \left(-\dfrac{y}{2}\right) dx + \dfrac{x}{2}dy$

Def. Пусть даны $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемы по 2-м переменным

А также кривая $\overset{\frown}{AB}$, соединяющая любые две точки области, $\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, φ, ψ – непрерывно дифференцируемы (кусочно)

$I = \int_{AB} Pdx + Qdy$ называется интегралом, не зависящим от пути интегрирования (НЗП), если $\forall M, N \in D \ \int_{AMB} Pdx + Qdy = \int_{ANB} Pdx + Qdy$

Nota. Обозначают $\int_A^B Pdx + Qdy$ или $\int_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy$

Th. Об интеграле НЗП. В условиях определения

I. $\int_{AB} Pdx + Qdy$ – интеграл, не зависящий от пути

II. $\oint_K Pdx + Qdy = 0 \quad \forall K \subset D$

III. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \ \forall M(x, y) \in D$

IV. $\exists \Phi(x, y) \mid d\Phi = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ в области D

Причем $\Phi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$, где $(x_0, y_0), (x, y) \in D$

Тогда I $\iff$ II $\iff$ III $\iff$ IV

1. I $\iff$ II

$\boxed{\Longrightarrow}$ По определению $\int$ НЗП $\iff \int_{AMB} = \int_{ANB}$

Рассмотрим $\int_{AMB} - \int_{ANB} = \int_{AMB} + \int_{BNA} = \oint_K = 0 \ \forall K \subset D$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Достаточно разбить $\oint_{K^+} = \int_{AMB} + \int_{BNA} = 0$

Поскольку $\int_{AMB} + \int_{BNA} = 0$, то $\int_{AMB} - \int_{ANB} = 0$

2. II $\iff$ III

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\oint_K = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \ \forall M(x, y) \in D$

От противного $\exists M_0(x_0, y_0) \in D \mid \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{M_0} \neq \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{M_0} \iff \left.\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right|_{M_0} \neq 0$

Для определенности пусть $\left.\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right|_{M_0} > 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \mid \left.\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right|_{M_0} > \delta > 0$

Выберем малую окрестность в точке M_0 $(U(M_0))$ и обозначим ее контур Γ

Так как P и Q непрерывно дифференцируемы, $\left.\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right|_{M_0} > 0$ в $U(M_0)$

Формула Грина: $\iint_{U(M_0)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy > \iint_{U(M_0)} \delta dxdy = \delta S_{U(M_0)} > 0$

С другой стороны $\iint_{U(M_0)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = 0$

Таким образом, возникает противоречие

$\boxed{\Longleftarrow} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\ \forall M \in D$

Тогда $\forall D' \subset D\ \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0 = \oint_{\Gamma_{D'}} Pdx + Qdy\ \forall \Gamma_{D'} \subset D$

3. III $\iff$ IV

$\boxed{\Longrightarrow} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Longrightarrow \exists \Phi(x, y)$

Так как доказано $I \iff III$, то докажем $I \Longrightarrow IV$

$\int_{AM} Pdx + Qdy = \int_{A(x_0,y_0)}^{M(x,y)} Pdx + Qdy - \int$ НЗП $\forall A, M \in D$

Обозначим $\int_{A(x_0,y_0)}^{M(x,y)} Pdx + Qdy - \Phi(x, y)$

Докажем, что $d\Phi = Pdx + Qdy$

Так как $d\Phi(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$, то нужно доказать $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x} =$ [задали приращение вдоль MM_1] $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x, y) - \Phi(x, y)}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\int_A^{M_1} Pdx + Qdy - \int_A^M Pdx + Qdy}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\int_A^M + \int_M^{M_1} - \int_A^M}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\int_M^{M_1}}{\Delta x} \overset{\text{НЗП}}{=}$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx}{\Delta x} =$ [по **Th.** Лагранжа $\exists \xi \in [x; x + \Delta x]$] $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{P(\xi, y)\Delta x}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} P(\xi, y) = P(x, y)$

Аналогично $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$

$\boxed{\Longleftarrow} d\Phi = Pdx + Qdy \overset{?}{\Longrightarrow} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Известно $P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$

Тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Nota. Φ – первообразная для $Pdx+Qdy$

Th. Ньютона-Лейбница.

Выполнены условия **Th.** об интеграле НЗП, тогда $\int_A^B Pdx+Qdy = \Phi(B)-\Phi(A)$

$\int_A^B Pdx+Qdy \overset{\exists\Phi | d\Phi = Pdx+Qdy}{=} \int_A^B d\Phi(x,y) \overset{\text{параметр. } AB}{=} \int_\alpha^\beta d\Phi(t) = \Phi(t)\Big|_\alpha^\beta = \Phi(\beta)-\Phi(\alpha) = \Phi(B) - \Phi(A)$

<u>Применение</u>:

Ex. Дан интеграл $\int_{AB} \left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy$

Проверим НЗП $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\right)$: $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2} \iff \int$ НЗП

Найдем первообразную $\Phi(x,y)$ на все случаи жизни: $\Phi(x,y) = \int_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} Pdx+Qdy$

Выберем путь (самый удобный): $\Phi(x,y) = \int_{M_0}^N + \int_N^M$

$\int_{M_0}^N \overset{y=0, x_0=1, dy=0}{=} \int_{(1,0)}^{(x,0)} 4dx = 4x\Big|_{(1,0)}^{(x,0)} = 4x-4$

$\int_N^M \overset{dx=0}{=} \int_{(x,0)}^{(x,y)} \frac{2y}{x}dy = \frac{y^2}{x}\Big|_{(x,0)}^{(x,y)} = \frac{y^2}{x}$

$\Phi(x,y) = 4x-4+\frac{y^2}{x}+C = 4x+\frac{y^2}{x}+C$

Проверим: $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 4-\frac{y^2}{x^2} = P$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{2y}{x} = Q$

Теперь можем искать $\int_{AB} \forall A,B \in D$ по N-L

Пусть $A(1,1), B(2,2)$, тогда $\int_{AB} Pdx+Qdy = \Phi\Big|_A^B = \frac{y^2}{x}+4x\Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = \frac{4}{2}+8-1-4 = 5$

Nota. Функция Φ ищется в тех случаях, когда $\int_A^B Pdx+Qdy = \int_A^B (P,Q)(dx,dy) = A$ – работа силы, которая не зависит от пути

Ex. Работа силы тяжести не зависит от пути (такие силы называются консервативными), а силы трения – зависит (такие – диссипативными)

Ex. Пусть $\vec{F} = (P,Q) = (0,-mg)$

$\Phi(x,y) = \int_O^M 0dx - mgdy = -\int_0^y mgdy = -mgy$ – потенциал гравитационного поля (или силы тяжести)