

# Содержание

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Лекция 1</b>   | <b>5</b>  |
| Статистическое определение вероятности . . . . .                    | 5         |
| Пространство элементарных исходов. Случайные события . . . . .      | 5         |
| Операции над событиями . . . . .                                    | 6         |
| Вероятность . . . . .   | 6         |
| <b>Лекция 2</b>   | <b>8</b>  |
| Построение модели случайных явлений . . . . .                       | 8         |
| Свойства вероятности . . . . .                                      | 8         |
| Аксиома непрерывности . . . . .                                     | 9         |
| Независимые события . . . . .                                       | 10        |
| <b>Лекция 3</b>   | <b>11</b> |
| Условная вероятность . . . . .                                      | 11        |
| Полная группа событий . . . . .                                     | 13        |
| <b>Лекция 4</b>   | <b>15</b> |
| Серия испытаний Бернулли . . . . .                                  | 15        |
| Наиболее вероятное число успехов . . . . .                          | 16        |
| Статистическое понятие вероятности . . . . .                        | 18        |
| Закон больших чисел Бернулли . . . . .                              | 18        |
| <b>Лекция 5</b>   | <b>19</b> |
| Схема испытаний и соответствующее распределение . . . . .           | 19        |
| I. Схема Бернулли . . . . .   | 19        |
| II. Схема до первого успешного испытания . . . . .                  | 20        |
| III. Схема испытаний с несколькими исходами . . . . .               | 20        |
| IV. Урновая схема . . . . .   | 21        |
| V. Схема Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли . . . . .    | 22        |
| <b>Лекция 6</b>   | <b>23</b> |
| Случайные величины . . . . .  | 23        |
| Основные типы распределения . . . . .                               | 24        |
| Дискретная случайная величина . . . . .                             | 24        |
| Числовые характеристики дискретных случайных величин . . . . .      | 25        |
| I. Математическое ожидание (среднее значение, полезность) . . . . . | 25        |
| II. Дисперсия . . . . .   | 25        |

|   |           |
|---|-----------|
| III. Среднее квадратическое отклонение . . . . .                          | 26        |
| Свойства математического ожидания и дисперсии . . . . .                   | 26        |
| Другие числовые характеристики . . . . .                                  | 28        |
| <b>Лекция 7</b>   | <b>29</b> |
| Стандартное дискретное распределение . . . . .                            | 29        |
| I. Распределение Бернулли . . . . .                                       | 29        |
| II. Биномиальное распределение . . . . .                                  | 29        |
| III. Геометрическое распределение . . . . .                               | 30        |
| IV. Распределение Пуассона . . . . .                                      | 30        |
| Задача о разорении игрока . . . . .                                       | 31        |
| Случайное блуждание на прямой . . . . .                                   | 32        |
| <b>Лекция 8</b>   | <b>33</b> |
| Функция распределения . . . . .   | 33        |
| Свойства функции распределения . . . . .                                  | 34        |
| Абсолютно непрерывное распределение . . . . .                             | 35        |
| Свойства плотности абсолютно непрерывного распределения . . . . .         | 36        |
| Числовые характеристики . . . . .   | 37        |
| Другие числовые характеристики . . . . .                                  | 37        |
| Сингулярное распределение . . . . .                                       | 38        |
| <b>Лекция 9</b>   | <b>39</b> |
| Стандартное абсолютно непрерывное распределение . . . . .                 | 39        |
| I. Равномерное распределение . . . . .                                    | 39        |
| II. Показательное распределение . . . . .                                 | 40        |
| III. Нормальное распределение (Гауссовское) . . . . .                     | 41        |
| Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями . . . . . | 42        |
| Коэффициенты асимметрии и эксцесса . . . . .                              | 43        |
| <b>Лекция 10</b>  | <b>44</b> |
| Преобразование случайных величин . . . . .                                | 44        |
| Стандартизация случайной величины . . . . .                               | 44        |
| Линейное преобразование . . . . .   | 44        |
| Монотонное преобразование . . . . .                                       | 45        |
| Квантильное преобразование . . . . .                                      | 45        |
| Характеристики преобразованной случайной величины . . . . .               | 47        |
| Свойства моментов . . . . .   | 47        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Лекция 11</b>  | <b>48</b> |
| Сходимость случайных величин . . . . .  | 48        |
| Связь между видами сходимости . . . . .   | 49        |
| Ключевые неравенства . . . . .  | 49        |
| I. Неравенство Маркова . . . . .  | 50        |
| II. Неравенство Чебышева . . . . .  | 50        |
| III. Правило «трех сигм» . . . . .  | 50        |
| Среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин     | 50        |
| Законы больших чисел . . . . .  | 51        |
| I. Закон больших чисел Чебышева . . . . .   | 51        |
| II. Закон больших чисел Бернулли . . . . .  | 51        |
| III. Закон больших чисел Хинчина . . . . .  | 52        |
| IV. Усиленный закон больших чисел Колмогорова . . . . .                           | 52        |
| V. Закон больших чисел Маркова . . . . .  | 52        |
| Центральная предельная теорема . . . . .  | 52        |
| <b>Лекция 12</b>  | <b>53</b> |
| Совместное распределение случайных величин . . . . .                              | 53        |
| Функция распределения . . . . .   | 53        |
| Свойства функции распределения . . . . .  | 54        |
| Независимость случайных величин . . . . .   | 54        |
| Дискретная система двух случайных величин . . . . .                               | 55        |
| Абсолютно непрерывная система двух случайных величин . . . . .                    | 56        |
| Многомерное равномерное распределение . . . . .                                   | 57        |
| <b>Лекция 13</b>  | <b>58</b> |
| Математическое ожидание и дисперсия случайного вектора . . . . .                  | 58        |
| Функции от двух случайных величин . . . . .                                       | 58        |
| Сумма стандартных распределений. Устойчивость относительно суммирования . . . . . | 59        |
| Условное распределение . . . . .  | 61        |
| I. Условное распределение в дискретной системе двух случайных величин . . . . .   | 61        |
| II. Условное распределение в непрерывной системе двух случайных величин . . . . . | 61        |
| <b>Лекция 14</b>  | <b>62</b> |
| Пространство случайных величин . . . . .  | 62        |
| Условное математическое ожидание . . . . .  | 63        |
| Числовые характеристики. Зависимости случайных величин . . . . .                  | 64        |
| Коэффициент линейной корреляции . . . . .   | 65        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Лекция 15</b>  | <b>66</b> |
| Характеристические функции . . . . .                                      | 66        |
| Характеристические функции стандартных распределений . . . . .            | 67        |
| Доказательства теорем через свойства характеристических функций . . . . . | 68        |
| Закон больших чисел Хинчина . . . . .                                     | 68        |
| Центральная предельная теорема . . . . .                                  | 69        |
| Предельная теорема Муавра-Лапласа . . . . .                               | 70        |
| <b>Лекция 16</b>  | <b>71</b> |
| Условная дисперсия . . . . .  | 71        |
| Энтропия . . . . .  | 71        |
| Энтропия при непрерывном распределении . . . . .                          | 73        |
| <b>Х. Программа экзамена в 2024/2025</b>                                  | <b>74</b> |

## Лекция 1

В теории вероятности обычно изучают случайные события

Обычно наука занимается закономерностями, но так как в случайных экспериментах нет закономерностей, теория вероятности занимается поиском закономерности в сериях случайных экспериментах

Итак, в XVI веке начали с экспериментов бросков монеты:

| число бросков | число гербов | частота |
|---------------|--------------|---------|
| 4040          | 2048         | 0.5069  |
| 12000         | 6019         | 0.5016  |
| 24000         | 12012        | 0.5005  |

Как можно видеть, частота стремится к 0.5 - появляется статистическая закономерность

### Статистическое определение вероятности

Пусть проводится  $n$  реальных экспериментов, при которых событие  $A$  появилось  $n_A$  раз

Отношение  $\frac{n_A}{n}$  называется частотой события  $A$

Эксперименты показывают, что при увеличении числа  $n$  частота стабилизируется у некоторого числа, при котором мы понимаем статистическую вероятность:  $P(A) \approx \frac{n_A}{n}$  при  $n \rightarrow \infty$

### Пространство элементарных исходов. Случайные события

**Def.** Пространством элементарных исходов  $\Omega$  называется множество, содержащее все возможные исходы экспериментов, из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются элементарными исходами и обозначаются  $\omega$

**Def.** Случайными событиями называется подмножество  $A \subset \Omega$ . События  $A$  наступают, если произошел один из элементарных исходов из множества  $A$

*Ex. 1.* Бросок монеты:  $\Omega = \{\Gamma, P\}$ ,  $A = \{\Gamma\}$  - выпал герб

*Ex. 2.* Игральная кость:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$

*Ex. 3.* Монета бросается дважды.

а) Учитываем порядок:  $\Omega = \{\Gamma\Gamma, PP, P\Gamma, \Gamma P\}$

а) Не учитываем порядок:  $\Omega = \{\Gamma\Gamma, PP, \Gamma P\}$

*Ex. 4.* Кубик дважды:  $\Omega = \{\langle i, j \rangle \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$

$A = \{\text{разность } \dot{=} 3\} = \{\langle 1, 4 \rangle; \langle 4, 1 \rangle; \langle 2, 5 \rangle; \langle 5, 2 \rangle; \dots\}$

Ex. 5. Монета бросается до первого герба:  $\Omega = \{\Gamma, P\Gamma, P\Gamma\Gamma, \dots\}$  - счетно-бесконечное множество

Ex. 6. Монета бросается на плоскость:  $\Omega = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R}, \langle x, y \rangle - \text{центр монеты}\}$  - несчетное число исходов

## Операции над событиями

$\Omega$  - достоверные события (наступают всегда)

$\emptyset$  - невозможное события (никогда не наступает, так как не содержит ни одного элем. исхода)

Введем операции:

**Def. 1.** Суммой  $A + B$  называется событие, состоящее в том, что произошло события  $A$  или события  $B$  (хотя бы одно из них)

**Def. 2.** Произведением  $A \cdot B$  называется событие, состоящее в том, что произошло событие  $A$  и события  $B$  (оба из них)

*Nota.*  $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$  - произошло хотя бы одно из этих событий

$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots$  - произошли все эти события

**Def. 3.** Противоположным  $A$  событием называется событие  $\bar{A}$ , состоящее в том, что событие  $A$  не произошло

*Nota.*  $\bar{\bar{A}} = A$

**Def. 4.** Дополнение (разность)  $A \setminus B$  называется событие  $A \cdot \bar{B}$

**Def. 5.** События  $A$  и  $B$  называются несовместными, если их произведение - пустое множество (не могут произойти одновременно при одном эксперименте)

**Def. 6.** События  $A$  влекут события  $B$ , если  $A \subset B$  (если наступает  $A$ , то наступит  $B$ )

## Вероятность

Мы хотим присвоить какую-то числовую характеристику к каждому событию, отражающее его частоту наступления:  $0 \leq P(A) \leq 1$  - вероятность наступления события  $A$

### Классическое определение вероятности

Пусть пространство случайных событий  $\Omega$  содержит конечное число равновозможных исходов, тогда применимо классическое определение вероятности

**Def.**  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$ , где  $n$  - число всех возможных исходов,  $m$  - число благоприятных исходов

В частности, если  $\Omega = n$  и  $A_i$  - элем. исх., то  $P(A_i) = \frac{1}{n}$

Свойства:

$$1) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2) P(\Omega) = 1 \quad (m = n)$$

$$3) P(\emptyset) = 0 \quad (m = 0)$$

$$4) \text{ Если события } A \text{ и } B \text{ несовместны, то } P(A+B) = P(A) + P(B)$$

### Геометрическое определение вероятности (граф де Бюффон)

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  - замкнутая ограниченная область

$\mu(\Omega)$  - мера  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$  (например, длина отрезка, площадь области на плоскости, объем тела в пространстве)

В эту область наугад бросаем точку. «Наугад» означает, что вероятность попадания в  $A$  зависит только от меры  $A$  и не зависит от ее расположения

В этом случае применимо геометрическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Ех. 1. Монета диаметром в 6 см бросается на пол, вымощенной квадратной плиткой со стороной 20 см, какова вероятность, что монета окажется целиком внутри одной плитки

$$\mu(\Omega) = 20^2 = 400$$

$$\mu(A) = (20 - 3 - 3)^2 = 196$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{196}{400} = 0.49$$

Ех. 2. Задача Бюффона об игле: пусть пол вымощен ламинатом,  $2l$  - ширина доски, на пол бросается игла длины, равной ширине доски, найти вероятность того, что игла пересечет стык доски

Определим положение иглы координатами центра и углом, между иглой и стыком доски, причем можно считать, что эти величины независимы

$\exists x \in [0; l]$  - расстояние от центра до ближайшего края,

$\varphi \in [0; \pi]$  - угол

$$\Omega = [0; l] \times [0; \pi]$$

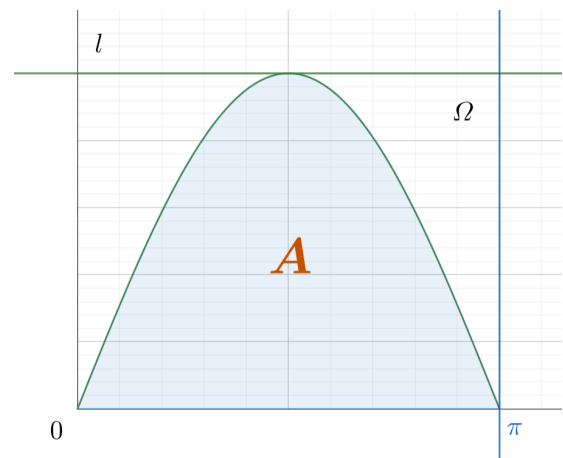
Событие  $A$  (пересечет стык) наступает, если  $x \leq l \sin \varphi$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

$$S(\Omega) = \pi l$$

$$S(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^\pi = -l(-1 - 1) = 2l$$

$$P(A) = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$



## Лекция 2

### Построение модели случайных явлений

1. Задаем пространство элементарных исходов  $\Omega$
2. **Def.** Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  называется  $\sigma$ -алгеброй событий, если:

- 1)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- 2)  $A \in \mathcal{F} \implies \bar{A} \in \mathcal{F}$ ;
- 3)  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

**Свойства:**

- (a)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ , так как  $\Omega \in \mathcal{F} \implies \bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
- (b)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \implies \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \quad \square$$

- (c)  $A, B \in \mathcal{F} \implies A \setminus B \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A, B \in \mathcal{F} \implies A, \bar{B} \in \mathcal{F} \implies A \setminus B = A \cdot \bar{B} \in \mathcal{F} \quad \square$$

Ex. 1.  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

Ex. 2.  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$

Ex. 3. **Def.** Борелевская  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  - минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все возможные интервалы на прямой

3. **Def.**  $\square$   $\Omega$  - пространство элементарных исходов,  $\mathcal{F}$  - его  $\sigma$ -алгебра событий. Вероятностью на  $(\Omega, \mathcal{F})$  называется функция  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  со свойствами:

- (a)  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$  (неотрицательность)
- (b) Если  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$  - несовместное, то  $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  (свойство счетной аддитивности)
- (c)  $P(\Omega) = 1$  (условие нормированности)

**Def.** Из этого тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называется вероятностным пространством

### Свойства вероятности

1. Так как  $\emptyset$  и  $\Omega$  - несовместные, то  $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = 1 + P(\emptyset) \implies P(\emptyset) = 0$



2. Формула обратной вероятности:  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$\square \quad A \text{ и } \bar{A} - \text{несовместные и } A + \bar{A} = \Omega \implies P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1 \quad \square$$

3.  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$

## Аксиома непрерывности

**Th.** Пусть имеется убывающая цепочка событий  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  и  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$   
 Тогда  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
 При непрерывном изменении области  $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$  соответствующая вероятность  $P(A)$  также должна изменяться непрерывно

Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

$\square$

Ясно, что  $A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1} + \prod_{i=n}^{\infty} A_i$   
 $\prod_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^n A_i \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1}$  и так как эти события  
 несовместны, то по свойству счетной аддитивности  $P(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1})$  - это остаток  
 (хвост) сходящегося ряда  
 $P(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \bar{A}_{i+1}) + P(A_n)$  и  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  по необходимому признаку  
 сходимости

$\square$

*Nota.* Аксиому счетной аддитивности можно вывести из конечной аддитивности и аксиомы счетной непрерывности

## Свойства операций сложения и умножения

1. Свойство дистрибутивности:  $A \cdot (B + C) = AB + AC$
2. Формула сложения: если  $A$  и  $B$  несовместны, то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$
3. Формула сложения вероятностей:  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

□

$$A + B = \overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\overline{B} - \text{несовместные события} \implies P(A + B) = P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}\overline{B}) = (P(\overline{A}B) + P(A\overline{B})) + (P(A\overline{B}) + P(\overline{A}\overline{B})) - P(A\overline{B}) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

□

Ех. Из колоды в 36 карт достали одну карту. Какова вероятность того, что будет дама или пика

Пусть Д - дама, П - пика,  $P(Д + П) = P(Д) + P(П) - P(ДП) = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$

Формула сложения при  $N = 3$ :  $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) - P(A_1A_2) + P(A_1A_2A_3)$

Общий случай:  $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_iA_j) + \sum_{i < j < k} P(A_iA_jA_k) + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1A_2 \dots A_n)$  - формула включения и исключения

Ех.  $n$  писем случайно раскладывается по  $n$  конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо окажется в своем конверте

□  $A_i$  -  $i$ -ое письмо в своем конверте

$$P(A_i) = \frac{1}{n}; P(A_iA_j) = \frac{1}{A_n^2}; P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{A_n^3}; P(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

Слагаемых вида  $A_i$  -  $n$  штук;  $A_iA_j$  -  $C_n^2$ ;  $A_iA_jA_k$  -  $C_n^3$ ;  $A_1A_2 \dots A_n$  - 1 штука

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{A_n^2} + C_n^3 \frac{1}{A_n^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Так как  $e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \dots$ , то при  $n \rightarrow \infty$   $P(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-1} \approx 0.63$

## Независимые события

Под независимыми событиями логично подразумевать события, не связанные причинно-следственной связью (то есть когда факт наступления одного не влияет на оценку вероятности другого)

$$\square |\Omega| = n; |A| = m_1; |B| = m_2$$

Проведем пару независимых испытаний. Тогда получаем пространство элементарных исходов  $\Omega \times \Omega$  и  $|\Omega \times \Omega| = n^2$

По основному принципу комбинаторики  $|A \cdot B| = m_1 \cdot m_2$

$$P(AB) = \frac{|A \cdot B|}{|\Omega \times \Omega|} = \frac{m_1 m_2}{n^2} = P(A) \cdot P(B)$$

**Def.** События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Lab.  $\square P(A), P(B) \neq 0$ , доказать, что если  $A$  и  $B$  несовместны, то они зависимы

Свойство: Если  $A$  и  $B$  независимы, то независимы  $\overline{A}$  и  $\overline{B}$ ,  $A$  и  $\overline{B}$ ,  $\overline{A}$  и  $B$

Доказательство:  $A = A \cdot (B + \bar{B}) = AB + A\bar{B}$  - несовместные события  $\implies P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \implies P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}) \implies$  независимы

**Def.** События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - независимы в совокупности, если для любого набора  $i_1, i_2, \dots, i_k$  ( $2 \leq k \leq n$ )  $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

*Nota.* Из независимости в совокупности при  $k = 2$  получаем попарную независимость. Обратное утверждение неверно

*Ex.* (С. Бернштейн)

Пусть имеется правильный тетраэдр, одна грань окрашена в красный, вторая в синий, третья в зеленый, а четвертая во все эти три цвета.

Подбросили тетраэдр,  $\square A$  - грань, которая содержит красный цвет,  $B$  - синий,  $C$  - зеленый.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Так как } P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B) - \text{попарная независимость}$$

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) - \text{но вот независимость в совокупности не соблюдается}$$

*Ex.* (Шевалье де Мере, Паскаль, Ферма,  $\approx 1650$  г.)

Какова вероятность того, что при 4 бросании кости выпадет одна шестерка

$A_1$  - при первом броске шестерка,  $A_2$  - при втором,  $A_3$  - при третьем,  $A_4$  - при четвертом

$B$  - выпала хотя бы одна шестерка при 4 бросках

$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$  - совместные события, но независимые

Найдем обратную вероятность:  $\bar{B}$  - ни разу не выпала шестерка

$$\bar{B} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4$$

$$P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_4) = \frac{5}{6}$$

$$\bar{B} = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.482$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) \approx 0.52$$

## Лекция 3

### Условная вероятность

Условная вероятность  $P(A|B)$  (или  $P_B(A)$ ) - вероятность события  $A$ , вычисленная в предположении, что событие  $B$  уже произошло

Ех. Бросается кость один раз, известно, что выпало больше 3 очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков

$A$  - выпало четное число очков

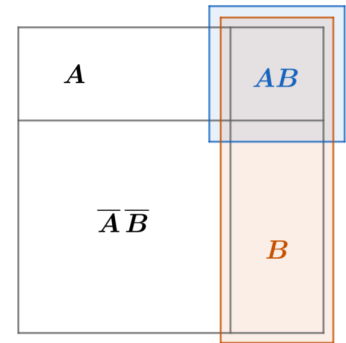
$B$  - выпало больше трех очков

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |\Omega| = 6; A = \{2, 4, 6\}; B = \{4, 5, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Интерпретация с помощью геометрической вероятности:

$$P(A|B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{\frac{S_{AB}}{S_{\Omega}}}{\frac{S_B}{S_{\Omega}}}$$



**Def.** Условной вероятностью события  $A$  при условии, что имело место событие  $B$ , называется величина  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Ех. Известно, что среди населения 1% воров. В комнате, где находилось 10 гостей, у хозяина пропал кошелек. Какова вероятность того, что произвольный гость является вором.

$A$  - гость является вором  $P(A) = 0.01$

$B$  - пропал кошелек (хотя бы один вор среди гостей есть)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{1 - P(\bar{B})} = \frac{P(A)}{1 - 0.99^{10}} = \frac{0.01}{1 - 0.99^{10}} = 0.105$$

Формула умножения:

В качестве следствия условной вероятности получаем:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \implies P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Общий случай:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

□

База индукции  $P(AB) = P(B)P(A|B)$

Шаг индукции: пусть верно при  $n - 1$ :

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2})$$

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) =$$

$$P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

□

Ех. Студент выучил 1 билет из  $n$ , в группе  $n$  студентов. Каким по очереди ему нужно зайти, чтобы вероятность сдать экзамен была наибольшей

Пусть  $A_i$  - билет, вытянутый на  $i$ -ом шаге ( $1 \leq i \leq n$ )

$A$  - студент сдал экзамен

$$P(A) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i-1}} \cdot A_i) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-(i-1)}{n-(i-2)} \cdot \frac{1}{n-(i-1)} = \frac{1}{n}$$

## Полная группа событий

**Def.** События  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и содержат все возможные элементарные исходы

$$H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i, j \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$$

Следствие:  $\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) = 1$

**Th. Формула полной вероятности.**  $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  - полная группа событий.

Тогда  $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$

□

$$P(A) = P(\Omega A) = P((H_1 + H_2 + H_3 + \dots)A) = P(H_1A + H_2A + H_3A + \dots) = [H_i \cdot A \cdot H_j \cdot A = \emptyset \cdot A] = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$$

□

**Th. Формула Байеса.**  $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n$  - полная группа событий, и известно, что событие  $A$  уже произошло

Тогда  $P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$

□

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

□

*Ex. 1.* В первой коробке 4 белых и 2 черных шара, во второй 1 белый и 2 черных. Из первой коробки во вторую переложили 2 шара, затем из второй коробки достали шар. Какова вероятность того, что он оказался белым

$\sqsupset H_1$  - переложили 2 белых  $H_2$  - 2 черных

$H_3$  - разного цвета

$A$  - из второй коробки достали белый шар

$$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

$$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{75} + \frac{1}{75} + \frac{16}{75} = \frac{35}{75} = \frac{7}{15}$$

Ех. 2. Вероятность попадания первого стрелка в цель 0.9, а второго 0.3. Наугад вызванный стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что это бы первый стрелок?

$H_1$  - вызван первый стрелок

$H_2$  - вызван второй стрелок

$A$  - стрелок попал

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_1) = 0.9 \quad P(A|H_2) = 0.3$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.9}{\frac{1}{2} \cdot 0.9 + \frac{1}{2} \cdot 0.3} = \frac{9}{9 + 3} = 0.75$$

Ех. 3. По статистике раком болеет 1% населения. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительный. Найти вероятность того, что человек болен.

$H_1$  - человек болен

$H_2$  - человек здоров

$A$  - анализ положительный

$$P(H_1) = 0.01$$

$$P(H_2) = 0.99$$

$$P(A|H_1) = 0.99$$

$$P(A|H_2) = 0.01$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{0.01 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.01} = \frac{1}{2} = 0.5$$




Допустим, что второй независимый с первым анализ также оказался положительным. Найти вероятность того, что человек болен.

$$P(H_1) = 0.01 \quad P(H_2) = 0.99$$

$$P(AA|H_1) = 0.99^2 \quad P(AA|H_2) = 0.01^2$$

$$P(H_1|AA) = \frac{0.01 \cdot 0.99^2}{0.01 \cdot 0.99^2 + 0.99 \cdot 0.01^2} = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$$

Интуитивно вероятность  $\frac{1}{2}$  может поддаваться непониманию, однако можно рассуждать так: пусть в городе живут 10000 человек, из них 100 болеют, а у 99 из них положительный анализ; у других 9900 положительный анализ всего лишь у 99, отсюда выходит  $\frac{1}{2}$

Ех. 4. В телевизионной студии 3 двери , за одной из них приз . Игрок выбрал наугад одну из 3 дверей, после чего ведущий открывает одну из двух оставшихся дверей и показывает, что там приза нет . После чего предлагает игроку поменять свой выбор. Стоит ли игроку соглашаться?

$H_1$  - игрок угадал

$H_2$  - игрок не угадал

$A$  - ведущий открыл дверь без приза

$$P(H_1) = \frac{1}{3} \quad P(H_2) = \frac{2}{3}$$

$$P(A|H_1) = 1 \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Но это неправильно, так как действия ведущего неслучайны - он всегда откроет дверь без приза

В этом случае, если мы гипотетически выберем 300 дверей, в 100 случаях мы отгадаем, ведущий откроет любую дверь без приза; но в 200 случаях мы не отгадаем, ведущий откроет вторую дверь без приза, и в этом случае мы сможем поменяться на дверь с призом, отсюда шанс  $\frac{2}{3}$ , если мы поменяем свой выбор

Ех. 5. Вероятность того, что в семье с детьми ровно  $k$  детей, равна  $\frac{1}{2^k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Какова вероятность того, что в семье один мальчик, если известно, что нет девочки? Рождения мальчиков и девочек равновероятны.

$H_i$  - в семье  $i$  детей ( $1 \leq i < \infty$ )

$$P(H_i) = \frac{1}{2^i}$$

$A$  - в семье нет девочки

$$P(A|H_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|H_i) = \frac{1}{2^i}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^i}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

## Лекция 4

### Серия испытаний Бернулли

Схемой Бернулли - называется серия одинаковых независимых экспериментов, каждый из которых имеет 2 исхода: произошло интересующее нас событие или нет

$p = p(A)$  - вероятность успеха при одном испытании

$q = 1 - p$  - вероятность неудачи

$v_n$  - число успехов в серии из  $n$  испытаний

$p(v_n = k) = p_n(k)$

Из этого получаем формулу Бернулли:

**Th.** Вероятность того, что при  $n$  испытаниях произойдет ровно  $k$  успехов, равна  

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

□

Рассмотрим один из элементарных исходов, благоприятных данному событию:

$A_n = \underbrace{УУУ \dots У}_{k} \underbrace{ННН \dots Н}_{n-k}$  -  $k$  успехов,  $n - k$  неудачи

$$p(Y) = p, p(H) = q$$

Так как испытания независимы, то  $p(A_n) = p^k q^{n-k}$

Остальные элементарные исходы имеют ту же вероятность, перебираем все расстановки исходов, получаем  $C_n^k$ , в итоге, получаем формулу Бернулли

□

*Ex.* Вероятность попадания стрелка при одном выстреле - 0.8. Какова вероятность того, что из пяти выстрелов точными будут три

$$n = 5 \quad p = 0.8 \quad q = 1 - p = 0.2 \quad k = 3$$

$$p_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0.2048$$

## Наиболее вероятное число успехов

Выясним, при каком значении  $k$  вероятность предшествующего числа успехов  $k - 1$  будет не более, чем вероятность  $k$  успехов

$$p_n(k-1) \leq p_n(k)$$

$$\frac{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}}{n!} \leq \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{n!}$$

$$\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{q} \leq \frac{(k)!(n-k)!}{p}$$

$$\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{q} \leq \frac{p}{(k)!(n-k)!}$$

$$\frac{q}{n-k+1} \leq \frac{p}{k}$$

$$k(1-p) \leq p(n-k+1)$$

$$k \leq np + p$$

$$\text{Отсюда } np + p - 1 \leq k \leq np + p$$

Рассмотрим 3 ситуации:

1)  $np$  - целое, тогда  $np + p$  - нецелое, и  $k = np$  - наиболее вероятное

2)  $np + p$  - нецелое, тогда  $k = \lfloor np + p \rfloor$

3)  $np + p$  - целое, тогда  $np + p - 1$  - целое, и 2 наиболее вероятных числа успеха

Геометрическая интерпретация:





При увеличении числа  $n$  точки превращаются в кривую Гаусса



При увеличении числа испытаний  $n$  формула Бернулли вырождается в следующие асимптотические формы (применяем, если требуется найти вероятность точного числа успеха)

1) Локальная формула Муавра-Лапласа

$$p_n(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \text{функция Гаусса}$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства  $\varphi(x)$ :

1.  $\varphi(x) = \varphi(-x)$  - функция четная
2. при  $x > 5$   $\varphi(x) \approx 0$

2) Интегральная формула Муавра-Лапласа (если требуется найти вероятность того, что число успехов в данном диапазоне)

$$p_n(k_1 \leq k \leq k_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \text{функция Лапласа}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} - \text{отклонение от левой границы, } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} - \text{отклонение от правой}$$

Свойства  $\Phi(x)$

1.  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$  - функция нечетная
2. при  $x > 5$   $\Phi(x) \approx 0.5$

*Nota.* Эти формулы обычно можно применять при  $n \geq 100$  и  $0.1 \leq p \leq 0.9$

*Nota.* В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевают другую функцию:  $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  - стандартное отклонение. Эта функция отличается от  $F_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$

Так как  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  - интеграл Пуассона

*Ex.* Вероятность попадания стрелка в цель 0.8, стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, что:

а) произошло ровно 330 попаданий

б) произошло от 312 до 336 попаданий

$$\text{а) } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{330 - 320}{8} = 1.25$$

$$p_{400}(330) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(1.25) = \frac{1}{8} \varphi(1.25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0.1826 \approx 0.0228$$

$$\text{б) } x_1 = \frac{312 - 320}{8} = -1, x_2 = \frac{336 - 320}{8} = 2$$

$$p_{400}(312 \leq k \leq 336) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$$

## Статистическое понятие вероятности

Пусть проводим  $n$  реальных экспериментов,  $n_A$  - число появления события  $A$ ,  $\frac{n_A}{n}$  - относительная частота события  $A$ .

Эксперименты с монетой показали, что при больших  $n$ ,  $\frac{n_A}{n} \approx p(A)$  - явление стабилизации

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности события

$n$  - число испытаний,  $p = p(A)$ ,  $\frac{n_A}{n}$  - экспериментальная частота

$$p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = p\left(-\varepsilon \leq \frac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon\right) = p(-n\varepsilon \leq n_A - np \leq n\varepsilon) = p(np - n\varepsilon \leq n_A \leq n\varepsilon + np) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [\text{по}$$

$$\text{интегральной формуле Лапласа}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

$$\text{Итак, получили, что нужная нам вероятность } p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

## Закон больших чисел Бернулли

$$\text{Итак, } p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right)$$

$$\text{при } n \rightarrow \infty, \sqrt{n} \rightarrow \infty, \frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} \rightarrow \infty, \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right) \rightarrow 0.5, p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \rightarrow 2 \cdot 0.5 = 1 - \text{закон больших}$$

чисел показывает, что вероятность попадания относительной частоты в  $\varepsilon$ -трубу приближается к 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1 \text{ или } \frac{n_A}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p - \text{сходимость по вероятности}$$

*Ex.* Для оценки доли  $p$  курящих людей берется выборка объема  $n$ , и делается оценка доли курящих людей по формуле  $p^* = \frac{n_A}{n}$ . Каким должен быть объем  $n$ , чтобы с вероятностью  $\gamma = 0.95$  данная оценка отличалась от истинного значения не более, чем на  $\varepsilon = 0.01$

По формуле вероятности отклонения частоты от вероятности  $p(|p^* - p| \leq \varepsilon) = p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx$

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right) = 0.95$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right) = 0.475$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} = 1.96$$

$$\frac{1}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} = 196$$

$$\frac{1}{pq} = 38416$$

$$n \geq 38416pq$$

$$\text{В самой худшей ситуации } pq \leq 0.5^2 = \frac{1}{4}$$

$$n \geq \frac{38416}{4} = 9604$$

## Лекция 5

### Схема испытаний и соответствующее распределение

Введем обозначения:

$n$  - число испытаний

$p$  - вероятность успеха при одном испытании

$q = 1 - p$  - вероятность неудачи

#### I. Схема Бернулли

$\exists v_n$  - число успехов в серии из  $n$  испытаний

$$P_n(v_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

**Def.** Соответствие  $k \rightarrow C_n^k p^k q^{n-k}$ ,  $k = 0, \dots, n$  называется биномиальным распределением (обозначается  $B_{n,p}$  или  $B(n, p)$ )

## II. Схема до первого успешного испытания

Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успешного испытания под номером  $\tau$

$$\text{Th. } P(\tau = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

□

$$P(\tau = k) = P(\underbrace{H \dots H}_{k-1} Y) = q^{k-1}p$$

□

**Def.** Соответствие  $k \rightarrow q^{k-1}p, k \in \mathbb{N}$  называется геометрическим распределением вероятности (обозначается  $G_p$  или  $G(p)$ )

*Nota.* Геометрическое распределение обладает свойством нестарения или свойством отсутствия последствия

$$\text{Th. } \exists P(\tau = k) = q^{k-1}p, k \in \mathbb{N}. \text{ Тогда } \forall n, k \geq 0 \quad P(\tau > n+k \mid \tau > n) = P(\tau > k)$$

□

Заметим, что  $P(\tau > m) = q^m$ , первые  $m$  - неудачи

$$P(\tau > n+k \mid \tau > n) = \frac{P(\tau > n+k, \tau > n)}{P(\tau > n)} = \frac{P(\tau > n+k)}{P(\tau > n)} = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k$$

□

*Nota.*  $P(\tau = n+k \mid \tau > n) = p(\tau = k)$  - Lab. доказать

## III. Схема испытаний с несколькими исходами

Пусть при  $n$  независимых испытаний могут произойти  $m$  исходов (несовместных)

$p_i$  - вероятность  $i$ -ого исхода при одном испытании

**Th.** Вероятность того, что при  $n$  испытаниях первый исход появится  $n_1$  раз, второй -  $n_2$  раз,  $m$ -ый -  $n_m$  ( $\sum_{i=1}^m n_i = n$ ) равно

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

При  $m = 2$  получаем формулу Бернулли

□

Рассмотрим следующий благоприятный исход, обозначим  $A_1$

$$A_1 = \underbrace{11 \dots 1}_{n_1} \underbrace{22 \dots 2}_{n_2} \dots \underbrace{mm \dots m}_{n_m}$$

$$p(A_1) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

Все остальные благоприятные исходы имеют ту же вероятность и отличаются лишь расположением  $i$ -ых исходов на  $n$  позициях, получаем мультиномиальную теорему:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

В итоге получаем требуемую формулу

□

Ех. Два одинаковых сильных шахматиста играют шесть партий

Вероятность ничьи в партии - 0.5. Какова вероятность того, что второй игрок выиграет две партии, а еще три сведет к ничьей

1-ый исход - выиграл 1 игрок

2-ой исход - выиграл 2 игрок

3-ий исход - ничья

$$n = 6; \quad p_3 = 0.5; \quad p_1 = p_2 = \frac{1 - p_3}{2} = 0.25$$

$$P_6(1; 2; 3) = \frac{6!}{1!2!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} \frac{1}{2^9} \approx 0.12$$

#### IV. Урновая схема

В урне  $N$  шаров, из которых  $K$  шаров белые,  $N - K$  - черные

Из урны вынимаем (без учета порядка)  $n$  шаров. Найти вероятность, что из них  $k$  белых

а) Схема с возвратом (после каждого раза кладем шар обратно). В этом случае вероятность вынуть белый шар одинакова и равна  $\frac{K}{N}$ . Получаем схему Бернулли:  $P_n(k) = C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$

б) Схема без возврата - вынутый шар мы выбрасываем, тогда  $P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$

**Def.** Соответствие  $k \rightarrow \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, \dots, n$  называется гипергеометрическим распределением

*Nota.* Если  $K, N \rightarrow \infty$  так, что  $\frac{K}{N} \approx p$  (не меняется), а  $n$  и  $k$  зафиксировать, то после выбора  $n$  шаров пропорции состава шаров не сильно изменятся, поэтому логично предположить, что гипергеометрическое распределение будет сходиться к биномиальному

**Th.** Если  $K, N \rightarrow \infty$  таким образом, что  $\frac{K}{N} \rightarrow p \in (0; 1)$ , а  $n$  и  $0 \leq k \leq n$  фиксированы, то вероятность при гипергеометрическом распределении будет стремиться к биномиальному:

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$$

Воспользуемся леммой:  $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$  при  $n \rightarrow \infty$  и фиксированном  $k$

Доказательство леммы:  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{n^k}{k!} = 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{n^k}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$

□

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \sim \frac{K^k}{k!} \frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{N^n} = \frac{n!}{k!} \frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{K^k}{N^n} = C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k} \rightarrow C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$$

□

## V. Схема Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли

*Nota.* Если вероятность успеха  $p$  в схеме Бернулли мала или близка к 1, то предельная формула Лапласа при недостаточно большом числе испытаний дает достаточно большую погрешность.

В этой ситуации следует использовать формулу Пуассона (формула редких событий)

Схема: вероятность числа успеха при одном испытании  $p_n$  зависит от числа испытаний  $n$ , причем таким образом, что  $np_n \approx \lambda = \text{const}$

$\lambda$  - интенсивность появления редких событий в единицу времени в потоке испытаний

**Th. 1.** (формула Пуассона) Пусть  $n \rightarrow \infty, p_n \rightarrow 0$  таким образом, что  $np_n \rightarrow \lambda = \text{const} > 0$

Тогда вероятность  $k$  успехов при  $n$  испытаниях:  $P_n(k) = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

□

Обозначим  $\lambda_n = np_n$ . Тогда  $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$  и

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k!} \frac{\lambda_n^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n =$$

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \left( \left( 1 - \frac{\lambda_n}{n} \right)^{-\frac{n}{\lambda_n}} \right)^{-\frac{\lambda_n}{n} n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

□

**Th. 2.** (оценка погрешности в формуле Пуассона) Пусть  $v_n$  - число успехов при  $n$  испытаниях в схеме Бернулли

$p$  - вероятность успеха при одном испытании,  $\lambda = np$ ,  $A \subset \{0, 1, \dots, n\}$  - произвольное подмножество чисел

Тогда  $|P_n(v_n \in A) - \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \min(p, np^2) = \min(p, p\lambda)$   
(без доказательства)

**Def.** Соответствие  $k \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  называется распределением Пуассона с параметром  $\lambda > 0$  (обозначается  $\Pi_\lambda$ )

*Ex.* Прибор состоит из 1000 элементов, вероятность отказа каждого элемента равна 0.001. Какова вероятность отказа больше двух элементов

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$n = 1000, p = 0.001, \lambda = 1$$

$$P_n(k > 2) = 1 - P_n(k \leq 2) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) \approx 1 - \left( \frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1} + \frac{1^2}{2!} e^{-1} \right) = 1 - \left( 1 + 1 + \frac{1}{2} \right) e^{-1} \approx 0.0803$$

## Лекция 6

### Случайные величины

Примеры случайных величин:

*Ex. 1.* Бросаем кость, может выпасть 6 граней, здесь случайная величина  $\xi$  - число выпавших очков

*Ex. 2.*  $\xi$  - время работы микросхемы, в этом случае время может быть:

а) дискретным -  $\xi \in \{0, 1, 2, \dots\}$

б) непрерывным -  $\xi \in [0; \infty)$

*Ex. 3.* Температура за окном:  $\xi \in (-50, +50)$

**Def.** На вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $\mathcal{F}$ -измеримой,

если  $\forall x \in \mathbb{R} \{ \omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x \} \in \mathcal{F}$  (то есть  $\xi^{-1}(y) \in \mathcal{F}$ , где  $y \in (-\infty; x)$ )

**Def.** Случайной величиной, заданной на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , называется  $\mathcal{F}$ -измеримая функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , которая сопоставляет каждому элементарному исходу некоторое вещественное число

*Nota.* Не все функции являются  $\mathcal{F}$ -измеримыми

*Ex.* Кость:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$

Пусть  $\xi(\omega) = i$  - число выпавших очков. Тогда при  $x = 4$ :  $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{F} \implies$  случайная величина не является  $\mathcal{F}$ -измеримой

В данном случае следует сделать  $\xi$  таким, что  $\xi(2) = \xi(4) = \xi(6) = 1$ ,  $\xi(1) = \xi(3) = \xi(5) = 0$

*Nota.* Смысл измеримости: если задана случайная величина  $\xi$ , то мы можем задать вероятность попадания случайной величины в интервал  $(-\infty; x)$ :  $p(\xi \in (-\infty; x)) = p(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\})$

А из интервалов  $(-\infty; x)$  с помощью операций пересечения, объединения и дополнения можно получить все другие интервалы (включая точки) и также приписать им вероятности

Из матанализа известно, что мера из интервалов однозначно продолжается до меры на всей Борелевской  $\sigma$ -алгебры на  $\mathbb{R}$  и, таким образом, с помощью случайной величины каждому Борелевскому множеству  $B$  также приписывается вероятность  $p(\xi \in B)$

Итак, пусть  $\xi$  задана на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , с помощью нее получаем новой вероятностное пространство  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_\xi)$

Получая новое вероятностное пространство, мы упрощаем и формализуем работу, так как можем не учитывать природу и структуру исходного пространства

**Def.** Функция  $p(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , ставящая в соответствие каждому Борелевскому множеству вероятность, называется распределением случайной величины  $\xi$

## Основные типы распределения

- a) Дискретное
- b) Абсолютно непрерывное
- c) Сингулярное
- d) Смешанное

## Дискретная случайная величина

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет дискретное распределение, если она принимает не более, чем счетное число значений. То есть существует конечный или счетный набор чисел



$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  такой, что  $p(\xi = x_i) = p_i > 0$  и  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$

Таким образом, дискретная случайная величина (ДСВ) задается законом распределения:

|       |       |       |         |       |         |                               |
|-------|-------|-------|---------|-------|---------|-------------------------------|
| $\xi$ | $x_1$ | $x_1$ | $\dots$ | $x_n$ | $\dots$ | - значения случайной величины |
| $p$   | $p_1$ | $p_1$ | $\dots$ | $p_n$ | $\dots$ | - вероятности этих значений   |

$(\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$  - условие нормировки)

Ex. 1. кость,  $\xi(\omega) = i$  - число выпавших очков

|       |               |               |               |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\xi$ | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
| $p$   | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Ex. 2. все распределения из предыдущих лекций (биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, Пуассона)

Ex. 3. индикатор события  $A$ :  $I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A - \text{событие } A \text{ не происходит} \\ 1, & \omega \in A - \text{событие } A \text{ происходит} \end{cases}$

## Числовые характеристики дискретных случайных величин

### I. Математическое ожидание (среднее значение, полезность)

**Def.** Математическим ожиданием  $E\xi$  случайной величины  $\xi$  называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

при условии, что данный ряд сходится абсолютно

*Nota.* Если  $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \infty$ , то говорят, что матожидание не существует

При условной сходимости ряда при перестановке членов сумма изменяется, поэтому необходима абсолютная

**Физический смысл:** Среднее значение - число, вокруг которого группируются значения случайной величины, центр тяжести точек  $x_i$  с весами  $p_i$

**Статистический смысл:** среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины при большом числе реальных экспериментов

### II. Дисперсия

**Def.** Дисперсией  $D\xi$  случайной величины  $\xi$  называют среднее квадратов ее отклонения от математического ожидания:

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$  или  $D\xi = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - E\xi)^2 p_i$  при условии, что данный ряд сходится

В противном случае говорится, что дисперсии не существует

*Nota.* Дисперсию обычно удобно считать по формуле  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E\xi^2$

**Смысл** - квадрат среднего разброса (рассеивания) значения случайной величины относительно ее математического ожидания

### III. Среднее квадратическое отклонение

**Def.** Средним квадратическим отклонением (СКО)  $\sigma_\xi$  называется величина  $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

**Смысл** - средний разброс

*Ex. 1.* Кость

|       |               |               |               |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\xi$ | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
| $p$   | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

$$E\xi = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = 3.5 \text{ (в данном случае ср. арифм.)}$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^6 (x_i - E\xi)^2 p_i = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 = \frac{35}{12}$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} \approx 1.79$$

*Ex. 2.* Индикатор события  $A$ :  $I_A(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \notin A - \text{событие } A \text{ не происходит} \\ 1, \omega \in A - \text{событие } A \text{ происходит} \end{cases}$

|       |            |        |
|-------|------------|--------|
| $\xi$ | 0          | 1      |
| $p$   | $1 - P(A)$ | $P(A)$ |

$$E\xi = 0 \cdot (1 - P(A)) + 1 \cdot P(A) = P(A)$$

$$D\xi = 0^2 \cdot (1 - P(A)) + 1^2 P(A) - P(A)^2 = P(A)(1 - P(A)) = pq$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{pq}$$

### Свойства матожидания и дисперсии

**Th. 1.** Случайная величина  $\xi$  имеет вырожденное распределение, если  $\xi(\omega) = \text{const} \quad \forall \omega \in \Omega$

|       |     |
|-------|-----|
| $\xi$ | $C$ |
| $p$   | 1   |

$$E\xi = C \quad D\xi = 0$$

**Th. 2.** Свойство сдвига:  $E(\xi + C) = E\xi + C$ ;  $D(\xi + C) = D\xi$

**Th. 3.** Свойство растяжения:

$$E(C\xi) = CE\xi$$

$$D(C\xi) = C^2 D\xi$$

Lab. 2-3 доказать

**Th. 4.**  $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$  (из третьего свойства математического ожидания - линейная функция)

□

Пусть  $x_i, y_j$  - значения случайных величин  $\xi, \eta$ , а  $p_i$  и  $q_j$  - их соответствующие вероятности

$$E(\xi + \eta) = \sum_{i,j} (x_i + y_j) p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) + \sum_j y_j \sum_i p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) = \sum_i x_i p(\xi = x_i) + \sum_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi + E\eta$$

□

**Def.** Дискретные случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, если  $p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i) \cdot p(\eta = y_j) \forall i, j$

То есть случайные величины принимают свои значения независимо друг от друга

**Th. 5.** Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$ ; обратное неверно

□

$$E(\xi\eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi = x_i) p(\eta = y_j) = \sum_i x_i p(\xi = x_i) \sum_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi \cdot E\eta$$

□

**Th. 6.**  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

□

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E((E\xi)^2) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

□

**Def.**  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$ , где  $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$  - ковариация случайных

величин (равна 0 при независимых величинах) - индикатор наличия связи между случайными величинами

□

$$D(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^2 - (E(\xi + \eta))^2 = E\xi^2 + 2E(\xi\eta) + E\eta^2 - (E\xi + E\eta)^2 = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E(\xi\eta) - (E\xi)^2 - (E\eta)^2 - 2E\xi E\eta = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

□

**Th. 7.** Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

□

Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$  и  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

□

**Th. 8.** Общая формула дисперсии суммы:  $D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i,j (i \neq j)} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$

## Другие числовые характеристики

Моменты старших порядков

а)  $m_k = E\xi^k$  - момент  $k$ -ого порядка случайной величины  $\xi$  (также называют начальным моментом)

б)  $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$  - центральный момент  $k$ -ого порядка

$E\xi = m_1$  - момент первого порядка

$E\xi^2 = m_2$  - момент второго порядка

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$  - центральный момент второго порядка

*Nota.* Центральные моменты можно выразить через обычный момент:

$$\mu_2 = D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

*Ex.* Разберем задачу Бюффона с точки зрения матожидания (для простоты  $l$  - ширина доски):

пусть  $p(A)$  - пересечет стык,  $\xi = I_A$  - число пересечений. Тогда матожидание  $E\xi = EI_A = P(A)$

Заметим, что при изменении длины иглы с  $l$  до  $2l$  матожидание пересекаемых стыков увеличивается в два раза. Помимо этого можно составить из  $k$  игл ломаную, матожидание стыков которой будет равно  $kE\xi$

Заметим, что такое работает и в обратную сторону: при уменьшении иглы в  $k$  раз матожидание равно  $\frac{E\xi}{k}$

Теперь сделаем замкнутый многоугольник из игл, получим, что матожидание в таком случае  $P \frac{E\xi}{l}$ , где  $P$  - периметр

В пределе строим круг диаметра  $l$  - он всегда пересечет линии стыка 2 раза, значит матожидание  $E_o = P_o \frac{E\xi}{l} = 2$

Длина окружность  $P_o = \pi l$ , получаем  $E\xi = \frac{2l}{P_o} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$

## Лекция 7

### Стандартное дискретное распределение

#### I. Распределение Бернулли

Распределение Бернулли  $B_p$  (с параметром  $0 < p < 1$ )

$\xi$  - число успехов при одном испытании,  $p$  - вероятность успеха при одном испытании

|       |            |        |
|-------|------------|--------|
| $\xi$ | 0          | 1      |
| $p$   | $1 - P(A)$ | $P(A)$ |

Матожидание:  $E\xi = p$

Дисперсия:  $D\xi = p(1 - p) = pq$

Ех. Индикатор события  $I_A \in B_p$  как раз имеет распределение Бернулли, где  $p = P(A)$

#### II. Биномиальное распределение

Биномиальное распределение  $B_{n,p}$  (с параметрами  $n, p$ )

$\xi$  - число успехов в серии из  $n$  испытаний,  $p$  - вероятность успеха при одном испытании

$p(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n \iff \xi \in B_{n,p}$

|       |       |             |     |                     |     |       |
|-------|-------|-------------|-----|---------------------|-----|-------|
| $\xi$ | 0     | 1           | ... | $k$                 | ... | $n$   |
| $p$   | $q^n$ | $nq^{n-1}p$ | ... | $C_n^k p^k q^{n-k}$ | ... | $p^n$ |

Заметим, что  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ , где  $\xi_i \in B_p$  - число успехов при  $i$ -ой испытании

$E\xi_i = p$ ;  $D\xi_i = pq$

$E\xi = E\xi_1 + \dots + E\xi_n = p + \dots + p = \boxed{np}$

$D\xi = D\xi_1 + \dots + D\xi_n = pq + \dots + pq = \boxed{npq}$

### III. Геометрическое распределение

Геометрическое распределение  $G_p$  (с параметром  $p$ )

$\xi$  - номер 1-ого успешного испытания в бесконечной серии

$$p(\xi = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots \iff \xi \in G_p$$

|       |     |      |     |            |     |
|-------|-----|------|-----|------------|-----|
| $\xi$ | 1   | 2    | ... | $k$        | ... |
| $p$   | $p$ | $qp$ | ... | $q^{k-1}p$ | ... |

$$\text{Матожидание } E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left( \sum_{k=1}^{\infty} (q^k) \right)' = p \left( \frac{1}{1-q} \right)' =$$

$$\frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = pq \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + E\xi = pq \left( \sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)'' + \frac{1}{p} =$$

$$pq \left( \frac{1}{1-q} \right)'' + \frac{1}{p} = 2pq \frac{1}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} = 2pq \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

### IV. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона  $\Pi_\lambda$  (с параметром  $\lambda > 0$ )

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ , если  $p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

|       |                |                        |     |                                     |     |
|-------|----------------|------------------------|-----|-------------------------------------|-----|
| $\xi$ | 0              | 1                      | ... | $k$                                 | ... |
| $p$   | $e^{-\lambda}$ | $\lambda e^{-\lambda}$ | ... | $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ | ... |

Покажем корректность определения - докажем, что сумма нижней строки равна 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{ряд Тейлора для } e^\lambda} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda = np$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda + \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

## Задача о разорении игрока

Постановка задачи: играют 2 игрока, вероятность выигрыша первого игрока в одной игре равна  $p$ ,  $q = 1 - p$  - вероятность его проигрыша (выигрыш второго)

В каждой игре разыгрывается 1 биткоин. Капитал первого игрока -  $k$  биткоинов,  $m - k$  биткоинов - капитал второго

Найти вероятность разорения первого игрока

Траектория капитала первого игрока будет выглядеть как-то так:



Пусть  $r_k$  - интересующая нас вероятность разорения игрока при капитале  $k$  (то есть достижения оси абсцисс на графике)

$$r_k = p \cdot r_{k+1} + q r_{k-1}$$

$$p r_{k+1} - r_k + (1 - p) r_{k-1} = 0, \quad r_0 = 1, r_m = 0$$

$$p \lambda^2 - \lambda + (1 - p) = 0$$

$$D = 1 - 4p(1 - p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p - 1)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm (2p - 1)}{2p}; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = \frac{2 - 2p}{2p} = \frac{q}{p}$$

$$\text{Обозначим } \lambda = \frac{q}{p}$$

Рассмотрим два случая:

- $p \neq \frac{1}{2}$

Тогда общее решение:  $r_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k = C_1 + C_2 \lambda^k$

Найдем частное решение:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 + C_2 \lambda^m \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ 1 - C_2 + C_2 \lambda^m = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ C_2(1 - \lambda^m) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - \frac{1}{1 - \lambda^m} = \frac{-\lambda^m}{1 - \lambda^m} \\ C_2 = \frac{1}{1 - \lambda^m} \end{cases}$$

$$r_k = \frac{-\lambda^m}{1 - \lambda^m} + \frac{1}{1 - \lambda^m} \lambda^k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m}$$

Посмотрим, что будет происходить при бесконечной игре (то есть когда  $m \rightarrow \infty$  - капитал неограничен)

1)  $p < q$ , то есть  $\lambda > 1$ . Тогда  $\lambda^m \rightarrow \infty$ ,  $r_k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m} = \frac{\frac{\lambda^k}{\lambda^m} - 1}{\frac{1}{\lambda^m} - 1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$  - то есть первый игрок гарантированно разорится

2)  $p > q$ , то есть  $\lambda < 1$ . Тогда  $\lambda^m \rightarrow 0$ ,  $r_k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \lambda^k$  - то есть  $r_k = \left(\frac{q}{p}\right)^k$

- $p = \frac{1}{2} \implies D = 0$

Тогда  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Общее решение:  $r_k = C_1 \lambda^k + C_2 k \lambda_k = C_1 + C_2 k$

Частное решение:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 0 = C_1 + C_2 m \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = C_1 \\ -1 = C_2 m \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = C_1 \\ C_2 = -\frac{1}{m} \end{cases}$$

$$r_k = 1 - \frac{k}{m}$$

При бесконечной игре:

$$r_k = 1 - \frac{k}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1 - \text{то есть при равной игре игрок неминуемо разорится}$$

## Случайное блуждание на прямой

Пусть в начальный момент времени находимся в начале координат. С вероятностью  $p$  идем на единицу вправо, с вероятностью  $q$  - влево

При  $p = \frac{1}{2}$  мы рано или поздно попадем в любую точку числовой прямой

Можно привести аналогию с орлянкой: рано или поздно каждый игрок будет при сколь угодно большом выигрыше

Посмотрим на орлянку как на распределение Бернулли:

|       |               |               |
|-------|---------------|---------------|
| $\xi$ | -1            | 1             |
| $p$   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

$$E\xi = 0; \quad D\xi = 1$$

Пусть  $\xi$  - выигрыш первого после  $n$  игр.

$$E\xi = \sum_{i=1}^n E\xi_i = 0$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^n D\xi_i = n$$

$\sigma_\xi = \sqrt{n}$  - среднее квадратическое отклонение

Это означает, что при большом  $n$  СКО поглотит всю числовую прямую

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow E\xi$$



Закон больших чисел в этой ситуации говорит, что точка останется у 0, однако в то же время она может оказаться на любой точке на числовой прямой

Ex. По  $n$  конвертам случайным образом раскладывается  $m$  писем. Случайная величина  $\xi$  - число писем в своих конвертах

$$\square A_i - \text{число } i \text{ письма в своем конверте, } \xi_i = I_A = \begin{cases} 0, & i\text{-ое письмо в не своем конверте} \\ 1, & i\text{-ое письмо в своем конверте} \end{cases}$$

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$E\xi_i = P(A_i) = \frac{1}{n}$$

$$D\xi_i = pq = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$$

$$E\xi = \sum_{i=1}^n E\xi_i = n \frac{1}{n} = 1 - \text{в среднем будет одно письмо в своем конверте}$$

$$D\xi = D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

Найдем ковариацию:

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = E\xi_i \xi_j - E\xi_i E\xi_j = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{n - (n-1)}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$\text{Заметим, что для любых } i, j, i < j: \xi_i \xi_j = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы одно не в своем} \\ 1, & \text{если оба в своем} \end{cases}$$

$$\text{То есть } \xi_i \xi_j \in B_p \text{ и } E\xi_i \xi_j = P(\text{оба письма в своих}) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\text{Получаем: } D\xi = n \frac{n-1}{n^2} + 2 \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$$

## Лекция 8

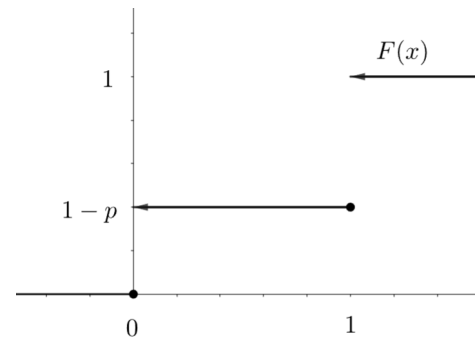
### Функция распределения

Def. Функция распределения  $F_\xi(x)$  случайной величины  $\xi$  называется функция  $F_\xi(x) = P(\xi < x)$



$$\text{Ex. } \xi \in B_p \quad \begin{array}{c|c|c} \xi & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1-p & 0 < x \leq 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



### Свойства функции распределения

- 1)  $F(x)$  ограничена  $0 \leq F(x) \leq 1$
- 2)  $F(x)$  неубывающая функция:  $x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$

$$x_1 < x_2 \implies \{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\} \implies p(\xi < x_1) \leq p(\xi < x_2), \text{ то есть } F(x_1) \leq F(x_2)$$

- 3)  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

$$p(\xi < \beta) = p(\xi < \alpha) + p(\alpha \leq \xi < \beta) \implies F(\beta) = F(\alpha) + p(\alpha \leq \xi < \beta)$$

*Nota.* Функция распределения  $F(x)$  - вероятность попадания в интервал  $(-\infty; x)$ . Так как Борелевская  $\sigma$ -алгебра порождается такими интервалами, то распределение полностью задается этой функцией

- 4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Так как  $F(x)$  монотонна и ограничена, то эти пределы существуют. Поэтому достаточно доказать эти пределы для некоторой последовательности  $x_n \rightarrow \pm\infty$

$\square A_n = \{n-1 \leq \xi < n, n \in \mathbb{Z}\}$  - несовместные события, так как  $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A_n$ , то по аксиоме

счетной аддитивности, вероятность  $p(\xi \in \mathbb{R}) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N p(n-1 \leq \xi < n) =$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N (F(n) - F(n-1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} (F(N) - F(-N-1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) - \lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) = 1$$

$$\implies \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1 + \lim_{N \rightarrow -\infty} F(N)$$

Так как  $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) \leq 1$  и  $\lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) \geq 0$ , то  $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1$  и  $\lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) = 0$

- 5)  $F(x)$  непрерывна слева:  $F(x_0 - 0) = F(x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий  $B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < x_0, n \in \mathbb{Z}\}$

Так как  $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$

То по аксиоме непрерывности  $p(B_n) \rightarrow 0$

$$P(B_n) = F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) \rightarrow 0$$

$$F(x_0 - \frac{1}{n}) \rightarrow F(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$$

6) Скачок в точке  $x_0$  равен вероятности попадания в данную точку:  $F(x_0 + 0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$   
или  $F(x_0 + 0) = p(\xi = x_0) + p(\xi < x_0) = p(\xi \leq x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий  $C_n = \{x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$

Так как  $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$

То по аксиоме непрерывности  $p(C_n) \rightarrow 0$

$$P(C_n) = F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \rightarrow 0$$

$$p(x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}) + p(\xi = x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

7) Если функция распределения непрерывна в точке  $x = x_0$ , то очевидно, что вероятность попадания в эту точку  $p(\xi = x_0) = 0$  (следствие из 6 пункта)

8) Если  $F(x)$  непрерывна  $\forall x \in \mathbb{R}$ , то  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

**Th.** Случайная величина  $\xi$  имеет дискретное распределение тогда и только тогда, когда ее функция распределения имеет ступенчатый вид

## Абсолютно непрерывное распределение

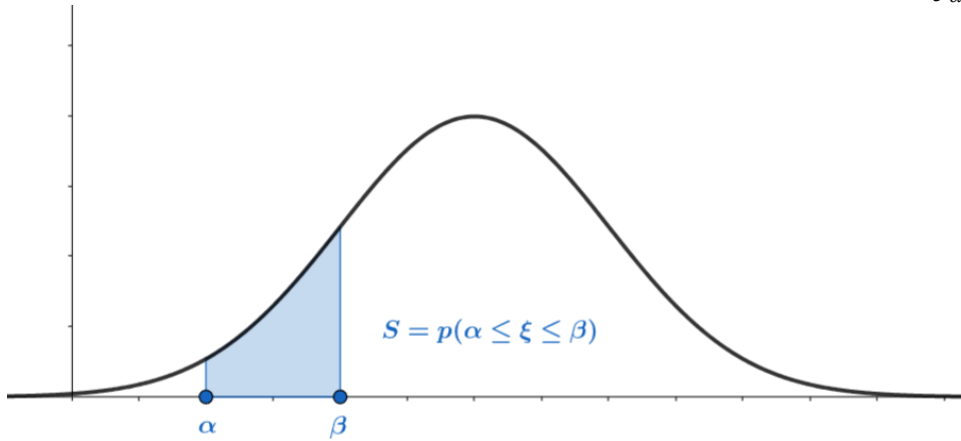
**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует  $f_{\xi}(x)$  такая, что  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad p(\xi \in B) = \int_B f_{\xi}(x) dx$

Функция  $f_{\xi}$  называется плотностью распределения случайной величины

(в определении использует интеграл Лебега, так как  $B$  может быть не просто интервалом на  $\mathbb{R}$ )

### Свойства плотности абсолютно непрерывного распределения

1) Вероятностно-геометрический смысл плотности:  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_{\xi}(x) dx$



2) Условие нормировки:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x) dx = 1$

Из определения, если  $B = \mathbb{R}$

3)  $F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) dx$

Если  $B = (-\infty; x)$ , то  $F_{\xi}(x) = p(\xi \in (-\infty; x)) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) dx$

4)  $F_{\xi}(x)$  непрерывна

Из свойства непрерывности интеграла с верхним переменным пределом

5)  $F_{\xi}(x)$  дифференцируема почти везде и  $f_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x)$  для почти всех  $x$

По теореме Барроу

6)  $f_{\xi}(x) \geq 0$  по определению и как производная неубывающей  $F_{\xi}(x)$

7)  $p(\xi = x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$  - так как  $F_{\xi}(x)$  непрерывна

8)  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

9) **Th.** Если  $f(x) \geq 0$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  (выполнены свойства 2 и 6), то  $f(x)$  - плотность некоторого распределения

## Числовые характеристики

**Def.** Математическим ожиданием  $E\xi$  случайной абсолютно непрерывной величины  $\xi$  называется величина  $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$  при условии, что данный интеграл сходится абсолютно, то есть  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx < \infty$

**Def.** Дисперсией  $D\xi$  случайной величины  $\xi$  называется величина  $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f_{\xi}(x) dx$  при условии, что данный интеграл сходится

*Nota.* Вычислять удобно по формуле  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx - (E\xi)^2$

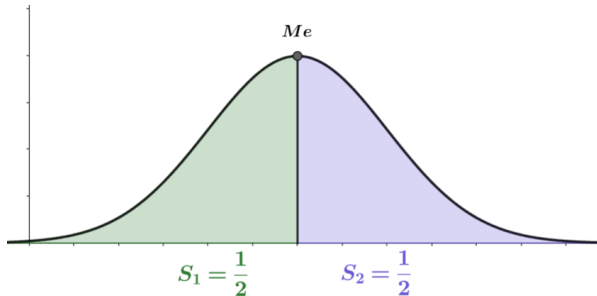
**Def.** Среднее квадратическое отклонение  $\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$  определяется, как корень дисперсии. Смысл этих величин такой же, как и при дискретном распределении. Также свойства аналогичны тем, что и при дискретном распределении

## Другие числовые характеристики

$m_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\xi}(x) dx$  - момент  $k$ -ого порядка

$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k f_{\xi}(x) dx$  - центральный момент  $k$ -ого порядка

**Def.** Медианой  $Me$  абсолютно непрерывной случайной величины  $\xi$  называется значение случайной величины  $\xi$ , такое что  $p(\xi < Me) = p(\xi > Me) = \frac{1}{2}$



**Def.** Модой  $Mo$  случайной величины  $\xi$  называется точка локального максимума плотности



## Сингулярное распределение

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет сингулярное распределение, если  $\exists B$  - Борелевское множество с нулевой мерой Лебега  $\lambda(B) = 0$ , такое что  $p(\xi \in B) \in 1$ , но  $P(\xi = x) = 0 \quad \forall x \in B$

*Nota.* Такое Борелевское множество состоит из несчетного множества точек, так как в противном случае по аксиоме счетной аддитивности  $p(\xi \in B) = 0$ . То есть при сингулярном распределении случайная величина  $\xi$  распределена на несчетном множестве меры 0

*Nota.* Так как  $p(\xi = x) = 0 \quad \forall x$ ,  $F_\xi$  непрерывна.

*Ex.* Сингулярное распределение получим, если возьмем случайную величину, функция распределения которой - лестница Кантора

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}F(3x) & 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2) & \frac{2}{3} < x \leq 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



### Th. Лебега.

$\square F_\xi(x)$  - функция распределения  $\xi$ . Тогда  $F_\xi(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$ , где  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$F_1$  - функция дискретного распределения

$F_2$  - функция абсолютно непрерывного распределения

$F_3$  - функция сингулярного распределения

То есть существуют только дискретное, абсолютно непрерывное, сингулярное распределения и их смеси

## Лекция 9

### Стандартное абсолютно непрерывное распределение

#### I. Равномерное распределение

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет равномерное распределение  $\xi \in U(a, b)$ , если ее плотность на этом отрезке постоянна

Получаем функцию плотности  $f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$   $\frac{1}{b-a}$  из усл. нормировки



Из этого функция распределения  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$



**Числовые характеристики:**

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \text{ при условии, что } \alpha, \beta \in [a, b]$$

*Nota.* Примеры равномерного распределения: задача со временем, датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение  $U(0, 1)$

## II. Показательное распределение

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет показательное (или экспоненциальное) распределение с параметром  $\alpha > 0$  (обозн.  $\xi \in E_\alpha$ ), если ее плотность имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



Функция распределения  $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \alpha e^{-\alpha x} = 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$



**Числовые характеристики:**

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x}dx = \left[ \begin{array}{ll} u=x & du=dx \\ dv=\alpha e^{-\alpha x} & v=-e^{-\alpha x} \end{array} \right] = -xe^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx =$$

$$-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\alpha x}} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha e^{\alpha x}} - \frac{1}{\alpha} (\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} - 1) = \frac{1}{\alpha}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x}dx = \left[ \begin{array}{ll} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\alpha e^{-\alpha x} & v=-e^{-\alpha x} \end{array} \right] = -x^2 e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x}dx =$$

$$\frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x} = \frac{2}{\alpha} E\xi = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\alpha}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\alpha\alpha} - e^{-\beta\alpha} \quad a, b \geq 0$$



*Nota.* Из непрерывных случайных величин только показательная обладает свойством нестарения

**Th.**  $\exists \xi \in E_\alpha$ . Тогда  $p(\xi > x + y \mid \xi > x) = p(\xi > y) \quad \forall x, y > 0$

□

$$p(\xi > x + y \mid \xi > x) = \frac{p(\xi > x + y, \xi > x)}{p(\xi > x)} = \frac{1 - p(\xi < x + y)}{1 - p(\xi < x)} = \frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} = \frac{e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} = e^{-\alpha y} = 1 - (1 - e^{-\alpha y}) = 1 - p(\xi < y) = p(\xi > y)$$

□

*Ex. 1.* Время работы надежной микросхемы до поломки

*Ex. 2.* Время между появлениями двух редких событий (через схему Пуассона)

*Nota.* Применится в системах массового обслуживания, теория надежности

### III. Нормальное распределение (Гауссовское)

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $a$  и  $\sigma^2$  (обозн.  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ ), если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$



Смысл параметров распределения:  $a = E\xi$  - матожидание и медиана,  $\sigma$  - СКО, а  $D\xi = \sigma^2$

Функция распределения:  $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$



Проверим корректность определения - условие нормировки. Покажем, что  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[ \begin{array}{ll} t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} & dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} \\ t(\pm\infty) = \pm\infty & dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1 - \text{верно}$$

Ясно, что  $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$  - интеграл сходится абсолютно для любого  $k$  (степень  $e$  задавит полином)

$$E\xi = m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a \text{ в силу симметрии}$$

Найдем дисперсию при помощи дифференцирования интеграла по параметру:

$$\text{Из условия нормировки } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left( -\frac{(x-a)^2}{2} (-2\sigma^{-3}) \right) dx = 1$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 = D\xi, \text{ получаем, что } \sigma - \text{СКО}$$

### Стандартное нормальное распределение

**Def.** Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами  $a = 0, \sigma^2 = 1$ :  $\xi \in N(0, 1)$

Плотность:  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  - функция Гаусса

$$E\xi = 0; D\xi = 1$$

Распределение:  $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  - функция стандартного нормального распределения

Заметим, что  $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi(x)$ , где  $\Phi(x)$  - функция Лапласа

Функция Лапласа нечетная и из соображения симметрии легко вычисляется для отрицательных  $x$ , однако большинство ПО используют  $F_0(x)$

### Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями

1)  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ . Тогда  $F_\xi(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

□

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left[ \begin{array}{lll} z = \frac{t-a}{\sigma} & t = \sigma z + a & dt = \sigma dz \\ z(-\infty) = -\infty & z(x) = \frac{x-a}{\sigma} & \end{array} \right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

□

2) Если  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ , то  $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0, 1)$  (процесс  $\xi \rightarrow \eta$  называется стандартизацией)

□

$$F_\eta(x) = p(\eta < x) = p\left(\frac{\xi - a}{\sigma} < x\right) = p(\xi < \sigma x + a) = F_\xi(\sigma x + a) = F_0\left(\frac{\sigma x + a - a}{\sigma}\right) = F_0(x), \text{ так как}$$

$$F_\eta(x) = F_0(x), \text{ то } \eta \in N(0, 1)$$

□

3)  $\square \xi \in N(a, \sigma^2)$ . Тогда  $p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = F_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

4) Вероятность попадания в симметричный интервал (вероятность отклонения случайной величины от матожидания)  $p(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$

$$p(|\xi - a| < t) = p(-t < \xi - a < t) = p(a - t < \xi < a + t) = \Phi\left(\frac{a + t - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - t - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{t}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

*Nota.* Если через  $F_0(x)$ , то  $p(|\xi - a| < t) = 2F_0\left(\frac{t}{\sigma}\right) - 1$

5) Правило 3 «сигм»:  $p(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973$  - попадание случайной величины нормального распределения в интервал  $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$  близко к 1

$$p(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0.49685 = 0.9973$$

6) Свойство линейности: если случайная величина  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ , то  $\eta = \gamma\xi + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$  (можем доказать при помощи свойств ранее, но мы докажем позже, используя другие методы)

7) Устойчивость относительно суммирования: если случайные величины  $\xi_1 \in N(a_1, \sigma_1^2)$ ,  $\xi_2 \in N(a_2, \sigma_2^2)$ , и они независимы, то  $\xi_1 + \xi_2 \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

### Коэффициенты асимметрии и эксцесса

**Def. 1.** Асимметрией распределения называется число  $A_s = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^3 = \frac{\mu^3}{\sigma^3}$

**Def. 2.** Эксцессом распределения называется число  $E_s = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3$

*Nota.* Если случайная величина  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ , то  $A_\xi = E_\xi = 0$ , таким образом, отличие этих характеристик от нуля характеризует степень отклонения распределения. Благодаря этим и другим параметрам, можно проверять на практике, является ли распределение нормальным

## Лекция 10

### Преобразование случайных величин

#### Стандартизация случайной величины

**Def.** Пусть имеется случайная величина  $\xi$ . Соответствующей ей стандартной величиной называется случайная величина  $\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sigma}$

**Свойства:**

$$E\eta = 0; D\eta = 1$$

$$E\eta = E \frac{\xi - E\xi}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}(E\xi - E\xi) = 0$$

$$D\eta = D \frac{\xi - E\xi}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2} D\xi = 1$$

Стандартизованная случайная величина не имеет единиц измерения, таким образом, ее свойства от них не зависят

Задача: пусть имеется функция  $g(x)$  и случайная величина  $\xi$ ,  $\eta = g(\xi)$ . Определить ее характеристики

*Nota.* Если  $\xi$  - дискретная случайная величина, то ее законы распределения находятся просто: значения  $x_i$  в верхней строке заменяем  $g(x_i)$ , вероятности остаются прежние. Поэтому будем рассматривать непрерывной случайной величины  $\xi$

*Nota.* Возможна ситуация, когда  $\xi$  - абсолютно непрерывная случайная величина,  $g(x)$  - непрерывна, но  $g(\xi)$  имеет дискретное распределение

#### Линейное преобразование

**Th.** Пусть  $\xi$  имеет плотность  $f_\xi(x)$ , тогда  $\eta = a\xi + b$ , где  $a \neq 0$ , имеет плотность  $f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

Пусть  $a > 0$ , тогда  $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(a\xi + b < x) = p(\xi < \frac{x-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t) dt =$

$$\left[ \begin{array}{l} t = \frac{y-b}{a} \quad dt = \frac{1}{a} dy \quad y = at + b \\ y(-\infty) = -\infty \quad y(\frac{x-b}{a}) = x \end{array} \right] = \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} f_\xi(\frac{y-b}{a}) dy \Rightarrow \eta = \frac{1}{|a|} f_\xi(\frac{x-b}{a})$$

Пусть  $a < 0$ , тогда  $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(a\xi + b < x) = p(\xi > \frac{x-b}{a}) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{\infty} f_\xi(t) dt =$

$$\left[ \begin{array}{l} t = \frac{y-b}{a} \quad dt = \frac{1}{a} dy \quad y = at + b \\ y(\infty) = -\infty \quad y(\frac{x-b}{a}) = x \end{array} \right] = - \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} f_\xi(\frac{y-b}{a}) dy \Rightarrow \eta = \frac{1}{|a|} f_\xi(\frac{x-b}{a})$$

Следствие

1) Если  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ , то  $\eta = \gamma\xi + b \in N(a\gamma + b; \gamma^2\sigma^2)$

Так как  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ , то  $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$

Тогда  $f_\eta(x) = \frac{1}{|\gamma|} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{x-b}{\gamma}-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|\gamma|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b-a\gamma)^2}{2\sigma^2\gamma^2}} \Rightarrow \eta \in N(b+a\gamma; \sigma^2\gamma^2)$

- 2) Если  $\eta \in N(0, 1)$  - стандартное нормальное распределение, то  $\xi = \sigma\eta + a \in N(a, \sigma^2)$
- 3) Если  $\eta \in U(0, 1)$  - стандартное равномерное распределение и  $a > 0$ , то  $\xi = a\eta + b \in U(b, a+b)$
- 4) Если  $\xi \in E_\alpha$ , то  $\alpha\xi \in E_1$

**Монотонное преобразование**

**Th.** Пусть  $f_\xi(x)$  - плотность случайной величины  $\xi$ ,  $g(x)$  - строго монотонная функция. Тогда случайная величина  $\eta = g(\xi)$  имеет плотность

$$f_\eta(x) = |h'(x)| f_\xi(h(x)), \quad \text{где } h(g(x)) = x$$

Если  $g(x)$  не является монотонной функцией, то поступаем следующим образом: разбиваем  $g(x)$  на интервалы монотонности, для каждого  $i$ -ого интервала находим  $h_i(x)$  и плотность случайной величины ищем по формуле Смирнова:  $f_\eta(x) = \sum_{i=0}^n |h'_i(x)| f_\xi(h_i(x))$

**Квантильное преобразование**

**Th. 1.** Пусть функция распределения случайной величины  $\xi$   $F_\xi(x)$  - непрерывная функция. Тогда  $\eta = F(\xi) \in U(0, 1)$  - стандартное равномерное распределение

Ясно, что  $0 \leq \eta \leq 1$

а)  $F(x)$  - строго возрастающая функция. Тогда  $\exists F^{-1}(x)$  - обратная,  $F_\eta(x) = p(\eta < x) =$

$$p(F(\xi) < x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ p(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x, & 0 \leq x \leq 1 - \text{функция распределения } U(0, 1) \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

б)  $F(x)$  - не является строго возрастающей функцией - то есть существуют участки постоянства, в этом случае определим  $F^{-1}$  как  $F^{-1}(x) = \min_t (t \mid F(t) = x)$  - то есть берем самую левую точку такого интервала

Тогда снова будет при  $0 \leq x \leq 1$   $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(F(\xi) < x) = F(F^{-1}(x)) = x$

Сформулируем обратную теорему: пусть  $F(x)$  - функция распределения (необязательно непрерывная) случайной величины  $\xi$ , обозначим  $F^{-1}(x) = \inf_t (t \mid F(t) \geq x)$ .

В случае непрерывной  $F(x)$  это определение совпадает с предыдущим

**Th. 2.** Пусть  $\eta \in U(0, 1)$  - стандартное равномерное распределение,  $F(x)$  - произвольная функция распределения. Тогда  $\xi = F^{-1}(\eta)$  имеет функцию распределения  $F(x)$

Данное преобразование  $\xi = F^{-1}(\eta)$  называют квантильным

Доказательство аналогично предыдущей теореме

Смысл: датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение, из теоремы следует, что при помощи датчика случайных чисел и квантильного преобразования мы сможем смоделировать любое нужное распределение

Ех. 1. Смоделируем показательное распределение  $E_\alpha$ :  $F_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$\eta = 1 - e^{-\alpha x}$ ,  $e^{-\alpha x} = 1 - \eta$ ,  $x = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta)$  - функция, обратная к  $F_\alpha(x)$

Если  $\eta \in U(0, 1)$ , то  $\xi = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta) \in E_\alpha$

Ех. 2.  $\xi \in N(0, 1)$ ,  $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

Пусть  $F_0^{-1}(x)$  - функция обратная к  $F_0(x)$

Если  $\eta \in U(0, 1)$ , то  $F_0^{-1}(\eta) \in N(0, 1)$

## Характеристики преобразованной случайной величины

**Th.** Если  $\xi$  - дискретная случайная величина, то  $Eg(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p(\xi = x_i)$

Для непрерывной случайной величины  $Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx$

### Свойства моментов

- 1) Если  $\xi \geq 0$ , то  $E\xi \geq 0$
- 2) Если  $\xi \leq \eta$ , то  $E\xi \leq E\eta$

$$\xi \leq \eta \implies \eta - \xi \geq 0 \implies E(\eta - \xi) \geq 0 \implies E\eta - E\xi \geq 0 \implies E\eta \geq E\xi$$

- 3) Если  $|\xi| \leq |\eta|$ , то  $E|\xi|^k \leq E|\eta|^k$
- 4) Если существует момент  $m_t$  случайной величины  $\xi$ , то существует  $m_s$  при  $s < t$  (при условии, что интеграл/сумма сходятся)

Пусть  $s < t$ . Тогда  $|x|^s \leq \min(1, |x|^t) \leq 1 + |x|^t$ , так как при  $|x| < 1$ ,  $|x|^s \leq 1$  и при  $|x| \geq 1$ ,  $|x|^s \leq |x|^t$   
 $E|\xi|^s \leq E|\xi|^t + 1$  и если  $E|\xi|^t$  существует (конечно), то  $\exists E|\xi|^s$

**Th. Неравенство Йенсена.** Пусть функция  $g(x)$  выпукла вниз, тогда для любой случайной величины  $\xi$

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

*Nota.* Если  $g(x)$  выпукла вверх, знак неравенства меняется

Если  $g(x)$  выпукла вниз, то в любой ее точке, можно провести прямую, лежащую не выше графика функции. То есть для любой  $x_0$  существует  $k(x_0)$  такой, что  $g(x) \geq g(x_0) + k(x_0)(x - x_0)$

Пусть  $x_0 = E\xi$ ,  $g(E\xi) \geq g(E\xi) + k(E\xi)(x - E\xi)$

$$Eg(\xi) \geq Eg(E\xi) + k(E\xi)(E\xi - E\xi)$$

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

Следствие:

$$Ee^\xi \geq e^{E\xi}, \quad E\xi^2 \geq (E\xi)^2, \quad E|\xi| \geq |E\xi|, \quad E \ln(\xi) \leq \ln(E\xi), \quad E\frac{1}{\xi} \geq \frac{1}{E\xi} \text{ при } \xi > 0$$

Ех. на формулу Смирнова: дана плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{4}{3x^2}, & 1 \leq x \leq 4, \\ 0 & x > 4 \end{cases}$$

Найти  $f_\eta$  для  $\eta = |\xi - 2|$

Решение

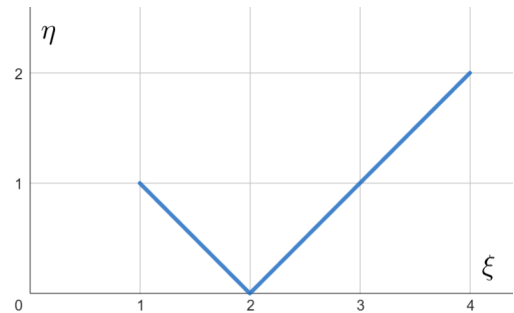
$$\xi \in [1, 4], \quad \eta \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1 \implies h_1(\eta) = \eta + 2 \text{ и } h_2(\eta) = 2 - \eta & - 2 \text{ ветви} \\ 1 < \eta \leq 2 \implies h_1(\eta) = \eta + 2 & - 1 \text{ ветвь} \end{cases}$$

$$h'_1(\eta) = 1, h'_2(\eta) = -1 \quad |h'_1(\eta)| = |h'_2(\eta)| = 1$$

$$f_\eta(x) = \sum_i |h'_i(x)| f_\xi(h_i(x))$$

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{4}{3} \left( \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} \right), & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4}{3} \frac{1}{(x+2)^2}, & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$



## Лекция 11

### Сходимость случайных величин

Рассмотрим 3 вида сходимости:

- Сходимость «почти наверное»

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет свойство Cond «почти наверное», если вероятность  $p(\xi \text{ имеет свойство Cond}) = 1$

*Nota.* То есть  $p(\xi \text{ не имеет свойство Cond}) = 0$

$p(\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \text{ не имеет св-во Cond})$

**Def.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  сходится «почти наверное» к случайной величине  $\xi$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi$ ), если  $p(\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(\omega)) = 1$

- Сходимость по вероятности

**Def.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  сходится по вероятности к случайной величине  $\xi$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ ), если  $\forall \varepsilon > 0 \quad p(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$



*Nota.* Не надо думать, что из сходимости по вероятности следует сходимость математического ожидания  $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \not\Rightarrow E\xi_n \rightarrow E\xi$

**Th.** Пусть  $|\xi_n| \leq C = \text{const} \quad \forall n$

Тогда  $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow E\xi_n \rightarrow E\xi$

- Слабая сходимость

**Def.** Последовательность случайных величин  $\xi_n$  слабо сходится к случайной величине  $\xi$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $\xi_n \Rightarrow \xi$ ), если  $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\xi(x) \forall x$ , где  $F_\xi(x)$  - непрерывна

### Связь между видами сходимости

**Th.**  $\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \xi_n \Rightarrow \xi$

**Th.** Если  $\xi_n \Rightarrow C = \text{const}$ , то  $\xi_n \xrightarrow{p} C$

Если  $\xi_n \Rightarrow C$ , то по определению  $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_C(x) = \begin{cases} 0, & x \leq C \\ 1, & x > C \end{cases} \quad \forall x \neq C$

$\forall \varepsilon > 0 \quad p(|\xi_n - C| < \varepsilon) = p(-\varepsilon < \xi_n - C < \varepsilon) = p(C - \varepsilon < \xi_n < C + \varepsilon) \geq p\left(C - \frac{\varepsilon}{2} < \xi_n < C + \varepsilon\right) = F_{\xi_n}(C + \varepsilon) - F_{\xi_n}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - 0 = 1$

Так как  $p(|\xi_n - C| < \varepsilon) \leq 1$ , то по теореме о 2 милиционерах  $p(|\xi_n - C| < \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  то есть по определению  $\xi_n \xrightarrow{p} C$

*Nota.* В общем случае не только из слабой сходимости не следует сходимость по вероятности, но и бессмысленно говорить об этом, так как слабая сходимость - это сходимость не случайных величин, а их распределений

*Ex.*  $\exists \xi_n \Rightarrow \xi \in N(0, 1)$ , тогда  $\eta = -\xi \in N(0, 1)$ , но ясно, что  $\xi_n \xrightarrow{p} \eta = -\xi$  - неверно

### Ключевые неравенства

В дальнейшем будем считать, что у случайных величин первый момент существует

## I. Неравенство Маркова

$$\text{Th. } p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A & - A \text{ нет} \\ 1, & \omega \in A & - A \text{ есть} \end{cases}$$

$$EI_A = p(A)$$

$$|\xi| \geq |\xi| \cdot I(|\xi| \geq \varepsilon) \geq \varepsilon I(|\xi| \geq \varepsilon)$$

$$E|\xi| \geq E(\varepsilon \cdot I(|\xi| \geq \varepsilon))$$

$$E|\xi| \geq \varepsilon \cdot E(I(|\xi| \geq \varepsilon)) = \varepsilon \cdot p(|\xi| \geq \varepsilon) \implies p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon}$$

## II. Неравенство Чебышева

$$\text{Th. } P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

$$p(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = p((\xi - E\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

## III. Правило «трех сигм»

$$\text{Th. } P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$$

$$\text{По неравенству Чебышева } P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{D\xi}{(3\sigma)^2} = \frac{D\xi}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$$

## Среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным вторым моментом

Обозначим  $a = E\xi_i, d = D\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}, \quad 1 \leq i \leq n$

$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  - их сумма

$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$  - среднее арифметическое

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E\xi_1 + \dots + E\xi_n) = \frac{1}{n}na = a = E\xi_1 - \text{математическое ожидание не меняется}$$

$$D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D\xi_1 + \dots + D\xi_n) = \frac{1}{n^2}nd = \frac{d}{n} = \frac{D\xi_1}{n} - \text{дисперсия уменьшилась в } n \text{ раз}$$

$$\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \text{СКО уменьшилось в } \sqrt{n} \text{ раз}$$

## Законы больших чисел

### I. Закон больших чисел Чебышева

**Th.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$  - последовательность независимых одинаково распределенных с конечным вторым моментом, тогда  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} E\xi_1$

Обозначим  $a = E\xi_i, d = D\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}, \quad 1 \leq i \leq n$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

Тогда по неравенству Чебышева  $p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) = p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{d}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$   
 $\Rightarrow p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ , то есть  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} a$

Среднее арифметическое большого числа независимых одинаковых случайных величин «стабилизируется» около математического ожидания, «при  $n \rightarrow \infty$  случайность переходит в закономерность»

Статистический смысл: при большом объеме  $n$  статистических данных среднее арифметическое данных дает достаточно точную оценку теоретического математического ожидания

*Nota.* При доказательстве получили полезную, хотя и грубую оценку:  $p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi_i}{n\varepsilon^2}$

### II. Закон больших чисел Бернулли

**Th.** Пусть  $v_n$  - число успехов из  $n$  независимых испытаний,  $p = P(A)$  - вероятность успеха при одном испытании. Тогда  $\frac{v_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} P(A)$

При этом  $P\left(\left|\frac{v_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

$v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , где  $\xi_i \in B_p$  - число успехов при  $i$ -ом испытании

$$E\xi_i = p; D\xi_i = pq$$

$$\frac{v_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1 = p$$

$$p\left(\left|\frac{v_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

### III. Закон больших чисел Хинчина

**Th.**  $v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом, тогда  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_i$

### IV. Усиленный закон больших чисел Колмогорова

В условиях теоремы Хинчина  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1$

### V. Закон больших чисел Маркова

**Th.** Пусть имеется последовательность случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$  с конечными вторыми моментами, таких что  $D(S_n) = o(n^2)$ . Тогда  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} E\left(\frac{S_n}{n}\right)$  или  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} \frac{1}{n}(E\xi_1 + \dots + E\xi_n)$

$$\text{По неравенству Чебышева } p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{o(n^2)}{n^2} \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \varepsilon\right) \rightarrow 1$$

## Центральная предельная теорема

**Th.** Центральная предельная теорема (ЦПТ Ляпунова,  $\approx 1901$  год)

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией ( $D\xi_1 < \infty$ ) и  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ . Тогда имеет место слабая сходимость:

$$\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \Rightarrow N(0, 1)$$

Теорема показывает, что стандартизованная сумма слабо сходится к стандартному нормальному распределению

*Nota.* Можно представить в ином виде:  $\exists a = E\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}$ , тогда  $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = a, \sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , а  $\frac{\frac{S_n}{n} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow N(0, 1)$

*Nota.* Другая, грубая, формулировка:  $\frac{S_n}{n} \Rightarrow N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

## Лекция 12

### Совместное распределение случайных величин

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  заданы на одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$

**Def.** Случайным вектором  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  называется упорядоченный набор случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве

Случайный вектор задает отображение  $(\xi_1, \dots, \xi_n)(\omega) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Поэтому случайный вектор еще называют многомерной случайной величиной, а соответствующее ей распределение многомерным распределением:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad P(B) = P(\omega \in \Omega \mid (\xi_1, \dots, \xi_n) \in B)$$

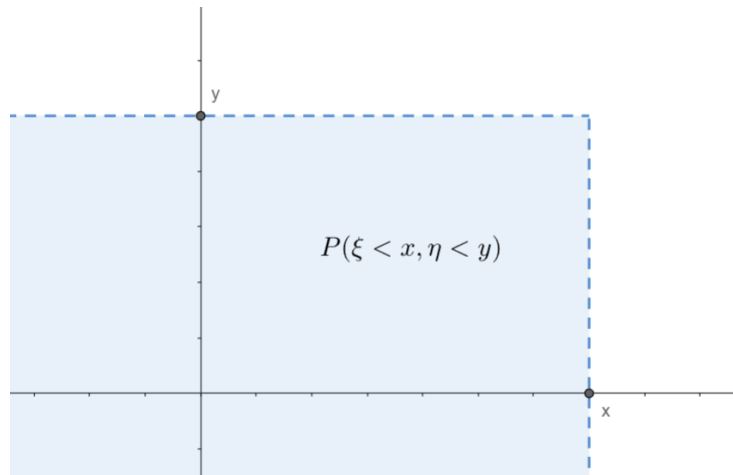
Таким образом, получили новое вероятностное пространство. В качестве элементарных исходов берем точки многомерного пространства, а  $\sigma$ -алгебра - многомерное Борелевская  $\sigma$ -алгебра  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P(B))$

### Функция распределения

**Def.** Функцией совместного распределения случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  называется функция  $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$

*Nota.* Распределение полностью задается функцией распределения

*Nota.* В дальнейшем, в основном, будем рассматривать системы из 2 случайных величин. Функция распределения в данном случае  $F_{\xi, \eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$  - вероятность попадания в эту область.



### Свойства функции распределения

1.  $0 \leq F_{\xi, \eta}(x, y) \leq 1$
2.  $F_{\xi, \eta}(x, y)$  - неубывающая по каждому аргументу
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\eta}(y)$ , и наоборот -  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x)$
4. Восстановление маргинального (частного) распределения:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\eta}(y)$ , и наоборот -  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x)$
5.  $F_{\xi, \eta}(x, y)$  - непрерывна слева по каждому аргументу
6.  $P(x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2) = F_{\xi, \eta}(x_2, y_2) - F_{\xi, \eta}(x_2, y_1) - F_{\xi, \eta}(x_1, y_2) + F_{\xi, \eta}(x_1, y_1)$

### Независимость случайных величин

**Def.** Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности, если для любого набора Борелевских множеств из  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_n$

$$p(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = p(\xi_1 \in B_1) \cdot p(\xi_2 \in B_2) \cdot \dots \cdot p(\xi_n \in B_n)$$

**Def.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  попарно независимы, если независимы любые две из них

*Nota.* Из независимости в совокупности следует попарная независимость:

$\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности, тогда покажем  $\forall i, j$   $\xi_i$  и  $\xi_j$  - независимы

Возьмем набор  $B_i, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , при  $k \neq i, j$   $B_k = \mathbb{R}$

$$P(\xi_k \in B_k) = 1$$

Тогда  $p(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_i \in B_i, \xi_j \in B_j) = P(\xi_i \in B_i) \cdot P(\xi_j \in B_j)$

*Nota.* Из попарной независимости не следует независимость в совокупности, как видно из примера Бернштейна

Под независимыми величинами будем понимать независимые в совокупности

## Дискретная система двух случайных величин

**Def.** Случайные величины  $\xi, \eta$  имеют совместное дискретное распределение, если случайный вектор  $(\xi, \eta)$  принимает не более, чем счетное число значений, то есть существует конечный или счетный набор пар чисел  $(x_i, y_i)$ , таких что  $P(\xi = x_i, \eta = y_i) > 0$ ,  $\sum_{i,j} P(\xi = x_i, \eta = y_i) = 1$

Таким образом двумерная дискретная случайная величина задается законом распределения - таблице вероятностей

| $\xi \backslash \eta$ | $y_1$    | $y_2$    | $\dots$  | $y_m$    |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$                 | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\dots$  | $p_{1m}$ |
| $x_2$                 | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\dots$  | $p_{2m}$ |
| $\vdots$              | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $x_n$                 | $p_{n1}$ | $p_{n2}$ | $\dots$  | $p_{nm}$ |

Условие нормировки:  $\sum_{i,j} p_{i,j} = 1$

Зная общий закон распределения, можно восстановить частное (маргинальное) распределение по формулам:

$$p_i = \sum_{j=1}^m p_{i,j} \quad q_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j}$$

**Def.** Дискретные случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимы, если для любых  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $p(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n) = p(\xi_1 = x_1) \cdot p(\xi_2 = x_2) \cdot \dots \cdot p(\xi_n = x_n)$

При  $n = 2$ :  $p_{i,j} = p_i \cdot q_j \quad \forall i, j$

*Ex.*

| $\xi \backslash \eta$ | -1  | 0   | 1   | $p_i$        |
|-----------------------|-----|-----|-----|--------------|
| -1                    | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.4          |
| 2                     | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.6          |
| $q_j$                 | 0.3 | 0.5 | 0.2 | $\Sigma = 1$ |

Найти маргинальное распределение и проверить независимость случайных величин

| $\xi$  | -1  | 2   |     |  |
|--------|-----|-----|-----|--|
| $p_i$  | 0.4 | 0.6 |     |  |
| $\eta$ | -1  | 0   | 1   |  |
| $q_j$  | 0.3 | 0.5 | 0.2 |  |

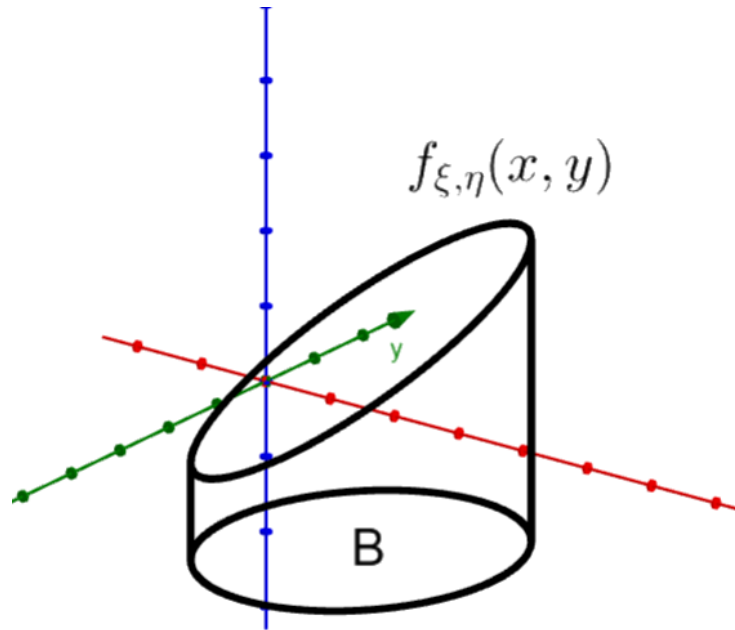
$$p_{11} = 0.1 \neq 0.12 = p_1 \cdot q_1 \quad \implies \xi, \eta - \text{зависимы}$$

## Абсолютно непрерывная система двух случайных величин

**Def.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют абсолютно непрерывное совместное распределение, если  $\exists f_{\xi,\eta}(x, y)$ , такая что  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) P((\xi, \eta) \in B) = \iint_B f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy$

Функцию  $f_{\xi,\eta}(x, y)$  будем называть функцией плотности совместного распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$

Геометрический смысл плотности:



Свойства плотности:

1.  $f_{\xi,\eta}(x, y) \geq 0$
2. Условие нормировки:  $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy = 1$
3.  $F_{\xi,\eta} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi,\eta}(x, y) dy dx$
4.  $f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x, y)}{\partial x \partial y}$
5. Если случайные величины  $\xi, \eta$  имеют абсолютно непрерывное совместное распределение с плотностью  $f(x, y)$ , то маргинальное распределение величин  $\xi, \eta$  также имеют абсолютно непрерывное распределение с плотностями  $f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dy, f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dx$

$$F_{\xi}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx$$



$$\text{Из этого } \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) = f_{\xi}(x)$$

6. Так как вероятность попадания в Борелевские множества полностью задается функцией распределения, то условие независимости случайных величин эквивалентно следующему:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимы, если функция общего распределения распадается в произведение отдельных функций распределения

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

7. *Равносильное определение*: абсолютно непрерывные случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности тогда и только тогда, когда плотность совместного распределения
- $$f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot f_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(x_n)$$

$$\text{При } n = 2 \text{ случайные величины } \xi \text{ и } \eta \text{ независимы} \iff F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) dx \cdot \int_{-\infty}^y f_{\eta}(y) dy = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y) dx dy \implies f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y)$$

Аналогично для высших размерностей

*Nota.* Совместное распределение абсолютно непрерывных случайных величин не обязано быть абсолютно непрерывным, оно может быть сингулярным

*Ex.* Бросаем точку на отрезок прямой  $y = x$  ( $0 \leq x, y \leq 1$ ),  $\xi$  - абсцисса точки,  $\eta$  - ордината точки

Случайный вектор  $(\xi, \eta)$  имеют сингулярное распределение (непрерывное с нулевой областью) - так как число элементарных исходов несчетно, но мера Лебега в  $\mathbb{R}^2$  отрезка равна 0

*Nota.* Совместное распределение  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  будет сингулярным, если одна из координат является функцией других (наблюдается функциональная зависимость)

## Многомерное равномерное распределение

**Def.**  $\exists D \subset \mathbb{R}^n$  - Борелевское множество в  $\mathbb{R}^n$  с конечной мерой Лебега ( $0 < \lambda(D) < \infty$ ), случайный вектор  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  имеет равномерное распределение, если плотность совместного распределения постоянна в данной области и равна нулю вне данной области

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(D)}, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in D \\ 0, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \notin D \end{cases}$$

## Лекция 13

### Математическое ожидание и дисперсия случайного вектора

$\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  - случайный вектор,  $\forall 1 \leq i \leq n$   $\xi_i$  - случайная величина

**Def.** Математическим ожиданием случайного вектора называется вектор с координатами из математических ожиданий его компонент:  $E\vec{\xi} = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$

**Def.** Дисперсией (или матрицей ковариаций) случайного вектора называется матрица  $D\vec{\xi} = E(\vec{\xi} - E\vec{\xi})^T \cdot (\vec{\xi} - E\vec{\xi})$ , состоящая из элементов  $d_{i,j} = (\xi_i, \xi_j)$ . В частности  $d_{i,i} = (\xi_i, \xi_i) = D\xi_i$

### Функции от двух случайных величин

**Th.** Пусть  $\xi_1, \xi_2$  - случайные величины с общим плотностью  $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y)$ , и есть функция  $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда случайная величина  $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$  имеет функцию распределения  $F_\eta(z) = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy$ , где  $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) < z\}$

$$F_\eta = p(\eta < z) = p(g(\xi_1, \xi_2) < z) = p((\xi_1, \xi_2) \in D_z) = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy$$

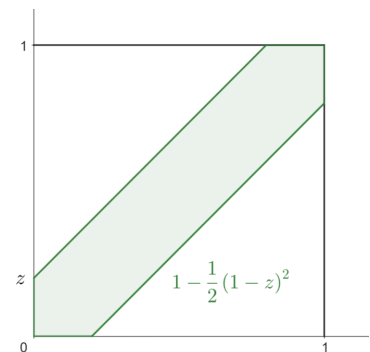
*Ex. Задача о встрече.* двое договорились встретится между 12:00 и 13:00. Случайная величина  $\eta$  - время ожидания. Найти функцию распределения

$\xi_1$  - время прихода первого,  $\xi_2$  - второго;  $\xi_1, \xi_2 \in U(0, 1)$ , они независимы,  $\forall x, y \in [0, 1]$   $f_{\xi_1}(x) = 1, f_{\xi_2}(y) = 1$

Поэтому  $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y) = 1, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$

$$\eta = |\xi_1 - \xi_2| \implies D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < z\}$$

$$F_\eta = \iint_{D_z} f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) dx dy = \iint_{D_z} dx dy = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} (1 - z)^2 = 2z - z^2, z \in [0, 1]$$



**Th.**  $\xi_1, \xi_2$  - независимые абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями  $f_{\xi_1}(x)$  и  $f_{\xi_2}(y)$

Тогда плотность суммы  $\xi_1 + \xi_2$  равна  $f_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x) dx}_{\text{т. н. свертка}}$

Так как случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы, то  $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y)$

И согласно предыдущей теореме

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \iint_{D_z} f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) dx dy = \iint_{D_z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dx dy,$$

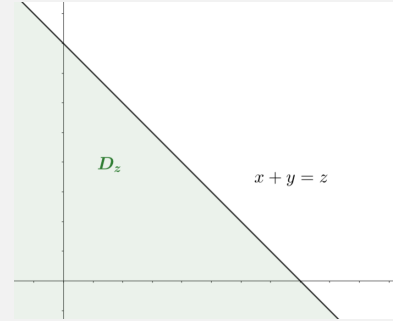
где  $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < z\}$

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dy =$$

$$\left[ \begin{array}{l} y = t - x; \quad dy = dt; \quad t = y + x \\ t(-\infty) = -\infty; \quad t(z - x) = z \end{array} \right] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) dx \int_{-\infty}^z f_{\xi_2}(t - x) dt =$$

$$\int_{-\infty}^z \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x) dx \right) dt \Rightarrow f_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x) dx$$



Следствие: сумма двух независимых абсолютно непрерывных случайных величин также имеет абсолютно непрерывное распределение

*Nota.* Условие независимости существенно, контр-пример:  $\xi_1; \xi_2 = -\xi_1$ , тогда  $\xi_1 + \xi_2 \equiv 0$

## Сумма стандартных распределений. Устойчивость относительно суммирования

**Def.** Если сумма двух независимых случайных величин одного типа распределения также будет этого же типа, то говорят, что распределение устойчиво относительно суммирования

*Ex. 1.*  $\xi \in B_{n,p}; \eta \in B_{m,p}$ . Тогда ясно, что  $\xi + \eta \in B_{n+m,p}$  (по определению биномиального распределения  $B_{n,p}$  - число успехов из  $n$  испытаний, где  $p$  - вероятность успеха)

*Ex. 2.*  $\xi \in \Pi_\lambda, \eta \in \Pi_\mu$ , они независимы. Тогда  $\xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}$

$$\begin{aligned} \xi + \eta = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \exists k \geq 0. \text{ Тогда } p(\xi + \eta = k) &= \sum_{i=0}^k P(\xi = i, \eta = k - i) = \sum_{i=0}^k P(\xi = i) P(\eta = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} = e^{-\lambda-\mu} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{i!(k-i)!} = e^{-\lambda-\mu} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i \mu^{k-i} k!}{i!(k-i)!} \\ &= e^{-\lambda-\mu} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \lambda^i \mu^{k-i} C_k^i = e^{-\lambda-\mu} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} \Rightarrow \xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

*Ex. 3.*  $\xi, \eta \in N(0, 1)$  и независимы. Тогда  $\xi + \eta \in N(0, 2)$

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; f_{\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{По формуле свертки } f_{\xi+\eta}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - tx + \frac{t^2}{2})} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - tx + \frac{t^2}{4})} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x - \frac{t}{2})^2} d(x - \frac{t}{2}) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2(\sqrt{2})^2}} \Rightarrow \\ &\xi + \eta \in N(0, 2) \end{aligned}$$

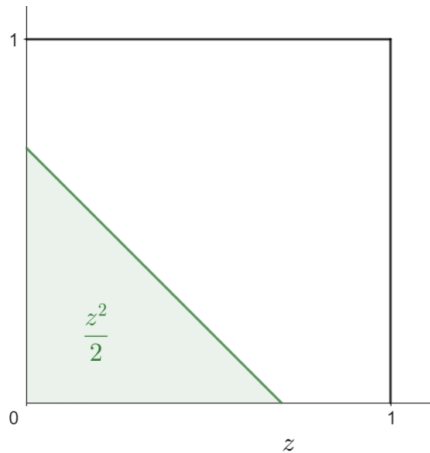
Ex. 4. В общности для независимых  $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2), \eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$   $\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Ex. 5. Равномерное распределение неустойчиво относительно суммирования, контрпример:

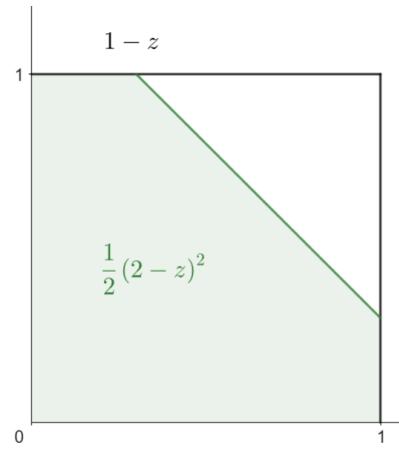
$\xi, \eta \in U(0, 1)$  - независимы

$\forall x, y \in [0, 1]$   $f_{\xi}(x) = 1, f_{\eta}(y) = 1$  и  $f_{\xi, \eta}(x, y) = 1$

По первой теореме  $F_{\xi, \eta}(x, y) = \iint_{D_z} f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy = \iint_{D_z} dx dy = S_{D_z}$ , где  $D_z = \{(x, y) \mid x + y < z\}$



а)  $0 < z \leq 1$



б)  $1 < z \leq 2$

$$S_{D_z} = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{z^2}{2}, & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(2-z)^2 & 1 \leq z \leq 2 \\ 0, & z > 2 \end{cases}$$

$$f_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z, & 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z, & 1 \leq z \leq 2 \\ 0, & z > 2 \end{cases} \neq C \Rightarrow \xi + \eta \text{ не имеют равномерное распределение}$$

Nota. FUN FACT: сумма нескольких величин с равномерным распределением приближается к

нормальному распределению

## Условное распределение

**Def.** Условным распределением случайной величины из системы случайных величин  $(\xi, \eta)$  называется ее распределение, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение. Обозначается  $\xi|\eta = y$

**Def. A.:** Условным математическим ожиданием (обозначается  $E(\xi|\eta = y)$ ) называется математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  при соответствующем условном распределении

### I. Условное распределение в дискретной системе двух случайных величин

Пусть  $(\xi, \eta)$  задана законом распределения:

| $\xi \backslash \eta$ | $y_1$    | $y_2$    | $\dots$  | $y_m$    |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$                 | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\dots$  | $p_{1m}$ |
| $x_2$                 | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\dots$  | $p_{2m}$ |
| $\vdots$              | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $x_n$                 | $p_{n1}$ | $p_{n2}$ | $\dots$  | $p_{nm}$ |

Формула условной вероятности:  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Вероятности условных распределений считаем по формулам:

$$\xi|\eta = y_j: p_i = p(\xi = x_i | \eta = y_j) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j} = \frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}$$

$$\eta|\xi = x_i: q_j = p(\eta = y_j | \xi = x_i) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\xi = x_i)} = \frac{q_{ij}}{p_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j p_{ij}}$$

То есть вероятность в соответствующем столбце/строке делим на суммарную вероятность по строке или столбцу, в зависимости от того, какое условие мы рассматриваем

### II. Условное распределение в непрерывной системе двух случайных величин

Пусть  $(\xi, \eta)$  задана плотностью  $f_{\xi, \eta}(x, y)$  совместного распределения, тогда плотность условного распределения  $\xi|\eta = y$ :

$$f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{\xi, \eta}(x, y) dx} = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$$

**Def.** Функция  $f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$  называется условной плотностью

**Def.** Условное математическое ожидание вычисляется по формуле  $E(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx$

Аналогично  $E(\eta|\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy$

*Nota.* При фиксированном значении  $x$   $f(y|x)$  зависит только от  $y$ , а  $E(\eta|\xi = x) \in \mathbb{R}$ . Если рассматривать  $x$  как переменную, то условное математическое ожидание  $E(\eta|\xi = x)$  является функцией от  $x$  и называется функцией регрессии  $\eta$  на  $\xi$ . График такой функции называют линией регрессии

*Nota.* Так как значение  $x$  - значение случайной величины  $\xi$ , то условное матожидание  $E(\eta|\xi = x)$  можно рассматривать как случайную величину

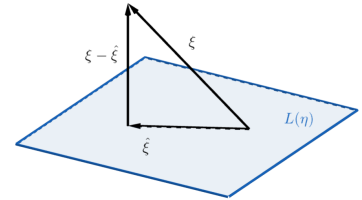
## Лекция 14

### Пространство случайных величин

*Nota.* Если две случайных величин  $\xi \stackrel{\text{п.н.}}{=} \eta$ , то считаем, что  $\xi = \eta$

Пусть имеется вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Введем пространство  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{\xi \mid D\xi < \infty\}$  - множество случайных величин на данном пространстве с конечной дисперсией. Ясно, что  $L_2$  - линейное пространство. Введем на нем скалярное произведение



**Def.** Скалярным произведением случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  из  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называется число  $(\xi, \eta) = E(\xi\eta)$

*Nota.* Если  $(\xi, \eta)$  - дискретная система случайных величин  $(p(\xi = x_i, \eta = y_i) = p_{ij})$ , то  $E(\xi\eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$

Если же  $(\xi, \eta)$  - непрерывная система с плотностью  $f_{\xi,\eta}(x, y)$ , то  $E(\xi\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy$

**Свойства:**

1.  $(\xi, \eta) = (\eta, \xi)$
2.  $(C\xi, \eta) = C(\xi, \eta)$
3.  $(\xi_1 + \xi_2, \eta) = (\xi_1, \eta) + (\xi_2, \eta)$
4.  $(\xi, \xi) \geq 0$
5.  $(\xi, \xi) = 0 \implies \xi = 0$  п.н.

То есть это действительно скалярное произведение

**Def.** Норма вектора равна числу  $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}$

**Def.** Метрикой (расстоянием) между случайными величинами называют число  $d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$

**Th.** Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют конечный второй момент, тогда  $|E(\xi, \eta)| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$  (или  $|( \xi, \eta )| \leq \| \xi \| \cdot \| \eta \|$ )

Причем  $|E(\xi, \eta)| = \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2} \iff \eta = C\xi$ , где  $C = \text{const}$

$$P_2(x) = E(x\xi - \eta)^2 = x^2 E\xi^2 - 2xE(\xi\eta) + E\eta^2 \geq 0 \implies D = 4(E(\xi\eta))^2 - 4E\xi^2 - E\eta^2 \leq 0 \implies |E(\xi\eta)| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

$$|E(\xi, \eta)| = \sqrt{E\xi^2 - E\eta^2} \implies D = 0 \implies \exists \text{ какая-либо точка касания } C, \text{ из этого } E(C\xi - \eta)^2 = 0 \implies C\xi - \eta = 0 \iff \eta = C\xi \text{ п.н.}$$

## Условное математическое ожидание

В  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  возьмем линейное подпространство  $L(\eta) = \{g(\eta) \mid Dg(\eta) < \infty\}$

**Def. В.** Условным математическим ожиданием (УМО, обозначается  $E(\xi|\eta) = \hat{\xi}$ ) случайной величины  $\xi$  относительно случайной величины  $\eta$  называется ортогональная проекция случайной величины  $\xi$  на  $L(\eta)$

**Свойства:**

1. Тождество ортопроекции:  $\exists \hat{\xi} \in L(\eta)$ , тогда  $\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \iff E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta)) \forall g(\eta) \in L(\eta)$

$$\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \iff (\xi - \hat{\xi}) \perp L(\eta) \iff (\xi - \hat{\xi}, g(\eta)) = 0 \forall g(\eta) \in L(\eta) \iff E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta))$$

2. Формула полного математического ожидания

$$E\xi = E(E(\xi|\eta)) \text{ или } E\xi = E\hat{\xi}$$

*Nota.* При распределении Бернулли получаем обычную формулу полной вероятности

$$\text{Верно из тождества ортопроекции при } g(\eta) = 1$$

3. Линейность:  $E(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 \mid \eta) = C_1E(\xi_1|\eta) + C_2E(\xi_2|\eta)$
4. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $E(\xi|\eta) = E\xi$

$$\xi, \eta \text{ независимы} \implies \xi \text{ и } g(\eta) \text{ независимы} \\ \text{Из этого } E(\xi \cdot g(\eta)) = E\xi \cdot E(g(\eta)) = E(E\xi \cdot g(\eta)) \implies E\xi = \hat{\xi}$$

5. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $(\xi - E\xi) \perp g(\eta) \forall g(\eta) \in L(\eta)$ , в частности  $(\xi - E\xi) \perp \eta$

Докажем, что **Def. A.** согласуется с **Def. B.**

По **Def. A.**  $E(\xi|\eta) = h(\eta)$ , где  $h(y) = E(\xi|\eta = y)$

Рассмотрим случай абсолютно непрерывной системы  $(\xi, \eta)$  с плотностью  $f_{\xi, \eta}(x, y)$ . Тогда

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx, \text{ где } f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$$

Следует доказать, что функция  $h(y)$  удовлетворяет тождеству ортопроекции  $E(\xi g(\eta)) = E(h(\eta)g(\eta)) \quad \forall g(\eta) \in L(\eta)$

$$E(\xi \cdot g(\eta)) = \iint_{\mathbb{R}^2} x g(y) f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy$$

$$E(h(\eta)g(\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)g(y)f_{\eta}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)} dx \right) g(y)f_{\eta}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} x g(y) f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy = E(\xi g(\eta))$$

## Числовые характеристики. Зависимости случайных величин

*Мет.* Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ , то  $E(\xi\eta) = E\xi E\eta \implies E(\xi\eta) - E\xi E\eta = 0$

Поэтому в качестве индикатора наличия связи берем величину  $E(\xi\eta) - E\xi E\eta = \text{cov}(\xi, \eta)$

**Def.** Ковариацией  $(\xi, \eta)$  называется величина  $\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$

**Свойства:**

$$1. \text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)) = E(\xi\eta - \eta E\xi - \xi E\eta + E\xi E\eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$$

$$2. \text{cov}(\xi, \xi) = D\xi$$

$$\text{cov}(\xi, \xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$3. \text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$$

$$4. \text{cov}(C_1\xi_1 + C_2\xi_2, \eta) = C_1\text{cov}(\xi_1, \eta) + C_2\text{cov}(\xi_2, \eta)$$

$$5. D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

$$6. D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i, j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

$$7. (a) \text{ Если } \xi \text{ и } \eta - \text{независимы, то } \text{cov}(\xi, \eta) = 0$$

$$(b) \text{ Если } \text{cov}(\xi, \eta) \neq 0, \text{ то } \xi \text{ и } \eta - \text{зависимы}$$

$$(c) \text{ Если } \text{cov}(\xi, \eta) = 0, \text{ то неясно}$$

$$8. \text{ Если } \text{cov}(\xi, \eta) > 0, \text{ то зависимость прямая, если } \text{cov}(\xi, \eta) < 0, \text{ то обратная}$$



*Nota.* Ковариация зависит от единиц измерения случайных величин, поэтому по ее величине нельзя судить о силе зависимости

## Коэффициент линейной корреляции

**Def.** Коэффициентом корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  с конечными вторыми моментами, называется величина  $r_{\xi,\eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{E(\xi\eta) - E\xi E\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$

Можно записать в другой форме:  $r_{\xi,\eta} = \frac{E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))}{\sqrt{E(\xi - E\xi)^2} \sqrt{E(\eta - E\eta)^2}} = \frac{(\xi - E\xi, \eta - E\eta)}{\|\xi - E\xi\| \|\eta - E\eta\|} = \cos(\xi - E\xi, \eta - E\eta)$   
 - косинус угла между величинами (грубая интерпретация)

### Свойства:

1.  $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$
2. (а) Если  $\xi$  и  $\eta$  - независимы, то  $r_{\xi,\eta} = 0$   
 (б) Если  $r_{\xi,\eta} \neq 0$ , то  $\xi$  и  $\eta$  - зависимы  
 (с) Если  $r_{\xi,\eta} = 0$ , то неясно
3.  $|r_{\xi,\eta}| \leq 1$

По неравенству Коши-Буняковского-Шварца  $|E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))| \leq \sqrt{E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2}$

4.  $|r_{\xi,\eta}| = 1 \iff \eta = a\xi + b$  п.н.

По неравенству Коши-Буняковского-Шварца  $|r_{\xi,\eta}| = 1 \iff |E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))| = \sqrt{E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2} \implies \eta - E\eta = C(\xi - E\xi) \implies \eta = C\xi + (E\eta - CE\xi)$  п.н.

5. (а) Если  $r_{\xi,\eta} = 1$ , то  $\eta = a\xi + b$  и  $a > 0$  (прямая линейная зависимость)  
 (б) Если  $r_{\xi,\eta} = -1$ , то  $\eta = a\xi + b$  и  $a < 0$  (обратная линейная зависимость)

Так как  $|r_{\xi,\eta}| = 1$ , то по свойству 4)  $\eta = a\xi + b$  и  $r_{\xi,\eta} = \frac{E(\xi\eta) - E\xi E\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{E(\xi(a\xi + b)) - E\xi E(a\xi + b)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D(a\xi + b)}} = \frac{aE\xi^2 + bE\xi - a(E\xi)^2 - bE\xi}{\sqrt{D\xi} \sqrt{a^2 D\xi}} = \frac{a(E\xi^2 - (E\xi)^2)}{|a| D\xi} = \frac{a}{|a|} = \text{sign } a$

**Def.** Если  $r_{\xi,\eta} \neq 0$ , то говорят, что случайные величины коррелированы друг с другом. Если  $r_{\xi,\eta} > 0$ , то имеет прямая корреляция, если  $r_{\xi,\eta} < 0$  - обратная

*Nota.* Корреляция не транзитивна:  $r_{\xi_1, \xi_2} > 0 \wedge r_{\xi_2, \xi_3} > 0 \not\Rightarrow r_{\xi_1, \xi_3} > 0$

## Лекция 15

### Характеристические функции

*Mem.*  $i$  - комплексная единица

*Mem.*  $e^{it} = \cos t + i \sin t$

Пусть  $\xi + i\eta$  - комплексная случайная величина, где  $\xi$  - вещественная часть, а  $\eta$  - мнимая часть

**Def.**  $E(\xi + i\eta) = E\xi + iE\eta$

**Def.** Характеристической функцией случайной величины  $\xi$  называется функция

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, t \in \mathbb{R}$$

Свойства:

1. Любая случайная величина  $\xi$  имеет характеристическую функцию, причем  $|\varphi_\xi(t)| \leq 1$

Характеристическая функция существует по теореме об абсолютной сходимости интеграла от произведения ограниченной и нормированной функций

Докажем неравенство:

$$|\varphi_\xi(t)|^2 = |Ee^{it\xi}|^2 = |E \cos t\xi + iE \sin t\xi|^2 = (E \cos \xi t)^2 + (E \sin \xi t)^2 \leq$$

[по неравенству Йенсена]  $\leq E \cos^2 \xi t + E \sin^2 \xi t = E(\cos^2 \xi t + \sin^2 \xi t) = E1 = 1$

2. Пусть  $\varphi_\xi(t)$  - характеристическая функция случайной величины  $\xi$ . Тогда характеристическая функция случайной величины  $a + b\xi$  равна  $\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita}\varphi_\xi(bt)$

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = Ee^{it(a+b\xi)} = E(e^{ita} \cdot e^{itb\xi}) = e^{ita} Ee^{itb\xi} = e^{ita} \varphi_\xi(bt)$$

3. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций

Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  - независимы. Тогда

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = E(e^{it\xi} \cdot e^{it\eta}) = [\text{так как они независимы}] = Ee^{it\xi} \cdot Ee^{it\eta} = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

Аналогично для большего числа величин

4. Пусть  $E\xi^k < \infty$ . Тогда

$$\varphi_{\xi}(t) = 1 + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + o(|t|^k)$$

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{it\xi} = E\left(1 + it\xi + \frac{(it\xi)^2}{2!} + \dots + \frac{(it\xi)^k}{k!} + o(|t|^k)\right) = 1 + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + o(|t|^k)$$

5. Пусть  $E\xi^k < \infty$ . Тогда  $\varphi_{\xi}^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$

$$E\xi^k < \infty \implies \text{существует } k \text{ членов разложения в ряд Маклорена: } \frac{\varphi_{\xi}^{(k)}(0)}{k!}t^k = \frac{i^k E\xi^k}{k!}t^k;$$

$$\frac{\varphi_{\xi}^{(k)}(0)}{k!}t^k = i^k E\xi^k$$

6. Существует взаимно-однозначное соответствие между распределениями и характеристическими функциями. Зная характеристическую функцию можно восстановить распределение.

Ех. Если распределение абсолютно непрерывное, то его можно восстановить по преобразованию Фурье

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_{\xi}(t) dt$$

7. Теорема о непрерывном соответствии

**Th.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  слабо сходится к  $\xi$  тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций сходится поточечно к  $\varphi_{\xi}(t)$

$$\{\xi_n\} \Rightarrow \xi \iff \varphi_{\xi_n}(t) \longrightarrow \varphi_{\xi}(t) \forall t \in \mathbb{R}$$

## Характеристические функции стандартных распределений

- Распределение Бернулли

|       |       |     |
|-------|-------|-----|
| $\xi$ | 0     | 1   |
| $p$   | $1-p$ | $p$ |

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{i\xi t} = e^{i \cdot 0 \cdot t} p(\xi = 0) + e^{i \cdot 1 \cdot t} p(\xi = 1) = 1 - p + pe^{it}$$

- Биномиальное распределение

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Если  $t \in B_{n,p}$ , то  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n$ , где  $\xi_i \in B_p$  - независимы

$$\varphi_{\xi}(t) = (\varphi_{\xi_n}(t))^n = (1 - p + pe^{it})^n$$

- Распределение Пуассона

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Следствие: распределение Пуассона устойчиво относительно суммирования

$\zeta \in \Pi_{\lambda}, \eta \in \Pi_{\mu}$ , они независимы. Тогда  $\xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}$

По третьему свойству  $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}$  - характеристическая функция распределения Пуассона  $\Pi_{\lambda+\mu}$

- Стандартное нормальное распределение

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(t) &= Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2itx)} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2itx-t^2)} e^{-\frac{t^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} d(x-it) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

- Нормальное распределение

$$\xi \in N(a, \sigma^2)$$

Если  $\eta \in N(0, 1)$ , то  $\xi = a + \sigma\eta \in N(a, \sigma^2)$

По второму свойству  $\varphi_{\xi}(t) = e^{ita} \varphi_{\eta}(\sigma t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Следствие: нормальное распределение устойчиво относительно суммирования

Если  $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2), \eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$  и они независимы, то  $\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \varphi_{\eta}(t) = e^{ita_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{ita_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{it(a_1+a_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}}$  - характеристическая функция  $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

## Доказательства теорем через свойства характеристических функций

Докажем некоторые теоремы с помощью характеристических функций

### Закон больших чисел Хинчина

Для доказательства закона больших чисел Хинчина докажем такую лемму:

$$\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$$

$$\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)} = e^{n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{x + no\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$$

**Th.** Закон больших чисел Хинчина

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным матожиданием. Тогда  $\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1$

Обозначим  $a = E\xi_1$

Ранее было доказано, что сходимость по вероятности к константе эквивалентно к слабой сходимости. Поэтому достаточно доказать, что  $\frac{S_n}{n} \Rightarrow a$

По теореме о непрерывном соответствии остается доказать, что  $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \longrightarrow \varphi_a(t) = e^{ita}$

По четвертому свойству  $\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + itE\xi_1 + o(|t|) = 1 + ita + o(|t|)$

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = [\text{по второму свойству}] = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\left|\frac{t}{n}\right|\right)\right)^n \xrightarrow[\text{по лемме}]{} e^{ita} = \varphi_a(t)$$

## Центральная предельная теорема

**Th.** Центральная предельная теорема Ляпунова, 1901 г.

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом ( $D\xi_1 < \infty$ )

Обозначим  $a = E\xi_1$ ,  $\sigma^2 = D\xi_1$ . Тогда

$$\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1)$$

Пусть  $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma}$  - стандартизованная случайная величина

$$E\eta_i = 0, D\eta_i = 1$$

$$\text{Обозначим } Z_n = \eta_1 + \dots + \eta_n = \frac{(\xi_1 + \dots + \xi_n) - na}{\sigma} = \frac{S_n - na}{\sigma}$$

Надо доказать, что если  $\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1)$

$$\text{По четвертому свойству } \varphi_{\eta_1}(t) = 1 + itE\eta_1 - \frac{t^2}{2}E\eta_1^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{n}}} = \varphi_{Z_n} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \left( \varphi_{\eta_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = \left( 1 - \frac{\left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} + o \left( \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right)^n = \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + o \left( \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}} -$$

характеристическая функция  $N(0, 1)$

### Предельная теорема Муавра-Лапласа

**Th.** Пусть  $v_n(A)$  - число появления события  $A$  при  $n$  независимых испытаний,  $p$  - вероятность успеха при одном испытании,  $q = 1 - p$ . Тогда  $\frac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow N(0, 1)$

$v_n(A) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = S_n$ , где  $\xi_i \in B_p$  и независимы,  $E\xi_1 = p, D\xi_1 = pq$

По ЦПТ  $\frac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} = \frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \Rightarrow N(0, 1)$

Следствие. Интегральная формула Лапласа:

$$p(k_1 \leq v_n \leq k_2) = p \left( \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{v_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right). \text{ Обозначим } \eta = \frac{v_n - np}{\sqrt{npq}}$$

$$p \left( \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{v_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) = F_\eta \left( \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - F_\eta \left( \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_0 \left( \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - F_0 \left( \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \right), \text{ где}$$

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

*Nota.* Аналогичным образом ЦПТ применяется для приближенного вычисления вероятностей, связанных с суммами большого числа независимых одинаковых случайных величин, заменяя стандартизованную сумму на стандартное нормальное распределение. Возникает вопрос: какова погрешность данного вычисления?

**Th.** Неравенство Берри-Эссеена

В условиях ЦПТ для  $\xi_1$  с конечным третьим моментом можно оценить так:

$$\left| p \left( \frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < x \right) - F_0(x) \right| \leq C \frac{E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sqrt{n}(D\xi_1)^{3/2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

*Nota.* На практике берут  $C = 0.4$ , точная оценка сверху  $C < 0.77$

## Лекция 16

### Условная дисперсия

**Def.** Условной дисперсией случайной величины  $\xi$  относительно случайной величины  $\eta$  называется случайная величина  $D(\xi|\eta) = E((\xi - E(\xi|\eta))^2|\eta)$

*Nota.* То есть дисперсия соответствующего условного распределения

#### Свойства

1.  $D(\xi|\eta) = E(\xi^2|\eta) - E^2(\xi|\eta)$
2. Закон полной дисперсии

$$\text{Th. } D\xi = E(D(\xi|\eta)) + D(E(\xi|\eta))$$

Из первого свойства  $E(\xi^2|\eta) = D(\xi|\eta) + E^2(\xi|\eta)$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E(E\xi^2|\eta) - E^2(E(\xi|\eta)) = E(D(\xi|\eta) + E^2(\xi|\eta)) - E^2(E(\xi|\eta)) = E(D(\xi|\eta)) + E(E^2(\xi|\eta)) - E^2(E(\xi|\eta)) = E(D(\xi|\eta)) + D(E(\xi|\eta))$$

#### Следствие и смысл:

- Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы (некоррелированы), то  $D(E(\xi|\eta)) = D(E\xi) = 0$  и  $D\xi = E(D(\xi|\eta))$
- Если имеется функциональная зависимость (то есть  $\xi = g(\eta)$ ), то  $D(E(\xi|\eta)) = D(E(g(\eta)|\eta)) = D(g(\eta)) = D\xi$
- Таким образом по величине  $R^2 = \frac{D(E(\xi|\eta))}{D\xi}$  ( $0 \leq R^2 \leq 1$ ) можно судить о силе корреляционной зависимости. Такая величина называется корреляционным отношением

### Энтропия

Пусть  $\xi$  - результат эксперимента с исходами  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , вероятности которых  $p_1, p_2, \dots, p_N$

**Def.** Энтропией эксперимента называется величина  $H(\xi) = - \sum_{i=1}^N p_i \cdot \log_2 p_i$

#### Свойства энтропии:

1. Очевидно, что  $H(\xi) \geq 0$ , так как  $p \geq 0$ , а  $\log_2 p_i \leq 0$
2.  $H(\xi) = 0 \iff \exists i$ , такой что  $p_i = 1, p_j = 0 \forall j \neq i$  - то есть эксперимент заканчивается всегда одним исходом, нет неопределенности
3. Максимум  $H(\xi) = \log_2 N = H_0$  достигается при  $p_1 = p_2 = \dots = \frac{1}{N}$  - то есть когда все вероятности одинаковы, ни одному исходу нельзя отдать предпочтение, и результат эксперимента получается максимально неопределенным

Рассмотрим  $\varphi(x) = x \log_2 x$ . Так как  $\varphi''(x) = \frac{1}{x \ln 2} > 0$  при  $x > 0$ , следовательно  $\varphi(x)$  выпукла вниз

Рассмотрим случайную величину  $\eta$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \eta & p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \hline p & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \end{array}$$

По неравенству Йенсена  $\varphi(E\eta) = \varphi\left(\sum_{i=1}^N \frac{p_i}{N}\right) = \varphi\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i\right) = \varphi\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{\log_2 \frac{1}{N}}{N} \leq E(\varphi(\eta)) =$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i = -\frac{1}{N} H(\eta)$$

Получаем  $\frac{\log_2 \frac{1}{N}}{N} \leq -\frac{1}{N} H(\eta)$ , то есть  $H \leq \log_2 N$

Следствие: Энтропию можно рассматривать как меру неопределенности эксперимента

Ex.  $\xi \in B_p$

$$\begin{array}{c|c|c} \xi & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array}$$

$$H(\xi) = -(1-p) \log_2(1-p) - p \log_2 p$$

Ex. 1. Психолог Р. Хайман проводил такой эксперимент: перед человеком загорались с некоторой частотой лампочки, замерялась время реакции на загоревшуюся лампочку. Если лампочки загорались с одинаковой частотой, то энтропия была пропорциональна  $H_0$

Ex. 2. Также с помощью энтропии определен второй закон термодинамики

Ex. 3. Теория кодирования информации

Если алфавит сообщения состоит из  $N$  символов, то каждому символу присваиваем последовательность одинаковой длины из 0 и 1, причем ее длина будет  $\lceil \log_2 N \rceil$

Для передачи  $n$  символов потребуется последовательность длиной  $n \lceil \log_2 N \rceil$

Цель: сократить длину последовательности

Для больших по объему сообщений можно заметно уменьшить эту величину, используя, что разные символы встречаются с разными частотами.

Если  $p_1, p_2, \dots, p_N$  - эти частоты, то в сообщении длиной  $N$   $i$ -ый символ появляется  $v_i \approx np_i$  раз

**Def.** Сообщение длины  $N$  называется типичным с параметрами  $n$  и  $\delta$ , если  $|v_i - np_i| < \delta \forall 1 \leq i \leq N$

Пусть  $M_{n,\delta}$  - число таких сообщений



**Th.** (частный случай теоремы Макмиллана)

$$\frac{1}{n} \log_2 M_{n,\delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i$$

Следствие: существует  $\varepsilon > 0$  |  $\frac{1}{n} \log_2 M_{n,\delta} < H + \varepsilon$  (или  $M_{n,\delta} < 2^{n(H+\varepsilon)}$ )

Если можно занумеровать эти типичные сообщения, то для них потребуется число символов  $\log_2 2^{n(H+\varepsilon)} = n \cdot (H + \varepsilon)$

И поэтому с вероятностью приблизительно 1 можно сократить длины сообщения с коэффициентом сжатия  $\gamma \approx \frac{nH}{nH_0} = \frac{H}{H_0}$ , где  $H_0 = \log_2 N$

Если все символы встречаются независимо, то дальнейшее сжатие невозможно, но так как буквы встречаются в определенных сочетаниях, то можно сжать информации дальше, используя этот факт

Пусть  $\gamma_\infty$  - коэффициент итогового сжатия

В русском языке  $\gamma \approx 0.87$ . Если считать слова символами нашего алфавита, то получится  $\gamma_\infty \approx 0.24$  для литературного языка и  $\gamma_\infty \approx 0.17$  для делового языка

**Def.**  $1 - \gamma_\infty$  называют коэффициентом избыточности языка

## Энтропия при непрерывном распределении

**Def.** Пусть  $\xi$  абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью  $f(x)$  и носителем  $A = \{x \mid f(x) > 0\}$ . Энтропией  $H(\xi)$  называется величина  $-\int_A f(x) \log_2 f(x) dx$

**Th.** Следующие распределения имеют наибольшую энтропию:

1. Если  $A = [0, 1]$ , то  $U(0, 1)$
2. Если  $A = [0, \infty)$  и  $E\xi = 1$ , то показательное  $E_1$
3. Если  $A = \mathbb{R}$  и  $E\xi = 0$ , а  $D\xi = 1$ , то  $N(0, 1)$

## Х. Программа экзамена в 2024/2025

### 1. Пространство элементарных исходов. Случайные события. Операции над событиями.

**Пространство элементарных исходов:** Пространством элементарных исходов  $\Omega$  называется множество, содержащее все возможные исходы экспериментов, из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются элементарными исходами и обозначаются  $\omega$

**Случайное событие:** Случайными событиями называется подмножество  $A \subset \Omega$ . События  $A$  наступают, если произошел один из элементарных исходов из множества  $A$

**Операции над событиями:** Суммой  $A + B$  называется событие, состоящее в том, что произошло события  $A$  или события  $B$  (хотя бы одно из них)

Произведением  $A \cdot B$  называется событие, состоящее в том, что произошло событие  $A$  и события  $B$  (оба из них)

Противоположным  $A$  событием называется событие  $\bar{A}$ , состоящее в том, что событие  $A$  не произошло

Дополнение (разность)  $A \setminus B$  называется событие  $A \cdot \bar{B}$

События  $A$  и  $B$  называются несовместными, если их произведение - пустое множество (не могут произойти одновременно при одной эксперименте)

События  $A$  влечет события  $B$ , если  $A \subset B$  (если наступает  $A$ , то наступит  $B$ )

### 2. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности.

**Статистическое определение вероятности:** Пусть проводится  $n$  реальных экспериментов, при которых событие  $A$  появилось  $n_A$  раз. Отношение  $\frac{n_A}{n}$  называется частотой события  $A$ . Эксперименты показывают, что при увеличении числа  $n$  частота стабилизируется у некоторого числа, при котором мы понимаем статистическую вероятность:  $P(A) \approx \frac{n_A}{n}$  при  $n \rightarrow \infty$

**Классическое определение вероятности:** Пусть пространство случайных событий  $\Omega$  содержит конечное число равновозможных исходов, тогда применимо классическое определение вероятности:  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$ , где  $n$  - число всех возможных исходов,  $m$  - число благоприятных исходов

### 3. Геометрическое определение вероятности. Задача Бюффона об игле.

**Геометрическое определение вероятности:** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  - замкнутая ограниченная область,  $\mu(\Omega)$  - мера  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$  (например, длина отрезка, площадь области на плоскости, объем тела в пространстве), в этом случае применимо геометрическое определение вероятности:  $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

**Задача Бюффона об игле:** пусть пол вымощен ламинатом,  $2l$  - ширина доски, на пол бросается игла длины, равной ширине доски, найти вероятность того, что игла пересечет стык доски

Определим положение иглы координатами центра и углом, между иглой и стыком доски, причем можно считать, что эти величины независимы

$\exists x \in [0; l]$  - расстояние от центра до ближайшего края,  $\varphi \in [0; \pi]$  - угол

$$\Omega = [0; l] \times [0; \pi]$$

Событие  $A$  (пересечет стык) наступает, если  $x \leq l \sin \varphi$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi}{\pi l} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$

4. *Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятности.*

**Аксиоматическое определение вероятности:**  $\Omega$  - пространство элементарных исходов,  $\mathcal{F}$  - его  $\sigma$ -алгебра событий. Вероятностью на  $(\Omega, \mathcal{F})$  называется функция  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  со свойствами:

- (a)  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$  (неотрицательность)
- (b) Если  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$  - несовместное, то  $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  (свойство счетной аддитивности)
- (c)  $P(\Omega) = 1$  (условие нормированности)

**Вероятностное пространство:** Вероятностное пространство - тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

**Свойства вероятности:**

- (a) Так как  $\emptyset$  и  $\Omega$  - несовместные, то  $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = 1 + P(\emptyset) \implies P(\emptyset) = 0$
- (b) Формула обратной вероятности:  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- (c)  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$

5. *Аксиома непрерывности. Ее смысл и вывод.*

**Аксиома непрерывности: Th.** Пусть имеется убывающая цепочка событий  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  и  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Тогда  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

При непрерывном изменении области  $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$  соответствующая вероятность  $P(A)$  также должна изменяться непрерывно

$$\text{Ясно, что } A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1} + \prod_{i=n}^{\infty} A_i$$

$$\prod_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^n A_i \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1} \text{ и так как эти события}$$

несовместны, то по свойству счетной аддитивности  $P(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1})$  - это остаток (хвост) сходящегося ряда

$$P(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \bar{A}_{i+1}) + P(A_n) \text{ и } P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ по необходимому признаку сходимости}$$

## 6. Свойства операций сложения и умножения. Формула сложения вероятностей.

Свойства операций сложения и умножения:

(a) Свойство дистрибутивности:  $A \cdot (B + C) = AB + AC$ (b) Формула сложения: если  $A$  и  $B$  несовместны, то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ (c) Формула сложения вероятностей:  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 

## 7. Независимость событий. Независимые события в совокупности и попарно. Пример Бернштейна.

**Независимые события:** События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - независимы в совокупности, если для любого набора  $i_1, i_2, \dots, i_k$  ( $2 \leq k \leq n$ )  $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ **Пример Бернштейна:** Пусть имеется правильный тетраэдр, одна грань окрашена в красный, вторая в синий, третья в зеленый, а четвертая во все эти три цвета.Подбросили тетраэдр,  $\square A$  - грань, которая содержит красный цвет,  $B$  - синий,  $C$  - зеленый.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Так как } P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B) \text{ - попарная независимость}$$

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) \text{ - но вот независимость в совокупности не соблюдается}$$

## 8. Условная вероятность. Формула умножения событий.

**Условная вероятность**  $P(A|B)$  (или  $P_B(A)$ ) - вероятность события  $A$ , вычисленная в предположении, что событие  $B$  уже произошло.  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ **Формула умножения событий:**Для двух событий:  $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$ В общем случае:  $P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$ 

## 9. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

**Полная группа событий:** События  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и содержат все возможные элементарные исходы**Формула полной вероятности:**  $\square H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  - полная группа событий. Тогда  $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$ **Формула Байеса:**  $\square H_1, H_2, \dots, H_n$  - полная группа событий, и известно, что событие  $A$  уже произошло

$$\text{Тогда } P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

## 10. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли.

**Схемой Бернулли** называется серия одинаковых независимых экспериментов, каждый

из которых имеет 2 исхода: произошло интересное нас событие или нет

**Формула Бернулли:** Вероятность того, что при  $n$  испытаниях произойдет ровно  $k$  успехов, равна  $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

**Наиболее вероятное число успехов:**

- (а)  $np$  - целое, тогда  $np + p$  - нецелое, и  $k = np$  - наиболее вероятное
- (б)  $np + p$  - нецелое, тогда  $k = \lfloor np + p \rfloor$
- (с)  $np + p$  - целое, тогда  $np + p - 1$  - целое, тогда  $k \in \{np + p - 1, np + p\}$

11. *Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа (без док-ва).*

**Локальная формула:**  $p_n(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$ , где  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  - функция Гаусса,  $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$

**Интегральная формула:**  $p_n(k_1 \leq k \leq k_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ , где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  -

функция Лапласа,  $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$  - отклонение от левой границы,  $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$  - отклонение от правой

12. *Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности события. Закон больших чисел Бернулли.*

**Вероятность отклонения относительной частоты** от вероятности события

$n$  - число испытаний,  $p = p(A)$ ,  $\frac{n_A}{n}$  - экспериментальная частота

$$p \left( \left| \frac{n_A}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) = p \left( -\varepsilon \leq \frac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\Phi \left( \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}} \right)$$

**Закон больших чисел Бернулли:**  $p \left( \left| \frac{n_A}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\Phi \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}} \sqrt{n} \right) \rightarrow 1$  - закон больших чисел показывает, что вероятность попадания относительной частоты в  $\varepsilon$ -трубу приближается к 1

13. *Схемы испытаний: Бернулли, до первого успеха. Биномиальное и геометрическое распределения. Свойство отсутствия последействия.*

**Схема Бернулли:**  $\exists v_n$  - число успехов в серии из  $n$  испытаний;  $P_n(v_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$

**Биномиальное распределение:** Соответствие  $k \rightarrow C_n^k p^k q^{n-k}$ ,  $k = 0, \dots, n$  называется биномиальным распределением (обозначается  $B_{n,p}$  или  $B(n, p)$ )

**Схема до первого успеха:** Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успешного испытания под номером  $\tau$ , тогда вероятность  $P(\tau = k) = q^{k-1}p$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Геометрическое распределение:** Соответствие  $k \rightarrow q^{k-1}p$ ,  $k \in \mathbb{N}$  называется геометрическим распределением вероятности (обозначается  $G_p$  или  $G(p)$ )

Геометрическое распределение обладает свойством нестарения или свойством отсутствия последействия: **Th.**  $\exists P(\tau = k) = q^{k-1}p$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\forall n, k \geq 0 \quad P(\tau > n+k \mid \tau > n) = P(\tau > k)$

14. *Урновая схема с возвратом и без возврата. Гипергеометрическое распределение. Теорема об его асимптотическом приближении к биномиальному.*

**Урновая схема:** В урне  $N$  шаров, из которых  $K$  шаров белые,  $N - K$  - черные. Из урны вынимаем (без учета порядка)  $n$  шаров. Найти вероятность, что из них  $k$  белых

а) Схема с возвратом (после каждого раза кладем шар обратно). В этом случае вероятность вынуть белый шар одинакова и равна  $\frac{K}{N}$ . Получаем схему Бернулли:  $P_n(k) =$

$$C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$$

б) Схема без возврата - вынутый шар мы выбрасываем, тогда  $P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$

**Гипергеометрическое распределение:** Соответствие  $k \rightarrow \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, \dots, n$  называется гипергеометрическим распределением

**Теорема о приближении к биномиальному:** **Th.** Если  $K, N \rightarrow \infty$  таким образом, что  $\frac{K}{N} \rightarrow p \in (0; 1)$ , а  $n$  и  $0 \leq k \leq n$  фиксированы, то вероятность при гипергеометрическом распределении будет стремиться к биномиальному:  $P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$

15. *Схема Пуассона. Формула Пуассона. Оценка погрешности в формуле Пуассона.*

**Схема Пуассона:** вероятность числа успеха при одном испытании  $p_n$  зависит от числа испытаний  $n$ , причем таким образом, что  $np_n \approx \lambda = \text{const}$ ,  $\lambda$  - интенсивность появления редких событий в единицу времени в потоке испытаний. Применимо при  $p$  близком к 0 или к 1.

**Формула Пуассона:** **Th.** Пусть  $n \rightarrow \infty, p_n \rightarrow 0$  таким образом, что  $np_n \rightarrow \lambda = \text{const} > 0$ .

Тогда вероятность  $k$  успехов при  $n$  испытаниях:  $P_n(k) = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

**Оценка погрешности:** **Th.** Пусть  $v_n$  - число успехов при  $n$  испытаниях в схеме Бернулли  $p$  - вероятность успеха при одном испытании,  $\lambda = np$ ,  $A \subset \{0, 1, \dots, n\}$  - произвольное подмножество чисел

Тогда  $|P_n(v_n \in A) - \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \min(p, np^2) = \min(p, p\lambda)$

16. *Случайные величины, определение. Измеримость функции, ее смысл. Вероятностное пространство  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ . Распределение случайной величины.*

**Случайной величиной**, заданной на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , называется  $\mathcal{F}$ -измеримая функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , которая сопоставляет каждому элементарному исходу некоторое вещественное число

**Измеримость:** На вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $\mathcal{F}$ -измеримой, если  $\forall x \in \mathbb{R} \{ \omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x \} \in \mathcal{F}$  (то есть  $\xi^{-1}(y) \in \mathcal{F}$ , где  $y \in (-\infty; x)$ )

Смысл измеримости: если задана случайная величина  $\xi$ , то мы можем задать вероятность попадания случайной величины в интервал  $(-\infty; x)$ :  $p(\xi \in (-\infty; x)) = p(\{ \omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x \})$

**Вероятностное пространство  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ :** Пусть  $\xi$  задана на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , с помощью нее получаем новое вероятностное пространство  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_\xi)$ , с которым проще работать

**Распределение случайной величины:** Функция  $p(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , ставящая в соответствие каждому Борелевскому множеству вероятность, называется распределением случайной величины  $\xi$

17. *Дискретные случайные величины. Определение, закон распределения, числовые характеристики.*

**Дискретная случайная величина:** Случайная величина  $\xi$  имеет дискретное распределение, если она принимает не более, чем счетное число значений. То есть существует конечный или счетный набор чисел  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  такой, что  $p(\xi = x_i) = p_i > 0$  и  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$

Таким образом, дискретная случайная величина (ДСВ) задается законом распределения:

|       |       |       |         |       |         |                               |
|-------|-------|-------|---------|-------|---------|-------------------------------|
| $\xi$ | $x_1$ | $x_1$ | $\dots$ | $x_n$ | $\dots$ | - значения случайной величины |
| $p$   | $p_1$ | $p_1$ | $\dots$ | $p_n$ | $\dots$ | - вероятности этих значений   |

**Характеристики дискретной случайной величины:**

Математическим ожиданием  $E\xi$  случайной величины  $\xi$  называется число  $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией  $D\xi$  случайной величины  $\xi$  называют среднее квадратов ее отклонения от математического ожидания:  $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$  или  $D\xi = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - E\xi)^2 p_i$  при условии, что данный ряд сходится

Дисперсию обычно удобно считать по формуле  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E\xi^2$

Средним квадратическим отклонением (СКО)  $\sigma_\xi$  называется величина  $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

$m_k = E\xi^k$  - момент  $k$ -ого порядка случайной величины  $\xi$  (также называют начальным моментом)

$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$  - центральный момент  $k$ -ого порядка

18. *Свойства математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.*

**Свойства:**

**Th. 1.** Случайная величина  $\xi$  имеет вырожденное распределение, если  $\xi(\omega) = \text{const } \forall \omega \in \Omega$

|       |     |
|-------|-----|
| $\xi$ | $C$ |
| $p$   | $1$ |

$E\xi = C \quad D\xi = 0$

**Th. 2.** Свойство сдвига:  $E(\xi + C) = E\xi + C; D(\xi + C) = D\xi$

**Th. 3.** Свойство растяжения:  $E(C\xi) = CE\xi, D(C\xi) = C^2 D\xi$

**Th. 4.**  $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$  (из третьего свойства математического ожидания - линейная функция)

**Def.** Дискретные случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, если  $p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i) \cdot p(\eta = y_j) \forall i, j$ . То есть случайные величины принимают свои значения независимо друг от друга

**Th. 5.** Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$ ; обратное неверно

**Th. 6.**  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$



**Def.**  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$ , где  $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$  - ковариация случайных величин (равна 0 при независимых величинах) - индикатор наличия связи между случайными величинами

**Th. 7.** Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

**Th. 8.** Общая формула дисперсии суммы:  $D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i,j(i \neq j)} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$

19. Стандартные дискретные распределения и их числовые характеристики (Бернулли, биномиальное, геометрическое, Пуассона).

**Распределение Бернулли:**  $B_p$  (с параметром  $0 < p < 1$ ),  $\xi$  - число успехов при одном испытании,  $p$  - вероятность успеха при одном испытании

|       |            |        |            |                        |
|-------|------------|--------|------------|------------------------|
| $\xi$ | 0          | 1      |            |                        |
| $p$   | $1 - P(A)$ | $P(A)$ | $E\xi = p$ | $D\xi = p(1 - p) = pq$ |

**Биномиальное распределение**  $B_{n,p}$  (с параметрами  $n, p$ ),  $\xi$  - число успехов в серии из  $n$  испытаний,  $p$  - вероятность успеха при одном испытании

$$p(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \iff \xi \in B_{n,p}$$

$$E\xi_i = p; \quad D\xi_i = pq$$

$$E\xi = E\xi_1 + \dots + E\xi_n = p + \dots + p = np$$

$$D\xi = D\xi_1 + \dots + D\xi_n = pq + \dots + pq = npq$$

**Геометрическое распределение**  $G_p$  (с параметром  $p$ ),  $\xi$  - номер 1-ого успешного испытания в бесконечной серии

$$p(\xi = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots \iff \xi \in G_p$$

$$E\xi = \frac{1}{p}, \quad D\xi = \frac{q}{p^2}$$

**Распределение Пуассона**  $\Pi_\lambda$  (с параметром  $\lambda > 0$ )

Случайная величина  $\xi$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ , если  $p(\xi =$

$$k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E\xi = \lambda = np, \quad D\xi = \lambda$$

20. Функция распределения и ее свойства (в свойствах 4, 5, 6 достаточно привести одно из доказательств).

**Функция распределения**  $F_\xi(x)$  случайной величины  $\xi$  называется функция  $F_\xi(x) = P(\xi < x)$

**Свойства:**

$$1) F(x) \text{ ограничена } 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$2) F(x) \text{ неубывающая функция: } x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$3) p(\alpha \leq \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$5) F(x) \text{ непрерывна слева: } F(x_0 - 0) = F(x_0)$$

$$6) \text{ Скачок в точке } x_0 \text{ равен вероятности попадания в данную точку: } F(x_0 + 0) - F(x_0) =$$

$$p(\xi = x_0) \text{ или } F(x_0 + 0) = p(\xi = x_0) + p(\xi < x_0) = p(\xi \leq x_0)$$

$$7) \text{ Если функция распределения непрерывна в точке } x = x_0, \text{ то очевидно, что вероятность}$$



попадания в эту точка  $p(\xi = x_0) = 0$  (следствие из 6 пункта)

8) Если  $F(x)$  непрерывна  $\forall x \in \mathbb{R}$ , то  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

21. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность и ее свойства.

**Абсолютно непрерывные случайные величины:** Случайная величина  $\xi$  имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует  $f_\xi(x)$  такая, что  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$   $p(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x) dx$

**Функция плотности:** Функция  $f_\xi$  называется плотностью распределения случайной величины

**Свойства:**

1) Вероятностно-геометрический смысл плотности:  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta f_\xi(x) dx$

2) Условие нормировки:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = 1$

3)  $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(x) dx$

4)  $F_\xi(x)$  непрерывна

5)  $F_\xi(x)$  дифференцируема почти везде и  $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$  для почти всех  $x$

6)  $f_\xi(x) \geq 0$  по определению и как производная неубывающей  $F_\xi(x)$

7)  $p(\xi = x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$  - так как  $F_\xi(x)$  непрерывна

8)  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

9) **Th.** Если  $f(x) \geq 0$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  (выполнены свойства 2 и 6), то  $f(x)$  - плотность некоторого распределения

22. Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины, их свойства.

**Характеристики:**

Математическим ожиданием  $E\xi$  случайной абсолютно непрерывной величины  $\xi$  называется величина  $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$  при условии, что данный интеграл сходится абсолютно, то есть  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$

Дисперсией  $D\xi$  случайной величины  $\xi$  называется величина  $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f_\xi(x) dx$  при условии, что данный интеграл сходится. Вычислять удобно по формуле  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x) dx - (E\xi)^2$

Среднее квадратическое отклонение  $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$  определяется, как корень дисперсии

$m_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\xi(x) dx$  - момент  $k$ -ого порядка

$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k f_\xi(x) dx$  - центральный момент  $k$ -ого порядка

Медианой  $Me$  абсолютно непрерывной случайной величины  $\xi$  называется значение случайной величины  $\xi$ , такое что  $p(\xi < Me) = p(\xi > Me) = \frac{1}{2}$

Модой  $M_0$  случайной величины  $\xi$  называется точка локального максимума плотности

### 23. Равномерное распределение.

**Равномерное распределение:** Случайная величина  $\xi$  имеет равномерное распределение  $\xi \in U(a, b)$ , если ее плотность на этом отрезке постоянна. Получаем функцию плотности

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \quad \frac{1}{b-a} \text{ из усл. нормировки}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

$$E\xi = \frac{a+b}{2}, \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \text{ при условии, что } \alpha, \beta \in [a, b]$$

### 24. Показательное распределение. Свойство нестарения.

**Показательное распределение:** Случайная величина  $\xi$  имеет показательное (или экспоненциальное) распределение с параметром  $\alpha > 0$  (обозн.  $\xi \in E_{\alpha}$ ), если ее плотность имеет

$$\text{вид: } f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E\xi = \frac{1}{\alpha}, \quad D\xi = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\alpha}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F(b) - F(a) = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha} \quad a, b \geq 0$$

Из непрерывных случайных величин только показательная обладает свойством нестарения: **Th.**  $\square \xi \in E_{\alpha}$ . Тогда  $p(\xi > x+y \mid \xi > x) = p(\xi > y) \quad \forall x, y > 0$

### 25. Нормальное распределение. Стандартное нормальное распределение, его числовые характеристики.

**Нормальное распределение:** Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $a$  и  $\sigma^2$  (обозн.  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ ), если ее плотность имеет вид:  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$E\xi = a, \quad D\xi = \sigma^2, \quad \sigma = \sigma$$

**Стандартным нормальным распределением** называется нормальное распределение с параметрами  $a = 0, \sigma^2 = 1$ :  $\xi \in N(0, 1)$

Плотность:  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  - функция Гаусса

Распределение:  $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  - функция стандартного нормального распределения

$$E\xi = 0; D\xi = 1$$

26. *Связь между стандартным нормальным и нормальным распределениями. Следствия.*

**Связь:**

$$1) \square \xi \in N(a, \sigma^2). \text{ Тогда } F_\xi(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$$2) \text{ Если } \xi \in N(a, \sigma^2), \text{ то } \eta = \frac{\xi-a}{\sigma} \in N(0, 1) \text{ (процесс } \xi \rightarrow \eta \text{ называется стандартизацией)}$$

$$3) \square \xi \in N(a, \sigma^2). \text{ Тогда } p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

$$4) \text{ Вероятность попадания в симметричный интервал (вероятность отклонения случайной величины от матожидания) } p(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

$$5) \text{ Правило 3 «сигм»: } p(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973 - \text{попадание случайной величины нормального распределения в интервал } (a - 3\sigma, a + 3\sigma) \text{ близко к } 1$$

$$6) \text{ Свойство линейности: если случайная величина } \xi \in N(a, \sigma^2), \text{ то } \eta = \gamma\xi + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$$

$$7) \text{ Устойчивость относительно суммирования: если случайные величины } \xi_1 \in N(a_1, \sigma_1^2), \xi_2 \in N(a_2, \sigma_2^2), \text{ и они независимы, то } \xi_1 + \xi_2 \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

27. *Сингулярные распределения. Теорема Лебега (без док-ва).*

**Сингулярное распределение:** Случайная величина  $\xi$  имеет сингулярное распределение, если  $\exists B$  - Борелевское множество с нулевой мерой Лебега  $\lambda(B) = 0$ , такое что  $p(\xi \in B) = 1$ , но  $P(\xi = x) = 0 \quad \forall x \in B$

**Теорема Лебега: Th. Лебега.**

$\square F_\xi(x)$  - функция распределения  $\xi$ . Тогда  $F_\xi(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$ , где  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$F_1$  - функция дискретного распределения

$F_2$  - функция абсолютно непрерывного распределения

$F_3$  - функция сингулярного распределения

То есть существуют только дискретное, абсолютно непрерывное, сингулярное распределения и их смеси

28. *Преобразования случайных величин. Стандартизация случайной величины.*

**Стандартизация:** Пусть имеется случайная величина  $\xi$ . Соответствующей ей стандартной величиной называется случайная величина  $\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sigma}$

$$E\eta = 0; D\eta = 1$$

**Преобразование:** Если  $\xi$  - дискретная случайная величина, то ее законы распределения находятся просто: значения  $x_i$  в верхней строке заменяем  $g(x_i)$ , вероятности остаются прежние.

29. *Теорема о монотонном преобразовании. Линейное преобразование случайной величины. (без док-ва).*

**Теорема о монотонном преобразовании:** **Th.** Пусть  $f_\xi(x)$  - плотность случайной величины  $\xi$ ,  $g(x)$  - строго монотонная функция. Тогда случайная величина  $\eta = g(\xi)$  имеет плотность  $f_\eta(x) = |h'(x)|f_\xi(h(x))$ , где  $h(g(x)) = x$

Если  $g(x)$  не является монотонной функцией, то поступаем следующим образом: разбиваем  $g(x)$  на интервалы монотонности, для каждого  $i$ -ого интервала находим  $h_i(x)$  и плотность случайной величины ищем по формуле Смирнова:  $f_\eta(x) = \sum_{i=0}^n |h'_i(x)|f_\xi(h_i(x))$

**Линейное преобразование:** **Th.** Пусть  $\xi$  имеет плотность  $f_\xi(x)$ , тогда  $\eta = a\xi + b$ , где  $a \neq 0$ , имеет плотность  $f_\eta(x) = \frac{1}{|a|}f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

30. *Квантильное преобразование. Моделирование случайной величины с помощью датчика случайных чисел.*

**Квантильное преобразование:** Пусть функция распределения случайной величины  $\xi$   $F_\xi(x)$  - непрерывная функция. Тогда  $\eta = F(\xi) \in U(0, 1)$  - стандартное равномерное распределение. Пусть  $\eta \in U(0, 1)$  - стандартное равномерное распределение,  $F(x)$  - произвольная функция распределения. Тогда  $\xi = F^{-1}(\eta)$  имеет функцию распределения  $F(x)$

Преобразование  $\xi = F^{-1}(\eta)$  называют квантильным

Смысл: датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение, из теоремы следует, что при помощи датчика случайных чисел и квантильного преобразования мы сможем смоделировать любое нужно распределение

31. *Виды сходимостей случайных величин, связь между ними. Теорема об эквивалентности сходимостей к константе (все без док-ва).*

**Виды сходимостей:**

- Сходимость «почти наверное»

**Def.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  сходится «почти наверное» к случайной величине  $\xi$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $\xi_n \xrightarrow{п. н.} \xi$ ), если  $p(\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(\omega)) = 1$

- Сходимость по вероятности

**Def.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  сходится по вероятности к случайной величине  $\xi$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ ), если  $\forall \varepsilon > 0 \quad p(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

- Слабая сходимость

**Def.** Последовательность случайных величин  $\xi_n$  слабо сходится к случайной величине  $\xi$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $\xi_n \rightrightarrows \xi$ ), если  $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\xi(x) \forall x$ , где  $F_\xi(x)$  - непрерывна

**Связь:**

**Th.**  $\xi_n \xrightarrow{п. н.} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{p} \xi \implies \xi_n \rightrightarrows \xi$

**Th.** Если  $\xi_n \rightrightarrows C = \text{const}$ , то  $\xi_n \xrightarrow{p} C$

*Nota.* В общем случае не только из слабой сходимости не следует сходимость по вероятности, но и бессмысленно говорить об этом, так как слабая сходимость - это сходимость не случайных величин, а их распределений

32. Математическое ожидание преобразованной случайной величины. Свойства моментов.

**Матожидание: Th.** Если  $\xi$  - дискретная случайная величина, то  $Eg(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p(\xi = x_i)$

Для непрерывной случайной величины  $Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{\xi}(x)dx$

**Свойства моментов:** 1) Если  $\xi \geq 0$ , то  $E\xi \geq 0$

2) Если  $\xi \leq \eta$ , то  $E\xi \leq E\eta$

3) Если  $|\xi| \leq |\eta|$ , то  $E|\xi|^k \leq E|\eta|^k$

4) Если существует момент  $m_t$  случайной величины  $\xi$ , то существует  $m_s$  при  $s < t$  (при условии, что интеграл/сумма сходятся)

33. Неравенство Йенсена, следствие.

**Неравенство Йенсена: Th.** Пусть функция  $g(x)$  выпукла вниз, тогда для любой случайной величины  $\xi$   $Eg(\xi) \geq g(E\xi)$

*Nota.* Если  $g(x)$  выпукла вверх, знак неравенства меняется

Следствие:  $Ee^{\xi} \geq e^{E\xi}$ ,  $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$ ,  $E|\xi| \geq |E\xi|$ ,  $E \ln(\xi) \leq \ln(E\xi)$ ,  $E\frac{1}{\xi} \geq \frac{1}{E\xi}$  при  $\xi > 0$

34. Неравенства Маркова, Чебышева, правило трех сигм.

Для  $\xi$ , у которой существует матожидание, верно:

**Неравенство Маркова: Th.**  $p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$

**Неравенство Чебышева: Th.**  $P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$

**Правило «трех сигм»: Th.**  $P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$

35. Среднее арифметическое одинаковых независимых случайных величин. Закон больших чисел Чебышева.

**Среднее арифметическое:**  $\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$

$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E\xi_1 + \dots + E\xi_n) = \frac{1}{n}na = a = E\xi_1$  - математическое ожидание не меняется

$D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D\xi_1 + \dots + D\xi_n) = \frac{1}{n^2}nd = \frac{d}{n} = \frac{D\xi_1}{n}$  - дисперсия уменьшилась в  $n$  раз

$\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  - СКО уменьшилось в  $\sqrt{n}$  раз

**Закон больших чисел Чебышев: Th.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$  - последовательность независимых одинаково распределенных с конечным вторым моментом, тогда  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} E\xi_1$

36. Вывод закона больших чисел Бернулли из закона больших чисел Чебышева. Законы больших чисел Хинчина и Колмогорова (только формулировки).

**ЗБЧ Бернулли: Th.** Пусть  $v_n$  - число успехов из  $n$  независимых испытаний,  $p = P(A)$  - вероятность успеха при одном испытании. Тогда  $\frac{v_n}{n} \xrightarrow{P} P(A)$

$v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , где  $\xi_i \in B_p$  - число успехов при  $i$ -ом испытании

$$E\xi_i = p; D\xi_i = pq$$

$$\frac{v_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1 = p$$

$$p \left( \left| \frac{v_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

**ЗБЧ Хинчина:** **Th.**  $v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом, тогда  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_i$

**ЗБЧ Колмогорова:** В условиях теоремы Хинчина  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1$

37. Совместные распределения случайных величин. Функция совместного распределения, ее свойства. Независимость случайных величин.

**Совместное распределение:** Случайным вектором  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  называется упорядоченный набор случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве

Случайный вектор задает отображение  $(\xi_1, \dots, \xi_n)(\omega) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

**Функция совместного распределения:** Функцией совместного распределения случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  называется функция  $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$

**Свойства:**

(a)  $0 \leq F_{\xi, \eta}(x, y) \leq 1$

(b)  $F_{\xi, \eta}(x, y)$  - неубывающая по каждому аргументу

(c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = 1$

(d) Восстановление маргинального (частного) распределения:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\eta}(y)$ , и наоборот -  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x)$

(e)  $F_{\xi, \eta}(x, y)$  - непрерывна слева по каждому аргументу

(f)  $P(x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2) = F_{\xi, \eta}(x_2, y_2) - F_{\xi, \eta}(x_2, y_1) - F_{\xi, \eta}(x_1, y_2) + F_{\xi, \eta}(x_1, y_1)$

**Независимость величин:** Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности, если для любого набора Борелевских множеств из  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  верно  $p(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = p(\xi_1 \in B_1) \cdot p(\xi_2 \in B_2) \cdot \dots \cdot p(\xi_n \in B_n)$

Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  попарно независимы, если независимы любые две из них

38. Дискретная система двух случайных величин. Закон совместного распределения. Маргинальные распределения.

**Дискретная система:** Случайные величины  $\xi, \eta$  имеют совместное дискретное распределение, если случайный вектор  $(\xi, \eta)$  принимает не более, чем счетное число значений, то есть существует конечный или счетный набор пар чисел  $(x_i, y_i)$ , таких что  $P(\xi = x_i, \eta = y_i) > 0, \sum_{i,j} P(\xi = x_i, \eta = y_i) = 1$

Таким образом двумерная дискретная случайная величина задается законом распределения - таблице вероятностей

| $\xi \backslash \eta$ | $y_1$    | $y_2$    | $\dots$  | $y_m$    |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$                 | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\dots$  | $p_{1m}$ |
| $x_2$                 | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\dots$  | $p_{2m}$ |
| $\vdots$              | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $x_n$                 | $p_{n1}$ | $p_{n2}$ | $\dots$  | $p_{nm}$ |

Зная общий закон распределения, можно восстановить частное (маргинальное) распределение по формулам:

$$p_i = \sum_{j=1}^m p_{i,j} \quad q_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j}$$

39. Абсолютно непрерывная система двух случайных величин. Плотность совместного распределения, ее свойства.

**Непрерывная система:** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют абсолютно непрерывное совместное распределение, если  $\exists f_{\xi,\eta}(x, y)$ , такая что  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \quad P((\xi, \eta) \in B) = \iint_B f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy$ . Функцию  $f_{\xi,\eta}(x, y)$  будем называть функцией плотности совместного распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .

**Свойства:**

- (a)  $f_{\xi,\eta}(x, y) \geq 0$
- (b) Условие нормировки:  $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy = 1$
- (c)  $F_{\xi,\eta} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi,\eta}(x, y) dy dx$
- (d)  $f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x, y)}{\partial x \partial y}$
- (e) Если случайные величины  $\xi, \eta$  имеют абсолютно непрерывное совместное распределение с плотностью  $f(x, y)$ , то маргинальное распределение величин  $\xi, \eta$  также имеют абсолютно непрерывное распределение с плотностями  $f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dy, f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dx$
- (f) Так как вероятность попадания в Борелевские множества полностью задается функцией распределения, то условие независимости случайных величин эквивалентно следующему:  
 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимы, если функция общего распределения распадается в произведение отдельных функций распределения  
 $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$
- (g) **Равносильное определение:** абсолютно непрерывные случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности тогда и только тогда, когда плотность совместного распределения  $f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot f_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(x_n)$



40. *Функции от двух случайных величин. Теорема о функции распределения. Формула свертки.*

**Функция от двух случайных величин: Th.** Пусть  $\xi_1, \xi_2$  - случайные величины с общим плотностью  $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y)$ , и есть функция  $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда случайная величина  $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$  имеет функцию распределения  $F_\eta(z) = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy$ , где  $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) < z\}$

**Плотность суммы: Th.**  $\square \xi_1, \xi_2$  - независимые абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями  $f_{\xi_1}(x)$  и  $f_{\xi_2}(y)$

Тогда плотность суммы  $\xi_1 + \xi_2$  равна  $f_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(t-x)}_{\text{т. н. свертка}} dx$

41. *Суммы стандартных распределений, устойчивость по суммированию (биномиальное, Пуассона, стандартное нормальное).*

**Суммы стандартных распределений:** *Ех.* 1.  $\xi \in B_{n,p}; \eta \in B_{m,p}$ . Тогда ясно, что  $\xi + \eta \in B_{n+m,p}$  (по определению биномиального распределения  $B_{n,p}$  - число успехов из  $n$  испытаний, где  $p$  - вероятность успеха)

*Ех.* 2.  $\xi \in \Pi_\lambda, \eta \in \Pi_\mu$ , они независимы. Тогда  $\xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}$

*Ех.* 3.  $\xi, \eta \in N(0, 1)$  и независимы. Тогда  $\xi + \eta \in N(0, 2)$

*Ех.* 4. В общности для независимых  $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2), \eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$   $\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

*Ех.* 5. Равномерное распределение неустойчиво относительно суммирования, контрпример:

$\xi, \eta \in U(0, 1)$  - независимы

$\forall x, y \in [0, 1] f_\xi(x) = 1, f_\eta(y) = 1$  и  $f_{\xi, \eta}(x, y) = 1$

По первой теореме  $F_{\xi, \eta}(x, y) = \iint_{D_z} f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy = \iint_{D_z} dx dy = S_{D_z}$ , где  $D_z = \{(x, y) \mid x + y < z\}$

42. *Условные распределения и условные математические ожидания. Случаи дискретной и абсолютно непрерывной систем двух случайных величин.*

**Условным распределением** случайной величины из системы случайных величин  $(\xi, \eta)$  называется ее распределение, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение. Обозначается  $\xi | \eta = y$

Условным математическим ожиданием (обозначается  $E(\xi | \eta = y)$ ) называется математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  при соответствующем условном распределении

**Дискретная система:** Пусть  $(\xi, \eta)$  задана законом распределения:

| $\xi \backslash \eta$ | $y_1$    | $y_2$    | $\dots$  | $y_m$    |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$                 | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\dots$  | $p_{1m}$ |
| $x_2$                 | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\dots$  | $p_{2m}$ |
| $\vdots$              | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $x_n$                 | $p_{n1}$ | $p_{n2}$ | $\dots$  | $p_{nm}$ |

Вероятности условных распределений считаем по формулам:



$$\xi|\eta = y_j: p_i = p(\xi = x_i | \eta = y_j) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j} = \frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}$$

$$\eta|\xi = x_i: q_j = p(\eta = y_j | \xi = x_i) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\xi = x_i)} = \frac{q_{ij}}{p_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j p_{ij}}$$

Матожидание  $E(\xi|\eta = y_j) = \sum_i x_i p(\xi = x_i, \eta = y_j)$

**Непрерывная система:** Пусть  $(\xi, \eta)$  задана плотностью  $f_{\xi, \eta}(x, y)$  совместного распределения, тогда плотность условного распределения  $\xi|\eta = y: f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{\xi, \eta}(x, y) dx} = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$

**Def.** Функция  $f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$  называется условной плотностью

**Def.** Условное математическое ожидание вычисляется по формуле  $E(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx$

43. *Пространство случайных величин. Скалярное произведение, неравенство Коши-Буняковского-Шварца.*

**Пространство**  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{\xi \mid D\xi < \infty\}$  - множество случайных величин на данном пространстве с конечной дисперсией

**Скалярным произведением** случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  из  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называется число  $(\xi, \eta) = E(\xi\eta)$

**Неравенство Коши-Буняковского-Шварца:** **Th.** Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют конечный второй момент, тогда  $|E(\xi, \eta)| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$  (или  $|(\xi, \eta)| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|$ )

Причем  $|E(\xi, \eta)| = \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2} \iff \eta = C\xi$ , где  $C = \text{const}$

44. *Условное математическое ожидание как случайная величина, его свойства. Формула полного математического ожидания.*

**Условным математическим ожиданием** (УМО, обозначается  $E(\xi|\eta) = \hat{\xi}$ ) случайной величины  $\xi$  относительно случайной величины  $\eta$  называется ортогональная проекция случайной величины  $\xi$  на  $L(\eta)$

**Свойства:**

- (a) Тожество ортопроекций:  $\exists \hat{\xi} \in L(\eta)$ , тогда  $\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \iff E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta)) \forall g(\eta) \in L(\eta)$
- (b) Формула полного математического ожидания  
 $E\xi = E(E(\xi|\eta))$  или  $E\xi = E\hat{\xi}$

*Nota.* При распределении Бернулли получаем обычную формулу полной вероятности

(c) Линейность:  $E(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 | \eta) = C_1E(\xi_1|\eta) + C_2E(\xi_2|\eta)$

(d) Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $E(\xi|\eta) = E\xi$

(e) Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $(\xi - E\xi) \perp g(\eta) \forall g(\eta) \in L(\eta)$ , в частности  $(\xi - E\xi) \perp \eta$

45. *Условная дисперсия. Закон полной дисперсии. Смысл второго слагаемого в разложении дисперсии.*

**Условной дисперсией** случайной величины  $\xi$  относительно случайной величины  $\eta$  назы-

вается случайная величина  $D(\xi|\eta) = E((\xi - E(\xi|\eta))^2|\eta)$

**Закон полной дисперсии:** **Th.**  $D\xi = E(D(\xi|\eta)) + D(E(\xi|\eta))$

Следствие и смысл:

- Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы (некоррелированы), то  $D(E(\xi|\eta)) = D(E\xi) = 0$  и  $D\xi = E(D(\xi|\eta))$
- Если имеется функциональная зависимость (то есть  $\xi = g(\eta)$ ), то  $D(E(\xi|\eta)) = D(E(g(\eta)|\eta)) = D(g(\eta)) = D\xi$

46. Числовые характеристики зависимости случайных величин. Ковариация, ее свойства. Коэффициент корреляции, его свойства. Корреляция случайных величин.

**Ковариацией**  $(\xi, \eta)$  называется величина  $\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$

Свойства:

- (a)  $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$
- (b)  $\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi$
- (c)  $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$
- (d)  $\text{cov}(C_1\xi_1 + C_2\xi_2, \eta) = C_1\text{cov}(\xi_1, \eta) + C_2\text{cov}(\xi_2, \eta)$
- (e)  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$
- (f)  $D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i<j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$
- (g)
  - i. Если  $\xi$  и  $\eta$  - независимы, то  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$
  - ii. Если  $\text{cov}(\xi, \eta) \neq 0$ , то  $\xi$  и  $\eta$  - зависимы
  - iii. Если  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ , то неясно
- (h) Если  $\text{cov}(\xi, \eta) > 0$ , то зависимость прямая, если  $\text{cov}(\xi, \eta) < 0$ , то обратная

**Коэффициентом корреляции** случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  с конечными вторыми моментами, называется величина  $r_{\xi,\eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{E(\xi\eta) - E\xi E\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$

Свойства:

- (a)  $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$
- (b)
  - i. Если  $\xi$  и  $\eta$  - независимы, то  $r_{\xi,\eta} = 0$
  - ii. Если  $r_{\xi,\eta} \neq 0$ , то  $\xi$  и  $\eta$  - зависимы
  - iii. Если  $r_{\xi,\eta} = 0$ , то неясно
- (c)  $|r_{\xi,\eta}| \leq 1$
- (d)  $|r_{\xi,\eta}| = 1 \iff \eta = a\xi + b$  п.н.
- (e)
  - i. Если  $r_{\xi,\eta} = 1$ , то  $\eta = a\xi + b$  и  $a > 0$  (прямая линейная зависимость)
  - ii. Если  $r_{\xi,\eta} = -1$ , то  $\eta = a\xi + b$  и  $a < 0$  (обратная линейная зависимость)

Если  $r_{\xi,\eta} \neq 0$ , то говорят, что случайные величины коррелированы друг с другом. Если  $r_{\xi,\eta} > 0$ , то имеет прямая корреляция, если  $r_{\xi,\eta} < 0$  - обратная

47. Характеристическая функция случайной величины, ее свойства. Теорема о непрерывном соответствии (формулировка).

**Характеристической функцией** случайной величины  $\xi$  называется функция  $\varphi_\xi(t) =$

$$Ee^{it\xi}, t \in \mathbb{R}$$

Свойства:

- (a) Любая случайная величина  $\xi$  имеет характеристическую функцию, причем  $|\varphi_\xi(t)| \leq 1$
- (b) Пусть  $\varphi_\xi(t)$  - характеристическая функция случайной величины  $\xi$ . Тогда характеристическая функция случайной величины  $a + b\xi$  равна  $\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita}\varphi_\xi(bt)$
- (c) Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций
- (d) Пусть  $E\xi^k < \infty$ . Тогда  $\varphi_\xi(t) = 1 + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + o(|t|^k)$
- (e) Пусть  $E\xi^k < \infty$ . Тогда  $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$
- (f) Существует взаимно-однозначное соответствие между распределениями и характеристическими функциями. Зная характеристическую функцию можно восстановить распределение.
- (g) Теорема о непрерывном соответствии

**Th.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  слабо сходится к  $\xi$  тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций сходится поточечно к  $\varphi_\xi(t)$

$$\{\xi_n\} \Rightarrow \xi \iff \varphi_{\xi_n}(t) \longrightarrow \varphi_\xi(t) \forall t \in \mathbb{R}$$

48. *Характеристические функции стандартных распределений (Бернулли, биномиальное, Пуассона, нормальное). Следствия.*

Характеристические функции:

- Распределение Бернулли

|       |       |     |
|-------|-------|-----|
| $\xi$ | 0     | 1   |
| $p$   | $1-p$ | $p$ |

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\xi t} = e^{i \cdot 0 \cdot t}p(\xi=0) + e^{i \cdot 1 \cdot t}p(\xi=1) = 1-p+pe^{it}$$

- Биномиальное распределение

$$P(\xi=k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0, 1, \dots, n$$

Если  $t \in B_{n,p}$ , то  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n$ , где  $\xi_i \in B_p$  - независимы

$$\varphi_\xi(t) = (\varphi_{\xi_n}(t))^n = (1-p+pe^{it})^n$$

- Распределение Пуассона

$$P(\xi=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0, 1, \dots, n$$

$$\varphi_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Следствие: распределение Пуассона устойчиво относительно суммирования:  $\exists \xi \in \Pi_\lambda, \eta \in \Pi_\mu$ , они независимы. Тогда  $\xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}$

- Стандартное нормальное распределение

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- Нормальное распределение

$$\xi \in N(a, \sigma^2)$$

$$\varphi_\xi(t) = e^{ita} \varphi_\eta(\sigma t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Следствие: нормальное распределение устойчиво относительно суммирования: если  $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2), \eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$  и они независимы, то  $\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

49. Доказательство закона больших чисел Хинчина.

**Закон больших чисел Хинчина**

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным матожиданием. Тогда  $\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1$

Обозначим  $a = E\xi_1$

Ранее было доказано, что сходимость по вероятности к константе эквивалентно к слабой сходимости. Поэтому достаточно доказать, что  $\frac{S_n}{n} \Rightarrow a$

По теореме о непрерывном соответствии остается доказать, что  $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \rightarrow \varphi_a(t) = e^{ita}$

По четвертому свойству  $\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + itE\xi_1 + o(|t|) = 1 + ita + o(|t|)$

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = [\text{по второму свойству}] = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\left|\frac{t}{n}\right|\right)\right)^n \xrightarrow{\text{по лемме}} e^{ita} = \varphi_a(t)$$

50. Центральная предельная теорема. Вывод из нее предельной теоремы Муавра-Лапласа. Неравенство Берри-Ессена (формулировка).

**ЦПТ Ляпунова Th.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией ( $D\xi_1 < \infty$ ) и  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ . Тогда имеет место слабая сходимость:

$$\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \Rightarrow N(0, 1)$$

**Предельная теорема Муавра-Лапласа:** Пусть  $v_n(A)$  - число появления события  $A$  при  $n$  независимых испытаний,  $p$  - вероятность успеха при одном испытании,  $q = 1 - p$ . Тогда  $\frac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow N(0, 1)$

$v_n(A) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = S_n$ , где  $\xi_i \in B_p$  и независимы,  $E\xi_1 = p, D\xi_1 = pq$

$$\text{По ЦПТ } \frac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} = \frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \Rightarrow N(0, 1)$$

**Неравенство Берри-Эссена:** В условиях ЦПТ для  $\xi_1$  с конечным третьим моментом можно оценить так:

$$\left| p\left(\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < x\right) - F_0(x) \right| \leq C \frac{E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sqrt{n(D\xi_1)^3}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$