Лекция 2. Теорема Гаусса для магнитного поля

В электростатике было введено понятие потока вектора напряженности электрического поля. Аналлогичное понятие можно ввести для магнитного поля.

Def. Потоком вектора магнитной индукции (или магнитным потоком) через элемент площади dS называется скалярная величина, равная $d\Phi = [\vec{B}, d\vec{S}] = BdS\cos\alpha = B_n dS$

Полный магнитный поток через поверхность S равен сумме магнитных потоков через все элементы поверхности:

$$\Phi = \int_S [\vec{B}, d\vec{S}]$$

Теорема Гаусса для вектора индукции магнитного поля: поток вектора магнитной индукции сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S [\vec{B}, d\vec{S}] = 0, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

Эта теорема отражает факт непрерывности силовых линий магнитного поля, то есть отсутствия «магнитных зарядов», на которых бы начинались или заканчивались линии магнитной индукции

Так как линии вектора индукции магнитного поля не имеют ни начала, ни конца, то число силовых линий, входящих в ограниченную замкнутую поверхность, равно числу выходящих из нее

Пусть магнитное поле создано бесконечно длинным прямолинейным проводником с током. Рассчитаем циркуляцию вектора индукции магнитного поля по произвольному замкнутому контуру, охватывающему проводником

$$\oint_L [\vec{B}, d\vec{l}] = \oint_L Bdl\cos\alpha$$

$$dl\cos\alpha = rd\varphi, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Longrightarrow \oint_L [\vec{B}, d\vec{l}] = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_L d\varphi = \mu_0 I$$

Получаем теорему о циркуляции вектора магнитной индукции:

> Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром (или пронизывающих поверхность, опирающуюся на этот контур):
>
> $$\oint_L [\vec{B}, d\vec{l}] = \mu_0 \sum_k I_k$$

При вычислении суммы токов нужно учитывать знаки: положительными считаются те токи, направление которых связано с направлением обхода контура правилом правого винта, отрицательными - токи противоположного направления

Если контур в проводящей среде с непрерывным распределением тока, то $\oint_L [\vec{B}, d\vec{l}] = \mu_0 \int_S [\vec{j}, d\vec{S}]$

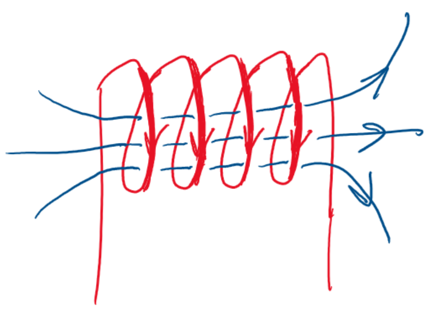
По теореме Стокса: $\oint_L [\vec{B}, d\vec{l}] = \int_S [\mathrm{rot}\vec{B}, d\vec{S}] = \mu_0 \int_S [\vec{j}, d\vec{S}]$

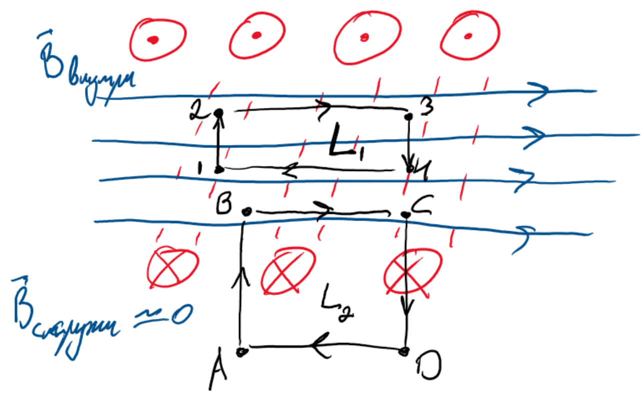
Таким образом, $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Ex. Найдем магнитное поле соленоида (катушки)

Возьмем контур L_1 (см. кривой рисуночек), в нем $\oint_{L_1} [\vec{B}, d\vec{l}] = (B_{23} - B_{41})l = 0 \Longrightarrow B_{23} = B_{41} = B_{\text{внутри}}$

В другом контур L_2 $\oint_{L_2} [\vec{B}, d\vec{l}] = B_{\text{внутри}} l = \mu_0 NI \Longrightarrow B_{\text{внутри}} = \mu_0 \dfrac{N}{l} I = \mu_0 nI$, где n - плотность витков катушки на длину катушки



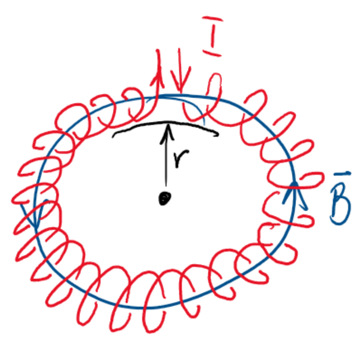


Получаем $\boxed{B = \mu_0 nI}$ - поле катушки пропорционально плотности витков

Ex. Найдем поле тороида. Из соображений симметрии очевидно, что линии индукции - окружность, концентричные с тороидом. В качестве контура L выберем окружность с радиусом r

$\oint_L [\vec{B}, d\vec{l}] = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI \Longrightarrow \boxed{B(r) = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}}$, где N - число витков

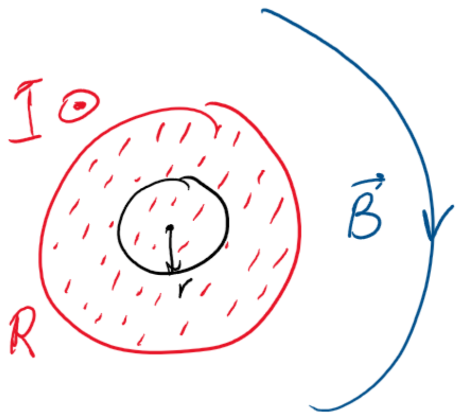
Вектора магнитной индукции будут являться касательными к окружности, концентричной тороиду

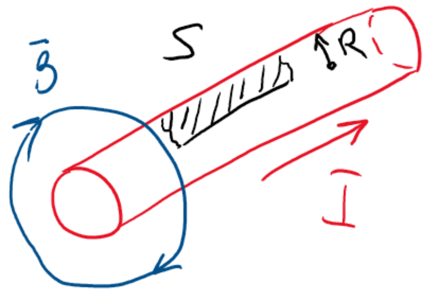


Ex. Постоянный ток $I = 10$ А, течет по длинному прямому проводнику круглого сечения. Найти магнитный поток через одну из половин осевого сечения проводника в расчете на один метр его длины.

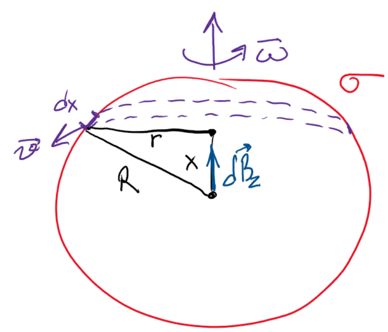
Возьмем контур L - окружность радиуса r, меньшего радиуса сечения проводника R. По теореме о циркуляции $\oint_L B(r)dr = \mu_0 I_{\text{внутри}}$. В силу симметрии считаем, что вектор $\vec{B}(r)$ равен по модулю на всем контуре L. Тогда получаем $B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{внутри}} = \mu_0 jS = \mu_0 j\pi r^2 \Longrightarrow B(r) = \dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$

Тогда поток через половину осевого сечения равен $\dfrac{\Phi}{l} = \displaystyle\int_0^R B(r)dr = \int_0^R \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}dr = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi}} = 10^{-6}\frac{\text{Вб}}{\text{м}}$





Ex. Непроводящая сфера радиуса $R = 50$ мм, заряженная равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ мкКл/м^2, вращается с угловой скоростью $\omega = 70$ рад/с вокруг оси, проходящей через ее центр. Найти магнитную индукцию в центре сферы



Сделаем разбиение сферы на колечки высотой dx, длина каждой такой колечки равна $2\pi r$, где $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Его площадь $2\pi r dx$. Точка на кольце движется с линейной скоростью $v = \omega r$.

В силу симметрии вектор магнитной индукции $d\vec{B}$, производимый кольцом, параллелен оси Oz. Тогда $dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\cdot v}{R^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\sigma 2\pi r\cdot dx\cdot \omega r}{R^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\sigma 2\pi\omega(R^2 - x^2)}{R^2}dx$

В интеграле $B = \displaystyle\int_{-R}^R dB = \frac{\sigma\mu_0\omega}{2}\int_{-R}^R \frac{(R^2 - x^2)}{R^2}dx = \frac{\sigma\mu_0\omega}{2}\frac{(R^2x - \frac{1}{3}x^3)}{R^2}\Big|_{-R}^R = \frac{\sigma\mu_0\omega}{2}\frac{(R^2x - \frac{1}{3}x^3)}{R^2}\Big|_{-R}^R =$
$\dfrac{\sigma\mu_0\omega}{2}\dfrac{4}{3}R = \boxed{\dfrac{2}{3}\mu_0 R\omega\sigma}$