

Th. $z : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, \exists непрерывные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

Тогда дифференциал функции представим как $\Delta z = Adx + Bdy + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $A, B \in \mathbb{R}$, α, β – бесконечно малые

$$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y) = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y) + z(x + \Delta x, y) - z(x, y)$$

По теореме Лагранжа:

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y) = z'_y(\eta)\Delta y$$

$$z(x + \Delta x, y) - z(x, y) = z'_x(\xi)\Delta x$$

По теореме о представлении функции ее пределом:

$$z'_x(\xi) = \lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ (\Delta x \rightarrow 0)}} z'_x(\xi) + \alpha$$

$$z'_y(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow y} z'_y(\eta) + \beta$$

Так как $z'_x(\xi), z'_y(\eta)$ непрерывны, то $\lim_{\xi \rightarrow x} z'_x(\xi) = \frac{\partial z}{\partial x}, \lim_{\eta \rightarrow y} z'_y(\eta) = \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\text{Тогда } \Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \right) \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \beta \right) \Delta y = \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

Заметим, что $\alpha \Delta x$ и $\beta \Delta y$ – бесконечно малые порядка выше, чем $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \iff$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta \rho} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta \rho} \right)^2} \quad \left| \frac{\Delta x}{\Delta \rho} \right| \leq 1, \left| \frac{\Delta y}{\Delta \rho} \right| \leq 1$$

$$\text{Сравним } \alpha \frac{\Delta x}{\Delta \rho} = \text{б.м.} \cdot \text{огран.} \xrightarrow{\Delta \rho \rightarrow 0} 0, \frac{\beta \Delta y}{\Delta \rho} \xrightarrow{\Delta \rho \rightarrow 0} 0$$

Функция, приращение которой представимо $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + o(\Delta \rho)$, называется дифференцируемой в точке (x, y) , линейная часть приращения называется полным дифференциалом

$$\text{Обозначение: } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$Ex. z = 3xy^2 + 4 \cos xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} = 3y^2 - 4 \sin xy \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=\text{const}} = 6xy - 4 \sin xy \cdot x$$

$$dz = (3y^2 - 4y \sin xy)dx + (6xy - 4x \sin xy)dy$$

4.3. Правила дифференцирования

Nota. При нахождении $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ (x_i - какая-либо переменная) дифференцирование проводится по правилам для функции одной переменной ($x_j \neq x_i$ считаются константами)

Выпишем более сложные правила

1* Сложная функция

Mem. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Def. Сложная функция двух переменных – $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y), v = v(x, y)$

Формула: Найдем $\frac{\partial z(u, v)}{\partial x}$ и $\frac{\partial z(u, v)}{\partial y}$

Th. $z = z(u, v)$, $u(x, y), v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по x, y

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$z \text{ дифференцируема} \iff \Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + \alpha \Delta u + \beta \Delta v$$

Зададим приращение Δx (представление Δz не должно измениться)

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta_x v + \alpha \Delta_x u + \beta \Delta_x v + v \quad | \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

По теореме Лагранжа: $\frac{\Delta_x u}{\Delta x}(\xi) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\text{В пределе: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Аналогично для $\frac{\partial z}{\partial y}$

Nota. Интересен случай $z = z(x, u, v)$, где $u = u(x), v = v(x)$

Здесь z является функцией одной переменной x

Обобщая правило на случай трех переменных, можем записать формулу полной производной, которая имеет смысл

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Ex. Пусть $w = w(x, y, z)$ – функция координат, $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ – функции времени w явно не зависит от времени, тогда $\frac{dw}{dt} = w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z$, где v_x – проекция скорости

Если $w = w(x, y, z, t)$, то $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} (w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z)$

2* Неявная функция одной переменной: пусть $F(x, y(x)) = 0$ – неявное задание $y = y(x)$

$$\text{Найдем } dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

$$\text{Отсюда } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

4.4. Производная высших порядков

Nota. Пусть $z = z(x, y)$ дифференцируема, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ также дифференцируемы, при этом в общем

$$\text{случае } \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y)$$

Тогда определены вторые частные производные

Def. Функция $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x}$ называется второй частной производной

Функции $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ называются чистыми производными, а $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$ – смешанными

Th. $z = z(x, y)$, функции $z(x, y), z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ определены и непрерывны в $\overset{\circ}{U}(M(x, y))$

Тогда $z''_{xy} = z''_{yx}$

Введем вспомогательную величину

$$\Phi = (z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y)) - (z(x, y + \Delta y) - z(x, y))$$

Обозначим $\phi(x) = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$

Тогда $\Phi = \phi(x + \Delta x) - \phi(x)$ – дифференцируема, непрерывна, как комбинация

По теореме Лагранжа $\phi(x + \Delta x) - \phi(x) = \phi'(\xi) \Delta x = (z'_x(\xi, y + \Delta y) - z'_x(\xi, y)) \Delta x$, где $\xi \in (x; x + \Delta x)$

Здесь z'_x дифференцируема также на $[y, y + \Delta y]$

Тогда по теореме Лагранжа $\exists \eta \in (y, y + \Delta y) \mid z'_x(\xi, y + \Delta y) - z'_x(\xi, y) = z''_{xy}(\xi, \eta) \Delta y$

Таким образом $\Phi = z''_{xy}(\xi, \eta) \Delta x \Delta y$

Перегруппируем Φ , далее аналогично для z''_{yx}

Тогда $z''_{xy}(\xi, \eta) \Delta x \Delta y = \Phi = z''_{yx}(\xi', \eta') \Delta x \Delta y$

4.5. Дифференциалы

Мет. 1. Полный дифференциал (1-ого порядка) функции $z = z(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \text{ – сумма частных дифференциалов}$$

Мет. 2. Инвариантность формы первого дифференциала функции одной переменной

$$dy(x) = y'(x) dx \stackrel{x=\phi(t)}{=} y'(t) dt$$

Th. Инвариантность полного дифференциала первого порядка.

$z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ - дифференциалы

$$\text{Тогда } dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Mem. $d^2y(x) \stackrel{def}{=} d(dy(x)) = y''(x)dx^2 \neq y''(t)dt^2$

Def. : $z = z(x, y)$ – дифференцируема и $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ – дифференцируемая функция

Тогда второй полный дифференциал равен $d^2z \stackrel{def}{=} d(dz)$

$$\text{Формула: } d^2z = d \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy = (z'_x dx)'_x dx + (z'_y dy)'_x dx +$$

$$(z'_x dx)'_y dy + (z'_y dy)'_y dy = (z'_x)'_x (dx)^2 + (z'_y)'_x dx dy + (z'_x)'_y dy dx + (z'_y)'_y (dy)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy +$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2$$

Nota: Заметим формальное сходство с биномом Ньютона: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$$\text{Введем условное обозначение } \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2$$

Тогда $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z$, здесь $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2$ – оператор второго полного дифференцирования

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n z \text{ – дифференциал } n\text{-ого порядка}$$

Nota: Можно ли утверждать, что $d^2z(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z \stackrel{x=x(u,v), y=y(u,v)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 z$?

Нет, нельзя (d^2z не инвариантен при замене)

Покажем, что не выполняется в простом случае: $z = z(x, y) = z(x(t), y(t))$ – параметризация.

Геометрически, это выбор пути в области D от точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x, y)$

Итак:

$$d(dz) \stackrel{z-\Phi_1\Pi}{=} (dz)'_t dt = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)'_t dt = \begin{bmatrix} dx(t) = \frac{dx}{dt} dt \\ dy(t) = \frac{dy}{dt} dt \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)'_t dt^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right)'_t dt^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)'_t dt^2 = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_t \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right)'_t \right) dt^2 + \left(\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)'_t \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right)'_t \right) dt^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dt^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) dt^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy dx = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y$$

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases} \quad \text{— линейная параметризация}$$

Lab. Дать инвариантность при линейной параметризации

$$\text{Причем, это свойство верно для } d^n z, \text{ то есть если } \begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases} \quad (\text{например}), \text{ то } d^n z \stackrel{z=z(t)}{=} z^{(n)}(t) dt$$

4.6. Формула Тейлора

$$\text{Mem. } f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \begin{cases} o((x - x_0)^n) & \text{— ост. в форме Пеано} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} & \text{— ост. в форме Лагранжа} \end{cases}$$

В дифференциалах:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \text{остаток}$$

Формула Тейлора для $z = z(x, y)$ в окрестности $M_0(x_0, y_0)$ (как раньше $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$)

$$z(M \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0)) = z(M_0) + \frac{dz(M_0)}{1!} + \cdots + \frac{d^n z(M_0)}{n!} + o((\Delta\rho)^n)$$

Nota. Формула выше верна, если $z = z(x, y)$ непрерывна со своими частными производными до $n+1$ порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(M_0(x_0, y_0))$, где $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$