

Лекция 10

Преобразование случайных величин

Стандартизация случайной величины

Def. Пусть имеется случайная величина ξ . Соответствующей ей стандартной величиной называется случайная величина $\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sigma}$

Свойства:

$$E\eta = 0; D\eta = 1$$

$$E\eta = E\frac{\xi - E\xi}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}(E\xi - E\xi) = 0$$

$$D\eta = D\frac{\xi - E\xi}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}D\xi = 1$$

Стандартизованная случайная величина не имеет единиц измерения, таким образом, ее свойства от них не зависят

Задача: пусть имеется функция $g(x)$ и случайная величина ξ , $\eta = g(\xi)$. Определить ее характеристики

Nota. Если ξ - дискретная случайная величина, то ее законы распределения находятся просто: значения x_i в верхней строке заменяем $g(x_i)$, вероятности остаются прежние. Поэтому будем рассматривать непрерывной случайной величины ξ

Nota. Возможна ситуация, когда ξ - абсолютно непрерывная случайная величина, $g(x)$ - непрерывна, но $g(\xi)$ имеет дискретное распределение

Линейное преобразование

Th. Пусть ξ имеет плотность $f_\xi(x)$, тогда $\eta = a\xi + b$, где $a \neq 0$, имеет плотность $f_\eta(x) = \frac{1}{|a|}f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

$$\text{Пусть } a > 0, \text{ тогда } F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(a\xi + b < x) = p\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t)dt =$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{y-b}{a} \quad dt = \frac{1}{a}dy \quad y = at + b \\ y(-\infty) = -\infty \quad y\left(\frac{x-b}{a}\right) = x \end{array} \right] = \int_{-\infty}^x \frac{1}{a}f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right)dy \Rightarrow f_\eta(x) = \frac{1}{|a|}f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Пусть $a < 0$, тогда $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(a\xi + b < x) = p(\xi > \frac{x-b}{a}) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{\infty} f_\xi(t)dt =$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{y-b}{a} \quad dt = \frac{1}{a}dy \quad y = at + b \\ y(\infty) = -\infty \quad y(\frac{x-b}{a}) = x \end{array} \right] = - \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} f_\xi(\frac{y-b}{a}) dy \Rightarrow f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi(\frac{x-b}{a})$$

Следствие

1) Если $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $\eta = \gamma\xi + b \in N(a\gamma + b; \gamma^2\sigma^2)$

Так как $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$

Тогда $f_\eta(x) = \frac{1}{|\gamma|} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{x-b}{\gamma}-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|\gamma|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b-a\gamma)^2}{2\sigma^2\gamma^2}} \Rightarrow \eta \in N(b+a\gamma; \sigma^2\gamma^2)$

2) Если $\eta \in N(0, 1)$ - стандартное нормальное распределение, то $\xi = \sigma\eta + a \in N(a, \sigma^2)$

3) Если $\eta \in U(0, 1)$ - стандартное равномерное распределение и $a > 0$, то $\xi = a\eta + b \in U(b, a+b)$

4) Если $\xi \in E_\alpha$, то $\alpha\xi \in E_1$

Монотонное преобразование

Th. Пусть $f_\xi(x)$ - плотность случайной величины ξ , $g(x)$ - строго монотонная функция. Тогда случайная величина $\eta = g(\xi)$ имеет плотность

$$f_\eta(x) = |h'(x)| f_\xi(h(x)), \quad \text{где } h(g(x)) = x$$

Если $g(x)$ не является монотонной функцией, то поступаем следующим образом: разбиваем $g(x)$ на интервалы монотонности, для каждого i -ого интервала находим $h_i(x)$ и плотность случайной величины ищем по формуле Смирнова: $f_\eta(x) = \sum_{i=0}^n |h'_i(x)| f_\xi(h_i(x))$

Квантильное преобразование

Th. 1. Пусть функция распределения случайной величины ξ $F_\xi(x)$ - непрерывная функция. Тогда $\eta = F(\xi) \in U(0, 1)$ - стандартное равномерное распределение

Ясно, что $0 \leq \eta \leq 1$

а) $F(x)$ - строго возрастающая функция. Тогда $\exists F^{-1}(x)$ - обратная, $F_\eta(x) = p(\eta < x) =$

$$p(F(\xi) < x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ p(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x, & 0 \leq x \leq 1 - \text{функция распределения } U(0, 1) \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

б) $F(x)$ - не является строго возрастающей функцией - то есть существуют участки постоянства, в этом случае определим F^{-1} как $F^{-1}(x) = \min_t (t \mid F(t) = x)$ - то есть берем самую левую точку такого интервала

Тогда снова будет при $0 \leq x \leq 1$ $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(F(\xi) < x) = F(F^{-1}(x)) = x$

Сформулируем обратную теорему: пусть $F(x)$ - функция распределения (необязательно непрерывная) случайной величины ξ , обозначим $F^{-1}(x) = \inf_t (t \mid F(t) \geq x)$.

В случае непрерывной $F(x)$ это определение совпадает с предыдущим

Th. 2. Пусть $\eta \in U(0, 1)$ - стандартное равномерное распределение, $F(x)$ - произвольная функция распределения. Тогда $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$

Данное преобразование $\xi = F^{-1}(\eta)$ называют квантильным

Доказательство аналогично предыдущей теореме

Смысл: датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение, из теоремы следует, что при помощи датчика случайных чисел и квантильного преобразования мы сможем смоделировать любое нужно распределение

Ex. 1. Смоделируем показательное распределение E_α : $F_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$\eta = 1 - e^{-\alpha x}$, $e^{-\alpha x} = 1 - \eta$, $x = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta)$ - функция, обратная к $F_\alpha(x)$

Если $\eta \in U(0, 1)$, то $\xi = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta) \in E_\alpha$

Ex. 2. $\xi \in N(0, 1)$, $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

Пусть $F_0^{-1}(x)$ - функция обратная к $F_0(x)$

Если $\eta \in U(0, 1)$, то $F_0^{-1}(\eta) \in N(0, 1)$

Характеристики преобразованной случайной величины

Th. Если ξ - дискретная случайная величина, то $Eg(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p(\xi = x_i)$

Для непрерывной случайной величины $Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx$

Свойства моментов

- 1) Если $\xi \geq 0$, то $E\xi \geq 0$
- 2) Если $\xi \leq \eta$, то $E\xi \leq E\eta$

$$\xi \leq \eta \implies \eta - \xi \geq 0 \implies E(\eta - \xi) \geq 0 \implies E\eta - E\xi \geq 0 \implies E\eta \geq E\xi$$

- 3) Если $|\xi| \leq |\eta|$, то $E|\xi|^k \leq E|\eta|^k$
- 4) Если существует момент m_t случайной величины ξ , то существует m_s при $s < t$ (при условии, что интеграл/сумма сходятся)

Пусть $s < t$. Тогда $|x|^s \leq \max(1, |x|^t) \leq 1 + |x|^t$, так как при $|x| < 1$, $|x|^s \leq 1$ и при $|x| \geq 1$, $|x|^s \leq |x|^t$
 $E|\xi|^s \leq E|\xi|^t + 1$ и если $E|\xi|^t$ существует (конечно), то $\exists E|\xi|^s$

Th. Неравенство Йенсена. Пусть функция $g(x)$ выпукла вниз, тогда для любой случайной величины ξ

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

Nota. Если $g(x)$ выпукла вверх, знак неравенства меняется

Если $g(x)$ выпукла вниз, то в любой ее точке, можно провести прямую, лежащую не выше графика функции. То есть для любой x_0 существует $k(x_0)$ такой, что $g(x) \geq g(x_0) + k(x_0)(x - x_0)$

Пусть $x_0 = E\xi$, $g(E\xi) \geq g(E\xi) + k(E\xi)(x - E\xi)$

$$Eg(\xi) \geq Eg(E\xi) + k(E\xi)(E\xi - E\xi)$$

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

Следствие:

$$Ee^\xi \geq e^{E\xi}, \quad E\xi^2 \geq (E\xi)^2, \quad E|\xi| \geq |E\xi|, \quad E \ln(\xi) \leq \ln(E\xi), \quad E\frac{1}{\xi} \geq \frac{1}{E\xi} \text{ при } \xi > 0$$

Ех. на формулу Смирнова: дана плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{4}{3x^2}, & 1 \leq x \leq 4, 0 \\ x > 4 \end{cases}$$

Найти f_η для $\eta = |\xi - 2|$

Решение

$$\xi \in [1, 4], \quad \eta \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1 \implies h_1(\eta) = \eta + 2 \text{ и } h_2(\eta) = 2 - \eta & - 2 \text{ ветви} \\ 1 < \eta \leq 2 \implies h_1(\eta) = \eta + 2 & - 1 \text{ ветвь} \end{cases}$$

$$h'_1(\eta) = 1, h'_2(\eta) = -1 \quad |h'_1(\eta)| = |h'_2(\eta)| = 1$$

$$f_\eta(x) = \sum_i |h'_i(x)| f_\xi(h_i(x))$$

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{4}{3} \left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} \right), & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4}{3} \frac{1}{(x+2)^2}, & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

