Мет. ЛДУ$_2$

1) Решим $y''+py'+qy=0$ (ХрУ: $\lambda^2+p\lambda+q=0$)

ФСР для всех случаев:

1* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \longrightarrow \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$

2* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$

3* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \longrightarrow \{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

$\overline{y} = l_{\{\text{ФСР}\}}$

2) Изначально $y''+py'+qy=f(x)$

Доказали: $y(x)=\overline{y}+y^*$, где $\overline{y}=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i$ - вектора из ФСР, а y^* – частное решение (какое-либо) ЛНДУ

Nota. Рассмотрим два метода поиска y^* для ЛДУ$_2$

1. Метод неопределенных коэффициентов для случая специальной правой части
2. Метод (Лагранжа) вариации произвольных постоянных (универсальный)

1. **Специальная правая часть**

Ex. $y''-3y'+3y=2e^{3x} \quad (\heartsuit)$

Наводящие соображения: заметим, что $y=e^{ax}$ не меняет свой вид при дифференцировании, так же как и $y=P_n(x)$, $y=A\cos bx + B\sin bx$

Имеет смысл искать частные решения для ($\heartsuit$) в виде $y=Ae^{3x}$

$(Ae^3x)''-3(Ae^{3x})'+2Ae^{3x}=2e^{3x}$

$9A-9A+2A=2 \Longrightarrow A=1$, то есть $y^*=e^{3x}$

Nota. Если правая часть ЛНДУ содержит произведения $e^{ax}, P_n(x), \cos bx, \sin bx$, то y^* ищем в виде специальной правой части

Def. Специальная правая часть (СПЧ) – функция $f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$ (обозначим $k=a\pm ib$)

Частные случаи:

1. $f(x)=P_n(x)e^{ax} \quad (b=0)$
2. $f(x)=A\cos bx + B\sin bx$ – гармоника $\quad (a=0, n=m=0)$
3. $f(x)=P_n(x) \quad (a=b=0)$

Метод: Решение ищется в виде $y^*=e^{ax}(\overline{P}_l\cos bx + \overline{Q}_l(x)\sin bx)$, где a,b – коэффициенты СПЧ, $l=\max(m,n), \overline{P}_l, \overline{Q}_l$ – многочлены в неопределенных коэффициентах

Ex. 1. ($\heartsuit$): $y''-3y'+3y=2e^{3x}=e^{3x}(2\cos 0x) \quad (k=3\pm 0=3)$

$y^*=e^{3x}(\overline{P}_{l=0}(x)\cos 0x)=e^{3x}\cdot A$

Ex. 2. Однако, для этого уравнения: $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

СПЧ: $e^{2x} = e^{2x}(1\cos 0x + B\sin 0x) \quad k = a \pm ib = 2$

$$\left.\begin{aligned} y^* &= Ae^{2x} \\ y^{*\prime} &= 2Ae^{2x} \\ y^{*\prime\prime} &= 4Ae^{2x} \end{aligned}\right\} \text{ДУ} \longrightarrow \begin{aligned} 4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} + 2Ae^{2x} &= e^{2x} \\ 4A - 6A + 2A &= 1 \\ 0A &= 1 \end{aligned} \quad \text{– нельзя найти } A$$ 🤯

Решим ХрУ: $\lambda_2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

В этом случае число k, соответствующее СПЧ, совпадает с корнем ХрУ

Исследуем ситуацию на примере СПЧ $f(x) = P_n(x)e^{ax}$

Пусть дано ДУ: $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}$

Для него ХрУ: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2}$ - корни

Ищем $y^* = \overline{P}_n(x)e^{ax}$

$y^{*\prime} = \overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\overline{P}_n(x)e^{ax}$

$y^{*\prime\prime} = \overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\overline{P}_n(x)e^{ax}$

Получаем:

$\overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\overline{P}_n(x)e^{ax} + (\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\overline{P}_n(x)e^{ax})p + \overline{P}_n(x)e^{ax}q = P_n(x)e^{ax}$

$\overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + (2a+p)\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + (a^2 + pa + q)\overline{P}_n(x)e^{ax} = P_n(x)e^{ax}$

$\overline{P}_{n-2}(x) + (2a+p)\overline{P}_{n-1}(x) + (a^2 + pa + q)\overline{P}_n(x) = P_n(x)$

Заметим, что если a – корень ХрУ, то есть $a \pm ib = a = k = \lambda_i$ (пусть 1-ой кратности), то $a^2 + pa + q = 0$ и степень левой части понижается до $n - 1$

Если a – корень ХрУ 2-ой кратности, то есть $a^2 + pa + q = \left(a + \dfrac{p}{2}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow 2a + p = 0$, то степень левой части понижается на 2

Чтобы сделать уравнение для $\overline{P}_n$ решаемым, домножим y^* на x^r, где r – число совпадений $k = a \pm ib$ с корнем ХрУ λ_i (другими словами, кратность λ_i, с которым совпадает k)

Окончательно, метод выглядит так: для уравнения $y'' + py' + qy = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$, где $\lambda_{1,2}$ – корни ХрУ, $k = a \pm ib$

Частное решение выглядит так: $\boxed{y^* = x^r e^{ax}(\overline{P}_l(x)\cos bx + \overline{Q}_l(x)\sin bx}$, где $l = \max(m, n)$, r - кратность корня ХрУ $\lambda_i = k$

Обобщим для ЛДУ$_n$: $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = f(x)$

ХрУ выглядит так: $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_n = 0$

Правило построения ФСР для $\overline{y}$, общего решения однородного ДУ:

1. Всякому λ_i – одиночному $\mathbb{R}$-корню ХрУ сопоставляем $y_i = e^{\lambda_i x}$
2. $\mathbb{R}$-корню λ кратности s сопоставляем набор $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\} = \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{s-1}e^{\lambda x}\}$
3. Всякой одиночной паре $\lambda_{j_1,j_2} = \alpha_j \pm i\beta_j$ соответствует пара $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$
4. Комплексной паре $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности t соответствует набор

$\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{t-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{t-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

Nota. Количество векторов y_i в ФСР равно порядку n дифференциального уравнения
Специальная правая часть ищется в виде $y^* = x^r e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$, где r - кратность $\mathbb{R}$-корня или $\mathbb{C}$-пары, с которыми совпадает $k = a \pm ib$

Ex. Вернемся к $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

$$\left.\begin{aligned} &y^* = Ax^1e^{2x} \\ &y^{*\prime} = Ae^{2x}2Axe^{2x} \\ &y^{*\prime\prime} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} \end{aligned}\right\} \to (4-6+2)Axe^{2x} + (4-3)Ae^{2x} = e^{2x} \quad A = 1$$

$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{2x} + xe^{2x}$

Лагранжа

Met. Решение ЛДУ$_1$: $y' + py = f(x)$

1) Решаем ЛОДУ $y' + py = 0$, получаем ФСР $\overline{y} = Cy_0$
2) Решаем ЛНДУ, ищем решения в виде $y(x) = C(x)y_0$, получаем $C'(x)y_0 = f(x) \to C(x)$

Nota. Введем аналогичный метод для ЛДУ$_2$:

1 этап) $y'' + py' + qy = 0$ – ЛОДУ, $\lambda_{1,2}$ – корни, соответствующие ФСР $\{y_1, y_2\}$
Получаем общее решение $\overline{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2$

2 этап) Варьируем C_1 и C_2, но теперь нужны два условия для их определения. Одним из них является само ДУ

Ex. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$

$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$

$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + y^*$

$(g(x) + C_1)e^x + (h(x) + C_2)e^{2x} = C_1e^x + C_2e^{2x} + g(x)e^x + h(x)e^{2x}$

Подберем g, h: $\underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{g}e^x + \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{h}e^{2x} = e^{3x}$ или $\underbrace{-e^{2x}}_{g}e^x + \underbrace{2e^x}_{h}e^{2x} = e^{3x}$

Заметим, что $C_1'(x)$ во втором случае $g' = -2e^{2x}$, а $C_2' = 2e^x$

Тогда $C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = -2e^{3x} + 2e^{3x} = 0$

Nota. Подставим $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ в ДУ

Получаем производную $y'(x) = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'$

Требуем $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$

Тогда вторая производная: $y''(x) = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''$

$C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2'' + pC_1(x)y_1' + pC_2(x)y_2' + qC_1(x)y_1 + qC_2(x)y_2 = f(x)$

$C_1(x)\underbrace{Ly_1}_{=0} + C_2(x)\underbrace{Ly_2}_{=0} + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$

<u>Итак</u>, система для определения $C_1(x), C_2(x)$: $\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=W} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{по Крамеру}} \begin{matrix} C_1'(x) = \frac{W_1}{W} \\ C_2'(x) = \frac{W_2}{W} \end{matrix}$$

Nota. Обобщив метод на n-ый порядок систему, получим

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(x) \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

<u>Lab.</u> Доказать, что $\overline{y} + y^*$ - общее решение ЛНДУ