

5.6. Поверхностные интегралы

1* Поверхностные интегралы I рода (по участку поверхности)

Задача: найти массу поверхности. Дана функция $u = u(x, y, z)$ (ее физический смысл - плотность)

Элементарная масса: $dm = u_{\text{ср.}}(\xi, \eta, \zeta)d\sigma$, $d\sigma$ – элемент поверхности

$$M = \iint_S dm = \iint_S u(x, y, z) d\sigma \text{ – поверхностный интеграл I рода}$$

(а) Дробление S на элементы $\Delta\sigma_k$ координатными плоскостями $x = x_i, y = y_j$

(б) Определение средней точки (ξ_k, η_k, ζ_k)

(с) Интегральная сумма $v_n = \sum_{k=1}^n u(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta\sigma_k$

(d) **Def.** $\iint_S u(x, y, z)d\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau = \max \Delta\sigma_k \rightarrow 0}} v_n$ – поверхностный интеграл первого рода

Свойства: смена обхода поверхности S не меняет знака интеграла: $\iint_{S^+} u d\sigma = \iint_{S^-} u d\sigma$

Вычисление

Мет. Криволинейный интеграл $\int_L f(x, y)dl$ мы вычисляли через параметризацию

кривой одной переменной $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$, замену элементарного участка $dl =$

$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}|dt|$ и функции $f(x, y)$ на $\tilde{f}(t)$. Получаем $\iint_L f(x, y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{f}(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}|dt|$

Аналогично для поверхностного: $\iint_S u(x, y, z)d\sigma$

(а) Параметризация S : самая частая – $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ – пределы интегрирования

(б) $d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} |dxdy|$, но так как в двойном интеграле договорились, что $dxdy > 0$ (площадь), модуль можно не ставить (область D проходится в направлении против часовой стрелки)

(с) $u(x, y, z) = \tilde{u}(x, y, z(x, y)) = \tilde{u}(x, y)$
 $\iint_S u(x, y, z)d\sigma = \iint_{D^+} \tilde{u}(x, y)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy$

Ex. $S: x^2 + y^2 = z^2, z = 0, z = 1$

$u(x, y, z) = z$

$$\iint_S z d\sigma = \left[\begin{array}{l} S: z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ D: \text{круг, } x^2 + y^2 = 1 \\ d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy \end{array} \right] = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{2}dxdy = [\text{переход в ПСК}] =$$

$$\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\rho \rho \, d\rho = \sqrt{2} 2\pi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{2}$$

2* Поверхностный интеграл II рода.

Задача: нахождение потока

Будем говорить о потоке вектора $\vec{F} = (P, Q, R)$ через площадку S в направлении нормали \vec{n}^+ или \vec{n}^-

Если задано поле жидких скоростей, то потоком называют количество жидкости, протекающей через S за время Δt

В простой ситуации поток $\Pi = FS$ ($\vec{F} \perp S, \vec{F} = \text{const}$)

В общем случае \vec{F} – переменная, S – искривленная и $\angle \vec{F}, S \neq \frac{\pi}{2}$

Переходим к вычислению элементарного потока $d\Pi$

$d\sigma$ – малый элемент поверхности (почти плоский)

В пределах $d\sigma$ \vec{F} меняется мало, за среднее берем $\vec{F} = (P, Q, R)$, где $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$

Разберемся с наклоном: если площадка перпендикулярна, то $d\Pi = Fd\sigma$, но в нашем случае высота цилиндра равна проекции \vec{F} на \vec{n} : $\vec{F} \cdot \vec{n} = F \cos \varphi$, где \vec{n} – единичный вектор нормали, φ – угол между нормалью и потоком, $d\Pi = (\vec{F}, \vec{n})d\sigma = F_n d\sigma$

Пусть $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, тогда $d\Pi = (\vec{F}, (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma))d\sigma = (P \cos \alpha, Q \cos \beta, R \cos \gamma)d\sigma$

Итак, $\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} d\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} F_n d\sigma = \iint_{S^{\vec{n}}} (\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \iint_{S^{\vec{n}}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)d\sigma$

Но, еще нет координатной записи подынтегрального выражения. Спроектируем $d\sigma$ на координатные плоскости: сначала разрежем поверхность S на элементы плоскостями $x = \text{const}, y = \text{const}$ (и, таким образом, уточним форму $d\sigma$). Так как $d\sigma$ мал, то можно считать его плоским параллелограммом

Тогда $\cos \gamma d\sigma = \pm dx dy$ (γ – угол между нормалью и осью Oz)

Нашли последнее слагаемое $\iint_{S^{\vec{n}}} R \cos \gamma d\sigma$ в исходном интеграле (I рода, так как по участку $d\sigma$)

Найдем $\iint_{S^{\vec{n}}} Q \cos \beta d\sigma$, разобьем поверхность на участки $d\sigma$ плоскостями $x = \text{const}, y = \text{const}$

Аналогично $\cos \beta d\sigma = \pm dx dz$

Тогда в $\iint_{S^{\vec{n}}} P \cos \alpha d\sigma$ $\cos \alpha d\sigma = \pm dy dz$

Окончательно, поток $\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} \pm P dy dz \pm Q dx dz \pm R dx dy = \iint_{S^{\vec{n}}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)d\sigma$ – связь интегралов I и II рода

Nota. Формулу интеграла можно получить еще так: $(\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \vec{F} \vec{n} d\sigma = \vec{F} d\vec{\sigma}$, где $d\vec{\sigma} = (\pm dy dz, \pm dx dz, \pm dx dy)$

Def. $I = \iint_{S^{\vec{n}}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{\sigma} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau = \max \Delta s_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \vec{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k$ – поверхностный интеграл второго рода ($\Delta s_k = \Delta x \Delta y$ – любого знака, согласованного с обходом)

Свойства: интеграл меняет знак при смене обхода с \vec{n}^+ на \vec{n}^-

Вычисление:

(а) Параметризация S :

- для $\iint R dx dy$ $z = z(x, y)$
- для $\iint Q dx dz$ $y = y(x, z)$
- для $\iint P dy dz$ $x = x(y, z)$

Пределы интегрирования: $D_{xy} = \text{проект.}_{Oxy} S$ для $\iint R dx dy$, $D_{xz} = \text{проект.}_{Oxz} S$ для

$\iint Q dx dz$, $D_{yz} = \text{проект.}_{Oyz} S$ для $\iint P dy dz$

(b) $dx dy \rightarrow \pm dx dy$, если обход D_{xy} в направлении против часовой стрелки ($+dx dy$, если угол между \vec{n} и Oz острый, иначе $-dx dy$, аналогично с другими в зависимости от угла между нормалью и осью)

(c) $R(x, y, z) = \tilde{R}(x, y, z(x, y))$, $P(x, y, z) = \tilde{P}(x(y, z), y, z)$, $Q(x, y, z) = \tilde{Q}(x, y(x, z), z)$

(d) $\iint_{S^{\vec{n}}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{\sigma} = \iint_D \pm \tilde{P} dy dz \pm \tilde{Q} dx dz \pm \tilde{R} dx dy = \iint_{D_{yz}} \pm \tilde{P} dy dz + \iint_{D_{xz}} \pm \tilde{Q} dx dz + \iint_{D_{xy}} \pm \tilde{R} dx dy$