Мет. $y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$

Для начала $y'' + py' + qy = 0$ – ЛОДУ$_2$

$C_2'(x) = C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$

Рассмотрим три случай для $\lambda_{1,2}$:

1. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ - случай различных вещественных корней
   $$C_2(x) = \int C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = \frac{C_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_2 = \underbrace{\frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}_{\tilde{C_1}} e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} + C_2$$
   Тогда, $y(x) = C_2(x) e^{\lambda_2 x} = (\tilde{C_1} e^{\lambda_1 - \lambda_2} x + C_2) e^{\lambda_2 x} = \boxed{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$ – решение ЛОДУ, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ – случай вещественных кратных корней
   $$C_2'(x) = C_1 e^{0x} = C_1 \Longrightarrow C_2(x) = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$$
   $y(x) = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x} = \boxed{C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} = y(x)}$ – решение ЛОДУ, $\lambda_1 = \lambda_2$
3. $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ – случай комплексно сопряженных корней
   Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то аналогично первому случаю $y(x) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x + C_2 e} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ – решение ЛОДУ
   Получим $\mathbb{R}$-решения:
   $y(x) = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)) = e^{\alpha x}(C_1 + C_2)\cos\beta x + e^{\alpha x} i (C_1 - C_2)\sin\beta x$
   $\operatorname{Re} y(x) = \underbrace{(C_1 + C_2) e^{\alpha x}\cos\beta x,}_{u(x)} \operatorname{Im} y(x) = \underbrace{(C_1 + C_2) e^{\alpha x}\sin\beta x}_{v(x)} \quad y(x) = u(x) + iv(x)$
   Так как $y(x)$ – решение ЛОДУ:
   $u'' + iv'' + pu' + ipv\prime + qu + iqv = 0$
   $(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv\prime + qv) = 0 \quad \forall x \in [\alpha; \beta]$, то есть $z \in \mathbb{C}$ и $z = 0$
   $$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0, \\ v'' + pv\prime + qv = 0 \end{cases}$$
   Тогда можно считать решением $y(x) = u(x) + v(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$ - решение ЛОДУ, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

Nota. Ни про одно из полученных решений нельзя сказать, что оно общее (см. след. пункт)
Также еще не решено ЛНДУ$_2$

4.5.3. Свойства решений ЛДУ$_2$

Def. $Ly \overset{def}{=} y''(x) + py'(x) + qy(x)$ - линейней дифференциальный оператор
$L : E \subset C^2_{[a;b]} \to F \subset C_{[a;b]}$
Nota. Все определения линейного пространства, базиса, линейной независимости, линейной оболочки сохраняются. А ЛОДУ$_2$ записывается как $Ly = 0$, ЛНДУ$_2$ – $Ly = f(x)$

Th. 1. $\exists y_1, y_2$ - частные решения ЛОДУ, то есть $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$
Тогда $Ly = 0$, если $y = C_1y_1 + C_2y_2$

$Ly = y'' + py' + qy = (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1Ly_1 + C_2Ly_2 = 0$

Def. y_1, y_2 - линейно независимы $\iff C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \implies \forall C_1 = 0 \iff \nexists k : y_2 = ky_1, k \in \mathbb{R}$

Rem. Для определения линейной независимости в Линейной алгебре мы использовали $\operatorname{rang} A$ или $\det A$

Введем индикатор линейной независимости. Заметим, что если y_1, y_2 - линейно зависимы, то y_1', y_2' - линейно зависимы

Def. $W \overset{\text{обозн}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1(x)}{dx} & \frac{dy_2(x)}{dx} \end{vmatrix}$ - определитель Вронского или вронскиан

Th. 2. y_1, y_2 - линейно зависимы $\implies W = 0$ на $[a; b]$

$$\begin{aligned} y_2 &= ky_1 \\ y_2' &= ky_1' \end{aligned} \implies W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

Th. 3. $x_0 \in [a; b]$, пусть $W(x_0) = W_0$. Тогда:
$W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \forall x \in [a; b]$
$W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ - решения ЛОДУ,

$$\begin{cases} Ly_1 = 0 & | \cdot y_2 \\ Ly_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1''y_2 + py_1'y_2 + qy_1y_2 = 0 \\ y_2''y_1 + py_2'y_1 + qy_1y_2 = 0 \end{cases}$$

$(y_1''y_2 - y_2''y_1) + p(y_1'y_2 - y_2'y_1) = 0$

$W'(x) + pW(x) = 0$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -pdx$$

$W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} pdx}$

$W_0 = Ce^{-\int_{x_0}^{x_0} pdx} = C$

Тогда $W(x) = W_0e^{-\int_{x_0}^{x} pdx} \iff \left[\begin{aligned} &W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \\ &W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \end{aligned}\right. \quad \forall x \in [a; b]$

Th. 4. y_1, y_2 – линейно независимы $\Longrightarrow W(x) \neq 0$ на $[a;b]$

Докажем от противного

Пусть $\exists x_0 \in [a;b] \mid W(x_0) = 0 \Longrightarrow W(x) = 0\ \forall x \in [a;b] \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\ \forall x \in [a;b]$

Можно поделить на y_1^2, так как y_1, y_2 - линейно независимы. Тогда $\dfrac{W}{y_1^2} = \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \Longrightarrow \dfrac{y_2}{y_1} = k \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow y_2 = ky_1$ – линейно зависимы, противоречие

Nota. Общее решение ЛОДУ$_2$ – это семейство всех решений (интегральных кривых), каждое из которых проходит через точку $(x_0, y_0) \in D$ и ему соответствует свой и единственный набор (C_1, C_2)

Th. 5. y_1, y_2 – линейно независимые решения ЛОДУ, тогда $\overline{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2$ – общее решение ЛОДУ$_2$

Нужно убедиться, что через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит и только одна кривая $\overline{y}(x_0)$

Зададим НУ: $\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}, \end{cases}$ тогда $\begin{matrix} \overline{y}(x_0) = C_1y_{10} + C_2y_{20} \\ \overline{y}'(x_0) = C_1y_{10}' + C_2y_{20}' \end{matrix}$ – задача Коши

Знаем, что $\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ – решение (просто, не общее)

Тогда в x_0 $\begin{cases} C_1y_{10} + C_2y_{20} = \overline{y}_0 \\ C_1y_{10}' + C_2y_{20}' = \overline{y}_0' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y}_0 \\ \overline{y}_0' \end{pmatrix}$ - система крамеровского типа

$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = W_0 \neq 0 \Longleftrightarrow \exists!(C_1, C_2)$ – решение СЛАУ

Таким образом через всякую x_0 проходит одна кривая $\overline{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2$

Nota. Вывод: если найдены какие-либо линейно независимые y_1, y_2, то общее решение ЛОДУ$_2$ будет $C_1y_1 + C_2y_2 = \overline{y}$

Def. Такие $\{y_1, y_2\}$ называется ФСР ЛОДУ$_2$

Nota. Тогда, найденные решения ЛОДУ – все общие

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$: ФСР $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}, \lambda_i \in \mathbb{R}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: ФСР $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$
3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$: ФСР $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

Th. 6. Решение ЛНДУ $Ly = f(x)$

$\overline{y}(x) : L\overline{y} = 0$ – общее решение ЛОДУ

$y^*(x) : Ly^*(x) = f(x)$ – частное решение ЛНДУ

Тогда $y(x) = \overline{y} + y^*$ – общее решение ЛНДУ

Lab.