

11. Теорема о циркуляции. Потенциальное векторное поле.

Со стороны заряд q на заряд q' действует сила F . Заряд q' движется по траектории, работа силы Кулона равна:

$$A = \int \vec{F} d\vec{l} = \int F dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{kqq'}{r^2} dr \quad dr = dl \cos \alpha$$

$$A = -\frac{kqq'}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{kqq'}{r_1} - \frac{kqq'}{r_2} = W_1 - W_2$$

$$A = \int_1^2 q' \vec{E} d\vec{l} = q' \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$$

Из этого выходит, что работа по замкнутому контуру равна

нулю: $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ - теорема о циркуляции

Теорема о циркуляции является вторым рассмотренным нами уравнением Максвелла

Из теоремы о циркуляции следует то, что силовые линии электрического поля не могут быть замкнутыми, а линии однородного поля расположены на одинаковом расстоянии друг от друга и параллельны друг другу

Теорема о циркуляции существует и в дифференциальной форме; по определению

$$\text{ротора } \text{rot} \vec{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{l}}{\Delta S}:$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

$$A = W_1 - W_2 = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$W = q\varphi$$

Потенциал точки поля численно равен работе по перемещению точечного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля

$$A = q(\varphi - \varphi_\infty) = q\varphi \implies \varphi = \frac{A}{q}$$

Потенциал на бесконечности равен 0: $\varphi_\infty = 0$

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\vec{E} d\vec{l} = E_l dl = -d\varphi$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}\right) = -\text{grad} \varphi = -\vec{\nabla} \varphi$$

Потенциал измеряется в вольтах

Из этого можно получить данные преобразования:

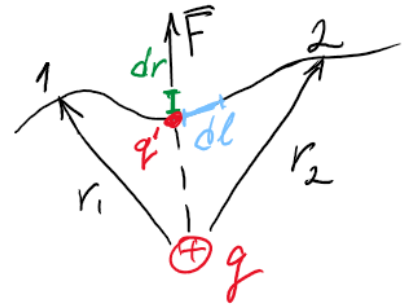
$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi$$

$$\text{div}(-\text{grad} \varphi) = -\Delta \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ - и получить уравнение Пуассона}$$

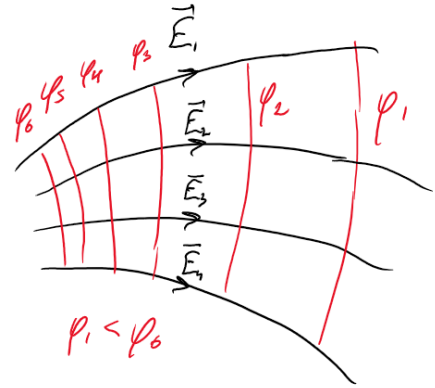
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = El \cos \alpha$$

$$\text{В конденсаторе } E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d}$$



Также электрическое поле изображают в виде эквипотенциальных поверхностей

Эквипотенциальные поверхности проще линий напряженности тем, что они скалярные величины



Ех. 1. Точечный заряд

$$\varphi_1 - \varphi_\infty = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{kq}{r^2} dr = -\frac{kq}{r} \Big|_r^\infty = \frac{kq}{r}$$

Ех. 2. Линия или цилиндр

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{2k\tau}{r} dl = 2k\tau \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Для линии, к сожалению, мы не можем найти потенциал в точке на бесконечности

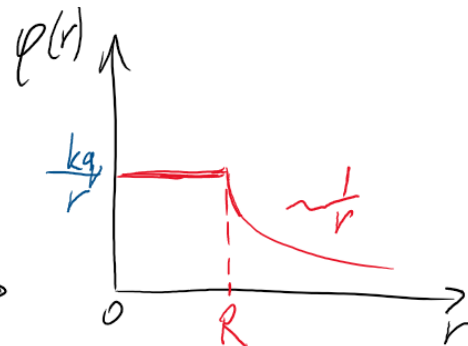
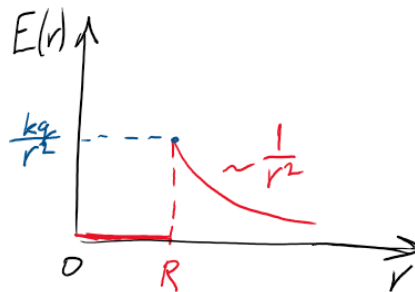
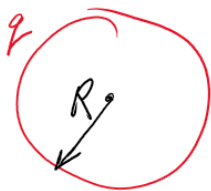
Ех. 3. Сфера

Внутри сферы:

$$\varphi_0 - \varphi_R = \int_0^R E dl = 0 \implies \varphi_0 = \varphi_R$$

Снаружи сферы:

$$\varphi_r = \varphi_r - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{kq}{r^2} dr = \frac{kq}{r}$$



Ех. 4. Шар

Снаружи шара:

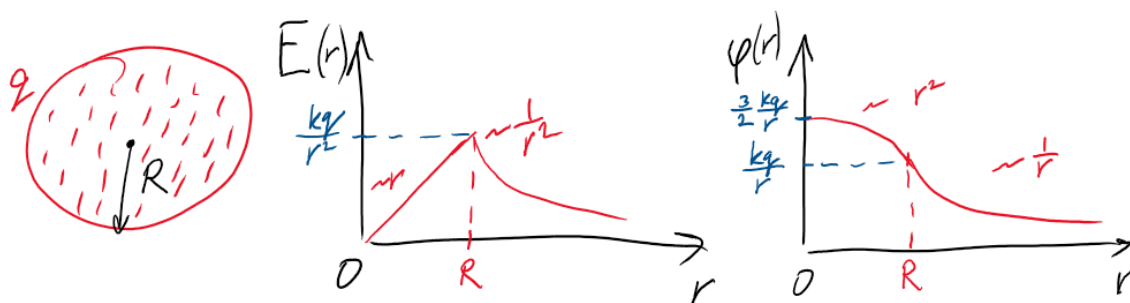
$$\varphi_r - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{kq}{r^2} dr = \frac{kq}{r}$$

Внутри шара:

$$E = \frac{kqr}{R^2}$$

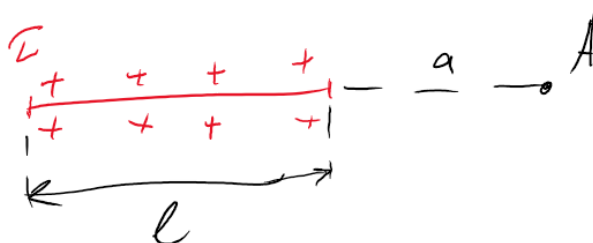
$$\varphi_0 - \varphi_R = \int_0^R \frac{kqr}{R^3} dr = \frac{kqr^2}{2R^3} \Big|_0^R = \frac{kq}{2R}$$

$$\varphi_0 = \varphi_R + \frac{kq}{2R} = \frac{kq}{R} \cdot \frac{3}{2}$$



Nota. Если шар сделан из диэлектрика, то не забываем про диэлектрическую проницаемость

Ex. 5. Распределение заряда



$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{k dq}{r} = \int_a^{a+l} \frac{k \tau dr}{r} = k \tau \ln \frac{a+l}{a}$$

Принцип суперпозиции для потенциала:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$$