1.6.3 Конструирование кривой по Безье

> Во Франции конца 1950-х годов автомобилестроение переживало эпоху расцвета дизайна, и инженерам нужен был способ описывать сложные, плавные изгибы кузовов автомобилей не на чертежной доске, а с помощью первых компьютеров для станков с ЧПУ. Традиционных инструментов для этой задачи было недостаточно
>
> В этот период сразу два французских автогиганта, Citroën и Renault, независимо друг от друга работали над решением этой проблемы
>
> Пьер Безье из Renault, инженер-механик и электрик, пришел к решению к 1962 году, разработав свою систему для компьютерного проектирования кузовов автомобилей, аэродинамические свойства которых легко задаются

Def. Кривая Безье n-ого порядка в параметрической форме описывается функцией $B(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i b_{i,n}(t)$, где

- $0 \leq t \leq 1$,
- $P_i = (x_i(t), y_i(t))$ – координаты опорных точек,
- а $b_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$ – полиномы Бернштейна, где i – порядковый номер опорной точки

Nota. Упорядоченное множество опорных точек $(P_0, P_1, ..., P_n)$ называется характеристической ломаной

Nota. Прямое вычисление $B(t)$ как пару функций $B_x(t)$ и $B_y(t)$, определяющих точки кривой, - сложная задача, поэтому чаще используют алгоритм Кастельжо:

> Заданы точки $P_0, P_1, ..., P_n$ нулевого порядка
>
> Тогда $P_i^j(t) = (1-t)P_i^{j-1}(t) + tP_{i+1}^{j-1}(t)$, где i – номер вершины, а j - порядок вершины

> Поль де Кастельжо, работая в Citroën, разработал независимо от Безье в 1959 году алгоритм для построения кривой, однако его разработки оставались коммерческой тайной, поэтому кривые получили название в честь Безье

Рассмотрим примеры:

Ex. 1. $n = 1$, даны P_0 и P_1

Для точки первого порядка $P_0^1 = (1-t)P_0^{1-1} + tP_1^{1-1} = (1-t)P_0 + tP_1$

В $t = 0$ $P_0^1 = P_0$, в $t = 1$ $P_0^1 = P_1$. При $0 < t < 1$ $P_0^1(t)$ – точка, пробегающая отрезок

В данном случае (так как меньше двух точек нельзя задать) $P_0^1(t) = B(t)$, то есть при $n = 1$ кривая Безье – отрезок P_0P_1

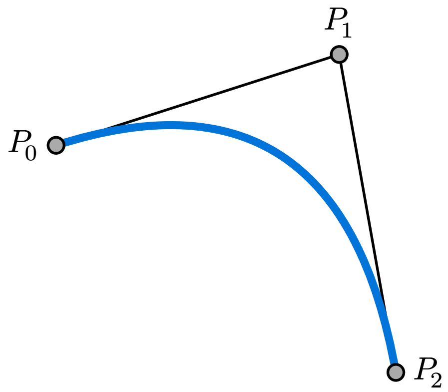
Ex. 2. $n = 2$, даны P_0, P_1, P_2

По определению $B(t) = \sum_{i=0}^{2} P_i C_2^i t^i (1-t)^{2-i} = P_0(1-t)^2 + 2P_1 t(1-t) + P_2 t^2$

По Кастельжо $P_0(t = 0)$, $P_2(t = 1)$:

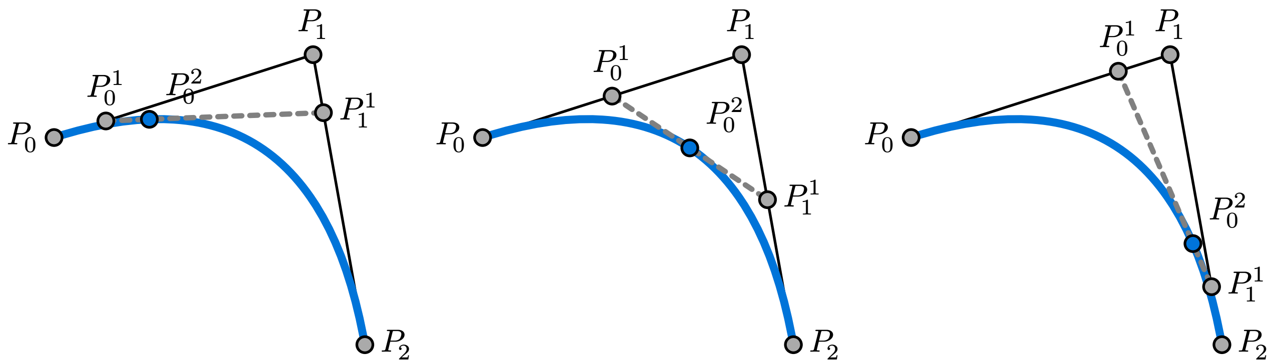
- $P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1$
- $P_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2$
- $P_1^2(t) = (1-t)P_0^1 + tP_1^1$

$$= (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$
$$= B(t)$$



В случае $n = 2$ кривая Безье – это парабола (в частной случае прямая)

По алгоритму Кастельжо становится видно, что характеристическая ломаная является касательной к кривой Безье. Сами точки первого порядка при разных t дают отрезки, которые касаются кривой, а точка второго порядка лежит непосредственно на кривой Безье:

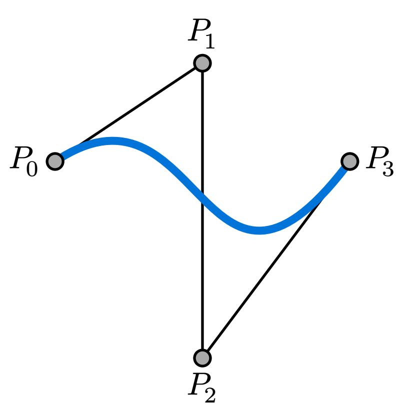


Ex. 3. $n = 3$, даны P_0, P_1, P_2, P_3

$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$

Или в матричном виде $B(t) = (t^3, t^2, t, 1) \cdot M_B \cdot \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$

Здесь $M_B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица Безье



Для кривых Безье справедливы свойства:

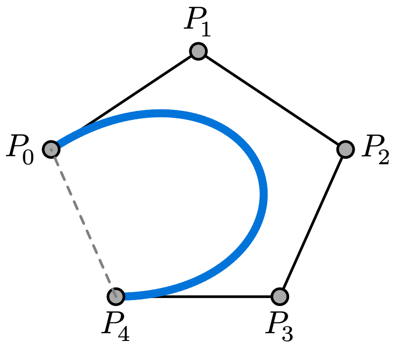
- Порядок кривой Безье инвариантен при аффинных преобразованиях

> Пусть $P_0, ..., P_n$ содержит k коллинеарных точек. $\mathcal{F}(P_0, ..., P_n) = P'_0, ..., P'_n$ – образы точек при аффинном преобразовании. И так как матрица F не вырождена, среди $P'_0, ..., P'_n$ останется k коллинеарных, таким образом порядок кривой сохранится

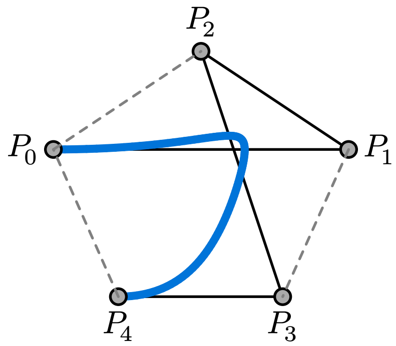
  То есть можно не подвергать всю кривую аффинному преобразованию, а всего лишь ее ломаную

- Непрерывность

- Вся кривая лежит внутри многоугольника $P_0, ..., P_n$ или выпуклой оболочки



Кривая находится в пятиугольнике $P_0P_1P_2P_3P_4$

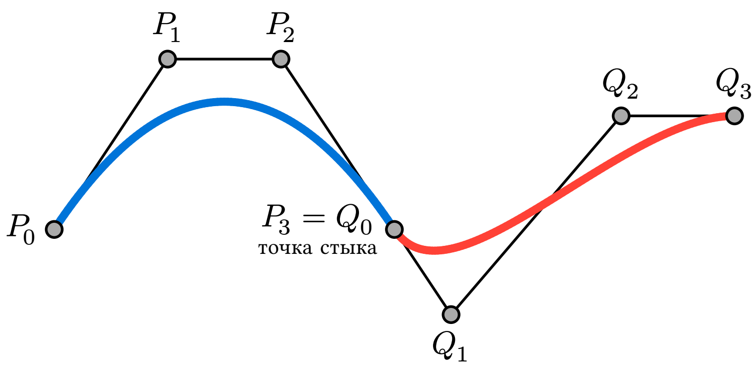


Кривая находится в пятиугольнике $P_0P_2P_1P_3P_4$

- Симметрия при смене порядка обхода ломаной

- Кусочная гладкость. Польза этого свойства заключается в том, что кривые Безье допускают гладкое сочленение двух кривых

Def. Сплайн – составная кривая, гладкая в точках стыка



Nota. Геометрически, гладкость эквивалентна спрямляемости, то есть в малой окрестности кривая - это почти прямая

Тогда сформулируем правило: чтобы построить сплайн Безье, нужно состыковать кривые $B_1(t)$ и $B_2(t)$ так, что предпоследняя опорная точка P_{n-1} кривой $B_1(t)$, вторая опорная точка Q_1 кривой $B_2(t)$ и точка стыка $P_n = Q_0$ были расположены на одной прямой (то есть коллинеарно)

Nota. Окружность и эллипс нельзя в точности представить кривыми Безье

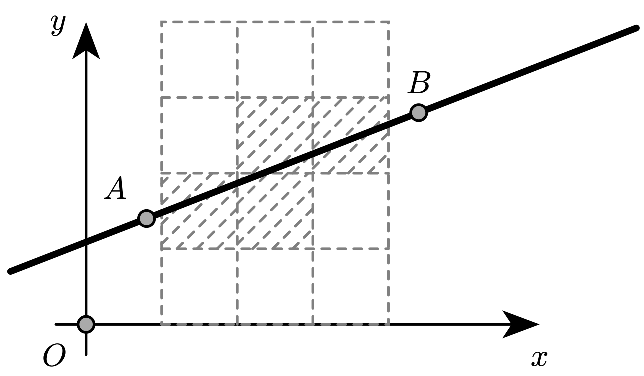
1.6.4 Дискретизация (растровое изображение) линий

Рассмотрим построение отрезка прямой с известным наклоном или проходящей через две данные точки на экране в пикселях

1. Естественный алгоритм

   Нам известно уравнение прямой $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$

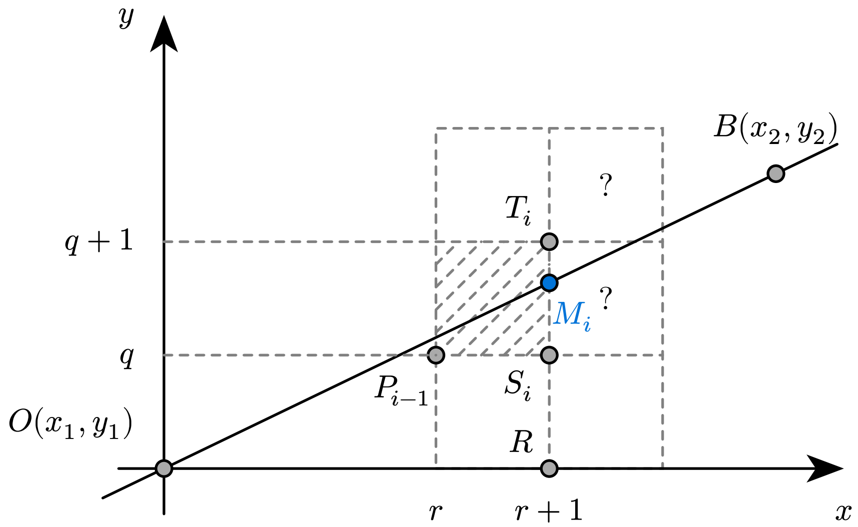
   Если выразим y через x, получим $y = y_A + \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$ – деление, из-за которого мы вынуждены округлять при выборе пикселя для y

   Лучше использовать алгоритм Брезенхэма

2. Алгоритм Брезенхэма

   Считаем, что $k \in [0, 1]$, то есть прямая ближе к оси Ox, чем к Oy. При $k \in [1, \infty)$ и $k < 0$ алгоритм аналогичен



Сделаем допущение, что начало координат находится в точке (x_1, y_1). Пусть на предыдущем шаге мы выбрали пиксель P_{i-1} с координатами (r, q) в системе Oxy. Тогда соседними кандидатами на следующем шаге будут $S_i(r+1, q)$ и $T_i(r+1, q+1)$

Алгоритм сводится к тому, что бы из двух пикселей S_i и T_i выбрать тот, который ближе к точке M_i

Введем величину $\Delta_i = S - T$, где $S = |S_i - M_i|$, $T = |T_i - M_i|$ – расстояния от точки M_i до соответствующих пикселей

Если $\Delta_i \geq 0$, то есть $S \geq T$, выбираем пиксель T_i, иначе – S_i

Из подобия треугольников получаем пропорцию: $k = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{M_iR}{OR} = \dfrac{q+S}{r+1}$

Отсюда $S = \dfrac{dx}{dy}(r+1) - q$

Так как $S + T = 1$, $T = 1 - S$. Умножая разность $S - T$ на dx, получаем $dx(S - T) = 2(r+1)dy - (2q+1)dy$

Если $dx > 0$, знак $\Delta_i = S - T$ совпадает со знаком $dx \cdot \Delta_i$. Обозначим $d_i = dx \cdot \Delta_i$, тогда $d_i = 2(r+1)dy - (2q+1)dx$

На следующем шаге $(i+1)$ координаты текущего пикселя будут (x_i, y_i), тогда $d_{i+1} = 2x_i dy - 2y_i dx + 2dy - dx$

Из этого $d_{i+1} - d_i = 2\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=1}dy - 2(y_i - y_{i-1})dx$, то есть $d_{i+1} = d_i + 2dy - 2(y_i - y_{i-1})dx$

Здесь возможны два случая:

- Если $d_i \geq 0$, выбираем пиксель T_i с координатами (x_i, y_i). Тогда приращение координаты y равно 1, и формула упрощается:

$d_{i+1} = d_i + 2(dy - dx)$

- Если $d_i < 0$, выбираем пиксель S_i с координатами (x_i, y_{i-1}). Здесь $y_i = y_{i-1}$, поэтому

$d_{i+1} = d_i + 2dy$

Начальное значение d_1 вычисляется для первого шага $i = 1$ как $d_1 = 2dy - dx$