

Классификация точек покоя. Будем рассматривать СДУ (автономную)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = kx + my \end{cases} \quad \dot{X} = AX \implies \det(A - \lambda E) = 0$$

Далее все зависит от $\lambda_{1,2}$

Заметим, что функции $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями (подстановка)

Причем, точка $(0, 0)$ – особая, так как СДУ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{kx + my}{ax + by}$

Рассмотрим различные случаи значений $\lambda_{1,2}$:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}^-$

Тогда решения СДУ будут $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, $\dot{x}(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$

Подставляем в первое уравнение, из него получаем $y(t) = \frac{1}{b} (C_1 (\lambda_1 - a) e^{\lambda_1 t} + C_2 (\lambda_2 - a) e^{\lambda_2 t})$

Введем начальные условия $y(0) = y_0, x(0) = x_0$

Решение задачи Коши:
$$\begin{cases} x(t) = \frac{ax_0 + by_0 - x_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0 \lambda_1 - ax_0 - by_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = \frac{1}{b} \left(\frac{ax_0 + by_0 - x_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 - a) e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0 \lambda_1 - ax_0 - by_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 - a) e^{\lambda_2 t} \right) \end{cases}$$

При $t \rightarrow +\infty$ $|e^{\lambda_i t}| < 1$ и $\forall \varepsilon > 0$
$$\begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases} \implies \begin{cases} |\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \\ |\tilde{y}(t) - y(t)| < \varepsilon \end{cases}$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$, то есть $(0, 0)$ – устойчивое решение

Ex. 1.
$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{dx}{x} = -dt \\ \frac{dy}{y} = -2dt \end{cases} \iff \begin{cases} x = C_1 e^{-t} \\ y = C_2 e^{-2t} \end{cases} + \text{Н.У.} \implies \begin{cases} x = x_0 e^{-t} \\ y = y_0 e^{-2t} \end{cases}$$

Изобразим интегральные кривые (фазовый портрет системы): СДУ $\implies \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \implies y = Cx^2$

В этом примере получается семейство парабол, при $t \rightarrow +\infty$ они все стремятся к $(0, 0)$ – устойчивому узлу

2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

Ex. 2.
$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \implies \begin{cases} x = x_0 e^t \\ y = y_0 e^{-2t} \end{cases}$$

Фазовый портрет $\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{x} \implies y = \frac{C}{x^2}$

Гиперболы при $t \rightarrow \infty$ стремятся к точкам $(\pm\infty, 0)$ и образуют так называемое седло неустойчивости

3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$

Ex. 3.
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(x_0 \cos t + y_0 \sin t) \\ y(t) = e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t) \end{cases} \quad - \text{устойчивая}$$

Фазовый портрет: перейдем в ПСК $\begin{matrix} x = \rho \cos \varphi & x_0 = A \cos \varphi_0 \\ y = \rho \sin \varphi & y_0 = A \sin \varphi_0 \end{matrix}$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \rho \cos \varphi = e^{-t} = A \cos(t - \varphi_0) \\ \rho \sin \varphi = e^{-t} = A \sin(t - \varphi_0) \end{cases} \implies \rho^2 = A^2 e^{-2t} \implies \rho = A e^{-t}$$

Выразим t через φ : $\tan \varphi = \tan(t - \varphi_0)$

Получаем $\rho = A e^{-(\varphi + \varphi_0 + \pi n)}$

Получается семейство логарифмических спиралей ($\rho = A e^{\varphi}$)

$$3') \lambda_{1,2} = \pm i\beta (\alpha = 0)$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \beta t + y_0 \sin \beta t \\ y(t) = y_0 \cos \beta t - x_0 \sin \beta t \end{cases}.$$

Фазовый портрет – семейство соосных и концентрических эллипсов. Центр этих эллипсов устойчивый

$$4) \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$$

Lab.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Обобщим: если хотя бы один $\lambda \neq 0$ и лежит слева от $\text{Im } \lambda$, то решение устойчивое