Содержание

Лекция 1.

Теория вероятности изучает характеристику случайных величин, тогда как математическая статистика решает обратную задачу
Допустим, что у нас есть случайная величина, по ней мы можем найти матожидание, моменты и оценить, какое распределение имеет случайная величина.

Выборки

Def. Выборка - набор данных, полученных в ходе экспериментов. Тогда количество экспериментов n - объем Выборки
Def. Генеральной совокупностью называются все результаты проведенных экспериментов
Def. Выборочной совокупностью называются наблюдаемые данные экспериментов
Не все данные экспериментов мы можем наблюдать, например, выборы, тогда опросы голосовавших - выборочная совокупность, а результаты выборов - генеральная. Очевидно, что выборочная и генеральная совокупности могут иметь различные распределения.
Def. Выборка называется **репрезентативной**, если ее распределение близко к распределению генеральной совокупностью
Пример - ошибка выжившего. Во время Второй Мировой стал вопрос, в каких местах стоит бронировать корпус самолета. Самолеты возвращались с пулевыми отверстиям, и интуитивно казалось, что стоит бронировать те места, которые больше всего пострадали. Однако не были учтены те самолеты, которые не вернулись, а те, которые выжили, выжили благодаря тому, что были прострелены в нелетальных местах, поэтому было принято решение бронировать фюзеляж в менее пострадавших местах
В дальнейшем считаем, что все выборки репрезентативны

Def. 1. Выборкой объема n называется набор из n экспериментаных данных $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (апостериорное определение)
Def. 2. Выборкой объема n называется набор из n независимых одинаково распределенных случайных величин $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ (априорное определение)

Выборочные характеристики

Можно выборку рассматривать как дискретную случайную величину с одинаковыми вероятностями $p_i = \dfrac{1}{n}$ и вычислить для нее математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения

Def. Выборочным средним $\overline{X}$ называется величина $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

Def. Выборочной дисперсией D^* называется величина $D^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ (или $D^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$)

По закону больших чисел выборочное среднее будет сходиться к матожиданию

Def. Исправленной дисперсией называется величина $S^2 = \frac{n}{n-1}D^* = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

Def. Выборочной функцией распределения $F^*(x)$ называется функция $F^*(x) = \frac{\text{число данных } x_i < x}{n}$

Th. Выборочная функция распределения поточечно сходится к теоретической функции распределения:

$$\forall y \in \mathbb{R} F^*(y) \xrightarrow{p} F(y)$$

$F(y) = P(X < y)$

$F_y^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} I(X_i < y) \underset{\text{по ЗБЧ}}{\xrightarrow{p}} EI(X_i < y) = P(X_i < y) = P(X_1 < y) = F_{X_1}(y)$

Усилим теорему

Th. Гливенко-Кантелли. $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |F^*(x) - F(x)| \xrightarrow{p} 0$

Th. Колмогорова. $\sqrt{n}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |F^*(x) - F(x)| \rightrightarrows K$ - распределение Колмогорова с функцией распределения $F_K(x) = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j e^{-2j^2x^2},\ x \in [0;\infty)$

Начальная обработка статданных

1. Ранжирование данных - упорядочиваем выборки по возрастанию. В результате получаем вариационный ряд $\vec{X} = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$

   $X_{(1)} = \min X_i; \quad X_{(n)} = \max X_i$

   $X_{(i)} = i$-ая порядковая статистика
2. Объединим повторяющиеся данные - получаем т.н. частотный вариационный ряд

X_i	$X_{(1)}$	$\ldots$	$X_{(r)}$	$\sum$
n_i	n_1	$\ldots$	n_r	n

   Иногда часть данных отбрасывается сверху и снизу (по 5, по 10, по 5% и так далее), чтобы сделать выборку репрезентативной

Тогда $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i n_i$, $D^* = \frac{1}{n}\sum (X_i - \overline{X})^2 n_i$

3. Чтобы уменьшить количество вычислений или сделать гистограмму, делают интервальный вариационный ряд: разбиваем данные на интервалы и считаем, сколько данных n_i попало в интервал.

   Тогда n_i - частота интервала A_i

   Есть два основные способа разбиения на интервалы:

   (a) Интервалы одинаковой длины

   (b) Равнонаполненные интервалы (в каждом интервале примерно одинаковое количество данных)

   Число интервалов K такое, что $\frac{K(n)}{n} \longrightarrow 0$ и $K(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

   Обычно применяют формулу Стерджесса $K \approx 1 + \log_2 n$ или $K \approx \sqrt[3]{n}$

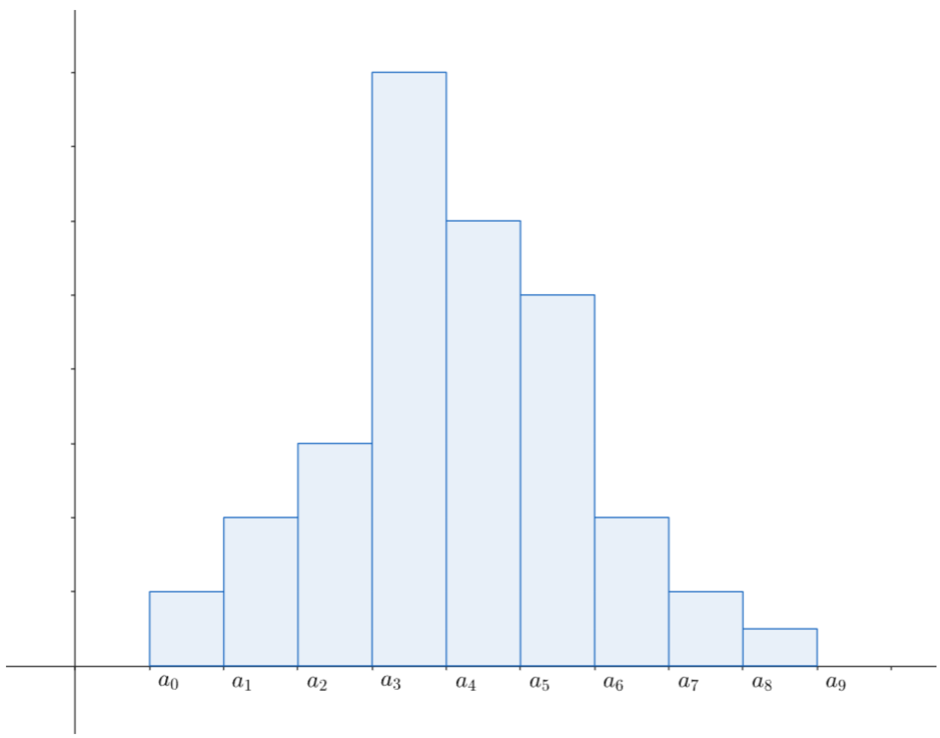
   Пусть получили интервальный вариационный ряд

интервалы	$[a_0; a_1)$	$[a_1; a_2)$	$\dots$	$[a_{K-1}; a_K]$	$\sum$
частоты	n_1	n_2	$\dots$	n_K	n

Геометрическая интерпретация данных

- Гистограмма

  Строится ступенчатая фигура из прямоугольников, основание i-ого прямоугольника - интервал, высота прямоугольника - $\frac{n_i}{nl_i}$, где l_i - длина интервала

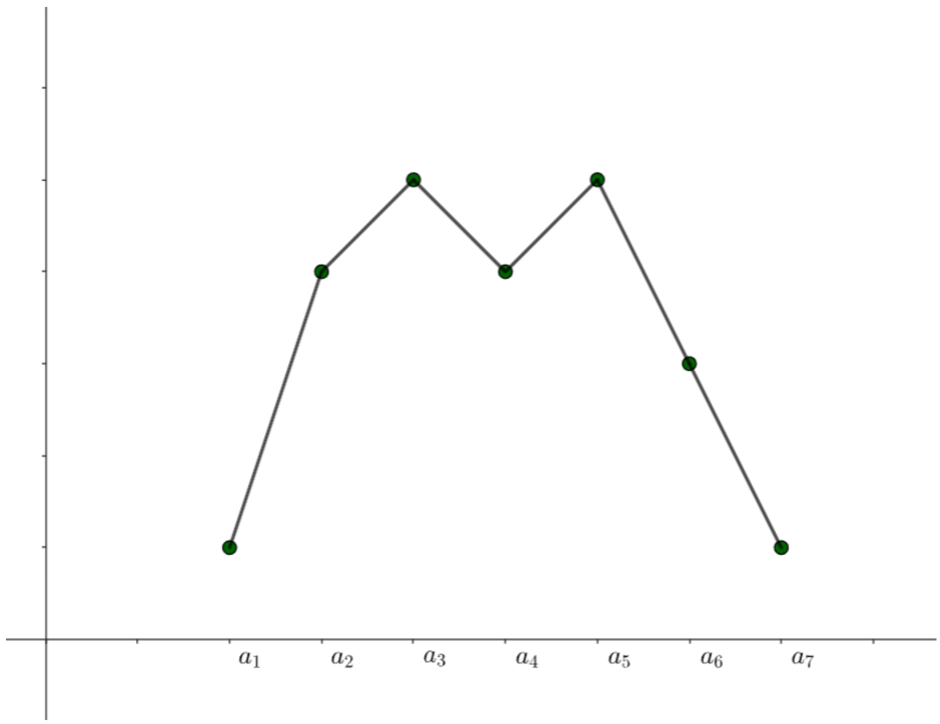


  Визуально можно сделать гипотезу, как ведет себя распределение.

Th. Гистограмма поточечно сходится к теоретической плотности

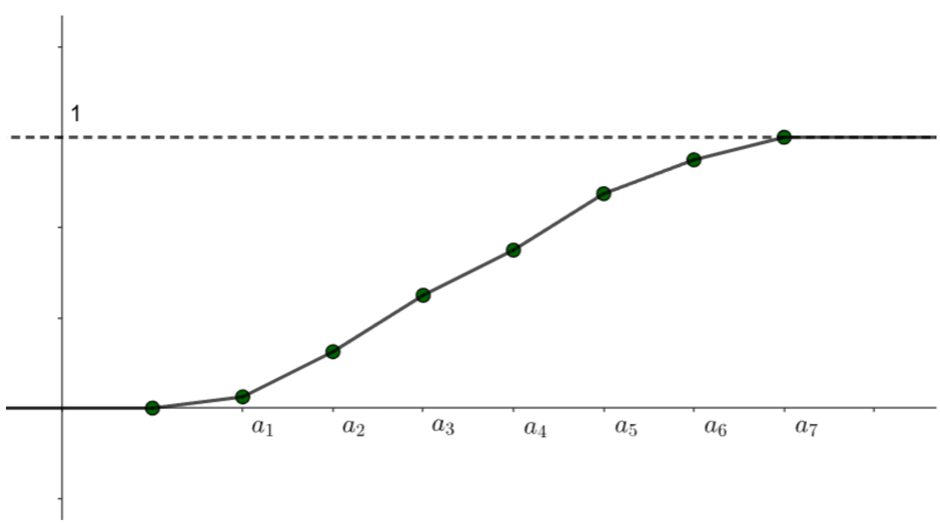
- Полигон

  На оси абсцисс отмечаем значения частотного вариационного ряда, по оси ординат - их частоты. Получившиеся точки соединяем отрезками



- Выборочная функция распределения

  На основе таблицы строится график функции распределения



Она может быть ступенчатой, ломаной или соединена по усмотрению

Лекция 2.

Точечная оценка

Пусть имеется выборка $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ объемом n

Пусть требуется найти приближенную оценку θ^* неизвестного параметра θ

Находим ее при помощи некоторой функции обработки данных $\theta^* = \theta^*(X_1, \ldots, X_n)$

Def. Такая функция называется статистикой

Def. А оценка θ^* называется точечной оценкой

Свойство точечных оценок

1. Состоятельность

   Def. Статистика $\theta^* = \theta^*(X_1, \ldots, X_n)$ неизвестного параметра называется состоятельной, если $\theta^* \xrightarrow{p} \theta$ при $n \to \infty$

2. Несмещенность

   Def. Оценка θ^* параметра θ называется несмещенной, если математическое ожидание $E\theta^* = \theta$

   Nota. Оценка θ^* называется асимптотически несмещенной, если $E\theta^* \xrightarrow{p} \theta$ при $n \to \infty$

3. Эффективность

   Def. Оценка θ_1^* не хуже θ_2^*, если $E(\theta_1^* - \theta)^2 \leq E(\theta_2^* - \theta)^2$. Или, если θ_1^* и θ_2^* несмещенные, то $D\theta_1^* \leq D\theta_2^*$

   Def. Оценка θ^* называется эффективной, если она не хуже всех остальных оценок

   Nota. Не существует эффективной оценки в классе всех возможных оценок

   Th. В классе несмещенных оценок существует эффективная оценка

4. Асимптотическая нормальность

   Def. Оценка θ^* параметра θ называется асимптотически нормальной, если $\sqrt{n}(\theta^* - \theta) \rightrightarrows N(0, \sigma^2(\theta))$ при $n \to \infty$

Точечные оценки моментов

Def. Выборочным средним $\overline{x}$ называется величина $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

Def. Выборочной дисперсией D^* называется величина $D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2$

Def. Исправленной дисперсией S^2 называется величина $S^2 = \frac{n}{n-1}D^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2$

Def. Выборочным средним квадратическим отклонением называется величина $\sigma^* = \sqrt{D^*}$

Def. Исправленным средним квадратическим отклонением называется величина $S = \sqrt{S^2}$

Def. Выборочным k-ым моментом называется величина $\overline{x^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$

Def. Модой Mo^* называется варианта x_k с наибольшей частотой $n_k = \max_i(n_1, n_2, \ldots, n_m)$

Def. Выборочной медианой Me^* называется варианта x_i в середине вариационного ряда
$\begin{cases} \text{Me}^* = X_{(k)}, & \text{если } n = 2k-1 \\ \frac{X_{(k)}+X_{(k+1)}}{2}, & \text{если } n = 2k \end{cases}$

Th. $\overline{x}$ - состоятельная месмещенная оценка теоретического матожидания $\AA X = a$

1) $E\overline{x} = a$

2) $\overline{x} \xrightarrow{p} a$ при $n \to \infty$

1) $E\overline{x} = E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i = \frac{1}{n}nEX_1 = EX_1 = a$

2) $\overline{x} = \frac{\overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_n}{n} \xrightarrow{p} a$ согласно Закону Больших Чисел

Nota. Если второй момент конечен, то $\overline{x}$ - асимптотически нормальная оценка. По ЦПТ $\frac{S_n - nEX_1}{\sqrt{n}\sqrt{DX_1}} = \sqrt{n}\frac{\overline{x} - EX_1}{\sqrt{DX_1}} \rightrightarrows N(0,1)$ или $\sqrt{n}(\overline{x} - EX_1) \rightrightarrows N(0; DX_1)$

Th. Выборочный k-ый момент является состоятельной несмещенной оценкой теоретического k-ого момента

1) $\overline{EX^k} = EX^k$

2) $\overline{X^k} \xrightarrow{p} X^k$

Это следует из предыдущей теоремы, если взять X^k вместо X

Th. Выборочной дисперсией D^* и S^2 являются состоятельными оценками теоретического дисперсией, при этом D^* - смещенная оценка, а S^2 - несмещенная оценка

Заметим, что $D^* = \overline{X^2} - \overline{X}^2$
$ED^* = E(\overline{X^2} - \overline{X}^2) = E\overline{X^2} - E(\overline{X}^2) = EX^2 - E(\overline{X}^2)$
Так как $D\overline{X} = E(\overline{X}^2) - (E\overline{X})^2$, то $EX^2 - E(\overline{X}^2) = EX^2 - ((E\overline{X})^2 + D\overline{X}) = (EX^2 - EX) - D\overline{X} = DX - D\overline{X} = DX - D\left(\dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = DX - \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = DX - \dfrac{1}{n^2} nDX_1 = DX - \dfrac{1}{n}DX = \dfrac{n-1}{n}DX$,
то есть D^* - смещенная вниз оценка
$ES^2 = E(\dfrac{n}{n-1}D^*) = \dfrac{n}{n-1}\dfrac{n-1}{n}DX = DX \Longrightarrow S^2$ - несмещенная вниз оценка
2. $D^* = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \xrightarrow{p} EX^2 - (EX)^2 = DX$ - состоятельная оценка
$S^2 = \dfrac{n}{n-1}D^* \xrightarrow{p} DX$

Nota. Отсюда видим, что выборочная дисперсия - асимптотически несмещенная оценка. Поэтому при большом (обычно не меньше 100) объеме выборке можно считать обычную выборочную дисперсию

Метод моментов (Пирсона)

Постановка задачи: пусть имеется выборка объема n неизвестного распределения, но известного типа, которое задается k параметрами: $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Требуется дать оценки данным неизвестным параметрам
Идея метода состоит в том, что сначала находим оценки k моментов, а затем с помощью теоретических формул из теории вероятности даем оценки этих параметров
Пусть $\vec{X}$ - выборка из абсолютно непрерывного распределения F_θ с плотностью известного типа, которая задается k параметрами $f_\theta(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$
Тогда теоретические моменты находим по формуле $m_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f_\theta(x, \theta_1, \dots, \theta_k)dx = h_i(\theta_1, \dots, \theta_n)$
Получаем систему из k уравнений с k неизвестными. В эти уравнения подставляем найденные оценки моментов и, решая получившуюся систему уравнений, находим нужные оценки параметров

$$\begin{cases} \overline{x} = h_1(\theta_1^*, \dots, \theta_n^*) \\ \overline{x^2} = h_2(\theta_1^*, \dots, \theta_n^*) \\ \dots \\ \overline{x^k} = h_k(\theta_1^*, \dots, \theta_n^*) \end{cases}$$

Nota. Оценки по методу моментов как правило состоятельные, но часто смещенные

Ex. Пусть $X \in U(a, b)$. Обработав статданные, нашли оценки первого и второго моментов: $\overline{x} = 2.25; \overline{x^2} = 6.75$

Найти оценки параметров a^*, b^*

Плотность равномерного распределения $f_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \le x \le b, \\ 0, x > b \end{cases}$

$EX = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$
$EX = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$

Получаем:
$\begin{cases} \overline{x} = \frac{a^*+b^*}{2} \\ \overline{x^2} = \frac{a^{*2}+a^*b^*+b^{*2}}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a^*+b^*}{=} 4.5 \\ a^{*2} + a^*b^* + b^{*2} = 20.25 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a^*+b^*}{=} 4.5 \\ a^*b^* = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^* = 0 \\ b^* = 4.5 \end{cases}$