4.2 ДУ первого порядка (ДУ$_1$)

Nota. Среди ДУ$_1$ рассмотрим несколько типов точно интегрируемых ДУ

1. Уравнение с разделяющимися переменными (УРП)
2. Однородное уравнение (ОУ)
3. Уравнение полных дифференциалов (УПД)
4. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (ЛДУ$_1$)

Кроме этого интегрируются дифференциальные уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Рикатти и др. (см. литературу)

4.2.1. УРП

Def. $\boxed{m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0}$ – уравнение с разделяющимися переменными
Решение: при $N(y)M(x) \neq 0$ получаем
$\dfrac{m(x)}{M(x)}dx + \dfrac{n(y)}{N(y)}dy = 0,$
где $y = y(x)$ – неизвестная функция (ее ищем, решая ДУ)
$\left(\dfrac{m(x)}{M(x)} + \dfrac{n(y)}{N(y)}y'\right)dx = 0$
Интегрируем по dx:
$\displaystyle\int \left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y'\right)dx = const$
По свойствам интеграла:
$\displaystyle\int \frac{m(x)}{M(x)}dx + \int \frac{n(y)}{N(y)}dy = const$
или: $\boxed{\displaystyle\int \frac{m(x)}{M(x)}dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)}dy}$

Ex. $xdy - ydx = 0$

$xdy = ydx \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \quad (x, y \neq 0)$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + \tilde{C} = \ln|\tilde{\tilde{C}}x|$

$|y| = |\tilde{\tilde{C}}x|$

$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$

Заметим, $x = y = 0$ – решение, но они учтены общим решением $y = Cx$, (при $C = 0, y = 0$) и подстановкой в ДУ $x = 0$

Nota. В процессе решения нужно проверить $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$

$M(x) = 0$ при $x = a$ и $N(y) = 0$ при $y = b$

$m(a)\underbrace{N(b)}_{=0}dx + n(b)\underbrace{M(a)}_{=0}dy = 0$
То есть $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$ - решение

4.2.2. ОУ

Def. 1. Однородная функция n-ого порядка называется функция $f(x, y)$ такая, что
$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$
Ex. $f = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right), \cos\left(\dfrac{\lambda x}{\lambda y}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ – нулевой порядок однородности
$f = \sqrt{x^2 + y^2}$ – первый порядок

Def. 2. $\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0}$, где $P(x, y), Q(x, y)$ – однородные функции одного порядка, называется однородным уравнением
<u>Решение</u>: $P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \dfrac{y}{x}\right) = x^k P\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$
$Q(x, y) = x^k Q\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$
Тогда, $P\left(1, \dfrac{y}{x}\right)dx + Q\left(1, \dfrac{y}{x}\right)dy = 0.$
Обозначим $\dfrac{y}{x} = t, \quad y' = \dfrac{dy}{dx} \overset{y=tx}{=} t'_x x + t x'_x = t'_x x + t$
$P(1, t) + Q(1, t)y' = P(1, t) + Q(1, t)(t'x + t) = 0$
$t'x + t = -\dfrac{P(1, t)}{Q(1, t)} \overset{\text{обозн}}{=} f(t)$
$t'x = f(t) - t$

- Если $f(t) - t \neq 0$, то получаем уравнение с разделяющимися переменными:
  $\dfrac{dt}{f(t) - t} = \dfrac{dx}{x}$
  $\displaystyle\int \dfrac{dt}{f(t) - t} = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|Cx|$
  $Cx = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} = \varphi(x, y)$ - общий интеграл
- Если $f(t) - t = 0$, а $t = k$ - корень уравнения $f(t) - t = 0$, тогда $y = kx$ - тоже решение

Ex. $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$
$\dfrac{y}{x} = t \quad y' = t'x + t \quad dy = (t'x + t)dx$
$(x + tx)dx + (x - tx)(t'x + t)dx = 0$
$(1 + t) + (1 - t)(t'x + t) = 0$
$t'(1 - t)x + t - t^2 + 1 + t = 0$
$t'(1 - t)x = t^2 - 2t - 1$
$\dfrac{(1 - t)dx}{t^2 - 2t - 1} = \dfrac{dx}{x}$ - УРП
$\dfrac{(1 - t)dt}{(1 - t)^2 - 2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d((1 - t)^2) - 2}{(1 - t)^2 - 2} = -\dfrac{1}{2}\ln|(1 - t)^2 - 2| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{(1 - t)^2 - 2}} = \ln|Cx|$

$\tilde{C}x = \dfrac{1}{\sqrt{(1-t)^2-2}} \iff Cx^2 = \dfrac{1}{(1-t)^2-2} \iff Cx^2((1-t)^2-2) = 1$
$C((y-x)^2-2x^2) = 1$
$C(y^2-2xy-x^2) = 1$
$y^2-2xy-x^2 = C$ - гиперболы
$(t-1)^2-2 = 0 \quad \dfrac{y}{x} = 1 \pm \sqrt{2} \quad y = (1\pm\sqrt{2})x$ - асимптоты

4.2.3. УПД

Def. $\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$ при $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ – уравнение в полных дифференциалах
<u>Решение</u>:
Мет. **Th. Об интеграле НЗП.** $\exists \Phi(x,y) \mid d\Phi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
$\Phi(x,y) = \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$

Ex. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$
$\Phi(x,y) = \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(0,0)}^{(x,0)} xdx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x-y)dy = \frac{x^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(x,0)} + \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{(x,0)}^{(x,y)} = \frac{x^2}{2} +$
$xy - \dfrac{y^2}{2} + C$ - общий интеграл
$x^2 + 2xy - y^2 = C$

4.2.4. ЛДУ

Def. $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$, где $p, q \in C_{[a,b]}$, – линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Nota. Будем решать методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)
Принцип: если удалось найти частное решение ДУ$_{\text{однор}}$ (обозначим y_0), то общее решение ДУ$_{\text{неод}}$ можно искать в виде $y = C(x)y_0$

Def. Однородное (ЛОДУ): $y' + p(x)y = 0$
Def. Неоднородное (ЛНДУ): $y' + p(x)y = q(x)$

Ex. Пусть $y(x) = x^2e^{-x}$ - частное решение ЛНДУ
А $y_0 = xe^{-x}$, тогда $y = xxe^{-x} = C(x)xe^{-x}$
То есть $C(x)$ варьируется, чтобы получить решение $y = y(x)$
<u>Решение</u>:

1. для ЛОДУ $y' + p(x)y = 0$

   $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ – УРП, тогда $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$

   $\ln|\tilde{C}y| = -\displaystyle\int p(x)dx$

   $\overline{y} = Ce^{-\int p(x)dx} = Cy_0$ – общее решение ЛОДУ
2. для ЛНДУ $y' + p(x)y = q(x)$

   Ищем $y(x)$ в виде $y = C(x)y_0$

   $C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$

   $C'(x)y_0 + C(x)\underbrace{(y_0' + p(x)y_0)}_{=0} = q(x)$

   $C'(x) = \dfrac{q(x)}{y_0} = q(x)e^{\int p(x)dx}$

   $C(x) = \displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

   Окончательно, $y(x) = \left(\left(\displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C\right)dx\right)e^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int pdx} + e^{-\int pdx}\displaystyle\int qe^{\int pdx} = \overline{y} + y^*$