5.3. Двойной и тройной интегралы

Nota. Дадим строгое определение

Def. $z = z(x, y) \quad z : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. Дробление на $[x_{i-1}, x_i]$ длиной Δx
2. Выбор средней точки $M_i(\xi_i, \eta_i)$, по значению $z(M_i)$ строим элемент. параллелепипед объемом
   $v_i = z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i \approx V_{\text{малого цилиндра}}$
3. Интеграл суммы
   $v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i$
4. Если $\exists \lim v_n \in \mathbb{R}$, не зависящий от типа дробления и т.д. при $n \to \infty$ и $\tau = \max(\Delta x_i, \Delta y_i) \to 0$,
   то $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}} v_n \overset{def}{=} \iint_D z(x, y)dxdy$ - двойной интеграл от $z(x, y)$ на области D

Мет. Определение определенного интеграла:
$\int_a^b f(x)dx \qquad f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}^+$

1. Дробление на элементы P_i прямыми $x = \text{const}, y = \text{const}$, $S_{P_i} = \Delta x_i \Delta y_i$ (дали dx, dy)
2. Выбор $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, площадь элементарных прямоугольников $f(\xi_i)\Delta x_i \approx S_{\text{полоски}}$
3. Интеграл суммы $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$
4. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx$

Nota. Об области D: в простейшем случае рассматривают выпуклую, односвязную $\mathbb{R}^2$-область

а) Выпуклость:
$\exists M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1M_2} \notin D$ – не выпуклая, где $\overline{M_1M_2}$ – прямой отрезок
$\forall M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1M_2} \in D$ – выпуклая

б) Связность:
$D = D' \cup D''$ – несвязная, если $\exists M_1, M_2 \in D \mid \overset{\frown}{M_1M_2} \notin D$, где $\overset{\frown}{M_1M_2}$ – непрерывная кривая, соединяющая M_1 и M_2
D – связная, если $\forall M_1, M_2 \in D \mid \overset{\frown}{M_1M_2} \in D$

Обычно область открытая (то есть без границы), дальше будем рассматривать в том числе области с границей

Добавим к определению $\iint_{\partial D \text{ – граница } D} z(x, y)dxdy$

Геометрический смысл: в определении при $z(x, y) \geq 0$ интегральная сумма $v_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$ была суммой объемов элементарных параллелепипедов и приближала объем подповерхности

Тогда $\iint_D z(x, y)dxdy \overset{z\geq 0}{=} V_{\text{цилиндра с осн. } D}$, а при $z = 1$ $\iint_D dxdy = S_D$

Вычисление: по геометрическому смыслу найти $\iint_D z(x, y)dxdy$ – значит найти объем подповерхности

Можно найти $S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x = c, y)dy$ – площадь поперечного сечения

Найдем V как объем тела с известными площадями сечений
$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c,y)dy\right)dx$

Nota. Кратный
Если найдена первообразная для $z(x=c,y)$ (обозначим $F(x,y(x))$), то по формуле N-L:
$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c,y)dy = F(x,y(x))\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = F(x,y_2(x)) - F(x,y_1(x))$
Тогда $\int_a^b \overbrace{(F(x,y_2)-F(x,y_1))}^{\varphi(x)}dx$ – обычный определенный интеграл
Пределы интегрирования во внутреннем интеграле – функции, во внешнем – точки
Можно ли вычислить V, рассекая тело сечениями $y = \text{const}$? Верно ли, что $\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)dy\right)dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)dx\right)dy$?
Верно: V не зависит от порядка сечения
Таким образом, двойной интеграл $\iint_D z(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} z(x,y)dydx = \int_\alpha^\beta \int_{x_1}^{x_2} z(x,y)dxdy$
Но при другом порядке интегрирования область D может оказаться неправильной

Def. При проходе области D в направлении $Oy\uparrow$ граница области (верхняя) меняет аналитическое задание. Такая область называется неправильной в направлении Oy
Выгодно выбирать правильное направление, чтобы не делить интеграл по аддитивности

Ex. $\iint_D xydxdy$, $D: x^2+y^2 \le 1$
$\iint_D xydxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{y_1=-\sqrt{1-x^2}}^{y_2=\sqrt{1-x^2}} xydy\right)dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2}y^2\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2}((1-x^2)-(1-x^2))\right)dx = 0$

Def. Тройной интеграл: пусть дана функция $u(x,y,z) \ : \ T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

1. Дробление на элементы объема $dv = dxdydz$
2. Вычисление среднего содержания $u(x,y,z)$ в dv: $u(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)dv$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \sum u(M_i)dv$
4. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max(dv)\to 0}} \overset{def}{=} \iiint_T u(x,y,z)dv = \iiint_T u(x,y,z)dxdydz$

Геометрический смысл: только при $u=1$ интеграл $\iiint_T dxdydz = V_T$ равен объему

Физический смысл: пусть $u(x,y,z)$ – плотность в каждой точке T, тогда $\iiint_T u(x,y,z)dxdydz = m_T$ – масса
Тройной интеграл можно вычислить через кратный: $\iiint_T u(x,y,z)dxdydz \overset{\text{кратный}}{=} \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} u(x,y,z$