Разберем пример поверхностного интеграла:

Ex. $S_1: \; x^2+y^2=1, \quad S_2: z=0, \quad S_3: z=1$

$S=\bigcup\limits_{i=1}^{3} S_i$ – цилиндр

$\vec{F}=(P,Q,R)=(x,y,z)$

$$\iint_{S_{\text{внешн.}}} xdydz+ydxdz+zdxdy=\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}$$

Так как проекции S_2 и S_3 на Oxz и Oyz – отрезки, то $dxdz=0$, $dydz=0$:

$$\iint_{S_2} xdydz+ydxdz+zdxdy=\iint_{S_2} zdxdy=0$$

$$\iint_{S_3} zdxdy \overset{z|_{S_3}=1}{=} \iint_{S_3} dxdy \overset{\text{с «+», так как } \vec{n}_3\uparrow\uparrow Oz}{=} \iint_{D_{xy}} dxdy=\pi$$

$$\iint_{S_1} xdydz+ydxdz=\iint_{D^+_{yz}:x=\sqrt{1-y^2}} xdydz+\left(-\iint_{D^-_{yz}:x=-\sqrt{1-y^2}} xdydz\right)+\iint_{D^+_{xz}} ydxdz+\left(-\iint_{D^-_{xz}} ydxdz\right)=$$

$$\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$$

$$\iint_S=3\pi$$

5.7. Связь поверхностных интегралов с другими

Th. Гаусса-Остроградского.

$S_1 \;:\; z=z_1(x,y),\; S_3 \;:\; z=z_3(x,y),\; S_2 \;:\; f(x,y)=0$ (проекция на Oxy – кривая)

$S=\bigcup\limits_{i=1}^{3} S_i$ - замкнута и ограничивает тело T (S_2 – цилиндр, S_1 – шапочка сверху, S_3 – шапочка снизу)

$P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z)$ – непрерывно дифференцируемы, действуют в области $\Omega\supset T$

Тогда $\displaystyle\oiint_{S_{\text{внешн.}}} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

Mem. Формула Грина: $\displaystyle\oint_K Pdx+Qdy=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$

Вычислим почленно $\displaystyle\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$$\iiint_T \left(\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dz\right)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z)\Big|_{z=z_1(x,y)}^{z=z_3(x,y)}dxdy = \iint_{D_{xy}} (R(x,y,z_3(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)))dxdy=\underbrace{\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_3)dxdy}_{\text{двойной}}-\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))dxdy=\underbrace{\iint_{S_3} R(x,y,z)dxdy}_{\text{поверхностный}}+$$

$$\iint_{S_1} R(x,y,z)dxdy + \underbrace{\iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy}_{\text{равен 0, т.к. } dxdy\ |_{S_2}=0} = \iint_{S_{\text{внешн.}}} Rdxdy$$

Аналогично остальные члены:
$\iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \iint_{S_{\text{внешн.}}} Qdxdz$, $\iiint_T \frac{\partial P}{\partial y}dxdydz = \iint_{S_{\text{внешн.}}} Pdxdz$

Nota. Если считаем поток через внутреннюю поверхность, то $\iint_{S_{\text{внутр}}} = -\iiint_T$

Nota. С учетом связи поверхностных интегралов $\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dv$

Th. Стокса.
Пусть $S: z = z(x,y)$ – незамкнутая поверхность, L – контур, на которую она опирается
$\text{пр}_{Oxy}L = K_{xy}$, $\quad \text{пр}_{Oxy}S = D_{xy}$
В области $\Omega \supset S$ действуют функции P, Q, R, непрерывно дифференцируемые
Тогда $\oint_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S^+} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) d\sigma$

Найдем слагаемое $\oint_L P(x,y,z)dx \overset{\text{на } L\ :\ z=z(x,y)}{=\!=\!=} \oint_{K^+_{xy}} \tilde{P}(x,y,z(x,y))dx = \oint_{K_{xy}} \tilde{P}dx + \tilde{Q}dy = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}\right)dxdy = -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial \tilde{P}(x,y)}{\partial y}dxdy = -\iint_{S^+} \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}dxdy = -\iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy = -\iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma + \frac{\partial P}{\partial z}(-\cos\beta)\right)d\sigma$

$$\vec{n} = \left(\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$

Аналогично $\oint_L Qdy = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)d\sigma$, $\oint_L Rdz = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)d\sigma$
Остается сложить интегралы

Nota. Формула Грина является частным случаем теоремы Стокса при $\cos\alpha = \cos\beta = 0$ и $\cos\gamma = 1$ – элементарная площадка на плоскости Oxy всегда сонаправлена оси Oz

Ex. 1. Возьмем пример выше: $S_1:\ x^2+y^2=1, \quad S_2: z=0, \quad S_3: z=1,\ S=\bigcup\limits_{i=1}^{3} S_i$ – замкнутый цилиндр, $\vec{F}=(P,Q,R)=(x,y,z)$. Получаем по теореме Гаусса-Остроградского:

$$\iint_{S_{\text{внешн}}} xdydz+ydxdz+zdxdy=\iiint_T\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dv=3V_{\text{цил.}}=3\cdot 1\cdot \pi\cdot 1^2=3\pi$$

Ex. 2. Те же P,Q,R. По теореме Стокса:

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\overbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)}^{=0}\cos\alpha+0+0\right)d\sigma=0$$

6. Теория поля

6.1. Определения

Def. 1. Дано многомерное пространство $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ называется скалярным полем в Ω

Def. 2. Функция $\vec{F} = (F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x})) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется векторным полем

Nota. Далее будем рассматривать функции в $\mathbb{R}^3$, то есть $u = u(x,y,z)$ и $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$
Nota. Функции u и $\vec{F}$ могут зависеть от времени t. Тогда эти поля называются нестационарными.
В противном случае стационарными

6.2. Геометрические характеристики полей

$u = u(x,y,z)$: l – линии уровня $u = \text{const}$
$\vec{F} = (P,Q,R)$: w – векторная линия, в каждой точке w вектор $\vec{F}$ – касательная к w
Векторная трубка – совокупность непересекающихся векторных линий

Nota. Отыскание векторных линий
Возьмем $\vec{\tau}$ – элементарный касательный вектор, $\vec{\tau} = (dx, dy, dz)$
Определение векторной линии: $\vec{\tau} || \vec{F}$ $\quad \dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$ – система ДУ

Ex. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}, M_0(1,0)$ – ищем векторную линию $w \ni M_0$
Задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xdx = -ydy \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = -y^2 + C \\ y(1) = 0 \Longrightarrow C = +1 \end{cases} \iff x^2 + y^2 = 1$$

6.3. Дифференциальные характеристики

Мет. $\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad}}\ u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}; \dfrac{\partial u}{\partial y}; \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$ – градиент скалярного поля

$\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ – набла-оператор

Nota. Так как $\vec{\nabla}$ – это вектор, то для $\vec{\nabla}$ определены действия:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \dfrac{\partial a_1}{\partial x} + \dfrac{\partial a_2}{\partial y} + \dfrac{\partial a_3}{\partial z}$

- $\vec{\nabla}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$

Причем:

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$ – лапласиан, оператор Лапласа
- $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$ – повторяющиеся строки в определителе

Nota. $\Delta u = \underbrace{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\text{часть волнового уравнения матфизики}} = 0$ – уравнение, определяющее гармоническую функцию $u(x, y, z)$, уравнение Лапласа

Def. 1. Дивергенцией поля (от *divergence* – расхождение) называется $\operatorname{div}\vec{F} \overset{def}{=} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$

Def. 2. Вихрем (ротором) поля называется $\operatorname{rot}\vec{F} \overset{def}{=} \vec{\nabla}\times\vec{F}$

Def. 3. Если $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, то $\vec{F}$ называется безвихревым полем

Def. 4. Если $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, то $\vec{F}$ называется соленоидальным полем

Nota. Безвихревое поле имеет незамкнутые векторные линии, а вихревое – замкнутые

Th. 1. Свойство безвихревого поля: $\operatorname{rot}\vec{F} = 0 \iff \exists u(x, y, z) \mid \vec{\nabla}u = \vec{F}$

$\boxed{\Longrightarrow}$

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Рассмотрим $u = u(x, y, z) \mid \dfrac{\partial u}{\partial x} = P, \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q, \dfrac{\partial u}{\partial z} = R$ – эта функция удовлетворяет системе равенств

$\vec{F} = (P, Q, R) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \vec{\nabla}u$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Дана $\vec{F} = \vec{\nabla}u$

$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}u) = (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})u = 0$

Nota. Доказали, что если векторное поле является градиентом какого-то скалярного, то его вихрь равен нулю: $\operatorname{rot}\overrightarrow{\operatorname{grad}}u = 0$

Def. Пусть $\vec{F} = \vec{\nabla}u$. Поле $u(x, y, z)$ называется потенциалом поля $\vec{F}$
Таким образом, доказано, что безвихревое поле потенциально

Th. 2. Свойство соленоидального поля: если $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, то $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{F} = 0$

6.4. Интегральные характеристики. Теоремы теории поля

Мет. Потоком поля $\vec{F}$ через поверхность S называется величина $\Pi = \iint_S \vec{F}d\vec{\sigma}$

Def. Циркуляцией поля $\vec{F}$ через контур L называется величина $\Gamma = \oint_L \vec{F}d\vec{l} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$

Nota. Запишем **Th.** на векторном языке

1* **Гаусса-Остроградского**

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$
$$\iint_S (P, Q, R)(dydz, dxdz, dxdy) = \iint_S (P, Q, R)(\cos\alpha d\sigma, \cos\beta d\sigma, \cos\gamma d\sigma) = \iint_S \vec{F}\vec{n}d\sigma = \iint_S \vec{F}d\vec{\sigma}$$
$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iiint_T (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})dv = \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}dv$$

Th. Гаусса-Остроградского. Поток поля $\vec{F}$ через замкнутую поверхность равен тройному интегралу дивергенции этого поля по объему внутри поверхности:

$$\iint_S \vec{F}d\vec{\sigma} = \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}dv$$

2* **Стокса**

$Pdx + Qdy + Rdz = \vec{F}d\vec{l}$

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint_L \vec{F}d\vec{l} = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) d\sigma =$$
$$\iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)d\sigma = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\vec{n}d\sigma = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}d\vec{\sigma}$$

Th. Стокса. Циркуляция поля $\vec{F}$ через контур равен интегралу ротора этого поля по поверхности внутри контура

$$\oint_L \vec{F}d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}d\vec{\sigma}$$

3* **Th. О потенциале**

Рассмотрим **Th.** об интеграле, не зависящего от пути. Для поля $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ третий пункт $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ можно представить как $\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$

Так как $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, то по свойству безвихревого поля $\exists u(x,y,z) \mid \vec{\nabla}u = \vec{F}$

Поэтому $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \vec{F}d\vec{l} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, 0\right) \cdot (dx, dy, dz) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \Phi(x,y)$

Th. О потенциале. Для поля $\vec{F} = (P,Q)$ и для любого контура L верно:

$$\oint_L \vec{F}d\vec{l} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{rot}\vec{F} = 0 \Longleftrightarrow \exists u(x,y,z) \mid \vec{\nabla}u = \vec{F}$$

Ex. $\vec{F} = x\vec{i} + xy\vec{j},\ L : x = y, x = -y, x = 1$

По формуле Грина (Стокса) $\oint_L \vec{F}d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D ydxdy \quad \operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$

$\oint_L xdx + xydy = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} = \int_0^1 (x+x^2)dx + \int_{-1}^1 ydy - \int_0^1 (x+x^2)dx = \int_{-1}^1 ydy = 0$

$\iint_D ydxdy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x ydy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^x dx = \int_0^1 0dx = 0$

6.5. Механический смысл

1* Дивергенция

По **Th.** Гаусса-Остроградского поток $\Pi = \iiint_T div\vec{F}dv$

По **Th.** о среднем существует точка $M_1 \in T \ \Big|\ \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}dv = \operatorname{div}\vec{F}\Big|_{M_1} \cdot V_T = \Pi$

$\operatorname{div}\vec{F}\Big|_{M_1} = \frac{\Pi}{V_T}$

Выберем точку M_0 внутри произвольного объема T. Пусть $V_T \to 0$, тогда $\operatorname{div}\vec{F}\Big|_{M_1 \to M_0} =$

$\lim\limits_{V_T \to 0} \dfrac{\Pi}{V_T}$ – поток через границу бесконечно малого объема с центром M_0 или мощность источника в M_0

Таким образом, дивергенция поля – мощность источников

Nota. Смысл утверждения $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$ – поле вихря свободно от источников

Nota. Утверждение $\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} u) = 0$ – поле потенциалов свободно от вихрей

2* Ротор

По **Th.** Стокса циркуляция $\Gamma = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{F} d\vec{\sigma}$

По **Th.** о среднем существует точка $M_1 \;\Big|\; \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{F} d\vec{\sigma} = \operatorname{rot}\vec{F}\Big|_{M_1} \cdot S = \Gamma$

$\operatorname{rot}\vec{F}\Big|_{M_1} = \dfrac{\Gamma}{S}$, будем стягивать поверхность S к точке M_0, тогда $\operatorname{rot}\vec{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{S \to 0} \dfrac{\Gamma}{S}$ – циркуляция по бесконечно малому контуру с центром M_0