4° $f(z)$ аналитична в D ($f : D \longrightarrow D'$), $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in D$. Тогда $\exists g(w) = f^{-1}(z)$ ($g : D' \longrightarrow D$) и $\forall z_0 \in D$ $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$, где $w_0 = w(z)$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Заметим, что $f'(z) \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J \neq 0$

Действительно, если якобиан равен 0, то $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0.$

Аналогично $\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

Значит, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ – противоречие

Если $J \neq 0$, то преобразование $f(z)$ приводит (x,y) в (u,v) взаимно однозначно. Тогда $\exists!$ решение $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$, то есть взаимно однозначно определены $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

Обозначим $g(w) = x(u,v) + iy(u,v)$

Найдем $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$. Рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta z}{\Delta w} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{\Delta w \to 0} \lim\limits_{\substack{\Delta w \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \dfrac{\Delta z}{\Delta w} = \lim\limits_{\substack{\Delta w \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \dfrac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \dfrac{1}{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \dfrac{1}{f'_z(z_0)} \Longrightarrow \lim\limits_{\Delta w \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta w} = g'_w(w_0) = \dfrac{1}{f'_z(z_0)}$ или $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$

5° $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична в D. Тогда $u(x,y), v(x,y)$ – гармонические функции в D

Функция считается гармонической, если $\Delta u = 0$ (здесь $\Delta = \nabla^2$ – лапласиан) $\Longleftrightarrow$ $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Lab.

6° Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична в D и известна $u(x,y)$ или $v(x,y)$, то $f(z)$ определяется однозначно с точностью до const

Пусть известна $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$. Нужно найти $v(x,y)$. По условию Коши-Римана $\int u(x,y), \int v(x,y)$ не зависят от пути (Lab. доказать, что $\int_{AB} dv$ не зависит от пути)

$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_x dx + v_y dy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (-u_y)dx + u_x dy$

Интеграл будет найден с точностью до $\text{const} = C(x_0, y_0)$

2.5. Конформные отображения

Найдем геометрический смысл производной. Рассмотрим отображение $w = f(z)$ $(w : D \longrightarrow G)$ – дифференцируема в точке $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$

Аргумент: В области D рассмотрим гладкую кривую $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$. Образ $\gamma(t)$ – кривая $\sigma(t)$ в G

$\gamma(t)$ в окрестности некоторой точки z_0 гладкая, $\exists$ касательная с углом $\theta = \arg\gamma'(t)$

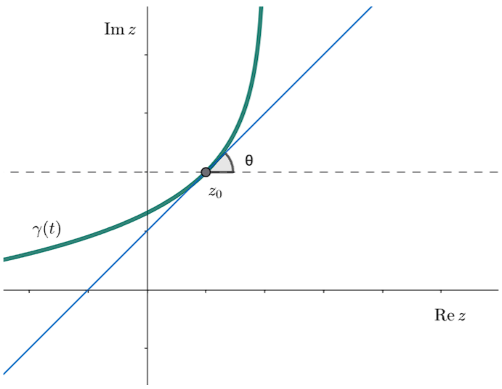
$\sigma(t)$ в окрестности $w_0 = w(z_0)$ гладкая, $\exists$ касательная с углом $\theta' = \arg\sigma'(t)$

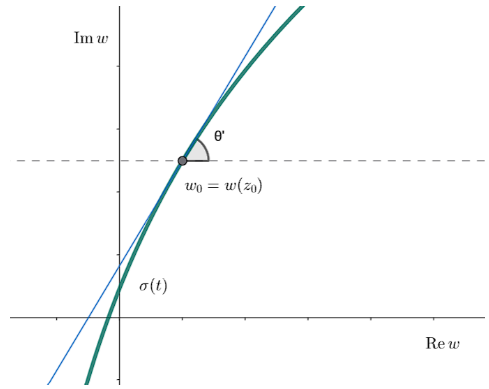
А $\sigma'(t_0) = w'(t_0) = f'(z_0) \cdot \underbrace{\gamma'(t_0)}_{z'(t_0)}$

$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg\gamma'(t_0)$

$\theta' = \arg f'(z_0) + \theta$

$\theta' - \theta = \arg f'(z_0)$ – поворот кривой $\gamma(t)$ вокруг z_0 на угол $\arg f'(z_0)$ при отображении $w = f(z)$





Модуль: $w = f(z)$ – дифференцируема $\Longleftrightarrow \Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$

Рассмотрим $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| = |f'(z_0)| \Longrightarrow |\Delta w| = |f'(z_0)| \cdot |\Delta z| + o(|\Delta z|)$

Рассмотрим малый контур $|\Delta z| = |z - z_0| = \rho$. Тогда $|\Delta w| = |w(z) - w(z_0)| = |f'(z)|\rho + o(\rho)$

Таким образом $w(z)$ растягивает круг $|z - z_0| = \rho$ в $|f'(z_0)|$ раз с точностью до малых высших порядков

Итак, $w = f(z)$ в точке z_0 поворачивает точку у окрестности на угол $\alpha = \arg f'(z_0)$ и растягивает отрезки $[z_0, z]$ в $k = |f'(z_0)|$ раз

Def. Конформное отображение – отображение $w(z)$, сохраняющее углы (между образами и прообразами) и постоянство растяжений

Th. Условия конформности: $\begin{cases} \text{дифференцируемость} \\ \text{однолистность} \\ f'(z) \neq 0 \text{ в } D \end{cases} \iff$ конформно

Ex. $w = az + b$
Mem. Геометрический смысл линейного отображения: b - перенос $z = 0$ в точку $z = b$; $a = |a|e^{i\varphi}$, тогда $|a|$ - коэффициент растяжения, φ - угол поворота
Заметим, $w' = (az+b)' = a$, тогда $k = |w'(z_0)| = |a|$, $\varphi = \arg w'(z_0) = \arg a$
Lab. Проверить, что $w = z^2$ не конформное отображение, найдя $w'(z_0)$

3. Интеграл по комплексной переменной

3.1. Определения

В $\mathbb{C}$ задана кусочно-гладкая кривая K (с концами в точках M и N) параметрическими уравнениями:
$$\begin{cases} x = \varphi(t) & t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ y = \psi(t) & \varphi, \psi - \mathbb{R}\text{-функции} \end{cases}$$
Тогда $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ - задание K в $\mathbb{C}$. Введем отображение $w = f(z)$, действующее на K
Определим интегральные суммы:

1. дробление отрезка MN на частичные дуги: $M = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = N$
   Тогда $\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = \beta$
2. Выбор средных точек в отрезках кривой $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$
3. Сопоставим интегральную сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i$
4. Интегралом от $w = f(z)$ по кривой K называется $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau = \max \Delta z_i \to 0}} = \int_K f(z)dz$, если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения, выбора средних точек и т. д.

При этом интеграл можно представить как $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)(\Delta x_i + i\Delta y_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u(\xi_i, \eta_i) + iv(\xi_i, \eta_i))(\Delta x_i + i\Delta y_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i\Delta x_i - v_i\Delta y_i) + i \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i\Delta y_i + v_i\Delta x_i) = \int_K udx - vdy + i\int_K udy + vdx$

Nota. Мы свели $\mathbb{C}$-интеграл к двум криволинейным $\mathbb{R}$-интегралам, все свойства интегралов сохраняются

Ex. $\int_{\gamma=[0;1+i]} \overline{z} dz = \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) = \int_{\gamma} xdx + ydy + i \int_{\gamma} xdy - ydx = 2 \int_{0}^{1} xdx = 1$