4.3. Существование и единственность решения

Мет. **Th.** Для задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$ если $\exists U(M_0)$, в которой $f(x,y) \in C_{U(M_0)}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ограничена в $U(M_0)$, то в M_0 $\exists! y(x)$ – решение ДУ

Решение ДУ называется особым, если в любой его точке нарушается **Th.** существования и единственности, то есть через каждую точку проходит несколько интегральных кривых

Def. Уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ задает поле интегральных кривых, заполняющих область D. Соответственно точки D могут быть особыми или обыкновенными (выполняются условия **Th.**)

Условия особого решения $P(x,y)$ или $Q(x,y) = 0$

Ex. 1. $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \longrightarrow \sqrt{1-y^2}dx - dy = 0$

Обычное решение:
$\arcsin y = x + C$
$y = \sin(x+C)$

Особое решение:
$p = \sqrt{1-y^2} = 0$
$1 - y^2 = 0 \to y = \pm 1$

Ex. 2. $\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy = dx \longrightarrow y^{-\frac{2}{3}}dy - 3dx = 0$

$y^{\frac{1}{3}} = x + C$
$y = (x+C)^3$

$dy - 3y^{-\frac{2}{3}} = 0$
$P = 0 \Longrightarrow y = 0$

4.4. ДУ высших порядков

Nota. Рассмотрим три типа интегрируемых ДУ

1* Непосредственно интегрирование
$y^{(n)} = f(x)$
Решение: $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$
$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2$$

Ex. См. Задачу 2 в начале

2* ДУ$_2$, не содержащие $y(x)$
$F(x, y'(x), y''(x)) = 0$
Замена $y'(x) = z(x)$, получаем:

$F(x, z(x), z'(x)) = 0$ – ДУ$_1$

Ex. $(1+x^2)y'' + (1+y'^2) = 0 \quad y' = z$

$(1+x^2)z' + 1 + z^2 = 0$

$z' + \dfrac{1+z^2}{1+x^2} = 0 \Longleftrightarrow z' = -\dfrac{1+z^2}{1+x^2} \Longleftrightarrow \dfrac{dz}{1+z^2} = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

$\arctan x = \arctan(-x) + C$

$z = \dfrac{-x + \tan(C)}{1 + x\tan C} = y'$

$y = \displaystyle\int \dfrac{-x + \tan(C)}{1 + x\tan C} dx = \ldots$

3* ДУ$_2$, не содержащие x

$F(y(x), y'(x), y''(x)) = 0$

Замена $y'(x) = z(y) \quad y''(x) = \dfrac{dz(y(x))}{dx} = \dfrac{dz}{dx}\dfrac{dy}{dx} = z'_y y' = z'z$

ДУ: $F(y, z(y), z'(y)) = 0$

Ex. $y'' + y'^2 = yy'$

$y' = z(y) \quad y'' = z'z$

$z'z + z^2 = yz \quad | \ : z \neq 0 \qquad z = 0 \Longrightarrow y = const$

$z' + z = y$ – ЛДУ

1) $z' + z = 0$

$\ln|z| = -y + C$

$z = Ce^{-y}$

2) $C'(y)e^{-y} = y$

$C'(y) = ye^y$

$C(y) = \displaystyle\int ye^y dy = \int y de^y = ye^y - e^y + C_1$

$z(y) = (ye^y - e^y + C_1)e^{-y} = \underbrace{y-1}_{z^*} + \underbrace{C_1 e^{-y}}_{\bar{z}}$

$y' = C_1 e^{-y} + y - 1 \Longrightarrow ? \ldots$

4.5. ЛДУ$_2$

4.5.1. Определения

Def. $a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(x)} + \cdots + a_{n-1}y'(x) + a^n(x)y = f(x)$, где $y = y(x)$ – неизвестная функция, – это линейное дифференциальное уравнение n-ого порядка

Nota. Если $n = 2$, то ЛДУ$_2$, $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = f(x)$ – разрешенное относительно старших производных ЛДУ$_2$

Nota. Если $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$ – ЛДУ$_n$ с постоянными коэффициентами

4.5.2. Решение ЛДУ$_2$ с постоянными коэффициентами

$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$

Для любых $p, q \in \mathbb{R}$ существует уравнение: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ и $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 + \lambda_2 = -p, \lambda_1\lambda_2 = q$ - корни

Назовем уравнение характеристическим (ХрУ)

Nota. $\lambda_{1,2}$ могут быть только

1. вещественными различными;
2. вещественными одинаковыми ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ - корень 2-ой кратности);
3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Запишем ЛДУ$_2$ через $\lambda_{1,2}$:

$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = f(x)$

$y'' - \lambda_1 y' - \lambda_2 y' + \lambda_1\lambda_2 y = f(x)$

$(y' - \lambda_2 y)' - \lambda_1(y' - \lambda_2 y) = f(x)$

Обозначим $u(x) = y' - \lambda_2 y$

Тогда ДУ: $\begin{cases} y' - \lambda_2 y = u(x) \\ u' - \lambda_1 u = f(x) \end{cases}$

Решим: $u' - \lambda_1 u = f(x)$

1) $u' - \lambda_1 u = 0$

$\dfrac{du}{u} = \lambda_1 dx$

$\overline{u} = C_1 e^{\lambda_1 x}$

2) $u' - \lambda_1 u = f(x)$

$u(x) = C_1(x) e^{\lambda_1 x}$

Далее $u(x)$ следует подставить в ДУ с $f(x)$

Поступим лучше, решим ЛОДУ$_2$ ($f(x) = 0$)

Эта система $\begin{cases} y' - \lambda_2 y = u(x) \\ u' - \lambda_1 u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' - \lambda_2 y = u(x) \\ u = C_1 e^{\lambda_1 x} \end{cases}$

Решим $y' - \lambda_2 y = C_1 e^{\lambda_1 x}$:

1) $y' - \lambda_2 y = 0$

$\overline{y} = C_2 e^{\lambda_2 x}$

2) $y' - \lambda_2 y = C_1 e^{\lambda_1 x}$

$y(x) = C_2(x) e^{\lambda_2 x}$

$C_2'(x) e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\lambda_1 x}$

$C_2'(x) = C_1 e^{\lambda_1 - \lambda_2} x$

Далее все зависит от $\lambda_{1,2}$