Лекция 2

Построение модели случайных явлений

1. Задаем пространство элементарных исходов Ω
2. **Def.** Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ-алгеброй событий, если:
   1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
   2) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$;
   3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

   Свойства:
   (a) $\varnothing \in \mathcal{F}$, так как $\Omega \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{F}$
   (b) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

   $\square \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \quad \square$

   (c) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

   $\square \quad A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A, \overline{B} \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \setminus B = A \cdot \overline{B} \in \mathcal{F} \quad \square$

   Ex. 1. $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$
   Ex. 2. $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\}$
   Ex. 3. **Def.** Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - минимальная σ-алгебра, содержащая все возможные интервалы на прямой
3. **Def.** $\sqsupset$ Ω - пространство элементарных исходов, $\mathcal{F}$ - его σ-алгебра событий. *Вероятностью* на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется функция $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ со свойствами:
   (a) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность)
   (b) Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ - несовместное, то $P(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (свойство счетной аддитивности)
   (c) $P(\Omega) = 1$ (условие нормированности)

Def. Из этого тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностным пространством

Свойства вероятности

1. Так как $\varnothing$ и Ω - несовместные, то $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \varnothing) = 1 + P(\varnothing) \Longrightarrow P(\varnothing) = 0$

2. Формула обратной вероятности: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

$\square$ A и $\overline{A}$ - несовместные и $A + \overline{A} = \Omega \Longrightarrow P(A + \overline{A}) = P(\Omega) = 1$ $\square$

3. $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$

Аксиома непрерывности

Th. Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_n = \varnothing$
Тогда $P(A_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$
При непрерывном изменении области $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность $P(A)$ также должна изменятся непрерывно

Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

$\square$
Ясно, что $A_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} A_i \overline{A}_{i+1} + \prod\limits_{i=n}^{\infty} A_i$
$\prod\limits_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cdot \prod\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod\limits_{i=1}^{n} \cdot \prod\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod\limits_{i=1}^{\infty} = \varnothing \Longrightarrow A_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} A_n \overline{A_{n+1}}$ и так как эти события несовместны, то по свойству счетной аддитивности $P(A_n) = \sum\limits_{i=n}^{\infty} P(A_i \overline{A_{i+1}})$ - это остаток (хвост) сходящегося ряда
$P(A_1) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i \overline{A_{i+1}}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} P(A_i \overline{A_{i+1}}) + P(A_n)$ и $P(A_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ по необходимому признаку сходимости
$\square$

Nota. Аксиому счетной аддитивности можно вывести из конечной аддитивности и аксиомы счетной непрерывности

Свойства операций сложения и умножения

1. Свойство дистрибутивности: $A \cdot (B + C) = AB + AC$
2. Формула сложения: если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$
3. Формула сложения вероятностей: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

□

$A+B=A\overline{B}+AB+\overline{A}B$ - несовместные события $\Longrightarrow P(A+B)=P(A\overline{B})+P(AB)+P(\overline{A}B)=(P(A\overline{B})+P(AB))+(P(AB)+P(\overline{A}B))-P(AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$

□

Ex. Из колоды в 36 карт достали одну карту. Какова вероятность того, что будет дама или пика

Пусть Д - дама, П - пика, $P(\text{Д}+\text{П})=P(\text{Д})+P(\text{П})-P(\text{ДП})=\dfrac{4}{36}+\dfrac{9}{36}-\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{3}$

Формула сложения при $N=3$: $P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)-P(A_1A_2)+P(A_1A_2A_3)$

Общий случай: $P(A_1+A_2+\dots+A_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{i<j}P(A_iA_j)+\sum\limits_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+(-1)^{n-1}\cdot P(A_1A_2\dots A_n)$ - формула включения и исключения

Ex. n писем случайно раскладывается по n конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо окажется в своем конверте

$\sqsupset A_i$ - i-ое письмо в своем конверте

$P(A_i)=\dfrac{1}{n}; P(A_iA_j)=\dfrac{1}{A_n^2}; P(A_iA_jA_k)=\dfrac{1}{A_n^3}; P(A_1A_2\dots A_n)=\dfrac{1}{n!}$

Слагаемых вида A_i - n штук; A_iA_j - C_n^2; $A_iA_jA_k$ - C_n^3; $A_1A_2\dots A_n$ - 1 штука

$P(A)=P(A_1+A_2+\dots+A_n)=n\cdot\dfrac{1}{n}-C_n^2\dfrac{1}{A_n^2}+C_n^3\dfrac{1}{A_n^3}-\dots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3!}-\dots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!}$

Так как $e^{-1}=1-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3!}+\dots$, то при $n\to\infty$ $\quad P(A)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1-e^{-1}\approx 0.63$

Независимые события

Под независимыми событиями логично подразумевать события, не связанные причинно-следственной связью (то есть когда факт наступления одного не влияет на оценку вероятности другого)

$\sqsupset|\Omega|=n; |A|=m_1; |B|=m_2$

Проведем пару независимых испытаний. Тогда получаем пространство элементарных исходов $\Omega\times\Omega$ и $|\Omega\times\Omega|=n^2$

По основному принципу комбинаторики $|A\cdot B|=m_1\cdot m_2$

$P(AB)=\dfrac{|A\cdot B|}{|\Omega\times\Omega|}=\dfrac{m_1m_2}{n^2}=P(A)\cdot P(B)$

Def. События A и B называются независимыми, если $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

Lab. $\sqsupset P(A),P(B)\neq 0$, доказать, что если A и B несовместны, то они зависимы

Свойство: Если A и B независимы, то независимы $\overline{A}$ и $\overline{B}$, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B

Доказательство: $A = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}$ - несовместные события $\Longrightarrow P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) \Longrightarrow$ $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}) \Longrightarrow$ независимы

Def. События $A_1, A_2, \dots A_n$ - независимы в совокупности, если для любого набора $i_1, i_2, \dots, i_k$ $(2 \leq k \leq n)$ $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

Nota. Из независимости в совокупности при $k = 2$ получаем попарную независимость. Обратное утверждение неверно

Ex. (С. Бернштейн)
Пусть имеется правильный тетраэдр, одна грань окрашена в красный, вторая в синий, третья в зеленый, а четвертая во все эти три цвета.
Подбросили тетраэдр, $\sqsupset A$ - грань, которая содержит красный цвет, B - синий, C - зеленый.
$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
Так как $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \dfrac{1}{4}$
$P(AB) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = P(A)P(B)$ - попарная независимость
$P(ABC) = \dfrac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$ - но вот независимость в совокупности не соблюдается

Ex. (Шевалье де Мере, Паскаль, Ферма, ≈ 1650 г.)
Какова вероятность того, что при 4 бросании кости выпадет одна шестерка
A_1 - при первом броске шестерка, A_2 - при втором, A_3 - при третьем, A_4 - при четвертом
B - выпала хотя бы одна шестерка при 4 бросках
$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ - совместные события, но независимые
Найдем обратную вероятность: $\overline{B}$ - ни разу не выпала шестерка
$\overline{B} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$
$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = P(\overline{A_4}) = \dfrac{5}{6}$
$\overline{B} = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^4 \approx 0.482$
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 0.52$