

## Лекция 12

### Совместное распределение случайных величин

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  заданы на одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$

**Def.** Случайным вектором  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  называется упорядоченный набор случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве

Случайный вектор задает отображение  $(\xi_1, \dots, \xi_n)(\omega) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Поэтому случайный вектор еще называют многомерной случайной величиной, а соответствующее ей распределение многомерным распределением:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad P(B) = P(\omega \in \Omega \mid (\xi_1, \dots, \xi_n) \in B)$$

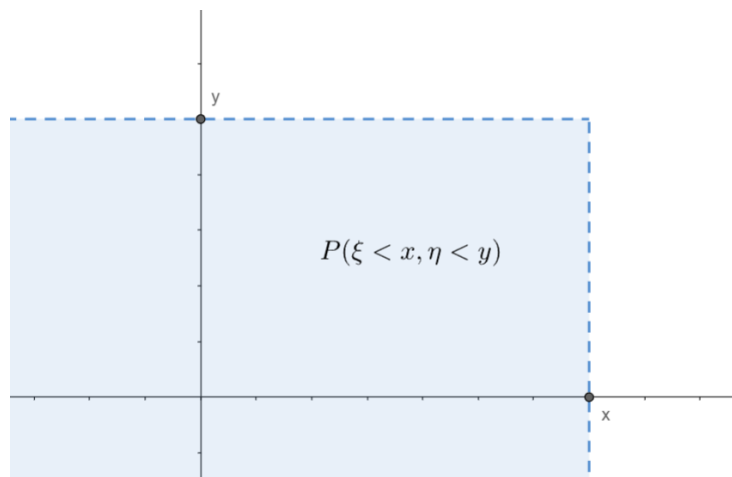
Таким образом, получили новое вероятностное пространство. В качестве элементарных исходов берем точки многомерного пространства, а  $\sigma$ -алгебра - многомерное Борелевская  $\sigma$ -алгебра  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P(B))$

### Функция распределения

**Def.** Функцией совместного распределения случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  называется функция  $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$

*Nota.* Распределение полностью задается функцией распределения

*Nota.* В дальнейшем, в основном, будем рассматривать системы из 2 случайных величин. Функция распределения в данном случае  $F_{\xi, \eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$  - вероятность попадания в эту область.



### Свойства функции распределения

$$1. \ 0 \leq F_{\xi, \eta}(x, y) \leq 1$$

2.  $F_{\xi,\eta}(x, y)$  - неубывающая по каждому аргументу
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F_{\xi,\eta}(x, y) = 1$
4. Восстановление маргинального (частного) распределения:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = F_{\eta}(y)$ , и наоборот -  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = F_{\xi}(x)$
5.  $F_{\xi,\eta}(x, y)$  - непрерывна слева по каждому аргументу
6.  $P(x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2) = F_{\xi,\eta}(x_2, y_2) - F_{\xi,\eta}(x_2, y_1) - F_{\xi,\eta}(x_1, y_2) + F_{\xi,\eta}(x_1, y_1)$

## Независимость случайных величин

**Def.** Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности, если для любого набора Борелевских множеств из  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_n$

$$p(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = p(\xi_1 \in B_1) \cdot p(\xi_2 \in B_2) \cdot \dots \cdot p(\xi_n \in B_n)$$

**Def.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  попарно независимы, если независимы любые две из них

*Nota.* Из независимости в совокупности следует попарная независимость:

$\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности, тогда покажем  $\forall i, j$   $\xi_i$  и  $\xi_j$  - независимы

Возьмем набор  $B_i, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , при  $k \neq i, j$   $B_k = \mathbb{R}$

$$P(\xi_k \in B_k) = 1$$

Тогда  $p(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_i \in B_i, \xi_j \in B_j) = P(\xi_i \in B_i) \cdot P(\xi_j \in B_j)$

*Nota.* Из попарной независимости не следует независимость в совокупности, как видно из примера Бернштейна

Под независимыми величинами будем понимать независимые в совокупности

## Дискретная система двух случайных величин

**Def.** Случайные величины  $\xi, \eta$  имеют совместное дискретное распределение, если случайный вектор  $(\xi, \eta)$  принимает не более, чем счетное число значений, то есть существует конечный или счетный набор пар чисел  $(x_i, y_i)$ , таких что  $P(\xi = x_i, \eta = y_i) > 0, \sum_{i,j} P(\xi = x_i, \eta = y_i) = 1$

Таким образом двумерная дискретная случайная величина задается законом распределения - таблице вероятностей

$\xi \backslash \eta$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_m$
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1m}$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	$\dots$	$p_{nm}$

Условие нормировки:  $\sum_{i,j} p_{i,j} = 1$

Зная общий закон распределения, можно восстановить частное (маргинальное) распределение по формулам:

$$p_i = \sum_{j=1}^m p_{i,j} \quad q_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j}$$

**Def.** Дискретные случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимы, если для любых  $x_1, x_2, \dots, x_n$   
 $p(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n) = p(\xi_1 = x_1) \cdot p(\xi_2 = x_2) \cdot \dots \cdot p(\xi_n = x_n)$

При  $n = 2$ :  $p_{i,j} = p_i \cdot q_j \quad \forall i, j$

Ex.

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1	$p_i$
-1	0.1	0.2	0.1	0.4
2	0.2	0.3	0.1	0.6
$q_j$	0.3	0.5	0.2	$\Sigma = 1$

Найти маргинальное распределение и проверить независимость случайных величин

$\xi$	-1	2	
$p_i$	0.4	0.6	
$\eta$	-1	0	1
$q_j$	0.3	0.5	0.2

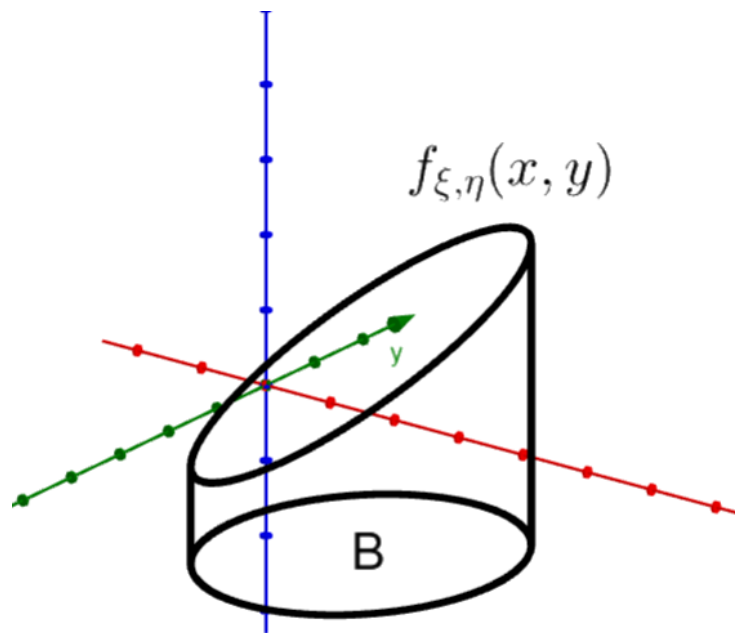
$$p_{11} = 0.1 \neq 0.12 = p_1 \cdot q_1 \quad \implies \xi, \eta - \text{зависимы}$$

## Абсолютно непрерывная система двух случайных величин

**Def.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют абсолютно непрерывное совместное распределение, если  $\exists f_{\xi,\eta}(x, y)$ , такая что  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \quad P((\xi, \eta) \in B) = \iint_B f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy$

Функцию  $f_{\xi,\eta}(x, y)$  будем называть функцией плотности совместного распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$

Геометрический смысл плотности:



#### Свойства плотности:

1.  $f_{\xi, \eta}(x, y) \geq 0$
2. Условие нормировки:  $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy = 1$
3.  $F_{\xi, \eta} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi, \eta}(x, y) dy dx$
4.  $f_{\xi, \eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi, \eta}(x, y)}{\partial x \partial y}$
5. Если случайные величины  $\xi, \eta$  имеют абсолютно непрерывное совместное распределение с плотностью  $f(x, y)$ , то маргинальное распределение величин  $\xi, \eta$  также имеют абсолютно непрерывное распределение с плотностями  $f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi, \eta}(x, y) dy$ ,  $f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi, \eta}(x, y) dx$

$$F_{\xi}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx$$

Из этого  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = f_{\xi}(x)$

6. Так как вероятность попадания в Борелевские множества полностью задается функцией распределения, то условие независимости случайных величин эквивалентно следующему:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимы, если функция общего распределения распадается в произведение отдельных функций распределения

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

7. *Равносильное определение:* абсолютно непрерывные случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  неза-

висимы в совокупности тогда и только тогда, когда плотность совместного распределения

$$f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot f_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(x_n)$$

При  $n = 2$  случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы  $\iff F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) dx \cdot \int_{-\infty}^y f_{\eta}(y) dy = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y) dx dy \implies f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y)$   
 Аналогично для высших размерностей

*Nota.* Совместное распределение абсолютно непрерывных случайных величин не обязано быть абсолютно непрерывным, оно может быть сингулярным

*Ex.* Бросаем точку на отрезок прямой  $y = x$  ( $0 \leq x, y \leq 1$ ),  $\xi$  - абсцисса точки,  $\eta$  - ордината точки

Случайный вектор  $(\xi, \eta)$  имеют сингулярное распределение (непрерывное с нулевой областью) - так как число элементарных исходов несчетно, но мера Лебега в  $\mathbb{R}^2$  отрезка равна 0

*Nota.* Совместное распределение  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  будет сингулярным, если одна из координат является функцией других (наблюдается функциональная зависимость)

## Многомерное равномерное распределение

**Def.**  $\exists D \subset \mathbb{R}^n$  - Борелевское множество в  $\mathbb{R}^n$  с конечной мерой Лебега ( $0 < \lambda(D) < \infty$ ), случайный вектор  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  имеет равномерное распределение, если плотность совместного распределения постоянна в данной области и равна нулю вне данной области

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(D)}, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in D \\ 0, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \notin D \end{cases}$$