

Th. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ($u_n(x) \in C_{[a,b]}$) мажорируем в $D = [a, b]$, то его сумма $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$

□

$S(x)$ непрерывна на $x \in [a, b] \iff \Delta S \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$

$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x), S(x) = S_n(x) + r_n(x)$

$\Delta S_n(x) = S_n(x + \Delta x) - S_n(x)$

$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) = S_n(x + \Delta x) + r_n(x + \Delta x) - S_n(x) - r_n(x)$

$\Delta S(x) = \Delta S_n(x) + r_n(x + \Delta x) - r_n(x)$

$|\Delta S(x)| \leq |\Delta S_n(x)| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)|$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем $\iff \exists$ сходящийся $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mid |u_n(x)| \leq |\alpha_n|$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

и $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid |r_n(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (так как N не зависит от x ; $x + \Delta x \in [a, b]$)

$\Delta S_n = S_n(x + \Delta x) - S_n(x) = u_1(x + \Delta x) - u_1(x) + \dots + u_n(x + \Delta x) - u_n(x)$ - конечная сумма непрерывна

Сама $\Delta S_n(x)$ непрерывна, тогда $\forall \varepsilon > 0$ (при фиксированном N) $\exists \delta > 0 \mid |\Delta S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $|\Delta x| < \delta$

Итак: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ и $\delta > 0 \mid \forall x \in D \mid_{|\Delta x| < \delta} \begin{aligned} |\Delta S_n(x)| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ + |r_n(x + \Delta x)| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ + |r_n(x)| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ = |\Delta S(x)| &< \varepsilon \end{aligned}$

То есть $S(x) \in C_{[a,b]}$

□

Nota. Не все равномерно сходящиеся мажорируются, но у всех $S(x)$ непрерывна

Это позволяет определить $\int_{x_0}^y S(x)dx$, а если $S(x) \in C'_{[a,b]}$, то и $\frac{dS(x)}{dx}$

Th. Если ряд мажорируется на $[a, b]$ и $u_n(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то определен $\int_{x_0}^y S(x)dx$

и $\int_{x_0}^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x)dx$

□

$S(x) = S_n(x) + r_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + r_n(x)$ - конечное число слагаемых из непрерывных функций ($r_n(x)$ как хвост равномерно сходящегося ряда)

Тогда для $x_0, x \in [a, b]$ $\int_{x_0}^x S(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(x) dx + \int_{x_0}^x r_n(x) dx$ - это будет верно, если

$$\int_{x_0}^x r_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

По свойству интегралов $\left| \int_{x_0}^x r_n(x) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |r_n(x)| dx$

$$\left| \int_{x_0}^x r_n(x) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |r_n(x)| dx < \int_{x_0}^x \varepsilon_n dx = \varepsilon_n (x - x_0) \quad (x, x_0 - \text{фикс.})$$

То есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x r_n(x) dx = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(x) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x r_n(x) dx$$

$$\int_{x_0}^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x) dx$$

□

Nota. Почленно интегрируются не просто равномерно сходящиеся, а мажорируемые, иначе остаток необязательно стремится к 0

Th. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем на $[a, b]$ и $u_n(x) \in C'_{[a,b]}$

Тогда $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

□

Пусть $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. Докажем, что $g(x) = S'(x)$

$$\int_{x_0}^x g(x) dx = \int_{x_0}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^x u'_n(x) dx \right) = u_1(x) \Big|_{x_0}^x + u_2(x) \Big|_{x_0}^x + \dots$$

$= (u_1(x) - u_1(x_0)) + (u_2(x) - u_2(x_0)) + \dots = S(x) - S(x_0)$ - разность сходящихся рядов

$$\int_{x_0}^x g(x) dx = S(x) - S(x_0) \implies \left(\int_{x_0}^x g(x) dx \right)' = g(x) = S'(x)$$

□

2. Степенные ряды

Def. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, $c_n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ - степенной ряд с центром x_0 (в точке x_0 , по степеням $(x-x_0)$)

Nota. В частности $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ - степенной с центром в $x_0 = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ легко сводится заменой $x-x_0 = t$ к $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

Th. Абеля.

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_1 . Тогда ряд сходится для любого x , который $|x| < |x_1|$
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в точке x_2 . Тогда ряд расходится $\forall x$ $|x| > |x_2|$

□

1) В точке x_1 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots$ - числовой ряд, сходящийся

В точке x ($|x| < |x_1|$) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = c_0 + c_1 x_1 \frac{x}{x_1} + c_1 x_1^2 \frac{x^2}{x_1^2} + \dots$

Для этого ряда докажем абсолютную сходимость

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = |c_0| + |c_1 x_1| \left| \frac{x}{x_1} \right| + |c_1 x_1^2| \left| \frac{x^2}{x_1^2} \right| + \dots$$

При этом ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится $\Rightarrow \exists M > 0 : |c_n x_1^n| \leq M$

И $\left| \frac{x^k}{x_1^k} \right| < 1$, так как $|x| < |x_1|$

Тогда $|c_0| + |c_1 x_1| \left| \frac{x}{x_1} \right| + |c_1 x_1^2| \left| \frac{x^2}{x_1^2} \right| + \dots + |c_k x_1^k| \left| \frac{x^k}{x_1^k} \right| < M \left(1 + \left| \frac{x}{x_1} \right| + \left| \frac{x}{x_1} \right|^2 + \dots + \left| \frac{x}{x_1} \right|^k \right)$ - геометрическая прогрессия с $|q| < 1$

Таким образом $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \sim M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$, который сходится

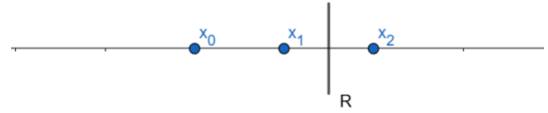
Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ абсолютно сходится (и равномерно?)

б) От противного, используя пункт а)

□

Nota. Заметим, что должно существовать такое R , для которого для всех x меньше R ряд сходится

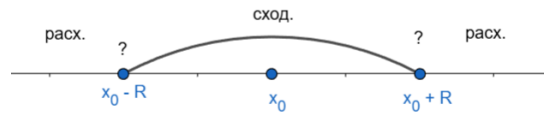
Зафиксируем между x_0 и R число $x_0 < r < R$ - тогда $\sum c_n r^n$ - мажорирует $c_n x^n$, то есть ряд сходится равномерно



Def. $R \in \mathbb{R}^+$ $\left| \forall |x| < R \right.$ ряд сходится, а $\forall |x| > R$ ряд расходится, тогда R называют радиусом сходимости

Для сдвинутого ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \forall x : |x - x_0| < R$ - сходится; $\forall x : |x - x_0| > R$ - расходится

Сходимость ряда в $x_0 \pm R$ нужно проверять специально



Nota. Чаще всего исследование на сходимость проводится по признакам Даламбера, Коши

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x|^{n+1} \frac{n}{|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| = |x| < 1$$

Предварительно $D = (-1; 1)$.

Далее, рассмотрим $x = \pm 1$:

$(x = 1) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ - сходится

$(x = -1) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ - расходится

Итак, $D = (-1; 1]$

3. Ряд Тейлора

Мет. Формула Тейлора: $f(x) \in C_{U_\delta(x_0)}^{n+1}$, тогда $f(x) \stackrel{x \in U_\delta(x_0)}{=} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$

Чтобы $f(x)$ в пределе равнялось $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, нужно, чтобы $r_n(x) \rightarrow 0$