Nota. $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ - подпространства V $(\mathcal{A}: V \to V)$
В общем случае $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \subset V, \operatorname{Im}\mathcal{A} \subset W$ $(\mathcal{A}: V \to W)$

Заметим, что если $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0$, то $\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен

Докажем от противного:
$\rightrightarrows \mathcal{A}$ - не взаимно-однозначен, то есть $\exists x_1, x_2 \in V(x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longleftrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ - противоречие, так как $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0$

Nota. Обратное также верно:

$\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен $\Longleftrightarrow y_1 = y_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$
Докажем от противного: $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} \neq 0$, значит найдется $x = x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ $(x_1 \neq x_2)$, причем по определению ядра $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0$
А так как $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0$, то $\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$ - противоречие

Nota. Также очевидно, что
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = V$
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = V \Longrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = 0$ и $\mathcal{A} = 0$

Th. $\mathcal{A}: V \to V$, тогда $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim V$

Так как $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ - подпространство V, то можно построить дополнение до прямой суммы (взяв базисные векторы ядра, дополнить их набор до базиса V: $e_1^k, \dots e_m^k, e_{m+1}^k, \dots e_n^k$)
Обозначим дополнение W, тогда $Ker\mathcal{A} \oplus W = V \Longrightarrow \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim W = \dim V$
Докажем, что W и $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ - изоморфны
$\mathcal{A}: W \to \operatorname{Im}\mathcal{A}$
$\mathcal{A}: Ker\mathcal{A} \to 0$
Докажем, что $\mathcal{A}$ действует из W в $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ взаимно-однозначно
$\rightrightarrows \mathcal{A}$ не взаимно-однозначный, тогда $\exists x_1, x_2 \in W(x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$
Из этого $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 \overset{\text{обозн.}}{=} x \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, причем $x \neq 0$, так как $x_1 \neq x_2$
Но так как W - дополнение до прямой суммы ($Ker\mathcal{A} \oplus W = V$, то есть $W \cup \operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0$), а $x \in W \cup \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ - противоречие $(x \neq 0)$
Из этого следует, что $\mathcal{A}$ - линейный и взаимно-однозначный $\Longrightarrow \dim W = \dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$
Получается, что V можно представить как прямую сумму $W_1 \oplus W_2$, причем $W_1 = \operatorname{Ker}\mathcal{A}, W_2 = \operatorname{Im}\mathcal{A}$

Def. Рангом оператора $\mathcal{A}$ называется $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$: $\operatorname{rang} \mathcal{A} \overset{def}{=} \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ (также обозначается $\mathrm{r}(\mathcal{A})$ или $\operatorname{rank} \mathcal{A}$)

Nota. Сравним ранг оператора с рангом его матрицы
$\mathcal{A}x = y \quad \mathcal{A} : V^n \to W^m$
A - матрица $\mathcal{A}, x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n, y = y_1f_1 + \dots + y_mf_m$

$$\mathcal{A}x = y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Или при преобразовании базиса $Ae_i = e_i'$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_m' \end{pmatrix}$$

Здесь $\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T$ - это матрица $\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots \end{pmatrix}$

Nota. Поиск матрицы $\mathcal{A}$ можно осуществить, найдя ее в «домашнем» базисе $\{e_i\}$, то есть $A(e_1, \dots, e_n) = (e_1', \dots, e_m')$
Затем, можно найти матрицу в другом (нужном) базисе, используя формулы преобразований (см. **Th.** позже)
Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = K$ - множество векторов, которые решают систему
$AX = 0 \quad (\dim K = m = \dim \text{ФСР} = n - \operatorname{rang} A)$ и при этом $\dim K = n - \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$
$\operatorname{rang} \mathcal{A} = \operatorname{rang} A = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$
Следствия (без доказательств):

1. $\operatorname{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \le \operatorname{rang}(\mathcal{A})$ (или $\operatorname{rang} \mathcal{B}$)
2. $\operatorname{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \ge \operatorname{rang}(\mathcal{A}) + \operatorname{rang}(\mathcal{B}) - \dim V$

Nota. Рассмотрим преобразование координат, как линейный оператор $T : V^n \to V^n$ (переход из системы $Ox_i \to Ox_i'$, $i = 1..n$)
$\dim \operatorname{Im} T = n, \dim \operatorname{Ker} T = 0 \Longrightarrow T$ - взаимно-однозначен
Поставим задачу отыскания матрицы в другом базисе, используя $T_{e \to e'}$

2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису

Th. $\mathcal{A} : V^n \to V^n$

$\{e_i\} \overset{\text{об}}{=} e$ и $\{e_i'\} \overset{\text{об}}{=} e'$ - базисы пространства V

$\mathcal{T} : V^n \to V^n$ - преобразование координат, то есть $Te_i = e_i'$

$\sqsupset A, A'$ - матрицы $\mathcal{A}$ в базисах e и e'

Тогда $A' = TAT^{-1}$ $(A'_{e'} = T_{e\to e'}AT^{-1}_{e\to e'})$

Пусть $y = \mathcal{A}x$, где x, y - векторы в базисе e $(x_e = x'_{e'}$ - один вектор)

$y' = \mathcal{A}x'$, где x', y' - векторы в базисе e'

$\mathcal{T}x = x', \mathcal{T}y = y'$

$y = Ax,\ y' = A'x'$, тогда $Ty = A'(Tx) \quad \Big| \cdot T^{-1}$

$T^{-1}Ty = (T^{-1}A'T)x$

$Ax = y = (T^{-1}A'T)x$

$A = T^{-1}A'T \Longrightarrow A' = TAT^{-1}$