

Лекция 1

В теории вероятности обычно изучают случайные события

Обычно наука занимается закономерностями, но так как в случайных экспериментах нет закономерностей, теория вероятности занимается поиском закономерности в сериях случайных экспериментах

Итак, в XVI веке начали с экспериментов бросков монеты:

число бросков	число гербов	частота
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

Как можно видеть, частота стремится к 0.5 - появляется статистическая закономерность

Статистическое определение вероятности

Пусть проводится n реальных экспериментов, при которых событие A появилось n_A раз

Отношение $\frac{n_A}{n}$ называется частотой события A

Эксперименты показывают, что при увеличении числа n частота стабилизируется у некоторого числа, при котором мы понимаем статистическую вероятность: $P(A) \approx \frac{n_A}{n}$ при $n \rightarrow \infty$

Пространство элементарных исходов. Случайные события

Def. Пространством элементарных исходов Ω называется множество, содержащее все возможные исходы экспериментов, из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются элементарными исходами и обозначаются ω

Def. Случайными событиями называется подмножество $A \subset \Omega$. События A наступают, если произошел один из элементарных исходов из множества A

Ех. 1. Бросок монеты: $\Omega = \{\Gamma, P\}$, $A = \{\Gamma\}$ - выпал герб

Ех. 2. Игральная кость: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$

Ех. 3. Монета бросается дважды.

а) Учитываем порядок: $\Omega = \{\Gamma\Gamma, PP, P\Gamma, \Gamma P\}$

а) Не учитываем порядок: $\Omega = \{\Gamma\Gamma, PP, \Gamma P\}$

Ех. 4. Кубик дважды: $\Omega = \{\langle i, j \rangle \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$

$A = \{\text{разность } \dot{=} 3\} = \{\langle 1, 4 \rangle; \langle 4, 1 \rangle; \langle 2, 5 \rangle; \langle 5, 2 \rangle; \dots\}$

Ex. 5. Монета бросается до первого герба: $\Omega = \{\Gamma, \text{РГ}, \text{РРГ}, \dots\}$ - счетно-бесконечное множество

Ex. 6. Монета бросается на плоскость: $\Omega = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R}, \langle x, y \rangle - \text{центр монеты}\}$ - несчетное число исходов

Операции над событиями

Ω - достоверные события (наступают всегда)

\emptyset - невозможное события (никогда не наступает, так как не содержит ни одного элем. исхода)

Введем операции:

Def. 1. Суммой $A + B$ называется событие, состоящее в том, что произошло события A или событие B (хотя бы одно из них)

Def. 2. Произведением $A \cdot B$ называется событие, состоящее в том, что произошло событие A и событие B (оба из них)

Nota. $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ - произошло хотя бы одно из этих событий

$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots$ - произошли все эти события

Def. 3. Противоположным A событием называется событие \bar{A} , состоящее в том, что событие A не произошло

Nota. $\bar{\bar{A}} = A$

Def. 4. Дополнение (разность) $A \setminus B$ называется событие $A \cdot \bar{B}$

Def. 5. События A и B называются несовместными, если их произведение - пустое множество (не могут произойти одновременно при одном эксперименте)

Def. 6. События A влекут события B , если $A \subset B$ (если наступает A , то наступит B)

Вероятность

Мы хотим присвоить какую-то числовую характеристику к каждому событию, отражающее его частоту наступления: $0 \leq P(A) \leq 1$ - вероятность наступления события A

Классическое определение вероятности

Пусть пространство случайных событий Ω содержит конечное число равновозможных исходов, тогда применимо классическое определение вероятности

Def. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$, где n - число всех возможных исходов, m - число благоприятных исходов

В частности, если $\Omega = n$ и A_i - элем. исх., то $P(A_i) = \frac{1}{n}$

Свойства:

- 1) $0 \leq P(A) \leq 1$
- 2) $P(\Omega) = 1$ ($m = n$)
- 3) $P(\emptyset) = 0$ ($m = 0$)
- 4) Если события A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Геометрическое определение вероятности (граф де Бюффон)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутая ограниченная область

$\mu(\Omega)$ - мера Ω в \mathbb{R}^n (например, длина отрезка, площадь области на плоскости, объем тела в пространстве)

В эту область наугад бросаем точку. «Наугад» означает, что вероятность попадания в A зависит только от меры A и не зависит от ее расположения

В этом случае применимо геометрическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Ех. 1. Монета диаметром в 6 см бросается на пол, вымощенной квадратной плиткой со стороной 20 см, какова вероятность, что монета окажется целиком внутри одной плитки

$$\mu(\Omega) = 20^2 = 400$$

$$\mu(A) = (20 - 3 - 3)^2 = 196$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{196}{400} = 0.49$$

Ех. 2. Задача Бюффона об игле: пусть пол вымощен ламинатом, $2l$ - ширина доски, на пол бросается игла длины, равной ширине доски, найти вероятность того, что игла пересечет стык доски

Определим положение иглы координатами центра и углом, между иглой и стыком доски, причем можно считать, что эти величины независимы

$x \in [0; l]$ - расстояние от центра до ближайшего края,

$\varphi \in [0; \pi]$ - угол

$$\Omega = [0; l] \times [0; \pi]$$

Событие A (пересечет стык) наступает, если $x \leq l \sin \varphi$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

$$S(\Omega) = \pi l$$

$$S(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^\pi = -l(-1 - 1) = 2l$$

$$P(A) = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$

