

1.4. Комплексная функция

1° Определение

Mem. $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R} \stackrel{def}{\iff}$ отображение такое, что $\forall x \in E \exists! y \in D \mid y = f(x)$

Def. $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \stackrel{def}{\iff}$ отображение такое, что $\forall z \in D \exists w \in G \mid f(z) = w$

Def. Если $\forall z \in D \exists! w \in G$, то f называется однозначной функцией

Def. Если $\forall z_1, z_2 \in D (z_1 \neq z_2) \implies f(z_1) \neq f(z_2)$, то f называется однолистной функцией

Ex. 1. $w = \sqrt{z}$ - неоднозначная функция

$$\square z = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{1} \left(\cos \frac{2\pi k}{2} + i \sin \frac{2\pi k}{2} \right)$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = -1$$

Ex. 2. $w = z^2$ - однолистная функция

$$z_1 = 1, z_2 = -1 \quad w(z_1) = w(z_2) = 1$$

Nota. Если $f(z)$ однозначна и однолистка, то $f(z)$ - взаимно однозначное соответствие (биекция).

Тогда $\exists g(x) \mid g(f(x)) = x$

Комплексную функцию $f(z)$ можно представить как $u(x, y) + iv(x, y)$, где $x + iy = z$

$$Ex. \quad w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$$

$$u(x, y) = (x^2 - y^2), \quad v(x, y) = 2xy$$

2° Предел

Def. $L \in \mathbb{C}, f : D \longrightarrow G, \quad L \stackrel{def}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid z \in D, z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0) \implies f(z) \in U_\varepsilon(L)$

В определении существование и значение L не должно зависеть от пути, по которому z приближается к точке сгущения z_0 . Может быть так, что для любого направления стремления предел есть, но в общем смысле не существует

$$Ex. \quad f(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right) \quad \square z = \rho e^{i\varphi}$$

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}} - \frac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} \right) = \frac{1}{2i} (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}) = \frac{1}{2i} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi - \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = \sin 2\varphi$$

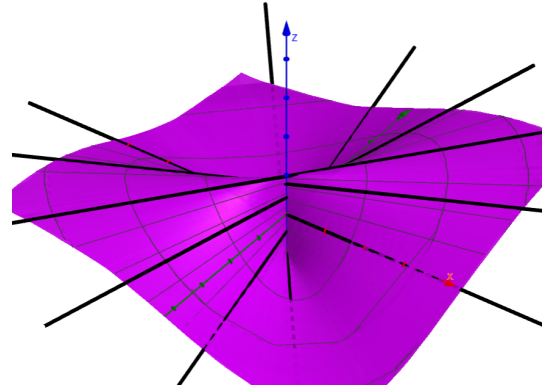
Зафиксируем $\varphi = \varphi^* \in [0; 2\pi)$, тогда $\sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi = \varphi^*}} f(z) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi = \varphi^*}} \sin 2\varphi = \sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$$

Значения предела занимает отрезок $[-1; 1] \Rightarrow$

$$\nexists \lim_{z \rightarrow 0} f(z)$$

На рисунке изображена $\sin 2\varphi$, на оси Oz изображена $\Re w$. Черные линии - это возможные пути приближения z к 0



Nota. Путь следования предела аналогичен левостороннему и правостороннему пределами \mathbb{R} -функций

Def. Непрерывность функций в точке z_0 .

$f : D \rightarrow G, z_0 \in D, f(z)$ называется непрерывной в z_0 , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

На языке приращений: $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$

$$\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta \rho \rightarrow 0$$

3° Элементарные комплексные функции

Ex. 1. Линейная $f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$

Эта функция однозначная, однолистная $\Rightarrow \exists f^{-1}(z) = g(z) = \frac{z - b}{a}$

Геометрический смысл:

$$a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$$

$az = |a||z|(\cos(\varphi_a + \varphi_z) + i \sin(\varphi_a + \varphi_z))$ - поворот и растяжение ($\varphi_a = \arg a, \varphi_z = \arg z$)

$az + b = (x_{az} + x_b) + i(y_{az} + y_b)$ - сдвиг

То есть линейная функция - композиция из поворота, растяжения и сдвига

Ex. 2. Степенная $w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$ - однозначная, может быть неоднолистной

Для $n \in \mathbb{Q}$ функция становится неоднозначной

$$\text{Ex. } w = z^2 \quad z = \rho e^{i\varphi}, w = \rho^2 e^{2i\varphi}$$

Пусть $z_1 \neq z_2$ и $w(z_1) = w(z_2)$, тогда $\arg z_1 = \arg z_2 \pm \pi$

$$w(z_1) = \rho^2 e^{2i \arg z_1} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + 2\pi k)}$$

$$w(z_2) = \rho^2 e^{2i \arg z_2} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + \pi)} = \rho^2 e^{i(2 \arg z_1 + 2\pi)} = w(z_1)$$

Область однолистности z^2 - множество точек, для которых $\arg z \in [0; \pi)$

Точку $w = 0$ называют точкой разветвления

Ex. $w = z^{-1} = \frac{1}{z}$ $w(0) = \infty, w(\infty) = 0$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - функция обратима

$$w = re^{i\psi} = \frac{1}{\rho e^{i\phi}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \implies |w| = \frac{1}{|z|}, \arg w = -\arg z$$

Преобразование $|w| = \frac{1}{|z|}$ называется инверсией, а $\arg w = -\arg z$ дает симметрию относительно $\Re z$

Ex. 3. Рациональная $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \quad n, m \in \mathbb{N}$

Ex. 4. Показательная $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

Свойства:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
2. $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$
3. $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ - показательная функция периодична с периодом $2\pi i$

Ex. 5. Логарифмическая $w = \operatorname{Ln} z$

Если $e^w = e^{u+vi} = e^u (\cos v + i \sin v) = z = |z| e^{i \arg z}$, то $u = \ln |z|, v = \arg z + 2\pi k$

Тогда $\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k)}$

$\ln z = \operatorname{Ln} z$ при $k = 0$ - т. н. главное значение

