Ex. Пример мультиномиальной теоремы:
$(x+y+z)^4 = 1(x^4+y^4+z^4)+4(xy^3+xz^3+x^3y+yz^3+y^3z+yz^3)+6(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)+12(xyz^2+xy^2z+x^2yz)$
Доказательство:

$(x_1+\dots+x_r)^n = \sum\limits_{\substack{i_j\in[r]\\ j\in[n]}} x^1_{i_1}\cdot\dots\cdot x^1_{i_n} = \sum\limits_{\substack{i_j\in[r]\\ j\in[n]}} x_1^{k_1}\cdot\dots\cdot x_r^{k_r}$, где k_t – количество x с индексом t в одночлене ($k_t = |\{j\in[n] | i_j = t\}|$)

Получается мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{k_1,\dots,k_r}$ будет равен количество способов поставить k_1 единиц в индексы в $x^1_{i_1}\cdot\dots\cdot x^1_{i_n}$, k_2 двоек в индексы и так далее

У нас есть $\binom{n}{k_1}$ способов поставить единицу в индексы в одночлен, $\binom{n-k_1}{k_2}$ способов поставить двойку и т. д., получаем:

$\binom{n}{k_1,\dots,k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} = [n-k_1-\dots-k_r=0] = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\dots\frac{(n-k_1-\dots-k_{r-1})!}{k_r!0!} = \frac{n!}{k_1!\dots k_r!}$

- **Перестановка мультимножества** Σ^* (Permutations of a multiset Σ^*)
  $\Sigma^* = \{\triangle^1,\triangle^2,\square,\star\} = (\Sigma, r) \quad r:\Sigma\to\mathbb{N}_0 \quad n = |\Sigma^*| = 4 \quad s = |\Sigma| = 3$

  Nota. $\begin{cases}\triangle^1,\triangle^2,\square,\star\\ \triangle^2,\triangle^1,\square,\star\end{cases}$ считаются равными перестановками

  $|P^*(\Sigma^*, n)| = \frac{n!}{r_1!\dots r_s!} = \binom{n}{r_1,\dots,r_s}$ – количество перестановок мультимножества, где r_i – количество i-ого элемента в мультимножестве
- k**-комбинация бесконечного мультимножества** (k-combinations of infinite multiset) – такое субмультимножество размера k, содержащее элементы из исходного мультимножества. При этом соблюдается, что количество какого-либо элемента r_i в исходном мультимножестве не больше размера комбинации k
  $\Sigma^* = \{\infty\cdot\triangle, \infty\cdot\square, \infty\cdot\star, \infty\cdot🐈\}^* \quad n = |\Sigma^*| = \infty$
  $\Sigma = \{\triangle,\square,\star,🐈\} \quad s = |\Sigma| = 4$

  Ex. 5-комбинация: $\{\triangle,\star,\square,\star,\square\}$
  Разделяем на группы по Σ палочками:
  $\triangle\Big|\square\square\Big|\star\star\Big|$
  Заменяем элементы на точечки – нам уже не так важен тип элемента, потому что мы знаем из разделения:

$\bullet\Big|\bullet\bullet\Big|\bullet\bullet\Big|$

(другой *Ex.* $\bullet\bullet\bullet\bullet\Big|\Big|\Big|\bullet = \{4\cdot\triangle, 1\cdot$ 🐈 $\}$)

Получается всего k точечек и $s-1$ палочек, всего $k+s-1$ объектов. Получаем мультимножество $\{k\cdot\bullet, (s-1)\cdot\Big|\}$ (*Star and Bars method*)

Получаем количество перестановок этого мультимножества: $\dfrac{(k+s-1)!}{k!(s-1)!} = \dbinom{k+s-1}{k, s-1} = \dbinom{k+s-1}{k} = \dbinom{k+s-1}{s-1}$

что и является количеством возможных k-комбинаций бесконечного мультимножества

- **Слабая композиция** (Weak composition) неотрицательного целого числа n в k частей – это решение $(b_1, \dots, b_k)$ уравнение $b_1 + \dots + b_k = n$, где $b_i \geq 0$

  $|\{\text{слабая композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \dbinom{n+k-1}{n, k-1}$

  Для решения воспользуемся аналогичным из доказательства мультиномиальной теоремы приемом:

  $n = 1+1+1+\dots+1$

  Поставим палочки:

  $n = 1+1\Big|1\Big|\dots+1$

  Получаем задачу поиска количеств k-комбинаций в мультимножестве: $\{n\cdot 1, (k-1)\cdot\Big|\}$; получаем $\dbinom{n+k-1}{n, k-1}$

- **Композиция** (Composition) – решение для $b_1 + \dots + b_k = n$, где $b_i > 0$

  $|\{\text{композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \dbinom{n-k+k-1}{n-k, k-1}$

  Мы знаем, что одну единичку получит каждая b_i, поэтому мы решаем это как слабую композицию для $n-k$ в k частей

- **Число композиций n в некоторой число частей** (Number of all compositions into some number of positive parts)

  $\sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$

  Пусть $t = k-1$, тогда $\sum\limits_{t=0}^{n-1} \dbinom{n-1}{t} = 2^{n-1}$

- **Разбиения множества** (Set partitions) – множество размера k непересекающихся непустых подмножеств

Ex. $\{1,2,3,4\}, n=4, k=2 \longrightarrow$ [разбиение в 2 части] $\rightarrow$
$$\begin{aligned}&\{\{1\},\{2,3,4\}\},\\&\{\{1,2\},\{3,4\}\},\\&\{\{1,2,3\},\{4\}\},\\&\{\{1,3\},\{2,4\}\},\\&\{\{1,4\},\{2,3\}\},\\&\{\{2\},\{1,3,4\}\},\\&\{\{3\},\{1,2,4\}\}\end{aligned}$$

$|\{$разбиение n элементов в k частей$\}| = \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} = S_k^{II}(n) = S(n,k)$ – число Стирлинга второго рода

Для примера выше число Стирлинга $S(4,2) = \left\{\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right\} = 7$

Согласно Википедии для формулы Стирлинга есть формула: $S(n,k) = \dfrac{1}{k!}\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\dbinom{k}{j}j^n$

- **Формула Паскаля** (Pascal's formula)
  $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k}$

- **Рекуррентное отношение для чисел Стирлинга** (Recurrence relation for Stirling$^{(2)}$ number):
  $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} + k \cdot \left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}$
  Возьмем какое-либо разбиение для $n-1$ элементов на k частей, тогда возможны два случая:
  1. В k-ое множество нет ни одного элемента, тогда мы обязаны в него положить наш n-ый элемент по определению, количество перестановок будет равно $\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} \cdot 1$
  2. В k-ом множестве уже есть элементы, тогда все множества будут заполнены и у нас будет выбор из k множеств, куда положить k-ый элемент, то есть $k \cdot \left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}$

  Эти два случая независимы, поэтому получаем $\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} + k \cdot \left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}$

- **Число Белла** (Bell number) – количество всех неупорядоченных разбиений множества размера n
  Число Белла вычисляется по формуле: $B_n = \sum\limits_{m=0}^{n} S(n,m)$

- **Целочисленное разбиение** (Integer partition) – решение для $a_1 + \dots + a_k = n$, где

$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$

$p(n,k)$ – число целочисленных разбиений n в k частей

$p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(n,k)$ – число всех разбиений для n

Ex. $5 = 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$