

$$\text{Ex. } I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left( e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} \right)'_\alpha dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1}{x} \cos \alpha x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \alpha x dx = e^{-x} \frac{\alpha \sin \alpha x - \cos \alpha x}{\alpha^2 + 1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1 + \alpha^2}$$

$$\text{Из этого следует, что } I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \alpha^2} dx = \arctg(\alpha) + C$$

Так как  $I(\alpha)$  – несобственный интеграл, это функция, а не семейство функций. Найдём  $C$ .

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin 0 \cdot x}{x} dx = 0 \implies C = 0 \text{ Таким образом, } I(\alpha) = \left( \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \right)'_\alpha = \arctg(\alpha)$$

Ex. Гамма-функция

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (\alpha > 0)$$

Исследуем на сходимость:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

На отрезке  $[0; 1]$   $e^{-x} \in [0; 1]$ . Тогда  $0 \leq \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^{\alpha-1} dx \implies$  интеграл сходится

Пусть  $n > \alpha - 1, n \in \mathbb{N}$ , тогда:

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \leq \int_1^{+\infty} x^n e^{-x} dx - \text{по частям, появятся } x^k e^{-x} \Big|_1^{+\infty} \rightarrow 0 \text{ и } \int_1^{+\infty} e^{-x} dx \text{ сходится}$$

Найдём формулу для  $\Gamma(\alpha)$ :

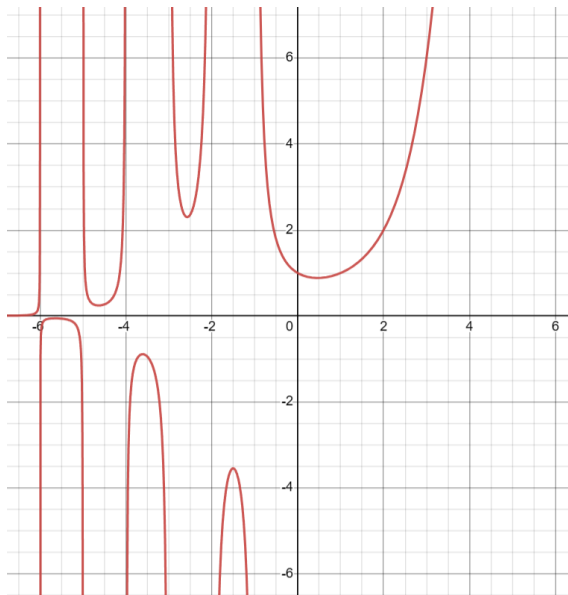
$$\alpha \in \mathbb{N} \quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} d e^{-x} =$$

$$-x^{\alpha-1} e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^{\alpha-2} (\alpha-1) e^{-x} dx = (\alpha-1) \Gamma(\alpha-1) = (\alpha-1)! \Gamma(1) = (\alpha-1)!$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

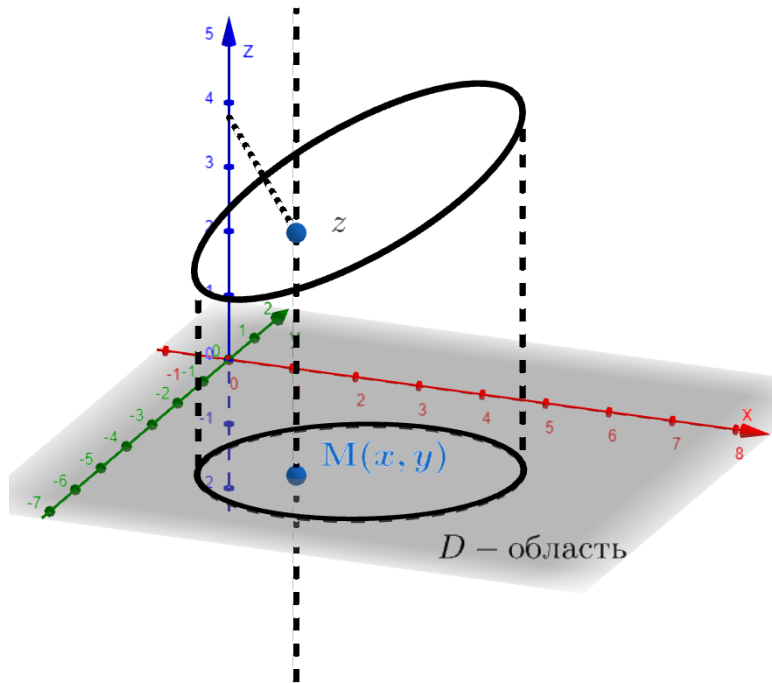
Lab. Посмотреть, как обобщается понятие факториала на вещественные числа:



## 4. Функция нескольких переменных (ФНП)

### 4.1. Определение

*Nota.* Дадим определение функции нескольких переменных



$\forall M(x, y) \exists! z \in \mathbb{R} : z = f(x, y) \iff z = f(x, y)$  – функция двух переменных

**Def.** Окрестность точки  $M_0(x_0, y_0)$

$U_\delta(M_0) = \{(x, y) \in Oxy : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2, \delta > 0 - \text{радиус}\}$

$\overset{\circ}{U}_\delta(M_0) = U_\delta(M_0) \setminus \{M_0\}$  – выколота окрестность

*Nota.*  $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ , одновременное стремление  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  можно заменить  $\Delta \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0$

**Def.**  $\lim_{M \rightarrow M_0} z(x, y) = L \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall M \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0) \mid z(x, y) - L < \varepsilon$

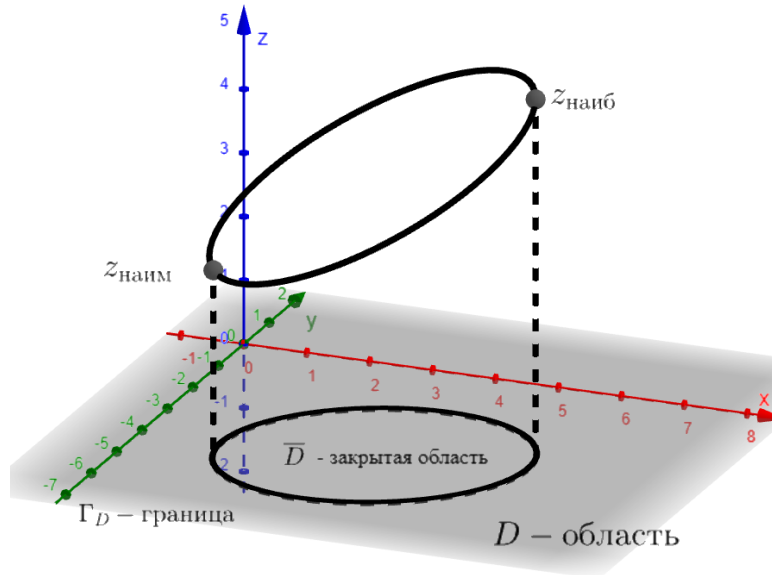
Здесь  $M_0$  – точка сгущения, и  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

*Nota.* На плоскости  $Oxy$  возможно стремление  $M \rightarrow M_0$  по разным путям  $F(x, y) = 0$  (уравнение кривой)

При этом значение предела вдоль разных путей могут отличаться (аналог односторонних пределов)

Предел в определении – предел в общем смысле: его существование и значение не зависит от пути

**Def.**  $z = f(x, y)$  называется непрерывной в точке  $M(x_0, y_0)$ , если  $z = f(x_0, y_0) = \lim_{M \rightarrow M_0} z(x, y)$   
 $z$  непрерывна на  $D$ , если  $z$  непрерывна  $\forall (x, y) \in D$



*Nota.* Справедливы теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши для функции, непрерывной в заданной области

$z = f(x, y)$  непрерывна на  $\bar{D} = D \cup \Gamma_D$ , где  $\bar{D}$  - закрытая область,  $D$  - открытая область,  $\Gamma_D$  - граница

**Th. W1.**  $z = f(x, y)$  ограничена на  $\bar{D}$

**Th. W2.** Для функции  $z = f(x, y)$  существуют наибольшее и наименьшее  $z$  для  $(x, y) \in \bar{D}$

**Th. В-С1.** На границе  $\Gamma_D$   $z$  принимает значения разных знаков  $\implies \exists M \in \bar{D} : z(M) = 0$

**Th. В-С1.**  $z(x, y)$  принимает все значения от  $z_{\text{наим}}$  до  $z_{\text{наиб}}$

## 4.2. Производные функции двух переменных

Пути  $l_1, l_2$  соответствуют кривые  $L_1, L_2$  на поверхности  $z = f(x, y)$ .

Пользуясь геометрическим смыслом производной, заметим, что касательные к  $L_1, L_2$  могут быть различными.

Поэтому для определения производной выберем координатные направления  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$

$$z = f(x = c, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}, \text{ где } \Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$$

**Def.** Частной производной  $z = f(x, y)$  по  $y$  называется  $\frac{\partial z}{\partial y} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$

Lab. Аналогично дать определение  $\frac{\partial z}{\partial x}$

*Nota.*  $\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$  и  $\Delta_y z$  называют частным приращением

**Def.** Полное приращение  $\Delta z \stackrel{\text{def}}{=} z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)$

*Nota.* При этом  $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$  !!!

Обозначение:  $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = z_x, \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = z_y$

Как определить функцию, дифференцируемую в точке?

По аналогии  $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ , где  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta$  – бесконечно малые