Поток Π и циркуляцию Γ называют интегральными характеристиками поля, тогда как дивергенцию $\operatorname{div}\vec{F}$ и ротор $\operatorname{rot}\vec{F}$ – дифференциальными

Nota. Ранее выяснили, что смысл

- потока $\Pi = \oiint_S \vec{F}d\vec{\sigma}$ – количество пройденной жидкости через поверхность за единицу времени;
- дивергенции $\operatorname{div}\vec{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{V\to 0}\dfrac{\Pi}{V}$ – мощность точечного источника (сколько жидкости он «производит» или «потребляет»)
- теоремы Гаусса-Остроградского: поток через замкнутую поверхность равен суммарной мощности источников внутри

Выясним смысл ротора и циркуляции на примере конкретного поля

Ex. $\vec{F} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ – поле линейных скоростей вращающегося твердого тела, где $\vec{\omega} = const$ – угловая скорость

Выберем контур L, ограничивающий область S

Найдем $\Gamma_L = \oint_L \vec{F}d\vec{l} = \oint_L (-\omega y)dx + \omega x dy \overset{\textbf{Th.}\ \text{Стокса}}{=} \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\vec{n}d\sigma = \iint_S \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma d\sigma = \iint_S 2\omega\cos\gamma d\sigma$

Так как ротор сонаправлен оси Oz, получаем $\cos\gamma = 1$

$\iint_S 2\omega\cos\gamma d\sigma = 2\omega\iint_S d\sigma = 2\omega S$

Раньше в интеграле видно, что $\operatorname{rot}\vec{F}\vec{n} \Longrightarrow |\operatorname{rot}\vec{F}| = 2\omega$

То есть механический смысл ротора – удвоенная угловая скорость вращающегося тела (или диска)

Nota. Чтобы уточнить смысл Γ, рассмотрим такое же поле жидких скоростей (водоворот) $\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ и погруженное в него колесо с лопатками (водяная мельница)

В качестве контура L берем обод колеса, а его располагаем под углом γ к вектору $\vec{\omega}$

Все равно $\Gamma_L = \iint_S 2\omega\cos\gamma d\sigma = 2\omega\cos\gamma S$

Если $\gamma = 0$ (мельница расположена в плоскости водоворота), то $\Gamma_L = 2\omega S$ – максимальная мощность вращения нашей мельницы

Если, например, $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ (мельница расположена перпендикулярно водовороту), то $\Gamma_L = 0$ - колесо перпендикулярно полю, поэтому оно не вращается

6.6. Приложения к физике

1* Уравнение неразрывности (в гидромеханике)

Nota. Здесь потребуются формулы: $\dfrac{du(x(t), y(t), z(t))}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}$

$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{F}) = \vec{\nabla}f\cdot\vec{F} + f\cdot(\vec{\nabla}\vec{F})$, где f – скалярное поле, $\vec{F}$ – векторное поле

Задача: дано $\vec{F} = \rho\vec{v}$ – поле скоростей жидкости с весом $\rho = \rho(x, y, z, t)$

Через площадку dS за время dt протекает $d\Pi = \rho v_n dt dS$ или за единицу времени $d\Pi = \rho v_n dS$

Приращение жидкости за единицу времени $|dm| = \left|\dfrac{\partial\rho}{\partial t}dV\right|$

Поток жидкости равен ее убыли в объеме V, то есть $\Pi = \oiint_S \rho v_n dS = -\iiint_V \dfrac{\partial\rho}{\partial t}dV$

Применяя **Th.** Гаусса-Остроградского: $\Pi = \iiint_V \operatorname{div}(\rho\vec{v})dV = -\iiint_V \dfrac{\partial\rho}{\partial t}dV \iff$

$\iff \iiint_V \left(\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right)dV = 0 \quad \forall V$ (поэтому подынтегральная функция $= 0$)

$\iff \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

Учтем: $\dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho\vec{v}$

$\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = \vec{\nabla}\rho\cdot\vec{v} + \rho\vec{\nabla}\vec{v} \iff \vec{\nabla}\rho\vec{v} = \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) - \rho\vec{\nabla}\vec{v}$

$\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\vec{v} = 0$ – уравнение неразрывности (при несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\vec{v} = 0$)

2* Уравнения Максвелла

Экспериментально выяснено, что:

(a) $\int_L \vec{H}d\vec{l} = \iint_S \vec{r}d\vec{\sigma}$ – теорема о циркуляции магнитного поля

(b) $\int_L \vec{E}d\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}d\vec{\sigma}$ – закон Фарадея

где $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля, $\vec{r}$ – полный ток, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{B}$ – индукция магнитного поля

Максвелл узнал, что $\vec{r}$ = ток проводимости + ток смещения = $\lambda\vec{E} + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, где λ – коэффициент проводимости, ε, μ – проницаемость

(a) Закон Ампера: $\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \iint_S \left(\lambda\vec{E} + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)d\vec{\sigma}$

По **Th.** Стокса: $\iint_S \operatorname{rot}\vec{H}d\vec{\sigma} - \iint_S \left(\lambda\vec{E} + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)d\vec{\sigma} = 0$

В векторной форме: $\operatorname{rot}\vec{H} = \left(\lambda\vec{E} + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ – источники магнитного поля, то есть токи проводимости и смещения

(b) Закон Фарадея: $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{E}d\vec{\sigma} = -\iint_S \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{\sigma} \iff \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ – изменение индукции дает электрический ток в соленоиде

(c) Теорема Гаусса: $\vec{\nabla}\varepsilon\vec{E} = \rho$ – электрический заряд является источником индукции электрического поля

(d) Теорема Гаусса для магнитного поля: $\vec{\nabla}\mu\vec{H} = 0$ – магнитное поле не создают «магнитные заряды»