Содержание

§1. Ряды **2**
1. Числовые ряды. Определения . . . 2
2. Свойства числовых рядов . . . 3
3. Условия сходимости рядов . . . 6
3.1. Необходимое . . . 6
3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия) . . . 6
3.3. Достаточное условие (признаки сходимости) . . . 6
4. Знакочередующиеся ряды . . . 10

§2. Функциональные ряды **13**
1. Определения . . . 13
2. Степенные ряды . . . 16
3. Ряд Тейлора . . . 18
3.1. Стандартные разложения элементарных функций . . . 19
3.2. Приложения . . . 21
4. Ряды Фурье . . . 21
4.1. Определение . . . 21
4.2. Оценка коэффициентов Фурье . . . 26
4.3. Интеграл Фурье . . . 27

X. Программа экзамена в 2024/2025 **29**
X.1. Числовые ряды. . . . 29
X.2. Функциональные ряды. . . . 31

§1. Ряды

1. Числовые ряды. Определения

Мет. Числовая последовательность: $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}, u_n \in \mathbb{R}$

Ex. 1. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: $u_n = bq^n$, $\quad \frac{1}{2^n} \overset{n=0,1,\dots}{=} \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$

Ex. 2. $u_n = 1, -1, 1, -1, \dots$

Def. $\{u_n\}$ - последовательность

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ называется числовым рядом

Nota. Начальное значение n произвольно (целое)

Ex. $u_n = \dfrac{1}{(n-4)^3}, \quad n = 5, 6, \dots$

$u_n = \dfrac{1}{n^3}, \quad n = 2024, 2025, \dots$

Nota. u_n называется общим членом ряда

Nota. Существует ли сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и в каком смысле?

Ex. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$ - существует, но бесконечная

Ex. 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \left[\begin{array}{l} 0 + 0 + \dots = 0 \\ 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{array}\right.$

Ex. 5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dots = 2$

Def. Частичная сумма ряда $S_n \overset{def}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

Nota. Последовательность частичных сумм - $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$

Ex. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dots$

$S_1 = u_1 = 1 \quad S_2 = \dfrac{3}{2} \quad S_3 = \dfrac{7}{4} \quad S_4 = \dfrac{15}{8}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = ?$, но проблема заключается в том, что бы найти формулу для S_n

Def. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называют сходящимся, а S называют суммой ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$

Nota. В противном случае ряд расходится, суммы не может быть или она бесконечна

Ex. Поиск суммы по определению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Nota. При исследовании на сходимость используются эталонные ряды

Ex. Геометрический ряд (эталонный): $\sum\limits_{n=0}^{\infty} bq^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} bq^k = b(1+q+q^2+q^3+\dots+q^n) = b\frac{1-q^n}{1-q}$$

Исследуем предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

$|q| < 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q} \lim\limits_{n\to\infty} (1-q^n) = \frac{b}{1-q}$

$|q| > 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \qquad (q^n \to \infty)$

$|q| = 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} b\frac{0}{0}? \qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} bq^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b = \infty \quad (b \neq 0)$

$q = -1 \qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} b(-1)^n$ - расходится (из четвертого примера)

Lab. Доказать при $q = -1$ по def ($S_n = ?$)

2. Свойства числовых рядов

Nota. Свойства рядов используются в арифметических операциях с рядами и при исследовании на сходимость

> **Th. 1.** Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но влияет на сумму
> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=k>1}^{\infty} u_n$ одновременно сходятся или расходятся

□

$S_n^u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$

$S_n^v = \sum\limits_{n=k}^{\infty} v_n \qquad u_n = v_n \quad \forall n \geq k$

$S_n^u = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1}}_{\sigma \in \mathbb{R}} + \underbrace{u_k + \dots + u_n}_{S_n^v} = \sigma + S_n^v$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n^u = \lim\limits_{n\to\infty} (\sigma + S_n^v) = \sigma + \lim\limits_{n+\infty} S_n^v$

Оба предела либо существуют (либо конечны, либо нет), либо не существуют

□

Th. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Тогда $\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$

□ По свойству пределов □

Th. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$ - сходится

□ По свойству пределов $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S \pm \sigma$ □

Nota. Обратное неверно! Теорема разрешает складывать и вычитать сходящиеся ряды, но из сходимости суммы рядов не следует сходимость каждого из них

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad$ но: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходятся

Nota. Докажем расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Ex. Гармонический ряд (эталонный)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots =$

$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \dots = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$

А так как нижний ряд почленно меньше верхнего, а нижний расходится, то и верхний расходится

Так как $u_n \geq v_n$, то $S_n \geq \sigma_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$

$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot n \to \infty \Longrightarrow S_n \to \infty$

Th. 4. Если ряд сходится к числу S, то члены ряда можно группировать произвольным образом, не переставляя, и сумма всех рядов будет равна S

Группировка означает выделение различных подпоследовательностей из последовательности частичных сумм

$\square$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_n^{(k)} = S$, где $S_n^{(k)}$ - подпоследовательность S_n

$\square$

Ex. Было $\sum (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \left[\begin{matrix} 0, \\ 1, \end{matrix}\right.$ так как ряд расходится

Nota. В условиях **Th.** важно, что переставлять члены ряда нельзя

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots$

Далее будет доказано, что этот ряд сходится

Найдем сумму, переставив члены ряда

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) + \dots$

$S = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = \frac{1}{2} S$?!

Nota. Можно доказать, что в подобных рядах перестановкой членов можно получить любое наперед заданное число

Nota. Сходящиеся ряды допускают умножение, но непочленное. В действительности используют формулы перемножения рядов (см. литературу)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$

Тогда $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\right) = S\sigma$

3. Условия сходимости рядов

3.1. Необходимое

Th. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

$\square$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$

$\square$

Nota. Обратное неверно! (см. гармонический ряд)

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (2 + \frac{3}{n}) = 2 \neq 0$

3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия)

Mem. Критерий Коши для последовательности:

$\{x_n\}$ сходится $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0 \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$

Th. (без док-ва)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0 \quad \underset{|S_m - S_n| < \varepsilon}{|u_{n+1} + \dots + u_m| < \varepsilon}$

Nota. Хвост ряда попадает в ε-трубу

Nota. Критерий не удобен для непосредственного исследования на сходимость, в отличии от признаков

3.3. Достаточное условие (признаки сходимости)

Здесь мы рассмотрим:

1. Признак сравнения (в неравенствах)
2. Предельный признак сравнения
3. Признак Даламбера
4. Признак Коши (радикальный)

5. Признак Коши (интегральный)

Далее $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый ряд, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - вспомогательный (уже исследован на сходимость), для простоты $v_n, u_n > 0$ (для отрицательных доказывается аналогично)

Th. 1. Признак сравнения (в неравенствах)

а) $\exists 0 < u_n \leq v_n$. Тогда $\sum v_n$ сходится $\Longrightarrow \sum u_n$ сходится

б) $\exists 0 \leq v_n \leq u_n$. Тогда $\sum v_n$ расходится $\Longrightarrow \sum u_n$ расходится

□

а) Строим частичные суммы:

$\sum v_n$ сходится $\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$

S_n, σ_n возрастают и обе ограничены числом σ

Следовательно $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \leq \sigma$

Аналогично пункт б)

□

Th. 2. Предельный признак

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \left[\begin{array}{l} \sum u_n \text{ сходится, если } \sum v_n \text{ сходится} \\ \sum u_n \text{ расходится, если } \sum v_n \text{ расходится} \end{array}\right.$$

□

По определению предела

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ \left|\dfrac{u_n}{v_n} - q\right| < \varepsilon$

$\left|\dfrac{u_n}{v_n} - q\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow q - \varepsilon < \dfrac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon$

$(q-\varepsilon)v_n < u_n < (q+\varepsilon)v_n$

а) Если $\sum v_n$ сходится, то из правой части неравенства: $0 < u_n < (q+\varepsilon)v_n$

По признаку сравнения $\sum u_n$ также сходится

б) Если $\sum v_n$ расходится, то из левой части неравенства: $0 < (q-\varepsilon)v_n < u_n$

Тогда по пункту б) **Th. 1.** $\sum u_n$ расходится

□

Nota. При $q = 0$ можем говорить, что u_n - бесконечно малая высшего порядка, чем v_n, а значит, если ряд v_n сходится, то u_n сходится

Ex. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится

$\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n^2+n} > \dfrac{1}{n^2+2n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится по признаку сравнения

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится

Начиная с некоторого n_0 $n! > 2^n$. Тогда $u_n < v_n$ при $n > n_0$, по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ сходится

Ex. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \dfrac{1}{n}$

Nota. Члены рядов u_n и v_n - бесконечно малые последовательности. Иначе ряды расходятся по необходимому условию. Тогда в **Th. 2.** сравниваются порядки бесконечно малых, и ряды одновременно сходятся или расходятся, если u_n и v_n одного порядка малости. По этому принципу подбирается вспомогательный ряд

$u_n = \arcsin \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} = v_n \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится

Th. 3. Признак Даламбера

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый, $\exists \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R}^+$

а) $0 \le \mathcal{D} < 1 \quad \Longrightarrow \sum u_n$ сходится

б) $\mathcal{D} > 1 \quad \Longrightarrow \sum u_n$ расходится

в) $\mathcal{D} = 1 \quad \Longrightarrow$ ничего не следует, требуется другое исследование

$\square$

а) По определению предела $\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $0 \le \mathcal{D} < 1 \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \ \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \mathcal{D} \right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D} - \varepsilon < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \mathcal{D} + \varepsilon$

Так как $0 \le \mathcal{D} < 1$, можно втиснуть число r между $\mathcal{D}$ и 1: $\mathcal{D} < r < 1$

Положим $\varepsilon = r - \mathcal{D}$, то есть $\mathcal{D} + \varepsilon = r$

Смотрим правую часть $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < r$ для $\forall n > n_0$, где $n_0 = n_0(\varepsilon), \varepsilon = r - \mathcal{D}$

$u_{n_0+1} < ru_{n_0}$

$u_{n_0+2} < ru_{n_0+1} < r^2 u_{n_0}$

$u_{n_0+l} < r^l u_{n_0}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0-1}}_{k} + u_{n_0} + \dots = k + \sum_{m=1}^{\infty} v_m$$

Члены $v_m < r^l u_{n_0}$; u_{n_0} - фикс. число, а $\sum\limits_{l=1}^{\infty} r^l$ сходится как геометрический при $|r| < 1$

Итак ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty} r^l u_{n_0}$ сходится и почленно превышает $\sum v_m = \left(\sum u_n\right) - k$

То есть $\sum u_n$ сходится

б) Lab. (взять r между $\mathcal{D}$ и 1, $1 < r < \mathcal{D}$, $\mathcal{D} - r = \varepsilon$)

Сравнить $\sum u_n$ с $\sum r^l$ (расходящимся)

$\square$

Ex. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\quad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ - сходится

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\quad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ - расходится

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\quad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ - сходится

Th. 4. Радикальный признак Коши

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \qquad u_n \geq 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R}$

а) $0 \leq K < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ сходится

б) $K > 1 \Longrightarrow \sum u_n$ расходится

Nota. $K = 1$ - ничего не следует

$\square$

а) По определению предела $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ |\sqrt[n]{u_n} - K| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow K - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < K + \varepsilon$ Положим $\varepsilon = r - K$, где $K < r < 1$

$\Longrightarrow 0 \leq u_n < r^n$ - геом. ряд с $|r| < 1$, то есть $\sum r^n$ сходится

б) Аналогично

$\square$

Ex. 1. $\sum\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad K = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}}$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^{-1} \neq 0$ - необходимое условие не выполняется

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $\quad K = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}} = e^{-1} < 1$ - сходится

Th. 5. Интегральный признак Коши

Если существует $f(x) : [1; +\infty] \to \mathbb{R}^+, f(x)$ монотонно убывает, $f(n) = u_n$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

$\square$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} f(x)dx$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{b} u_n = u_2\cdot 1 + u_3\cdot 1 + \dots < \int_1^{b} f(x)dx < u_1\cdot 1 + u_2\cdot 1 + \dots = \sum_{n=1}^{b-1} u_n$

Обозначим $\displaystyle\sum_{n=1}^{b-1} u_n = S_{b-1}, \quad \sum_{n=2}^{b} u_n = S_{b-1} - u_1 + u_b$

$\displaystyle 0 < S_{b-1} - u_1 + u_b < \int_1^{b} f(x)dx < S_{b-1}$

$\displaystyle 0 < \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1 + u_b < \int_1^{\infty} f(x)dx < \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Если $\displaystyle\int$ сходится, то смотрим левую часть

Если $\displaystyle\int$ расходится, то смотрим правую часть неравенства

$\square$

4. Знакочередующиеся ряды

Def. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ $(u_n > 0)$ - знакочередующийся ряд

Th. Признак Лейбница

Если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ верно, что $\underset{n\to\infty}{u_n \to 0}$ и $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ сходится

□

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_n + \dots$

$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$

Все слагаемые в скобках будут больше нуля, тогда частичные суммы будут возрастать

$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$

Здесь же тоже все слагаемые больше нуля - их мы вычитаем из u_1 и получаем число гарантированно меньшее u_1

По **Th.** о монотонности и ограниченности последовательность $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$

$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}; \qquad \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \cancel{\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}}^{0} = S \in \mathbb{R}$

□

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

$u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Longrightarrow$ ряд сходится

Nota. Оценка остатка ряда

Запишем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots \pm u_n \mp u_{n+1} = S + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k u_k = S_n + \underset{\uparrow \text{ остаток ряда}}{R_n}$

В доказательстве **Th.** было установлено, что сумма ряда не превышает своего первого члена

$$R_{n+1} < |(-1)^{k+1}u_k| = u_k = u_{n+1}$$

Ex. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \underbrace{- \frac{1}{32} + \dots}_{R_4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$

$|R_4| < \frac{1}{32}$

Проверка: $-\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) - \left(\frac{1}{128} - \frac{1}{256}\right) - \dots = -\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}$ - <u>Lab.</u> досчитать и сравнить с $\frac{1}{32}$

Nota. Оценка не работает в знакоположительных рядах

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

$R_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots\right) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} > \frac{1}{16}$

Def. Знакопеременный ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где u_n - любого знака и не все u_n одного знака

Ex. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$

Nota. Исследование таких рядов (в том числе знакочередующихся) на сходимость можно проводить при помощи ряда из модулей

Th. Абсолютная сходимость
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

Mem. См. абсолютную сходимость в несобственных интегралах

□

По критерию Коши:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится $\Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0 \quad ||u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m|| < \varepsilon$
По неравенству треугольника:
$|u_n| + |u_{n+1} + \dots + u_m| < |u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < \varepsilon$

□

Nota. Обратное неверно!

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots$ сходится
Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится

Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ сходится, он называется **абсолютно сходящимся**
Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ расходится, он называется **условно сходящимся**
Nota. Для абсолютно сходящихся рядов перестановка членов безболезнена и сохраняет сумму ряда
Nota. На абсолютно сходящиеся ряды распространяются признаки сходимости знакоположительных рядов
1) Признак сравнения: $|u_n| < |v_n|: \ \sum |v_n|$ сходится $\Longrightarrow \sum |u_n|$ сходится
2) Предельный признак: $\lim \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3) $D = \lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$
4) $K = \lim \sqrt[n]{|u_n|} < 1$
5) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сравнивается с $\sum |u_n|$

§2. Функциональные ряды

1. Определения

Def. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется функциональным

Nota. При фиксации переменной x ряд становится числовым

Ex. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

$x = 2 \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n$ расходится

$x = \frac{1}{2} \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится

Таким образом для $|x| < 1$ ряд будет сходящимся, для $|x| > 1$ расходящимся

Def. Множество значений x, при которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется областью сходимости

Def. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится при всех x из некоторого множества E, то сумма ряда - функция $S(x)$

Nota. То есть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$

Запишем остаток: $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Часто удобно исследовать $R_n(x) \to 0$. Также работает критерий Коши

Th. Критерий Коши

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области $D \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon, x)}{n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0\ |u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_m(x)| < \varepsilon$

Nota. Очень неприятно, что n_0 зависит от ε и всякого x

Def. Равномерная сходимость ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области $D \overset{def}{\iff}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall n > n_0\ |R_n(x)| < \varepsilon$

Nota. Доказательства равномерной сходимости по определению сложно, пользуются другими способами

Th. Признак Вейерштрасса

$\exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - числовой ряд такой, что $\alpha_n > 0$, $\sum \alpha_n$ сходится, $|u_n(x)| \le \alpha_n \ \forall n$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходящийся

Nota. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ называется мажорирующим (то есть преобладающий), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - мажорируемым

□

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall n > n_0 \ |R_n^{\alpha}| < \varepsilon$

Заменим на условие $|\alpha_n + \dots + \alpha_m| < \varepsilon$ (кр. Коши)

$|u_n(x) + \dots + u_m(x)| \le |u_n(x)| + \dots + |u_m(x)| \le \alpha_n + \dots + \alpha_m \le \varepsilon$

При этом номер n_0 зависит только от ε

□

Nota. Таким образом всякий мажорируемый ряд равномерно сходится, но не всякий равномерно сходящийся ряд мажорируем

Nota. Установим свойство суммы равномерно сходящегося ряда

Ex. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) = (x^{\frac{1}{3}} - x^1) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}) + \dots;$

$S_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$

При $x > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x) = 1 - x$

При $x < 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-\sqrt[2n+1]{|x|} - x) = -1 - x$

При $x = 0 \quad S_n = 0$

Th. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $(u_n(x) \in C_{[a,b]})$ мажорируем в $D = [a, b]$, то его сумма $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$

□

$S(x)$ непрерывна на $x \in [a, b] \Longleftrightarrow \Delta S \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$

$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x), \ \ S(x) = S_n(x) + r_n(x)$

$\Delta S_n(x) = S_n(x + \Delta x) - S_n(x)$

$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) = S_n(x + \Delta x) + r_n(x + \Delta x) - S_n(x) - r_n(x)$

$\Delta S(x) = \Delta S_n(x) + r_n(x+\Delta x) - r_n(x)$

$|\Delta S(x)| \leq |\Delta S_n(x)| + |r_n(x+\Delta x)| + |r_n(x)|$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем $\iff \exists$ сходящийся $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \;\Big|\; |u_n(x)| \leq |\alpha_n|$

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid |r_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

и $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid |r_n(x+\Delta x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ (так как N не зависит от x; $x + \Delta x \in [a,b]$)

$\Delta S_n = S_n(x+\Delta x) - S(x) = u_1(x+\Delta x) - u_1(x) + \dots + u_n(x+\Delta x) - u_n(x)$ - конечная сумма непрерывна

Сама $\Delta S_n(x)$ непрерывна, тогда $\forall \varepsilon > 0$ (при фиксированном N) $\exists \delta > 0 \mid |\Delta S_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при $|\Delta x| < \delta$

Итак: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ и $\delta > 0 \mid \forall \underset{|\Delta x| < \delta}{x \in D}$
$$\begin{aligned} &|\Delta S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &+ |r_n(x+\Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &+ |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &= |\Delta S(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

То есть $S(x) \in C_{[a,b]}$

□

Nota. Не все равномерно сходящиеся мажорируются, но у всех $S(x)$ непрерывна

Это позволяет определить $\int_{x_0}^{y} S(x)dx$, а если $S(x) \in C'_{[a,b]}$, то и $\dfrac{dS(x)}{dx}$

Th. Если ряд мажорируется на $[a,b]$ и $u_n(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то определен $\int_{x_0}^{y} S(x)dx$ и $\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(x)dx$

□

$S(x) = S_n(x) + r_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + r_n(x)$ - конечное число слагаемых из непрерывных функций ($r_n(x)$ как хвост равномерно сходящегося ряда)

Тогда для $x_0, x \in [a,b]$ $\quad \int_{x_0}^{x} S(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} u_k(x)dx + \int_{x_0}^{x} r_n(x)dx$ - это будет верно, если $\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

По свойству интегралов $\left|\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx\right| \leq \int_{x_0}^{x} |r_n(x)|dx$

$\left|\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx\right| \leq \int_{x_0}^{x} |r_n(x)|dx < \int_{x_0}^{x} \varepsilon_n dx = \underset{\varepsilon_n \to 0}{\varepsilon_n(x - x_0)}$ (x, x_0 - фикс.)

То есть $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(x)dx + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_n(x)dx$$

□

Nota. Почленно интегрируются не просто равномерно сходящиеся, а мажорируемые, иначе остаток необязательно стремится к 0

Th. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем на $[a,b]$ и $u_n(x) \in C'_{[a,b]}$

Тогда $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

□

Пусть $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. Докажем, что $g(x) = S'(x)$

$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} u'_n(x)dx\right) = u_1(x)\Big|_{x_0}^{x} + u_2(x)\Big|_{x_0}^{x} + \ldots$$

$= (u_1(x) - u_1(x_0)) + (u_2(x) - u_2(x_0)) + \cdots = S(x) - S(x_0)$ - разность сходящихся рядов

$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx = S(x) - S(x_0) \Longrightarrow \left(\int_{x_0}^{x} g(x)dx\right)' = g(x) = S'(x)$$

□

2. Степенные ряды

Def. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,\ c_n \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ - степенной ряд с центром x_0 (в точке x_0, по степеням $(x-x_0)$)

Nota. В частности $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ - степенной с центром в $x_0 = 0$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ легко сводится заменой $x - x_0 = t$ к $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

Th. Абеля.

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_1. Тогда ряд сходится для любого x, который $|x| < |x_1|$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в точке x_2. Тогда ряд расходится $\forall x \ |x| > |x_2|$

$\square$

1) В точке x_1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots$ - числовой ряд, сходящийся

В точке x ($|x| < |x_1|$) $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = c_0 + c_1 x_1 \dfrac{x}{x_1} + c_1 x_1^2 \dfrac{x^2}{x_1^2} + \dots$

Для этого ряда докажем абсолютную сходимость

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = |c_0| + |c_1 x_1| \left|\dfrac{x}{x_1}\right| + |c_1 x_1^2| \left|\dfrac{x^2}{x_1^2}\right| + \dots$

При этом ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится $\Longrightarrow \exists M > 0 \ : \ |c_n x_1^n| \leq M$

И $\left|\dfrac{x^k}{x_1^k}\right| < 1$, так как $|x| < |x_1|$

Тогда $|c_0| + |c_1 x_1| \left|\dfrac{x}{x_1}\right| + |c_1 x_1^2| \left|\dfrac{x^2}{x_1^2}\right| + \dots + |c_k x_1^k| \left|\dfrac{x^k}{x_1^k}\right| < M \left(1 + \left|\dfrac{x}{x_1}\right| + \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^2 + \dots + \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^k\right)$ - геометрическая прогрессия с $|q| < 1$

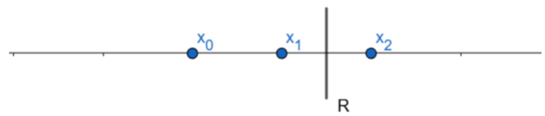
Таким образом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \sim M \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^n$, который сходится

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ абсолютно сходится (и равномерно?)

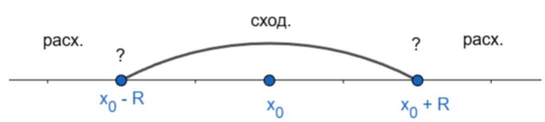
б) От противного, используя пункт а)

$\square$

Nota. Заметим, что должно существовать такое R, для которого для всех x меньше R ряд сходится
Зафиксируем между x_0 и R число $x_0 < r < R$ - тогда $\sum c_n r^n$ - мажорирует $c_n x^n$, то есть ряд сходится равномерно



Def. $R \in \mathbb{R}^+ \Big| \; \forall |x| < R$ ряд сходится, а $\forall |x| > R$ ряд расходится, тогда R называют радиусом сходимости
Для сдвинутого ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \forall x: \; |x - x_0| < R$ - сходится; $\forall x: \; |x - x_0| > R$ - расходится
Сходимость ряда в $x_0 \pm R$ нужно проверять специально



Nota. Чаще всего исследование на сходимость проводится по признакам Даламбера, Коши

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} (-1)^{n+1}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} |x|^{n+1} \dfrac{n}{|x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} |x| = |x| < 1$
Предварительно $D = (-1; 1)$.
Далее, рассмотрим $x = \pm 1$:
$(x = 1): \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ - сходится
$(x = -1): \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-1}{n}$ - расходится
Итак, $D = (-1; 1]$

3. Ряд Тейлора

Мет. Формула Тейлора: $f(x) \in C^{n+1}_{U_\delta(x_0)}$, тогда $f(x) \overset{x \in U_\delta(x_0)}{=\!=} f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$
Чтобы $f(x)$ в пределе равнялось $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, нужно, чтобы $r_n(x) \to 0$
Формула: $f(x) \in C^{\infty}_{U_0(x_0)}$ и $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, ξ между x и x_0

Th. Если $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ - ряд Тейлора

Nota. Если $x_0 = 0$, то ряд Маклорена

3.1. Стандартные разложения элементарных функций

1° $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

Nota. $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \dots \qquad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

2° $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

Nota. $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

3° $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Nota. $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

4° $\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x$ **Def.** $\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Сложим и вычтем ряды для e^x и e^{-x}

Причем $e^{-x} \underset{x,t\in u(0)}{\overset{t=-x}{\equiv}} e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$

Из этого получаем:

$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$

$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n)}}{(2n)!}$

<u>Формула Эйлера</u>

$e^{ix} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \dots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \dots) = \cos x + i \sin x$

$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$

5° Биномиальный ряд

$f(x) = (1+x)^m, n \in \mathbb{Q}$

Заметим, что $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$

$(1+x)f'(x) = m(1+x)^m = mf(x)$

Получаем дифференциальное уравнение: $(1+x)f'(x) = mf(x)$

Nota. Если дополнить ДУ начальными условиями, то задача Коши будет решаться единственным образом, то есть, найдя ряд $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ как единственное решение, получим, что $S(x) = f(x)$ и не надо исследовать остаток R_n на убывание к нулю

Задача Коши:

$$\begin{cases} (1+x)f'(x) = mf(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда $S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots$

$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + ka_k x^{k-1} + \dots$

$(1+x)S'(x) = a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^3 + \dots + (ka_k + (k+1)a_{k+1})x^k + \dots$

$mS(x) = ma_0 + ma_1 x + ma_2 x^2 + \dots + ma_k x^k + \dots$

Начальные условия: $a_0 = 1$. Тогда приравниваем коэффициенты: $a_1 = m, a_2 = \dfrac{m(m-1)}{2}, a_3 = \dfrac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$

Выявили закономерность: $a_k = \dfrac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}$

Таким образом: $(1+x)^m = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_m^k x^k$

При $m \in \mathbb{N}$ ряд - конечная сумма, при остальных - бесконечная

Lab. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 + (-x^2))^{-\frac{1}{2}} = (\arcsin x)'$ $\qquad \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin t$

6° $\ln(1+x)$

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n\Big) dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Интервал сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x^{n+1} n}{(n+1)x^n}\right| = |x| < 1 \quad D = (-1, 1)$

При $x = 1 \quad \ln(1+x) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dots$ - сходится $\quad D = (-1, 1]$

Nota. Сходимость остатка требует исследования

Nota. Заметим, если $x = \dfrac{1}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$, то $\ln(1 + \dfrac{1}{k}) = \ln \dfrac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$ - рекуррентная формула логарифмов натуральных чисел

7° $\operatorname{arctg} x$ - Lab. $((\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2})$

3.2. Приложения

Ex. 1. $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ $\qquad x = \frac{1}{2} \in u(0)$

$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$

$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots)dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \dots \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 3 \cdot 6} + \frac{1}{32 \cdot 5 \cdot 120} - \cdot$

Ряд знакопеременный - можем найти такой u_n, который будет меньше заданной точности вычисления ε

Ex. 2. $\int_0^a e^{-x^2} dx = \int_0^a (1 + (-x^2) + \frac{x^4}{2!} + \dots)dx = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{10} + \dots \Big|_0^a = a - \frac{a^3}{5} + \frac{a^5}{10} - \dots$

Отсюда были вычислены таблицы для функции Лапласа $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Ex. 3. Вычисление пределов

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x^3(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3}) + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$

4. Ряды Фурье

4.1. Определение

Мет. Линейное функциональное пространство со скалярным произведением

$f(x) \in C_{[a,b]}$

Скалярное произведение $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Из этого норма $\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$

Главное приложение евклидовых пространств - задача о перпендикуляре: найти перпендикуляр h из конца вектора f на подпространство L'. Иначе: ищем расстояние $\|f - h\|$ (метрика) или ортогональную проекция f_0 вектора f на L', такую, что $f_0 + h = f$

Будем искать f_0, задав подпространство L' множеством функций $\{\sin mx, \cos mx\}$

Тригонометрические функции полезны для описания периодических явлений

Раньше рассматривали тригонометрический многочлен

$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + \dots + b_m \sin mx + a_m \cos mx$

Дальше стоит задача: при каких a_i, b_i многочлен $T_m(x)$ будет наименее отстоящим от данной $f(x)$

Мет. Решаем задачу о перпендикуляре, ищем f_0 - наименьшую из проекций и минимально отстоящую от f

Координаты f_0 в выбранном ортонормированном базисе L' равны соответствующим координатам f в этом базисе

$$f_0 = \underset{k=\dim L', n=\dim L}{f_1e_1 + f_2e_2 + \dots + f_ke_k} = (f, e_1)e_1 + (f, e_2)e_2 + \dots + (f, e_k)e_k$$

$$(f, e_1) = \int_a^b f(x)e_1(x)dx$$

Nota. Итак, $\exists L \in C_{[-\pi,\pi]}, L' = l_{\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}}$

Тогда можно искать многочлен $P_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin x$, который наилучшим образом приближает $f(x)$

Если нормировать систему $\{\sin nx, \cos nx\}$, то коэффициентами многочлена $P_n(x)$ будут скалярные произведения $f(x)$ на функция ортонормированной системы.

Получим $\left\{\dfrac{1}{2\pi}, \dfrac{\sin x}{\pi}, \dfrac{\cos x}{\pi}, \dots, \dfrac{\sin nx}{\pi}, \dfrac{\cos nx}{\pi}\right\}$

Тогда, $\boxed{\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \end{aligned}}$ - коэффициенты Фурье

Nota. Если увеличивать степень n, то получим ряд Фурье. Запишем формально:

$\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ - сходится ли этот ряд и сходится ли к $f(x)$?

Ответ дает теорема (доказательство будет приведено позже)

Th. $f(x)$ - 2π-периодична, на $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ - кусочно монотонна и ограничена (то есть имеет конечное число конечных разрывов). Тогда в точках непрерывности $f(x)$ представляется рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = S(x)$$

а в точках разрыва $S(x_0) = \dfrac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$

Сейчас только тригонометрический ряд Фурье, хотя подобное разложение возможно по различным ортогональным системам функций

Nota. В концах отрезках $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ может быть не определена, но в любом случае ограничена

$S(\pi) = S(-\pi) = \dfrac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0))$

<u>Разложение периодичных функций</u> (на $[-\pi, \pi]$)

1°: $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$, $f(x+2\pi) = f(x)$

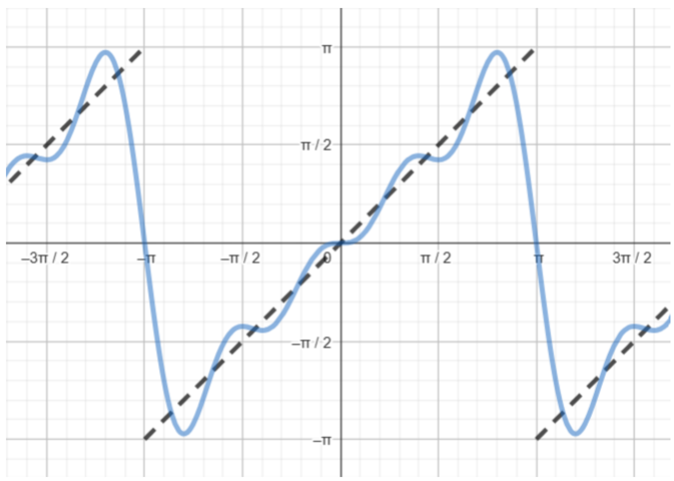
$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{-2}{\pi n}\int_0^{\pi} x d\cos nx = -\frac{2}{\pi n}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \cancelto{0}{\int_0^{\pi}\cos nx dx}\right) = -\frac{2}{\pi n} x\cos nx\Big|_0^{\pi} =$

$-\frac{2}{n}\cos \pi n = \left[\begin{array}{ll} \frac{-2}{n}, & n = 2m \\ \frac{2}{n}, & n = 2m+1 \end{array}\right. = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

Итак $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n} \sin nx$



$2°$: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } [0, \pi] \\ -1 & \text{на } [-\pi, 0) \end{cases}$ на $[-\pi, \pi]$

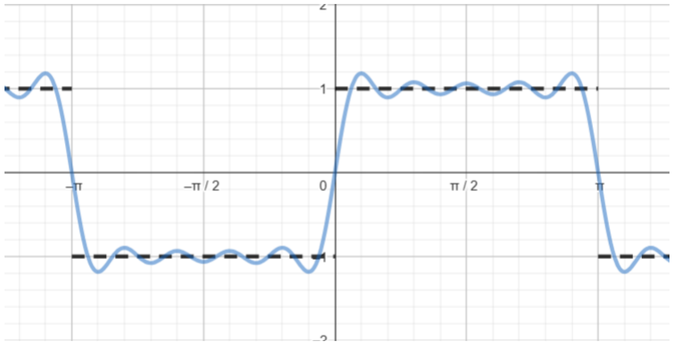
$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx + \int_0^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{1}{2n}\left(\int_{-\pi}^{0} d\cos nx - \int_0^{\pi} d\cos nx\right) =$

$\frac{1}{\pi n}\left(\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \cos nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi n}(1 - \cos \pi n - \cos \pi n + 1) = \frac{2}{\pi n}(1 - \cos \pi n) = \frac{4}{\pi(2m-1)}$

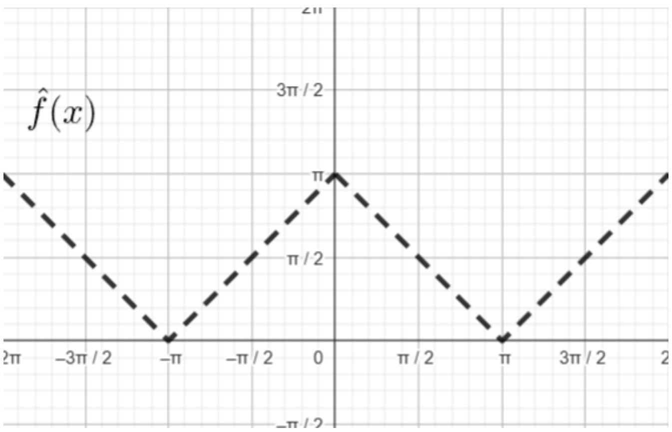
$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m-1)} \sin(2m-1)x$

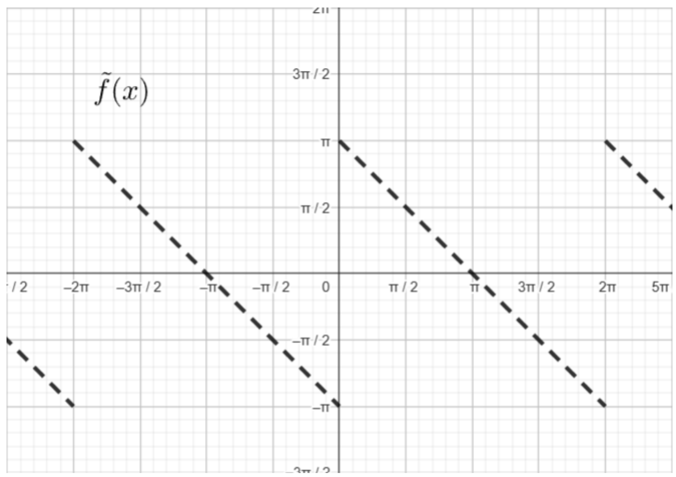


Nota. Заметим, что если $f(x)$ - четная, то $b_n = 0$, а если нечетная, то $a_n = 0$. Иногда в задаче требуется разложить $f(x)$, заданную только на отрезке $[0, \pi]$. Такую функцию можно продолжить четным или нечетным образом на $[-\pi, \pi]$. Говорят о разложении в ряд по косинусам и синусам соответственно

3°: $f(x) = \pi - x, \quad x \in [0, \pi]$

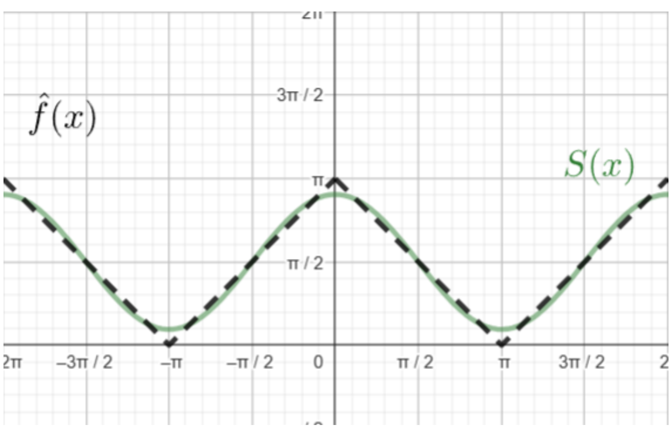
Дополним $f(x)$ двумя способами

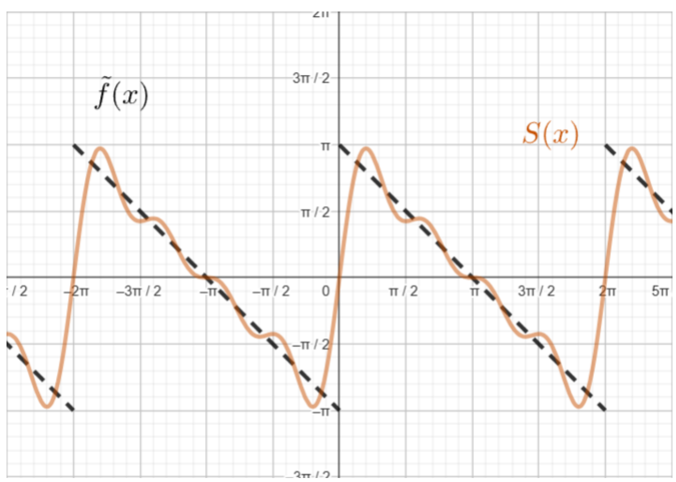




В ряд Фурье раскладывются периодические функции $\hat{f}, \tilde{f}$

<u>Lab.</u> $\hat{f}(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad \tilde{f}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$





Заметим, что $\tilde{f}$ на $[0, 2\pi]$ имеет одно аналитическое задание (удобно интегрировать). Изменится ли ряд Фурье, если сдвинуть отрезок?

Th. о сдвиге. Сдвиг промежутка длиной 2π не меняет ряда Фурье

Th. о растяжении. Для $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ растяжение промежутка приводит к разложению:
$b - a = 2l = T$ - период
$a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx$
$a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{\pi n}{l}xdx$
$b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{\pi n}{l}xdx$

Th. 1. о сдвиге:
Ряд Фурье не изменится, если $[-\pi, \pi]$ заменить на $[a; a + 2\pi]$

Докажем, что если $\varphi(t)$ - 2π-периодична, то $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt = \int_{a}^{a+2\pi}\varphi(t)dt$
У нас $f(x)$ с периодом $[-\pi, \pi]$, обозначим $x = t - 2\pi$ $(t = x + 2\pi)$.
Рассмотрим $\displaystyle\int_{b}^{a} f(x)dx = \int_{b+2\pi}^{a+2\pi} f(t - 2\pi)dt = \int_{b+2\pi}^{c+2\pi} f(t)dt = \int_{b+2\pi}^{c+2\pi} f(x)dx$
Пусть $b = -\pi, c = a$, тогда $\displaystyle\int_{b}^{c} f(x)dx = \int_{-\pi}^{a} f(x)dx = \int_{-\pi+2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx = \int_{a}^{\pi} f(x)dx$
$\displaystyle\int_{a}^{a+2\pi} f(x)dx = \int_{a}^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{a+2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

Th. 2. о растяжении:
$f(x)$ - $2l$-периодична: $(T \ : \ [-l, l])$
$a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx$
$a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{\pi n}{l}xdx$
$b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{\pi n}{l}xdx$
Тогда $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\dfrac{k\pi x}{l} + b_k\sin\dfrac{k\pi x}{l}$

$f(x)$ - $2l$-периодична: $(T\ :\ [-l,l])$
Обозначим $x = \dfrac{lt}{\pi}\quad t\Big\uparrow_{-\pi}^{\pi}\quad x\Big\uparrow_{-l}^{l}$
$f(\dfrac{lt}{\pi}) = \varphi(t)$ - 2π-периодична
Ряд Фурье для $\varphi(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\cos kt + b_k \sin kt$, где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ktdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos ktdt =$$
$$= \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos ktd\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx$$

Аналогично b_k.

Ex. 1. $f(x) = x \qquad x\in[-1,1]$
$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x\cos\frac{k\pi x}{d}x = \int_{-1}^{1} x\cos k\pi x dx = \frac{1}{k\pi}\left(x\sin k\pi x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\sin k\pi x dx\right) = -\frac{1}{k\pi}\cdot 0 = 0$$
$$b_k = \int_{-1}^{1} x\sin k\pi x dx = -\frac{1}{k\pi}\left(x\cos k\pi x\Big|_{-1}^{1} - \int_{0}^{1}\cos k\pi x dx\right) = -\frac{2}{k\pi}\left((-1)^k - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_{0}^{1}\right) = \frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{k\pi}$$
$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{k\pi}\sin k\pi x$$

4.2. Оценка коэффициентов Фурье

Nota. Вернемся к приближению $f(x)$ тригонометрическим многочленом $T_n(x)$. Ранее говорилось, что из всех многчленов типа $\sum\limits_{m=0}^{n} a_m\cos mx + b_m\sin mx$ минимально отстоящим будет многочлен Фурье, то есть с a_m и b_m, равными коэффициентам Фурье.
Зададим расстояние δ_n между $f(x)$ и многочленом $T_n(x)$ формулой
$$\delta_n^2 = \|f - T_n\|^2 = (f - T_n, f - T_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x) - T_n(x))^2\,dx = \Big[[a,b] = [-\pi,\pi]\Big] =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{m=1}^{n} a_m\cos mx + b_m\sin mx\right)^2 dx$$
Далее, честно интегрируя, можно убедиться, что δ будет наименьшим, если a_m и b_m - коэффициенты Фурье
Преобразуем $\|f - f_0\|^2$:
$$\delta_n^2 = \|f - \sum_{m=0}^{n}(f,e_m)e_m\|^2 = \|f\|^2 - 2\left(f, \sum_{m=0}^{n}(f,e_m)e_m\right) + \left\|\sum_{m=0}^{n}(f,e_m)e_m\right\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{m=0}^{n}(f,e_m)^2 +$$
$$\sum_{m=0}^{n}(f,e_m)^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=0}^{n}(f,e_m)^2$$ - квадраты коэффициентов разложения

Тогда $\delta_n^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \dfrac{a_0^2}{4} - \dfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2)$

Так как $\delta_n^2 \geq 0$, то $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{k}(a_m^2 + b_m^2)$

Так как $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}$ растет и ограничена, то ряд $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}$ сходитсяя

Можем записать: $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2 + b_m^2)}$ - неравенство Бесселя

Можем усилить неравенство, если доказать, что при $n \to \infty$ $\delta_n^2 \to 0$. В этом случае $f(x)$ раскладывается по полной системе функций $\{\cos mx, \sin mx\}$

Def. Система $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ называется полной, если $\forall f(x) \notin \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0 \Longrightarrow$ $f(x) = 0$

$\boxed{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2 + b_m^2)}$ - равенство Парсеваля

Заметим, что из оценки ранее $\|f\|^2 = \displaystyle\sum_{m=1}^{n}(f, e_m)^2 = \sum_{m=1}^{n} f_m^2$

В ∞-мерном пространстве $\|f\|^2 = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} f_m^2$ - «теорема Пифагора»

Nota. Эти утверждения верны для любых ортогональных систем функций, а не только для тригонометрических

4.3. Интеграл Фурье

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exists \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = I \in \mathbb{R}$

$\exists$ ряд Фурье для $f(x)$ на $[-l, l]$ $\forall l > 0$, то есть

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l} = \\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{m\pi t}{l}dt\right)\cos\frac{m\pi x}{l} + \left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{m\pi t}{l}dt\right)\sin\frac{m\pi x}{l} +\right] = \\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\frac{m\pi}{l}(t-x)dt
\end{aligned}$$

Исследуем при $l \to \infty$:

$\dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)dt \leq \dfrac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|dt \leq \dfrac{I}{2l} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$

Обозначим $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{l}, \alpha_2 = \dfrac{2\pi}{l}, \ldots, \alpha_m = \dfrac{m\pi}{l}, \quad \Delta a_m = \dfrac{\pi}{l}$

Рассмотрим $\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{m\pi(t-x)}{l}dt}_{\text{функция переменной } l} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\int_{-l}^{l}f(t)\cos\alpha_m(t-x)dt\right)\Delta\alpha_m$

Рассмотрим переменную $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha_m=\alpha(m), \Delta\alpha_m=\Delta\alpha$ - дифференциальное

Имеем аналог интегральной суммы $\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_m)\Delta\alpha_m, n\to\infty$

Тогда $\boxed{f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt\right)d\alpha}$ - интеграл Фурье

Nota. От дискретного спектра частот $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ перешли к непрерывному спектру α

Nota. В точках разрыва $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt\right)d\alpha$

Преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos\alpha t\cos\alpha x+\sin\alpha t\sin\alpha x)dt\right)d\alpha=\\&=\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\alpha t\cos\alpha x dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\alpha t\sin\alpha x dt\right)d\alpha\end{aligned}$$

Если $f(x)$ - четная, то $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt=2\int_0^{+\infty}\ldots;\quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin\alpha t dt=0$

Если $f(x)$ - нечетная, то $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt=2\int_0^{+\infty}\ldots;\quad \int_{-\infty}^{\infty}\cos\alpha t dt=0$

Обозначим $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt\qquad \Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt$

Тогда $f(x)=\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F(\alpha)\cos\alpha x d\alpha}_{\text{косинус-преобразование Фурье}},\quad f(x)=\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\Phi(\alpha)\sin\alpha x d\alpha}_{\text{синус-преобразование Фурье}}$

Ex. $f(x)=e^{-\beta x},\quad (\beta>0,x\geq 0)$ <u>Lab.</u>

$F(\alpha)=?\ \Phi(\alpha)=?\qquad e^{-\beta x}=\frac{2\beta}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}d\alpha$

X. Программа экзамена в 2024/2025

X.1. Числовые ряды.

1. Определение числового ряда, понятие суммы ряда.

   Определение числового ряда: $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\} = \{u_n\}$ называется числовым рядом

   u_n называется общим членом ряда

   Понятие суммы ряда: Частичная сумма ряда $S_n \overset{def}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

   Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называют сходящимся, а S называют суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$

2. Сходимость числового ряда. Эталонные ряды: геометрический, гармонический.

   Сходимость числового ряда: Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называют сходящимся

   Геометрический ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} bq^n$ - сходится при $|q| < 1$, тогда $S = \dfrac{b}{1-q}$

   Гармонический ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ - расходится

3. Условия сходимости рядов: необходимое условие, критерий Коши.

   Необходимое условие:

   Th. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

   Критерий Коши:

   Th. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0\ \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0\ \ \underbrace{|u_{n+1} + \dots + u_m|}_{|S_m - S_n| < \varepsilon} < \varepsilon$

4. Знакоположительные числовые ряды, свойства.

   Знакоположительный ряд - ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ такой, что $u_n > 0$

   Свойства рядов:

   (a) Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но влияет на сумму

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

   Тогда $\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}$

   Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$ - сходится

5. Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: признаки сравнения.

Признак сравнения в неравенствах:

а) $\exists 0 < u_n \leq v_n$. Тогда $\sum v_n$ сходится $\Longrightarrow \sum u_n$ сходится

б) $\exists 0 \leq v_n \leq u_n$. Тогда $\sum v_n$ расходится $\Longrightarrow \sum u_n$ расходится

Предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \left[\begin{array}{l} \sum u_n \text{ сходится, если } \sum v_n \text{ сходится} \\ \sum u_n \text{ расходится, если } \sum v_n \text{ расходится} \end{array}\right.$$

6. Признак Даламбера, радикальный признак Коши.

Признак Даламбера:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый, $\exists \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R}^+$

а) $0 \leq \mathcal{D} < 1 \implies \sum u_n$ сходится

б) $\mathcal{D} > 1 \implies \sum u_n$ расходится

в) $\mathcal{D} = 1 \implies$ ничего не следует, требуется другое исследование

Радикальный признак Коши:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \qquad u_n \geq 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R}$

а) $0 \leq K < 1 \implies \sum u_n$ сходится

б) $K > 1 \implies \sum u_n$ расходится

в) $K = 1 \implies$ требуется другое исследование

7. Интегральный признак сходимости.

Интегральный признак Коши:

Если существует $f(x) : [1; +\infty] \to \mathbb{R}^+, f(x)$ монотонно убывает, $f(n) = u_n$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

8. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка ряда.

Знакочередующиеся ряды: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ $(u_n > 0)$ - знакочередующийся ряд

Признак Лейбница: Если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ верно, что $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ сходится

Оценка остатка ряда: для знакочередующегося ряда $R_{n+1} < u_{n+1}$

9. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Знакопеременные ряды: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где u_n - любого знака и не все u_n одного знака

Абсолютная сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно

Условная сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится

X.2. Функциональные ряды.

10. Функциональные ряды. Сходимость. Поточечная и равномерная сходимость ряда. Мажорирующий ряд.

    Функциональные ряды: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется функциональным

    Сходимость: Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится при всех x из некоторого множества E, то сумма ряда - функция $S(x)$

    Поточечная сходимость: Ряд сходится поточечно, если $\forall x \in D \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$

    Равномерная сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области $D \overset{def}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall n > n_0 \ |R_n(x)| < \varepsilon$

    Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ на $[0, 1)$ сходится поточечно, но не сходится равномерно

    Мажорирующий ряд: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ называется мажорирующим, если по признаку Вейерштрасса с помощью него можно сказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится

11. Признак Вейерштрасса.

    Признак Вейерштрасса: $\exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - числовой ряд такой, что $\alpha_n > 0$, $\sum \alpha_n$ сходится, $|u_n(x)| \leq \alpha_n \ \forall n$

    Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходящийся, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ называют мажорирующим

12. Непрерывность суммы ряда.

    Непрерывность суммы ряда: **Th.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $(u_n(x) \in C_{[a,b]})$ мажорируем в $D = [a, b]$, то его сумма $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$

13. Свойства равномерно сходящихся рядов (дифференцирование и интегрирование суммы ряда).

    Интегрирование: **Th.** Если ряд мажорируется на $[a, b]$ и $u_n(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то определен $\int_{x_0}^{y} S(x)dx$ и $\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(x)dx$

    Дифференцирование: **Th.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем на $[a, b]$ и $u_n(x) \in C'_{[a,b]}$. Тогда $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

14. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости.

    Степенной ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, $c_n \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ - степенной ряд с центром x_0 (в точке x_0, по степеням $(x - x_0)$)

Теорема Абеля: **Th. Абеля.**

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_1. Тогда ряд сходится для любого x, который $|x| < |x_1|$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в точке x_2. Тогда ряд расходится $\forall x \ |x| > |x_2|$

Радиус сходимости: $R \in \mathbb{R}^+ \ \Big| \ \forall |x| < R$ ряд сходится, а $\forall |x| > R$ ряд расходится, тогда R называют радиусом сходимости

15. Ряд Тейлора. Стандартные разложения элементарных функций.

Ряд Тейлора: $f(x) \in C^{\infty}_{U_0(x_0)}$ и $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ между x и x_0

Th. Если $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ - ряд Тейлора

Разложения функций:

Функция		Ряд Тейлора		
e^x	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$	$=$	$1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dots$
$\sin x$	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$=$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots$
$\cos x$	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$=$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots$
$\mathrm{sh} x$	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$	$=$	$x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots$
$\mathrm{ch} x$	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{(2n)}}{(2n)!}$	$=$	$1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots$
$(1+x)^m$	$=$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_m^k x^k$	$=$	$1 + mx + m(m-1)x^2 + \dots$
$\ln(1+x)$	$=$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$=$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots$

16. Ортогональные системы функций и ряды Фурье. Определение тригонометрического ряда Фурье для функции на отрезке $[-\pi, \pi]$. Теорема Дирихле.

Оргогональные системы функций: Система функций $\{e_n\}$ $(e_n \in C_{[a,b]})$ называется ортогональной, если $\forall i \neq j$ $(e_i, e_i) = 0$, $(e_i, e_j) \neq 0$, где $(f(x), g(x)) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$

Ряд Фурье: Пусть $f(x)$ 2π-периодична на интервале $[-\pi; \pi]$, тогда ее ряд Фурье - $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, где

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

Теорема Дирихле:

Th. $f(x)$ - 2π-периодична, на $[-\pi,\pi]$ $f(x)$ - кусочно монотонна и ограничена (то есть имеет конечное число конечных разрывов). Тогда в точках непрерывности $f(x)$ представляется рядом Фурье $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, а в точках разрыва x_0 $S(x_0)=\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$

17. Тригонометрический ряд Фурье на произвольном отрезке (сдвиг, растяжение)

    Теорема о сдвиге: **Th. о сдвиге.** Ряд Фурье не изменится, если $[-\pi,\pi]$ заменить на $[a;a+2\pi]$

    Теорема о растяжении: **Th. о растяжении.** Для $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ($2l$-периодична, где $l=\frac{b-a}{2}$) растяжение промежутка приводит к разложению $\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt+b_k\sin kt$, где

    $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$

    $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx$

    $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx$