*Nota.* В строгом определении интегральная сумма строится так:
$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ – элементарная дуга
$\Delta l_i$ – длина элемента
$\Delta s_i$ – длина стягивающей дуги
$\Delta l_i \approx \Delta s_i$
$M_{\text{ср.}}(\xi_i, \eta_i)$ – средняя точка элемента

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

Определим криволинейный интеграл II рода. Задача (вычисление работы силы вдоль пути): вдоль пути $\overset{\frown}{AB}$ действует сила $\overrightarrow{F} = (P(x, y), Q(x, y))$. Найдем элементарную работу $dA = \vec{F}_{\text{ср.}}d\vec{s}$, где $d\vec{s}$ – элементарное приращение
$d\vec{s} = (dx, dy) = (\cos\alpha ds, \sin\alpha ds)$
$\vec{F}_{\text{ср.}}$ – значение силы на элементарном участке в какой-либо его точке
Тогда $dA = (P(x, y), Q(x, y)) \cdot (dx, dy) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, а по всей кривой $A = \displaystyle\int_{AB} dA = \int_{AB} Pdx + Qdy$ – интеграл II рода (в проекциях)

*Nota.* В проекциях, потому что $F_x = P, F_y = Q$, таким образом скалярное произведение записано в проекциях
При этом часто рассматривают по отдельности: $\displaystyle\int_{AB} f(x, y)dx$ и $\displaystyle\int_{AB} g(x, y)dy$

*Nota.* Связь интегралов I и II рода:
$\displaystyle\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P, Q)(dx, dy) = \int_L (P, Q)(\cos\alpha, \cos\beta)\underbrace{ds}_{\approx dl} = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl$
Обозначим $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta)$
По теореме Лагранжа $\exists(\xi, \eta) \in$ элементарной дуге, касательная которой параллельна $ds$
Тогда $d\vec{s} = \vec{\tau}ds \approx \vec{\tau}dl$, где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, касательной в $(\xi, \eta)$
Тогда $\displaystyle\int_L Pdx + Qdy \overset{\text{пред. в вект. форме}}{=\!=} \int_L \overrightarrow{F}\overrightarrow{\tau}\,dl = \int_L \overrightarrow{F} \underbrace{\overrightarrow{dl}}_{\text{ориент. эл. дуги}}$

<u>Свойства</u>:
*Nota.* Свойства, не зависящие от прохода дуги, аналогичны свойствам определенного интеграла

- Направление обхода:

  I рода:
  $\displaystyle\int_{AB} f(x, y)dl = \int_{BA} f(x, y)dl$

  II рода:
  $\displaystyle\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy$

**Def.** Часто рассматривают замкнутую дугу, называемую контур. Тогда интегралы обозначаются так: $\displaystyle\oint_K fdl$ и $\displaystyle\oint_K Pdx + Qdy$.

Если $K$ (контур) обходят против часовой стрелки, то обозначают $\oint_{K^+}$, иначе $\oint_{K^-}$

Вычисление сводится к $\int_a^b dx$ или $\int_\alpha^\beta dy$ или $\int_\tau^T dt$

1. Параметризация дуги $L$:
   $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad \varphi, \psi \in C^1_{[\tau,T]} \quad \begin{matrix} A(x_A, y_A) = (\varphi(\tau), \psi(\tau)) \\ B(x_B, y_B) = (\varphi(T), \psi(T)) \end{matrix}$
   При этом задании $L \quad y=y(x), x\in[a,b]$ или $x=x(y), y\in[\alpha,\beta]$ – частные случаи параметризации

2. I рода:
   $\int_L f(x,y)dl = \left[dl = \sqrt{\varphi_t'^2+\psi_t'^2}|dt|\right] =$
   $= \int_\tau^T f(t)\sqrt{\varphi_t'^2+\psi_t'^2}|dt|$

   II рода:
   $\int_{L=\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy = [dx=\varphi_t'dt, dy=\psi_t'dt] =$
   $= \int_\tau^T (P\varphi'+Q\psi')dt$

*Ex.* Дуга $L$ – отрезок прямой от $A(1,1)$ до $B(3,5)$. Вычислим $\int_{AB}(x+y)dl$ двумя способами:

1. $\int_{AB}(x+y)dl = \left[\begin{matrix} AB : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} \\ \text{или } y=2x-1, x\in[1,3] \\ f(x,y) = x+2x-1 = 3x-1 \\ dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{5}dx \end{matrix}\right] = \int_1^3 (3x-1)\sqrt{5}dx = \sqrt{5}\left(\frac{3x^2}{2}-x\right)\Big|_1^3 = \sqrt{5}(12-2) = 10\sqrt{5}$

2. $\int_{AB}(x+y)dx+(x+y)dy = \left[\begin{matrix} x\uparrow_1^3, y\uparrow_1^5 \\ y=2x-1, x=\frac{y+1}{2} \\ dx=dx, dy=dy \end{matrix}\right] = \int_1^3 (x+2x-1)dx + \int_1^5 \left(\frac{y+1}{2}+y\right)dy =$
   $\left(\frac{3x^2}{2}-x\right)\Big|_1^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{3y^2}{2}+y\right)\Big|_1^5 = 10+20=30$

**Th.** Формула Грина

Пусть дана область $D\subset\mathbb{R}^2$, которая обходится в правильном направлении $(\uparrow Ox, \uparrow Oy)$

$K$ – гладкая замкнутая кривая (контур), которая ограничивает $D$

В области $D$ действует $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ – непрерывные дифференциалы

Тогда $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{K^+} Pdx+Qdy$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}dx - \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy = \int_\alpha^\beta \left(Q(x,y)\Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)}\right)dy - \int_a^b \left(P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}\right)dx =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(Q(x_2(y),y)-Q(x_1(y),y))dy-\int_{a}^{b}(P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x)))dx=\int_{NST}Qdy-\int_{NMT}Qdy-\int_{MTS}Pdx+\int_{MNS}Pdx=\underbrace{\int_{NST}Qdy+\int_{TMN}Qdy}_{\oint_{K^+}Qdy}+\underbrace{\int_{STM}Qdy+\int_{MNS}Qdy}_{\oint_{K^+}Pdx}=\oint_{K^+}Pdx+Qdy$$