# Содержание

# Лекция 1. Магнитное поле

Давным-давно верили, что существовал «эфир», который опоясывал всю вселенную и который был посредником в гравитационных/электромагнитных взаимодействиях. Позднее от теории эфира перешли к теории поля. Согласно нее каждый электрический заряд создает электрическое поле, которое действует на другие заряды

Опыт показывает, что сила $\vec{F}$, действующая на точечный заряд $q$, зависит в общем случае не только от положения этого заряда, но и от его скорости $v$. Соответственно этому силу $F$ разделяют на две составляющие - электрическую $F_{\text{Э}}$ (не зависит от движения заряда) и магнитую $F_{\text{М}}$ (зависит от скорости заряда). В любой точке пространства направление и модуль магнитной силы зависят от скорости $v$ заряда, причем эта сила всегда перпендикулярна вектору $v$. Свойства магнитной силы можно описать, если ввести понятие магнитного поля. Силовой характеристикой магнитного поля (его действия на двигающиеся заряженные частицы) в данной точке пространства является вектор магнитной индукции $B$. Он определяет магнитную силу, действующую на двигающийся электрический заряд $q$

$$F_{\text{М}} = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Полная электромагнитная сила, действующая на заряд $q$: $F_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$

Силу $F_L$ называют силой Лоренца. Выражение выше справедливо как для постоянных, так и для переменных электрических и магнитных полей при любых значениях скорости $v$ заряда. По действию силы Лоренца на заряд можно в принципе определить модули и направления векторов $E$ и $B$. Поэтому выражение для силы Лоренца можно рассматривать как определение электрического и магнитного полей

Магнитная часть силы Лоренца действует на движущийся заряд в направлении, перпендикулярном его скорости, и, таким образом, не совершает работы над зарядом, оставляя неизменной его энергию и меняя лишь направление импульса (изменяет траекторию движения частицы)

Магнитная сила не делает вклад в тангенциальную составляющую скорости, следовательно не изменяет энергию заряда и не делает работы

Магнитная часть силы Лоренца максимальна, если направление движения частицы составляет с направлением магнитного поля прямой угол, и равна нулю, если частица движется вдоль направления магнитного поля

Сила Лоренца не зависит от выбора системы отсчета, однако магнитная составляющая силы Лоренца меняется при переходе от одной системы отсчета к другой (из-за изменения $v$).

Опыты показывают, что магнитное поле порождается движущимися зарядами. В результате обощения экспериментальных данных был получен закон, определяющий поле $B$ точечного заряда $q$, движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью $v$. Этот закон записывается в виде:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{v},\vec{r}]}{r^3}$$

где $\mu_0$ - магнитная постоянная ($\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$), $r$ - радиус-вектор, проведенный от заряда $q$ к точке наблюдения

Магнитная постоянная существует из-за СИ (в СГС $\mu_0 = 1$). В некоторых средах $\mu_0$ заменяется на $\mu_0\mu$, где $\mu$ - магнитная проницаемость среды

Конец радиус-вектора $r$ неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью $v$, поэтому вектор $B$ в данной системе отсчета зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени

Пока что мы будем разбирать системы с равномерно двигающимися частицами

В соответствии с формулой вектор $B$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены $v$ и $r$. Единицей магнитной индукции служит тесла (Тл). Формулу можно представить как: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{v},\vec{r}]}{r^3} = \varepsilon_0\mu_0\left[\vec{v}, \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r}\right] = \varepsilon_0\mu_0[\vec{v},\vec{E}] = \frac{[\vec{v},\vec{E}]}{c^2}$, где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ - электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме

Из этого следует, что магнитное поле не может быть без электрического поля

Для магнитного поля справедлив **принцип суперпозиции**: вектор магнитного поля в точке равен сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности: $\vec{B} = \sum\limits_i \vec{B}_i$

Найдем, пользуясь формулой магнитное поле, создаваемое постоянными электрическими токами. Подставим вместо $q$ заряд $dq = \rho dV$, где $dV$ - элементарный объем, $\rho$ - объемная плотность заряда, и учтем, что $\rho v_d = j$ ($v_d$ - дрейфовая скорость носителей заряда (средняя скорость частиц)). Тогда формула получает такой вид: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec{j},\vec{r}]dV}{r^3}$

Если ток силы $I$ течет по тонкому проводу с площадью поперечного сечения $S$, то

$$\vec{j}dV = Sdl = Idl$$

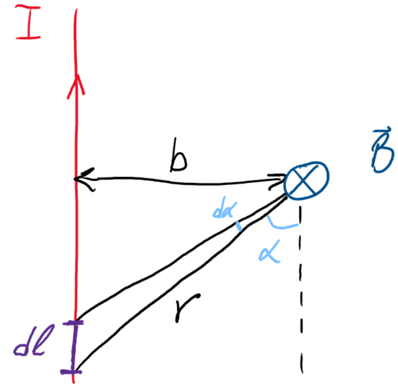
$$\vec{j}dV = Id\vec{l}$$

Векторы $jdV$ и $Idl$ называют объемным и линейным элементами тока соответственно

Получам $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_l \frac{I[d\vec{l},\vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{[\vec{j},\vec{r}]dV}{r^3}$ - **Закон Био-Савара**

Расчет по этим формулам индукции магнитного поля тока значительно упрощается, если распределение тока имеет определенную симметрию

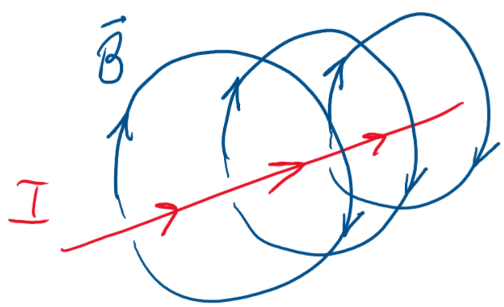
*Ex.* Магнитное поле прямого тока, то есть тока, текущего по тонкому прямому проводу. Согласно формуле в произвольной точке $A$ векторы $dB$ от всех элементов тока имеют одинаковое направление. Поэтому сложение векторов $dB$ можно заменить сложением их модулей: $dB = \frac{Idl \cdot r \sin\alpha}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{r d\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\alpha}{\frac{b}{\sin\alpha}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\sin\alpha d\alpha$, где $b$ - расстояние от точки до прямого проводника

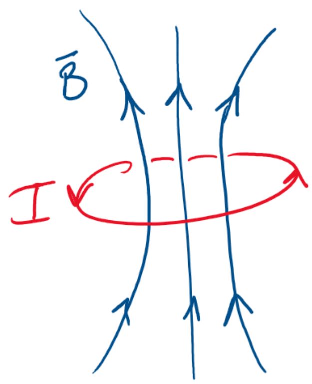



В интеграле получаем $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{I}{b}\sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$

Для бесконечного проводника получаем $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{b}$

Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой систему охватывающих провод концентрических окружностей



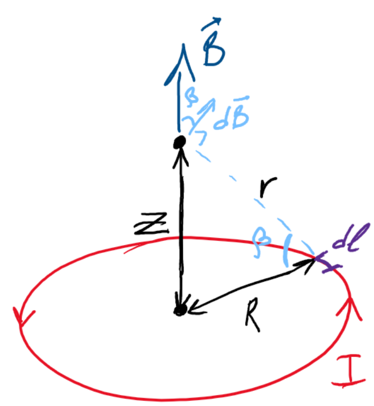




Важно заметить, что линии электрического поля не замкнуты - у них есть начало (в плюсе) и конец (в минус), тогда как линии магнитного поля - замкнуты

*Ex.* Магнитное поле на оси кругового тока. Ищем вектор индукции в точке на оси кольца. В силу симметрии вектор магнитной индукции сонаправлен оси кольца. По закону Био-Савара получаем

$dB_z = dB\cos\beta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl \cdot r \sin 90^\circ}{r^3}\cos\beta$

$\cos\beta = \frac{R}{r} \Longrightarrow B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$



# Лекция 2. Теорема Гаусса для магнитного поля

В электростатике было введено понятие потока вектора напряженности электрического поля. Аналлогичное понятие можно ввести для магнитного поля.

**Def.** Потоком вектора магнитной индукции (или магнитным потоком) через элемент площади $dS$ называется скалярная величина, равная $d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = BdS\cos\alpha = B_n dS$
Полный магнитный поток через поверхность $S$ равен сумме магнитных потоков через все элементы поверхности:

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}$$

Теорема Гаусса для вектора индукции магнитного поля: поток вектора магнитной индукции сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

Эта теорема отражает факт непрерывности силовых линий магнитного поля, то есть отсутствия «магнитных зарядов», на которых бы начинались или заканчивались линии магнитной индукции
Так как линии вектора индукции магнитного поля не имеют ни начала, ни конца, то число силовых линий, входящих в ограниченную замкнутую поверхность, равно числу выходящих из нее
Пусть магнитное поле создано бесконечно длинным прямолинейным проводником с током. Рассчитаем циркуляцию вектора индукции магнитного поля по произвольному замкнутому контуру, охватывающему проводником

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L Bdl\cos\alpha$$

$$dl\cos\alpha = rd\varphi, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Longrightarrow \oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_L d\varphi = \mu_0 I$$

Получаем теорему о циркуляции вектора магнитной индукции:

Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром (или пронизывающих поверхность, опирающуюся на этот контур):

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k$$

При вычислении суммы токов нужно учитывать знаки: положительными считаются те токи, направление которых связано с направлением обхода контура правилом правого винта, отрицательными - токи противоположного направления

Если контур в проводящей среде с непрерывным распределением тока, то $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}d\vec{S}$

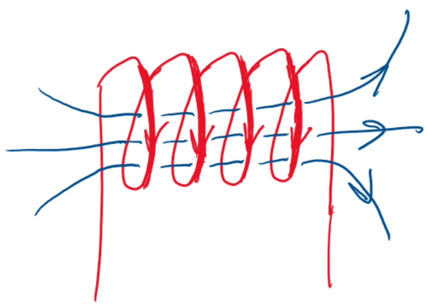
По теореме Стокса: $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\vec{B}d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}d\vec{S}$

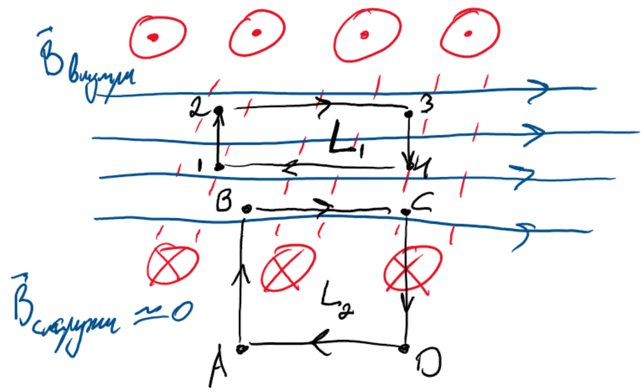
Таким образом, $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

*Ex.* Найдем магнитное поле соленоида (катушки)

Возьмем контур $L_1$ (см. кривой рисуночек), в нем $\oint_{L_1} \vec{B}d\vec{l} = (B_{23} - B_{41})l = 0 \Longrightarrow B_{23} = B_{41} = B_{\text{внутри}}$

В другом контур $L_2$ $\oint_{L_2} \vec{B}d\vec{l} = B_{\text{внутри}}l = \mu_0 NI \Longrightarrow B_{\text{внутри}} = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 nI$, где $n$ - плотность витков катушки на длину катушки



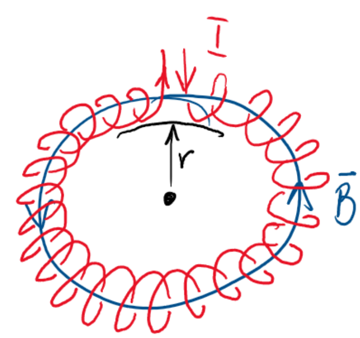



Получаем $\boxed{B = \mu_0 nI}$ - поле катушки пропорционально плотности витков

*Ex.* Найдем поле тороида. Из соображений симметрии очевидно, что линии индукции - окружность, концентричные с тороидом. В качестве контура $L$ выберем окружность с радиусом $r$

$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI \Longrightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}}$, где $N$ - число витков

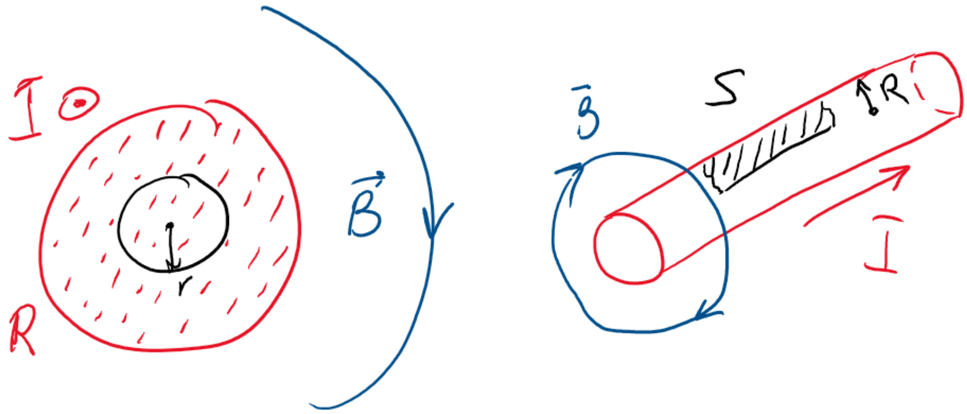
Вектора магнитной индукции будут являться касательными к окружности, концентричной тороиду



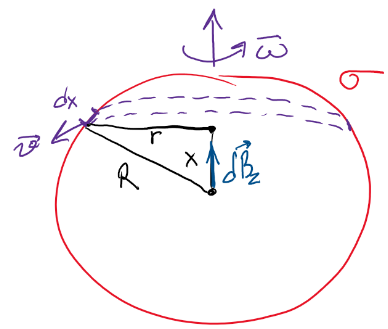

*Ex.* Постоянный ток $I = 10$ A, течет по длинному прямому проводнику круглого сечения. Найти магнитный поток через одну из половин осевого сечения проводника в расчете на один метр его длины.

Возьмем контур $L$ - окружность радиуса $r$, меньшего радиуса сечения проводника $R$. По теореме о циркуляции $\oint_L B(r)dr = \mu_0 I_{\text{внутри}}$. В силу симметрии считаем, что вектор $\vec{B}(r)$ равен по модулю на всем контуре $L$. Тогда получаем $B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{внутри}} = \mu_0 jS = \mu_0 j\pi r^2 \Longrightarrow B(r) = \dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$

Тогда поток через половину осевого сечения равен $\dfrac{\Phi}{l} = \int_0^R B(r)dr = \int_0^R \dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}dr = \boxed{\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}} = 10^{-6}\dfrac{\text{Вб}}{\text{м}}$




*Ex.* Непроводящая сфера радиуса $R = 50$ мм, заряженная равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ мкКл/м$^2$, вращается с угловой скоростью $\omega = 70$ рад/с вокруг оси, проходящей через ее центр. Найти магнитную индукцию в центре сферы




Сделаем разбиение сферы на колечки высотой $dx$, длина каждой такой колечки равна $2\pi r$, где $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Его площадь $2\pi r dx$. Точка на кольце движется с линейной скоростью $v = \omega r$.

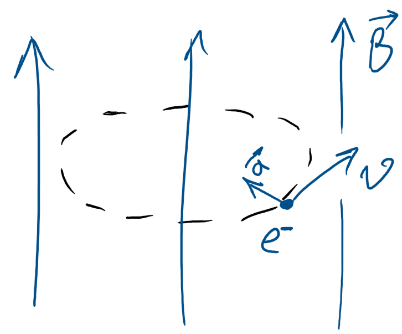
В силу симметрии вектор магнитной индукции $d\vec{B}$, производимый кольцом, параллелен оси $Oz$. Тогда $dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\cdot v}{R^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\sigma 2\pi r\cdot dx\cdot \omega r}{R^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\sigma 2\pi\omega(R^2-x^2)}{R^2}dx$

В интеграле $B = \int_{-R}^R dB = \dfrac{\sigma\mu_0\omega}{2}\int_{-R}^R \dfrac{(R^2-x^2)}{R^2}dx = \dfrac{\sigma\mu_0\omega}{2}\dfrac{(R^2x - \frac{1}{3}x^3)}{R^2}\Big|_{-R}^R = \dfrac{\sigma\mu_0\omega}{2}\dfrac{(R^2x - \frac{1}{3}x^3)}{R^2}\Big|_{-R}^R = \dfrac{\sigma\mu_0\omega}{2}\dfrac{4}{3}R = \boxed{\dfrac{2}{3}\mu_0 R\omega\sigma}$

# Лекция 3.

Вектор магнитной индукции характеризует силовое действие магнитного поля на движущиеся заряды. Сила, действующая на движущийся точечный зарядв магнитном поле, равна $\vec{F}_{\text{Л (M)}} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ и называется магнитной составляющей силы Лоренца
Направление магнитной составляющей силы Лоренца зависит от знака заряженной частицы
Магнитная составляющая силы Лоренца всегда направлена перпендикулярно скорости, поэтому не совершает работы и не изменяет величину скорости заряженной частицы

*Ex.* Частица влетает перпендикулярно силовым линиям магнитного поля: $\vec{v} \perp \vec{B}$
Скорость частицы и действующая на нее сила все время лежат в плоскости, перпендикулярной к силовым линиям магнитного поля. Траекторией движения частицы будет окружность радиуса $R$, лежащая в этой плоскости. Условием движения по окружности является $qvB = m\frac{v^2}{R}$, из этого $R = \frac{mv}{qB}$




*Ex.* Частица влетает под углом $\alpha$ к силовым линиям магнитного поля
Составляющая скорости, направленная вдоль силовых линий магнитного поля, не будет изменяется, а в плоскости, перпендикулярной силовым линиям, частица движется по окружности. Траектория движения представляет собой винтовую линию

*Rem.* Сила Лоренца - полная сила, действующая на заряд: $\vec{F}_{\text{Л}} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$
Разделение полной силы Лоренца на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчета

**Def.** Сила Ампера - сила, действующая под действием магнитного поля на заряды проводника, создающие электрический ток
Пусть электрический ток в объеме $dV$ элемента тока длиной $dl$ и площадью сечения $S$ образован заряженными частицами с зарядом $q$, движущимися со средней скоростью $v$ вдоль элемента тока:

$$d\vec{F}_A = [\vec{j}, \vec{B}]dV$$

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l}, \vec{B}]$$

Направление силы Ампера можно определить с помощью правила левой руки: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор индукции магнитного поля, а четыре вытянутых - пальца по направлению тока, то отогнутый на 90° большой палец покажет направление силы Ампера

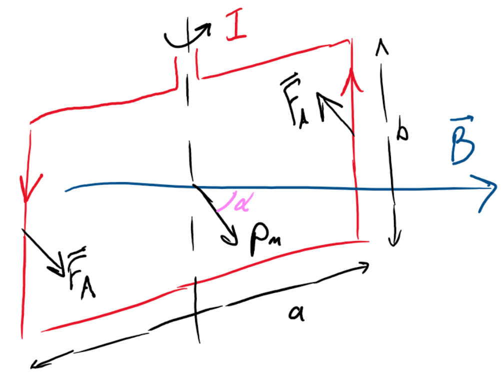
Для изучения свойств магнитного поля используется замкнутый плоский контур с током (рамка с током). Форма контура не имеет значения, а его размеры должны быть малы по сравнению с расстоянием до источников магнитного поля. Контур с током принято характеризовать магнитным моментом: $\vec{p}_m = IS\vec{n}$, где $I$ - сила тока, $S$ - площадь, ограниченная контуром, $\vec{n}$ - нормаль, образующая с направлением тока правовинтовую систему

На контур с током действует сила Ампера $d\vec{F}_A = I[d\vec{l}, \vec{B}] \Longrightarrow \vec{F}_A = I \oint [d\vec{l}, \vec{B}]$

Если поле однородно, то $\vec{F}_A = I \oint [d\vec{l}, \vec{B}] = I[\oint d\vec{l}, \vec{B}] = 0$

Если поле неоднородно, то $\vec{F} = p_m \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial n}$

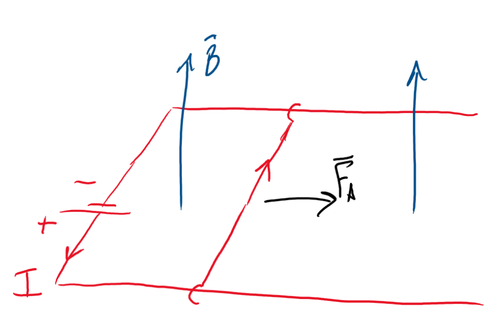
*Ex.* Рассмотрим случай поведения прямоугольного контура с током в однородном магнитном поле. Предположим, что рамка имеет возможность вращаться вокруг оси, проходящей через середины ее сторон длиной $a$ и перпендикулярной к силовым линиям магнитного поля.




Силы Ампера, действующие на стороны $a$ рамки, направлены вдоль оси вращения, поэтому действие этих сил сводится только к деформации контура (сжатию или растяжению). Силы Ампера, действующие на стороны $b$ рамки, создают вращающий момент и равны $F_A = IBb$.

Тогда момент сил равен $M = Fa \sin\alpha = IBS \sin\alpha = p_m B \sin\alpha \Longrightarrow \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$

*Ex.* Рассмотрим проводник в форме буквы «П» и двигающийся по нему другой проводник. По контуру, находящемуся в магнитном поле, течет ток, значит подвижный проводник будет двигаться влево, увеличивая площадь, охватываемого контуром.



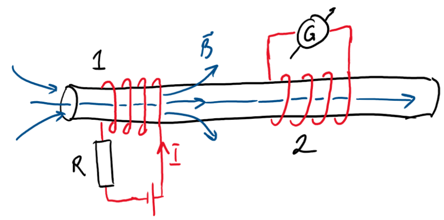

Работа сил магнитного поля по перемещению подвижного проводника будет равна:

$dA = d\vec{F} \cdot d\vec{r} = I[d\vec{l}, \vec{B}] \cdot d\vec{r} = Id\Phi$

$A = \int_1^2 Id\Phi$

**Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Правило Лоренца**

В цепи первой катушки течет постоянный ток $I_1$, в цепи второй ток отсутствует. Если катушку 1 приближать к 2, в последней возникнет ток $I_2$, который Фарадей назвал индукционным током. При удалении катушки 1 от 2 ток $I_2$ тоже появляется, но имеет противоположное направление. Катушку 1 можно заменить длинным полосовым магнитом.




При перемещении магнита вдоль оси катушки 2, тоже обнаружится возникновение в ней индукционного тока.
Явление электромагнитной индукции заключается в возникновении электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром.

> Закон Фарадея: ЭДС индукции в контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока сквозь площадь, ограниченную контуром:
>
> $$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

> Правило Ленца: индукционный ток всегда направлен так, что его магнитное поле противодействует причине, вызвавшей его появление

Самоиндукцией называется явление возникновение ЭДС индукции в электрической цепи вследствие изменения электрического тока в этой же цепи.
Заметим, что $B \sim I$ и $\Phi \sim B$ (в отсутствии ферромагнетиков). Тогда $\Phi \sim I$ или же $\Phi = LI$
Коэффициент пропорциональности $L$ называется индуктивностью контура. Индуктивность контура зависит от его размеров и формы, магнитных свойств среды
При изменении силы тока в контуре возникает ЭДС самоиндукции $\varepsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}$