

# Содержание

<b>1. Основные понятия</b>	<b>2</b>
1.1. Комплексное число . . . . .	2
1.2. Комплексная плоскость . . . . .	2
1.3. Предел . . . . .	4
<b>2. Комплексная функция</b>	<b>5</b>
2.1. Определение . . . . .	5
2.2. Предел функции . . . . .	6
2.3. Элементарные комплексные функции . . . . .	7
2.4. Дифференцирование ФКП . . . . .	8
2.5. Конформные отображения . . . . .	11
<b>3. Интеграл по комплексной переменной</b>	<b>13</b>
3.1. Определения . . . . .	13
3.2. Теорема Коши . . . . .	14
3.3. Неопределенный интеграл . . . . .	16
3.4. Интеграл Коши . . . . .	17
<b>4. Ряды</b>	<b>17</b>
4.1. Числовой ряд в комплексной плоскости . . . . .	17
4.2. Функциональный ряд в комплексной плоскости . . . . .	18
4.3. Степенной ряд . . . . .	19
4.4. Ряд Лорана . . . . .	21
<b>Х. Программа экзамена в 2024/2025</b>	<b>27</b>
Часть 1. . . . .	27
Часть 2. . . . .	27

# 1. Основные понятия

## 1.1. Комплексное число

Мет.  $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Обозначение:  $z = (a, b) = a + bi$ , где  $i = (0, -1) = \sqrt{-1}$

Основные операции:

1.  $\operatorname{Re} z = a$  - вещественная часть,  $\operatorname{Im} z = b$  - мнимая часть
2.  $z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
3.  $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4.  $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$  - **формула Муавра**, где  $\rho = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$
5.  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$ , где  $\rho = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
6. При  $n = 2$   $\sqrt{z} = \sqrt{a + bi} = \pm(c + di)$ , где  $c = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$ ,  $d = \operatorname{sign}(b) \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$

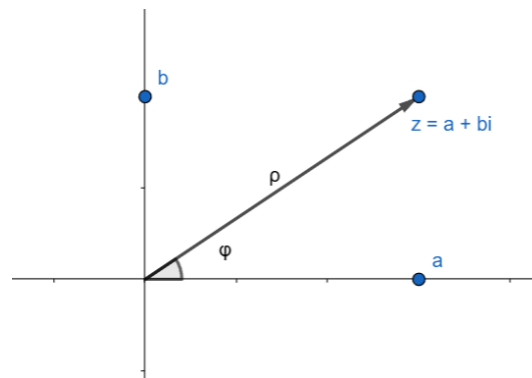
Тригонометрическая форма:

$z = a + bi = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где  $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\varphi =$

$\arg z \in [0; 2\pi)$

$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

По формуле Эйлера  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}$



## 1.2. Комплексная плоскость

**Def.** Окрестность точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  определяется как  $U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$

Тогда  $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0) = U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$  - выколота окрестность

**Def.** Для данной множества точек  $A$  точка  $z_0$  считается

- внутренней, если для любого  $\delta$   $U_\delta(z_0) \subset A$
- граничной, если для любого  $\delta$   $\exists z \in U_\delta(z_0) \mid z \in A$  и  $\exists z \in U_\delta(z_0) \mid z \notin A$

**Def.** Открытое множество состоит только из внутренних точек

**Def.** Закрытое множество содержит все свои граничные точки

**Def.** Границей  $\Gamma_D$  (иногда обозн.  $\delta D$ ) для множества  $D$  называют множество всех граничных точек  $D$

**Def.** Если любые две точки множества можно соединить ломаной линией конечной длины, то множество считается связным

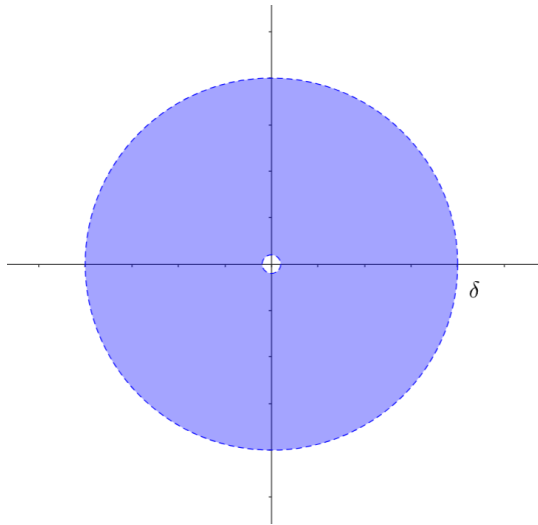
**Def.** Множество  $D \subset \mathbb{C}$  называется областью, если  $D$  - открытая и связная

**Def.** Кривая  $l \subset \mathbb{C}$  считается непрерывной, если  $l = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \varphi(t) + i\psi(t), t \in \mathbb{R}\}$ , где  $\varphi(t), \psi(t)$  - непрерывные функции

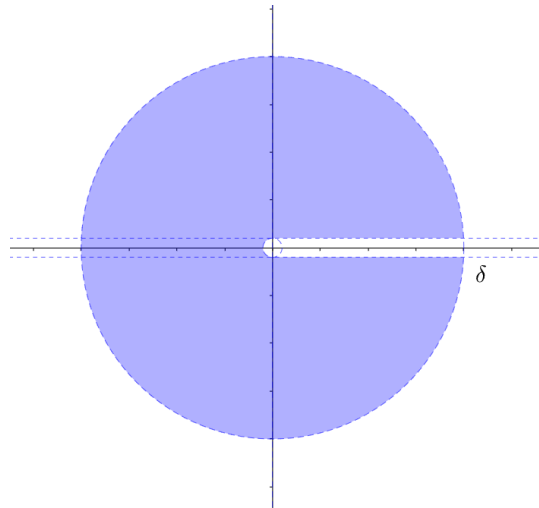
*Nota.* Если  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  дифференцируемы и их производные непрерывные, то кривая  $l$  гладкая

**Def.** Непрерывная замкнутая (то есть начальная и конечная точки совпадают) без самопересечений кривая называется контуром

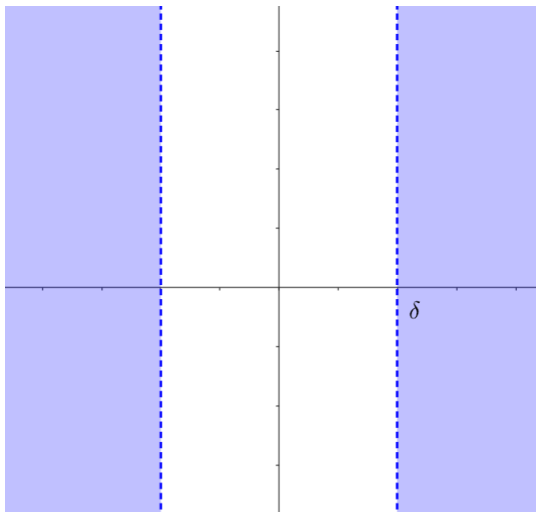
*Nota.* Односвязную область можно стянуть в точку



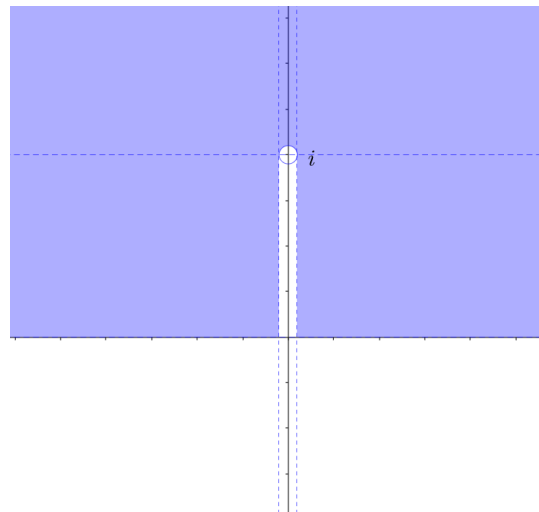
*Ex. 1.*  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \delta\}$  - область связанная, но не односвязная, ее нельзя стянуть из-за дырки



*Ex. 2.*  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \delta, \arg z \neq 0\}$  - область связная и односвязная



*Ex. 3.*  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < \delta\}$  - несвязная область



*Ex. 4.*  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0, z \notin [0, i]\}$  - здесь под  $[0, i]$  подразумевается линейный отрезок на оси

*Nota.* Дальше все рассматриваемые  $\Gamma_D$  будут состоять из кусочногладких и изолированных кривых

### 1.3. Предел

*Met.* Последовательность  $\{z_n\} = z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$

**Def.** Пределом  $\{z_n\}$  называют число  $z$  такое, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = \mathbb{N} \left| \forall n > n_0 \quad |z_n - z| < \varepsilon \right.$$

Обозначается  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$

*Nota.*  $\{z_n\}$  можно представить как  $x_n + iy_n$ , то есть двумя  $\mathbb{R}$ -последовательностями

$$\text{Th. } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x + iy \iff \begin{matrix} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = x \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = y \end{matrix}$$

$$\boxed{\Leftarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| \forall n > n_0 \quad \begin{matrix} |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix} \right.$$

$$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

То есть  $\forall \varepsilon > 0 \dots |z_n - z| < \varepsilon$

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \\ |y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

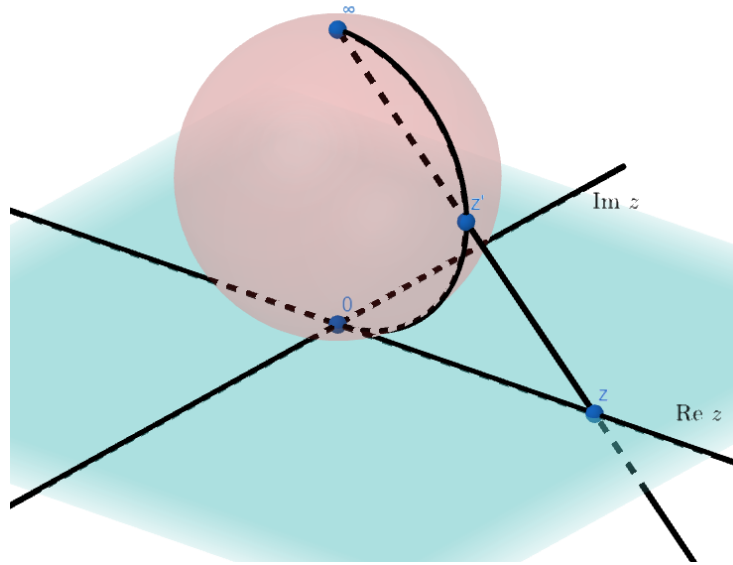
$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

*Nota.* Для комплексных чисел работают теоремы для пределов (сумма пределов, произведение пределов и т.д.), критерий Коши и другие

$$\text{Def. } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| n > n_0 \quad |z| > \varepsilon \right.$$

**Def.** Точка  $z$ , определенная как предел, равный  $\infty$ , называется бесконечно удаленной. Но существует множество последовательностей, чьи пределы удаляются на бесконечность разными путями на плоскости

**Def.** Стереографическая проекция (сфера Римана)



Поместим сферу на комплексную плоскость и сделаем биекцию точек плоскости на точки сферы: проведем из верхней точки сферы лучи вниз на плоскость, и точка, где луч пересекает сферу, будет считаться отображением для данной точки. Заметим, что в этом случае бесконечно удаленные точки будут отображаться в верхнюю точку сферы

**Def.**  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$  - расширенная комплексная плоскость

Однако  $z + \infty$  не определена,  $\infty + \infty$  не определена. Но  $\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n}$  при  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ;  $\infty = \infty \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  при  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$

Записью  $[-\infty; +\infty]$  обозначается ось  $\overline{\mathbb{R}}$ ;

$[-i\infty; +i\infty]$  - мнимая расширенная ось

Путь  $x \pm i\infty$  при фикс.  $x$  - вертикальная прямая;

$iy \pm \infty$  - горизонтальная прямая;

$e^{i\varphi} \cdot \infty$  - прямая, проходящая через начало координат

## 2. Комплексная функция

### 2.1. Определение

*Мет.*  $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{\iff}$  отображение такое, что  $\forall x \in E \exists! y \in D \mid y = f(x)$

**Def.**  $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{\iff}$  отображение такое, что  $\forall z \in D \exists w \in G \mid f(z) = w$

**Def.** Если  $\forall z \in D \exists! w \in G$ , то  $f$  называется однозначной функцией

**Def.** Если  $\forall z_1, z_2 \in D (z_1 \neq z_2) \implies f(z_1) \neq f(z_2)$ , то  $f$  называется однолистной функцией

Ex. 1.  $w = \sqrt{z}$  - неоднозначная функция

$$\square z = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{1} \left( \cos \frac{2\pi k}{2} + i \sin \frac{2\pi k}{2} \right)$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = -1$$

Ex. 2.  $w = z^2$  - неоднолистная функция

$$z_1 = 1, z_2 = -1 \quad w(z_1) = w(z_2) = 1$$

Nota. Если  $f(z)$  однозначна и однолистка, то  $f(z)$  - взаимно однозначное соответствие (биекция).

Тогда  $\exists g(x) \mid g(f(x)) = x$

Комплексную функцию  $f(z)$  можно представить как  $u(x, y) + iv(x, y)$ , где  $x + iy = z$

$$Ex. w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$$

$$u(x, y) = (x^2 - y^2), \quad v(x, y) = 2xy$$

## 2.2. Предел функции

**Def.**  $L \in \mathbb{C}, f : D \longrightarrow G, \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid z \in D, z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0) \implies f(z) \in U_\varepsilon(L)$

В определении существование и значение  $L$  не должно зависеть от пути, по которому  $z$  приближается к точке сгущения  $z_0$ . Может быть так, что для любого направления стремления предел есть, но в общем смысле не существует

$$Ex. f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right) \quad \square z = \rho e^{i\varphi}$$

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}} - \frac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} \right) = \frac{1}{2i} (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}) = \frac{1}{2i} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi - \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = \sin 2\varphi$$

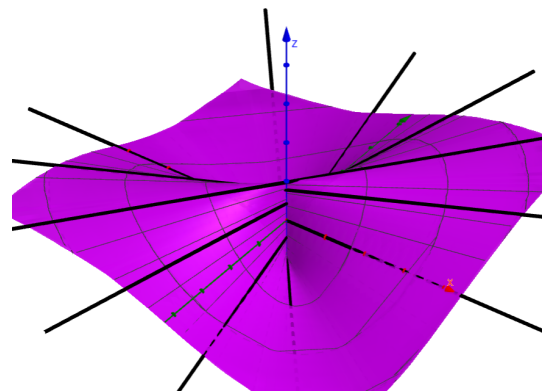
Зафиксируем  $\varphi = \varphi^* \in [0; 2\pi)$ , тогда  $\sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi = \varphi^*}} f(z) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi = \varphi^*}} \sin 2\varphi = \sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$$

Значения предела занимает отрезок  $[-1; 1] \implies$

$$\nexists \lim_{z \rightarrow 0} f(z)$$

На рисунке изображена  $\sin 2\varphi$ , на оси  $Oz$  изображена  $\operatorname{Re} w$ . Черные линии - это возможные пути приближения  $z$  к 0



Nota. Путь следования предела аналогичен левостороннему и правостороннему пределами  $\mathbb{R}$ -функций

**Def. Непрерывность функций в точке  $z_0$ .**

$f: D \rightarrow G, z_0 \in D, f(z)$  называется непрерывной в  $z_0$ , если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

На языке приращений:  $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$

$$\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0 \implies \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{cases} \implies \Delta \rho \rightarrow 0$$

## 2.3. Элементарные комплексные функции

Ех. 1. Линейная  $f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$

Эта функция однозначная, однолистная  $\implies \exists f^{-1}(z) = g(z) = \frac{z-b}{a}$

Геометрический смысл:

$a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$

$az = |a||z|(\cos(\varphi_a + \varphi_z) + i\sin(\varphi_a + \varphi_z))$  - поворот и растяжение ( $\varphi_a = \arg a, \varphi_z = \arg z$ )

$az + b = (x_{az} + x_b) + i(y_{az} + y_b)$  - сдвиг

То есть линейная функция - композиция из поворота, растяжения и сдвига

Ех. 2. Степенная  $w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$  - однозначная, может быть неоднолистной

Для  $n \in \mathbb{Q}$  функция становится неоднозначной

Ех.  $w = z^2 \quad z = \rho e^{i\varphi}, w = \rho^2 e^{2i\varphi}$

Пусть  $z_1 \neq z_2$  и  $w(z_1) = w(z_2)$ , тогда  $\arg z_1 = \arg z_2 \pm \pi$

$$w(z_1) = \rho^2 e^{2i \arg z_1} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + 2\pi k)}$$

$$w(z_2) = \rho^2 e^{2i \arg z_2} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + \pi)} = \rho^2 e^{i(2 \arg z_1 + 2\pi)} = w(z_1)$$

Область однолистности  $z^2$  - множество точек, для которых  $\arg z \in [0; \pi)$

Точку  $w = 0$  называют точкой разветвления

Ех.  $w = z^{-1} = \frac{1}{z} \quad w(0) = \infty, w(\infty) = 0$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  - функция обратима

$$w = re^{i\psi} = \frac{1}{\rho e^{i\phi}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \implies |w| = \frac{1}{|z|}, \arg w = -\arg z$$

Преобразование  $|w| = \frac{1}{|z|}$  называется инверсией, а

$\arg w = -\arg z$  дает симметрию относительно  $\operatorname{Re} z$

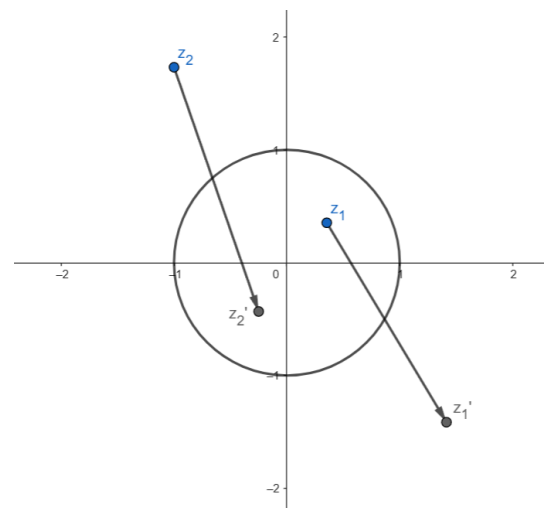
Ех. 3. Рациональная  $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \quad n, m \in \mathbb{N}$

Ех. 4. Показательная  $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

Свойства:

$$1. e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$2. (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$$



3.  $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$  - показательная функция периодична с периодом  $2\pi i$

Ех. 5. Логарифмическая  $w = \text{Ln } z$

Если  $e^w = e^{u+vi} = e^u(\cos v + i \sin v) = z = |z|e^{i \arg z}$ , то  $u = \ln |z|$ ,  $v = \arg z + 2\pi k$

Тогда  $\boxed{\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k)}$

$\ln z = \text{Ln } z$  при  $k = 0$  - т. н. главное значение

Заметим, что  $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$  - многолистная функция, а  $w = \text{Ln } z = \ln \rho + i(\arg z + 2\pi k)$  - многозначная

Ех. 6. Тригонометрические и гиперболические

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Nota. Рассмотрим уравнение  $\sin z = A \in \mathbb{C}$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = A \implies e^{2iz} - 2iAe^{iz} - 1 = 0$$

При  $t = e^{iz}$  получаем квадратное уравнение, у которого в  $\mathbb{C}$  всегда будет два корня. Это значит, что в  $\mathbb{C}$   $\sin$  и  $\cos$  принимают любые значения (то есть  $|\sin z| > 1$ )

## 2.4. Дифференцирование ФКП

**Def.**  $w = f(z), w : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z_0 \in D$ . **Производная** функции  $w(z_0)$  - это предел  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ , если он существует и не зависит от пути  $z \rightarrow z_0$

Мет. Дифференцирование  $y = f(x)$ :

$$\text{В } \Phi_1 \text{ П: } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \underset{A \in \mathbb{R}}{=} A\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\text{В } \Phi_2 \text{ П: } \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)$$

**Def.**  $f(z)$  называется дифференцируемой в точке  $z_0$ , если  $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$

**Def.** Дифференцируемая в точке  $z_0$  функция  $w = f(z)$ , производная  $f'(z_0)$  которой непрерывна в  $z_0$ , называется аналитической (или аналитичной) функцией в  $z_0$



**Th.** Критерий аналитичности (или Условие Коши-Римана)

$f(x) = u(x, y) + iv(x, y)$  аналитична в точке  $z_0 = x + iy$



$\exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  непрерывны в  $z$  и  $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

Причем,  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f \text{ аналитическая в } z &\iff \exists \text{ непрерывная } f'(z) = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = [\text{предел не зависит от пути}] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично при } i\Delta y \rightarrow 0 \text{ получаем } \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{i\Delta y} = \\ = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y v}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = v_y - iu_y \end{aligned}$$

Итак,  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

Отсюда  $u_x = v_y$  и  $u_y = -v_x$

$\Leftarrow \exists$  непрерывные  $u_x, u_y, v_x, v_y \iff u(x, y), v(x, y)$  дифференцируемы в  $(x, y)$ , тогда

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha_1(x, y, \Delta x, \Delta y) + \alpha_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$$

$$\alpha_1 = o(\Delta \rho), \quad \Delta \rho = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \beta_1 + \beta_2$$

$$\Delta f = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - (u(x, y) + iv(x, y)) = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y + \beta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{u_x \Delta x + u_y \Delta y + i v_x \Delta x + i v_y \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{u_x(\Delta x + i \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{v_x(i \Delta x - \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} = u_x + \\ &+ v_x i + \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} \end{aligned}$$

Тогда  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = u_x + iv_x + \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} = u_x + iv_x \iff f' = u_x + iv_y$ , существует и непрерывна в  $(x, y)$

*Nota.* Используя Условие Коши-Римана, получим равенство  $u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

*Nota.* Коши-Риман в ПСК:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

Тогда  $f'(z) = \frac{1}{z} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{\rho}{z} \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} + i \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)$

$$u_\rho = u_x \frac{\partial x}{\partial \rho} + u_y \frac{\partial y}{\partial \rho} = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi$$

$$v_\varphi = v_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + v_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\rho v_x \sin \varphi + \rho v_y \cos \varphi = \rho u_y \sin \varphi + \rho u_x \cos \varphi = \rho u_\rho$$

$$\text{Lab. } \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho}$$

### Свойства аналитических функций

Пусть  $f, g$  - аналитические функции, тогда:

- 1° Линейность:  $af + bg$  - аналитическая
- 2° Композиция:  $f(g(z))$  - аналитическая
- 3° Произведение:  $f \cdot g$  - аналитическая

*Nota.* Доказательства свойств элементарные, все сводится к сведению к  $u$  и  $v$

$$\text{Ex. } w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$u_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_y = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = u_x$$

$$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u_y$$

Таким образом,  $\frac{1}{z}$  - аналитическая функция

$$\text{Ex. } w = \bar{z} = x - iy$$

$u_x = 1, v_y = -1 \neq u_x$  - не аналитическая функция

- 4°  $f(z)$  аналитична в  $D$  ( $f: D \rightarrow D'$ ),  $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$ . Тогда  $\exists g(w) = f^{-1}(z)$  ( $g: D' \rightarrow D$ ) и  $\forall z_0 \in D \quad f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$ , где  $w_0 = w(z)$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Заметим, что  $f'(z) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J \neq 0$

Действительно, если якобиан равен 0, то  $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .

Аналогично  $\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Значит,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  – противоречие

Если  $J \neq 0$ , то преобразование  $f(z)$  приводит  $(x, y)$  в  $(u, v)$  взаимно однозначно. Тогда

$\exists!$  решение  $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ , то есть взаимно однозначно определены  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$

Обозначим  $g(w) = x(u, v) + iy(u, v)$

Найдем  $f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$ . Рассмотрим отношение  $\frac{\Delta z}{\Delta w} \xrightarrow{\Delta w \rightarrow 0} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} =$

$$\frac{1}{\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'_z(z_0)} \implies \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = g'_w(w_0) = \frac{1}{f'_z(z_0)} \text{ или } f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$$

5°  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  аналитична в  $D$ . Тогда  $u(x, y), v(x, y)$  – гармонические функции в  $D$

Функция считается гармонической, если  $\Delta u = 0$  (здесь  $\Delta = \nabla^2$  – лапласиан)  $\iff$   
 $u_{xx} + u_{yy} = 0$   
Lab.

6° Если  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  аналитична в  $D$  и известна  $u(x, y)$  или  $v(x, y)$ , то  $f(z)$  определяется однозначно с точностью до  $\text{const}$

Пусть известна  $\text{Re } f(z) = u(x, y)$ . Нужно найти  $v(x, y)$ . По условию Коши-Римана  $\int u(x, y), \int v(x, y)$  не зависят от пути (Lab. доказать, что  $\int_{AB} dv$  не зависит от пути)

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x dx + v_y dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y) dx + u_x dy$$

Интеграл будет найден с точностью до  $\text{const} = C(x_0, y_0)$

## 2.5. Конформные отображения

Найдем геометрический смысл производной. Рассмотрим отображение  $w = f(z)$  ( $w : D \longrightarrow G$ ) – дифференцируема в точке  $z_0 \in D$  и  $f'(z_0) \neq 0$

Аргумент: В области  $D$  рассмотрим гладкую кривую  $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ . Образ  $\gamma(t)$  – кривая  $\sigma(t)$  в  $G$

$\gamma(t)$  в окрестности некоторой точки  $z_0$  гладкая,  $\exists$  касательная с углом  $\theta = \arg \gamma'(t)$

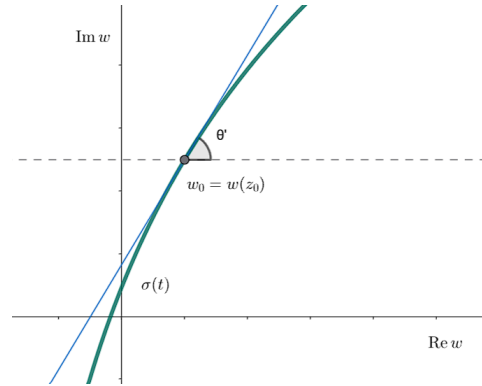
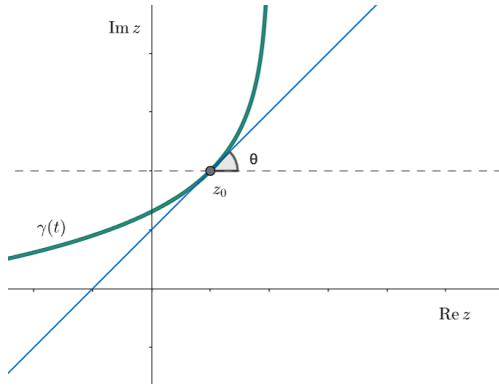
$\sigma(t)$  в окрестности  $w_0 = w(z_0)$  гладкая,  $\exists$  касательная с углом  $\theta' = \arg \sigma'(t)$

$$A \quad \sigma'(t_0) = w'(t_0) = f'(z_0) \cdot \underbrace{\gamma'(t_0)}_{z'(t_0)}$$

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0)$$

$$\theta' = \arg f'(z_0) + \theta$$

$\theta' - \theta = \arg f'(z_0)$  – поворот кривой  $\gamma(t)$  вокруг  $z_0$  на угол  $\arg f'(z_0)$  при отображении  $w = f(z)$



Модуль:  $w = f(z)$  – дифференцируема  $\iff \Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$

$$\text{Рассмотрим } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)| \implies |\Delta w| = |f'(z_0)| \cdot |\Delta z| + o(|\Delta z|)$$

Рассмотрим малый контур  $|\Delta z| = |z - z_0| = \rho$ . Тогда  $|\Delta w| = |w(z) - w(z_0)| = |f'(z)|\rho + o(\rho)$

Таким образом  $w(z)$  растягивает круг  $|z - z_0| = \rho$  в  $|f'(z_0)|$  раз с точностью до малых высших порядков

Итак,  $w = f(z)$  в точке  $z_0$  поворачивает точку у окрестности на угол  $\alpha = \arg f'(z_0)$  и растягивает отрезки  $[z_0, z]$  в  $k = |f'(z_0)|$  раз

**Def.** Конформное отображение – отображение  $w(z)$ , сохраняющее углы (между образами и прообразами) и постоянство растяжений

$$\text{Th. Условия конформности: } \begin{cases} \text{дифференцируемость} \\ \text{однолиственность} \\ f'(z) \neq 0 \text{ в } D \end{cases} \iff \text{конформно}$$

Ex.  $w = az + b$

Мет. Геометрический смысл линейного отображения:  $b$  – перенос  $z = 0$  в точку  $z = b$ ;  $a = |a|e^{i\varphi}$ , тогда  $|a|$  – коэффициент растяжения,  $\varphi$  – угол поворота

Заметим,  $w' = (az + b)' = a$ , тогда  $k = |w'(z_0)| = |a|$ ,  $\varphi = \arg w'(z_0) = \arg a$

Lab. Проверить, что  $w = z^2$  не конформное отображение, найдя  $w'(z_0)$

### 3. Интеграл по комплексной переменной

#### 3.1. Определения

В  $\mathbb{C}$  задана кусочно-гладкая кривая  $K$  (с концами в точках  $M$  и  $N$ ) параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) & t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ y = \psi(t) & \varphi, \psi - \mathbb{R}\text{-функции} \end{cases}$$

Тогда  $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$  - задание  $K$  в  $\mathbb{C}$ . Введем отображение  $w = f(z)$ , действующее на  $K$

Определим интегральные суммы:

1. дробление отрезка  $MN$  на частичные дуги:  $M = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = N$

Тогда  $\alpha = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta$

2. Выбор средних точек в отрезках кривой  $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$

3. Сопоставим интегральную сумму  $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i$

4. Интегралом от  $w = f(z)$  по кривой  $K$  называется  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau = \max \Delta z_i \rightarrow 0}} \sigma_n = \int_K f(z) dz$ , если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения, выбора средних точек и т. д.

При этом интеграл можно представить как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) (\Delta x_i + i \Delta y_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u(\xi_i, \eta_i) + i v(\xi_i, \eta_i)) (\Delta x_i + i \Delta y_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u_i \Delta x_i - v_i \Delta y_i) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u_i \Delta y_i + v_i \Delta x_i) = \int_K u dx - v dy + i \int_K u dy + v dx$

*Nota.* Мы свели  $\mathbb{C}$ -интеграл к двум криволинейным  $\mathbb{R}$ -интегралам, все свойства интегралов сохраняются

$$\text{Ex. } \int_{\gamma=[0;1+i]} \bar{z} dz = \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) = \int_{\gamma} x dx + y dy + i \int_{\gamma} x dy - y dx = 2 \int_0^1 x dx = 1$$

Свойства комплексного интеграла:

1° Линейность

2° Аддитивность

3° Смена знака:  $\int_{K^+} = - \int_{K^-}$

4° Оценка, модуль:  $\left| \int_K \right| \leq \int_K |f(z)| dz$

5°  $\int_K f(z) dz \stackrel{z=g(w)}{=} \int_C f(g(w)) g'(w) dw = [\text{В частности переход к параметру } t] = \int_{C(t)} f(t) g'(t) dt$

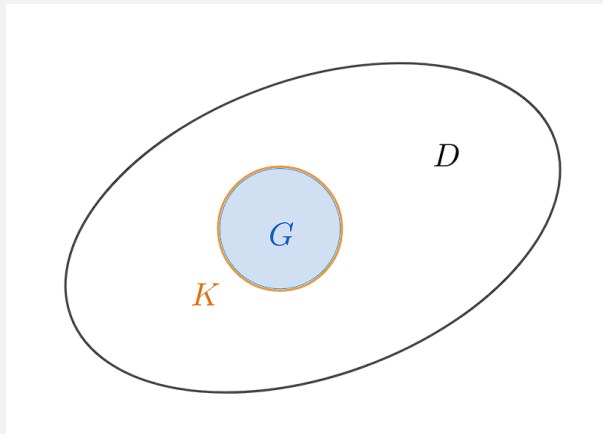
$$\text{Ex. } I = \int_{K: |z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z-z_0} \stackrel{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=} \int_K \frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} = \int_K \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$

Интеграл  $I$  не зависит от радиуса и центра окружности (то есть контура интегрирования), то есть интеграл функции  $\frac{1}{z-z_0}$  будет равен  $2\pi i$  для любой окружности в качестве контура

### 3.2. Теорема Коши

**Th. 1.**  $f(z)$  аналитическая и однозначная в односвязной области  $D$

Если  $f(z)$  непрерывна на  $\Gamma_D$ , то  $\oint_{\Gamma_D} f(z)dz = 0$



Запишем интеграл по контуру  $K \subset D$  ( $K$  - кусочно гладкая):

$$\int_K f(z)dz = \int_K udx - vdy + i \int_K udy + vdx = I_1 + I_2i$$

$$I_1 = \int_K \underbrace{u(x,y)}_{P(x,y)} dx - \underbrace{v(x,y)}_{Q(x,y)} dy = \left[ \begin{array}{l} f(z) - \text{аналитическая} \Rightarrow \\ u_x, u_y, v_x, v_y \text{ существуют} \\ \text{и непрерывны} \end{array} \right] = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \text{Формула Грина}$$

$$\iint_G \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = 0$$

$$\text{Аналогично } I_2 = \int_K udy + vdx = \iint_G \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy = 0$$

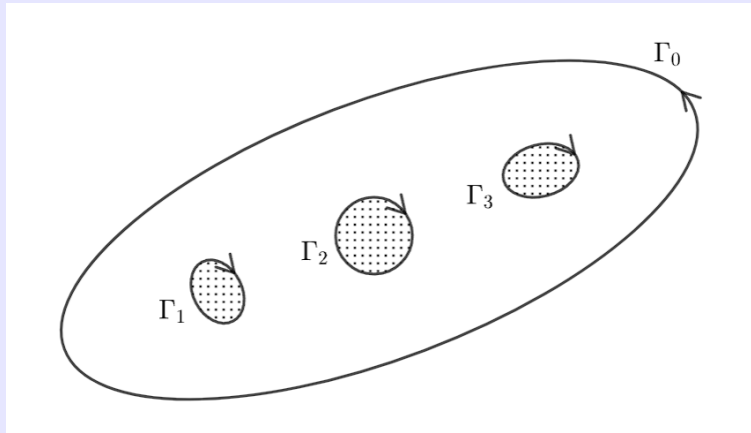
Таким образом,  $\oint_{K \subset D} f(z)dz = 0$  - формула Коши

Так как  $f(z)$  непрерывна на  $\Gamma_D$ , то можно взять  $K = \Gamma_D$

*Nota.* Получим, что интеграл по любому замкнутому  $\Gamma_D$  контуру в области аналитичности равен нулю

То есть  $\int_{AB} f(z)dz$  в условиях **Th. 1.** не зависит от пути, и его можно решать как  $\int_{AB} = \int_A^B$

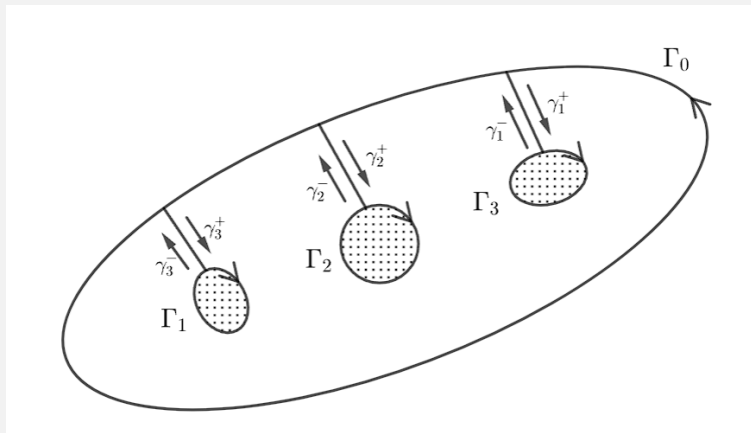
*Nota.* Обобщим **Th. 1.** на многосвязную область. Выколотые области тоже имеют границы, которые включены в границу всей области



**Th. 2.** Дана многосвязная область  $D$ ,  $f(z)$  - аналитична в  $D$  и непрерывна на  $\Gamma_D$   
Граница  $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$ , где положительным обходом области считается тот, при котором область обхода слева

Тогда  $\int_{\Gamma_D^+} f(z)dz = 0$  или  $\int_{\Gamma_0^+} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i^+} f(z)dz$

Сделаем разрезы как на картинке. Разрезы превратили область  $D$  в односвязную с границей  $\Gamma' = \Gamma_0 \cup (\gamma_1^+ \cup \gamma_1^- \cup \Gamma_1) \cup \dots = \Gamma_0 \cup \bigcup_{i=1}^n (\gamma_i^+ \cup \gamma_i^- \cup \Gamma_i)$



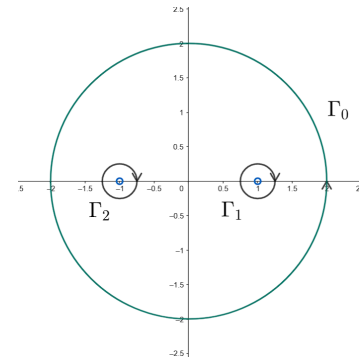
По **Th. 1.**  $\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0 \iff \int_{\Gamma_D} f(z)dz + \int_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \dots = 0$

Но  $\int_{\gamma_1^+} = - \int_{\gamma_1^-}$ , поэтому  $\int_{\Gamma_D^+} = \sum \int_{\Gamma_i^-}$  или  $\int_{\Gamma_0^+} = \sum \int_{\Gamma_i^+}$

Ex.  $\int_{|z|=2} f(z)dz$

По **Th. 2.**  $\int_{\Gamma_0} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$

Тогда  $\int_{|z|=2} f(z)dz = \int_{|z-1|=\rho_1} f(z)dz + \int_{|z+1|=\rho_2} f(z)dz$ , где  $\rho_1, \rho_2$  - радиусы бесконечно малой длины



### 3.3. Неопределенный интеграл

Мет. По теореме Барроу  $\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$  - интеграл с переменным верхним пределом

Тогда  $\Phi(x)$  - дифференцируема, и  $\Phi'(x) = f(x)$ , то есть  $\Phi(x)$  - первообразная  $f(x)$

**Th.**  $f(z)$  непрерывна в односвязной области  $D$  и  $\forall \Gamma \subset D \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

Тогда при фиксированном  $z_0 \in D$   $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$  аналитична в  $D$  и  $\Phi'(z) = f(z)$

Если  $\forall \Gamma \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ , то  $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$  - интеграл, не зависящий от пути, а только от  $z_0$  и  $z$

$$\text{Рассмотрим } \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left( \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta \right) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta =$$

$$\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z) + f(z))d\zeta = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z)d\zeta + \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta =$$

$$\Delta z f(z) + \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta$$

$$\left| \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta \right| \leq \int_z^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)|d\zeta \leq \max_{[z, z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| \Delta z$$

Так как  $f(z)$  непрерывна в  $D$  и  $z, \zeta \in D$ , то  $\lim_{\zeta \rightarrow z} f(\zeta) = f(z) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta \implies |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta \implies \max |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

То есть  $\left| \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta \right| \leq \varepsilon \Delta z$

Или  $\frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} \leq f(z) + \varepsilon$ , то есть  $\left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon$ , или  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z)$



**Def.**  $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$  называют первообразной для  $f(z)$

Следствие - формула Ньютона-Лейбница:  $\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

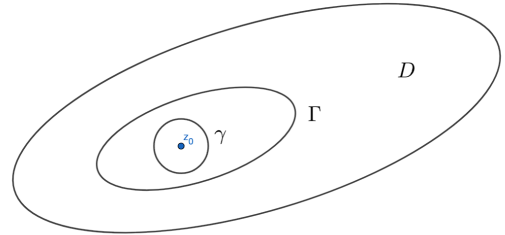
### 3.4. Интеграл Коши

*Nota.* Установим связь между значениями  $f(z)$  во внутренних точках области и на ее границе

$f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ ,  $z_0 \in D$ .

Окружаем  $z_0$  контуром  $\Gamma \in D$  и меньшим контуром  $\gamma: |z - z_0| = \rho$

В кольце между  $\gamma$  и  $\Gamma$  рассмотрим функцию  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$  (в кольце  $\varphi(z)$  аналитична)



По **Th. 2.** для  $\varphi(z)$  в многосвязной области  $\int_{\Gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta$  - не зависит от пути

То есть выбор окружности в качестве  $\gamma$  не важен:

$$\int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta \stackrel{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta) \rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} f(\zeta) d\varphi = i \underbrace{\int_0^{2\pi} (f(\zeta) - f(z_0)) d\varphi}_{\text{стягиваем } \gamma \text{ в точку } z_0, \int \rightarrow 0} + i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\varphi =$$

$$if(z_0) \cdot 2\pi$$

$$\text{Тогда } \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = 2\pi i f(z_0)$$

*Nota.* Доказали теорему: в области аналитичности  $\forall z_0 \in D \quad \int_{\Gamma_D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$

$$\text{Ex. } \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)(z+1)} dz = \int_{|z-1|=\rho_1} \frac{\frac{f(z)}{z+1}}{z-1} dz + \int_{|z+1|=\rho_2} \frac{\frac{f(z)}{z-1}}{z+1} dz = 2\pi i \left( \frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{-2} \right)$$

## 4. Ряды

### 4.1. Числовой ряд в комплексной плоскости

**Def. 1.**  $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ , где  $z_n \in \mathbb{C}$  - числовой ряд

**Def. 2.** Сумма ряда -  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k$

Если сумма существует и конечна, то ряд называют сходящимся.

**Def.**  $f(z)$  называется регулярной в точке  $z_0$ , если  $f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , где  $c_n \in \mathbb{C}$

*Nota.* Для комплексных числовых рядов остаются справедливыми:

1. Необходимое условие сходимости
2. Признак Даламбера
3. Радиальный признак Коши
4. Критерий Коши
5. Абсолютная сходимость

## 4.2. Функциональный ряд в комплексной плоскости

**Def.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ , где  $u_n(z) : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  - функциональный ряд

**Th. Признак Вейерштрасса.**

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \alpha_n \in \mathbb{R}_0^+, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}, |u_n(z)| \leq \alpha_n \forall z \in D \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$  сходится равномерно в  $D$

Lab. Сверить формулировку и доказательства для  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{R}$ -случая

*Nota.* Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывна

**Th.**  $u_n(z)$  непрерывна в  $D$  и  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$  сходится равномерно в  $D$

Тогда  $\int_K f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_K u_n(\zeta) d\zeta$ , где  $K \subset D$  - кусочно гладкая кривая

Докажем, что  $\left| \int_K f(\zeta) d\zeta - \sum_{k=1}^n \int_K u_k(\zeta) d\zeta \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\left| \int_K \left( f(\zeta) - \sum_{k=1}^n u_k(\zeta) \right) d\zeta \right| = \left| \int_K \left( \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\zeta) - \sum_{k=1}^n u_k(\zeta) \right) d\zeta \right| = \left| \int_K \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_K r_n(\zeta) d\zeta \right| \leq$$

$$\int_K |r_n(\zeta)| |d\zeta| \underset{\text{по кр. Коши}}{\leq} \varepsilon$$

### 4.3. Степенной ряд

**Def.** Степенной ряд -  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$   $\left(a = 0 : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)$ ,  $c_n \in \mathbb{C}$

*Nota.* Область сходимости - круг с центром  $a$ ,  $|z-a| \leq R$  - радиус сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |z-a| < 1 \implies |z-a| < \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

*Nota.* Также справедлива теорема Абеля

#### Th. Абеля.

Если степенной ряд сходится в точке  $z_1$ , то он сходится абсолютно и равномерно в любой точке  $z_2$  такой, что  $|z-z_1| > |z-z_2|$

Если степенной ряд расходится в точке  $z_1$ , то он расходится в любой точке  $z_2$  такой, что  $|z-z_1| < |z-z_2|$

Следствие: Если  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , то  $f(z)$  - непрерывна в круге сходимости ряда

#### Th. Почленное дифференцирование суммы ряда.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$  - сходящийся в круге радиуса  $R \neq 0$ . Тогда  $f(z)$  дифференцируема и

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

Рассмотрим ряд (и его сумму)  $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$  - он сходится в круге радиуса  $\rho$  таком, что  $0 \leq |z| \leq \rho < R$  (см. сходимость по Даламберу) (Обозначим круг  $K_1 : |z| = \rho$ )

Докажем, что  $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} = S(z) = f'(z)$

В круге  $K_1$  выберем кривую  $\gamma$ , соединяющую  $z_0 = 0$  и  $z$

Рассмотрим  $\int_{\gamma} \zeta^k d\zeta$ , функция  $\zeta^k$  аналитическая, тогда  $\int_{\gamma} \zeta^k d\zeta$  не зависит от пути

$$\int_{\gamma} \zeta^k d\zeta = \int_0^z \zeta^k d\zeta = \left. \frac{\zeta^{k+1}}{k+1} \right|_0^z = \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

$$\text{Тогда } \int_0^z n c_n \zeta^{n-1} d\zeta = \left. \frac{n c_n \zeta^n}{n} \right|_0^z = c_n z^n$$

$$\text{Возьмем интеграл от суммы } \int_0^z S(\zeta) d\zeta = \int_0^z \left( \sum_{n=0}^{\infty} n c_n \zeta^{n-1} \right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z n c_n \zeta^{n-1} d\zeta =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$$

Таким образом,  $f(z)$  является первообразной для  $S(z)$ , то есть  $S(z) = f'(z)$

При этом  $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$  - этот ряд можно дифференцировать дальше, и область, в которой функция дифференцируется, - круг  $K_1$ , где  $\rho$  вплотную подходит к  $R$

Таким образом, доказали, что если  $f(z)$  регулярна  $\forall z$  в круге  $|z| < R$ , то  $f(z)$  сколько угодно раз дифференцируема в этом круге и  $f'(z) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right)'$

Следствие:  $f'(z) = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots)'$  или  $f'(z) = (c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots)'$   $\implies c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = \frac{f''(z)}{2!}$  и так далее

Получили ряд Тейлора  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$

**Th.**  $f(z)$  аналитическая в области  $D \implies f(z)$  регулярна в области  $D$

По формуле Коши  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in K$ , где  $K = \{z \mid |z-a| < \rho\}$ ,  $\gamma_\rho = \{\zeta \mid |\zeta-a| = \rho\}$  и  $K \subset D$

Разложим в ряд  $\frac{1}{\zeta - z}$ :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - (z-a) - a} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n, \text{ где } \left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| < 1$$

То есть  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$  - равномерно сходящийся

Тогда  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$  - равномерно сходящийся

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n - \text{единственное разложение по Тейлору, где } b_n = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

$$\text{Итак } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

**Th. Морера.**  $f(z)$  непрерывна в  $D$  и  $\forall \gamma \subset D \int_{\gamma} f(z) dz = 0 \implies f(z)$  аналитична в  $D$

При данных условиях  $\exists \Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \mid \Phi'(z) = f(z)$  и  $\Phi(z)$  аналитична

Так как  $\Phi(z)$  дифференцируема, то она дифференцируема сколько угодно раз. Таким образом, существуют  $f'(z), f''(z)$  и так далее, а из этого означает, что  $f(z)$  – аналитична

**Th. Лиувилля.**  $f(z)$  аналитична в  $\mathbb{C}$  и  $\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid |f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$

Тогда  $f(z) \equiv \text{const}$

Докажем, что  $f'(z) = 0$

$$|f'(z)| = \left| \text{контур } \gamma - \text{круг } z + \rho e^{i\varphi} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\varphi}) \rho i e^{i\varphi}}{\rho^2 e^{2i\varphi}} d\varphi \right| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z + \rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}} \right| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\rho} d\varphi = \frac{M}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0 \implies f'(z) = 0$$

*Nota.*  $w = \sin z \neq \text{const} \implies \sin z$  – неограниченная функция

## 4.4. Ряд Лорана

**Def.** Ряд вида  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ , где  $C_n, z_0 \in \mathbb{C}$ , называется рядом Лорана в точке  $z_0$

*Nota.* Исследуем ряд. Обозначим  $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$

$$f_2 = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n(z - z_0)^n \xrightarrow{m=-n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Тогда ряд можно записать так:  $C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n(z - z_0)^n + \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} \right)$

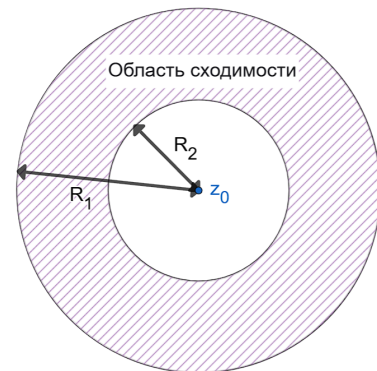
Рассмотрим  $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$  – ряд согласно теореме Абеля

сходится в круге с центром  $z_0$  и радиусом  $R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$

Рассмотрим  $f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} \xrightarrow{t = \frac{1}{z - z_0}} \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} t^n$  – ряд сходится в

круге  $|t| < r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{-n}}{C_{-n-1}} \right|$  или  $|z - z_0| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{-n-1}}{C_{-n}} \right| = R_2$

Таким образом, ряд Лорана сходится в *кольце* с внутренним радиусом  $R_2$  и внешним радиусом  $R_1$  и центром  $z_0$  к значению некой аналитической функции  $f(z)$



$f(z)$ , аналитичная в кольце  $K = (z_0, R_2, R_1)$ , однозначно представима рядом Лорана в кольце  $K$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{\Gamma = \Gamma_2 \cup \Gamma_1}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Разложим  $\frac{1}{\zeta - z}$  в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \begin{cases} \frac{1}{(\zeta - z_0)(1 - (\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\ \frac{1}{-(z - z_0)(1 - (\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}))} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \end{cases}$$

1. Первый ряд сходится, если  $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| < |\zeta - z_0|$

— это  $\Gamma_1$

$$\text{Также } \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

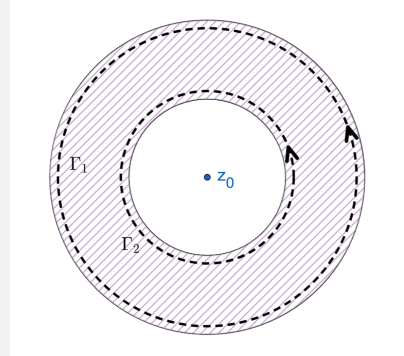
По теореме Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

$$\text{Из этого } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

2. Второй ряд сходится, если  $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| > |\zeta - z_0|$  — это  $\Gamma_2$

Lab.



*Nota.* Таким образом, коэффициенты ряда Лорана  $C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$

**Def.** Изолированной особой точкой однозначного характера называется точка  $a \in \mathbb{C} \mid f(z)$  аналитична в кольце  $0 < |z - a| < \rho$ , но не определена в  $z = a$

**Def.** Точка  $a = \infty$  называется изолированной особой, если  $f(z)$  аналитична в кольце  $\rho < |z| < \infty$

**Def.** Устранимой особой точкой  $a$  называется точка, для которой  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$ , в  $a$  функция не определена

Полюсом  $a$  называется точка, для которой  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

Существенно особой точкой  $a$  называется точка, для которой  $\nexists \lim_{z \rightarrow a} f(z)$

*Ex. 1.* Для  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  точка  $z = 0$  является устранимой особой —  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

*Ex. 2.* Для  $f(z) = \frac{z}{(z+i)^2}$   $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z}{(z+i)^2} = \left[ \frac{1}{0^2} = \infty^2 \right]$ ,  $a = -i$  — полюс 2-ого порядка

*Ex. 3.* Для  $f(z) = \sin z$   $\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} \sin z$

**Def.** Для ряда Лорана функции  $f(z)$  в окрестности особой точки  $z = a \in \mathbb{C}$   $f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n}_{\text{это правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}}_{\text{это главная часть}}$

**Def.** Для ряда Лорана в  $a = \infty$ :  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n}_{\text{это главная часть}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}}_{\text{это правильная часть}}$

**Def.** Вычетом  $\text{res}(f(z), z_0)$  функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  называется  $C_{-1}$  коэффициент ряда Лорана, если  $z_0 \in \mathbb{C}$ , и  $-C_{-1}$ , если  $z_0 = \infty$

Из определения ясно, что для конечной точки  $\text{res}(f(z), z_0) = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$

Для бесконечной  $\text{res}(f(z), z_0) = -C_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(\zeta) d\zeta$

Здесь вместо  $\gamma$  берут для простоты окружность

*Nota.* Для вычисления вычетов используют более простые формулы, которые зависят от типа особых точек

**Th. 1.**  $z_0$  – устранимая особая точка ( $z_0 \in \mathbb{C}$ ) функции  $f(z) \iff$  главная часть ряда Лорана равна 0

То есть  $f(z)$  в  $z_0$  представима как  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

$\implies z_0$  – устранимая  $\iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$

Тогда в некоторой окрестности  $\mathring{U}_{\delta}(z_0)$  функция ограничена –  $|f(z)| \leq M, M \in \mathbb{R}$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\delta}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} = [\gamma_{\delta} : \zeta = z_0 + \delta e^{i\varphi}] = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta) \delta i e^{i\varphi} d\varphi}{(\delta e^{i\varphi})^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \delta^n e^{ni\varphi} d\varphi$$

$$|C_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \delta^n d\varphi = M \delta^n \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

$$\iff C_{-n} = 0 \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n = C_0 + C_1(z - z_0) + \dots$$

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0 \in \mathbb{C}$  – устранимая

Следствие: вычет в устранимой точке равен 0

**Th. 2.**  $z_0$  – полюс  $m$ -ого порядка  $\iff$  главная часть ряда Лорана содержит не более  $m$  ненулевых членов подряд (то есть для  $i > m$   $C_{-i} = 0$ )

Полюс  $m$ -ого порядка функции  $f(z)$  – точка  $z_0$ , для которой  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \implies \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$  и  $z_0$  – ноль функции  $g(z)$  порядка  $m$

То есть  $g(z)$  представима как  $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$ , где  $h(z)$  – аналитическая в  $z_0$  и  $h(z_0) \neq 0$

$\implies$  Рассмотрим  $\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ , при этом  $\frac{1}{h(z_0)} = b_0 \neq 0$  ( $h(z)$  – аналитическая

$\implies \frac{1}{h(z)}$  – аналитическая  $\implies \frac{1}{h(z)}$  – регулярная)

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^m} (b_0 + b_1(z - z_0) + \dots) =$$

$$\underbrace{\frac{b_0}{(z - z_0)^m}}_{\frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} \neq 0} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^{m-n}} + \dots = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

$$\frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} \neq 0$$

При этом  $C_{-n} = 0$  при  $n \geq m + 1$

$$\begin{aligned} \iff f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \frac{C_{-m}}{z - z_0} + \dots + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots = \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \underbrace{(C_{-n} + \dots + C_{-1}(z - z_0)^{m-1} + C_0(z - z_0)^m + \dots)}_{\text{аналитическая } \frac{1}{h(z)} \text{ в } z_0} = \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)} \implies z_0 \text{ – ноль функ-} \end{aligned}$$

ции  $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$

Тогда  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty \implies z_0$  – полюс (порядок бесконечно большой равен  $m$ )

**Th. 3.**  $z_0$  – существенно особая точка  $\iff$  главная часть содержит бесконечное число членов

Очевидно, так как в другом случае, точка была бы полюсом или устранимой

*Nota.* Для особой точки  $z_0 = \infty$  **Th. 1.**, **Th. 2.**, **Th. 3.** справедливы и доказываются аналогично:

1.  $z_0$  – устранимая  $\iff$  главная часть равна 0
2.  $z_0$  –  $m$ -полюс  $\iff$  главная часть содержит не более  $m$  членов и  $C_m \neq 0$
3.  $z_0$  – существенно особая  $\iff$  главная часть содержит бесконечное число членов

*Ex. 1.*  $f(z) = \frac{(e^z - 1)^2}{1 - \cos z}$ ,  $z_0 = 0$



$$f(z) = \frac{(e^z - 1)^2}{1 - \cos z} \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z^2}{\frac{z^2}{2}} = 2 - \text{устраняемая}$$

Ex. 2.  $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}, z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \left( \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} - 1 \right) \sim \frac{1}{z} \cdot k \frac{z^2}{1} \underset{z \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 - \text{устраняемая}$$

Ex. 3.  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}, z_0 = \infty$

$$z = \frac{1}{w} \quad f(z) = \tilde{f}(w) = w \frac{1}{\frac{1}{w} - 1} = w^2 \frac{1}{1 - w} = w^2 \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}} - \text{устраняемая (главной части нет)}$$

### Вычисления вычетов

Nota.  $z_0$  – устранимая  $\implies \operatorname{res}(f(z), z_0) = 0$

$z_0$  – существенно особая  $\implies \operatorname{res}(f(z), z_0) = \pm C_{-1}$

**Th.**  $z_0$  – простой полюс ( $m = 1$ ). Тогда  $\operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$ , где  $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots$$

$$(z - z_0)f(z) = C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^{n+1} \implies \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = C_{-1}$$

**Th.**  $z_0$  –  $m$ -полюс. Тогда  $\operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m)$

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots \quad \Big| \cdot (z - z_0)^m$$

$$f(z)(z - z_0)^m = C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \dots \quad \Big| \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m) = C_{-1}(m-1)! + C_0(z - z_0)(m-1)! + C_1(z - z_0)^2 \frac{(m-1)!}{2!} + \dots$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m) = C_{-1} + C_0(z - z_0) + C_1(z - z_0)^2 \frac{1}{2!} + \dots$$

Далее переход к пределу, аналогичному доказательству выше

**Th. Теорема о вычетах.**

1.  $f(z)$  аналитична в  $D$  кроме особых точек  $z_1, \dots, z_n$ . Тогда  $\int_{\Gamma_0} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f(z), z_k)$
2.  $f(z)$  аналитична в  $\mathbb{C}$  кроме особых точек  $z_1, \dots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$ . Тогда  $\sum_{k=1}^n \text{res}(f(z), z_k) = 0$

1. По теореме Коши (о многосвязной области)

$$\int_{\Gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n 2\pi i C_{-1}^{(k)} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f(z), z_k), \text{ где } C_{-1}^{(k)} \text{ -- коэффициент}$$

для ряда Лорана в точке  $z_k$

2. Очевидно по теореме Коши

## Х. Программа экзамена в 2024/2025

### Часть 1.

1. Функции комплексного переменного (ФКП). Геометрия ФКП.
2. Предел, непрерывность функции комплексного переменного.
3. Элементарные функции. Степень и корень. Показательная функция и логарифм. Тригонометрические и гиперболические функции.
4. Дифференцирование и аналитичность функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Свойства аналитических функций.
5. Понятие конформного отображения. Геометрический смысл производной.
6. Интеграл по комплексной переменной. Теорема Коши. Первообразная.

### Часть 2.

7. Числовые ряды. Регулярная функция. Функциональные ряды. Признаки сходимости.
8. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряд Тейлора.
9. Бесконечная дифференцируемость регулярной функции. Формула  $n$ -ой производной.
10. Ряды Лорана в конечной и бесконечно удаленной точке. Главная и правильная части.
11. Классификация изолированных особых точек однозначной аналитической функции.
12. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Определение и формулы вычисления вычета. Основные теоремы теории вычетов.