Вычислительная геометрия

Содержание

1. Преобразование изображений. Геометрическое моделирование

1.1 Основные понятия

Mem. Линейное пространство – это множество векторов V с определенными операциями сложения $+$ и умножения на число $\cdot\,\lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, которые удовлетворяют свойствам:

1.-4. свойства абелево-аддитивной группы:

   1. $x + y = y + x \quad$ для $x, y \in V$
   2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ для $x, y, z \in V$
   3. Существует такой 0, что $x + 0 = x$ для $x \in V$
   4. Для любого $x \in V$ существует такой $-x$, что $x + (-x) = 0$

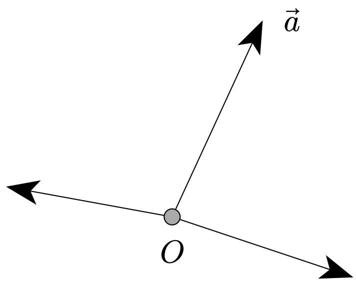
5. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad$ для $x \in V$
6. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \quad$ для $x \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad$ для $x \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad$ для $x, y \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

В общем случае умножение определено на комплексное число, но мы будем рассматривать вещественные

Def. Линейная комбинация векторов $x, y, z, ...$ называется сумма $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + ...$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1.2 Модели линейных пространств

Геометрическое



Линейное пространство – направленные отрезки с общим началов

Арифметическое

$x = (x_1, x_2)$ в $\mathbb{R}^2$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ в $\mathbb{R}^3$

В общем случае $x = (x_1, ..., x_n)$ в $\mathbb{R}^n$

Линейное пространство – множество упорядоченных совокупностей n чисел

Между этими моделями вводится изоморфизм с помощью базиса, например, $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Тогда всякий геометрический вектор можно преобразовать в арифметический и наоборот: $\vec{x} = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath} = (x_1, x_2)$

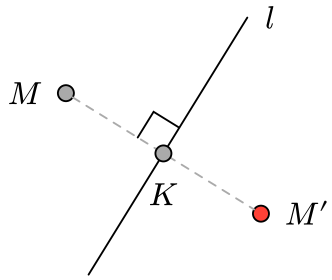
1.3 Геометрические преобразования

Def. Геометрическое преобразование – это биекция, которая переводит пространство Ω в себя

Def. Движение – геометрическое преобразование, сохраняющее расстояние между двумя любыми точками (изометрия)

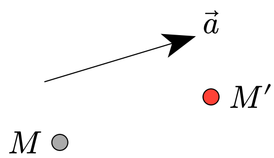
Виды движения на плоскости $\mathbb{R}^2$:

1. Осевая симметрия S_l относительно оси l



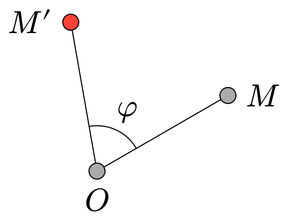
$M' = S_l(M)$ так, что $\begin{cases} MM' \perp l \\ MK = KM' \end{cases}$

2. Перенос $T_{\vec{a}}$ на вектор $\vec{a}$



$M' = T_{\vec{a}}(M)$ так, что $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$

3. Поворот R_O^{φ} относительно точки O на ориентированный угол φ



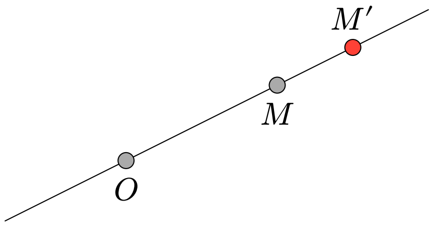
$M' = R_O^{\varphi}(M)$ так, что $\begin{cases} \angle(MOM') = \varphi \\ OM = OM' \end{cases}$

Традиционно принимаем положительный угол за поворот против часовой стрелки

Def. Конформное преобразование – преобразование, сохраняющее углы

Виды конформных преобразований на плоскости $\mathbb{R}^2$:

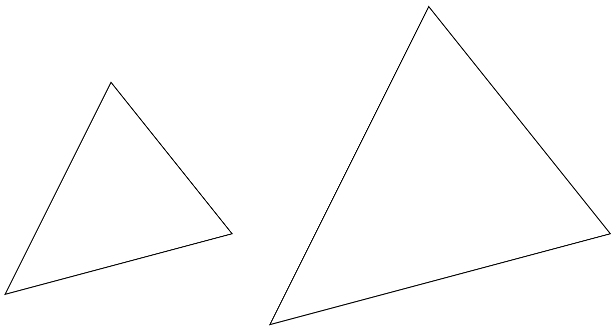
1. Гомотетия H_O^k относительно точки O с коэффициентом $k \in \mathbb{R}$



$M' = H_O^k(M)$ так, что $\begin{cases} M' \in OM \\ \frac{OM'}{OM} = k \end{cases}$

Nota. Если $k < 0$, то точки M и M' будут по разные стороны от точки O

2. Подобие P_k с коэффициентом k – композиция движения и гомотетии $P_k = F \circ H_O^k$ (здесь $(f \circ g)(x) = f(g(x))$)



1.4 Линейные операторы

Def. Линейный оператор $\mathcal{A}$ – отображение $\mathcal{A} : V \to V$ (в общем случае $\mathcal{A} : V \to W$), для которого соблюдаются свойства:

1. $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$

Если для V определен базис $\varepsilon_V = \{e_1, ..., e_n\}$, а для W базис $\varepsilon_W = \{e'_1, ..., e'_m\}$, то действие оператора можно представить так:

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} \mu_j e'_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e'_j$$

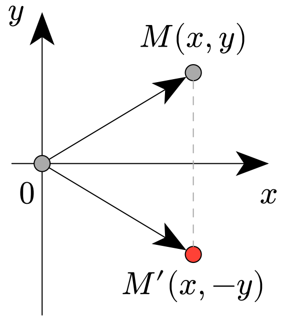
Def. Матрица $A = \{a_{ij}\}_{i=1..n, j=1..m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V \to W$

Тогда $\mathcal{A}x = y \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

Найдем матрицы геометрических преобразований на $\mathbb{R}^2$

1. Осевая симметрия S_l

   Чаще всего на практике используются S_{Ox} и S_{Oy}



Для S_{Ox} это матрица $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}$

А для Oy это $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix}$

2. Перенос $T_{\vec{a}}$ на вектор

   Перенос точки на вектор выносит ее из линейного пространства, где точки имеют общее начало, поэтому перенос не является линейным оператором: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

3. Поворот

   Активным преобразованием называется поворот плоскости, а пассивным – поворот системы координат. Такие преобразования взаимно обратны

   Тогда поворот системы координат задается матрицей $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

   А поворот плоскости задается обратной матрицей $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

4. Гомотетия

   Для гомотетии H_O^k матрица оператора равна $\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

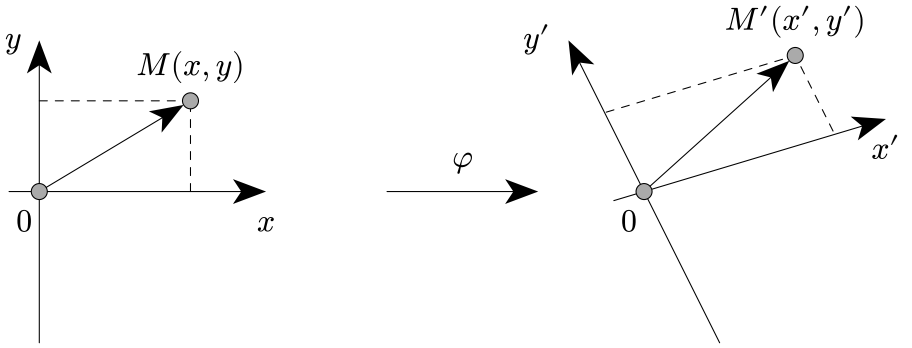
1.5 Аффинное преобразование

Def. 1. Преобразование $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется аффинным преобразованием, если φ – биекция, и для всяких точек на прямой $A, B, C \in l$ справедливо, что
$\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \in \varphi(l)$ и $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\varphi(A)\varphi(B)}{\varphi(B)\varphi(C)}$

Nota. Аффинное преобразование не сохраняет углы и расстояния, но сохраняет параллельность

Nota. Кроме этого все треугольник аффинно-эквивалентны, то есть один треугольник можно перевести в любой другой с помощью аффинного преобразования

Def. 2. Преобразование φ – аффинное преобразование, если оно переводит одну систему координат в другую систему координат



Мет. Система координат – это определенные точка отсчета, координатная сетка, порядок осей и единичные отрезки

Для дальнейшего нам потребуются уравнения прямых:

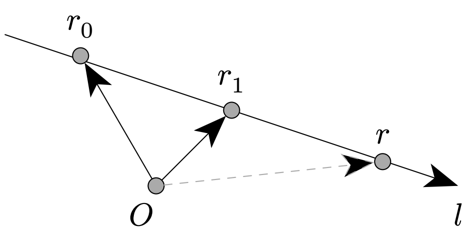
1. По двум точкам на плоскости:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0$$

2. По коэффициентам на плоскости:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$$

3. Векторное: $\vec{r} - \vec{r_0} = \vec{a}t$, где t – параметр



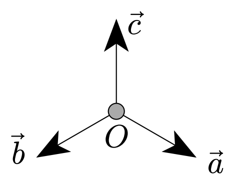
$$\vec{r} - \vec{r_0} = (\vec{r_1} - \vec{r_0})t$$

Также нам понадобятся:

- Уравнения плоскостей в пространстве
- Уравнения кривых второго порядка, специальных кривых (спирали, гипоциклоиды)
- Индикатор ориентации

  Мет. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \vec{c} : \begin{cases} |\vec{c}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \\ \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \\ \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \text{ - правая тройка векторов} \end{cases}$$

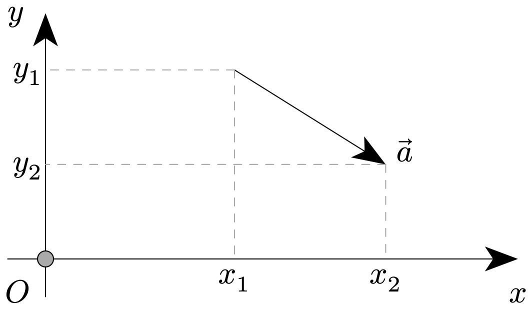


Def. Псевдоскалярное (или косое) произведение $\vec{a} \vee \vec{b} \overset{\text{def}}{=} \pm\, |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, причем со знаком плюс, если угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положителен (то есть против часовой), и со знаком минус, если угол отрицателен (то есть по часовой)

1.5 Однородные координаты

Мет. В плоскости $\mathbb{R}^2$ существует линейное пространство направленных отрезков. Проблема состоит в том, что нам нужно представить вектор с другим началом

Тогда такие вектора можно представить двумя точками



Чтобы работать с точками, а не векторами с общим началом O, обобщим понятие линейного пространства. Тогда понятие линейного пространства обобщается до аффинного, где элементы – это точки, а не векторы

Def. Пространство $\mathcal{A}$ – аффинное пространство, ассоциированное с линейным пространством V, если:

1. Заданы аксиомы для V
2. Существует $f : \mathcal{A} \to V$ такое, что для всякой пары сопоставляется вектор из линейного: $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad f(A, B) = \overrightarrow{AB} \in V$
3. Для всяких $A \in \mathcal{A}$ и $\vec{a} \in V$ существует единственная $B \in A \mid \overrightarrow{AB} = \vec{a}$
4. Для всяких точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ справедливо, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

В аффинном пространстве $\mathcal{A}$ можно ввести аффинные преобразования. Те, что не связаны с переносом, можно считать линейными в пространстве V:

1. Осевая симметрия S_l, если $O \in l$
2. Поворот R_O^{φ}
3. Гомотетия H_O^k

Их можно представить в виде матрицы. Но перенос выводит из линейного пространства. Нам нужно все преобразования свести к алгебраическому действию $x' = \mathcal{F}x$, где $\mathcal{F}$ – преобразование с матрицей F

Движение плоскости и гомотетия дают формулу:

$$X' = FX + T_{\vec{a}}$$

Вместо

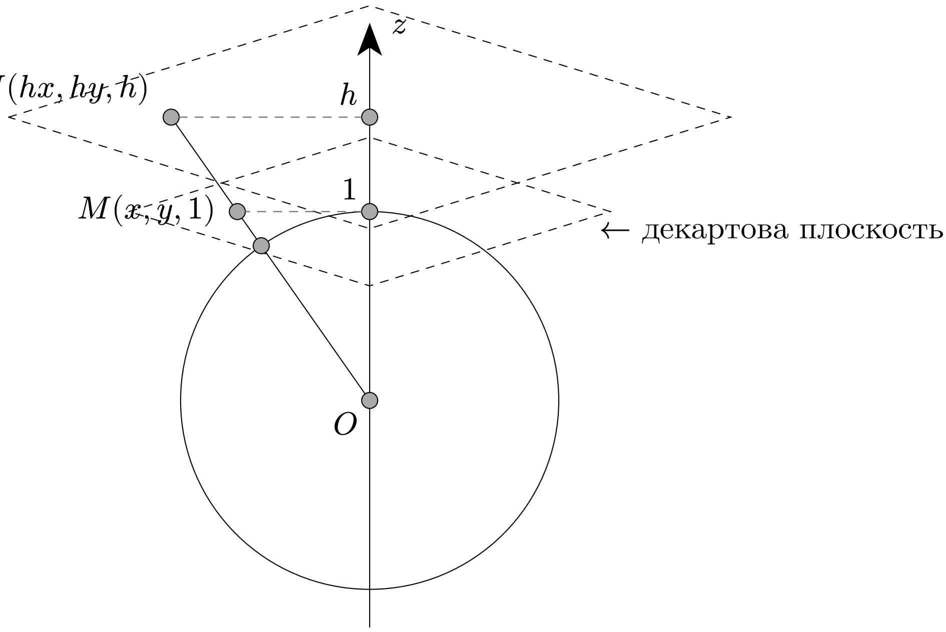
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

рассмотрим векторы с добавленной координатой $z = 1$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:c} f_{11} & f_{12} & x_0 \\ f_{21} & f_{22} & y_0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}x + f_{12}y + x_0 \\ f_{21}x + f_{22}y + y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Координаты $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ называют однородными

Геометрическая интерпретация – стереографическая проекция Римана



Далее происходит центральное проектирование на плоскость $z = h, p(x, y) \to N(hx, hy, h)$

Таким образом, каждой точке декартовой плоскости ставится в соответствии точка сферы, а она центрально проектируется на плоскость $z = h$, где h отвечает за масштаб. В результате точкам декартовой плоскости (x, y) соответствуют точки $(x, y, 1) = (hx, hy, h)$, а однородные координаты $(x, y, 0)$ представляют бесконечно удаленную точку декартовой плоскости в направлении вектора $\vec{a} = (x, y)$

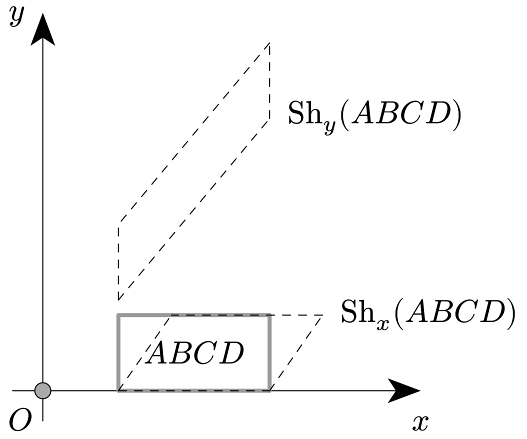
Рассмотрим матрицы преобразований в однородных координатах:

$$F = \left(\begin{array}{cc:c} a & b & m \\ b & d & h \\ \hdashline p & q & s \end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ представляет композицию из симметрии, поворота, гомотетии и сдвига

Def. Сдвиг (shear) Sh_x – наклонной перекос такой, что $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$, а $k = \mathrm{sh}_x$

Аналогично по оси Oy сдвиг $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \mathrm{sh}_y\, x \end{cases}$



Вектор $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ – вектор переноса $T_{(m,n)}$, число s – масштаб

Рассмотрим смысл (p, q):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline p & q & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ px + qy + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ h \end{pmatrix}$$

При фиксированных p и q выражение $h = px + qy + 1$ задает наклонную плоскость в трехмерном пространстве, что позволяет изменять перспективу. На этом курсе операции, использующие p и q, рассматриваться не будут

Рассмотрим частные виды преобразований:

- Перенос $T_{m,n} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- Поворот $R_O^{\varphi} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- Симметрия по оси $S_{Ox} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- Симметрия по биссектрисе $S_{x=y} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- Сдвиг $\mathrm{Sh}_x = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \mathrm{sh}_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Ex. Дан $\triangle\, ABC$ с вершинами в координатах $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти $\triangle\, A'B'C' = \mathcal{F}(\triangle\, ABC)$

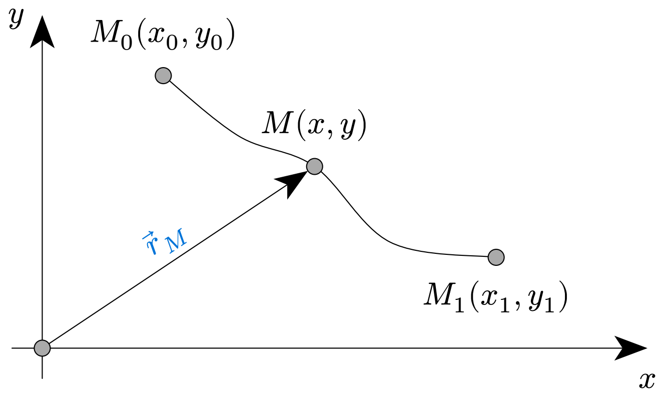
Найдем матрицу координат вершин $\triangle ABC$: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Преобразование осуществляется так:

$$\left(\begin{array}{cc:c} a & b & m \\ b & d & h \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.6 Моделирование плоских линий

1.6.1 Общие сведения



Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ – базис (в частности $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ – декартов)

Радиус-вектор точки кривой γ определяется как $\vec{r}_M = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

Чаще всего кривая γ ориентирована так, что задана начальная точка $M_0(x_0, y_0)$ и пара уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $t \in [t_1, t_2]$. Интервал $[t_1, t_2]$ задают ориентацию

Таким образом, γ может быть задана:

- параметрически $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$
- общим уравнением $f(x, y) = 0$

Рассмотрим задания простых кривых:

1. Прямая

   $\vec{r} = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = t\vec{r}_1 + \vec{r}_0(1 - t)$

   Последнее выражение полезно, так как для $t \in [0, 1]$ уравнение задает отрезок M_0M_1: $\vec{r}(t) \mid_{t=0} = \vec{r}_0$, $\vec{r}(t) \mid_{t=1} = \vec{r}_1$

2. Окружность

   Параметрическое уравнение: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ для $t \in [0, 2\pi)$

   Радиус-вектор задается как $\vec{r}(t) = R(\vec{\imath}\cos t + \vec{\jmath}\sin t) = R(\cos t, \sin t)$

3. Кривая второго порядка в общем виде

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

При этом один или более из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равны нулю

Коэффициенты кривой можно представить в виде матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Коэффициенты a_{13} и a_{23} отвечают за перенос кривой, а a_{33} за масштаб

В однородных координатах $\vec{r} = (x, y) \longrightarrow (x, y, 1)$ получаем:

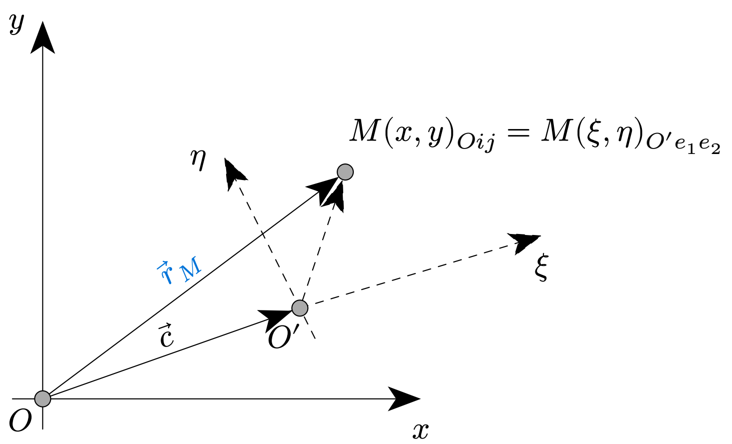
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \end{pmatrix}$$

Если слева домножить на вектор-строку $(x, y, 1)$, то получим:

$$\begin{aligned}(x, y, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}x + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{23}y + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \\ &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}\end{aligned}$$

Тогда общее уравнение кривой второго порядка в матричном виде записывается как $(x, y, 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Nota. Пусть есть аффинный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Нужно перевести координаты точки $M(\xi, \eta)$ из нового базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ в координаты $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ из нового базиса $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$



Радиус-вектор точки в базисе $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ равен $\vec{r}_M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi\vec{e}_1 + \eta\vec{e}_2 + \vec{c}$. Здесь $\vec{c}$ – смещение начал координат

В однородных координатах это выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e_{1x} \\ \xi e_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta e_{2x} \\ \eta e_{2y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & c_1 \\ e_{1y} & e_{2y} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Здесь $P = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & c_1 \\ e_{1y} & e_{2y} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица аффинного преобразования, где $\begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} \\ e_{1y} & e_{2y} \end{pmatrix}$ – матрица приведения из базиса $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ в базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

Такая матрица не меняет инварианты, поэтому можно делать подобные преобразования кривых:

$$(x, y, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow (\xi, \eta, 1)PAP^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Def. Инварианты кривой второго порядка – выражения, значения которых остаются постоянными при применении аффинных преобразований:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Тип кривой определяется по инвариантам:

- Если $I_2 > 0$, то кривая эллиптического типа
- Если $I_2 < 0$, то кривая гиперболического типа
- Если $I_2 = 0$, то кривая параболического типа

1.6.2 Дифференциальные характеристики

Мет. Для кривой $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

- Гладкость кривой – непрерывная дифференцируемость $x(t)$ и $y(t)$, то есть для всякой $M \in \gamma$ существуют $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(t)$, которая непрерывная
- Касательная – вектор (или прямая), имеющая одну общую точку с кривой в окрестности

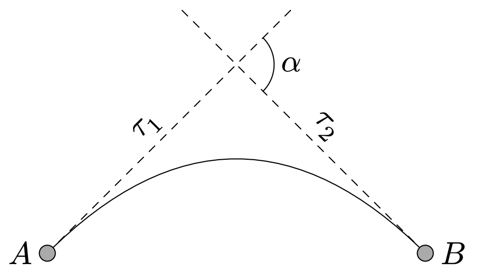
  Если кривая задается как $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$, то касательная задается как производная:

  $$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath}$$

- Нормаль – перпендикуляр к кривой в точке. Вектор нормали задается как перпендикулярный к касательной: $\vec{n} \perp \vec{r}'$
- Длина дуги (элемента): $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = |\vec{r}'(t)|\ dt$

Рассмотрим новые характеристики для кривой:

- Кривизна кривой в точки



Касательная τ_1 переходит в τ_2 при $A \to B$, поворачиваясь на угол α – угол смежности

Средняя кривизна на дуге $\breve{AB}$ равна $K_{\text{ср}} = \dfrac{\alpha}{|\breve{AB}|}$

Def. Кривизна кривой γ в точке A определяется как $K_A = \lim\limits_{\substack{B \to A \\ \text{по } \breve{AB}}} K_{\text{ср}} = \lim\limits_{|\breve{AB}| \to 0} \dfrac{\alpha}{|\breve{AB}|}$

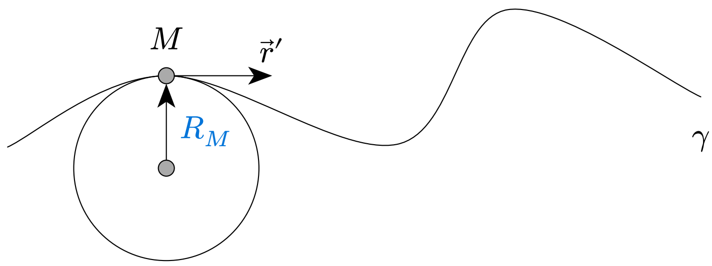
Ex. Окружность

$\angle AOB = \alpha, |\breve{AB}| = \alpha R$, тогда $K_A = \lim\limits_{B \to A} \dfrac{\alpha}{\alpha R} = \dfrac{1}{R}$

- Радиус кривизны

Def. Величина $\dfrac{1}{K_A} = R_A$, обратная кривизне в точке, называется радиусом кривизны в точке

Nota. У окружности радиус кривизны совпадает с ее собственным радиусом. Сама окружность – линия постоянной кривизны. Другая такая линия постоянной кривизны – прямая, где кривизна равна 0



- Центр кривизны

Def. Центр кривизны кривой γ в точке M – это точка на нормали к γ в точке M на расстоянии R_M от M, находящаяся в той полуплоскости, разделенной касательной, что и окрестность кривой

Def. Эволюта кривой – множество центров кривизны

Для характеристик можно выразить другие формулы:

- Кривизна $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \varphi'(s) = \dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{dt}{ds} \overset{t=x}{=} \dfrac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}$

  $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{dy}{dx}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{dy}{dx}$ – угол касательной

  $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y_x'^2}$

  $\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$

  $K = \dfrac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$

  В параметрическом задании $K = \dfrac{|y_t'' x_t' - y_t' x_t''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

- Центр кривизны: $\begin{cases} x_0 = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \\ y_0 = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \end{cases}$

1.6.3 Конструирование кривой по Безье

> Во Франции конца 1950-х годов автомобилестроение переживало эпоху расцвета дизайна, и инженерам нужен был способ описывать сложные, плавные изгибы кузовов автомобилей не на чертежной доске, а с помощью первых компьютеров для станков с ЧПУ. Традиционных инструментов для этой задачи было недостаточно
>
> В этот период сразу два французских автогиганта, Citroën и Renault, независимо друг от друга работали над решением этой проблемы
>
> Пьер Безье из Renault, инженер-механик и электрик, пришел к решению к 1962 году, разработав свою систему для компьютерного проектирования кузовов автомобилей, аэродинамические свойства которых легко задаются

Def. Кривая Безье n-ого порядка в параметрической форме описывается функцией $B(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i b_{i,n}(t)$, где

- $0 \le t \le 1$,
- $P_i = (x_i(t), y_i(t))$ – координаты опорных точек,
- а $b_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$ – полиномы Бернштейна, где i – порядковый номер опорной точки

Nota. Упорядоченное множество опорных точек $(P_0, P_1, ..., P_n)$ называется характеристической ломаной

Nota. Прямое вычисление $B(t)$ как пару функций $B_x(t)$ и $B_y(t)$, определяющих точки кривой, - сложная задача, поэтому чаще используют алгоритм Кастельжо:

Заданы точки $P_0, P_1, ..., P_n$ нулевого порядка

Тогда $P_i^j(t) = (1-t)P_i^{j-1}(t) + tP_{i+1}^{j-1}(t)$, где i – номер вершины, а j - порядок вершины

> Поль де Кастельжо, работая в Citroën, разработал независимо от Безье в 1959 году алгоритм для построения кривой, однако его разработки оставались коммерческой тайной, поэтому кривые получили название в честь Безье

Рассмотрим примеры:

Ex. 1. $n = 1$, даны P_0 и P_1

Для точки первого порядка $P_0^1 = (1-t)P_0^{1-1} + tP_1^{1-1} = (1-t)P_0 + tP_1$

В $t = 0$ $P_0^1 = P_0$, в $t = 1$ $P_0^1 = P_1$. При $0 < t < 1$ $P_0^1(t)$ – точка, пробегающая отрезок

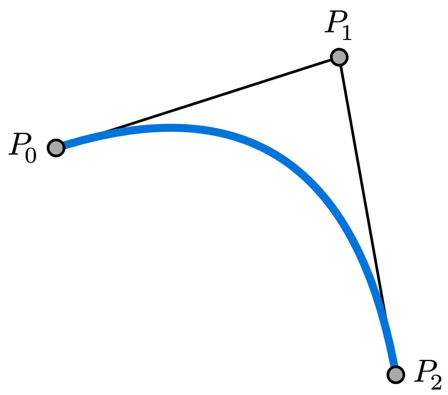
В данном случае (так как меньше двух точек нельзя задать) $P_0^1(t) = B(t)$, то есть при $n = 1$ кривая Безье – отрезок P_0P_1

Ex. 2. $n = 2$, даны P_0, P_1, P_2

По определению $B(t) = \sum_{i=0}^{2} P_i C_2^i t^i (1-t)^{2-i} = P_0(1-t)^2 + 2P_1t(1-t) + P_2t^2$

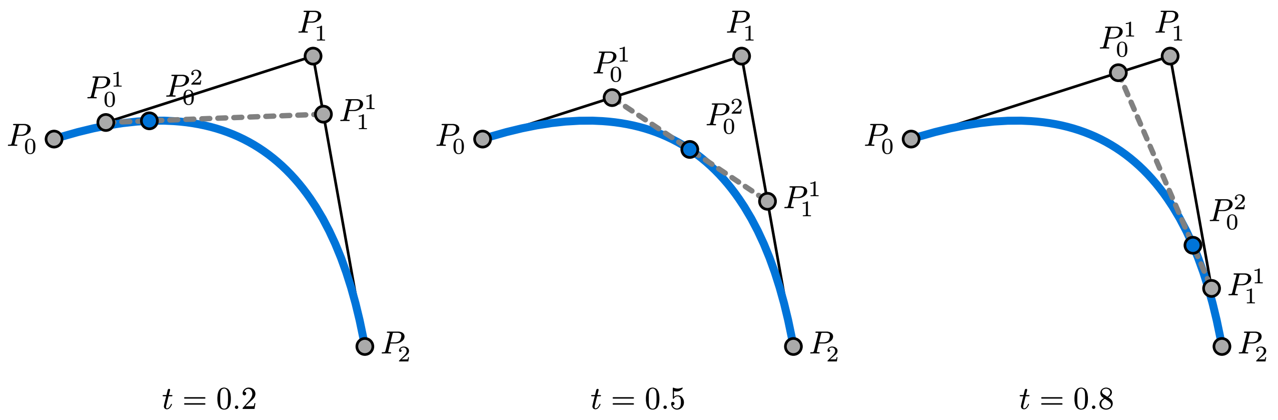
По Кастельжо $P_0(t = 0)$, $P_2(t = 1)$:

- $P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1$
- $P_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2$
- $P_1^2(t) = (1-t)P_0^1 + tP_1^1$
  $= (1-t)^2P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2P_2$
  $= B(t)$

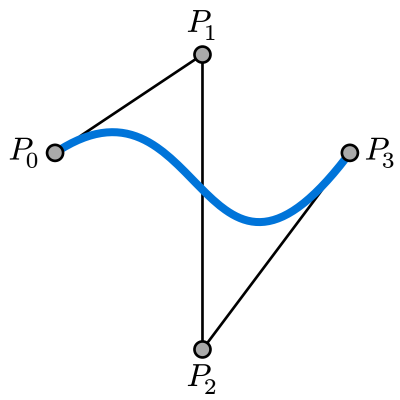


В случае $n = 2$ кривая Безье – это парабола (в частной случае прямая)

По алгоритму Кастельжо становится видно, что характеристическая ломаная является касательной к кривой Безье. Сами точки первого порядка при разных t дают отрезки, которые касаются кривой, а точка второго порядка лежит непосредственно на кривой Безье:



Ex. 3. $n = 3$, даны P_0, P_1, P_2, P_3



$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$

Или в матричном виде $B(t) = (t^3, t^2, t, 1) \cdot M_B \cdot \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$

Здесь $M_B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица Безье

Для кривых Безье справедливы свойства:

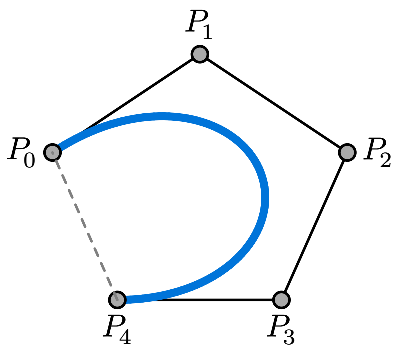
- Порядок кривой Безье инвариантен при аффинных преобразованиях

  > Пусть $P_0, ..., P_n$ содержит k коллинеарных точек. $\mathcal{F}(P_0, ..., P_n) = P_0', ..., P_n'$ – образы точек при аффинном преобразовании. И так как матрица F не вырождена, среди $P_0', ..., P_n'$ останется k коллинеарных, таким образом порядок кривой сохранится

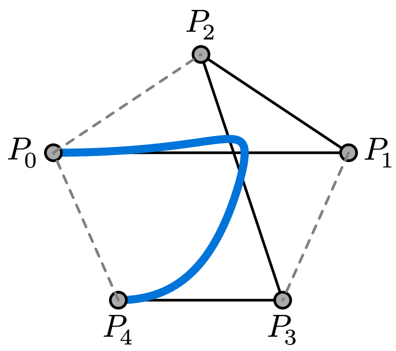
  То есть можно не подвергать всю кривую аффинному преобразованию, а всего лишь ее ломаную

- Непрерывность

- Вся кривая лежит внутри многоугольника $P_0, ..., P_n$ или выпуклой оболочки



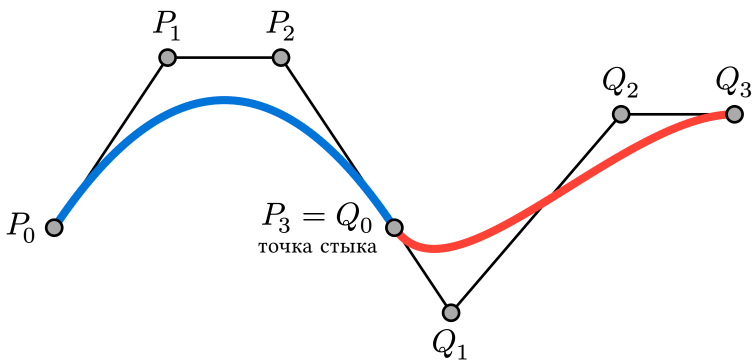
Кривая находится
в пятиугольнике $P_0P_1P_2P_3P_4$



Кривая находится
в пятиугольнике $P_0P_2P_1P_3P_4$

- Симметрия при смене порядка обхода ломаной
- Кусочная гладкость. Польза этого свойства заключается в том, что кривые Безье допускают гладкое сочленение двух кривых

Def. Сплайн – составная кривая, гладкая в точках стыка



Nota. Геометрически, гладкость эквивалентна спрямляемости, то есть в малой окрестности кривая - это почти прямая

Тогда сформулируем правило: чтобы построить сплайн Безье, нужно состыковать кривые $B_1(t)$ и $B_2(t)$ так, что предпоследняя опорная точка P_{n-1} кривой $B_1(t)$, вторая опорная точка Q_1 кривой $B_2(t)$ и точка стыка $P_n = Q_0$ были расположены на одной прямой (то есть коллинеарно)

Nota. Окружность и эллипс нельзя в точности представить кривыми Безье

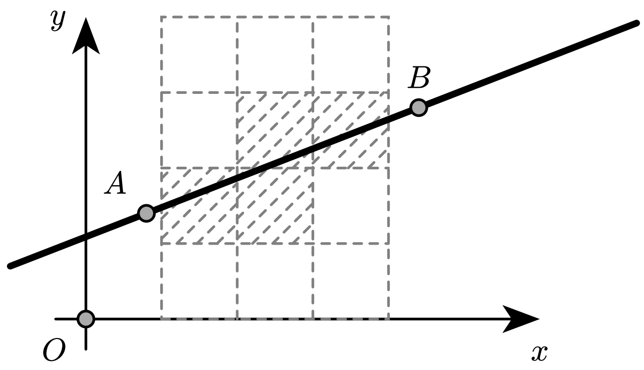
1.6.4 Дискретизация (растровое изображение) линий

Рассмотрим построение отрезка прямой с известным наклоном или проходящей через две данные точки на экране в пикселях

1. Естественный алгоритм

   Нам известно уравнение прямой $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$

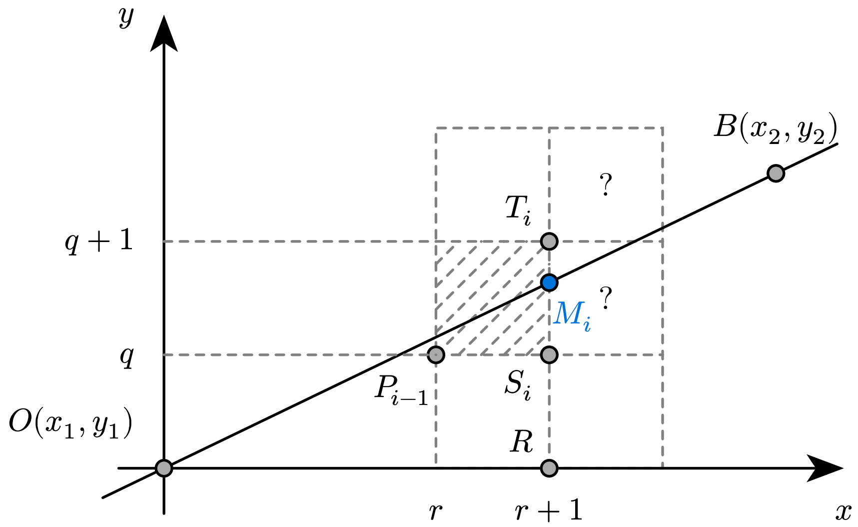
Если выразим y через x, получим $y = y_A + \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$ – деление, из-за которого мы вынуждены округлять при выборе пикселя для y



Лучше использовать алгоритм Брезенхэма

2. Алгоритм Брезенхэма

   Считаем, что $k \in [0, 1]$, то есть прямая ближе к оси Ox, чем к Oy. При $k \in [1, \infty)$ и $k < 0$ алгоритм аналогичен



   Сделаем допущение, что начало координат находится в точке (x_1, y_1). Пусть на предыдущем шаге мы выбрали пиксель P_{i-1} с координатами (r, q) в системе Oxy. Тогда соседними кандидатами на следующем шаге будут $S_i(r+1, q)$ и $T_i(r+1, q+1)$

   Алгоритм сводится к тому, что бы из двух пикселей S_i и T_i выбрать тот, который ближе к точке M_i

   Введем величину $\Delta_i = S - T$, где $S = |S_i - M_i|$, $T = |T_i - M_i|$ – расстояния от точки M_i до соответствующих пикселей

   Если $\Delta_i \geq 0$, то есть $S \geq T$, выбираем пиксель T_i, иначе – S_i

Из подобия треугольников получаем пропорцию: $k = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{M_iR}{OR} = \dfrac{q+S}{r+1}$

Отсюда $S = \dfrac{dx}{dy}(r+1) - q$

Так как $S+T=1$, $T = 1-S$. Умножая разность $S-T$ на dx, получаем $dx(S-T) = 2(r+1)dy - (2q+1)dy$

Если $dx > 0$, знак $\Delta_i = S - T$ совпадает со знаком $dx \cdot \Delta_i$. Обозначим $d_i = dx \cdot \Delta_i$, тогда $d_i = 2(r+1)dy - (2q+1)dx$

На следующем шаге $(i+1)$ координаты текущего пикселя будут (x_i, y_i), тогда $d_{i+1} = 2x_idy - 2y_idx + 2dy - dx$

Из этого $d_{i+1} - d_i = 2\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=1}dy - 2(y_i - y_{i-1})dx$, то есть $d_{i+1} = d_i + 2dy - 2(y_i - y_{i-1})dx$

Здесь возможны два случая:

- Если $d_i \geq 0$, выбираем пиксель T_i с координатами (x_i, y_i). Тогда приращение координаты y равно 1, и формула упрощается: $d_{i+1} = d_i + 2(dy - dx)$
- Если $d_i < 0$, выбираем пиксель S_i с координатами (x_i, y_{i-1}). Здесь $y_i = y_{i-1}$, поэтому $d_{i+1} = d_i + 2dy$

Начальное значение d_1 вычисляется для первого шага $i = 1$ как $d_1 = 2dy - dx$