- **Принцип включения/исключения** (Principle of Incusion/Exclusion (PIE))
  $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$

  Ex. есть $n=11$ объектов, нужно распределить их между $k=3$ группами A, B и C
  Эту задачу можно решить с помощью *Stars and bars method*, тогда мы получим $\binom{n+k-1}{n,k-1} = \binom{13}{2} = 78$
  Введем ограничение: пусть мощность каждого множества будет не больше 4.
  Посчитаем количество неподходящих вариантов:
  $|A| = |\{b_A \geq 5\}| = 1\cdot\binom{11-5+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$
  $|A\cap B| = |\{b_A\geq 5 \wedge b_B \geq 5\}| = \binom{3}{2} = 3$
  $|A\cap B\cap C| = |\{b_A\geq 5\wedge b_B\geq 5\wedge b_C\geq 5\}| = 0$
  Итого получаем $28\cdot 3+3\cdot 3+0 = 75$ вариантов.
  Далее исключаем эти варианты из количества всех вариантов, а значит подходящих вариантов всего $78-75=3$

- **Принцип включения/исключения** (Inclusion/Exclusion Principle (PIE))
  - X – начальное множество элементов
  - $P_1,\ldots,P_m$ – свойства
  - Пусть $X_i = \{x\in X \mid P_i \text{ - свойство для } x\}$
  - Пусть $S\in[m]$ – множество свойств
  - Пусть $N(S) = \bigcap\limits_{i\in S} X_i = \{x\in X \mid x \text{ имеет все свойства } P_1,\ldots,P_m\}$

  $N(\varnothing) = X \quad |N(\varnothing)| = |X| = n$

- **Теорема ПВ/И** (Theorem PIE)
  $|X\setminus(X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_m)| = \sum\limits_{S\subseteq[m]}(-1)^{|S|}|N(S)|$ – количество элементов множества X, не имеющих никакое из свойств
  Доказательство:
  Пусть $x\in X$
  Если x не имеет свойств $P_1,\ldots,P_m$, то $x\in N(\varnothing)$ и $x\notin N(S)\ \forall S\neq\varnothing$
  Поэтому x дает в общую сумму 1
  Иначе, если x имеет $k\geq 1$ свойств $T\in\binom{[m]}{k}$,
  то $x\in N(S)$ тогда и только тогда, когда $S\subseteq T$.
  Поэтому x дает в сумму $\sum\limits_{S\subseteq T}(-1)^{|S|} = \sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i = 0$

- **Следствие**
$|\bigcup\limits_{i\in[m]} X_i| = |X| - \sum\limits_{S\subseteq[m]} (-1)^{|S|}|N(S)| = \sum\limits_{S\subseteq[m], S\neq\varnothing} (-1)^{|S|-1}|N(S)|$

- **Приложения**:
  * Определяете «плохие» свойства $P_1, \ldots, P_m$
  * Посчитываете $N(S)$
  * Применяете ПВ/И

- **Количество сюръекций (правототальных функций)**
  - $X = \{\text{функция } f : [k] \to [n]\}$
  - Плохое свойство P_i : $X_i = \{f : [k] \to [n] \mid \nexists j \in [k] : f(j) = i\}$
  - $|\{\text{сюръекции } f : [k] \to [n]\}| = |X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_m)| \overset{\text{PIE}}{=} \sum\limits_{S\subseteq[m]} (-1)^{|S|}|N(S)| = \sum\limits_{S\subseteq[m]} (-1)^{|S|}(n - |S|)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$

- **Количество биекций**
$n! = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n$
- **Число Стирлинга** (опять)
Заметим, что сюръекция = разбиение, тогда:
$\sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = n! S_n^{II}(k)$

- **Беспорядки** (Derangements) – перестановка без фиксированных точек
Если $f(i) = i$, то i – фиксированная точка
  - X = все $n!$ перестановок
  - Плохие свойства $P_1, \ldots, P_m : \pi \in X$ имеет свойство $P_i \iff \pi(i) = i$
  - Посчитаем $N(S)$: $\quad N(S) = (n - |S|)!$
  - Применяем ПВ/И: $X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_n) = \sum\limits_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|}N(S) = \sum\limits_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|}(n - |S|)! = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$

8. Рекуррентности и производящие функции

- **Производящие функции** (Generating Functions)

  $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

  Функция выше задает последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$

  Ex. $3 + 8x^2 + x^3 + \frac{1}{7}x^5 + 100x^6 + \dots \to (3, 0, 8, 1, 0, \frac{1}{7}, 100, \dots)$

  Ex. Последовательность $(1, 1, 1, \dots)$ задает функцию $1 + x + x^2 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

  Пусть $S = 1 + x + x^2 + \dots$, тогда $xS = x + x^2 + \dots$, $(1 - x)S = 1 \Longrightarrow$

  $\boxed{S = \frac{1}{1-x} \text{ задает последовательность } (1, 1, 1, \dots)}$

  Ex.

  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

  $\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

  $\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2x^n$

  $(2, 4, 10, 28, 82, \dots) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots) + (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$

  $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2-4x}{(1-x)(1-3x)}$

  $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n} \to (1, 0, 1, 0, \dots)$

  $\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \to (0, 1, 0, 1, \dots)$

  Взятие производной:

  $\frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + \dots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \to (1, 2, 3, 4, \dots)$

  Ex. Найти ПФ для $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$

  $A(x) = 1 + 3x + 5x^2 + \dots$

  $xA = 0 + x + 3x^2 + 5x^3 + \dots$

  $(1 - x)A = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$

  $(1 - x)A = 1 + \frac{2x}{1-x} \quad A = \frac{1 + \frac{2x}{1-x}}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$

  Ex. Найти ПФ для $(1, 4, 9, 16, \dots)$

  $A = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots \quad (1 - x)A =$

- **Подсчет, используя производящие функции**

Найти число решений для $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, где $x_i \geq 0, x_1 \leq 4, x_2 \leq 3, x_3 \leq 5$

$A_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

$A_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3$

$A_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

$A(x) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 17x^5 + \underline{18x^6} + 17x^7 + \ldots$

Ответ – 18