

Из определения ясно, что для конечной точки $\operatorname{res}(f(z), z_0) = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$

Для бесконечной $\operatorname{res}(f(z), z_0) = -C_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(\zeta) d\zeta$

Здесь вместо γ берут для простоты окружность

Nota. Для вычисления вычетов используют более простые формулы, которые зависят от типа особых точек

Th. 1. z_0 – устранимая особая точка ($z_0 \in \mathbb{C}$) функции $f(z) \iff$ главная часть ряда Лорана равна 0

То есть $f(z)$ в z_0 представима как $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ тогда и только тогда, когда $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

$\implies z_0$ – устранимая $\iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$

Тогда в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta}(z_0)$ функция ограничена – $|f(z)| \leq M, M \in \mathbb{R}$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\delta}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} = [\gamma_{\delta} : \zeta = z_0 + \delta e^{i\varphi}] = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta) \delta i e^{i\varphi} d\varphi}{(\delta e^{i\varphi})^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \delta^n e^{ni\varphi} d\varphi$$

$$|C_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \delta^n d\varphi = M \delta^n \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

$$\iff C_{-n} = 0 \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n = C_0 + C_1(z - z_0) + \dots$$

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0 \in \mathbb{C}$ – устранимая

Следствие: вычет в устранимой точке равен 0

Th. 2. z_0 – полюс m -ого порядка \iff главная часть ряда Лорана содержит не более m ненулевых членов подряд (то есть для $i > m$ $C_{-i} = 0$)

Полюс m -ого порядка функции $f(z)$ – точка z_0 , для которой $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \implies \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ и z_0 – ноль функции $g(z)$ порядка m

То есть $g(z)$ представима как $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, где $h(z)$ – аналитическая в z_0 и $h(z_0) \neq 0$

\implies Рассмотрим $\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$, при этом $\frac{1}{h(z_0)} = b_0 \neq 0$ ($h(z)$ – аналитическая

$\implies \frac{1}{h(z)}$ – аналитическая $\implies \frac{1}{h(z)}$ – регулярная)

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n = \frac{1}{(z-z_0)^m} (b_0 + b_1(z-z_0) + \dots) =$$

$$\underbrace{\frac{b_0}{(z-z_0)^m} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_n}{(z-z_0)^{m-n}} + \dots}_{\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} \neq 0} = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

При этом $C_{-n} = 0$ при $n \geq m+1$

$$\boxed{\Leftarrow} f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = \frac{C_{-m}}{z-z_0} + \dots + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots =$$

$$\frac{1}{(z-z_0)^m} \underbrace{(C_{-n} + \dots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1} + C_0(z-z_0)^m + \dots)}_{\text{аналитическая } \frac{1}{h(z)} \text{ в } z_0} = \frac{1}{(z-z_0)^m h(z)} \Rightarrow z_0 - \text{ноль функ-}$$

ции $g(z) = (z-z_0)^m h(z)$

Тогда $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty \Rightarrow z_0 - \text{полюс (порядок бесконечно большой равен } m)$

Th. 3. z_0 – существенно особая точка \iff главная часть содержит бесконечное число членов

Очевидно, так как в другом случае, точка была бы полюсом или устранимой

Nota. Для особой точки $z_0 = \infty$ **Th. 1.**, **Th. 2.**, **Th. 3.** справедливы и доказываются аналогично:

1. z_0 – устранимая \iff главная часть равна 0
2. z_0 – m -полюс \iff главная часть содержит не более m членов и $C_m \neq 0$
3. z_0 – существенно особая \iff главная часть содержит бесконечное число членов

Ex. 1. $f(z) = \frac{(e^z - 1)^2}{1 - \cos z}$, $z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{(e^z - 1)^2}{1 - \cos z} \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z^2}{\frac{z^2}{2}} = 2 - \text{устранимая}$$

Ex. 2. $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \left(\frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} - 1 \right) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{z} \cdot k \frac{z^2}{1} \rightarrow 0 - \text{устранимая}$$

Ex. 3. $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = \infty$

$$z = \frac{1}{w} \quad f(z) = \tilde{f}(w) = w \frac{1}{\frac{1}{w} - 1} = w^2 \frac{1}{1 - w} = w^2 \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}} - \text{устранимая (главной)}$$

части нет)

Вычисления вычетов

Nota. z_0 – устранимая $\implies \text{res}(f(z), z_0) = 0$

z_0 – существенно особая $\implies \text{res}(f(z), z_0) = \pm C_{-1}$

Th. z_0 – простой полюс ($m = 1$). Тогда $\text{res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$, где $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots$$

$$(z - z_0)f(z) = C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^{n+1} \implies \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = C_{-1}$$

Th. z_0 – m -полюс. Тогда $\text{res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m)$

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots \quad \left| \cdot (z - z_0)^m \right.$$

$$f(z)(z - z_0)^m = C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \dots \quad \left| \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \right.$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m) = C_{-1}(m-1)! + C_0(z - z_0)(m-1)! + C_1(z - z_0)^2 \frac{(m-1)!}{2!} + \dots$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m) = C_{-1} + C_0(z - z_0) + C_1(z - z_0)^2 \frac{1}{2!} + \dots$$

Далее переход к пределу, аналогичному доказательству выше

Th. Теорема о вычетах.

1. $f(z)$ аналитична в D кроме особых точек z_1, \dots, z_n . Тогда $\int_{\Gamma_0} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f(z), z_k)$
2. $f(z)$ аналитична в \mathbb{C} кроме особых точек $z_1, \dots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\sum_{k=1}^n \text{res}(f(z), z_k) = 0$

1. По теореме Коши (о многосвязной области)

$$\int_{\Gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n 2\pi i C_{-1}^{(k)} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f(z), z_k), \text{ где } C_{-1}^{(k)} - \text{коэффициент}$$

для ряда Лорана в точке z_k

2. Очевидно по теореме Коши