

• **Принцип включения/исключения** (Principle of Incusion/Exclusion (PIE))

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Ех. есть $n = 11$ объектов, нужно распределить их между $k = 3$ группами A , B и C

Эту задачу можно решить с помощью *Stars and bars method*, тогда мы получим

$$\binom{n+k-1}{n, k-1} = \binom{13}{2} = 78$$

Введем ограничение: пусть мощность каждого множества будет не больше 4.

Посчитаем количество неподходящих вариантов:

$$|A| = |\{b_A \geq 5\}| = 1 \cdot \binom{11-5+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

$$|A \cap B| = |\{b_A \geq 5 \wedge b_B \geq 5\}| = \binom{3}{2} = 3$$

$$|A \cap B \cap C| = |\{b_A \geq 5 \wedge b_B \geq 5 \wedge b_C \geq 5\}| = 0$$

Итого получаем $28 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 0 = 75$ вариантов.

Далее исключаем эти варианты из количества всех вариантов, а значит подходящих вариантов всего $78 - 75 = 3$

• **Принцип включения/исключения** (Inclusion/Exclusion Principle (PIE))

- X – начальное множество элементов
- P_1, \dots, P_m – свойства
- Пусть $X_i = \{x \in X \mid P_i \text{ - свойство для } x\}$
- Пусть $S \in [m]$ – множество свойств
- Пусть $N(S) = \bigcap_{i \in S} X_i = \{x \in X \mid x \text{ имеет все свойства } P_1, \dots, P_m\}$

$$N(\emptyset) = X \quad |N(\emptyset)| = |X| = n$$

• **Теорема ПВ/И** (Theorem PIE)

$$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)|$$

– количество элементов множества X , не имеющих никакого из свойств

Пусть $x \in X$

Если x не имеет свойств P_1, \dots, P_m , то $x \in N(\emptyset)$ и $x \notin N(S) \forall S \neq \emptyset$

Поэтому x дает в общую сумму 1

Иначе, если x имеет $k \geq 1$ свойств $T \in \binom{[m]}{k}$,

то $x \in N(S)$ тогда и только тогда, когда $S \subseteq T$.

$$\text{Поэтому } x \text{ дает в сумму } \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|S|} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = 0$$

- **Следствие**

$$|\bigcup_{i \in [m]} X_i| = |X| - \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum_{S \subseteq [m], S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} |N(S)|$$

- **Приложения:**

- * Определяете «плохие» свойства P_1, \dots, P_m
- * Посчитываете $N(S)$
- * Применяете ПВ/И

- **Количество сюръекций (правототальных функций)**

- $X = \{\text{функция } f : [k] \rightarrow [n]\}$
 - Плохое свойство $P_i : X_i = \{f : [k] \rightarrow [n] \mid \nexists j \in [k] : f(j) = i\}$
 - $|\{\text{сюръекции } f : [k] \rightarrow [n]\}| = |X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_m)| \stackrel{\text{PIE}}{=} \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} (n - |S|)^k$
- $$|S|^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

- **Количество биекций**

$$n! = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n$$

- **Число Стирлинга (опять)**

Заметим, что сюръекция = разбиение, тогда:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = n! S_n^{II}(k)$$

- **Беспорядки (Derangements) – перестановка без фиксированных точек**

Если $f(i) = i$, то i – фиксированная точка

- $X = \text{все } n! \text{ перестановок}$
- Плохие свойства $P_1, \dots, P_m : \pi \in X \text{ имеет свойство } P_i \iff \pi(i) = i$
- Посчитаем $N(S) : N(S) = (n - |S|)!$
- Применяем ПВ/И: $X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} N(S) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} (n - |S|)! =$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

8. Рекуррентности и производящие функции

- **Производящие функции** (Generating Functions)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Функция выше задает последовательность a_0, a_1, a_2, \dots

Ex. $3 + 8x^2 + x^3 + \frac{1}{7}x^5 + 100x^6 + \dots \rightarrow (3, 0, 8, 1, 0, \frac{1}{7}, 100, \dots)$

Ex. Последовательность $(1, 1, 1, \dots)$ задает функцию $1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Пусть $S = 1 + x + x^2 + \dots$, тогда $xS = x + x^2 + \dots$, $(1 - x)S = 1 \Rightarrow$

$S = \frac{1}{1-x}$ задает последовательность $(1, 1, 1, \dots)$

Ex.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^n$$

$$(2, 4, 10, 28, 82, \dots) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots) + (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2}{(1-x)(1-3x)}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \rightarrow (1, 0, 1, 0, \dots)$$

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \rightarrow (0, 1, 0, 1, \dots)$$

Взятие производной:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + \dots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \rightarrow (1, 2, 3, 4, \dots)$$

Ex. Найти ПФ для $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$

$$A(x) = 1 + 3x + 5x^2 + \dots$$

$$xA = 0 + x + 3x^2 + 5x^3 + \dots$$

$$(1-x)A = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$$

$$(1-x)A = 1 + \frac{2x}{1-x} \quad A = \frac{1 + \frac{2x}{1-x}}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

Ex. Найти ПФ для $(1, 4, 9, 16, \dots)$

$$A = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots \quad (1-x)A =$$

- **Подсчет, используя производящие функции**

Найти число решений для $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, где $x_i \geq 0, x_1 \leq 4, x_2 \leq 3, x_3 \leq 5$

$$A_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$A_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$A_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$A(x) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 17x^5 + \underline{18x^6} + 17x^7 + \dots$$

Ответ – 18