Заметим, что $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ - многолистная функция, а $w = \operatorname{Ln} z = \ln \rho + i(\arg z + 2\pi k)$ - многозначная

Ex. 6. Тригонометрические и гиперболические

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Nota. Рассмотрим уравнение $\sin z = A \in \mathbb{C}$

$\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = A \Longrightarrow e^{2iz} - 2iAe^{iz} - 1 = 0$

При $t = e^{iz}$ получаем квадратное уравнение, у которого в $\mathbb{C}$ всегда будет два корня. Это значит, что в $\mathbb{C}$ sin и cos принимают любые значения (то есть $|\sin z| > 1$)

2.4. Дифференцирование ФКП

Def. $w = f(z), w : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z_0 \in D$. **Производная** функции $w(z_0)$ - это предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$, если он существует и не зависит от пути $z \to z_0$

Mem. Дифференцирование $y = f(x)$:

В $\Phi_1\Pi$: $\quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \underset{A \in \mathbb{R}}{=} A\Delta x + o(\Delta x)$

В $\Phi_2\Pi$: $\quad \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)$

Def. $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0, если $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$

Def. Дифференцируемая в точке z_0 функция $w = f(z)$, производная $f'(z_0)$ которой непрерывна в z_0, называется аналитической (или аналитичной) функцией в z_0

Th. Критерий аналитичности (или Условие Коши-Римана)

$$f(x) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ аналитична в точке } z_0 = x + iy$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ непрерывны в } z \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Причем, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

$\boxed{\Longrightarrow}$ f аналитическая в $z \Longleftrightarrow \exists$ непрерывная $f'(z) =$

$= \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} =$ [предел не зависит от пути] $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - v(x,y)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \dfrac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right) =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i \dfrac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x$

Аналогично при $i\Delta y \to 0$ получаем $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{i\Delta y} =$

$= \lim\limits_{\Delta y \to 0} \left(\dfrac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + \dfrac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} \right) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y v}{\Delta y} - i \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y u}{\Delta y} = v_y - iu_y$

Итак, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

Отсюда $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\exists$ непрерывные $u_x, u_y, v_x, v_y \Longleftrightarrow u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в (x,y), тогда

$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha_1(x, y, \Delta x, \Delta y) + \alpha_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$

$\alpha_1 = o(\Delta\rho), \quad \Delta\rho = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta_y + \beta_1 + \beta_2$

$\Delta f = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - (u(x,y) + iv(x,y)) = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y + \beta)$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{u_x \Delta x + u_y \Delta y + iv_x \Delta x + iv_y \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \dfrac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = \dfrac{u_x(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \dfrac{v_x(i\Delta x - \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \dfrac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = u_x + v_x i + \dfrac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y}$

Тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} = u_x + iv_x + \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = u_x + iv_x \Longleftrightarrow f' = u_x + iv_y$, существует и непрерывна в (x,y)

Nota. Используя Условие Коши-Римана, получим равенство $u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

Nota. Коши-Риман в ПСК:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

Тогда $f'(z) = \dfrac{1}{z} \left(\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} - i \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \dfrac{\rho}{z} \left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + i \dfrac{\partial v}{\partial \rho} \right)$

$$u_\rho = u_x \frac{\partial x}{\partial \rho} + u_y \frac{\partial y}{\partial \rho} = u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi$$

$$v_\varphi = v_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + v_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\rho v_x \sin\varphi + \rho v_y \cos\varphi = \rho u_y \sin\varphi + \rho u_x \cos\varphi = \rho u_\rho$$

Lab. $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}$

Свойства аналитических функций

Пусть f, g - аналитические функции, тогда:

1° Линейность: $af + bg$ - аналитическая

2° Композиция: $f(g(z))$ - аналитическая

3° Произведение: $f \cdot g$ - аналитическая

Nota. Доказательства свойств элементарные, все сводится к сведению к u и v

Ex. $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = u(x,y) + iv(x,y)$

$u_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$v_y = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = u_x$

$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u_y$

Таким образом, $\frac{1}{z}$ - аналитическая функция

Ex. $w = \overline{z} = x - iy$

$u_x = 1$, $v_y = -1 \neq u_x$ - не аналитическая функция