5.6. Поверхностные интегралы

1* **Поверхностные интегралы I рода** (по участку поверхности)

Задача: найти массу поверхности. Дана функция $u = u(x, y, z)$ (ее физический смысл - плотность)

Элементарная масса: $dm = u_{\text{ср.}}(\xi, \eta, \zeta)d\sigma$, $d\sigma$ – элемент поверхности

$M = \iint_S dm = \iint_S u(x, y, z)$ – поверхностный интеграл I рода

(a) Дробление S на элементы $\Delta\sigma_k$ координатными плоскостями $x = x_i, y = y_j$

(b) Определение средней точки (ξ_k, η_k, ζ_k)

(c) Интегральная сумма $\nu_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta\sigma_k$

(d) **Def.** $\iint_S u(x, y, z)\Delta\sigma = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max\Delta\sigma_k\to 0}} \nu_n$ – поверхностный интеграл первого рода

Свойства: смена обхода поверхности S не меняет знака интеграла: $\iint_{S^+} u d\sigma = \iint_{S^-} u d\sigma$

Вычисление

Рет. Криволинейный интеграл $\int_L f(x, y)dl$ мы вычисляли через параметризацию кривой одной переменной $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$, замену элементарного участка $dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}|dt|$ и функции $f(x, y)$ на $\tilde{f}(t)$. Получаем $\iint_L f(x, y)dl = \int_\alpha^\beta \tilde{f}(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}|dt|$

Аналогично для поверхностного: $\iint_S u(x, y, z)d\sigma$

(a) Параметризация S: самая частая – $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ – пределы интегрирования

(b) $d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}|dxdy|$, но так как в двойном интеграле договорились, что $dxdy > 0$ (площадь), модуль можно не ставить (область D проходится в направлении против часовой стрелки)

(c) $u(x, y, z) = \tilde{u}(x, y, z(x, y)) = \tilde{u}(x, y)$
$\iint_S u(x, y, z)d\sigma = \iint_{D^+} \tilde{u}(x, y)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy$

Ex. $S:\ x^2 + y^2 = z^2, z = 0, z = 1$

$u(x, y, z) = z$

$$\iint_S z d\sigma = \left[\begin{matrix} S : z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ D : \text{круг}, x^2 + y^2 = 1 \\ d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy \end{matrix}\right] = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{2}dxdy = \left[\text{переход в ПСК}\right] =$$

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho} \rho \underbrace{\rho}_{|J|} d\rho = \sqrt{2}2\pi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

2* **Поверхностный интеграл II рода.**

Задача: нахождение потока

Будем говорить о потоке вектора $\vec{F} = (P, Q, R)$ через площадку S в направлении нормали $\vec{n^+}$ или $\vec{n^-}$

Если задано поле жидких скоростей, то потоком называют количество жидкости, протекающей через S за время Δt

В простой ситуации поток $\Pi = FS$ ($\vec{F} \perp S, \vec{F} = \text{const}$)

В общем случаем $\vec{F}$ – переменная, S – искривленная и $\angle \vec{F}, S \neq \frac{\pi}{2}$

Переходим к вычислению элементарного потока $d\Pi$

$d\sigma$ – малый элемент поверхности (почти плоский)

В пределах $d\sigma$ $\vec{F}$ меняется мало, за среднее берем $\vec{F} = (P, Q, R)$, где $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R(x, y, z)$

Разберемся с наклоном: если площадка перпендикулярна, то $d\Pi = Fd\sigma$, но в нашем случае высота цилиндра равна проек.$_{\vec{n}}\vec{F} = (\vec{n}, \vec{F}) = F\cos\varphi$, где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали, φ – угол между нормалью и потоком, $d\Pi = (\vec{F}, \vec{n})d\sigma = F_n d\sigma$

Пусть $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, тогда $d\Pi = (\vec{F}, (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma))d\sigma = (P\cos\alpha, Q\cos\beta, R\cos\gamma)d\sigma$

Итак, $\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} d\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} F_n d\sigma = \iint_{S^{\vec{n}}} (\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \iint_{S^{\vec{n}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$

Но, еще нет координатной записи подынтегрального выражения. Спроектируем $d\sigma$ на координатные плоскости: сначала разрежем поверхность S на элементы плоскостями $x = \text{const}, y = \text{const}$ (и, таким образом, уточним форму $d\sigma$). Так как $d\sigma$ мал, то можно считать его плоским параллелограммом

Тогда $\cos\gamma d\sigma = \pm dxdy$ (γ – угол между нормалью и осью Oz)

Нашли последнее слагаемое $\iint_{S^{\vec{n}}} R\cos\gamma d\sigma$ в исходном интеграле (I рода, так как по участку $d\sigma$)

Найдем $\iint_{S^{\vec{n}}} Q\cos\beta d\sigma$, разобьем поверхность на участки $d\sigma$ плоскостями $x = \text{const}, y = \text{const}$

Аналогично $\cos\beta d\sigma = \pm dxdz$

Тогда в $\iint_{S^{\vec{n}}} P\cos\alpha d\sigma \quad \cos\alpha d\sigma = \pm dydz$

Окончательно, поток $\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} \pm Pdydz \pm Qdxdz \pm Rdxdy = \iint_{S^{\vec{n}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$ – связь интегралов I и II рода

Nota. Формулу интеграла можно получить еще так: $(\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \vec{F}\vec{n}d\sigma = \vec{F}d\vec{\sigma}$, где $d\vec{\sigma} = (\pm dydz, \pm dxdz, \pm dxdy)$

Def. $I = \iint_{S^{\vec{n}}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{\sigma} = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max \Delta s_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta s_k$ – поверхностный интеграл второго рода ($\Delta s_k = \Delta x \Delta y$ – любого знака, согласованного с обходом)

Свойства: интеграл меняет знак при смене обхода с $\vec{n}^+$ на $\vec{n}^-$

Вычисление:

(a) Параметризация S:
- для $\iint Rdxdy \quad z = z(x,y)$
- для $\iint Qdxdz \quad y = y(x,z)$
- для $\iint Pdydz \quad x = x(y,z)$

Пределы интегрирования: $D_{xy} =$ проек.$_{Oxy}S$ для $\iint Rdxdy$, $D_{xz} =$ проек.$_{Oxz}S$ для $\iint Qdxdz$, $D_{yz} =$ проек.$_{Oyz}S$ для $\iint Pdydz$

(b) $dxdy \longrightarrow \pm dxdy$, если обход D_{xy} в направлении против часовой стрелки ($+dxdy$, если угол между $\vec{n}$ и Oz острый, иначе $-dxdy$, аналогично с другими в зависимости от угла между нормалью и осью)

(c) $R(x,y,z) = \tilde{R}(x,y,z(x,y)), P(x,y,z) = \tilde{P}(x(y,z),y,z), Q(x,y,z) = \tilde{Q}(x,y(x,z),z)$

(d) $\iint_{S^{\vec{n}}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{\sigma} = \iint_D \pm\tilde{P}dydz \pm \tilde{Q}dxdz \pm \tilde{R}dxdy = \iint_{D_{yz}} \pm\tilde{P}dydz + \iint_{D_{xz}} \pm\tilde{Q}dxdz + \iint_{D_{xy}} \pm\tilde{R}dxdy$