7. Комбинаторика

Базовые понятия:

- **Алфавит** (Alphabet) Σ (или X, *Ex.* $X = \{a, b, c\}$) – множество символов в нашей системе

- **Диапазон** (Range) $[n] = \{1, \ldots, n\}$ – конечное множество последовательных натуральных чисел

- **Расстановка** (Ordered arrangement) – последовательность каких-либо элементов (тоже самое, что кортеж), *Ex.* $x = (a, b, c, d, b, b, c) \quad |x| = n$
  Расстановку можно представить как функцию $f : \underbrace{[n]}_{\text{domain}} \rightarrow \underbrace{\Sigma}_{\text{codomain}}$, которая по порядковому номеру выдает символ
  $ranf = \{c \in \Sigma \mid \exists i \in [n] \ : \ f(i) = c\}$

- **Перестановка** (Permutation) – $\pi : [n] \to \Sigma$, где $n = |\Sigma|$
  Расстановка π – биекция между $[n]$ и Σ

  Ex. $\pi = 2713546$

i	1	2	3	4	5	6	7
$\pi(i)$	2	7	1	3	5	4	6

  Одна из задач комбинаторики – посчитать количество различных расстановок или перестановок при заданных n и Σ

- **k-перестановка** (k-permutation) – расстановка из k различных элементов из Σ

  Ex. $\underbrace{|31475|}_{\text{5-perm из } \Sigma=[7]} = 5$
  k-перестановка – инъекция $\pi : [k] \to \Sigma$ ($k \leq n = |\Sigma|$)

- $P(n, k)$ – множество всех k-перестановок алфавита $\Sigma = [n]$ (если исходный алфавит не состоит из чисел, то мы можем сделать биекцию между ним и $[n]$)
  $P(n, k) = \{f \mid f : [k] \to [n]\}$
  Чаще интересует не само множество, а его размер, поэтому под обозначением $P(n, k)$ подразумевается $|P(n, k)|$

- $S_n = P_n = P(n, n)$ – множество всех перестановок. Также чаще всего нас будет интересовать не множество, а его размер

$|S_n| = n!$ – всего существует $n!$ перестановок

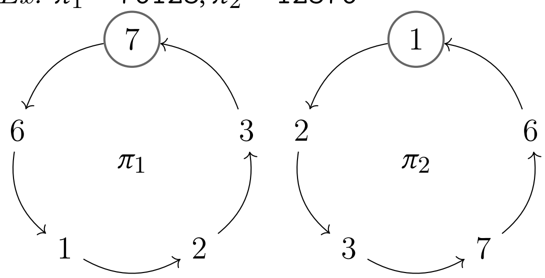
$|P(n,k)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

- **Циклические k-перестановки** (Circular k-permutations)

  $\pi_1, \pi_2 \in P(n,k)$ – циклически эквивалентны тогда и только тогда:

  $\exists s \mid \forall i \ \pi_1((i+s)\%k) = \pi_2(i)$

  Ex. $\pi_1 = 76123, \pi_2 = 12376$

  $P_C(n,k)$ – множество всех циклических k-перестановок в Σ

  $|P_C(n,k)| \cdot k = |P(n,k)|$

  $|P_C(n,k)| = \dfrac{|P(n,k)|}{k} = \dfrac{n!}{k(n-k)!}$

- **Неупорядоченная расстановка k элементов** (Unordered arrangement of k elements) – мультимножество Σ^* размера k

  Ex. $\Sigma^* = \{\triangle, \triangle, \square, \triangle, \circ, \square\}^* = \{3 \cdot \triangle, 2 \cdot \square, 1 \cdot \circ\} = (\Sigma, r)$

  Неупорядоченную расстановку можно представить как функцию:

  $r : \Sigma \longrightarrow \mathbb{N}, \quad r(x)$ – кол-во повторений объекта x

- **k-сочетание** (k-combination) – неупорядоченная перестановка из k различных элементов из Σ (еще называют k-подмножеством, k-subset)

  Соответственно $C(n,k)$ – множество всех таких k-сочетаний

  $|C(n,k)| = C_n^k = \dbinom{n}{k}$

  $C(n,k) = \dbinom{\Sigma}{k}$

  $\dbinom{n}{k} \cdot k! = |P(n,k)|$

  $|C(n,k)| = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Th. Биномиальная теорема (Binomial theorem):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент

Th. Мультиномиальная теорема (Multinomial theorem):

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_i \in 1..n, \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_r^{k_r}$$

$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \dfrac{n!}{k_1! \dots k_r!}$ – мультиномиальный коэффициент