- **Рекуррентные соотношения** (Recurrence relations)

  Решить рекуррентное соотношение – найти закрытую (то есть нерекуррентную) формулу

  Ex. Арифметическая прогрессия

  $$a_n = \begin{cases} a_0 = const & n = 0 \\ a_{n-1} + d, & n > 0 \end{cases}$$

  Решение: $a_n = a_0 + nd$ – анзац (Ansatz, догадка)

  Проверка: $a_n = a_0 + nd = a_{n-1} + d = a_0 + (n-1)d + d = a_0 + nd$ - 👍👍

- Метод характеристического уравнения

  Рекуррентное соотношение $\overset{a_n \to r^n}{\rightsquigarrow}$ Характеристическое уравнение $\overset{\text{решение}}{\rightsquigarrow}$ Корни $\overset{\text{магия}}{\rightsquigarrow}$ Решение $\rightsquigarrow$ Проверка

  Ex. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

  $r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0$

  $r^{n-2}(r^2 - r - 6) = 0$

  $r_{1,2} = -2, 3$

  $$\boxed{\begin{array}{l} \text{Если } r_1 \neq r_2, \text{ то } a_n = ar_1^n + br_2^n \text{ – общее решение} \\ \text{Если } r_1 = r_2 = r, \text{ то } a_n = ar^n + bnr^n \end{array}}$$

  $a_n = a(-2)^n + b(3)^n$

  $$\text{Пусть } \begin{cases} a_0 = 1 = a + b \\ a_1 = 8 = -2a + 3b \end{cases}$$

  $$-5a = 5 \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Longrightarrow a_n = -(-2)^n + 2 \cdot 3^n$$

- **Разделяй и властвуй** (Divide-and-Conquer)

  $$T(n) = \underbrace{2T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{работа рекурсии}} + \underbrace{\theta(n)}_{\text{работа разделения/слияния}}$$

- **Основная теорема о рекуррентных соотношениях** (Master Theorem) *тык*

  $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

  Из этого, $c_{crit} = \log_b a$

  I случай: слияние < рекурсия

  $f(n) \in O(n^c)$, где $c < c_{crit} \Longrightarrow T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}})$

  $f(n) \in O(n^c) \Longleftrightarrow f(n) \in o(n^{c_{crit}})$

  II случай: слияние ≈ рекурсия

  $f(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^k n) \Longrightarrow T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^{k+1} n)$

  Здесь $k \geq 0$. В общем случае см. википедию

III случай: слияние > рекурсия

$f(n) \in \Omega(n^c)$, где $c > c_{crit} \Longrightarrow T(n) \in \Theta(f(n))$

- **Метод Акра-Бацци** (Akra-Bazzi method) *тык*

  $T(n) = f(n) + \sum\limits_{i=1}^{k} a_i T(b_i n + h_i(n)) \Longrightarrow T(n) \in \Theta\left(n^p \cdot \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx\right)\right)$, где p – решение для $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i b_i^p = 1$

  $$\begin{cases} k = const \\ a_i > 0 \\ 0 < b_i < 1 \\ h_1(n) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right) \text{ – малые возмущения} \end{cases}$$

  Ex. $T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n$ – асимптотика сортировки слиянием

  $T(n) = T\left(\frac{n}{2} + O(1)\right) + T\left(\frac{n}{2} - O(1)\right) + \theta(n)$

  Здесь $b_i = \frac{1}{2}, \quad h = \pm O(1) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$

  Ex. $T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

  $a_1 = 1, b_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 1, b_2 = \frac{1}{4}, f(n) = n$

  $\left(\frac{3}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{4}\right)^p = 1$

  $p = 1$

  $\int_1^n \frac{x}{x^{1+1}} dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n$

  $T(n) \in \Theta(n \cdot (1 + \ln n))$

  $T(n) \in \Theta(n \ln n)$

- Решить рекуррентное соотношение $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-1}$, где $a_0 = 1, a_1 = 3$

  Используем производящие функции:

  $A(x) = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} \to 2^{n+1} - 1$