

4. Ряды

4.1. Числовой ряд в комплексной плоскости

Def. 1. $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, где $z_n \in \mathbb{C}$ - числовой ряд

Def. 2. Сумма ряда - $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k$

Если сумма существует и конечна, то ряд называют сходящимся.

Def. $f(z)$ называется регулярной в точке z_0 , если $f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Для комплексных числовых рядов остаются справедливыми:

1. Необходимое условие сходимости
2. Признак Даламбера
3. Радикальный признак Коши
4. Критерий Коши
5. Абсолютная сходимость

4.2. Функциональный ряд в комплексной плоскости

Def. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, где $u_n(z) : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ - функциональный ряд

Th. Признак Вейерштрасса.

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \alpha_n \in \mathbb{R}_0^+, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}, |u_n(z)| \leq \alpha_n \forall z \in D \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Lab. Сверить формулировку и доказательства для \mathbb{C} и \mathbb{R} -случая

Nota. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывна

Th. $u_n(z)$ непрерывна в D и $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Тогда $\int_K f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_K u_n(\zeta) d\zeta$, где $K \subset D$ - кусочно гладкая кривая

Докажем, что $\left| \int_K f(\zeta) d\zeta - \sum_{k=1}^n \int_K u_k(\zeta) d\zeta \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\left| \int_K \left(f(\zeta) - \sum_{k=1}^n u_k(\zeta) \right) d\zeta \right| = \left| \int_K \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\zeta) - \sum_{k=1}^n u_k(\zeta) \right) d\zeta \right| = \left| \int_K \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_K r_n(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_K |r_n(\zeta)| |d\zeta| \leq \varepsilon$$

по кр. Коши

4.3. Степенной ряд

Def. Степенной ряд - $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ $\left(a = 0 : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right), c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Область сходимости - круг с центром a , $|z-a| \leq R$ - радиус сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |z-a| < 1 \implies |z-a| < \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Nota. Также справедлива теорема Абеля

Th. Абеля.

Если степенной ряд сходится в точке z_1 , то он сходится абсолютно и равномерно в любой точке z_2 такой, что $|z - z_1| > |z - z_2|$

Если степенной ряд расходится в точке z_1 , то он расходится в любой точке z_2 такой, что $|z - z_1| < |z - z_2|$

Следствие: Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, то $f(z)$ - непрерывна в круге сходимости ряда

Th. Почленное дифференцирование суммы ряда.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ - сходящийся в круге радиуса $R \neq 0$. Тогда $f(z)$ дифференцируема и

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

Рассмотрим ряд (и его сумму) $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ - он сходится в круге радиуса ρ таком, что $0 \leq |z| \leq \rho < R$ (см. сходимость по Даламберу) (Обозначим круг $K_1 : |z| = \rho$)

Докажем, что $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} = S(z) = f'(z)$

В круге K_1 выберем кривую γ , соединяющую $z_0 = 0$ и z

Рассмотрим $\int_{\gamma} \zeta^k d\zeta$, функция ζ^k аналитическая, тогда $\int_{\gamma} \zeta^k d\zeta$ не зависит от пути

$$\int_{\gamma} \zeta^k d\zeta = \int_0^z \zeta^k d\zeta = \frac{\zeta^{k+1}}{k+1} \Big|_0^z = \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

$$\text{Тогда } \int_0^z nc_n \zeta^{n-1} d\zeta = \frac{nc_n \zeta^n}{n} \Big|_0^z = c_n z^n$$

$$\text{Возьмем интеграл от суммы } \int_0^z S(\zeta) d\zeta = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} nc_n \zeta^{n-1} \right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z nc_n \zeta^{n-1} d\zeta =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$$

Таким образом, $f(z)$ является первообразной для $S(z)$, то есть $S(z) = f'(z)$

При этом $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ - этот ряд можно дифференцировать дальше, и область, в которой функция дифференцируется, - круг K_1 , где ρ вплотную подходит к R

Таким образом, доказали, что если $f(z)$ регулярна $\forall z$ в круге $|z| < R$, то $f(z)$ сколько угодно раз дифференцируема в этом круге и $f'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right)'$

Следствие: $f'(z) = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots)'$ или $f'(z) = (c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots)'$ $\implies c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$ и так далее

$$\text{Получили ряд Тейлора } f(z) = \sum_{|z-a|<\rho} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

Th. $f(z)$ аналитическая в области $D \implies f(z)$ регулярна в области D

По формуле Коши $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in K$, где $K = \{z \mid |z-a|, \rho\}$, $\gamma_{\rho} = \{\zeta \mid |\zeta-a| = \rho\}$

и $K \subset D$

Разложим в ряд $\frac{1}{\zeta - z}$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - (z-a) - a} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n, \text{ где } \left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| < 1$$

То есть $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся

Тогда $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta (z-a)^n$$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ - единственное разложение по Тейлору

Итак
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$