- **Линейные рекуррентности** (Linear recurrences)

  $$\underbrace{k_1 a_n + k_2 a_{n-1} + k_3 a_{n-2} + \dots}_{\text{линейная комб. рекуррентных членов}} = \underbrace{f(n)}_{\text{функция от } n}$$

  Линейное рекуррентное соотношение – $\begin{cases} f = 0 \Longrightarrow \text{гомогенное (однородное)} \\ f \neq 0 \Longrightarrow \text{негомогенное (неоднородное)} \end{cases}$

  Ex. Последовательность Фибоначчи:

  $$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) \end{cases}$$

  $F(n) - F(n-1) - F(n-2) = 0$ – однородное

- Операторы:

  Сумма: $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$

  Умножение на число: $(\alpha \cdot f)(n) = \alpha f(n)$

  Сдвиг: $(Ef)(n) = f(n+1)$

  Ex. $E(f - 3(g - h)) = Ef + (-3)Eg + 3Eh$

  Составные операторы:

  $(E - 2)f = Ef + (-2)f = f(n+1) - 2f(n)$

  $E^2 f = E(Ef) = f(n+2)$

  Ex. $f(n) = 2^n$

  $2f = 2 \cdot 2^n$

  $Ef = 2^{n+1}$

  $(E^2 - 1)f(n) = E^2 f(n) - f(n) = 2^{n+2} - 2^n = 3 \cdot 2^n$

- **Аннигилятор** (Annihilator) – оператор, который трансформирует f в функцию, тождественную 0

  Ex. Оператор $(E - 2)$ аннигилирует функцию $f(n) = 2^n$

  Ex. $(E - c)$ аннигилирует c^n

  Ex. $(E - 3)(E - 2)$ аннигилирует $2^n + 3^n$

  Ex. $(E - c)^d$ аннигилирует любую функцию формы $p(n) \cdot C^n$, где $p(n)$ - многочлен степени не больше $d - 1$

  Nota. Любой составной оператор аннигилирует класс функций

  Nota. Любая функция, составленная из полинома и экспоненты, имеет свой единственный аннигилятор

Если X аннигилирует f, то X также аннигилирует Ef

Если X аннигилирует f и Y аннигилирует g, то XY аннигилирует $f \pm g$

- Аннигилирование рекуррентностей:
  1. Запишите рекуррентное соотношение в форме операторов
  2. Выделите аннигилятор для соотношения
  3. Разложите на множители (если понадобится)
  4. Выделите общее решение из аннигилятора
  5. Найдите коэффициенты используя базовые случаи (если даны)

Ex. $r(n) = 5r(n-1), r(0) = 3$

1. $r(n+1) - 5r(n) = 0 \quad (E-5)r(n) = 0$
2. $(E-5)$ аннигилирует $r(n)$
3. $(E-5)$ уже разложен
4. $r(n) = \alpha \cdot 5^n$
5. $r(0) = 3 \Longrightarrow \alpha = 3$

Ex. $T(n) = 2T(n-1) + 1, \quad T(0) = 0$

1. $(E-2)T(n) = 1$
2. $(E-2)$ не аннигилирует $T(n)$, остается 1. Тогда добавим аннигилятор $(E-1)$, получим, что $(E-1)(E-2)$ аннигилирует $T(n)$
3. Разложение не требуется
4. $T(n) = \alpha \cdot 2^n + \beta$ - общее решение
5. $T(0) = 0 = \alpha \cdot 2^0 + \beta$
   $T(1) = 1 = \alpha \cdot 2^1 + \beta$
   $\alpha = 1, \beta = -1$

- **Псевдонелинейные уравнения** (Pseudo-non-linear equations)

Ex. $a_n = 3a_{n-1}^2, a_0 = 1$

$\log_2 a_n = \log_2(3a_{n-1}^2)$

Пусть $b_n = \log_2 a_n$

$b_n = 2b_{n-1} + \log_2 3, b_0 = 0$

$b_n = (2^n - 1)\log_2 3$

$a_n = 2^{(2^n-1)\log_2 3} = 3^{2^n-1}$