

## Лекция 5. Колебания

Колебаниями называются процессы (изменения состояния тела или системы), обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Повторение может быть строго периодическим (например, движение маятника) или хаотическим (апериодические колебания). Различают:

- **Периодические:** значения физических величин повторяются через равные интервалы времени  $T$
- **Апериодические:** нет строгой периодичности, например, затухающие колебания груза
- **Свободные (собственные):** возникают после выведения системы из равновесия *без внешнего воздействия*
- **Вынужденные:** поддерживаются внешней периодической силой. Амплитуда зависит от соотношения частоты силы и собственной частоты системы (явление резонанса).
- **Автоколебания:** энергия поступает в систему по её внутренним законам. Пример: генератор на транзисторе, где обратная связь поддерживает незатухающие колебания.

Колебательная система - физическая система, в которой могут существовать свободные колебания. Реальные системы всегда имеют затухание из-за диссипативных сил (трение, сопротивление). Систему, в которой описывающие ее величины совершают колебания около точки равновесия, называют осциллятором

Системы, в которых возможны колебательные процессы, подразделяются на линейные и нелинейные. В первом случае дифференциальные уравнения, описывающие поведение системы, являются линейными, и система подчиняется принципу суперпозиции.

Во втором случае такие дифференциальные уравнения нелинейны и принцип суперпозиции не справедлив. Большинство физических систем нелинейны, однако, при малых отклонениях от состояний равновесия они демонстрируют линейное поведение

Простейшими являются гармонические колебания, которые описываются формулой  $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$  (или  $x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$ ). Обычно точка  $x = 0$  считается положением равновесия. Такие колебания часто встречаются в природе (например, маятник). К тому же, другие периодические процессы могут быть представлены как комбинация гармонических (подобно рядам Фурье)

Величина  $\alpha$  называется начальной фазой колебаний, а  $A$  - амплитуда, наибольшее значение колебания. Косинус -  $2\pi$ -периодичная функция, из этого можно найти период колебаний:

$$(\omega_0(t + T) + \alpha) - (\omega_0 t + \alpha) = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Период отражает величину времени, через которое система придет в исходное положение.

Обратная величина - частота  $\nu = \frac{1}{T}$

Можем получить скорость колебаний:  $v_x = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$

И ускорение:  $a_x = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha)$

Из этого  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

По формуле Эйлера функцию гармонических колебаний можно представить как  $x(t) = \text{Re}(Ae^{i(\omega_0 t + \alpha)})$

*Ех. Пружинный маятник.* Сила упругости по закону Гука равна  $F = -kx$ . Подставляя в  $F = m\ddot{x}$ , получаем:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \implies \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Полная энергия в отсутствие трения сохраняется:  $W = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$ . И в пике достигает  $W_{\text{пот}} = W_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$

*Ех. Математический маятник.* - подвешенный грузик на нерастяжимой нити, совершающий движение по окружности. Момент силы равен  $M = mgl \sin \varphi$ ,  $I = ml^2$ , угловое ускорение -  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ . По основному уравнению вращательного движения  $I\varepsilon = M \implies \ddot{\varphi}l = g \sin \varphi$ . При малых колебаниях  $\sin \varphi \sim \varphi$  и получаем  $\varphi = \varphi_{\text{max}} \cos(\omega_0 t + \alpha)$

Отсюда период  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

*Ех. Электрический LC-контур:* Пусть конденсатор ёмкостью  $C$  заряжен до напряжения  $U_0$ . При соединении конденсатора с катушкой индуктивности в цепи потечёт ток  $I$ , что вызовет в катушке ЭДС самоиндукции, направленную на уменьшение тока в цепи. Ток, вызванный этой ЭДС (при отсутствии потерь в индуктивности), в начальный момент будет равен току разряда конденсатора, то есть результирующий ток будет равен нулю. Магнитная энергия катушки в этот (начальный) момент равна нулю.

Затем результирующий ток в цепи будет возрастать, а энергия из конденсатора будет переходить в катушку до полного разряда конденсатора. В этот момент электрическая энергия конденсатора равна нулю. Магнитная же энергия, сосредоточенная в катушке, напротив, максимальна

После этого начнётся перезарядка конденсатора, то есть зарядка конденсатора напряжением другой полярности. Перезарядка будет проходить до тех пор, пока магнитная энергия катушки не перейдёт в электрическую энергию конденсатора. Конденсатор в этом случае снова будет заряжен до напряжения  $-U_0$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \implies \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Отсюда циклическая частота:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , период -  $T = 2\pi\sqrt{LC}$

Энергия переходит между конденсатором  $\left(W_E = \frac{q^2}{2C}\right)$  и катушкой  $\left(W_M = \frac{LI^2}{2}\right)$ .