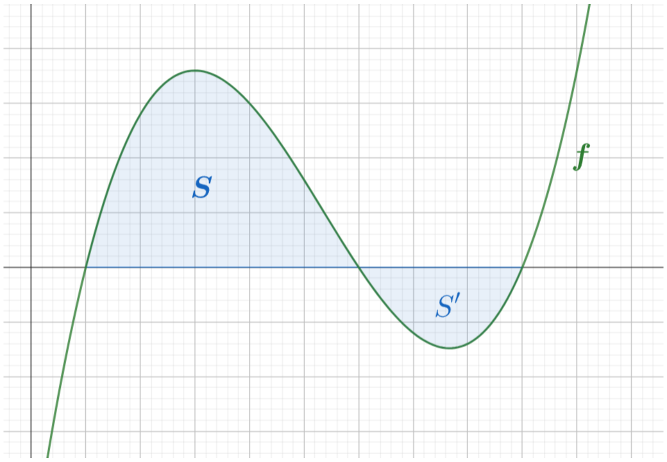
1.4. Приложения определенного интеграла

1.4.1. Площади

1* *Мет.* Значение интеграла - площадь фигуры под графиком



<u>Геом. смысл</u>. $S = \int_a^b f(x)dx \qquad S' = -\int_b^c f(x)dx$

2*

Площадь фигуры, окруженной графиками функций $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$, a, b - абсциссы точек пересечения

Nota. Симметрия

Если $f(x)$ – четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

1.4.2. Площадь в ПСК

В ДПСК мы производили дробление фигуры на элементарные прямоугольники. Сделаем подобное в ПСК для $\rho(\varphi)$:

1. Дробление $[\alpha;\beta]$ на угловые сектора $[\varphi_{i-1};\varphi_i]$
   $\Delta\varphi_i$ - угол сектора
2. Выбор средней точки $\psi_i \in [\varphi_{i-1};\varphi_i]$, площадь сектора $S_i = \dfrac{1}{2}\Delta\varphi_i\rho^2(\psi_i)$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$
4. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i = \dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$

Ex. Кардиоида:
$\rho = 1+\cos\varphi$
$S = \dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\rho^2(\varphi)\Delta\varphi = \int_{0}^{\pi}\rho^2(\varphi)\Delta\varphi = \int_{0}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\Delta\varphi = \int_{0}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\Delta\varphi = \varphi\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}\Delta\varphi = \pi + \dfrac{1}{2}\pi = \dfrac{3}{2}\pi$

Nota. Если фигура задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta$$

то площадь будет равна $S = \int_a^b y(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$

1.4.3. Длина кривой дуги

Пусть дуга AB задана уравнением $y = f(x) \quad x \in [a;b]$

1. Производим дробление дуги на элементарные дуги точками $A = M_0 < M_1 < \dots < M_n = B$
   Здесь порядок M_i таков, что их абсциссы $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \Delta x_i > 0$
2. Стягиваем сумму элементарными хордами. Сумма длин этих хорд при уменьшении их длин будет приближать длину этой дуги
   $\Delta s_i = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2}$
   По **Th.** Лагранжа существует такая точка $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$, что значение производной в этой точке равно наклону отрезка: $f'(\xi_i) = \dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta s_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+(y'(\xi_i))^2}\Delta x_i$
4. Предельный переход $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}}\sigma_n = \int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}dx = l_{\text{дуги}}$

Nota. Очевидно, что требуется гладкость дуги, то есть ее спрямляемость. Только при этом условии $\Delta l_i \approx \Delta s_i$, и работает **Th.** Лагранжа

Параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha; \beta]$$

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\varphi'(\theta_i)\Delta t)^2 + (\psi'(\theta_i)\Delta t)^2} = |\Delta t|\sqrt{(\varphi'(\theta_i))^2 + (\psi'(\theta_i))^2}$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}|dt|$$

Ex. Длина эллипса

$$L = 4l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{c^2\sin^2 t + b^2}dt = 4\frac{b}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2\sin^2 t}dt$$ - эллиптический интеграл

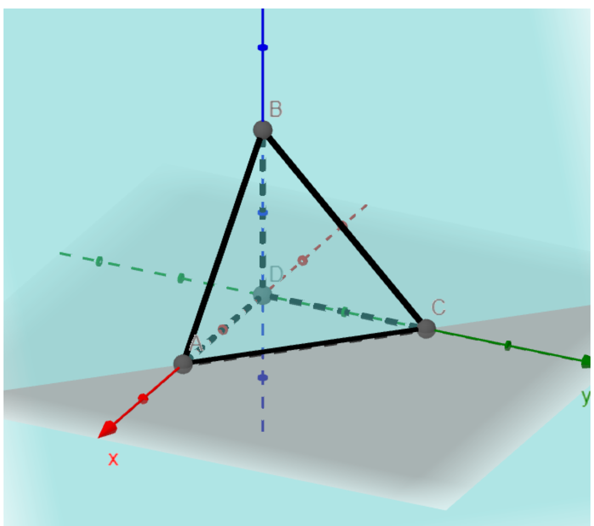
1.4.4. Объемы тел

1* Объемы тел с известными площадями сечений

Для тела известна площадь сечения перпендикулярной Ox плоскости $S(x)$

Аналогично обычному дроблению $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} v_n = \int_a^b S(x)dx = V_{\text{тела}}$

Ex. Тело отсечено от I октанта плоскостью $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$



$S(x) = S_{DBC} = \frac{(a-x)^2}{2}$

Тогда $V = \int_0^a \frac{1}{2}(a-x)^2dx = \frac{1}{2}\int_0^a (x-a)^2dx = \frac{1}{2}\int_0^a (x-a)^2d(x-a) = \frac{1}{6}(x-a)^3\Big|_0^a = \frac{a^3}{6}$

Nota. Объем тела вращения

Пусть дана функция $r(x)$, задающая радиус тела вращения на уровне x, тогда объем тела вращения будет равен $\int_a^b \pi r^2(x)dx$