

**Th.**  $z : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\exists$  непрерывные  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$

Тогда дифференциал функции представим как  $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ , где  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta$  – бесконечно малые

$$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y) = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y) + z(x + \Delta x, y) - z(x, y)$$

По теореме Лагранжа:

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y) = z'_y(\eta)\Delta y$$

$$z(x + \Delta x, y) - z(x, y) = z'_x(\xi)\Delta x$$

По теореме о представлении функции ее пределом:

$$z'_x(\xi) = \lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ (\Delta x \rightarrow 0)}} z'_x(\xi) + \alpha$$

$$z'_y(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow y} z'_y(\eta) + \beta$$

Так как  $z'_x(\xi)$ ,  $z'_y(\eta)$  непрерывны, то  $\lim_{\xi \rightarrow x} z'_x(\xi) = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\lim_{\eta \rightarrow y} z'_y(\eta) = \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\text{Тогда } \Delta z = \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \right) \Delta x + \left( \frac{\partial z}{\partial y} + \beta \right) \Delta y = \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

Заметим, что  $\alpha\Delta x$  и  $\beta\Delta y$  – бесконечно малые порядка выше, чем  $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \iff$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)^2} \quad \left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \leq 1, \left|\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right| \leq 1$$

Сравним  $\alpha \frac{\Delta x}{\Delta\rho} = \text{б.м.} \cdot \text{огр.} \xrightarrow{\Delta\rho \rightarrow 0} 0$ ,  $\frac{\beta\Delta y}{\Delta\rho} \xrightarrow{\Delta\rho \rightarrow 0} 0$

Функция, приращение которой представимо  $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + o(\Delta\rho)$ , называется дифференцируемой в точке  $(x, y)$ , линейная часть приращения называется полным дифференциалом

Обозначение:  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

$$\text{Ex. } z = 3xy^2 + 4 \cos xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} = 3y^2 - 4 \sin xy \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=\text{const}} = 6xy - 4 \sin xy \cdot x$$

$$dz = (3y^2 - 4y \sin xy)dx + (6xy - 4x \sin xy)dy$$

### 4.3. Правила дифференцирования

*Nota.* При нахождении  $\frac{\partial z}{\partial x_i}$  ( $x_i$  – какая-либо переменная) дифференцирование проводится по правилам для функции одной переменной ( $x_j \neq x_i$  считаются константами)

Выпишем более сложные правила

**1\* Сложная функция**

Мет.  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**Def.** Сложная функция двух переменных –  $z = z(u, v)$ , где  $u = u(x, y), v = v(x, y)$

Формула: Найдем  $\frac{\partial z(u, v)}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z(u, v)}{\partial y}$

**Th.**  $z = z(u, v)$ ,  $u(x, y), v(x, y)$  непрерывно дифференцируемы по  $x, y$

Тогда  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$   
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$

$z$  дифференцируема  $\iff \Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + \alpha \Delta u + \beta \Delta v$

Зададим приращение  $\Delta x$  (представление  $\Delta z$  не должно измениться)

$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta_x v + \alpha \Delta_x u + \beta \Delta_x v + v \quad \Big| \cdot \Delta x$

$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x}$

По теореме Лагранжа:  $\frac{\Delta_x u}{\Delta x}(\xi) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x}$

В пределе:  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$

Аналогично для  $\frac{\partial z}{\partial y}$

*Nota.* Интересен случай  $z = z(x, u, v)$ , где  $u = u(x), v = v(x)$

Здесь  $z$  является функцией одной переменной  $x$

Обобщая правило на случай трех переменных, можем записать формулу полной производной, которая имеет смысл

$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$

*Ex.* Пусть  $w = w(x, y, z)$  – функция координат,  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  – функции времени

$w$  явно не зависит от времени, тогда  $\frac{dw}{dt} = w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z$ , где  $v_x$  – проекция скорости

Если  $w = w(x, y, z, t)$ , то  $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} (w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z)$

**2\* Неявная функция одной переменной:** пусть  $F(x, y(x)) = 0$  – неявное задание  $y = y(x)$ 

Найдем  $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$

Отсюда  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

#### 4.4. Производная высших порядков

*Nota.* Пусть  $z = z(x, y)$  дифференцируема,  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  также дифференцируемы, при этом в общем

$$\text{случае } \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y)$$

Тогда определены вторые частные производные

**Def.** Функция  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x}$  называется второй частной производной

Функции  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  называются чистыми производными, а  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$  – смешанными

**Th.**  $z = z(x, y)$ , функции  $z(x, y), z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$  определены и непрерывны в  $\overset{\circ}{U}(M(x, y))$

Тогда  $z''_{xy} = z''_{yx}$

Введем вспомогательную величину

$$\Phi = (z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y)) - (z(x, y + \Delta y) - z(x, y))$$

Обозначим  $\phi(x) = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$

Тогда  $\Phi = \phi(x + \Delta x) - \phi(x)$  – дифференцируема, непрерывна, как комбинация

По теореме Лагранжа  $\phi(x + \Delta x) - \phi(x) = \phi'(\xi)\Delta x = (z'_x(\xi, y + \Delta y) - z'_x(\xi, y))\Delta x$ , где  $\xi \in (x; x + \Delta x)$

Здесь  $z'_x$  дифференцируема также на  $[y, y + \Delta y]$

Тогда по теореме Лагранжа  $\exists \eta \in (y, y + \Delta y) \mid z'_x(\xi, y + \Delta y) - z'_x(\xi, y) = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta y$

Таким образом  $\Phi = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x\Delta y$

Перегруппируем  $\Phi$ , далее аналогично для  $z''_{yx}$

Тогда  $z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x\Delta y = \Phi = z''_{yx}(\xi', \eta')\Delta x\Delta y$

#### 4.5. Дифференциалы

*Мет. 1.* Полный дифференциал (1-ого порядка) функции  $z = z(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy - \text{сумма частных дифференциалов}$$

*Мет. 2.* Инвариантность формы первого дифференциала функции одной переменной

$$dy(x) = y'(x)dx \stackrel{x=\phi(t)}{=} y'(t)dt$$

**Th.** Инвариантность полного дифференциала первого порядка.

$z = z(u, v)$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  - дифференциалы

Тогда  $dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Mem.  $d^2 y(x) \stackrel{\text{def}}{=} d(dy(x)) = y''(x) dx^2 \neq y''(t) dt^2$

**Def.** :  $z = z(x, y)$  - дифференцируема и  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$  - дифференцируемая функция

Тогда второй полный дифференциал равен  $d^2 z \stackrel{\text{def}}{=} d(dz)$

$$\begin{aligned} \text{Формула: } d^2 z &= d \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy = (z'_x dx)'_x dx + (z'_y dy)'_x dx + \\ &+ (z'_x dx)'_y dy + (z'_y dy)'_y dy = (z'_x)'_x (dx)^2 + (z'_y)'_x dx dy + (z'_x)'_y dy dx + (z'_y)'_y (dy)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2 \end{aligned}$$

Nota: Заметим формальное сходство с биномом Ньютона:  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Введем условное обозначение  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2$

Тогда  $d^2 z = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z$ , здесь  $\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2$  - оператор второго полного дифференцирования

$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n z$  - дифференциал  $n$ -ого порядка

Nota: Можно ли утверждать, что  $d^2 z(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z \stackrel{x=x(u,v), y=y(u,v)}{=} \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 z$  ?

Нет, нельзя ( $d^2 z$  не инвариантен при замене)

Покажем, что не выполняется в простом случае:  $z = z(x, y) = z(x(t), y(t))$  - параметризация.

Геометрически, это выбор пути в области  $D$  от точки  $M_0(x_0, y_0)$  до точки  $M(x, y)$

Итак:

$$\begin{aligned} d(dz) &\stackrel{z=\Phi_1\Pi}{=} (dz)'_t dt = \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)'_t dt = \left[ \begin{matrix} dx(t) = \frac{dx}{dt} dt \\ dy(t) = \frac{dy}{dt} dt \end{matrix} \right]'_t dt = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)'_t dt^2 = \\ &= \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right)'_t dt^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)'_t dt^2 = \left( \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)'_t \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{dx}{dt} \right)'_t \right) dt^2 + \left( \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)'_t \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{dy}{dt} \right)'_t \right) dt^2 = \\ &= \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dt^2 + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) dt^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy dx = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y$$

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases} \quad - \text{линейная параметризация}$$

Lab. Дать инвариантность при линейной параметризации

Причем, это свойство верно для  $d^n z$ , то есть если  $\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$  (например), то  $d^n z \stackrel{z=z(t)}{=} z^{(n)}(t) dt$

## 4.6. Формула Тейлора

$$\text{Мет. } f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \begin{cases} o((x-x_0)^n) & - \text{ост. в форме Пеано} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} & - \text{ост. в форме Лагранжа} \end{cases}$$

В дифференциалах:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \text{остаток}$$

Формула Тейлора для  $z = z(x, y)$  в окрестности  $M_0(x_0, y_0)$  (как раньше  $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ )

$$z(M \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0)) = z(M_0) + \frac{dz(M_0)}{1!} + \dots + \frac{d^n z(M_0)}{n!} + o((\Delta \rho)^n)$$

*Nota.* Формула выше верна, если  $z = z(x, y)$  непрерывна со своими частными производными до  $n+1$  порядка включительно в некоторой окрестности  $U_\delta(M_0(x_0, y_0))$ , где  $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$