

Nota. В строгом определении интегральная сумма строится так:

$\widehat{M_{i-1}M_i}$ – элементарная дуга

Δl_i – длина элемента

Δs_i – длина стягивающей дуги

$\Delta l_i \approx \Delta s_i$

$M_{\text{ср.}}(\xi_i, \eta_i)$ – средняя точка элемента

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

Определим криволинейный интеграл II рода. Задача (вычисление работы силы вдоль пути): вдоль пути \widehat{AB} действует сила $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$. Найдём элементарную работу $dA = \vec{F}_{\text{ср.}} d\vec{s}$, где $d\vec{s}$ – элементарное приращение

$$d\vec{s} = (dx, dy) = (\cos \alpha ds, \sin \alpha ds)$$

$\vec{F}_{\text{ср.}}$ – значение силы на элементарном участке в какой-либо его точке

Тогда $dA = (P(x, y), Q(x, y)) \cdot (dx, dy) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, а по всей кривой $A = \int_{AB} dA = \int_{AB} Pdx + Qdy$ – интеграл II рода (в проекциях)

Nota. В проекциях, потому что $F_x = P, F_y = Q$, таким образом скалярное произведение записано в проекциях

При этом часто рассматривают по отдельности: $\int_{AB} f(x, y)dx$ и $\int_{AB} g(x, y)dy$

Nota. Связь интегралов I и II рода:

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P, Q)(dx, dy) = \int_L (P, Q)(\cos \alpha, \cos \beta) \frac{ds}{\approx dl} = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) dl$$

Обозначим $\vec{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta)$

По теореме Лагранжа $\exists(\xi, \eta) \in$ элементарной дуге, касательная которой параллельна ds

Тогда $d\vec{s} = \vec{\tau} ds \approx \vec{\tau} dl$, где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, касательной в (ξ, η)

Тогда $\int_L Pdx + Qdy \xrightarrow{\text{пред. в вект. форме}} \int_L \vec{F} \vec{\tau} dl = \int_L \vec{F} \underbrace{\vec{dl}}_{\text{ориент. эл. дуги}}$

Свойства:

Nota. Свойства, не зависящие от прохода дуги, аналогичны свойствам определенного интеграла

- Направление обхода:

I рода:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl$$

II рода:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy$$

Def. Часто рассматривают замкнутую дугу, называемую контур. Тогда интегралы обозначаются так: $\oint_K f dl$ и $\oint_K Pdx + Qdy$.

Если K (контур) обходят против часовой стрелки, то обозначают \oint_{K^+} , иначе \oint_{K^-}

Вычисление сводится к $\int_a^b dx$ или $\int_\alpha^\beta dy$ или $\int_\tau^T dt$

1. Параметризация дуги L :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \varphi, \psi \in C^1_{[\tau, T]} \quad \begin{aligned} A(x_A, y_A) &= (\varphi(\tau), \psi(\tau)) \\ B(x_B, y_B) &= (\varphi(T), \psi(T)) \end{aligned}$$

При этом задании L $y = y(x), x \in [a, b]$ или $x = x(y), y \in [\alpha, \beta]$ – частные случаи параметризации

2. I рода:

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y) dl &= \left[dl = \sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2} |dt| \right] = \\ &= \int_\tau^T f(t) \sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2} |dt| \end{aligned}$$

II рода:

$$\begin{aligned} \int_{L=AB} P dx + Q dy &= [dx = \varphi_t' dt, dy = \psi_t' dt] = \\ &= \int_\tau^T (P \varphi' + Q \psi') dt \end{aligned}$$

Ех. Дуга L – отрезок прямой от $A(1, 1)$ до $B(3, 5)$. Вычислим $\int_{AB} (x + y) dl$ двумя способами:

$$1. \int_{AB} (x + y) dl = \left[\begin{array}{l} AB: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} \\ \text{или } y = 2x - 1, x \in [1, 3] \\ f(x, y) = x + 2x - 1 = 3x - 1 \\ dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{5} dx \end{array} \right] = \int_1^3 (3x - 1) \sqrt{5} dx = \sqrt{5} \left(\frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_1^3 = \sqrt{5} (12 - 2) = 10\sqrt{5}$$

$$2. \int_{AB} (x + y) dx + (x + y) dy = \left[\begin{array}{l} x \uparrow_1^3, y \uparrow_1^5 \\ y = 2x - 1, x = \frac{y+1}{2} \\ dx = dx, dy = dy \end{array} \right] = \int_1^3 (x + 2x - 1) dx + \int_1^5 \left(\frac{y+1}{2} + y \right) dy = \left(\frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_1^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{3y^2}{2} + y \right) \Big|_1^5 = 10 + 20 = 30$$

Th. Формула Грина

Пусть дана область $D \subset \mathbb{R}^2$, которая обходится в правильном направлении ($\uparrow Ox, \uparrow Oy$)

K – гладкая замкнутая кривая (контур), которая ограничивает D

В области D действует $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ – непрерывные дифференциалы

Тогда $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{K^+} P dx + Q dy$

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \\ &\int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_\alpha^\beta \left(Q(x, y) \Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} \right) dy - \int_a^b \left(P(x, y) \Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} (Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)) dy - \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx = \int_{NST} Q dy - \int_{NMT} Q dy - \\
& \int_{MTS} P dx + \int_{MNS} P dx = \underbrace{\int_{NST} Q dy + \int_{TMN} Q dy}_{\oint_{K^+} Q dy} + \underbrace{\int_{STM} Q dy + \int_{MNS} Q dy}_{\oint_{K^+} P dx} = \oint_{K^+} P dx + Q dy
\end{aligned}$$