

## 5.4. Замена переменной в двойном и тройном интегралах

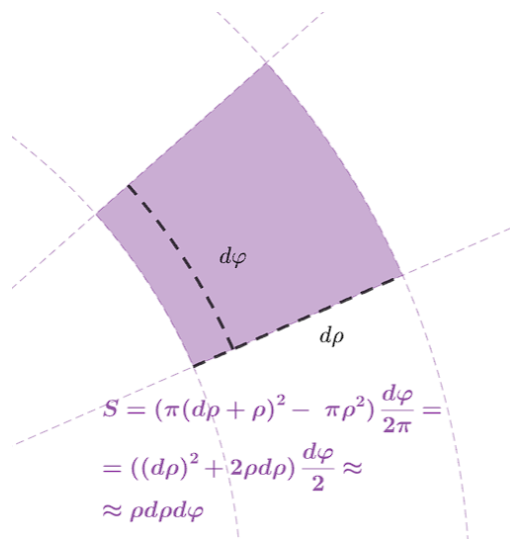
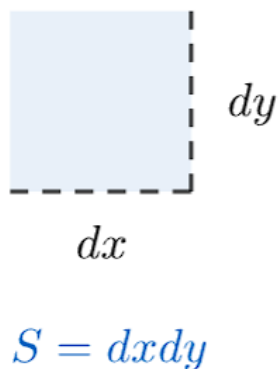
Проблема: для  $S = \iint_D dx dy$ , если  $S_{D'} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho = \iint_{D'} d\rho d\varphi$ , то это не площадь круга, а площадь прямоугольника  $S$  в распрямленных координатах

Введем  $\Delta s_i$  – площадь кольцевого сектора в полярных координатах, а  $\Delta s'_i$  – площадь прямоугольника, причем  $\Delta s_i \neq \Delta s'_i$

*Nota.* Будем искать поправочный коэффициент так, чтобы  $\Delta s_i \approx \text{коэфф.} \cdot \Delta s'_i$

Дроблению будем подвергать область  $D'$  в распрямленной системе координат

Введем новые криволинейные координаты:  $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ , где функции  $\varphi(u, v), \psi(u, v)$  непрерывно дифференцируемы по обоим аргументам



Заменим криволинейный параллелограмм  $ABCD$  на обычный, стянув вершины хордами (погрешность в площади – бесконечно малая более высокого порядка, чем площадь)

$$A = (x_A, y_A) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

$$B = (x_B, y_B) = (\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v))$$

$$C = (x_C, y_C) = (\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v))$$

$$D = (x_D, y_D) = (\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v))$$

$$\text{Площадь параллелограмма } S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \theta = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

$$\Delta s = S_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_D - x_A & y_D - y_A & 0 \end{vmatrix} = \left| \vec{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix} \right|$$

$$x_B - x_A = \varphi(u, v + \Delta v) - \varphi(u, v) = \Delta_v \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v$$

$$y_B - y_A = \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u, v) = \Delta_v \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v$$

$$x_D - x_A = \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v) = \Delta_u \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u$$

$$y_D - y_A = \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v) = \Delta_u \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u$$

$$\left| \vec{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \frac{|\Delta s'|}{|\Delta v \Delta u|} \stackrel{\det = |J|}{\implies} \Delta s \approx |J| \Delta s'$$

*Nota.* В пределе это точное равенство:  $|J| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}$

Это легко понять, если считать частные приращения по теореме Лагранжа  $\Delta_u \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\xi, \eta) \Delta u \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \Delta u$

**Def.** Определитель  $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$ , где  $\begin{cases} x_1 = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{cases}$  – преобразование координат

$Ox_i \rightarrow O\xi_i$  ( $f_k \in C_D^1$ ), называется определителем Якоби или якобиан

### Построение интеграла:

1. Дробление  $D'$  в распрямленной  $Ouv$
2. Выбор средней точки, поиск значения  $f(\xi_i, \eta_i)$   
Значение величины на элементе  $f(\xi_i, \eta_i)|J|dudv$
3. Интегральная сумма  $\sigma_n = \sum f(\xi_i, \eta_i)|J|dudv$
4. В пределе интеграл  $\iint_D f(x, y)dx dy = \iint_{D'} f(u, v)|J|dudv$

### Якобианы в ПСК, ЦСК, СФСК

$$1. \text{ ПСК: } \begin{cases} x = \rho \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \\ y = \rho \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$$

$$2. \text{ ЦСК: } \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$$3. \text{ СФСК: } \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \quad J = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\rho \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \theta +$$

$$\rho \sin \varphi \sin \theta (-\rho \sin \varphi \sin^2 \theta - \rho \sin \varphi \cos^2 \theta) - \rho^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \theta = -\rho^2 (\cos^2 \varphi \sin \theta + \sin^2 \varphi \sin \theta) = -\rho^2 \sin \theta$$

$$|J| = \rho^2 \sin \theta$$

Ех. Тело  $T$ , ограниченное уравнениями  $x^2 + y^2 = z^2$   
 $x^2 + y^2 = z$

Конус в ЦСК:  $\rho = z, z > 0$

Параболоид в ЦСК:  $\rho = \sqrt{z}, z > 0$

$$V_T = \iiint_T dx dy dz = \iiint_{T'} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} \rho dz = 2\pi \int_0^1 \rho z \Big|_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = 2\pi \left( \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$$

Lab. Тело  $T$ , ограниченное уравнениями  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$   
 $\sqrt{x^2 + y^2} = z$  – «мороженка», считать в СфСК

## 5.5. Криволинейные интегралы

Для криволинейных интегралов I рода область интегрирования – кривая  $l = \widehat{AB}$  (дуга). Для простоты начнем с плоской дуги

На  $l$  действует скалярная функция  $f(x, y)$  (физический смысл – плотность, то есть имеем неоднородный кривой стержень)

Задача в нахождении «суммарной» величины  $f(x, y)$ , то есть интеграла: «складываем» элементы  $f_{\text{ср}}(x, y) dl$

Получаем 
$$\int_l f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl$$