1. Основные понятия

1.1. Комплексное число

Мет. $\mathbb{C} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$
Обозначение: $z = (a,b) = a + bi$, где $i = (0,-1) = \sqrt{-1}$
Основные операции:

1. $\mathrm{Re} z = a$ - вещественная часть, $\mathrm{Im} z = b$ - мнимая часть
2. $z_1 + z_2 = (a_1,b_1) + (a_2,b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4. $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ - **формула Муавра**, где $\rho = |z|, \varphi = \arg z$
5. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, где $\rho = |z|, \varphi = \arg z, k \in \mathbb{Z}$
6. При $n = 2$ $\sqrt{z} = \sqrt{a + bi} = \pm(c + di)$, где $c = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, d = \mathrm{sign}(b)\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$

Тригонометрическая форма: картинка
$z = a + bi = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$
$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
По формуле Эйлера $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$

1.2. Комплексная плоскость

Def. Окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ определяется как $U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \;\Big|\; |z - z_0| < \delta\}$
Тогда $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0) = U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ - выколотая окрестность

Def. Для данной множества точек A точка z_0 считается

- внутренней, если для любого δ $U_\delta(z_0) \subset A$
- граничной, если для любого δ $\exists z \in U_\delta(z_0) \Big| z \in A$ и $\exists z \in U_\delta(z_0) \Big| z \notin A$

Def. Открытое множество состоит только из внутренних точек

Def. Закрытое множество содержит все свои граничные точки

Def. Границей Γ_D (иногда обозн. δD) для множества D называют множество всех граничных точек D

Def. Если любые две точки множества можно соединить ломаной линией конечной длины, то множество считается связным

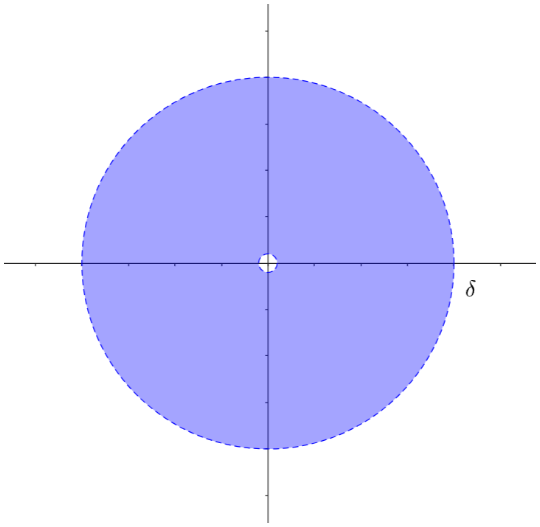
Def. Множество $D \subset \mathbb{C}$ называется областью, если D - открытая и связная

Def. Кривая $l \subset \mathbb{C}$ считается непрерывной, если $l = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \varphi(t) + i\psi(t), t \in \mathbb{R}\}$, где $\varphi(t), \psi(t)$ - непрерывные функции

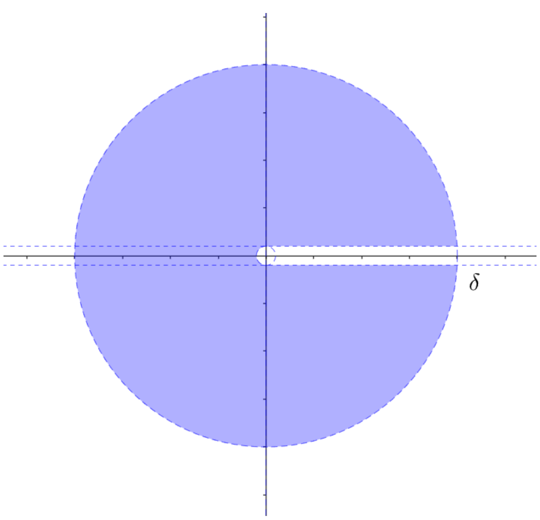
Nota. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и их производные непрерывные, то кривая l гладкая

Def. Непрерывная замкнутая (то есть начальная и конечная точки совпадают) без самопересечений кривая называется контуром

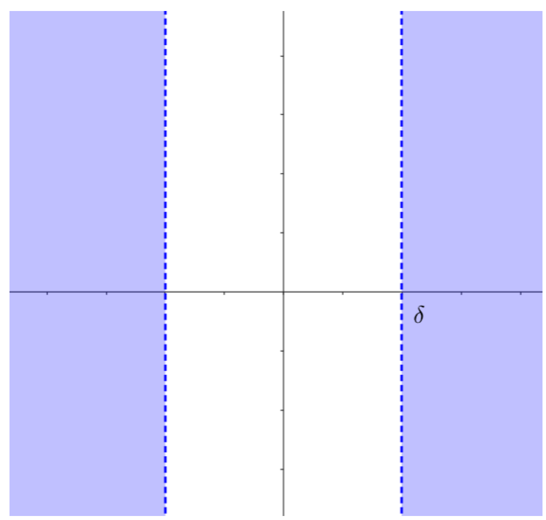
Nota. Односвязную область можно стянуть в точку



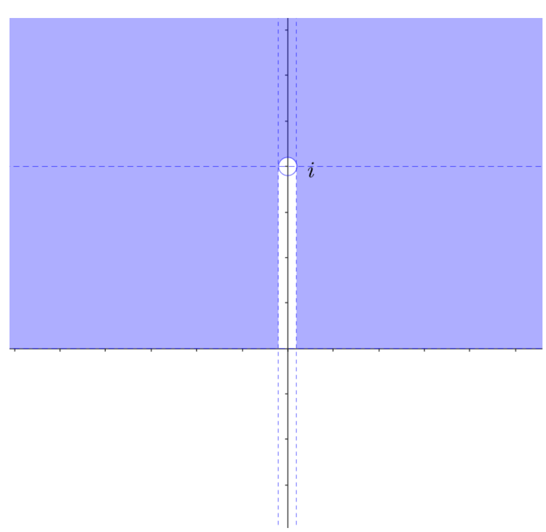
Ex. 1. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < \delta\right\}$ - область связаная, но не односвязная, ее нельзя стянуть из-за дырки



Ex. 2. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < \delta, \arg z \neq 0\right\}$ - область связная и односвязная



Ex. 3. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mathrm{Re} z| < \delta\right\}$ - несвязная область



Ex. 4. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z \geq 0, z \notin [0, i]\}$ - здесь под $[0, i]$ подразумевается линейный отрезок на оси

Nota. Дальше все рассматриваемые Γ_D будут состоять из кусочногладких и изолированных кривых

1.3. Предел

Mem. Последовательность $\{z_n\} = z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$

Def. Пределом $\{z_n\}$ называют число z такое, что
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{n_0 = \mathbb{N}} \mid \forall n > n_0\ |z_n - z| < \varepsilon$
Обозначается $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$

Nota. $\{z_n\}$ можно представить как $x_n + iy_n$, то есть двумя $\mathbb{R}$-последовательностями

Th. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} z_n = \underset{x,y \in \mathbb{R}}{x + iy} \Longleftrightarrow \begin{matrix} \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{Re} z_n = x \\ \exists \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{Im} z_n = y \end{matrix}$

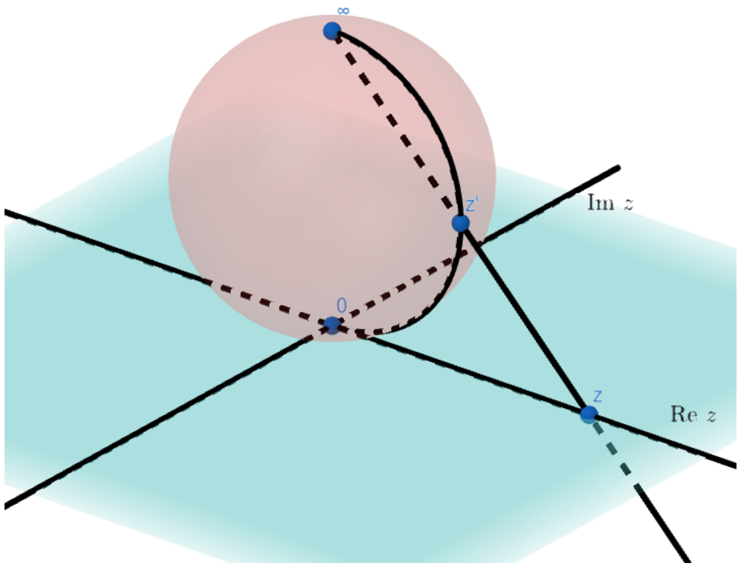
$\boxed{\Longleftarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{n_0 = \max(n_{0x}, n_{0y})}{n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall n > n_0\ \begin{matrix} |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$
$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$
То есть $\forall \varepsilon > 0 \dots |z_n - z| < \varepsilon$

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ |z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} |x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \\ |y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow$
$\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ и $\exists \lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$

Nota. Для комплексных чисел работают теоремы для пределов (сумма пределов, произведение пределов и т.д.), критерий Коши и другие

Def. $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{n_0 \in \mathbb{N}} \mid n > n_0\ |z| > \varepsilon$
Def. Точка z, определенная как предел, равный ∞, называется бесконечно удаленной. Но существует множество последовательностей, чьи пределы удаляются на бесконечность разными путями на плоскости

Def. Стереографическая проекция (сфера Римана)



Поместим сферу на комплексную плоскость и сделаем биекцию точек плоскости на точки сферы: проведем из верхней точки сферы лучи вниз на плоскость, и точка, где луч пересекает сфера, будет считаться отображением для данной точки. Заметим, что в этом случае бесконечно удаленные точки будут отображаться в верхнюю точку сферы

Def. $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ - расширенная комплексная плоскость
Однако $z + \infty$ не определена, $\infty + \infty$ не определена. Но $\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n}$ при $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; $\infty = \infty \cdot \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ при $z_n \longrightarrow z$
Записью $[-\infty; +\infty]$ обозначается ось $\overline{\mathbb{R}}$;
$[-i\infty; +i\infty]$ - мнимая расширенная ось
Путь $x \pm i\infty$ при фикс. x - вертикальная прямая;
$iy \pm \infty$ - горизонтальная прямая;
$e^{i\varphi} \cdot \infty$ - прямая, проходящая через начало координат