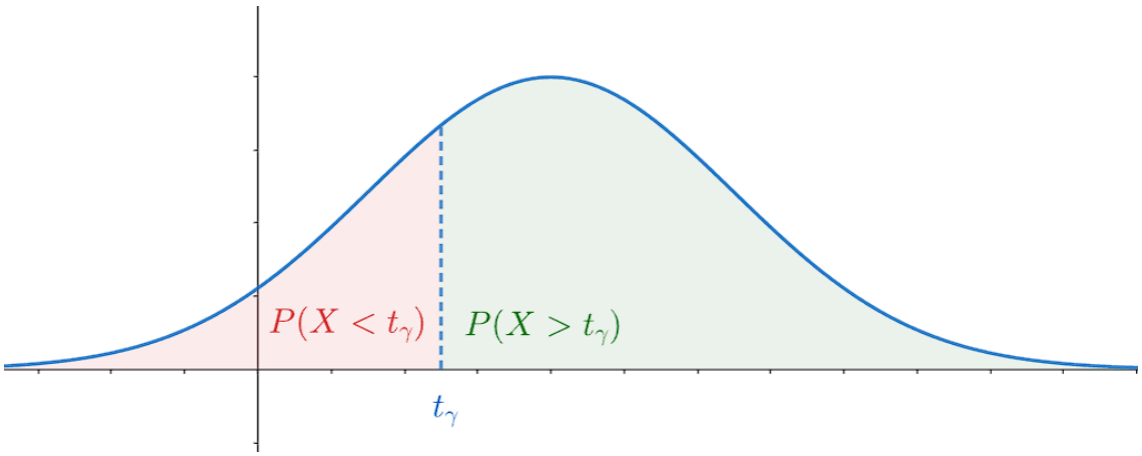
Лекция 5.

Квантильное распределение

Предполагаем, что распределение абсолютно непрерывное и $F(x)$ - фунцкия распределения

Def. 1. Число t_γ называется квантилем распределения уровня γ, если значения функции распределения $F(t_\gamma) = \gamma$ или $P(X < t_\gamma) = \gamma$ $(t_\gamma = F^{-1}(\gamma))$



Ex. Медиана - квантиль уровня $\frac{1}{2}$

Def. 2. Число t_α называется квантилем уровня значимости α, если $P(X > t_\alpha) = \alpha$ или $F(t_\alpha) = 1 - \alpha$
Ясно, что $\gamma = 1 - \alpha$

Интервальные оценки

Недостатки точечных оценок - неизвестно насколько они далеки от реального значения параметра и насколько им можно доверять. Особенно это заметно при малых выборках. Поэтому мы указываем интервал, в котором лежит этот параметр с заданной вероятностью (надежностью) γ. Такие оценки называются интервальными (доверительными)

Def. Интервал $(\theta_\gamma^-; \theta_\gamma^+)$ называется доверительным интервалом параметра θ надежности γ, если вероятность $P(\theta_\gamma^- < \theta < \theta_\gamma^+) = \gamma$

Nota. Если имеем дискретную случайную величину, то $P(\theta_\gamma^- < \theta < \theta_\gamma^+) \geq \gamma$
Nota. Так как параметр θ - константа, то бесмысленно говорить о его попадании в интервал. Правильно: доверительный интервал накрывает параметр θ с вероятностью γ

Nota. 1. $\alpha = 1 - \gamma$ называется уровнем значимости доверительного интервала

Nota. 2. Обычно пытаются строить симметричный доверительный интервал относительно несмещенной оценки θ^*

Nota. 3. Возникает вопрос, какой уровень γ выбрать для исследования. Стандартные уровени надежности γ: $0.9,\ 0.95,\ 0.99,\ 0.999$. Самый мейнстримный - 0.95. В малых выборках используют 0.9

Вспомним основную теорему:

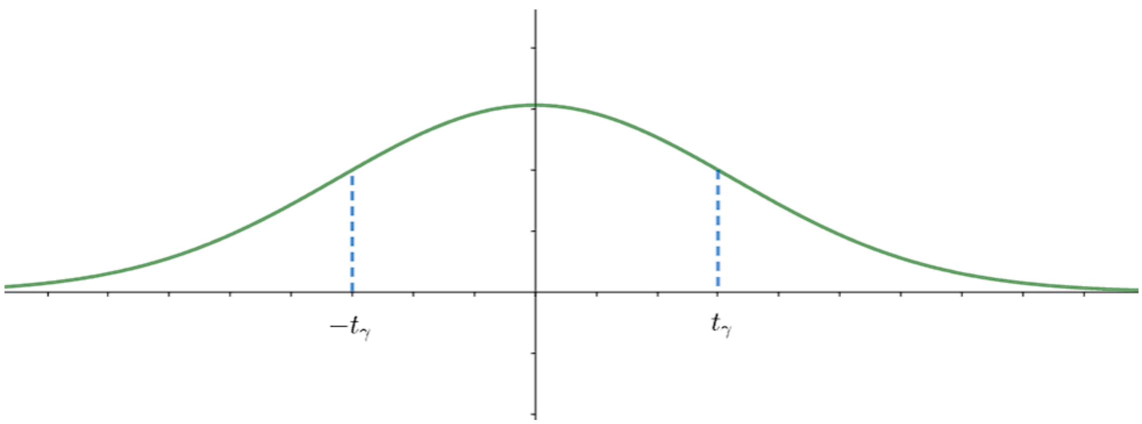
$\exists (X_1, \dots, X_n)$ - выборка объема n из $N(\alpha, \sigma^2)$

$\overline{x}$ - выборочное среднее, S^2 - исправленная дисперсия, D^* - выборочная дисперсия

Тогда:

1. $\sqrt{n}\dfrac{\overline{x} - a}{\sigma} \in N(0, 1)$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{X_i - a}{\sigma}\right)^2 = \dfrac{n\tilde{\sigma^2}}{\sigma^2} \in H_n$, где $n\tilde{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{X_i - \overline{x}}{\sigma}\right)^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{nD^*}{\sigma^2} \in H_{n-1}$
4. $\sqrt{n}\dfrac{\overline{x} - a}{S} \in T_{n-1}$
5. $\overline{x}$ и S^2 - независимы

Nota. Если $F(x)$ - функция симметричного относительно $x = 0$ распределения, то $P(|X| < t) = 2F(t) - 1$



Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Пусть $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ - выборка объема n из $N(a, \sigma^2)$. Хотим найти интервалы для параметров a и σ^2

I. Доверительный интервал для параметра a при известном значении σ^2

По пункту 1 из теоремы $\sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{\sigma} \in N(0,1)$

$P\left(-t_\gamma < \sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{\sigma} < t_\gamma\right) = P\left(\left|\sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{\sigma}\right| < t_\gamma\right) = 2F_0(t_\gamma) - 1 = \gamma$

$F_0(t_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2} \Longrightarrow t_\gamma$ - квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ для $N(0,1)$, где $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

Решая неравенство, получаем $-t_\gamma < \sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{\sigma} < t_\gamma$

$-t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{x} - a < t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\overline{x} - t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ - симметричный интервал относительно $\overline{x}$

Доверительный интервал надежности γ: $\left(\overline{x} - t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где t_γ - квантиль $N(0,1)$ уровня $\frac{1+\gamma}{2}$

II. Доверительный интервал для параметра a при неизвестном σ^2

Из пункта 4 из теоремы $\sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{S} \in T_{n-1}$

$P\left(-t_\gamma < \sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{S} < t_\gamma\right) = P\left(\left|\sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{S}\right| < t_\gamma\right) = 2F_{T_{n-1}}(t_\gamma) = \gamma$

$F_{T_{n-1}}(t_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2} \Longrightarrow t_\gamma$ - квантиль T_{n-1} уровня $\frac{1+\gamma}{2}$

Аналогично с примером выше получаем интервал $\left(\overline{x} - t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$, где t_γ - квантиль T_{n-1} уровня $\frac{1+\gamma}{2}$

III. Доверительный интервал для параметра σ^2 при неизвестном a

По пункту 3 из теоремы $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{x}}{\sigma}\right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{nD^*}{\sigma^2} \in H_{n-1}$

Пусть χ_1^2 и χ_2^2 - квантили H_{n-1} уровней $\frac{1-\gamma}{2}$ и $\frac{1+\gamma}{2}$

Тогда $P\left(\chi_1^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = F_{H_{n-1}}(\chi_1^2) - F_{H_{n-1}}(\chi_2^2) = \frac{1-\gamma}{2} - \frac{1+\gamma}{2} = \gamma$

$\chi_1^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_2^2$

$\frac{1}{\chi_2^2} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\chi_1^2}$

$\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}$ или $\frac{nD^*}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{nD^*}{\chi_1^2}$

Получаем интервал $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right)$, где χ_1^2 и χ_2^2 - квантили H_{n-1} уровней $\frac{1-\gamma}{2}$ и $\frac{1+\gamma}{2}$

Nota. Данный интервал не симметричен относительно неизвестного параметра σ^2

IV. Доверительный интервал для параметра σ^2 при известном a

По пункту 2 из теоремы $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - a}{\sigma}\right)^2 = \frac{n\tilde{\sigma^2}}{\sigma^2} \in H_{n-1}$

Пусть χ_1^2 и χ_2^2 - квантили H_n уровней $\frac{1-\gamma}{2}$ и $\frac{1+\gamma}{2}$

Тогда $P\left(\chi_1^2 < \frac{n\tilde{\sigma^2}}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = F_{H_n}(\chi_1^2) - F_{H_n}(\chi_2^2) = \frac{1-\gamma}{2} - \frac{1+\gamma}{2} = \gamma$

Аналогично получаем интервал $\left(\frac{n\tilde{\sigma^2}}{\chi_2^2}, \frac{n\tilde{\sigma^2}}{\chi_1^2}\right)$, где χ_1^2 и χ_2^2 - квантили H_n уровней $\frac{1-\gamma}{2}$ и $\frac{1+\gamma}{2}$, $n\tilde{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$

Nota. $\tilde{\sigma^2} - D^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2aX_i + a^2 - X_i^2 + 2\overline{x}X_i - \overline{x}^2) = \frac{1}{n}(na^2 - 2an\overline{x} + 2\overline{x}\cdot n\overline{x} - n\overline{x}^2) = a^2 - 2a\overline{x} + \overline{x}^2 = (a - \overline{x})^2 \Longrightarrow \tilde{\sigma^2} = D^* + (a - \overline{x})^2$

Получаем $\left(\frac{n(D^* + (a - \overline{x})^2)}{\chi_2^2}, \frac{n(D^* + (a - \overline{x})^2)}{\chi_1^2}\right)$

Асимптотические доверительные интервалы

Def. Интервал $(\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+)$ называется асимптотическим доверительным интервалом параметра θ уровня γ, если $P(\theta_\gamma^- < \theta < \theta_\gamma^+) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$

Ex. Доверительный интервал вероятности события A

Пусть $p = P(A), q = 1 - p, n$ - число испытаний или объем выборки $(X_1, \dots, X_n)$, где $X_i \in \{0, 1\}$

$p^* = \frac{n_A}{n} = \overline{x}$ - оценка p

Согласно Центральной предельной теореме $\sqrt{n}\frac{p^* - p}{DX_1} = \sqrt{n}\frac{p^* - p}{\sqrt{pq}} \rightrightarrows N(0,1)$

Так как $p^* \xrightarrow{p} p$, то $\sqrt{n}\frac{p^* - p}{\sqrt{p^*(1-p^*)}} = \underbrace{\sqrt{n}\frac{p^* - p}{\sqrt{p(1-p)}}}_{\rightrightarrows N(0,1)}\underbrace{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p^*(1-p^*)}}}_{\xrightarrow{p} 1} \rightrightarrows N(0,1)$

$$P\left(\left|\sqrt{n}\frac{p^* - p}{\sqrt{p^*(1-p^*)}}\right| < t_\gamma\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2F_0(t_\gamma) - 1 = \gamma$$

$F_0(t_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2}$, t_γ - квантиль $N(0,1)$ уровня $\frac{1+\gamma}{2}$

Получаем $\left|\sqrt{n}\frac{p^* - p}{\sqrt{p^*(1-p^*)}}\right| < t_\gamma$

$|p^* - p| < t_\gamma\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}$

Итак, $\left(-t_\gamma \frac{\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}}{\sqrt{n}}, t_\gamma \frac{\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}}{\sqrt{n}}\right)$, где t_γ - квантиль $N(0,1)$ уровня $\frac{1+\gamma}{2}$