Nota. Изоморфизм $E^n \to E'^n$ позволяет переносить свойства скалярного произведения из одного в другое пространство

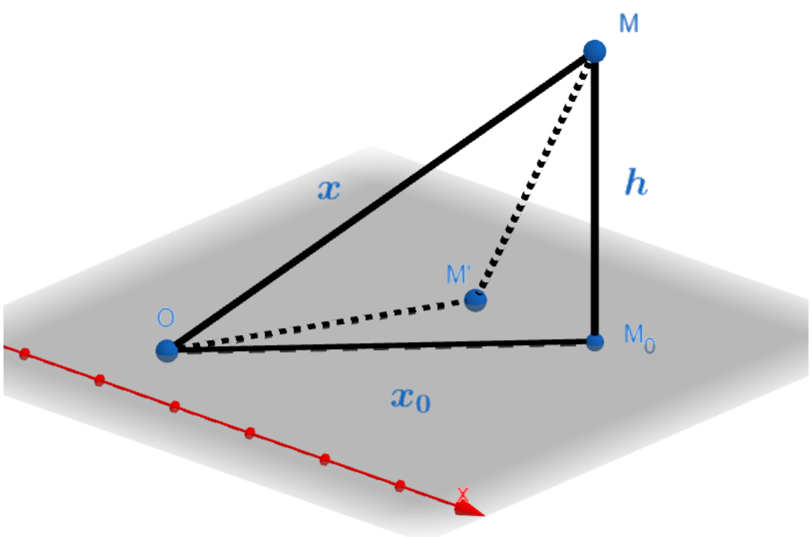
Ex. $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$ - арифметические векторы со скалярным произведением $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$E'^n \in C_{[a;b]}$ со скалярным произведением $(f,g)=\int_a^b f\cdot g dx$

$$\sqrt{\int_a^b (f\cdot g)^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2 dx} + \sqrt{\int_a^b g^2 dx}$$

1.4. Задача о перпендикуляре

Постановка: Нужно опустить перпендикуляр из точки пространства E^n на подпространство G



Точка M - конец вектора x в пространстве E^n. Нужно найти M_0 (конец вектора x_0, проекции x на G), причем $x_0+h=x$, где $h\perp G$. Правда ли что, длина перпендикулярного вектора h - минимальная длина от точки M до G?

Th. $h\perp G, x_0\in G, x=x_0+h$. Тогда $\forall x'\in G (x'\ne x_0)\quad \|x-x'\|>\|x-x_0\|$

$$\|x-x'\|=\|x-x_0+x_0-x'\| \overset{\text{по теореме Пифагора}}{=\!=} \|x-x_0\|+\|x_0-x'\|=\|h\|+\|x_0-x'\|>\|x-x_0\|$$

Nota. x_0 называется ортогональной проекцией, возникает вопрос о ее вычислении (так находятся основания перпендикуляров)

Алгоритм: представим $x_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k$, $\{e_i\}_{i=1}^k$ - базис G (необязательно ортонормированный)

Дан вектор x, пространство G, нужно найти λ_i

$h = x - x_0$, $h \perp G \quad (h, e_i) = 0$, так как $h \perp e_i\ \forall i$

$(x - x_0, e_i) = (x, e_i) - (x_0, e_i) = 0 \Longrightarrow (x, e_i) = (x_0, e_i)$

Тогда $\forall i\ (x_0, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \dots + \lambda_k (e_k, e_i)$. Здесь (e_k, e_i) - числа, а λ_i - неизвестные переменные. Из этого получаем СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_k, e_1) & (e_k, e_2) & \dots & (e_k, e_k) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \Gamma \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{pmatrix}$$

Nota. В матрице Γ нет нулевых строк, так как e_i - вектор базиса и $e_i^2 \neq 0$

Таким образом по теореме Крамера $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

Def. Матрицу $\Gamma = \{(e_i, e_j)\}_{i,j=1\dots k}$ называют матрицей Грама

В простейшем случае, $\Gamma = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$, если базис ортонормированный

Далее, I - единичная матрица Грама

Nota. Тогда $I \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{pmatrix}$

Приложения задачи о перпендикуляре

1. Метод наименьших квадратов

   В качестве простейшей модели зависимости $y = y(x)$ берем линейную функцию $y = \lambda x$

   Ищем минимально отстоящую прямую от данных (x_i, y_i), то есть ищем λ

   Определим расстояние (в этом методе) как $\sigma^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - y_{0i})^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \lambda x_i)^2$ - наша задача состоит в минимизации этой величины[1]

   Таким образом, ищем y_0 (ортогональная проекция) такой, что $(y - y_0)^2 = \sigma^2$ минимальна.

   Найдем производную функции $\sigma^2(\lambda)$:

   $\left(\sigma^2(\lambda)\right)' = \sum\limits_{i=1}^{n} (2\lambda x_i^2 - 2x_i y_i) = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

   Отсюда получаем $\lambda = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

[1] Эта величина также известна как *дисперсия*

В общем случае для аппроксимирующей функции $f(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ с k неизвестными параметрами составляем $\sigma^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i, \lambda_1, \ldots, \lambda_k))^2$,

решаем систему $\begin{cases} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \sigma^2}{\partial \lambda_k} = 0 \end{cases}$ и получаем $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$

2. Многочлен Фурье
   $P(t) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots a_n \cos nt + b_n \sin nt$ - линейная комбинация
   Функции $1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt$ - ортогональны
   Задача в том, чтобы для функции $f(t)$, определенной на отрезке $[0; 2\pi]$, найти минимально отстоящий многочлен $P(t)$ при том, что расстояние определяется как $\sigma^2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} (f(t) - P(t))^2 dt$
   Нужно найти a_i и b_i - обычные скалярные произведения $a_i = k \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cos(it) dt$, $b_i = m \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \sin(it) dt$ (k, m - нормирующие множители)

2. Линейный оператор

2.1. Определение

Def. *Линейный оператор* - это отображение $V^n \overset{\mathcal{A}}{\Longrightarrow} W^m$ (V^n, W^m - линейные пространства размерностей $n \neq m$ в общем случае), которое $\forall x \in V^n$ сопоставляет один какой-либо $y \in W^m$ и $\boxed{\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \mathcal{A} x_1 + \mu \mathcal{A} x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2}$

Nota. Заметим, что если 0 представим как $0 \cdot x$, где $x \neq 0$, то $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(0 \cdot x) = 0 \cdot \mathcal{A}x \overset{0 \cdot y}{=} 0$
Nota. Если $V = W$, то $\mathcal{A}$ называют линейным преобразованием, но далее будем рассматривать в основном операторы $\mathcal{A}: \quad V \to V$, $\mathcal{A}: \quad V^n \to W^n$

Ex. 1. $V = \mathbb{R}^2$ - пространство направленных отрезков
$\mathcal{A}: V \to V$
$\mathcal{A}x = y = \lambda y_1 + \mu y_2$ для таких $\mathcal{A}$ как сдвиг, поворот, гомотетия, симметрия

Ex. 2. $V^n = W^m$, где $m < n$
$\mathcal{A}$ - оператор проектирования (убедиться, что он линейный)

Ex. 3. V^n - пространство числовых строк длины n
$\mathcal{A}: V^n \to V^n$
$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$
Выражение $\mathcal{A}x = y$ можно представить как $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} x = y$

2.2. Действия с операторами

Def. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V \to W$, тогда определены операции:

1. Сумма операторов: $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x \overset{def}{=} \mathcal{A}x + \mathcal{B}x = \mathcal{C}x$
2. Произведение оператора на число: $(\lambda \mathcal{A})x \overset{def}{=} \lambda(\mathcal{A}x)$ - $\lambda \mathcal{A} = \mathcal{D}x$

Nota. Сформируем линейное пространство из операторов $\mathcal{A}: V \to W$

1. Ассоциативность сложения (очевидно)
2. Коммутативность (очевидно)
3. Нейтральный элемент $\mathcal{O}x = 0$
4. Противоположный: $-\mathcal{A} = (-1) \cdot A$

5. ...<u>Lab. </u>

Def. $\mathcal{I}$ - тождественный оператор, если $\forall x \in V\ \mathcal{I}x = x$