

Вычислительная геометрия

1. Преобразование изображений. Геометрическое моделирование

1.1 Основные понятия

Мет. Линейное пространство – это множество векторов V с определенными операциями сложения $+$ и умножения на число $\cdot \lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, которые удовлетворяют свойствам:

1.-4. свойства абелево-аддитивной группы:

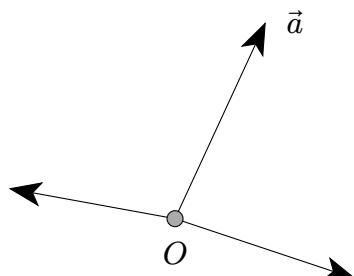
1. $x + y = y + x$ для $x, y \in V$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ для $x, y, z \in V$
3. Существует такой 0 , что $x + 0 = x$ для $x \in V$
4. Для любого $x \in V$ существует такой $-x$, что $x + (-x) = 0$
5. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ для $x \in V$
6. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ для $x \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ для $x \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ для $x, y \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

В общем случае умножение определено на комплексное число, но мы будем рассматривать вещественные

Def. Линейная комбинация векторов x, y, z, \dots называется сумма $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \dots$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1.2 Модели линейных пространств

Геометрическое



Линейное пространство – направленные отрезки с общим началом

Арифметическое

$$x = (x_1, x_2) \text{ в } \mathbb{R}^2$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \text{ в } \mathbb{R}^3$$

В общем случае $x = (x_1, \dots, x_n)$ в \mathbb{R}^n

Линейное пространство – множество упорядоченных совокупностей n чисел

Между этими моделями вводится изоморфизм с помощью базиса, например, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда всякий геометрический вектор можно преобразовать в арифметический и наоборот: $\vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} = (x_1, x_2)$

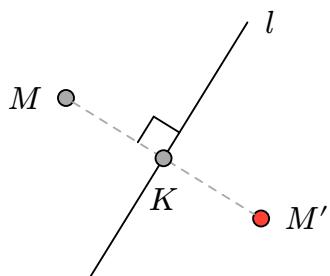
1.3 Геометрические преобразования

Def. Геометрическое преобразование – это биекция, которая переводит пространство Ω в себя

Def. Движение – геометрическое преобразование, сохраняющее расстояние между двумя любыми точками (изометрия)

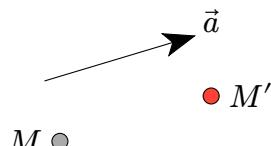
Виды движения на плоскости \mathbb{R}^2 :

1. Осевая симметрия S_l относительно оси l



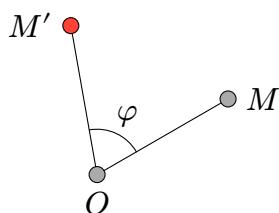
$$M' = S_l(M) \text{ так, что } \begin{cases} MM' \perp l \\ MK = KM' \end{cases}$$

2. Перенос $T_{\vec{a}}$ на вектор \vec{a}



$$M' = T_{\vec{a}}(M) \text{ так, что } \overrightarrow{MM'} = \vec{a}$$

3. Поворот R_O^φ относительно точки O на ориентированный угол φ



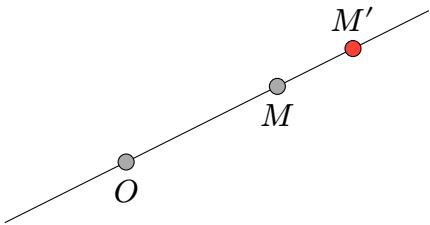
$$M' = R_O^\varphi(M) \text{ так, что } \begin{cases} \angle(MOM') = \varphi \\ OM = OM' \end{cases}$$

Традиционно принимаем положительный угол за поворот против часовой стрелки

Def. Конформное преобразование – преобразование, сохраняющее углы

Виды конформных преобразований на плоскости \mathbb{R}^2 :

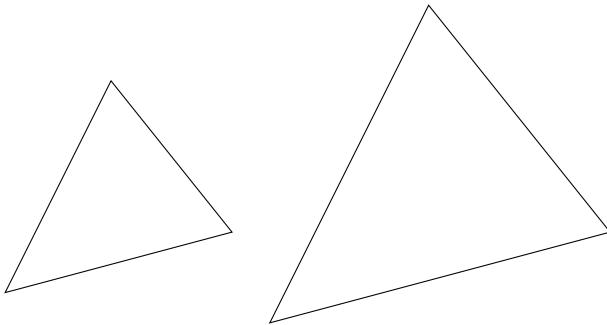
1. Гомотетия H_O^k относительно точки O с коэффициентом $k \in \mathbb{R}$



$$M' = H_O^k(M) \text{ так, что } \begin{cases} M' \in OM \\ \frac{OM'}{OM} = k \end{cases}$$

Nota. Если $k < 0$, то точки M и M' будут по разные стороны от точки O

2. Подобие P_k с коэффициентом k – композиция движения и гомотетии $P_k = F \circ H_O^k$ (здесь $(f \circ g)(x) = f(g(x))$)



1.4 Линейные операторы

Def. Линейный оператор \mathcal{A} – отображение $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ (в общем случае $\mathcal{A} : V \rightarrow W$), для которого соблюдаются свойства:

1. $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$

Если для V определен базис $\varepsilon_V = \{e_1, \dots, e_n\}$, а для W базис $\varepsilon_W = \{e'_1, \dots, e'_m\}$, то действие оператора можно представить так:

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{A}(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m \mu_j e'_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} e'_j$$

Def. Матрица $A = \{a_{ij}\}_{i=1..n, j=1..m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется матрицей оператора

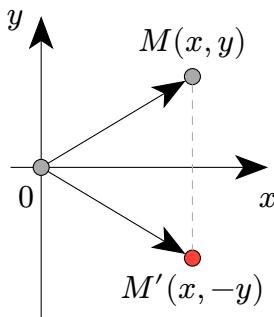
$$\mathcal{A} : V \rightarrow W$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}x = y \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Найдем матрицы геометрических преобразований на \mathbb{R}^2

1. Осевая симметрия S_l

Чаще всего на практике используются S_{Ox} и S_{Oy}



Для S_{Ox} это матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

А для Oy это $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

2. Перенос T_a на вектор

Перенос точки на вектор выносит ее из линейного пространства, где точки имеют общее начало, поэтому перенос не является линейным оператором: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

3. Поворот

Активным преобразованием называется поворот плоскости, а пассивным – поворот системы координат. Такие преобразования взаимно обратны

Тогда поворот системы координат задается матрицей $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

А поворот плоскости задается обратной матрицей $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

4. Гомотетия

Для гомотетии H_O^k матрица оператора равна $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

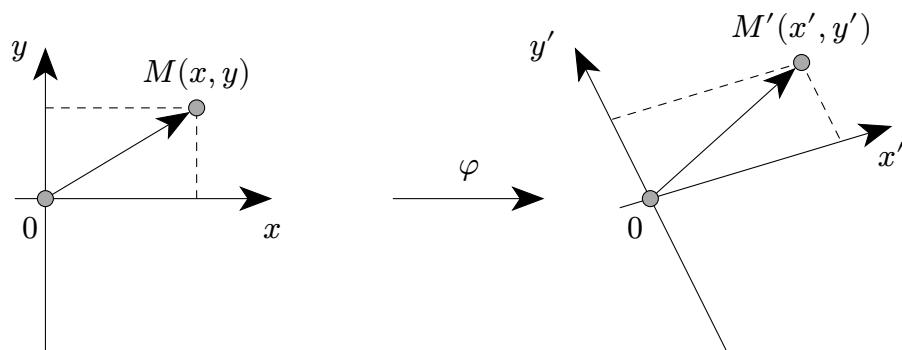
1.5 Аффинное преобразование

Def. 1. Преобразование $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется аффинным преобразованием, если φ – биекция, и для всяких точек на прямой $A, B, C \in l$ справедливо, что $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \in \varphi(l)$ и $\frac{AB}{BC} = \frac{\varphi(A)\varphi(B)}{\varphi(B)\varphi(C)}$

Nota. Аффинное преобразование не сохраняет углы и расстояния, но сохраняет параллельность

Nota. Кроме этого все треугольник аффинно-эквивалентны, то есть один треугольник можно перевести в любой другой с помощью аффинного преобразования

Def. 2. Преобразование φ – аффинное преобразование, если оно переводит одну систему координат в другую систему координат



Мет. Система координат – это определенные точка отсчета, координатная сетка, порядок осей и единичные отрезки

Для дальнейшего нам потребуются уравнения прямых:

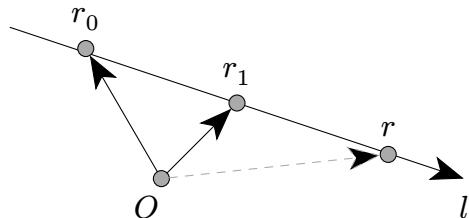
1. По двум точкам на плоскости:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0$$

2. По коэффициентам на плоскости:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$$

3. Векторное: $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}t$, где t – параметр



$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t$$