5. Интеграл ФНП

5.1. Общая схема интегрирования

Постановка задачи.

В некоторой области Ω (дуга кривой, участок поверхности, тело и т. д.) распределена или действует непрерывно некоторая функция скалярная g или векторная $\vec{G}$, то есть определены $g(M)$ или $\vec{G}$ $\forall M \in \Omega$

Ex. Область Ω – дуга кривой $l: y = y(x)$. Тогда скалярная функция $g(M)$ – плотность в точке M

Ex. Область Ω – трубка в $\mathbb{R}^3$. Тогда векторная величина $\vec{G}(M)$ – скорость жидкой частицы, движущейся по трубке

Из всех векторов $\vec{v}$ (для всех $M \in \Omega$) складывается «поле жидких скоростей»

Ex. Область Ω – кривая, по которой движется точка M под действием силы $\vec{G}(M)$

Задача интегрирования – найти суммарное содержание скалярной величины или действие векторной величины в области Ω

Схема: величины $g(M)$ и $\vec{G}(M)$, меняясь от точки к точке заменяются на квазипостоянные на малых (элементарных) участках $d\omega$

Так как $g(M)$ или $\vec{G}(M)$ должны быть непрерывны на Ω, то на малом участке $d\omega$ их изменение незначительно и значение функции можно считать почти постоянным, приняв за это значение какое-либо среднее $g_{\text{ср.}}(M), \vec{G}_{\text{ср.}}(M)$

Тогда элементарное содержание $g(M)$ в $d\omega$ будет отличаться от среднего содержания, то есть $g_{\text{ср.}} d\omega$ на бесконечно малую большего порядка

Ex. Проиллюстрируем на примере $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

S – площадь по наибольшей границе, σ – площадь по наименьшей границе, $S_{\text{трапеции}}$ – «истинная» площадь

Так как $f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a, b]$, то $\Delta f \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$

Для простоты рассмотрим монотонно возрастающую $f(x)$

Хотим доказать, что $S - S_{\text{трапеции}}$ – бесконечно малая большего порядка, чем $S_{\text{трапеции}}$ или S

$$0 \le S - S_{\text{трапеции}} \le dx\Delta y$$

Сравним $\dfrac{dx\Delta y}{S} = \dfrac{dx\Delta y}{dx f(x+\Delta x)} = \dfrac{\Delta y}{\text{огран.}} \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, таким образом $S - S_{\text{трапеции}} = o(S_{\text{трапеции}})$

Смысл интеграла в случае векторной функции $\overrightarrow{G}(M)$: будем интегрировать только скалярные выражения вида $\vec{G}(M) \cdot d\vec{\omega}$ – скалярное произведение векторов, где $d\vec{\omega}$ - ориентированный элемент $d\omega$

Ex. Сила $\vec{F}(M)$ перемещает точку M вдоль плоской кривой l. При этом сила совершает работу по перемещению (работа A – скалярная величина)
Известна формула для $\vec{F} = \text{const}$ и перемещения $\vec{s}$ по прямой: $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$
Разобьем дугу на элементы $dl \approx ds$ и ориентируем их (зададим направление перемещению ds)
$dl = ds + o(dl)$, $d\vec{s}$ – вектор элементарного перемещения, как правило, ds направлен согласовано с Ox
Элемент работы $dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F_x, F_y) \cdot (dx, dy) \overset{\text{обозн.}}{=} (P, Q) \cdot (dx, dy) = Pdx + Qdy$ – скаляр. Вся работа равна $A = \displaystyle\int dA$

Nota. Ориентированный участок поверхности $d\vec{\sigma}$ – это размер участка $d\sigma$, умноженный на вектор нормали к участку $\vec{n}$, то есть $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$
Итак, схема интегрирования:

1* Дробление области Ω на элементы $d\omega$
2* Выбор постоянного значения функции на $d\omega$, то есть $g_{\text{ср.}}$ или $\vec{G}_{\text{ср.}}$
3* Составление подынтегрального выражения $g_{\text{ср.}} d\omega$ или $\vec{G}_{\text{ср.}} d\vec{\omega}$
4* «Суммирование» элементарных величин $\displaystyle\int g d\omega$ или $\displaystyle\int \vec{G} d\vec{\omega}$

5.2. Классификация интегралов

1* По размерности Ω

$n = 1$:	прямая (определенный интеграл $\int_a^b$)	кривая (криволинейный интеграл $\int_A^B$)
$n = 2$:	плоскость (двойной интеграл $\iint_D$)	поверхность, криволинейная (поверхностный интеграл $\iint_S$)
$n = 3$:	пространство $\mathbb{R}^3$ (тройной $\iiint_V$ или $\iiint_T$)	

2* По виду функции

	Скалярная $g(M)$ (I рода)	Векторная $\vec{G}(M)$ (II рода)
$n = 1$:	определенный, криволинейный I рода	криволинейный II рода (интегралы в проекциях)
$n = 2$:	двойной, поверхностный I рода	поверхностный II рода
$n = 3$:	тройной	