1. Евклидовы пространства

1.1. Скалярное произведение

Пусть L - линейное пространство (ЛП). Тогда $\forall x, y \in L$ величину $\underset{x,y \to c \in \mathbb{R}}{c = (x,y)}$ будем называть скалярным произведением

1. $(x,y) = (y,x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x,y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(x+z, y) = (x,y) + (z,y)$
4. $\forall x \in L \ (x,x) \geq 0$ и $(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

Nota. Если векторы и коэффициенты комплексно-значные, то определения будут другими

Def. Скалярная функция $c = (x,y)$ со свойствами 1-4 называется скалярным произведением элементов x и y

Def. Линейное пространство со скалярным произведением называется <u>Евклидовым</u>

Ex. 1. ЛП - пространство геометрических векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) \overset{def}{=} \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi, & \vec{a}, \vec{b} \neq 0 \\ 0, & \vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0 \end{cases}$$

Ex. 2. $L = C_{[a;b]}$

$$(f(x), g(x)) \overset{def}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Очевидно, что свойства 1-3 выполняются, проверим 4:

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} f(x) = 0$$

Ex. 3. ЛП - пространство числовых строк вида $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$(x,y) = x_1 y_1 + \ldots x_n y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ - сумма произведений компонент

1.2. Свойства евклидова пространства - E

Th. Неравенство Коши-Буняковского
$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$

Нетрудно заметить, что:
$(\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x - y, \lambda x) - (\lambda x - y, y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y,y) = \lambda^2(x,x) -$

$2\lambda(x,y)+(y,y)$
Приравняем полученное выражение к 0, получаем квадратное уравнение. Решим относительно λ:
$D=4(x,y)^2-4(x,x)(y,y) \Longrightarrow \frac{D}{4}=(x,y)^2-(x,x)(y,y)$
Так как $(\lambda x-y,\lambda x-y)\geq 0$ (4-ое свойство скалярного произведения), то уравнение имеет ≤ 1 корня, значит $\frac{D}{4}=(x,y)^2-(x,x)(y,y)\leq 0$

1.3. Норма

ЛП $=L, \forall x\in L$ определена функция так, что выполняется $x\longrightarrow n\in\mathbb{R}, n=\|x\|$

1. $\|x\|\geq 0$ и $\|x\|=0\Longrightarrow x=0$
2. $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\| \quad \lambda\in\mathbb{R}$
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\| \quad \forall x,y\in L$ - неравенство треугольника

Евклидово пространство с нормой называется нормированным

Th. E^n является нормированным, если $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$

Свойства 1-2 очевидны, докажем 3 свойство:
$\|x+y\|=\sqrt{(x+y,x+y)}\leq\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}=\|x\|+\|y\|$
$\sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)}\leq\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}$
$(x,x)+2(x,y)+(y,y)\leq(x,x)+(y,y)+2\sqrt{(x,x)(y,y)}$
$(x,y)\leq\sqrt{(x,x)(y,y)}$
$(x,y)^2\leq(x,x)(y,y)$ - верно по неравенству Коши-Буняковского

Обобщим геометрические понятия ортогональности и косинуса угла на случай произвольных векторов

Def. x,y - ортогональны, если $(x,y)=0$ и $x\neq 0$ и $y\neq 0 \quad x\perp y$

Def. $\cos(\widehat{x,y})=\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$ - косинус угла между векторами

Def. $x,y\in E^n, x\perp y$, тогда $z=x+y$ - гипотенуза

Th. $x\perp y$, тогда $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x)^2 + \underbrace{2(x,y)}_{=0, x\perp y} + (y,y)^2 = (x,x)^2 + (y,y)^2$$

Def. $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис L^n

На L^n введены (x,y) и $\|x\|$ (то есть $L^n \to E^n_{\|\cdot\|}$ - нормированное евклидово)

B называют ортонормированным базисом, если $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$

Nota. Докажем, что всякая такая система из n векторов линейно независима (то есть всякая нулевая комбинация тривиальная):

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \forall \lambda_i = 0$$

$$(e_k, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_k, e_i) \overset{k\neq i \Rightarrow (e_k, e_i) = 0}{=\!=} \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k = 0 \quad \forall k$$