Nota. Особое значение имеют симметричные билинейные формы. Если рассмотреть матрицы симметричную билинейную форму как матрицу самосопряженного оператора, то можно найти базис (ортонормированный базис собственных векторов), в котором матрица билинейной формы диагонализируется

Этот базис называется каноническим базисом билинейной формы

3.2. Квадратичные формы

Def. Квадратичной формой называется форма $\mathcal{B}(u,u)$, порожденная билинейной формой $\mathcal{B}(u,v)$

Ex. Поверхность: $u = (x, y), v = (x, y, z)$

$\mathcal{B}(u,u) = b_{11}u_1u_1 + b_{12}u_1u_2 + b_{21}u_2u_1 + b_{22}u_2u_2 = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{21}xy + b_{22}y^2$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(v,v) &= \beta_{11}x^2 + \beta_{12}xy + \beta_{13}xz + \beta_{21}xy + \beta_{22}y^2 + \beta_{23}yz + \beta_{31}xz + \beta_{32}yz + \beta_{33}z^2 \\ &= \beta_{11}x^2 + \beta_{22}y^2 + \beta_{33}z^2 + (\beta_{12} + \beta_{21})xy + (\beta_{23} + \beta_{32})yz + (\beta_{13} + \beta_{31})xz\end{aligned}$$

Mem. Ранее уравнение поверхности второго порядка (без линейной группы, то есть сдвига):

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = c$

Nota. Заметим, что здесь коэффициент a_{ij} соответствуют матрице симметричной билинейной форме:

$$B(v,v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Если диагонализировать $B(v,v)$, то уравнение поверхности приводится к каноническому виду:

$\mathcal{B}(v,v)_{\text{канон.}} = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2$

Поэтому квадратичная форма, соответствующая поверхности второго порядка, рассматривается, как форма, порожденная симметричной билинейной формой

Def. Положительно определенная форма

1) Оператор $\mathcal{A}$ называется положительно определенным, если $\exists \gamma > 0 \mid \forall x \in V \quad (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2$
2) $\mathcal{A}$ называется положительным, если $\forall x \in V,\ x \neq 0 \quad (\mathcal{A}x, x) > 0$

Nota. Можно говорить о положительно определенном операторе $\mathcal{A} : V^n \to V^n$

Th. Определения 1), 2) $\Longleftrightarrow \forall \lambda_i$ - собственное число $\mathcal{A}$, $\lambda_i > 0$

$\boxed{\Longrightarrow}$ λ_i - собственное число, e_i - соответствующий ему собственный вектор

$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \overbrace{\mathcal{A}e_i}^{\lambda_i e_i}, \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\min} c_i^2 = \lambda_{\min} \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \lambda_{\min} \|x\|^2$$

Если $0 < \lambda_{\min} < \lambda_i, \lambda_i \neq \lambda_{\min}$, то $(\mathcal{A}x, x) > 0$

$\boxed{\Longleftarrow}$ 1) $\Longleftrightarrow \exists \gamma > 0 \mid (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall x \in V$ в том числе $x = e_i \neq 0$

$(\mathcal{A}e_i, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) = \lambda_i > 0 \; \forall i$

Nota. $\det A$ инвариантен при замене базиса, $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n > 0$. Тогда $\exists \mathcal{A}^{-1}$

Th. Критерий Сильвестра.

$$\mathcal{A} : V^n \to V^n \text{ - положительно определен} \Longleftrightarrow \forall k = 1..n \; \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

Угловой минор матрицы положительно определенного оператора больше нуля

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\mathcal{A}$ - положительно определен, значит, $\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ собственных векторов. Тогда, $\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_k\}$, $k \leq n$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \Delta_k = \det A_k \overset{inv}{=} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix} > 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Метод математической индукции

$\forall k = 1..n, \Delta_k > 0$, тогда:

1. База: для $k = 1 \quad \mathcal{A}$ - положительно определен

   $\mathcal{A}x = a_{11}x \quad |a_{11}| > 0 \Longrightarrow \mathcal{A}$ - положительно определен
2. Шаг индукции: $\mathcal{A}_{n-1}$ - положительно определен $\Longrightarrow \mathcal{A}_n$ - положительно определен

   $\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе e_i, в этом базисе:

   $$\mathcal{A}_e x = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n \qquad \text{Для } i \leq n-1 \text{ все } \lambda_i > 0$$

   $$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n, \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i\right) = \overbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i^2}^{>0} + \lambda_n c_n^2 \text{ - знак зависит от } \lambda_n$$

$\Delta_n = \underbrace{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}_{>0} \cdot \lambda_n \Longrightarrow \lambda_n > 0 \Longrightarrow (\mathcal{A}x, x) > 0$

Ex. Поверхность: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\mathcal{B}(u,u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_k = 1 > 0 \ \forall k$$

Положительная определенность - наличие экстремума[1]

Def. Оператор $\mathcal{A}$ называется отрицательно определенным, если $-\mathcal{A}$ - положительно определенный

Nota. Для $-\mathcal{A}$ работает критерий Сильвестра: $\Delta_k(-\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k(\mathcal{A}) > 0$

Таким образом, $\mathcal{A}$ - отрицательно определен $\Longleftrightarrow \Delta_k$ чередует знаки

Nota. Аналогично операторам определяются положительно или отрицательно билинейные формы

$$\mathcal{B}(u,v) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i = (\mathcal{A}u, v)$$

Так как $\mathcal{B}(u,v)$ и $\mathcal{B}(u,u)$ - числа, то $\mathcal{B}$ называется положительно определенным, если $\mathcal{B}(u,v) > 0$

Nota. После приведения $\mathcal{B}(u,v)$ к каноническому виду, получаем $\mathcal{B}(u,u)_{\text{канон.}} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$
В общем случае λ_i любого знака, но можно доказать, что количества $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$ постоянны по отношению к способу приведения к каноническому виду (так называемый закон инерции квадратичной формы)

[1] Точнее положительная определенность матрицы Гессе $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$ в критической точке, в которой $\nabla f = 0$, является достаточным условием для наличия в этой точке строгого локального минимума функции