Th. $z: D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2,\ \exists$ непрерывные $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$
Тогда дифференциал функции представим как $\Delta z = Adx + Bdy + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $A, B \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta$ – бесконечно малые

$\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y) = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x+\Delta x, y) + z(x+\Delta x, y) - z(x,y)$
По теореме Лагранжа:
$z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x+\Delta x, y) = z'_y(\eta)\Delta y$
$z(x+\Delta x, y) - z(x,y) = z'_x(\xi)\Delta x$
По теореме о представлении функции ее пределом:
$z'_x(\xi) = \lim\limits_{\substack{\xi \to x \\ (\Delta x \to 0)}} z'_x(\xi) + \alpha$
$z'_y(\eta) = \lim\limits_{\eta \to y} z'_y(\eta) + \beta$
Так как $z'_x(\xi), z'_y(\eta)$ непрерывны, то $\lim\limits_{\xi \to x} z'_x(\xi) = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \lim\limits_{\eta \to y} z'_y(\eta) = \dfrac{\partial z}{\partial y}$
Тогда $\Delta z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y} + \beta\right)\Delta y = \Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$

Заметим, что $\alpha\Delta x$ и $\beta\Delta y$ – бесконечно малые порядка выше, чем $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \iff$
$1 = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta\rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)^2} \quad \left|\dfrac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \le 1, \left|\dfrac{\Delta y}{\Delta\rho}\right| \le 1$
Сравним $\alpha\dfrac{\Delta x}{\Delta\rho} =$ б.м. $\cdot$ огран. $\overset{\Delta\rho \to 0}{\to} 0,\ \dfrac{\beta\Delta y}{\Delta\rho} \overset{\Delta\rho \to 0}{\to} 0$
Функция, приращение которой представимо $\Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(\Delta\rho)$, называется дифференцируемой в точке (x,y), линейная часть приращения называется полным дифференциалом
Обозначение: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

Ex. $z = 3xy^2 + 4\cos xy$
$\dfrac{\partial z}{\partial x} \overset{y=\text{const}}{=} 3y^2 - 4\sin xy \cdot y$
$\dfrac{\partial z}{\partial y} \overset{x=\text{const}}{=} 6xy - 4\sin xy \cdot x$
$dz = (3y^2 - 4y\sin xy)dx + (6xy - 4x\sin xy)dy$

4.3. Правила дифференцирования

Nota. При нахождении $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ (x_i - какая-либо переменная) дифференцирование проводится по правилам для функции одной переменной ($x_j \neq x_i$ считаются константами)
Выпишем более сложные правила

1* Сложная функция

Мет. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Def. Сложная функция двух переменных – $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y), v = v(x, y)$
Формула: Найдем $\dfrac{\partial z(u,v)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z(u,v)}{\partial y}$

Th. $z = z(u, v)$, $u(x, y), v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по x, y
Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}$
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}$

z дифференцируема $\Longleftrightarrow \Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v$
Зададим приращение Δx (представление Δz не должно измениться)
$\Delta_x z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x + v \quad \Big| \cdot \Delta x$
$\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\dfrac{\Delta_x v}{\Delta x}$
По теореме Лагранжа: $\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x}(\xi) \overset{\Delta x \to 0}{\to} \dfrac{\partial u}{\partial x}$
В пределе: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$
Аналогично для $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Nota. Интересен случай $z = z(x, u, v)$, где $u = u(x), v = v(x)$
Здесь z является функцией одной переменной x
Обобщая правило на случай трех переменных, можем записать формулу полной производной, которая имеет смысл
$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{dv}{dx}$

Ex. Пусть $w = w(x, y, z)$ – функция координат, $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ – функции времени
w явно не зависит от времени, тогда $\dfrac{dw}{dt} = w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z$, где v_x – проекция скорости
Если $w = w(x, y, z, t)$, то $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t}(w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z)$

2* Неявная функция одной переменной: пусть $F(x, y(x)) = 0$ – неявное задание $y = y(x)$

Найдем $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy = 0$
Отсюда $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

4.4. Производная высших порядков

Nota. Пусть $z = z(x, y)$ дифференцируема, $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ также дифференцируемы, при этом в общем случае $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f(x, y), \dfrac{\partial z}{\partial y} = g(x, y)$
Тогда определены вторые частные производные

Def. Функция $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial x}$ называется второй частной производной
Функции $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ называются чистыми производными, а $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – смешанными

Th. $z = z(x, y)$, функции $z(x, y), z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ определены и непрерывны в $\overset{\circ}{U}(M(x, y))$
Тогда $z''_{xy} = z''_{yx}$

Введем вспомогательную величину
$\Phi = (z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y)) - (z(x, y + \Delta y) - z(x, y))$
Обозначим $\phi(x) = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$
Тогда $\Phi = \phi(x + \Delta x) - \phi(x)$ – дифференцируема, непрерывна, как комбинация
По теореме Лагранжа $\phi(x+\Delta x) - \phi(x) = \phi'(\xi)\Delta x = (z'_x(\xi, y + \Delta y) - z'_x(\xi, y))\Delta x$, где $\xi \in (x; x + \Delta x)$
Здесь z'_x дифференцируема также на $[y, y + \Delta y]$
Тогда по теореме Лагранжа $\exists \eta \in (y, y + \Delta y) \mid z'_x(\xi, y + \Delta y) - z'_x(\xi, y) = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta y$
Таким образом $\Phi = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x \Delta y$
Перегруппируем Φ, далее аналогично для z''_{yx}
Тогда $z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x \Delta y = \Phi = z''_{yx}(\xi', \eta')\Delta x \Delta y$

4.5. Дифференциалы

Мет. 1. Полный дифференциал (1-ого порядка) функции $z = z(x, y)$
$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ – сумма частных дифференциалов

Мет. 2. Инвариантность формы первого дифференциала функции одной переменной
$dy(x) = y'(x)dx \overset{x=\phi(t)}{=} y'(t)dt$

Th. Инвариантность полного дифференциала первого порядка.

$z = z(u,v), \quad u = u(x,y), \quad v = v(x,y)$ - дифференциалы

Тогда $dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Mem. $d^2y(x) \overset{def}{=} d(dy(x)) = y''(x)dx^2 \neq y''(t)dt^2$

Def. : $z = z(x,y)$ – дифференцируема и $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ – дифференцируемая функция

Тогда второй полный дифференциал равен $d^2z \overset{def}{=} d(dz)$

Формула: $d^2z = d\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy\right) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy = (z'_x dx)'_x dx + (z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx)'_y dy + (z'_y dy)'_y dy = (z'_x)'_x (dx)^2 + (z'_y)'_x dxdy + (z'_x)'_y dydx + (z'_y)'_y (dy)^2 = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$

Nota: Заметим формальное сходство с биномом Ньютона: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

Введем условное обозначение $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2$

Тогда $d^2z = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 z$, здесь $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2$ – оператор второго полного дифференцирования

$d^nz = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n z$ – дифференциал n-ого порядка

Nota: Можно ли утверждать, что $d^2z(x,y) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 z \overset{x=x(u,v),y=y(u,v)}{=} \left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$?

Нет, нельзя (d^2z не инвариантен при замене)

Покажем, что не выполняется в простом случае: $z = z(x,y) = z(x(t), y(t))$ – параметризация.

Геометрически, это выбор пути в области D от точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x,y)$

Итак:

$$d(dz) \overset{z-\Phi_1\Pi}{=} (dz)'_t dt = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_t dt = \begin{bmatrix} dx(t) = \frac{dx}{dt}dt \\ dy(t) = \frac{dy}{dt}dt \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)'_t dt^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right)'_t dt^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)'_t dt^2 = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_t \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right)'_t\right)dt^2 + \left(\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_t \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right)'_t\right)dt^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}\right)dt^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dydx = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y$$

$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$ – линейная параметризация

Lab. Дать инвариантность при линейной параметризации

Причем, это свойство верно для $d^n z$, то есть если $\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$ (например), то $d^n z \overset{z=z(t)}{=} z^{(n)}(t)dt$

4.6. Формула Тейлора

Мет. $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \left[\begin{array}{ll} o((x - x_0)^n) & \text{– ост. в форме Пеано} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} & \text{– ост. в форме Лагранжа} \end{array}\right.$

В дифференциалах:

$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} +$ остаток

Формула Тейлора для $z = z(x, y)$ в окрестности $M_0(x_0, y_0)$ (как раньше $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$)

$z(M \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0)) = z(M_0) + \frac{dz(M_0)}{1!} + \dots + \frac{d^n z(M_0)}{n!} + o((\Delta\rho)^n)$

Nota. Формула выше верна, если $z = z(x, y)$ непрерывна со своими частными производными до $n + 1$ порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(M_0(x_0, y_0))$, где $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$