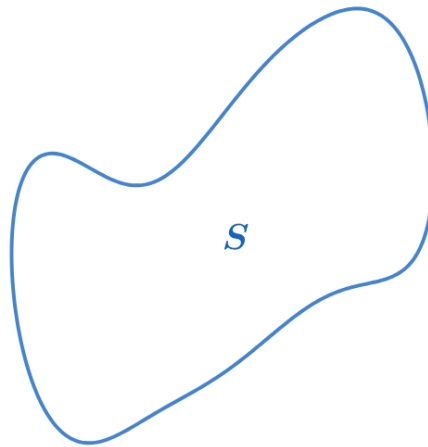


# 1. Определенный интеграл

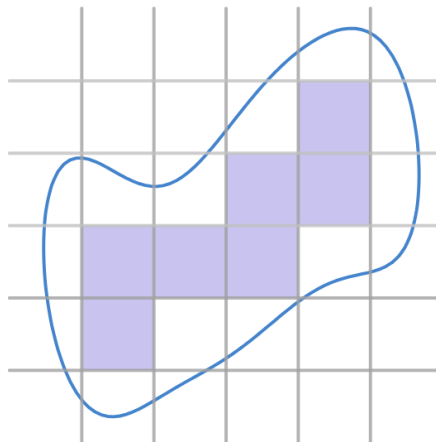
## 1.1. Задача и определение

Задача. Дана криволинейная фигура:



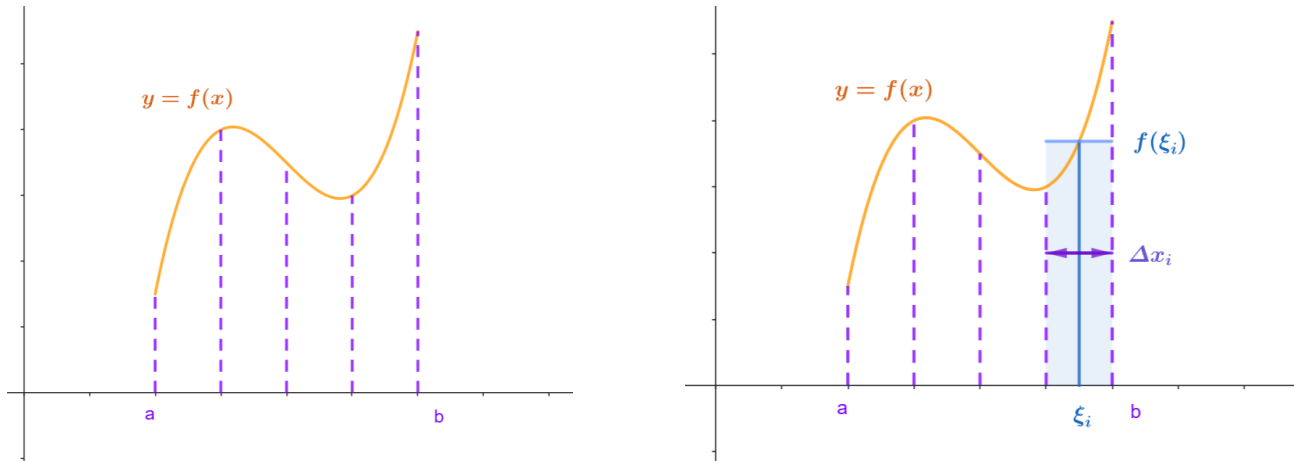
Надо найти ее площадь  $S$

Произведем ее дробление на маленькие элементарные фигуры, площадь которых мы можем посчитать:



Уменьшаем дробление, чтобы свести погрешность к 0 (погрешность между истинной площадью и суммарной площадью прямоугольников)

Сведем задачу к простейшей в ДПСК:



1. Вводим разбиение отрезка  $[a; b]$  ( $a < b$ ) точками  $a < x_0 < \dots < x_n < b$

$$T = \{x_i\}_{i=0}^n$$

2. Выбираем средние точки на частичных отрезках  $[x_{i-1}, x_i]_{i=1}^n$

$\{\xi_i\}_{i=1}^n$  – набор средних точек

$\Delta x_i \stackrel{\text{обозн.}}{=} x_i - x_{i-1}$  – длина отрезка

3. Строим элементарные прямоугольники
4. Составляем сумму площадей всех таких прямоугольников:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i)$$

Такая сумма называется интегральной суммой Римана

5. Заменяя разбиение, выбор  $\xi_i$  при каждом  $n$ , получаем последовательность  $\{\sigma_n\}$

При этом следим, чтобы ранг разбиения  $\tau = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$

Иначе получим неуничтожаемую погрешность

6. **Def.** Если существует конечный предел интегральной суммы и он не зависит от типа, ранга дробления и выбора средних точек, то он называется определенным интегралом

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sigma_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x) dx$$

*Nota.* Независимость от дробления и выбора средних точек существенна

$$\text{Ex. } \mathcal{D} = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1], x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Сумма Римана для этой функции неопределенна, так как все зависит от выбора средних точек:

- если средние точки иррациональные, то сумма равна единице
- иначе сумма равна нулю

В обозначении определенного интеграла  $a$  и  $b$  называют нижним и верхним пределами интегрирования соответственно

Дифференциал  $dx$  имеет смысл  $\Delta x$ , понимается как бесконечно малая, то есть  $f(x)dx$  – площадь элементарных прямоугольников, тогда  $\int_a^b f(x)dx$  – сумма этих прямоугольников

$$1. \int_a^a f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$$2. \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Можно доказать, что определенный интеграл существует для всякой непрерывной на отрезке функции

Геометрический смысл: Заметим, что в определении интеграл – площадь подграфика функции ( $f(x) \geq 0$ )

Заметим, что для  $f(x) \leq 0$   $\int_a^b f(x)dx = -S$

## 1.2. Свойства

1. Линейность пределов  $\implies$  линейность интегралов

$$\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

2. Аддитивность (часто для кусочно-непрерывных функций с конечным числом точек разбивается на участки непрерывности)

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Доказательства строятся на свойствах конечных сумм и пределов

3. Оценка определенного интеграла

$f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ ,  $f(x)$  имеет наименьшее ( $m$ ) и наибольшее ( $M$ ) значения. Тогда:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Доказательство: по теореме Вейерштрасса  $f(x)$  принимает наименьшее и наибольшее значения и для всякого  $x$  из  $[a; b]$ :  $m \leq f(x) \leq M$

Так как все средние точки принадлежат  $[a; b]$ , то

$$m \leq f(\xi_i) \leq M \quad \forall \xi_i$$

$$m\Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M\Delta x_i$$

$$m \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq f(\xi_i) \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

Предельный переход:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} m \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} M \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

$$m \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

4. *Мет.* Теорема Лагранжа о среднем:  $f(x) \in C'_{[a,b]} \implies \exists \xi \in (a, b) \ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

**Th.** Лагранжа о среднем в интегральной форме

$$f(x) \in C_{[a,b]} \implies \exists \xi \in (a, b) \ f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{\text{некоторое число}} \leq M \text{ по свойству выше}$$

По теореме Больцано-Коши  $f(x)$  непрерывна, поэтому пробегает все значения от  $m$  до  $M$

$$\text{Значит найдется такая точка } \xi, \text{ что } f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

5. Сравнение интегралов

$$f(x), g(x) \in C_{[a,b]} \quad \forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq g(x)$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \underbrace{(f(\xi_i) - g(\xi_i))}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_i}_{\geq 0} \geq 0$$

6. Интеграл и модуль

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i$$

$$\text{Докажем, что } \lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \right|$$

Так как определен  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S \in \mathbb{R}$ , то можно рассмотреть случаи

$S > 0$ :  $\exists n_0 \forall n > n_0 \sigma_n > 0$  (вблизи  $S$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

$S < 0$ :  $\exists n_0 \forall n > n_0 \sigma_n < 0$  (вблизи  $S$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n|$$

$$S = 0: \lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i \quad (\text{модуль суммы меньше или равен сумме модулей})$$

*Nota.* Интеграл и разрыв: изъятие из отрезка не более, чем счетного числа точек, не меняет значение интеграла, что позволяет считать интеграл на интервале

*Nota.* Сходимость интеграла в определении интеграла подчеркивает, что это число. Если предел интегральных сумм не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится

*Nota.* Вычисления. Определение дает способ вычисления и его можно упростить:

$$\forall i \Delta x_i = \Delta x, \quad \xi_i = \begin{cases} x_{i-1} \\ x_i \end{cases} \quad - \text{концы отрезка}$$

Так вычисляют «неберущиеся интегралы»

Для функций, у которых первообразные выражаются в элементарных функциях используется не этот метод, а формула Ньютона-Лейбница

## 1.3. Вычисление определенного интеграла

### 1.3.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Дана  $f(x) : [a; +\infty), f(x) \in C_{[a; +\infty)}$

$$\forall x \in [a; +\infty) \text{ определен } \int_a^x f(x) dx$$

Таким образом определена функция  $S(x) = \int_a^x f(x) dx$  – переменная площадь

$$\text{В общем случае обозначим } \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad t \in [a, x]$$

Итак, различают три объекта:

1. Семейство функций:  $\int f(x) dx = F(x) + C$
2. Функция  $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$
3. Число  $\int_a^b f(x) dx = \lambda \in \mathbb{R}$

Выявим связь между ними.

**Th.** Об интеграле с переменным верхним пределом (Барроу)

$$f(x) : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \in C_{[a; +\infty]}$$

Тогда  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  – первообразная для  $f(x)$ , то есть  $\Phi(x) = F(x)$

Докажем по определению

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = [\text{по Th. Лагранжа } \exists \xi \in [x; x + \Delta x]] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow x}} f(\xi) = f(x) \end{aligned}$$

**Th.** Основная теорема математического анализа (формула Ньютона-Лейбница, N-L)

$f(x) \in C_{[a;b]}$ ,  $F(x)$  – какая-либо первообразная  $f(x)$

Тогда  $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Для  $f(x)$  определена  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C$

Найдем значения  $\Phi(a)$  и  $\Phi(b)$

$$\Phi(a) = F(a) + C = \int_a^a f(t)dt = 0 \implies F(a) + C = 0 \implies F(a) = -C$$

$$\Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

### 1.3.2. Методы интегрирования

1\* Замена переменной в определенном интеграле

**Th.**  $f(x) \in C_{[a;b]}$   $x = \varphi(t) \in C'_{[\alpha;\beta]}$ ,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

N-L:  $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b$

Докажем, что  $F(x) = F(\varphi(t))$  – первообразная для  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

$$\frac{dF(\varphi(t))}{d\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \varphi'(t) = f(x)\varphi'(t)$$

$$Ex. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[ \begin{array}{l} x = \sin t \\ x \uparrow \frac{1}{2} \quad t \uparrow \frac{\pi}{6} \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{|\cos t|} \cos t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$

2\* По частям

**Th.**  $u, v \in C'_{[a;b]}$   $uv \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

Тогда:  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

$u(x)v(x)$  – первообразная для  $u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

Или  $d(uv) = u dv + v du$

По формуле N-L  $\int_a^b (u dv + v du) = \int_a^b d(uv) = u(x)v(x) \Big|_a^b$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$Ex. \int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x d \ln x = e \ln e - 1 \ln 1 - \int_1^e dx = e - x \Big|_1^e = 1$$

*Nota.* Не всякий интеграл вида  $\int_a^b f(x) dx$  является определенным

$$Ex. \int_0^e \ln x dx = x \ln x \Big|_0^e - x \Big|_0^e = e \ln e - \underbrace{0 \ln 0}_{0 \cdot \infty} - e - \text{несобственный интеграл}$$