Содержание

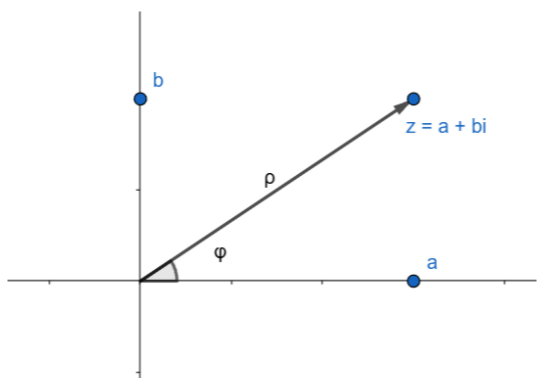
1. Основные понятия

1.1. Комплексное число

Мет. $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
Обозначение: $z = (a, b) = a + bi$, где $i = (0, -1) = \sqrt{-1}$
Основные операции:

1. $\operatorname{Re} z = a$ - вещественная часть, $\operatorname{Im} z = b$ - мнимая часть
2. $z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4. $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ - **формула Муавра**, где $\rho = |z|, \varphi = \arg z$
5. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, где $\rho = |z|, \varphi = \arg z, k \in \mathbb{Z}$
6. При $n = 2$ $\sqrt{z} = \sqrt{a + bi} = \pm(c + di)$, где $c = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, d = \operatorname{sign}(b)\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$

Тригонометрическая форма:
$z = a + bi = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$
$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
По формуле Эйлера $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$



1.2. Комплексная плоскость

Def. Окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ определяется как $U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$
Тогда $\mathring{U}_\delta(z_0) = U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ - выколотая окрестность

Def. Для данной множества точек A точка z_0 считается

- внутренней, если для любого δ $U_\delta(z_0) \subset A$
- граничной, если для любого δ $\exists z \in U_\delta(z_0) \Big| z \in A$ и $\exists z \in U_\delta(z_0) \Big| z \notin A$

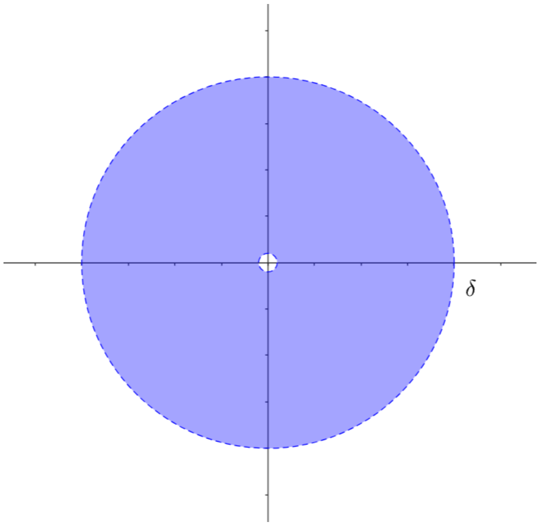
Def. Открытое множество состоит только из внутренних точек
Def. Закрытое множество содержит все свои граничные точки
Def. Границей Γ_D (иногда обозн. δD) для множества D называют множество всех граничных точек D
Def. Если любые две точки множества можно соединить ломаной линией конечной длины, то множество считается связным
Def. Множество $D \subset \mathbb{C}$ называется областью, если D - открытая и связная

Def. Кривая $l \subset \mathbb{C}$ считается непрерывной, если $l = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \varphi(t) + i\psi(t), t \in \mathbb{R}\}$, где $\varphi(t), \psi(t)$ - непрерывные функции

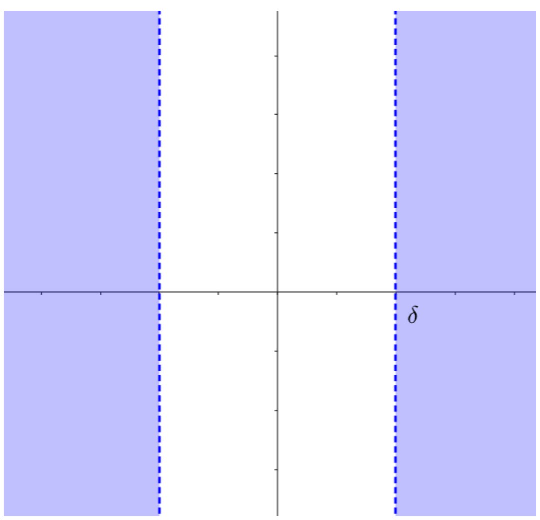
Nota. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и их производные непрерывные, то кривая l гладкая

Def. Непрерывная замкнутая (то есть начальная и конечная точки совпадают) без самопересечений кривая называется контуром

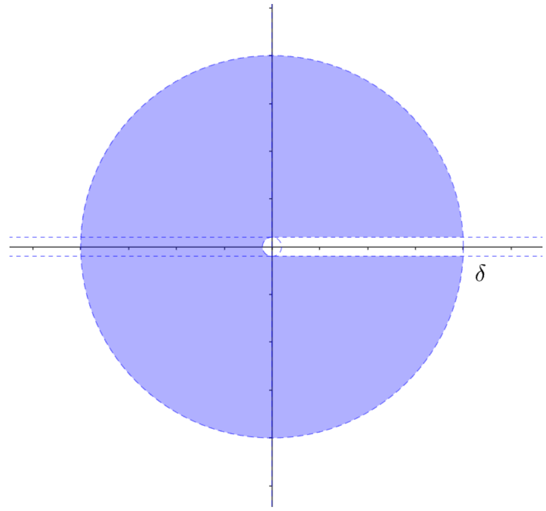
Nota. Односвязную область можно стянуть в точку



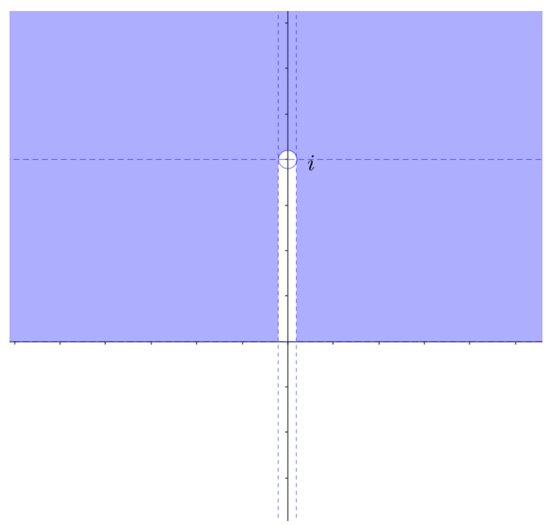
Ex. 1. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < \delta\right\}$ - область связаная, но не односвязная, ее нельзя стянуть из-за дырки



Ex. 3. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\operatorname{Re} z| < \delta\right\}$ - несвязная область



Ex. 2. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < \delta, \arg z \neq 0\right\}$ - область связная и односвязная



Ex. 4. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im} z \geq 0, z \notin [0, i]\right\}$ - здесь под $[0, i]$ подразумевается линейный отрезок на оси

Nota. Дальше все рассматриваемые Γ_D будут состоять из кусочногладких и изолированных кривых

1.3. Предел

Мет. Последовательность $\{z_n\} = z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$

Def. Пределом $\{z_n\}$ называют число z такое, что
$\forall \varepsilon > 0\ \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 = \mathbb{N}} \Big| \ \forall n > n_0\ |z_n - z| < \varepsilon$
Обозначается $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$

Nota. $\{z_n\}$ можно представить как $x_n + iy_n$, то есть двумя $\mathbb{R}$-последовательностями

Th. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} z_n = \underset{x,y \in \mathbb{R}}{x + iy} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{Re} z_n = x \\ \exists \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{Im} z_n = y \end{array}$

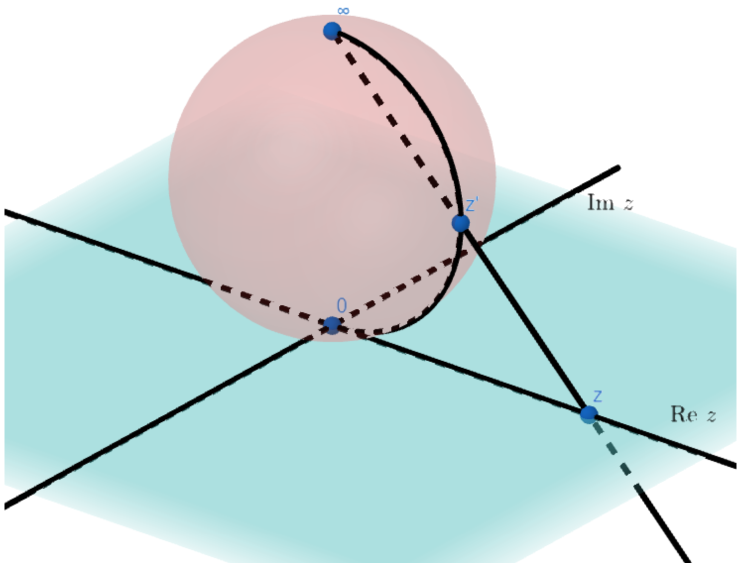
$\boxed{\Longleftarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{n_0 = \max(n_{0x}, n_{0y})}{n_0 \in \mathbb{N}} \Big| \ \forall n > n_0 \begin{array}{l} |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$
$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$
То есть $\forall \varepsilon > 0 \ldots |z_n - z| < \varepsilon$

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ |z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} |x_n - x| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \\ |y_n - y| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow$
$\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ и $\exists \lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$

Nota. Для комплексных чисел работают теоремы для пределов (сумма пределов, произведение пределов и т.д.), критерий Коши и другие

Def. $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \Big| \ n > n_0\ |z| > \varepsilon$
Def. Точка z, определенная как предел, равный ∞, называется бесконечно удаленной. Но существует множество последовательностей, чьи пределы удаляются на бесконечность разными путями на плоскости

Def. Стереографическая проекция (сфера Римана)



Поместим сферу на комплексную плоскость и сделаем биекцию точек плоскости на точки сферы: проведем из верхней точки сферы лучи вниз на плоскость, и точка, где луч пересекает сфера, будет считаться отображением для данной точки. Заметим, что в этом случае бесконечно удаленные точки будут отображаться в верхнюю точку сферы

Def. $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ - расширенная комплексная плоскость

Однако $z + \infty$ не определена, $\infty + \infty$ не определена. Но $\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n}$ при $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; $\infty = \infty \cdot \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ при $z_n \longrightarrow z$

Записью $[-\infty; +\infty]$ обозначается ось $\overline{\mathbb{R}}$;

$[-i\infty; +i\infty]$ - мнимая расширенная ось

Путь $x \pm i\infty$ при фикс. x - вертикальная прямая;

$iy \pm \infty$ - горизонтальная прямая;

$e^{i\varphi} \cdot \infty$ - прямая, проходящая через начало координат

2. Комплексная функция

2.1. Определение

Мет. $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R} \overset{def}{\iff}$ отображение такое, что $\forall x \in E\ \exists! y \in D \mid y = f(x)$

Def. $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \overset{def}{\iff}$ отображение такое, что $\forall z \in D\ \exists w \in G \mid f(z) = w$

Def. Если $\forall z \in D\ \exists! w \in G$, то f называется однозначной функцией

Def. Если $\forall z_1, z_2 \in D (z_1 \neq z_2) \Longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, то f называется однолистной функцией

Ex. 1. $w = \sqrt{z}$ - неоднозначная функция

$\sqsupset z = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

$\sqrt{z} = \sqrt{1}\left(\cos\dfrac{2\pi k}{2} + i\sin\dfrac{2\pi k}{2}\right)$

$w_1 = 1, \quad w_2 = -1$

Ex. 2. $w = z^2$ - неоднолистная функция

$z_1 = 1, z_2 = -1 \qquad\qquad w(z_1) = w(z_2) = 1$

Nota. Если $f(z)$ однозначна и однолистна, то $f(z)$ - взаимно однозначное соответствие (биекция). Тогда $\exists g(x) \mid g(f(x)) = x$

Комплексную функцию $f(z)$ можно представить как $u(x,y) + iv(x,y)$, где $x + iy = z$

Ex. $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i\cdot 2xy$

$u(x,y) = (x^2 - y^2), \qquad\qquad v(x,y) = 2xy$

2.2. Предел функции

Def. $L \in \mathbb{C}, f : D \longrightarrow G, \quad L \overset{def}{=} \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists \underset{\delta=\delta(\varepsilon)}{\delta > 0} \,\Big|\, z \in D, z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)\ f(x) \in U_\varepsilon(L)$

В определении существование и значение L не должно зависеть от пути, по которому z приближается к точке сгущения z_0. Может быть так, что для любого направления стремления предел есть, но в общем смысле не существует

Ex. $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}\right) \qquad\qquad \sqsupset z = \rho e^{i\varphi}$

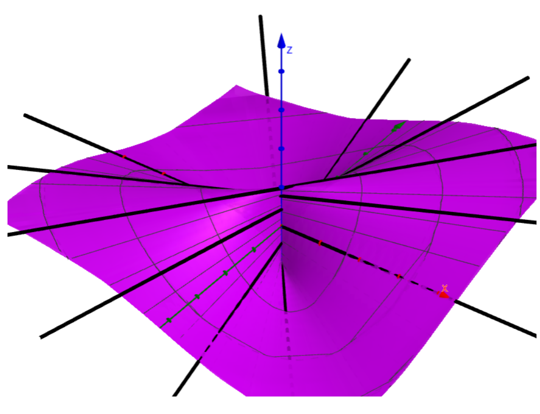
$f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}} - \dfrac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right) = \dfrac{1}{2i}(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi - \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = \sin 2\varphi$

Зафиксируем $\varphi = \varphi^* \in [0; 2\pi)$, тогда $\sin 2\varphi^* \in [-1;1]$

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi^*}} f(z) = \lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi^*}} \sin 2\varphi = \sin 2\varphi^* \in [-1;1]$

Значения предела занимает отрезок $[-1;1] \Longrightarrow \nexists \lim\limits_{z\to 0} f(z)$

На рисунке изображена $\sin 2\varphi$, на оси Oz изображена $\operatorname{Re} w$. Черные линии - это возможные пути приближения z к 0



Nota. Путь следования предела аналогичен левостороннему и правостороннему пределами $\mathbb{R}$-функций

Def. Непрерывность функций в точке z_0.

$f : D \longrightarrow G, z_0 \in D$, $f(z)$ называется непрерывной в z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

На языке приращений: $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \underset{\Delta z \to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y \to 0 \Longrightarrow \begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases} \Longrightarrow \Delta\rho \to 0$$

2.3. Элементарные комплексные функции

Ex. 1. Линейная $f(z) = az + b, \qquad a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$

Эта функция однозначная, однолистная $\Longrightarrow \exists f^{-1}(z) = g(z) = \dfrac{z - b}{a}$

Геометрический смысл:

$a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$

$az = |a||z|(\cos(\varphi_a + \varphi_z) + i\sin(\varphi_a + \varphi_z))$ - поворот и растяжение ($\varphi_a = \arg a$, $\varphi_z = \arg z$)

$az + b = (x_{az} + x_b) + i(y_{az} + y_b)$ - сдвиг

То есть линейная функция - композиция из поворота, растяжения и сдвига

Ex. 2. Степенная $w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$ - однозначная, может быть неоднолистной

Для $n \in \mathbb{Q}$ функция становится неоднозначной

Ex. $w = z^2 \qquad z = \rho e^{i\varphi}, w = \rho^2 e^{2i\varphi}$

Пусть $z_1 \neq z_2$ и $w(z_1) = w(z_2)$, тогда $\arg z_1 = \arg z_2 \pm \pi$

$w(z_1) = \rho^2 e^{2i\arg z_1} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + 2\pi k)}$

$w(z_2) = \rho^2 e^{2i\arg z_2} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + \pi)} = \rho^2 e^{i(2\arg z_1 + 2\pi)} = w(z_1)$

Область однолистности z^2 - множество точек, для которых $\arg z \in [0; \pi)$

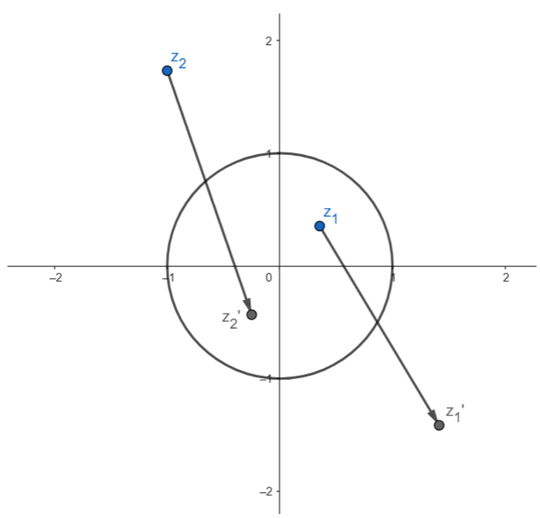
Точку $w = 0$ называют точкой разветвления

Ex. $w = z^{-1} = \dfrac{1}{z} \qquad w(0) = \infty, w(\infty) = 0$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - функция обратима

$w = re^{i\psi} = \dfrac{1}{\rho e^{i\phi}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \Longrightarrow |w| = \dfrac{1}{|z|}, \arg w = -\arg z$

Преобразование $|w| = \dfrac{1}{|z|}$ называется инверсией, а $\arg w = -\arg z$ дает симметрию относительно $\operatorname{Re} z$



Ex. 3. Рациональная $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \qquad n, m \in \mathbb{N}$

Ex. 4. Показательная $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Свойства:

1. $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
2. $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$

3. $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ - показательная функция периодична с периодом $2\pi i$

Ex. 5. Логарифмическая $w = \operatorname{Ln} z$

Если $e^w = e^{u+vi} = e^u(\cos v + i\sin v) = z = |z|e^{i\arg z}$, то $u = \ln|z|$, $v = \arg z + 2\pi k$

Тогда $\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)}$

$\ln z = \operatorname{Ln} z$ при $k = 0$ - т. н. главное значение

Заметим, что $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ - многолистная функция, а $w = \operatorname{Ln} z = \ln\rho + i(\arg z + 2\pi k)$ - многозначная

Ex. 6. Тригонометрические и гиперболические

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Nota. Рассмотрим уравнение $\sin z = A \in \mathbb{C}$

$\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = A \Longrightarrow e^{2iz} - 2iAe^{iz} - 1 = 0$

При $t = e^{iz}$ получаем квадратное уравнение, у которого в $\mathbb{C}$ всегда будет два корня. Это значит, что в $\mathbb{C}$ sin и cos принимают любые значения (то есть $|\sin z| > 1$)

2.4. Дифференцирование ФКП

Def. $w = f(z), w : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z_0 \in D$. **Производная** функции $w(z_0)$ - это предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$, если он существует и не зависит от пути $z \to z_0$

Мет. Дифференцирование $y = f(x)$:

В $\Phi_1\Pi$: $\quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \underset{A \in \mathbb{R}}{=} A\Delta x + o(\Delta x)$

В $\Phi_2\Pi$: $\quad \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)$

Def. $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0, если $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$

Def. Дифференцируемая в точке z_0 функция $w = f(z)$, производная $f'(z_0)$ которой непрерывна в z_0, называется аналитической (или аналитичной) функцией в z_0

Th. Критерий аналитичности (или Условие Коши-Римана)

$$f(x) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ аналитична в точке } z_0 = x + iy$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ непрерывны в } z \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Причем, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

$\boxed{\Longrightarrow}$ f аналитическая в $z \iff \exists$ непрерывная $f'(z) =$

$= \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} =$ [предел не зависит от пути] $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - v(x,y)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right) =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x$

Аналогично при $i\Delta y \to 0$ получаем $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{i\Delta y} =$

$= \lim\limits_{\Delta y \to 0} \left(\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} \right) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y v}{\Delta y} - i \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = v_y - iu_y$

Итак, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

Отсюда $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\exists$ непрерывные $u_x, u_y, v_x, v_y \iff u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в (x,y), тогда

$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha_1(x, y, \Delta x, \Delta y) + \alpha_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$

$\alpha_1 = o(\Delta \rho), \quad \Delta \rho = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta_y + \beta_1 + \beta_2$

$\Delta f = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - (u(x,y) + iv(x,y)) = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y + \beta)$

$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u_x \Delta x + u_y \Delta y + iv_x \Delta x + iv_y \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{u_x(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{v_x(i\Delta x - \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = u_x + v_x i + \frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y}$

Тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = u_x + iv_x + \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = u_x + iv_x \iff f' = u_x + iv_y$, существует и непрерывна в (x,y)

Nota. Используя Условие Коши-Римана, получим равенство $u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

Nota. Коши-Риман в ПСК:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

Тогда $f'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = \frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)$

$$u_\rho = u_x \frac{\partial x}{\partial \rho} + u_y \frac{\partial y}{\partial \rho} = u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi$$
$$v_\varphi = v_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + v_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\rho v_x \sin\varphi + \rho v_y \cos\varphi = \rho u_y \sin\varphi + \rho u_x \cos\varphi = \rho u_\rho$$

Lab. $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}$

Свойства аналитических функций

Пусть f, g - аналитические функции, тогда:

1° Линейность: $af + bg$ - аналитическая

2° Композиция: $f(g(z))$ - аналитическая

3° Произведение: $f \cdot g$ - аналитическая

Nota. Доказательства свойств элементарные, все сводится к сведению к u и v

Ex. $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = u(x,y) + iv(x,y)$

$u_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$v_y = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = u_x$

$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u_y$

Таким образом, $\frac{1}{z}$ - аналитическая функция

Ex. $w = \overline{z} = x - iy$

$u_x = 1$, $v_y = -1 \neq u_x$ - не аналитическая функция

4° $f(z)$ аналитична в D $(f : D \longrightarrow D')$, $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in D$. Тогда $\exists g(w) = f^{-1}(z)$ $(g : D' \longrightarrow D)$ и $\forall z_0 \in D$ $f'_z(z_0) = \frac{1}{g'_w(w_0)}$, где $w_0 = w(z)$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Заметим, что $f'(z) \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J \neq 0$

Действительно, если якобиан равен 0, то $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0.$

Аналогично $\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

Значит, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ – противоречие

Если $J \neq 0$, то преобразование $f(z)$ приводит (x, y) в (u, v) взаимно однозначно. Тогда $\exists!$ решение $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$, то есть взаимно однозначно определены $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

Обозначим $g(w) = x(u,v) + iy(u,v)$

Найдем $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$. Рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta z}{\Delta w} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{\Delta w \to 0} \lim\limits_{\substack{\Delta w \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \dfrac{\Delta z}{\Delta w} = \lim\limits_{\substack{\Delta w \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \dfrac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} =$
$\dfrac{1}{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \dfrac{1}{f'_z(z_0)} \Longrightarrow \lim\limits_{\Delta w \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta w} = g'_w(w_0) = \dfrac{1}{f'_z(z_0)}$ или $f'_z(z_0) = \dfrac{1}{g'_w(w_0)}$

5° $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична в D. Тогда $u(x,y), v(x,y)$ – гармонические функции в D

Функция считается гармонической, если $\Delta u = 0$ (здесь $\Delta = \nabla^2$ – лапласиан) $\Longleftrightarrow$ $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Lab.

6° Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична в D и известна $u(x,y)$ или $v(x,y)$, то $f(z)$ определяется однозначно с точностью до const

Пусть известна $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$. Нужно найти $v(x,y)$. По условию Коши-Римана $\int u(x,y), \int v(x,y)$ не зависят от пути (Lab. доказать, что $\int_{AB} dv$ не зависит от пути)

$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_x dx + v_y dy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (-u_y) dx + u_x dy$

Интеграл будет найден с точностью до $\text{const} = C(x_0, y_0)$

2.5. Конформные отображения

Найдем геометрический смысл производной. Рассмотрим отображение $w = f(z)$ $(w : D \longrightarrow G)$ – дифференцируема в точке $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$

Аргумент: В области D рассмотрим гладкую кривую $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$. Образ $\gamma(t)$ – кривая $\sigma(t)$ в G

$\gamma(t)$ в окрестности некоторой точки z_0 гладкая, $\exists$ касательная с углом $\theta = \arg \gamma'(t)$

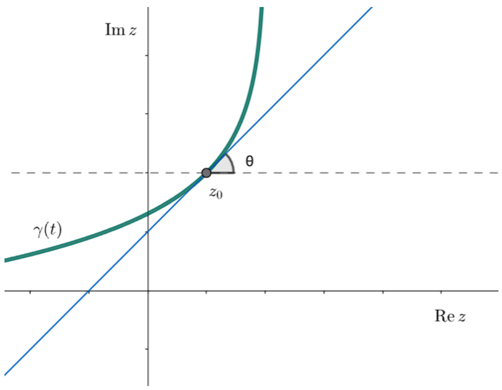
$\sigma(t)$ в окрестности $w_0 = w(z_0)$ гладкая, $\exists$ касательная с углом $\theta' = \arg\sigma'(t)$

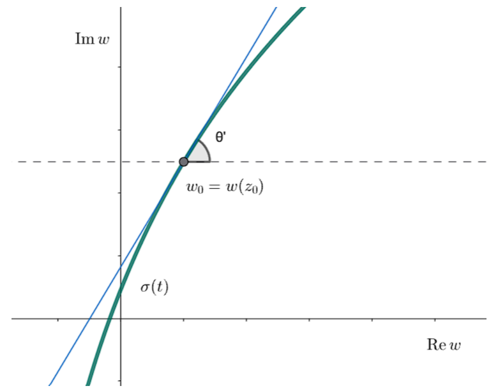
А $\sigma'(t_0) = w'(t_0) = f'(z_0)\cdot\underbrace{\gamma'(t_0)}_{z'(t_0)}$

$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg\gamma'(t_0)$

$\theta' = \arg f'(z_0) + \theta$

$\theta' - \theta = \arg f'(z_0)$ – поворот кривой $\gamma(t)$ вокруг z_0 на угол $\arg f'(z_0)$ при отображении $w = f(z)$





<u>Модуль</u>: $w = f(z)$ – дифференцируема $\Longleftrightarrow \Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$

Рассмотрим $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| = |f'(z_0)| \Longrightarrow |\Delta w| = |f'(z_0)|\cdot|\Delta z| + o(|\Delta z|)$

Рассмотрим малый контур $|\Delta z| = |z - z_0| = \rho$. Тогда $|\Delta w| = |w(z) - w(z_0)| = |f'(z)|\rho + o(\rho)$

Таким образом $w(z)$ растягивает круг $|z - z_0| = \rho$ в $|f'(z_0)|$ раз с точностью до малых высших порядков

Итак, $w = f(z)$ в точке z_0 поворачивает точку у окрестности на угол $\alpha = \arg f'(z_0)$ и растягивает отрезки $[z_0, z]$ в $k = |f'(z_0)|$ раз

Def. Конформное отображение – отображение $w(z)$, сохраняющее углы (между образами и прообразами) и постоянство растяжений

Th. Условия конформности: $\begin{cases}\text{дифференцируемость}\\ \text{однолистность}\\ f'(z)\neq 0 \text{ в } D\end{cases} \Longleftrightarrow$ конформно

Ex. $w = az + b$

Мет. Геометрический смысл линейного отображения: b - перенос $z = 0$ в точку $z = b$; $a = |a|e^{i\varphi}$, тогда $|a|$ - коэффициент растяжения, φ - угол поворота

Заметим, $w' = (az+b)' = a$, тогда $k = |w'(z_0)| = |a|$, $\varphi = \arg w'(z_0) = \arg a$

Lab. Проверить, что $w = z^2$ не конформное отображение, найдя $w'(z_0)$

3. Интеграл по комплексной переменной

3.1. Определения

В $\mathbb{C}$ задана кусочно-гладкая кривая K (с концами в точках M и N) параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) & t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ y = \psi(t) & \varphi, \psi - \mathbb{R}\text{-функции} \end{cases}$$

Тогда $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ - задание K в $\mathbb{C}$. Введем отображение $w = f(z)$, действующее на K

Определим интегральные суммы:

1. дробление отрезка MN на частичные дуги: $M = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = N$
   Тогда $\alpha = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta$
2. Выбор средных точек в отрезках кривой $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$
3. Сопоставим интегральную сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i$
4. Интегралом от $w = f(z)$ по кривой K называется $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max\Delta z_i\to 0}} = \int_K f(z)dz$, если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения, выбора средних точек и т. д.

При этом интеграл можно представить как $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)(\Delta x_i + i\Delta y_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u(\xi_i, \eta_i) + iv(\xi_i, \eta_i))(\Delta x_i + i\Delta y_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i\Delta x_i - v_i\Delta y_i) + i \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i\Delta y_i + v_i\Delta x_i) = \int_K udx - vdy + i\int_K udy + vdx$

Nota. Мы свели $\mathbb{C}$-интеграл к двум криволинейным $\mathbb{R}$-интегралам, все свойства интегралов сохраняются

Ex. $\int_{\gamma=[0;1+i]} \overline{z}dz = \int_\gamma (x - iy)(dx + idy) = \int_\gamma xdx + ydy + i\int_\gamma xdy - ydx = 2\int_0^1 xdx = 1$

Свойства комплексного интеграла:

1° Линейность

2° Аддитивность

3° Смена знака: $\int_{K^+} = -\int_{K^-}$

4° Оценка, модуль: $\left|\int_K\right| \leq \int_K |f(z)|dz$

5° $\int_K f(z)dz \overset{z=g(w)}{=} \int_C f(g(w))g'(w)dw = [\text{В частности переход к параметру } t] = \int_{C(t)} f(t)g'(t)dt$

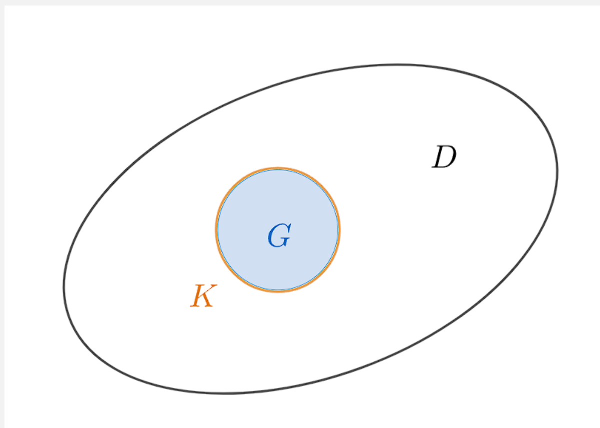
Ex. $I = \int_{K:|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z-z_0} \overset{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=} \int_K \frac{d\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i}\varphi} = \int_K \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i}\varphi} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$

Интеграл I не зависит от радиуса и центра окружности (то есть контура интегрирования), то есть интеграл функции $\frac{1}{z-z_0}$ будет равен $2\pi i$ для любой окружности в качестве контура

3.2. Теорема Коши

Th. 1. $f(z)$ аналитическая и однозначная в односвязной области D

Если $f(z)$ непрерывна на Γ_D, то $\oint_{\Gamma_D} f(z)dz = 0$



Запишем интеграл по контуру $K \subset D$ (K - кусочно гладкая):

$\int_K f(z)dz = \int_K udx - vdy + i\int_K udy + vdx = I_1 + I_2 i$

$$I_1 = \int_K \underbrace{u(x,y)dx}_{P(x,y)} - \underbrace{v(x,y)dy}_{Q(x,y)} = \begin{bmatrix} f(z) \text{ - аналитическая} \Longrightarrow \\ u_x, u_y, v_x, v_y \text{ существуют} \\ \text{и непрерывны} \end{bmatrix} = \underbrace{\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}_{\text{Формула Грина}} =$$

$$\iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Аналогично $I_2 = \int_k udy + vdx = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy = 0$

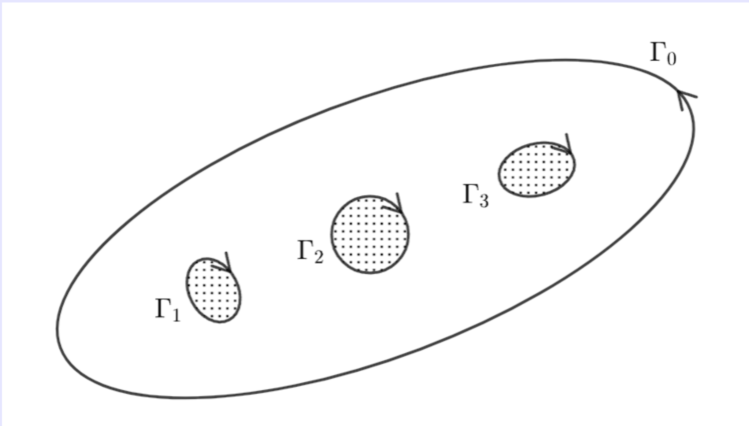
Таким образом, $\oint_{K\subset D} f(z)dz = 0$ - формула Коши

Так как $f(z)$ непрерывна на Γ_D, то можно взять $K = \Gamma_D$

Nota. Получим, что интеграл по любому замкнутому Γ_D контуру в области аналитичности равен нулю

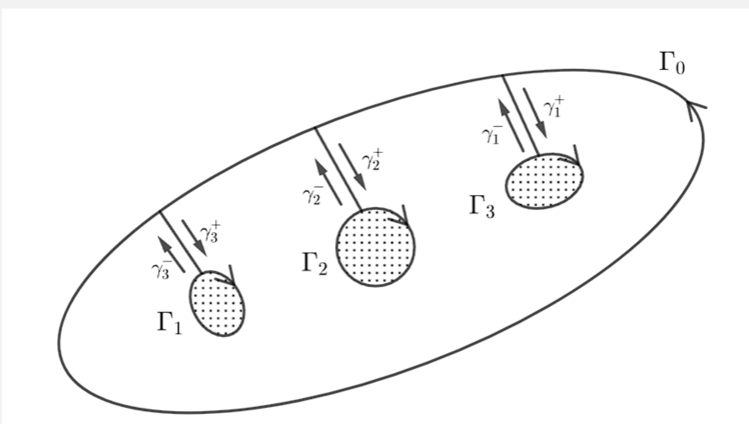
То есть $\int_{AB} f(z)dz$ в условиях **Th. 1.** не зависит от пути, и его можно решать как $\int_{AB} = \int_A^B$

Nota. Обобщим **Th. 1.** на многосвязную область. Выколотые области тоже имеют границы, которые включены в границу всей области

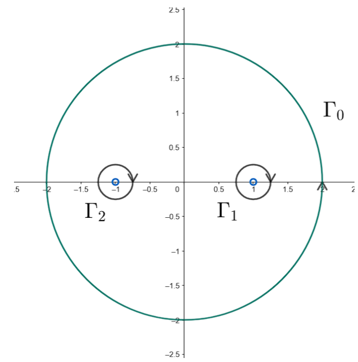


Th. 2. Дана многосвязная область D, $f(z)$ - аналитична в D и непрерывна на Γ_D
Граница $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$, где положительным обходом области считается тот, при котором область обхода слева
Тогда $\displaystyle\int_{\Gamma_D^+} f(z)dz = 0$ или $\displaystyle\int_{\Gamma_0 \circlearrowleft} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i \circlearrowleft} f(z)dz$

Сделаем разрезы как на картинке. Разрезы превратили область D в односвязную с границей $\Gamma' = \Gamma_0 \cup (\gamma_1^+ \cup \gamma_1^- \cup \Gamma_1) \cup \dots = \Gamma_0 \cup \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} (\gamma_i^+ \cup \gamma_i^- \cup \Gamma_i)$



По **Th. 1.** $\displaystyle\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0 \iff \int_{\Gamma_D} f(z)dz + \int_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \dots = 0$
Но $\displaystyle\int_{\gamma_1^+} = -\int_{\gamma_1^-}$, поэтому $\displaystyle\int_{\Gamma_D^+} = \sum \int_{\Gamma_i^-}$ или $\displaystyle\int_{\Gamma_0 \circlearrowleft} = \sum \int_{\Gamma_i \circlearrowleft}$



Ex. $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)dz$

По **Th. 2.** $\displaystyle\int_{\Gamma_0 \circlearrowleft} f(z)dz + \int_{\Gamma_1 \circlearrowright} f(z)dz + \int_{\Gamma_2 \circlearrowright} f(z)dz = 0$

Тогда $\displaystyle\int_{|z|=2 \circlearrowleft} f(z)dz = \int_{|z-1|=\rho_1 \circlearrowleft} f(z)dz + \int_{|z+1|=\rho_2 \circlearrowleft} f(z)dz$, где ρ_1, ρ_2 - радиусы бесконечно малой длины

3.3. Неопределенный интеграл

Мет. По теореме Барроу $\Phi(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом

Тогда $\Phi(x)$ - дифференцируема, и $\Phi'(x) = f(x)$, то есть $\Phi(x)$ - первообразная $f(x)$

Th. $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и $\forall \Gamma \subset D$ $\displaystyle\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

Тогда при фиксированном $z_0 \in D$ $\Phi(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ аналитична в D и $\Phi'(z) = f(z)$

Если $\forall \Gamma$ $\displaystyle\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$, то $\Phi(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} F(\zeta)d\zeta$ - интеграл, не зависящий от пути, а только от z_0 и z

Рассмотрим $\dfrac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \dfrac{1}{\Delta z}\left(\displaystyle\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right) = \dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta =$
$\dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z) + f(z))d\zeta = \dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta + \dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta =$

$\zeta\Big|_z^{z+\Delta z}$

$\Delta z f(z) + \dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta$

$\left|\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta\right| \le \displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)|d\zeta \le \max_{[z,z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)|\Delta z$

Так как $f(z)$ непрерывна в D и $z, \zeta \in D$, то $\lim\limits_{\zeta \to z} f(\zeta) = f(z) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta\ |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta\ \max |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

То есть $\left|\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))d\zeta\right| \le \varepsilon \Delta z$

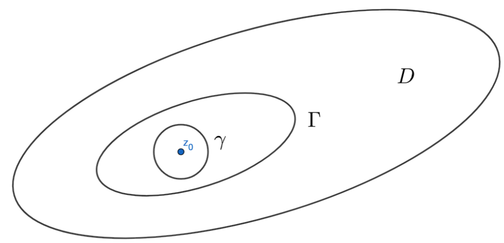
Или $\dfrac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} \le f(z) + \varepsilon$, то есть $\left|\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon$, или $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z)$

Def. $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ называют первообразной для $f(z)$

Следствие - формула Ньютона-Лейбница: $\boxed{\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)}$

3.4. Интеграл Коши

Nota. Установим связь между значениями $f(z)$ во внутренних точках области и на ее границе
$f(z)$ аналитична в односвязной области D, $z_0 \in D$. Окружаем z_0 контуром $\Gamma \in D$ и меньшим контуром $\gamma : |z - z_0| = \rho$
В кольце между γ и Γ рассмотрим функцию $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ (в кольце $\varphi(z)$ аналитична)



По **Th. 2.** для $\varphi(z)$ в многосвязной области $\int_{\Gamma \circlearrowleft} \varphi(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma \circlearrowleft} \varphi(\zeta)d\zeta$ - не зависит от пути

То есть выбор окружности в качестве γ не важен:

$$\int_{\gamma \circlearrowleft} \varphi(\zeta)d\zeta \overset{z - z_0 = \rho e^{i\varphi}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} f(\zeta)d\varphi = \underbrace{i \int_0^{2\pi} (f(\zeta) - f(z_0))d\zeta}_{\text{стягиваем } \gamma \text{ в точку } z_0, \int \to 0} + i \int_0^{2\pi} f(z_0)d\zeta =$$

$if(z_0) \cdot 2\pi$

Тогда $\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \int_\gamma \varphi(\zeta)d\zeta = 2\pi i f(z_0)$

Nota. Доказали теорему: в области аналитичности $\forall z_0 \in D$ $\int_{\Gamma_D} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$

Ex. $\int_{|z|=2 \circlearrowleft} \frac{f(z)}{(z-1)(z+1)}dz = \int_{|z-1|=\rho_1 \circlearrowleft} \frac{\frac{f(z)}{z+1}}{z - 1}dz + \int_{|z+1|=\rho_2 \circlearrowleft} \frac{\frac{f(z)}{z-1}}{z + 1}dz = 2\pi i \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{-2}\right)$

4. Ряды

4.1. Числовой ряд в комплексной плоскости

Def. 1. $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, где $z_n \in \mathbb{C}$ - числовой ряд

Def. 2. Сумма ряда - $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$

Если сумма существует и конечна, то ряд называют сходящимся.

Def. $f(z)$ называется регулярной в точке z_0, если $f(z_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Для комплексных числовых рядов остаются справедливыми:

1. Необходимое условие сходимости
2. Признак Даламбера
3. Радикальный признак Коши
4. Критерий Коши
5. Абсолютная сходимость

4.2. Функциональный ряд в комплексной плоскости

Def. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, где $u_n(z):\ D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ - функциональный ряд

Th. Признак Вейерштрасса.
$\exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n,\ \alpha_n \in \mathbb{R}_0^+,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R},\ |u_n(z)| \le \alpha_n\ \forall z \in D \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Lab. Сверить формулировку и доказательства для $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$-случая

Nota. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывна

Th. $u_n(z)$ непрерывна в D и $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D

Тогда $\displaystyle\int_K f(\zeta)d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_K u_n(\zeta)d\zeta$, где $K \subset D$ - кусочно гладкая кривая

Докажем, что $\displaystyle\left|\int_K f(\zeta)d\zeta - \sum_{k=1}^{n} \int_K u_k(\zeta)d\zeta\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\left|\int_K \left(f(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta)\right) d\zeta\right| = \left|\int_K \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta)\right) d\zeta\right| = \left|\int_K \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(\zeta)d\zeta\right| = \left|\int_K r_n(\zeta)d\zeta\right| \le$$
$$\int_K |r_n(\zeta)||d\zeta| \underset{\text{по кр. Коши}}{\le \varepsilon}$$

4.3. Степенной ряд

Def. Степенной ряд - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \left(a=0: \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)$, $c_n \in \mathbb{C}$

Nota. Область сходимости - круг с центром a, $|z-a| \le R$ - радиус сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z-a| < 1 \Longrightarrow |z-a| < \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Nota. Также справедлива теорема Абеля

Th. Абеля.

Если степенной ряд сходится в точке z_1, то он сходится абсолютно и равномерно в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| > |z-z_2|$

Если степенной ряд расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке z_2 такой, что $|z-z_1| < |z-z_2|$

Следствие: Если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, то $f(z)$ - непрерывна в круге сходимости ряда

Th. Почленное дифференцирование суммы ряда.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ - сходящийся в круге радиуса $R \ne 0$. Тогда $f(z)$ дифференцируема и $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$

Рассмотрим ряд (и его сумму) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ - он сходится в круге радиуса ρ таком, что $0 \le |z| \le \rho < R$ (см. сходимость по Даламберу) (Обозначим круг $K_1 : |z| = \rho$)

Докажем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} = S(z) = f'(z)$

В круге K_1 выберем кривую γ, соединяющую $z_0 = 0$ и z

Рассмотрим $\int_\gamma \zeta^k d\zeta$, функция ζ^k аналитическая, тогда $\int_\gamma \zeta^k d\zeta$ не зависит от пути

$$\int_\gamma \zeta^k d\zeta = \int_0^z \zeta^k d\zeta = \frac{\zeta^{k+1}}{k+1}\Big|_0^z = \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

Тогда $\int_0^z n c_n \zeta^{n-1} d\zeta = \frac{n c_n \zeta^n}{n}\Big|_0^z = c_n z^n$

Возьмем интеграл от суммы $\int_0^z S(\zeta) d\zeta = \int_0^z \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n \zeta^{n-1}\right) d\zeta = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^z n c_n \zeta^{n-1} d\zeta =$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$

Таким образом, $f(z)$ является первообразной для $S(z)$, то есть $S(z) = f'(z)$

При этом $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1} = \sum\limits_{m}^{\infty} c_m z^m$ - этот ряд можно дифференцировать дальше, и область, в которой функция дифференцируется, - круг K_1, где ρ вплотную подходит к R

Таким образом, доказали, что если $f(z)$ регулярна $\forall z$ в круге $|z| < R$, то $f(z)$ сколько угодно раз дифференцируема в этом круге и $f'(z) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)'$

Следствие: $f'(z) = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots)'$ или $f'(z) = (c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots)' \Longrightarrow c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = \dfrac{f''(z)}{2!}$ и так далее

Получили ряд Тейлора $f(z) \underset{|z-a|<\rho}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

Th. $f(z)$ аналитическая в области $D \Longrightarrow f(z)$ регулярна в области D

По формуле Коши $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ $\forall z \in K$, где $K = \{z \mid |z-a|, \rho\}$, $\gamma_\rho = \{\zeta \mid |\zeta - a| = \rho\}$ и $K \subset D$

Разложим в ряд $\dfrac{1}{\zeta - z}$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - (z-a) - a} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n, \text{ где } \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$$

То есть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся

Тогда $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ - равномерно сходящийся

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta (z-a)^n$$

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$ - единственное разложение по Тейлору

Итак $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Th. Морера. $f(z)$ непрерывна в D и $\forall \gamma \subset D$ $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0 \Longrightarrow f(z)$ аналитична в D

При данных условиях $\exists \Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta \mid \Phi'(z) = f(z)$ и $\Phi(z)$ аналитична
Так как $\Phi(z)$ дифференцируема, то она дифференцируема сколько угодно раз. Таким образом, существуют $f'(z), f''(z)$ и так далее, а из этого означает, что $f(z)$ – аналитична

Th. Лиувилля. $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ и $\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid |f(z)| \le M \; \forall z \in \mathbb{C}$
Тогда $f(z) \equiv \text{const}$

Докажем, что $f'(z) = 0$
$|f'(z)| = \left[\text{контур } \gamma - \text{круг } z + \rho e^{i\varphi}\right] = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+\rho e^{i\varphi})\rho i e^{i\varphi}}{\rho^2 e^{2i\varphi}} d\varphi\right| \le$
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z+\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}}\right| d\varphi \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M}{\rho} d\varphi = \frac{M}{\rho} \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0 \Longrightarrow f(z) = \text{const}$

Nota. $w = \sin z \ne \text{const} \Longrightarrow \sin z$ – неограниченная функция

4.4. Ряд Лорана

Def. Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$, где $C_n, z_0 \in \mathbb{C}$, называется рядом Лорана в точке z_0

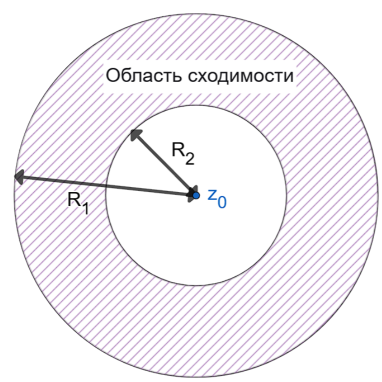
Nota. Исследуем ряд. Обозначим $f_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$

$f_2 = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} C_n (z - z_0)^n \overset{m=-n}{\Longrightarrow} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$

Тогда ряд можно записать так: $C_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(C_n (z - z_0)^n + \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}\right)$

Рассмотрим $f_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ – ряд согласно теореме Абеля сходится в круге с центром z_0 и радиусом $R_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$

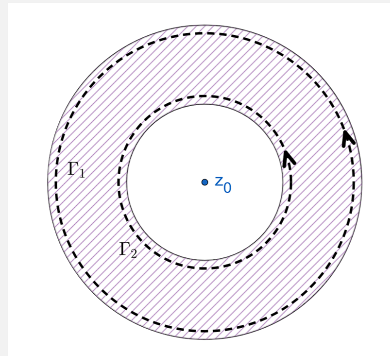
Рассмотрим $f_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} \overset{t=\frac{1}{z-z_0}}{=\!=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{-n} t^n$ – ряд сходится в круге $|t| < r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{-n}}{C_{-n-1}}\right|$ или $|z - z_0| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{-n-1}}{C_{-n}}\right| = R_2$



Таким образом, ряд Лорана сходится в *кольце* с внутренним радиусом R_2 и внешним радиусом R_1 и центром z_0 к значению некой аналитической функции $f(z)$

$f(z)$, аналитичная в кольце $K = (z_0, R_2, R_1)$, однозначно представима рядом Лорана в кольце K

$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \overset{\Gamma=\Gamma_2\cup\Gamma_1}{=\!=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$



Разложим $\frac{1}{\zeta - z}$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{(\zeta - z_0)(1 - (\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}))} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\ \frac{1}{-(z-z_0)(1-(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}))} = -\sum_{n=1}^\infty \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \end{array}\right.$$

1. Первый ряд сходится, если $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| < |\zeta - z_0|$ – это Γ_1

Также $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$

По теореме Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

Из этого $C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$

2. Второй ряд сходится, если $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| > |\zeta - z_0|$ – это Γ_2

Lab.

Nota. Таким образом, коэффициенты ряда Лорана $C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$

Def. Изолированной особой точкой однозначного характера называется точка $a \in \mathbb{C} \mid f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - a| < \rho$, но не определена в $z = a$

Def. Точка $a = \infty$ называется изолированной особой, если $f(z)$ аналитична в кольце $\rho < |z| < \infty$

Def. Устранимой особой точкой a называется точка, для которой $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$, в a функция не определена

Полюсом a называется точка, для которой $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$

Существенно особой точкой a называется точка, для которой $\nexists \lim\limits_{z\to a} f(z)$

Ex. 1. Для $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ точка $z = 0$ является устранимой особой – $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$

Ex. 2. Для $f(z) = \frac{z}{(z+i)^2}$ $\quad \lim\limits_{z\to -i}\frac{z}{(z+i)^2} = \left[\frac{1}{0^2} = \infty^2\right]$, $a = -i$ - полюс 2-ого порядка

Ex. 3. Для $f(z) = \sin z$ $\quad \nexists \lim\limits_{z\to\infty} \sin z$

Def. Для ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности особой точки $z = a \in \mathbb{C}$ $f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n}_{\text{это правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}}_{\text{это главная часть}}$

Def. Для ряда Лорана в $a = \infty$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n}_{\text{это главная часть}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}}_{\text{это правильная часть}}$

Def. Вычетом $\operatorname{res}(f(z), z_0)$ функции $f(z)$ в точке z_0 называется C_{-1} коэффициент ряда Лорана, если $z_0 \in \mathbb{C}$, и $-C_{-1}$, если $z_0 = \infty$

Из определения ясно, что для конечной точки $\operatorname{res}(f(z), z_0) = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta) d\zeta$

Для бесконечной $\operatorname{res}(f(z), z_0) = -C_{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} f(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(\zeta)d\zeta$

Здесь вместо γ берут для простоты окружность

Nota. Для вычисления вычетов используют более простые формулы, которые зависят от типа особых точек

Th. 1. z_0 – устранимая особая точка ($z_0 \in \mathbb{C}$) функции $f(z) \Longleftrightarrow$ главная часть ряда Лорана равна 0

То есть $f(z)$ в z_0 представима как $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

$\boxed{\Longrightarrow}$ z_0 – устранимая $\Longleftrightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = A \in \mathbb{C}$

Тогда в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ функция ограничена – $|f(z)| \le M, M \in \mathbb{R}$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{-n+1}} = \left[\gamma_\delta : \zeta = z_0 + \delta e^{i\phi}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\delta i e^{i\varphi} d\varphi}{(\delta e^{i\varphi})^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\delta^n e^{ni\varphi} d\varphi$$

$$|C_{-n}| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\delta^n d\varphi = M\delta^n \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $C_{-n} = 0 \Longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n = C_0 + C_1(z - z_0) + \ldots$

$\lim_{z\to z_0} f(z) = C_0 \in \mathbb{C}$ – устранимая

Следствие: вычет в устранимой точке равен 0

Th. 2. z_0 – полюс m-ого порядка $\iff$ главная часть ряда Лорана содержит не более m ненулевых членов подряд (то есть для $i > m$ $C_{-i} = 0$)

Полюс m-ого порядка функции $f(z)$ – точка z_0, для которой $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \implies \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$ и z_0 – ноль функции $g(z)$ порядка m

То есть $g(z)$ представима как $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, где $h(z)$ – аналитическая в z_0 и $h(z_0) \neq 0$

$\boxed{\implies}$ Рассмотрим $\dfrac{1}{h(z)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, при этом $\dfrac{1}{h(z_0)} = b_0 \neq 0$ ($h(z)$ – аналитическая $\implies \dfrac{1}{h(z)}$ – аналитическая $\implies \dfrac{1}{h(z)}$ – регулярная)

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z-z_0)^m}(b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots) = \underbrace{\frac{b_0}{(z-z_0)^m}}_{\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} \neq 0} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^{m-n}} + \cdots = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

При этом $C_{-n} = 0$ при $n \geq m + 1$

$\boxed{\impliedby}$ $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \dfrac{C_{-m}}{z - z_0}^m + \cdots + \dfrac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1 (z - z_0) + \cdots = \dfrac{1}{(z-z_0)^m} \underbrace{(C_{-n} + \cdots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1} + C_0 (z - z_0)^m + \ldots)}_{\text{аналитическая } \frac{1}{h(z)} \text{ в } z_0} = \dfrac{1}{(z-z_0)^m h(z)} \implies z_0$ – ноль функции $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$

Тогда $f(z) \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} \infty \implies z_0$ – полюс (порядок бесконечно большой равен m)

Th. 3. z_0 – существенно особая точка $\iff$ главная часть содержит бесконечное число члено

Очевидно, так как в другом случае, точка была бы полюсом или устранимой

Nota. Для особой точки $z_0 = \infty$ **Th. 1.**, **Th. 2.**, **Th. 3.** справедливы и доказываются аналогично:

1. z_0 – устранимая $\iff$ главная часть равна 0
2. z_0 – m-полюс $\iff$ главная часть содержит не более m членов и $C_m \neq 0$
3. z_0 – существенно особая $\iff$ главная часть содержит бесконечное число членов

Ex. 1. $f(z) = \dfrac{(e^z - 1)^2}{1 - \cos z}$, $z_0 = 0$

$f(z)=\dfrac{(e^z-1)^2}{1-\cos z}\underset{z\to0}{\sim}\dfrac{z^2}{\frac{z^2}{2}}=2$ – устранимая

Ex. 2. $f(z)=\operatorname{ctg}z-\dfrac{1}{z},\ z_0=0$

$$f(z)=\frac{\cos z}{\sin z}-\frac{1}{z}=\frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}-\dots}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\left(\frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}-\dots}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots}-1\right)\sim\frac{1}{z}\cdot k\frac{z^2}{1}\xrightarrow[z\to0]{}0 \text{ – устранимая}$$

Ex. 3. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)},\ z_0=\infty$

$z=\dfrac{1}{w}\quad f(z)=\tilde f(w)=w\dfrac{1}{\frac{1}{w}-1}=w^2\dfrac{1}{1-w}=w^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}w^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}w^{n+2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+2}}$ – устранимая (главной части нет)

Вычисления вычетов

Nota. z_0 – устранимая $\Longrightarrow \operatorname{res}(f(z),z_0)=0$

z_0 – существенно особая $\Longrightarrow \operatorname{res}(f(z),z_0)=\pm C_{-1}$

Th. z_0 – простой полюс ($m=1$). Тогда $\operatorname{res}(f(z),z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)$, где $z_0\in\mathbb{C}$

$f(z)=\dfrac{C_{-1}}{z-z_0}+C_0+C_1(z-z_0)+\dots$

$(z-z_0)f(z)=C_{-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n+1}\Longrightarrow\lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)=C_{-1}$

Th. z_0 – m-полюс. Тогда $\operatorname{res}(f(z),z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{(m-1)!}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m)$

$f(z)=\dfrac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+C_0+C_1(z-z_0)+\dots\quad\Big|\cdot(z-z_0)^m$

$f(z)(z-z_0)^m=C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+\dots\quad\Big|\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$

$\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m)=C_{-1}(m-1)!+C_0(z-z_0)(m-1)!+C_1(z-z_0)^2\dfrac{(m-1)!}{2!}+\dots$

$\dfrac{1}{(m-1)!}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m)=C_{-1}+C_0(z-z_0)+C_1(z-z_0)^2\dfrac{1}{2!}+\dots$

Далее переход к пределу, аналогичному доказательству выше

Th. Теорема о вычетах.

1. $f(z)$ аналитична в D кроме особых точек $z_1, \ldots, z_n$. Тогда $\int_{\Gamma_0} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k)$
2. $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ кроме особых точек $z_1, \ldots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k) = 0$

1. По теореме Коши (о многосвязной области) $\int_{\Gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i C_{-1}^{(k)} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k)$, где $C_{-1}^{(k)}$ – коэффициент для ряда Лорана в точке z_k
2. Очевидно по теореме Коши

X. Программа экзамена в 2024/2025

Часть 1.

1. Функции комплексного переменного (ФКП). Геометрия ФКП.
2. Предел, непрерывность функции комплексного переменного.
3. Элементарные функции. Степень и корень. Показательная функция и логарифм. Тригонометрические и гиперболические функции.
4. Дифференцирование и аналитичность функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Свойства аналитических функций.
5. Понятие конформного отображения. Геометрический смысл производной.
6. Интеграл по комплексной переменной. Теорема Коши. Первообразная.

Часть 2.

7. Числовые ряды. Регулярная функция. Функциональные ряды. Признаки сходимости.
8. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряд Тейлора.
9. Бесконечная дифференцируемость регулярной функции. Формула n-ой производной.
10. Ряды Лорана в конечной и бесконечно удаленной точке. Главная и правильная части.
11. Классификация изолированных особых точек однозначной аналитической функции.
12. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Определение и формулы вычисления вычета. Основные теоремы теории вычетов.