5.4. Замена переменной в двойном и тройном интегралах

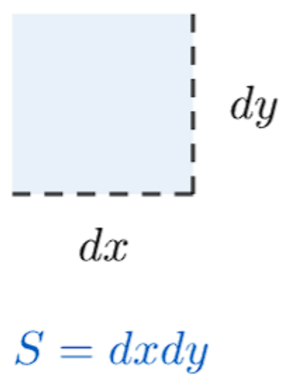
Проблема: для $S = \iint_D dxdy$, если $S_{D'} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho = \iint_{D'} d\rho d\varphi$, то это не площадь круга, а площадь прямоугольника S в распрямленных координатах

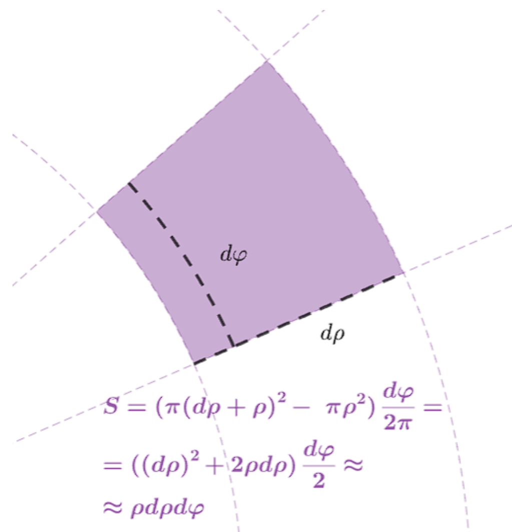
Введем Δs_i – площадь кольцевого сектора в полярных координатах, а $\Delta s_i'$ – площадь прямоугольника, причем $\Delta s_i \neq \Delta s_i'$

Nota. Будем искать поправочный коэффициент так, чтобы $\Delta s_i \approx$ коэфф. $\cdot \Delta s_i'$

Дроблению будем подвергать область D' в распрямленной системе координат

Введем новые криволинейные координаты: $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$, где функции $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемы по обоим аргументам





Заменим криволинейный параллелограмм $ABCD$ на обычный, стянув вершины хордами (погрешность в площади – бесконечно малая более высокого порядка, чем площадь)

$A = (x_A, y_A) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$

$B = (x_B, y_B) = (\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v))$

$C = (x_C, y_C) = (\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v))$

$D = (x_D, y_D) = (\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v))$

Площадь параллелограмма $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\theta = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$

$$\Delta s = S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_D - x_A & y_D - y_A & 0 \end{matrix} \right\| = \left| \vec{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix} \right|$$

$x_B - x_A = \varphi(u, v + \Delta v) - \varphi(u, v) = \Delta_v \varphi \approx \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v$

$y_B - y_A = \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u, v) = \Delta_v \psi \approx \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v$

$x_D - x_A = \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v) = \Delta_u \varphi \approx \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u$

$y_D - y_A = \psi(u+\Delta u, v) - \psi(u,v) = \Delta_u \psi \approx \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u$

$$\left|\vec{k}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \end{vmatrix}\right| \overbrace{\Delta v \Delta u}^{\Delta s'} \overset{|\det|=|J|}{\Longrightarrow} \Delta s \approx |J|\Delta s'$$

Nota. В пределе это точное равенство: $|J| = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta s'}$

Это легко понять, если считать частные приращения по теореме Лагранжа $\Delta_u\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(\xi,\eta)\Delta u \to \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\Delta u$

Def. Определитель $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$, где $\begin{cases} x_1 = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{cases}$ – преобразование координат $Ox_i \to O\xi_i$ ($f_k \in C^1_D$), называется определителем Якоби или якобиан

Построение интеграла:

1. Дробление D' в распрямленной Ouv
2. Выбор средней точки, поиск значения $f(\xi_i, \eta_i)$

   Значение величины на элементе $f(\xi_i,\eta_i)|J|dudv$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \sum f(\xi_i,\eta_i)|J|dudv$
4. В пределе интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(u,v)|J|dudv$

Якобианы в ПСК, ЦСК, СфСК

1. ПСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi \quad \frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi$, $\quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi \quad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = \rho\cos\varphi$

   $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$
2. ЦСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $\quad J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$
3. СфСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$ $\quad J = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\cos^2\varphi\sin^3\theta +$

   $\rho\sin\varphi\sin\theta(-\rho\sin\varphi\sin^2\theta - \rho\sin\varphi\cos^2\theta) - \rho^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\sin\theta = -\rho^2(\cos^2\varphi\sin\theta + \sin^2\varphi\sin\theta) = -\rho^2\sin\theta$

   $|J| = \rho^2\sin\theta$

Ex. Тело T, ограниченное уравнениями $\begin{matrix} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+y^2=z \end{matrix}$

Конус в ЦСК: $\rho = z, z > 0$

Параболоид в ЦСК: $\rho = \sqrt{z}, z > 0$

$V_T = \iiint_T dxdydz = \iiint_{T'} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} \rho dz = 2\pi \int_0^1 \rho z\Big|_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right)\Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$

Lab. Тело T, ограниченное уравнениями $\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=1 \\ \sqrt{x^2+y^2}=z \end{matrix}$ – «мороженка», считать в СфСК

5.5. Криволинейные интегралы

Для криволинейных интегралов I рода область интегрирования – кривая $l = \breve{AB}$ (дуга). Для простоты начнем с плоской дуги

На l действует скалярная функция $f(x, y)$ (физический смысл – плотность, то есть имеем неоднородный кривой стержень)

Задача в нахождении «суммарной» величины $f(x, y)$, то есть интеграла: «складываем» элементы $f_{\text{ср}}(x, y)dl$

Получаем $\int_l f(x, y)dl = \int_{AB} f(x, y)dl$