

4.7.3. Касательная и нормаль к поверхности

Будем исследовать поверхность π с уравнением $F(x, y, z(x, y)) = 0$ (неявное задание)

Def. Прямая τ называется касательной прямой к поверхности π в точке $P(x, y, z)$, если эта прямая касается какой-либо кривой, лежащей на π и проходящей через P

Nota. Кривая получается (обычно) сечением π какой-либо плоскостью

Nota. В одной точке может быть множество касательных, но это не всегда так

Nota. Договоримся различать два типа точек поверхности: обыкновенные и особые

Def. Поверхность π задана $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Точка M называется обыкновенной, если существуют все $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$, они непрерывны и не все равны нулю

Def. Точка M называется особой, если $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ или хотя бы одна из производных не существует

Th. Все касательные прямые к π в обыкновенной точке M_0 лежат в одной плоскости

\vec{s} – направляющий вектор касательной τ , проведенной к кривой l в некоторой секущей плоскости

$d\vec{s}$ – вектор малых приращений, то есть $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$

$d\vec{p}$ – проекция $d\vec{s}$ на Oxy , то есть $d\vec{p} = (dx, dy)$

Кривую l можно задать параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \xi(t) \\ z = \theta(t) \end{cases}$$

Прямая τ имеет уравнение

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}$$

При отходе от M_0 на малое расстояние по поверхности (точнее по кривой l) задаем приращение $dt \neq 0$

Домножим уравнение на dt

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}}$$

Из условия обыкновенности точки M_0 следует дифференцируемость функции F . Кроме того, уравнение можно преобразовать к виду $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, где $x(t), y(t), z(t)$ – тоже дифференцируемы в точке M_0

Запишем F'_t , как вложенную:

$$F'_t = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

Или $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = 0$

Таким образом, $\vec{N} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = 0$. То есть $\vec{N} \perp \frac{d\vec{s}}{dt}$, при том, что $d\vec{s}$ выбран произвольно (кривая l – кривая произвольного сечения)

Итак, вектор \vec{N} перпендикулярен любой касательной τ к поверхности π в точке M_0 .

Следовательно, все касательные лежат в плоскости κ такой, что $\vec{N} \perp \kappa$

Def. Плоскость κ (содержащая все касательные прямые τ к π в точке M_0) называется касательной плоскостью к π в M_0

Def. Прямая в направлении \vec{N} через точку M_0 называется нормалью к π в M_0

\vec{N} – вектор нормали к поверхности в точке

Уравнение (π) $F(x, y, z) = 0, \quad \vec{N} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right), \quad M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi, \kappa, n$

Касательная плоскость (κ) $\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$

Нормаль (n) $\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{x - x_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{y - y_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{z - z_0}$

Nota. Получим вектор нормали в случае явного

задания $\pi \quad z = z(x, y)$

Пересечем π в точке M_0 плоскостями $x = x_0, y = y_0$, в сечении получим кривые с касательными векторами \vec{m} и \vec{p} в точке M_0

Вектор нормали к π в $M_0 \quad \vec{n} = \vec{m} \times \vec{p}$

Найдем \vec{m}, \vec{p} . В сечении $x = x_0$ введем вектор $d\vec{p} \parallel \vec{p}$:

$$d\vec{p} = \left(0, dy, \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy$$

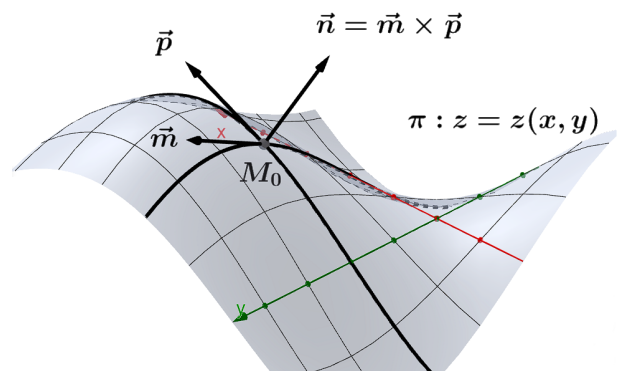
Аналогично найдем \vec{m} в сечении $y = y_0$:

$$\vec{m} \parallel d\vec{m} = \left(dx, 0, \frac{\partial z}{\partial x} dx \right) = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx$$

Так как модуль \vec{n} не важен, а только направление,

$$\text{то будем искать } \vec{n} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x} \right) \times \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{i} \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) - \vec{j} \frac{\partial z}{\partial y} + \vec{k} =$$



$$= \left(-\frac{\partial z}{\partial x}; -\frac{\partial z}{\partial y}; 1 \right)$$

Тогда уравнение κ :

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0) = dz$$

Уравнение нормали n : $\frac{x - x_0}{-\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{-\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{1}$

Nota. Последние уравнения можно получить проще, если свести уравнение $z = f(x, y)$ к уравнению $z - f(x, y) = F(x, y, z) = 0$

Lab. Вывести уравнение κ и n , пользуясь предыдущим замечанием

Nota. Если найти $\vec{n}^- = \vec{p} \times \vec{m} = -(\vec{m} \times \vec{p})$, то получим также вектор нормали, но обращенный в противоположную сторону

Будем говорить, что \vec{n}^+ - положительный вектор нормали, если угол $\angle \gamma = \angle(\vec{n}^+, Oz) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

\vec{n}^- - отрицательный, если угол $\angle \gamma = \angle(\vec{n}^-, Oz) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

Соответственно этому верхней стороной π называется та, у которой аппликата вектора нормали положительна

Нижней стороне соответствует \vec{n}^- . Если $\vec{n} \perp Oz$, то это боковая сторона

4.7.4. Экстремумы ФНП ($\Phi_2\Pi$)

Def. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z = z(x, y)$, если $\forall M \in U_\delta(M_0) \quad z(M_0) \geq z(M)$ (для минимума $z(M_0) \leq z(M)$)

Nota. То же, что $z(M) - z(M_0) = z - z_0 = \Delta z \leq 0$ (max), $\Delta z \geq 0$ (min)

Мет. Для функции одной переменной формулировали необходимое условие экстремума (лемма Ферма), из этого условия получали точки, подозрительные на экстремум: критические – $f'(x_0) = 0$ или $\nexists f'(x_0)$ (для острого экстремума); стационарные – $\exists f'(x_0) = 0$ (частный случай критич.)

Далее при помощи достаточных условий (признаков) проверяли наличие экстремума в критических точках

Nota. Все термины переносятся на функции нескольких переменных. Необходимое условие и достаточное условие аналогичны

Th. Необходимое условие экстремума (гладкого):

$z = z(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; z_0 - точка гладкого экстремума, то есть $\exists \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в M_0 и $\forall M \in U_\delta(M_0)$ $z_0 \leq z(M)$ или $z_0 \geq z(M)$

$$\text{Тогда} \begin{cases} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 0 \\ \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = 0 \end{cases}$$

Аналогично лемме Ферма в сечениях $x = x_0, y = y_0$

Для существования острого экстремума нужно рассмотреть не существование или бесконечность $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $\frac{\partial z}{\partial y}$

Если же функция трижды дифференцируема исследования на характер экстремума можно проводить с помощью вторых производных

Th. Достаточное условие (гладкого) экстремума

Пусть $z = z(x, y)$ непрерывна в окрестности M_0 (критическая точка $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 0, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = 0$) вместе со своими первыми и вторыми производными (можно потребовать трижды дифференцируемость)

Тогда, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ обозн } A, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ обозн } B, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ обозн } C$, то

1. $AC - B^2 > 0, A > 0 \implies M_0$ - точка минимума
2. $AC - B^2 > 0, A < 0 \implies M_0$ - точка максимума
3. $AC - B^2 < 0 \implies$ в точке M_0 нет экстремума
4. $AC - B^2 = 0 \implies$ нельзя утверждать наличие или отсутствие экстремума в точке (требуется дополнительные исследования)

Функция z дважды дифференцируема, тогда ($z_0 = z(M_0)$)

$$\Delta z = z - z_0 = \left. \frac{dz}{1!} \right|_{M_0} + \left. \frac{d^2 z}{2!} \right|_{M_0} + o((\Delta \rho)^2)$$

$$\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad dx = \Delta \rho \cos \alpha, \quad dy = \Delta \rho \sin \alpha$$

$$o((\Delta \rho)^2) = \lambda (\Delta \rho)^3$$

Заметим, что $\left. dz \right|_{M_0} = 0$, так как M_0 - критическая

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2 = A(dx)^2 + 2B dx dy + C(dy)^2 = A(\Delta \rho)^2 \cos^2 \alpha + 2B(\Delta \rho)^2 \cos \alpha \sin \alpha + C(\Delta \rho)^2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{Тогда } \Delta z = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 (A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha + 2\lambda \Delta \rho)$$

Далее рассмотрим отдельно случаи $A \neq 0$ и $A = 0$

$$A \neq 0: A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha = \frac{A^2 \cos^2 \alpha + 2AB \cos \alpha \sin \alpha + B^2 \sin^2 \alpha + (AC - B^2) \sin^2 \alpha}{A} = \frac{(A \cos \alpha + B \sin \alpha)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \alpha}{A}$$

1. Пусть $AC - B^2 > 0$ ($A > 0$): Числитель неотрицательный и не равен нулю (иначе $\sin \alpha = 0$, то тогда $A \cos \alpha \neq 0$)

Итак, числитель и знаменатель больше нуля. Обозначим всю дробь за $k^2 > 0$

Вернемся к $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta \rho)^2(k^2 + 2\lambda \Delta \rho)$

Устремим $\Delta \rho \rightarrow 0$, начиная с какого-то $\delta \forall M \in U_\delta(M_0) \quad k^2 + \lambda \Delta \rho > 0$

То есть $\Delta z > 0$ в $U_\delta(M_0) \implies M_0$ – точка минимума (локально в $U_\delta(M_0)$)

2. Пусть $AC - B^2 > 0$ ($A < 0$), тогда $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta \rho)^2(-k^2 + 2\lambda \Delta \rho) < 0$ при достаточно малом $\Delta \rho$

Аналогично $\Delta z < 0 \implies M_0$ – точка максимума

3. Пусть $AC - B^2 < 0$ ($A > 0$), тогда фиксируем направления $\alpha = 0 \implies \sin \alpha = 0$

$$\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta \rho)^2(A + 2\lambda \Delta \rho) > 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B} \implies \frac{(AC - B^2) \sin^2 \alpha}{A} = -k^2, \Delta z = \frac{(\Delta \rho)^2}{2}(-k^2 + 2\lambda \Delta \rho) < 0$$

Вдоль разных путей $\alpha = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$, разный знак $\Delta z \implies$ нет экстремума

Nota. Можно аналогично рассмотреть $A < 0$

4. $A = 0$, вернемся к выражению $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta \rho)^2(\sin \alpha(2B \cos \alpha + C \sin \alpha) + 2\lambda \Delta \rho)$

Пусть α – бесконечно малая, тогда $\sin \alpha \approx 0$, $C \sin \alpha \approx 0$, $2B \cos \alpha \approx 2B$. Тогда знак $\sin \alpha \cdot 2B$ зависит от α

То есть Δz колеблется вместе с α по знаку \implies нет экстремума

Можно доказать при $A \neq 0$, например, выбрав $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$, что знак Δz зависит от α