Пусть e_1 - собственный вектор $\mathcal{A}$

e_1 найдется, если $\mathcal{A}x = \lambda x$ имеет нетривиальное решение $\iff \det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0$ $\overset{\mathcal{A}\text{ - самосопряженный}}{\Longrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R}$

Для вектора e_1 строим инвариантное подпространство $V_1 \perp e_1$ (см. лемму), $\dim V_1 = n - 1$

В подпространстве V_1 $\mathcal{A}$ действует как самосопряженный и имеет собственный вектор $e_2 \perp e_1$. Для e_2 строим $V_2 \perp e_2, e_1$

Затем, $V_3, V_4, V_5, \dots$, в котором, найдя e_i, ортогональный всем предыдущим

Составили ортогональный базис из e_i, который можно нормировать

Nota. Чтобы упорядочить построение базиса, в котором V_i может брать $\max \lambda_i$

Nota. Из теоремы следует, что самосопряженный оператор диагонализируется: сумма алгебраический кратностей равна n (степень уравнения), а сумма геометрических - $\dim\{e_1, \dots, e_n\} = n$

Разложение самосопряженного оператора в спектр:

$x \in V^n \quad \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис из собственных векторов $\mathcal{A}$ (ортонормированный)

$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n = (x, e_1)e_1 + \dots + (x, e_n)e_n = \sum\limits_{i=1}^n (x, e_i)e_i$

Def. Оператор $P_ix = (x, e_i)e_i$ называется проектором на одномерное пространство, порожденное e_i (линейная оболочка)

Свойства:

1. $P_i^2 = P_i$ (более того $P_i^m = P_i$)
2. $P_iP_j = 0$
3. $P_i = P_i^* \quad ((P_ix, y) \overset{?}{=} (x, P_iy)) \iff (P_ix, y) = ((x, e_i)e_i, y) = (x, e_i)(e_i, y) = (x, (y, e_i)e_i) = (x, P_iy)$

Итак, если $\mathcal{A} : V^n \to V^n$ - самосопряженный и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис собственных векторов $\mathcal{A}$, то

$x = \sum\limits_{i=1}^n P_ix = \sum\limits_{i=1}^n (x, e_i)e_i$

$\mathcal{A}x \overset{y = \Sigma(y, e_i)e_i}{=} \sum\limits_{i=1}^n (\mathcal{A}x, e_i)e_i = \sum\limits_{i=1}^n (x, \mathcal{A}e_i)e_i = \sum\limits_{i=1}^n (x, \lambda_ie_i)e_i = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i(x, e_i)e_i = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_iP_ix$

$\iff \mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_iP_i$ - спектральное разложение $\mathcal{A}$, спектр $= \{\lambda_1, \dots, \lambda_n \mid \lambda_i \le \dots \le \lambda_n\}$

Ex. $y = y_1e_1 + y_2e_2 = (y, e_1)e_1 + (y, e_2)e_2 = (\mathcal{A}x, e_1)e_1 + (\mathcal{A}x, e_2)e_2 = \lambda_1x_1e_1 + \lambda_2x_2e_2$

2.9. Ортогональный оператор

Мет. Ортогональный оператор $T : V^n \to V^n \overset{def}{\iff}$ для любого ортонормированного базиса матрица T - ортогональная $T^{-1} = T^T$

Nota. Иначе говоря, T - ортогональный оператор $\Longleftrightarrow T^{-1} = T^* \Longrightarrow TT^* = I$

Def. T - ортогональный оператор, если $(Tx, Ty) = (x, y)$
Следствие: $\|Tx\| = \|x\|$, то есть T сохраняет расстояние

Nota. Ранее в теореме об изменении матрицы A при преобразовании координат T - ортогональный оператор
Это необязательно, то есть можно переходить в другой произвольный базис (доказательство теоремы позволяет)
Диагонализация самосопряженного оператора: для матрицы A_f

1. Находим $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
2. Находим $e_1, \ldots e_n$ - ортогональный базис собственных векторов
3. Составляем $T = \begin{pmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \ldots & e_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица поворота базиса
4. Находим $T_{e \to f} A_f T_{f \to e} = A_e$ - диагональная

Таким образом диагонализация самосопряженного $\mathcal{A}$ - это нахождение композиции поворотов и симметрий, как приведение пространства к главным направлением

3. Билинейные и квадратичные формы

3.1. Билинейные формы

Def. Пусть $x, y \in V^n$. Отображение $\mathcal{B} : V^n \to \mathbb{R}$ (обозначается $\mathcal{B}(x, y)$) называется билинейной формой, если выполнены

1. $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\mathcal{B}(x, z) + \mu\mathcal{B}(y, z)$
2. $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\mathcal{B}(x, y) + \mu\mathcal{B}(x, z)$

Ex. 1. $\mathcal{B}(x, y) \overset{\text{в } E^n_{\mathbb{R}}}{=} (x, y)$
Ex. 2. $\mathcal{B}(x, y) = P_y x$ - проектор x на y

Для билинейной формы можно определить матрицу

Th. $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис V_n, $u, v \in V^n$. Тогда $\mathcal{B}(u, v) = \sum\limits_{j=1}^n \sum\limits_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j$, где $b_{ij} \in \mathbb{R}$

$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$
$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$

$$\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}\Big(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{B}\Big(e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^n u_i \Big(\sum_{j=1}^n v_j \mathcal{B}(e_i, e_j)\Big) \overset{\text{обозн. } \mathcal{B}(e_i, e_j) = b_{ij}}{=} \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n v_j b_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j b_{ij}$$

Nota. Составим из $\mathcal{B}(e_i, e_j)$ матрицу $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$

Def. 1. Если $\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}(v, u)$, то $\mathcal{B}$ - симметричная
Def. 2. Если $\mathcal{B}(u, v) = -\mathcal{B}(v, u)$, то $\mathcal{B}$ - антисимметричная
Def. 3. Если $\mathcal{B}(u, v) = \overline{\mathcal{B}(v, u)}$, то $\mathcal{B}$ - кососимметричная (в $\mathbb{C}$)

Def. $\operatorname{rang} \mathcal{B}(u, v) \overset{def}{=} \operatorname{rang} B$

Nota. 1. $\mathcal{B}$ называется невырожденной, если $\operatorname{rang} \mathcal{B} = n$

Nota. 2. $\operatorname{rang}\mathcal{B}_e = \operatorname{rang}\mathcal{B}_{e'}$ (e, e' - различные базисы V^n), то есть $\operatorname{rang}\mathcal{B}$ инвариантно относительно преобразования $e \to e'$

Ex. $\mathcal{B}(u,v) \overset{\text{ск. пр.}}{=} (u,v)$
$u = u_1e_1 + u_2e_2, v = v_1e_1 + v_2e_2$, тогда $\mathcal{B}(e_i, e_j) \overset{\text{об}}{=} b_{ij} = (e_i, e_j)$
Таким образом, $B = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{pmatrix}$ - матрица Грама

Ex. $u(t) = 1 + 3t, v(t) = 2 - t,\ \{e_i\} = (1, t),\ \mathcal{B}(u,v) = (u,v) = \displaystyle\int_{-1}^{1} uvdt$
Тогда, $B = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} dt & \int_{-1}^{1} tdt \\ \int_{-1}^{1} tdt & \int_{-1}^{1} t^2dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$