

Мет.  $y'' + py' + qy = f(x)$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$

Для начала  $y'' + py' + qy = 0$  – ЛОДУ<sub>2</sub>

$$C_2'(x) = C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$$

Рассмотрим три случая для  $\lambda_{1,2}$ :

1.  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$  – случай различных вещественных корней

$$C_2(x) = \int C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = \frac{C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_2 = \frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} + C_2$$

Тогда,  $y(x) = C_2(x)e^{\lambda_2 x} = (\tilde{C}_1 e^{\lambda_1 - \lambda_2} x + C_2)e^{\lambda_2 x} = \boxed{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$  – решение ЛОДУ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

2.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$  – случай вещественных кратных корней

$$C_2'(x) = C_1 e^{0x} = C_1 \implies C_2(x) = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$$

$$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x} = \boxed{C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} = y(x)}$$
 – решение ЛОДУ,  $\lambda_1 = \lambda_2$

3.  $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$  – случай комплексно сопряженных корней

Так как  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то аналогично первому случаю  $y(x) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x + C_2 e} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$  – решение ЛОДУ

Получим  $\mathbb{R}$ -решения:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (C_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)) = e^{\alpha x} (C_1 + C_2) \cos \beta x + e^{\alpha x} i (C_1 - C_2) \sin \beta x$$

$$\operatorname{Re} y(x) = \underbrace{(C_1 + C_2) e^{\alpha x} \cos \beta x}_{u(x)}, \operatorname{Im} y(x) = \underbrace{(C_1 - C_2) e^{\alpha x} \sin \beta x}_{v(x)} \quad y(x) = u(x) + iv(x)$$

Так как  $y(x)$  – решение ЛОДУ:

$$u'' + iv'' + pu' + ipv' + qu + iqv = 0$$

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0 \quad \forall x \in [\alpha; \beta], \text{ то есть } z \in \mathbb{C} \text{ и } z = 0$$

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0, \\ v'' + pv' + qv = 0 \end{cases}$$

Тогда можно считать решением  $y(x) = u(x) + v(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$  – решение ЛОДУ,  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

*Nota.* Ни про одно из полученных решений нельзя сказать, что оно общее (см. след. пункт)

Также еще не решено ЛНДУ<sub>2</sub>

#### 4.5.3. Свойства решений ЛДУ<sub>2</sub>

**Def.**  $Ly \stackrel{\text{def}}{=} y''(x) + py'(x) + qy(x)$  – линейный дифференциальный оператор

$$L : E \subset C_{[a;b]}^2 \rightarrow F \subset C_{[a;b]}$$

*Nota.* Все определения линейного пространства, базиса, линейной независимости, линейной оболочки сохраняются. А ЛОДУ<sub>2</sub> записывается как  $Ly = 0$ , ЛНДУ<sub>2</sub> –  $Ly = f(x)$

**Th. 1.**  $\exists y_1, y_2$  - частные решения ЛОДУ, то есть  $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$

Тогда  $Ly = 0$ , если  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$$Ly = y'' + py' + qy = (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 Ly_1 + C_2 Ly_2 = 0$$

**Def.**  $y_1, y_2$  - линейно независимы  $\iff C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \implies \forall C_1 = 0 \iff \nexists k : y_2 = k y_1, k \in \mathbb{R}$

*Mem.* Для определения линейной независимости в Линейной алгебре мы использовали  $\text{rang } A$  или  $\det A$

Введем индикатор линейной независимости. Заметим, что если  $y_1, y_2$  - линейно зависимы, то  $y_1', y_2'$  - линейно зависимы

**Def.**  $W \stackrel{\text{обозн}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1(x)}{dx} & \frac{dy_2(x)}{dx} \end{vmatrix}$  - определитель Вронского или вронскиан

**Th. 2.**  $y_1, y_2$  - линейно зависимы  $\implies W = 0$  на  $[a; b]$

$$\begin{matrix} y_2 = k y_1 \\ y_2' = k y_1' \end{matrix} \implies W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

**Th. 3.**  $x_0 \in [a; b]$ , пусть  $W(x_0) = W_0$ . Тогда:

$$W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \forall x \in [a; b]$$

$$W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$$

Пусть  $y_1(x), y_2(x)$  - решения ЛОДУ,

$$\begin{cases} Ly_1 = 0 & | \cdot y_2 \\ Ly_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1'' y_2 + p y_1' y_2 + q y_1 y_2 = 0 \\ y_2'' y_1 + p y_2' y_1 + q y_2 y_1 = 0 \end{cases}$$

$$(y_1'' y_2 - y_2'' y_1) + p(y_1' y_2 - y_2' y_1) = 0$$

$$W'(x) + pW(x) = 0$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -p dx$$

$$W(x) = C e^{-\int_{x_0}^x p dx}$$

$$W_0 = C e^{-\int_{x_0}^{x_0} p dx} = C$$

$$\text{Тогда } W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^x p dx} \iff \begin{cases} W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \\ W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \end{cases} \quad \forall x \in [a; b]$$

**Th. 4.**  $y_1, y_2$  – линейно независимы  $\implies W(x) \neq 0$  на  $[a; b]$

Докажем от противного

Пусть  $\exists x_0 \in [a; b] \mid W(x_0) = 0 \implies W(x) = 0 \forall x \in [a; b] \iff \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \forall x \in [a; b]$

Можно поделить на  $y_1^2$ , так как  $y_1, y_2$  – линейно независимы. Тогда  $\frac{W}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \implies \frac{y_2}{y_1} = k \in \mathbb{R} \iff y_2 = ky_1$  – линейно зависимы, противоречие

*Nota.* Общее решение ЛОДУ<sub>2</sub> – это семейство всех решений (интегральных кривых), каждое из которых проходит через точку  $(x_0, y_0) \in D$  и ему соответствует свой и единственный набор  $(C_1, C_2)$

**Th. 5.**  $y_1, y_2$  – линейно независимые решения ЛОДУ, тогда  $\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$  – общее решение ЛОДУ<sub>2</sub>

Нужно убедиться, что через точку  $(x_0, y_0) \in D$  проходит и только одна кривая  $\bar{y}(x_0)$

Зададим НУ:  $\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}, \end{cases}$  тогда  $\begin{cases} \bar{y}(x_0) = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} \\ \bar{y}'(x_0) = C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' \end{cases}$  – задача Коши

Знаем, что  $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$  – решение (просто, не общее)

Тогда в  $x_0$   $\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = \bar{y}_0 \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = \bar{y}_0' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_0' \end{pmatrix}$  – система крамеровского типа

$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = W_0 \neq 0 \iff \exists! (C_1, C_2)$  – решение СЛАУ

Таким образом через всякую  $x_0$  проходит одна кривая  $\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$

*Nota.* Вывод: если найдены какие-либо линейно независимые  $y_1, y_2$ , то общее решение ЛОДУ<sub>2</sub> будет  $C_1 y_1 + C_2 y_2 = \bar{y}$

**Def.** Такие  $\{y_1, y_2\}$  называется ФСР ЛОДУ<sub>2</sub>

*Nota.* Тогда, найденные решения ЛОДУ – все общие

1.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ : ФСР  $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}, \lambda_i \in \mathbb{R}$
2.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ : ФСР  $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\}$
3.  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ : ФСР  $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

**Th. 6.** Решение ЛНДУ  $Ly = f(x)$

$\bar{y}(x) : L\bar{y} = 0$  – общее решение ЛОДУ

$y^*(x) : Ly^*(x) = f(x)$  – частное решение ЛНДУ

Тогда  $y(x) = \bar{y} + y^*$  – общее решение ЛНДУ

Lab.