Nota. В строгом определении интегральная сумма строится так:

$\overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$ – элементарная дуга

Δl_i – длина элемента

Δs_i – длина стягивающей дуги

$\Delta l_i \approx \Delta s_i$

$M_{\text{ср.}}(\xi_i, \eta_i)$ – средняя точка элемента

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

Определим криволинейный интеграл II рода. Задача (вычисление работы силы вдоль пути): вдоль пути $\overset{\frown}{AB}$ действует сила $\overrightarrow{F} = (P(x,y), Q(x,y))$. Найдем элементарную работу $dA = \vec{F}_{\text{ср.}} d\vec{s}$, где $d\vec{s}$ – элементарное приращение

$d\vec{s} = (dx, dy) = (\cos\alpha ds, \sin\alpha ds)$

$\vec{F}_{\text{ср.}}$ – значение силы на элементарном участке в какой-либо его точке

Тогда $dA = (P(x,y), Q(x,y)) \cdot (dx, dy) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, а по всей кривой $A = \int_{AB} dA = \int_{AB} Pdx + Qdy$ – интеграл II рода (в проекциях)

Nota. В проекциях, потому что $F_x = P, F_y = Q$, таким образом скалярное произведение записано в проекциях

При этом часто рассматривают по отдельности: $\int_{AB} f(x,y)dx$ и $\int_{AB} g(x,y)dy$

Nota. Связь интегралов I и II рода:

$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P,Q)(dx,dy) = \int_L (P,Q)(\cos\alpha, \cos\beta)\underbrace{ds}_{\approx dl} = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl$

Обозначим $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

По теореме Лагранжа $\exists(\xi, \eta) \in$ элементарной дуге, касательная которой параллельна ds

Тогда $d\vec{s} = \vec{\tau}ds \approx \vec{\tau}dl$, где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, касательной в (ξ, η)

Тогда $\int_L Pdx + Qdy \overset{\text{пред. в вект. форме}}{=\!=} \int_L \overrightarrow{F}\overrightarrow{\tau}\,dl = \int_L \overrightarrow{F} \underbrace{\overrightarrow{dl}}_{\text{ориент. эл. дуги}}$

<u>Свойства</u>:

Nota. Свойства, не зависящие от прохода дуги, аналогичны свойствам определенного интеграла

- Направление обхода:

  I рода:
  $\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl$

  II рода:
  $\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy$

Def. Часто рассматривают замкнутую дугу, называемую контур. Тогда интегралы обозначаются так: $\oint_K f dl$ и $\oint_K Pdx + Qdy$.

Если K (контур) обходят против часовой стрелки, то обозначают $\oint_{K^+}$, иначе $\oint_{K^-}$

Вычисление сводится к $\int_a^b dx$ или $\int_\alpha^\beta dy$ или $\int_\tau^T dt$

1. Параметризация дуги L:
   $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $\quad \varphi, \psi \in C^1_{[\tau, T]}$ $\quad \begin{matrix} A(x_A, y_A) = (\varphi(\tau), \psi(\tau)) \\ B(x_B, y_B) = (\varphi(T), \psi(T)) \end{matrix}$
   При этом задании L $\quad y = y(x), x \in [a, b]$ или $x = x(y), y \in [\alpha, \beta]$ – частные случаи параметризации
2. I рода:
   $\int_L f(x, y) dl = \left[dl = \sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2} |dt| \right] =$
   $= \int_\tau^T f(t) \sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2} |dt|$

   II рода:
   $\int_{L = \overset{\frown}{AB}} P dx + Q dy = [dx = \varphi_t' dt, dy = \psi_t' dt] =$
   $= \int_\tau^T (P\varphi' + Q\psi') dt$

Ex. Дуга L – отрезок прямой от $A(1, 1)$ до $B(3, 5)$. Вычислим $\int_{AB} (x + y) dl$ двумя способами:

1. $\int_{AB} (x + y) dl = \left[\begin{matrix} AB : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} \\ \text{или } y = 2x - 1, x \in [1, 3] \\ f(x, y) = x + 2x - 1 = 3x - 1 \\ dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{5} dx \end{matrix} \right] = \int_1^3 (3x - 1)\sqrt{5} dx = \sqrt{5} \left(\frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_1^3 = \sqrt{5}(12 - 2) = 10\sqrt{5}$
2. $\int_{AB} (x + y) dx + (x + y) dy = \left[\begin{matrix} x \uparrow_1^3, y \uparrow_1^5 \\ y = 2x - 1, x = \frac{y+1}{2} \\ dx = dx, dy = dy \end{matrix} \right] = \int_1^3 (x + 2x - 1) dx + \int_1^5 \left(\frac{y + 1}{2} + y \right) dy =$
   $\left(\frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_1^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{3y^2}{2} + y \right) \Big|_1^5 = 10 + 20 = 30$

Th. Формула Грина

Пусть дана область $D \subset \mathbb{R}^2$, которая обходится в правильном направлении $(\uparrow Ox, \uparrow Oy)$

K – гладкая замкнутая кривая (контур), которая ограничивает D

В области D действует $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ – непрерывные дифференциалы

Тогда $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{K^+} P dx + Q dy$

$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x = x_1(y)}^{x = x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_{y = y_1(x)}^{y = y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_\alpha^\beta \left(Q(x, y) \Big|_{x = x_1(y)}^{x = x_2(y)} \right) dy - \int_a^b \left(P(x, y) \Big|_{y = y_1(x)}^{y = y_2(x)} \right) dx =$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(Q(x_2(y),y)-Q(x_1(y),y))dy-\int_{a}^{b}(P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x)))dx=\int_{NST}Qdy-\int_{NMT}Qdy-\int_{MTS}Pdx+\int_{MNS}Pdx=\underbrace{\int_{NST}Qdy+\int_{TMN}Qdy}_{\oint_{K^+}Qdy}+\underbrace{\int_{STM}Qdy+\int_{MNS}Qdy}_{\oint_{K^+}Pdx}=\oint_{K^+}Pdx+Qdy$$