

$$\text{Th. } A' = T_{e \rightarrow e'} A T_{e \rightarrow e'}^{-1}$$

Nota. $C = A + \lambda B$

Следствия:

1. $TCT^{-1} = T(A + \lambda B)T^{-1} = TAT^{-1} + \lambda TBT^{-1}$
2. $B = I \quad TBT^{-1} = TIT^{-1} = I$, т. к. $TI = T, TT^{-1} = I$
3. $\det A^{-1} = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A \det T^{-1} = \det A \cdot 1$

Nota. То есть характеристика нашего объекта - инвариант при преобразовании T

Def. Матрица A называется ортогональной если $A^{-1} = A^T$

Следствие: $AA^{-1} = AA^T = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Для элементов матрицы:

$$\forall i \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ij} = (A_i, A_i) = 1$$

$$\forall i, j (i \neq j) \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = (A_i, A_j) = 0$$

$$\text{В общем, } (A_i, A_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Def. Оператор \mathcal{A} называется ортогональным, если его матрица ортогональна

Возникает вопрос: A ортогональна в каком-либо базисе или во всех сразу?

Свойство: если \mathcal{A} - ортогонален, то $\det A = \pm 1$ (следует из определения $\det(AA^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = \det(A) \cdot \det(A) = \det(I) = 1 \implies \det(A) = \pm \sqrt{1}$)

Th. $T_{e \rightarrow e'}$ - преобразование координат в V^n . Тогда T - ортогональный оператор

Здесь базис e - ортонормированный базис

$$\text{Пусть в базисе } e \text{ матрица } T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \text{ - неортогональна}$$

Тогда $e'_1 = \sum_{i=1}^n \tau_{1i} e_i \quad \left| \cdot e'_1 \right.$
 $1 = (e'_1, e'_1) = \left(\sum_{i=1}^n \tau_{1i} e_i \right)^2 = \tau_{11}^2 e_1^2 + \tau_{11} e_1 \tau_{12} e_2 + \dots = \tau_{11}^2 + \dots + \tau_{1n}^2 = 1$, то есть строка - это
 единичный вектор
 $0 = (e'_1, e'_2) = (\tau_{11} e_1 + \tau_{12} e_2 + \dots) \cdot (\tau_{21} e_1 + \tau_{22} e_2 + \dots) =$ произведение 1-ой строки на 2-ую,
 то есть строки ортогональны
 Таким образом, матрица T - ортогональна

Nota. Тогда $A' = TAT^{-1} = TAT^T$

2.7. Собственные векторы и значения оператора

Def. Инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ - это $U = \{x \in V_1 \in V \mid \mathcal{A}x \in V_1\}$

Ex. $V = \mathcal{P}_n(t)$ - пространство многочленов степени $\leq n$ на $[a; b]$, $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$

Nota. $\text{Ker } \mathcal{A}, \text{Im } \mathcal{A}$ - инвариантные ($A : V \rightarrow V$)

Def. Характеристическим многочленом оператора $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ ($\mathcal{A}x = Ax, A$ - матрица в некоем базисе) называют $\xi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Nota. Определитель $|A - \lambda I|$ представляет собой

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Nota. Уравнение $\xi(\lambda) = 0$ называется вековым

Def. Собственным вектором оператора \mathcal{A} , отвечающим собственному значению λ , называется вектор $x \neq 0$ такой, что $\mathcal{A}x = \lambda x$

Def. Собственное подпространство оператора \mathcal{A} , отвечающее числу λ_i , определяется как $U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$

Def. $\dim U_{\lambda_i} = \beta$ - геометрическая кратность числа λ_i

Th. $\mathcal{A}x = \lambda x \iff \det(A - \lambda I) = 0, \quad A : V^n \rightarrow V^n$

$$|A - \lambda I| = 0 \iff \text{rang}(A - \lambda I) < n \iff \dim \text{Im}(A - \lambda I) < n \iff \dim \text{Ker}(A - \lambda I) \geq 1$$
$$\exists x \in \text{Ker}(A - \lambda I), x \neq 0 \mid (A - \lambda I)x = 0 \iff Ax - \lambda Ix = 0 \iff Ax = \lambda x$$

Nota. По основной теореме алгебры вековое уравнение имеет n корней (не всех из них вещественные). В конкретном множестве $\mathcal{K} \ni \lambda$ их может не быть

Def. Кратность корня λ_i называется алгебраической кратностью

Th. $\lambda_1 \neq \lambda_2 (\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2) \implies x_1, x_2$ - линейно независимы

Составим комбинацию: $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \quad \Bigg| \cdot \mathcal{A}$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0, \square \lambda_2 \neq 0$$

$$c_1 \mathcal{A}x_1 + c_2 \mathcal{A}x_2 = 0 \iff c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$$

Умножим $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ на λ_2 : $c_1 \lambda_2 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$

$$c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 - c_1 \lambda_2 x_1 - c_2 \lambda_2 x_2 = 0$$

$$c_1 x_1 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по условию, $x_1 \neq 0$ - собственный вектор, поэтому $c_1 = 0$, а комбинация линейно независима

$$\text{Если } \lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0: c_2 \lambda_2 x_2 = 0 \implies c_2 = 0$$

Nota. Приняв доказательство за базу индукции, можно доказать линейную независимость для k -ой системы собственных векторов для попарно различных k чисел λ