

Заметим, что $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ - многолистная функция, а $w = \operatorname{Ln} z = \ln \rho + i(\arg z + 2\pi k)$ - многозначная

Ex. 6. Тригонометрические и гиперболические

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Nota. Рассмотрим уравнение $\sin z = A \in \mathbb{C}$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = A \implies e^{2iz} - 2iAe^{iz} - 1 = 0$$

При $t = e^{iz}$ получаем квадратное уравнение, у которого в \mathbb{C} всегда будет два корня. Это значит, что в \mathbb{C} \sin и \cos принимают любые значения (то есть $|\sin z| > 1$)

2.4. Дифференцирование ФКП

Def. $w = f(z), w : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z_0 \in D$. **Производная** функции $w(z_0)$ - это предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$, если он существует и не зависит от пути $z \rightarrow z_0$

Мет. Дифференцирование $y = f(x)$:

В Φ_1 П: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \underset{A \in \mathbb{R}}{=} A\Delta x + o(\Delta x)$

В Φ_2 П: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)$

Def. $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0 , если $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$

Def. Дифференцируемая в точке z_0 функция $w = f(z)$, производная $f'(z_0)$ которой непрерывна в z_0 , называется аналитической (или аналитичной) функцией в z_0

Th. Критерий аналитичности (или Условие Коши-Римана)

$$f(x) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ аналитична в точке } z_0 = x + iy$$



$$\exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ непрерывны в } z \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Причем, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f \text{ аналитическая в } z &\iff \exists \text{ непрерывная } f'(z) = \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = [\text{предел не зависит от пути}] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right) = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Аналогично при } i\Delta y \rightarrow 0 \text{ получаем } \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{i\Delta y} = \\
 = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y v}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = v_y - iu_y
 \end{aligned}$$

Итак, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

Отсюда $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$

$\Leftarrow \exists$ непрерывные $u_x, u_y, v_x, v_y \iff u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в (x, y) , тогда

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha_1(x, y, \Delta x, \Delta y) + \alpha_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$$

$$\alpha_1 = o(\Delta \rho), \quad \Delta \rho = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \beta_1 + \beta_2$$

$$\Delta f = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - (u(x, y) + iv(x, y)) = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y + \beta)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{u_x \Delta x + u_y \Delta y + i v_x \Delta x + i v_y \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{u_x(\Delta x + i \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{v_x(i \Delta x - \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} = u_x + \\
 &v_x i + \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y}
 \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = u_x + iv_x + \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} = u_x + iv_x \iff f' = u_x + iv_y, \text{ существует и непрерывна}$$

в (x, y)

Nota. Используя Условие Коши-Римана, получим равенство $u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

Nota. Коши-Риман в ПСК:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

$$\text{Тогда } f'(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{\rho}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)$$

$$u_\rho = u_x \frac{\partial x}{\partial \rho} + u_y \frac{\partial y}{\partial \rho} = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi$$

$$v_\varphi = v_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + v_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\rho v_x \sin \varphi + \rho v_y \cos \varphi = \rho u_y \sin \varphi + \rho u_x \cos \varphi = \rho u_\rho$$

$$\text{Lab. } \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho}$$

Свойства аналитических функций

Пусть f, g - аналитические функции, тогда:

- 1° Линейность: $af + bg$ - аналитическая
- 2° Композиция: $f(g(z))$ - аналитическая
- 3° Произведение: $f \cdot g$ - аналитическая

Nota. Доказательства свойств элементарные, все сводится к сведению к u и v

$$\text{Ex. } w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$u_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_y = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = u_x$$

$$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u_y$$

Таким образом, $\frac{1}{z}$ - аналитическая функция

$$\text{Ex. } w = \bar{z} = x - iy$$

$u_x = 1, v_y = -1 \neq u_x$ - не аналитическая функция