

Мет. Решаем задачу о перпендикуляре, ищем f_0 - наименьшую из проекций и минимально отстоящую от f

Координаты f_0 в выбранном ортонормированном базисе L' равны соответствующим координатам f в этом базисе

$$f_0 = f_1 e_1 + f_2 e_2 + \dots + f_k e_k = (f, e_1) e_1 + (f, e_2) e_2 + \dots + (f, e_k) e_k$$

$k = \dim L', n = \dim L$

$$(f, e_1) = \int_a^b f(x) e_1(x) dx$$

Nota. Итак, $\exists L \in C_{[-\pi, \pi]}, L' = l_{\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}}$

Тогда можно искать многочлен $P_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$, который наилучшим образом приближает $f(x)$

Если нормировать систему $\{\sin nx, \cos nx\}$, то коэффициентами многочлена $P_n(x)$ будут скалярные произведения $f(x)$ на функция ортонормированной системы.

Получим $\left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{\sin x}{\pi}, \frac{\cos x}{\pi}, \dots, \frac{\sin nx}{\pi}, \frac{\cos nx}{\pi} \right\}$

Тогда,

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \end{aligned} \quad \text{- коэффициенты Фурье}$$

Nota. Если увеличивать степень n , то получим ряд Фурье. Запишем формально:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{- сходится ли этот ряд и сходится ли к } f(x)?$$

Ответ дает теорема (доказательство будет приведено позже)

Th. $f(x)$ - 2π -периодична, на $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ - кусочно монотонна и ограничена (то есть имеет конечное число конечных разрывов). Тогда в точках непрерывности $f(x)$ представляется рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = S(x)$$

а в точках разрыва $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$

Сейчас только тригонометрический ряд Фурье, хотя подобное разложение возможно по различным ортогональным системам функций

Nota. В концах отрезков $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ может быть не определена, но в любом случае ограничена $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))$

Разложение периодических функций (на $[-\pi, \pi]$)

1°: $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$, $f(x + 2\pi) = f(x)$

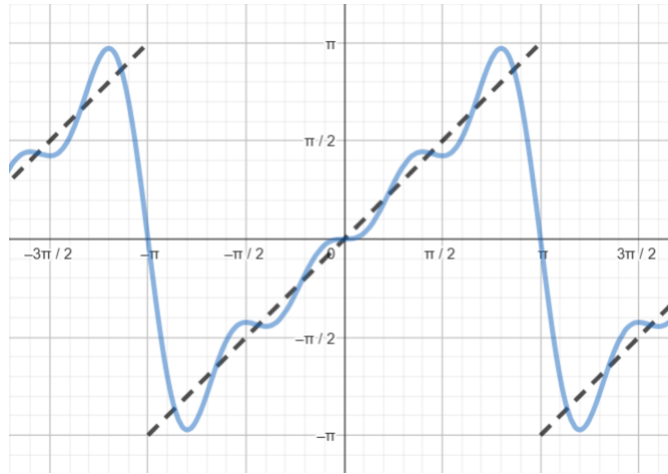
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{-2}{\pi n} \int_0^{\pi} x d \cos nx = -\frac{2}{\pi n} \left(x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = -\frac{2}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$-\frac{2}{n} \cos \pi n = \begin{cases} -\frac{2}{n}, & n = 2m \\ \frac{2}{n}, & n = 2m + 1 \end{cases} = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

$$\text{Итак } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{n} \sin nx$$



2°: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } [0, \pi] \\ -1 & \text{на } [-\pi, 0) \end{cases}$

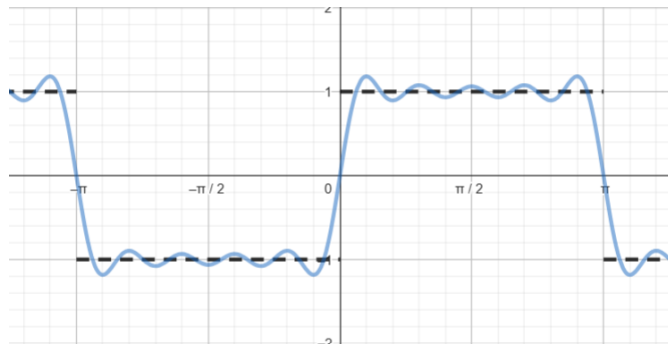
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{1}{2n} \left(\int_{-\pi}^0 d \cos nx - \int_0^{\pi} d \cos nx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi n} \left(\cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi n} (1 - \cos \pi n - \cos \pi n + 1) = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \pi n) = \frac{4}{\pi(2m-1)}$$

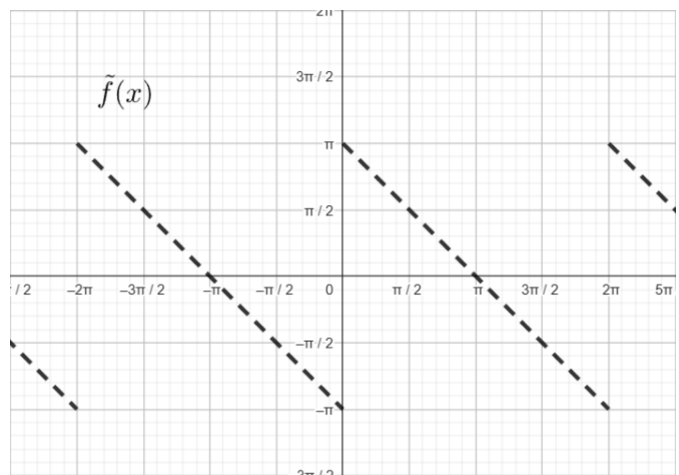
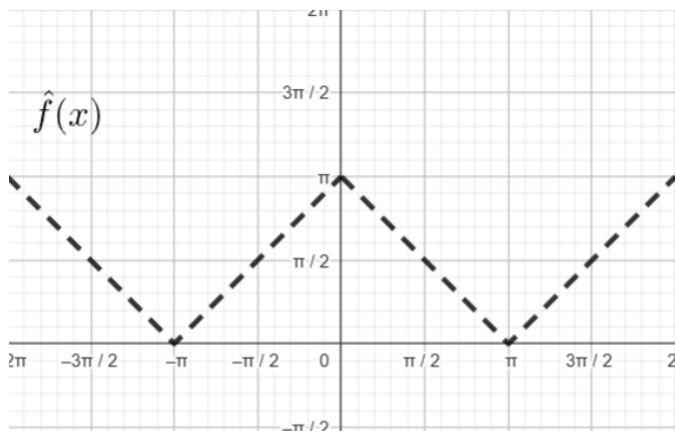
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m-1)} \sin(2m-1)x$$



Nota. Заметим, что если $f(x)$ - четная, то $b_n = 0$, а если нечетная, то $a_n = 0$. Иногда в задаче требуется разложить $f(x)$, заданную только на отрезке $[0, \pi]$. Такую функцию можно продолжить четным или нечетным образом на $[-\pi, \pi]$. Говорят о разложении в ряд по косинусам и синусам соответственно

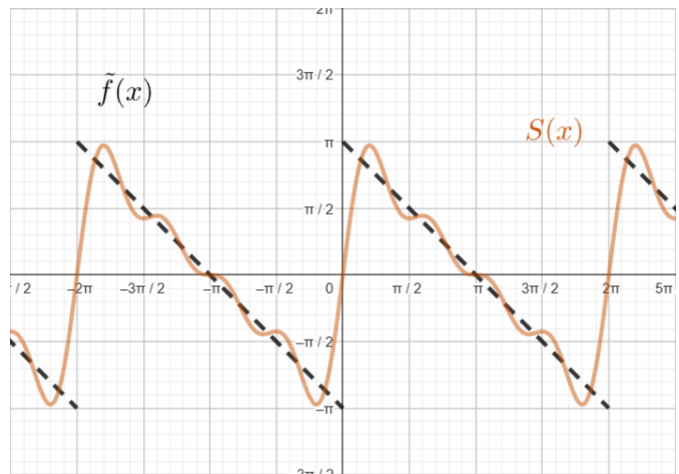
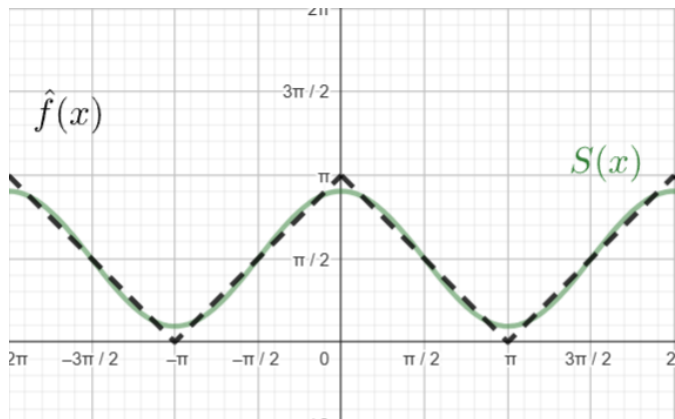
3°: $f(x) = \pi - x$, $x \in [0, \pi]$

Дополним $f(x)$ двумя способами



В ряд Фурье раскладываются периодические функции \hat{f}, \tilde{f}

$$\text{Lab. } \hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$



Заметим, что \tilde{f} на $[0, 2\pi]$ имеет одно аналитическое задание (удобно интегрировать). Изменится ли ряд Фурье, если сдвинуть отрезок?

Th. о сдвиге. Сдвиг промежутка длиной 2π не меняет ряда Фурье

Th. о растяжении. Для $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ растяжение промежутка приводит к разложению:

$b - a = 2l = T$ - период

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$$