

5.4. Замена переменной в двойном и тройном интегралах

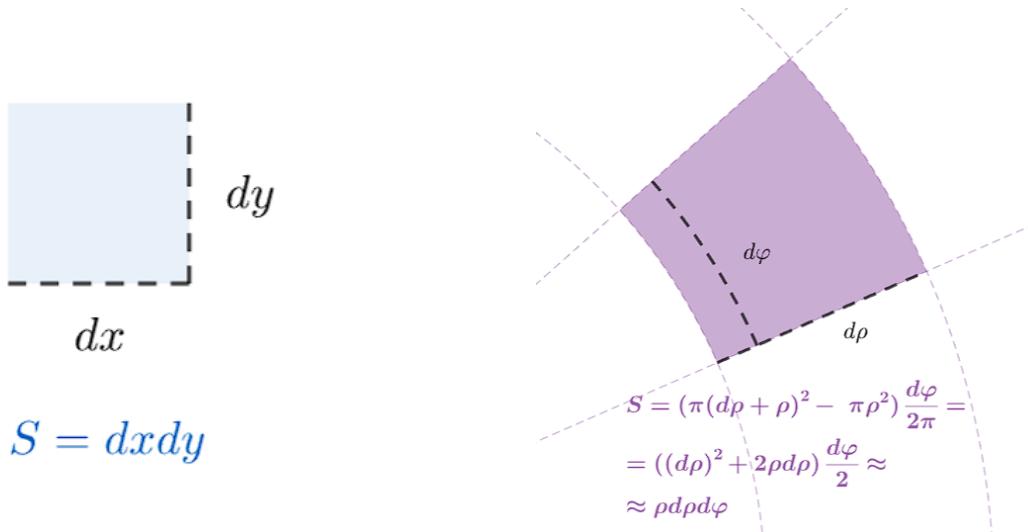
Проблема: для $S = \iint_D dx dy$, если $S_{D'} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho = \iint_{D'} d\rho d\varphi$, то это не площадь круга, а площадь прямоугольника S в распрямленных координатах

Введем Δs_i – площадь кольцевого сектора в полярных координатах, а $\Delta s'_i$ – площадь прямоугольника, причем $\Delta s_i \neq \Delta s'_i$

Nota. Будем искать поправочный коэффициент так, чтобы $\Delta s_i \approx \text{коэффи.} \cdot \Delta s'_i$

Дроблению будем подвергать область D' в распрямленной системе координат

Введем новые криволинейные координаты: $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$, где функции $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемы по обоим аргументам



Заменим криволинейный параллелограмм $ABCD$ на обычный, стянув вершины хордами (погрешность в площади – бесконечно малая более высокого порядка, чем площадь)

$$A = (x_A, y_A) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

$$B = (x_B, y_B) = (\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v))$$

$$C = (x_C, y_C) = (\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v))$$

$$D = (x_D, y_D) = (\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v))$$

Площадь параллелограмма $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \theta = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$

$$\Delta s = S_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_D - x_A & y_D - y_A & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \vec{k} \begin{matrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{matrix} \right\|$$

$$x_B - x_A = \varphi(u, v + \Delta v) - \varphi(u, v) = \Delta_v \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v$$

$$y_B - y_A = \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u, v) = \Delta_v \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v$$

$$x_D - x_A = \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v) = \Delta_u \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u$$

$$y_D - y_A = \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v) = \Delta_u \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u$$

$$\left| \vec{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix} \right| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \end{pmatrix} \right\| \frac{\Delta s'}{\Delta v \Delta u} |\det J| \implies \Delta s \approx |J| \Delta s'$$

Nota. В пределе это точное равенство: $|J| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}$

Это легко понять, если считать частные приращения по теореме Лагранжа $\Delta_u \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\xi, \eta) \Delta u \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \Delta u$

Def. Определитель $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$, где $\begin{cases} x_1 = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{cases}$ – преобразование координат

$Ox_i \rightarrow O\xi_i$ ($f_k \in C_D^1$), называется определителем Якоби или якобиан

Построение интеграла:

1. Дробление D' в распрямленной Ouv
2. Выбор средней точки, поиск значения $f(\xi_i, \eta_i)$
Значение величины на элементе $f(\xi_i, \eta_i) |J| dudv$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \sum f(\xi_i, \eta_i) |J| dudv$
4. В пределе интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(u, v) |J| dudv$

Якобианы в ПСК, ЦСК, СфСК

1. ПСК: $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \\ y = \rho \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi \end{cases}$
 $J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$
2. ЦСК: $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$ $J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$
3. СфСК: $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$ $J = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\rho \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \theta + \rho \sin \varphi \sin \theta (-\rho \sin \varphi \sin^2 \theta - \rho \sin \varphi \cos^2 \theta) - \rho^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \theta = -\rho^2 (\cos^2 \varphi \sin \theta + \sin^2 \varphi \sin \theta) = -\rho^2 \sin \theta$
 $|J| = \rho^2 \sin \theta$

Ex. Тело T , ограниченное уравнениями $x^2 + y^2 = z^2$
 $x^2 + y^2 = z$

Конус в ЦСК: $\rho = z, z > 0$

Параболоид в ЦСК: $\rho = \sqrt{z}, z > 0$

$$V_T = \iiint_T dx dy dz = \iiint_{T'} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} \rho dz = 2\pi \int_0^1 \rho z \Big|_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$$

Lab. Тело T , ограниченное уравнениями $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$ – «мороженка», считать в СфСК

5.5. Криволинейные интегралы

Для криволинейных интегралов I рода область интегрирования – кривая $l = \widehat{AB}$ (дуга). Для простоты начнем с плоской дуги

На l действует скалярная функция $f(x, y)$ (физический смысл – плотность, то есть имеем неоднородный кривой стержень)

Задача в нахождении «суммарной» величины $f(x, y)$, то есть интеграла: «складываем» элементы $f_{cp}(x, y)dl$

$$\text{Получаем } \int_l f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl$$