Th. Во всяком E^n можно выделить ортонормированный базис

В $E^n_{\|\cdot\|}$ $\exists B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ - базис

Покажем, что можно выделить ортонормированный базис $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ при помощи метода математической индукции

База: построим один ортогональный вектор для $\beta_1 = e'_1$ (потом $e_1 = \dfrac{e'_1}{\|e'_1\|}$)

Рассмотрим $e'_2 = \beta_1 - \lambda e'_1$. Требуем $e'_2 \perp e'_1$, то есть $(e'_1, e'_2) = 0$

Отсюда найдем нужный $\lambda : (e'_1, e'_2) = (e'_1, \beta_2 - \lambda e'_1) = (e'_1, \beta_2) - \lambda(e'_1, e'_1) = 0$

Тогда $\lambda = \dfrac{(e'_1, \beta_2)}{(e'_1, e'_1)}$

Переход: Пусть построена система ортогональных векторов $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_k\}$

Построим $k+1$ систему:

Рассмотрим $e'_{k+1} = \beta_{k+1} - \lambda_k e'_k - \lambda'_{k-1} e'_{k-1} - \dots - \lambda_1 e'_1 \quad (*)$

Требуем $e'_{k+1} \perp e_i \quad \forall i \in [1; k]$

$(e'_{k+1}, e'_k) = (\beta_{k+1}, e'_k) - \lambda_k(e'_k, e'_k) = 0$, так как $(e'_i, e'_j) = 0 \quad i \neq j$

$\lambda_k = \dfrac{(\beta_{k+1}, e'_k)}{(e'_k, e'_k)}$

Аналогично: $(e'_{k+1}, e'_{k-1}) = (\beta_{k+1}, e'_{k-1}) - \lambda_{k-1}(e'_{k-1}, e'_{k-1})$

$\lambda_{k-1} = \dfrac{(\beta_{k+1}, e'_{k-1})}{(e'_{k-1}, e'_{k-1})}$

Получаем $e'_{k+1} = \beta_{k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(\beta_{k+1}, e'_i)}{(e'_i, e'_i)}$

Изложенный метод называется методом ортогонализации базиса, при этом $(*)$ определяет ненулевой вектор, иначе получим нулевую тривиальную линейную комбинацию векторов β_i (e_i выражается через них), но это невозможно, так как вектора базисные. При этом полученную систему стоит нормировать

Ex. Формула скалярного произведения в ортонормированном базисе

$E_{\|\cdot\|}, B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ - какой-либо базис

Рассмотрим $x = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n$ и $y = y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n$

Найдем (x, y), как произведение компонент: $(x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n, y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j (\beta_i, \beta_j)$

Обозначим $(\beta_i, \beta_j) = a_{ij} \in \mathbb{R}$

Таким образом, $(x, y) = \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij} x_i y_j$ - дальше назовем квадратичной формой

Ранее (в аналитической геометрии) $(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ - произведение координат векторов $\vec{a}, \vec{b}$ в декартовой прямоугольной системе координат (с ортонормированным базисом)

Действительно: если $\beta_i = e_i$, $\beta_j = e_j$, вектора e_i, e_j принадлежат ортонормированному базису, а $a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, то $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Причем $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Longrightarrow x_i = (x, e_i)$

Ex. Система функций, непрерывных на $[0, 2\pi]$

$\Phi = \{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \dots, \sin nt, \cos nt\}$

Система ортогональна (Lab.), но не нормированная (Lab.)

$\Phi_{\|\cdot\|} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \dots\}$ - нормированная система

Тогда функция, определенная и непрерывная на $[0, 2\pi]$ может быть разложена по базису $\Phi_{\|\cdot\|}$ и ее координат (как вектора): $f_i = \int_0^{2\pi} f \cdot e_i dx$, где $e_i \in \Phi_{\|\cdot\|}$