Важно, что линейность по первому аргументу присутствует и в $\mathbb{R}$, и в $\mathbb{C}$, то есть $(\lambda x, y) \overset{\mathbb{R},C}{=} \lambda(x, y)$
Однако:

- $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ в $\mathbb{R}$
- $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$ в C

Def. 1. Оператор $\mathcal{A}^*$ называется сопряженным для $\mathcal{A} : V \to V$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$
Def. 2. $\mathcal{A}^*$ сопряженный для $\mathcal{A}$, если $A^* = A^T$ в любом ортонормированном базисе

Def. 1. $\Longleftrightarrow$ **Def. 2.**

$$(\mathcal{A}x, y) \overset{\text{на языке матриц}}{=\!=\!=} (AX, Y) = (AX)^T \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y$$
$$||$$
$$(x, \mathcal{A}^* y) = X^T \cdot (A^* Y) = (X^T A^*) \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y \Longrightarrow A^* = A^T$$

<u>Lab.</u> Очевидно существование $\mathcal{A}^*$ для всякого $\mathcal{A}$ (определяется в ортонормированном базисе действием $\mathcal{A}^T$). Доказать единственность $\mathcal{A}^*$ рассмотреть от противного $(x, \mathcal{A}_1^* y) \neq (x, \mathcal{A}_2^* y)$
<u>Свойства</u>:

1. $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$ $\quad \square (\mathcal{I}x, y) = (x, y) = (x, \mathcal{I}y) \quad \square$
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
3. $(\lambda \mathcal{A})^* = \lambda \mathcal{A}^*$
4. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
5. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$ (св-во транспонирования матриц)
   или $((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^* y) = (x, \mathcal{B}^* \mathcal{A}^* y)$
6. $\mathcal{A}^*$ - линейный оператор $(\mathcal{A}x = x', \mathcal{A}y = y' \Longrightarrow \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda x' + \mu y')$
   Можно использовать линейные свойства умножения матриц $A^*(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathcal{A}^* X + \mu \mathcal{A}^* Y$

2* Самосопряженный оператор

Def. $\mathcal{A}$ называется самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$
Следствие: $A^T = A \Longrightarrow$ матрица A симметричная
<u>Свойства</u> самосопряженных операторов:

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*, \ \lambda : \ \mathcal{A}x = \lambda x (x \neq 0)$. Тогда, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{A}x, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad (x, \mathcal{A}^* y) = (x, \mathcal{A}y) = (x, \lambda y) \overset{\text{в } C}{=} \overline{\lambda}(x, y)$$
$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \Longrightarrow \lambda(x, y) = \overline{\lambda}(x, y) \Longrightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

2. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*, \ \mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $x_1 \perp x_2$

Хотим доказать, что $(x_1, x_2) = 0$, при том, что $x_{1,2} \neq 0$

$\lambda_1(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = (\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = (x_1, x_2)\lambda_2$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \Longrightarrow (x_1, x_2) = 0$

Th. Лемма. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, e - собственный вектор ($l_{\{e\}}$ - линейная оболочка e - инвариантное подпространство для $\mathcal{A}$)

$V_1 = \{x \in V \mid x \perp e\}$

Тогда V_1 - инвариантное для $\mathcal{A}$

Нужно доказать, что $\forall x \in V_1$ $\mathcal{A}x \in V_1$ и так как $x \in V_1 \mid x \perp e$, то покажем, что $\mathcal{A}x \perp e$

$(\mathcal{A}x, e) = (x, \mathcal{A}e) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) \overset{x \perp e}{=\!=} 0$

Th. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ($\mathcal{A} : V^n \to V^n$), тогда $\exists e_1, \ldots, e_n$ - набор собственных векторов $\mathcal{A}$ и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

Другими словами: $\mathcal{A}$ - диагонализируем

Наводящие соображения:

Ex. 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$\mathcal{I}x = x = 1 \cdot x, \quad \lambda_{1,2,3} = 1$

Здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ - базис из собственных векторов, ортонормированный

Ex. 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$

$\mathcal{O}x = 0, \quad \lambda_{1,2,3} = 0$

И здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, так как $0 \in U_\lambda$ и $\forall x$ $\mathcal{O}x = 0 \in U_\lambda$

Ex. 3. Поворот $\mathbb{R}^2$ на $\dfrac{\pi}{4}$

$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)^2 + \dfrac{1}{2} = 0$ - вещественных корней нет