

Мет. ЛДУ₂

1) Решим $y'' + py' + qy = 0$ (ХрУ: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$)

ФСР для всех случаев:

$$1^* \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$$

$$2^* \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$$

$$3^* \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \rightarrow \{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$$

$$\bar{y} = l_{\{\text{ФСР}\}}$$

2) Изначально $y'' + py' + qy = f(x)$

Доказали: $y(x) = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y} = \sum_{i=1}^n C_i y_i$ - вектора из ФСР, а y^* - частное решение (какое-либо)

ЛНДУ

Nota. Рассмотрим два метода поиска y^* для ЛДУ₂

1. Метод неопределенных коэффициентов для случая специальной правой части
2. Метод (Лагранжа) вариации произвольных постоянных (универсальный)

1. Специальная правая часть

$$\text{Ex. } y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} \quad (\heartsuit)$$

Наводящие соображения: заметим, что $y = e^{ax}$ не меняет свой вид при дифференцировании, так же как и $y = P_n(x)$, $y = A \cos bx + B \sin bx$

Имеет смысл искать частные решения для (\heartsuit) в виде $y = Ae^{3x}$

$$(Ae^{3x})'' - 3(Ae^{3x})' + 2Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

$$9A - 9A + 2A = 2 \implies A = 1, \text{ то есть } y^* = e^{3x}$$

Nota. Если правая часть ЛНДУ содержит произведения $e^{ax}, P_n(x), \cos bx, \sin bx$, то y^* ищем в виде специальной правой части

Def. Специальная правая часть (СПЧ) – функция $f(x) = e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$ (обозначим $k = a \pm ib$)

Частные случаи:

1. $f(x) = P_n(x)e^{ax} \quad (b = 0)$
2. $f(x) = A \cos bx + B \sin bx$ – гармоника $(a = 0, n = m = 0)$
3. $f(x) = P_n(x) \quad (a = b = 0)$

Метод: Решение ищется в виде $y^* = e^{ax}(\bar{P}_l \cos bx + \bar{Q}_l(x) \sin bx)$, где a, b – коэффициенты СПЧ, $l = \max(m, n), \bar{P}_l, \bar{Q}_l$ – многочлены в неопределенных коэффициентах

$$\text{Ex. } 1. (\heartsuit): y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} = e^{3x}(2 \cos 0x) \quad (k = 3 \pm 0 = 3)$$

$$y^* = e^{3x}(\bar{P}_{l=0}(x) \cos 0x) = e^{3x} \cdot A$$

Ех. 2. Однако, для этого уравнения: $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

СПЧ: $e^{2x} = e^{2x}(1 \cos 0x + B \sin 0x) \quad k = a \pm ib = 2$

$$\left. \begin{array}{l} y^* = Ae^{2x} \\ y^{*'} = 2Ae^{2x} \\ y^{*''} = 4Ae^{2x} \end{array} \right\} \text{ДУ} \longrightarrow \begin{array}{l} 4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = e^{2x} \\ 4A - 6A + 2A = 1 \\ 0A = 1 \end{array} \quad - \text{нельзя найти } A \quad \text{😬}$$

Решим ХрУ: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

В этом случае число k , соответствующее СПЧ, совпадает с корнем ХрУ

Исследуем ситуацию на примере СПЧ $f(x) = P_n(x)e^{ax}$

Пусть дано ДУ: $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}$

Для него ХрУ: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \implies \lambda_{1,2}$ - корни

Ищем $y^* = \bar{P}_n(x)e^{ax}$

$$y^{*'} = \bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\bar{P}_n(x)e^{ax}$$

$$y^{*''} = \bar{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\bar{P}_n(x)e^{ax}$$

Получаем:

$$\bar{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\bar{P}_n(x)e^{ax} + (\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\bar{P}_n(x)e^{ax})p + \bar{P}_n(x)e^{ax}q = P_n(x)e^{ax}$$

$$\bar{P}_{n-2}(x)e^{ax} + (2a+p)\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + (a^2+pa+q)\bar{P}_n(x)e^{ax} = P_n(x)e^{ax}$$

$$\bar{P}_{n-2}(x) + (2a+p)\bar{P}_{n-1}(x) + (a^2+pa+q)\bar{P}_n(x) = P_n(x)$$

Заметим, что если a - корень ХрУ, то есть $a \pm ib = a = k = \lambda_i$ (пусть 1-ой кратности), то $a^2 + pa + q = 0$ и степень левой части понижается до $n-1$

Если a - корень ХрУ 2-ой кратности, то есть $a^2 + pa + q = \left(a + \frac{p}{2}\right)^2 = 0 \iff 2a + p = 0$, то степень левой части понижается на 2

Чтобы сделать уравнение для \bar{P}_n решаемым, домножим y^* на x^r , где r - число совпадений $k = a \pm ib$ с корнем ХрУ λ_i (другими словами, кратность λ_i , с которым совпадает k)

Окончательно, метод выглядит так: для уравнения $y'' + py' + qy = e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$, где $\lambda_{1,2}$ - корни ХрУ, $k = a \pm ib$

Частное решение выглядит так: $y^* = x^r e^{ax}(\bar{P}_l(x) \cos bx + \bar{Q}_l(x) \sin bx)$, где $l = \max(m, n)$, r - кратность корня ХрУ $\lambda_i = k$

Обобщим для ЛДУ_n: $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$

ХрУ выглядит так: $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0$

Правило построения ФСР для \bar{y} , общего решения однородного ДУ:

1. Всякому λ_i - одиночному \mathbb{R} -корню ХрУ сопоставляем $y_i = e^{\lambda_i x}$
2. \mathbb{R} -корню λ кратности s сопоставляем набор $\{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda x}\}$
3. Всякой одиночной паре $\lambda_{j_1, j_2} = \alpha_j \pm i\beta_j$ соответствует пара $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$
4. Комплексной паре $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности t соответствует набор

$$\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{t-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{t-1} e^{\alpha x} \sin \beta x\}$$

Nota. Количество векторов y_i в ФСР равно порядку n дифференциального уравнения

Специальная правая часть ищется в виде $y^* = x^r e^{\alpha x} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$, где r - кратность \mathbb{R} -корня или \mathbb{C} -пары, с которыми совпадает $k = a \pm ib$

Ex. Вернемся к $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

$$\left. \begin{aligned} y^* &= Ax^1 e^{2x} \\ y^{*'} &= Ae^{2x} 2Ax e^{2x} \\ y^{*''} &= 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Ax e^{2x} \end{aligned} \right\} \rightarrow (4 - 6 + 2)Ax e^{2x} + (4 - 3)Ae^{2x} = e^{2x} \quad A = 1$$

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + x e^{2x}$$

Лагранжа

Мет. Решение ЛДУ₁: $y' + py = f(x)$

1) Решаем ЛОДУ $y' + py = 0$, получаем ФСР $\bar{y} = Cy_0$

2) Решаем ЛНДУ, ищем решения в виде $y(x) = C(x)y_0$, получаем $C'(x)y_0 = f(x) \rightarrow C(x)$

Nota. Введем аналогичный метод для ЛДУ₂:

1 этап) $y'' + py' + qy = 0$ – ЛОДУ, $\lambda_{1,2}$ – корни, соответствующие ФСР $\{y_1, y_2\}$

Получаем общее решение $\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2 этап) Варьируем C_1 и C_2 , но теперь нужны два условия для их определения. Одним из них является само ДУ

Ex. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + y^*$$

$$(g(x) + C_1)e^x + (h(x) + C_2)e^{2x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + g(x)e^x + h(x)e^{2x}$$

$$\text{Подберем } g, h: \frac{e^{2x}}{g} e^x + \frac{e^x}{h} e^{2x} = e^{3x} \text{ или } \frac{-e^{2x}}{g} e^x + \frac{2e^x}{h} e^{2x} = e^{3x}$$

Заметим, что $C'_1(x)$ во втором случае $g' = -2e^{2x}$, а $C'_2 = 2e^x$

$$\text{Тогда } C'_1(x)e^x + C'_2(x)e^{2x} = -2e^{3x} + 2e^{3x} = 0$$

Nota. Подставим $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ в ДУ

$$\text{Получаем производную } y'(x) = C'_1(x)y_1 + C_1(x)y'_1 + C'_2(x)y_2 + C_2(x)y'_2$$

$$\text{Требуем } C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0$$

$$\text{Тогда вторая производная: } y''(x) = C'_1(x)y'_1 + C_1(x)y''_1 + C'_2(x)y'_2 + C_2(x)y''_2$$

$$C'_1(x)y'_1 + C_1(x)y''_1 + C'_2(x)y'_2 + C_2(x)y''_2 + pC_1(x)y'_1 + pC_2(x)y'_2 + qC_1(x)y_1 + qC_2(x)y_2 = f(x)$$

$$\underset{=0}{C_1(x)}Ly_1+\underset{=0}{C_2(x)}Ly_2+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x)$$

Итак, система для определения $C_1(x), C_2(x)$:
$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix}}_{=W} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{по Крамеру}} \begin{matrix} C'_1(x) = \frac{W_1}{W} \\ C'_2(x) = \frac{W_2}{W} \end{matrix}$$

Nota. Обобщив метод на n -ый порядок систему, получим

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ \vdots \\ C'_{n-1}(x) \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Lab. Доказать, что $\bar{y} + y^*$ - общее решение ЛНДУ