

Формула: $f(x) \in C_{U_0(x_0)}^\infty$ и $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ между x и x_0

Th. Если $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ - ряд Тейлора

Nota. Если $x_0 = 0$, то ряд Маклорена

3.1. Стандартные разложения элементарных функций

$$1^\circ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\text{Nota. } e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$2^\circ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\text{Nota. } \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$3^\circ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\text{Nota. } 1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$4^\circ \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$$

$$\text{Def. } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Сложим и вычтем ряды для e^x и e^{-x}

$$\text{Причем } e^{-x} \underset{x, t \in u(0)}{\stackrel{t=-x}{=}} e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Из этого получаем:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n)}}{(2n)!}$$

Формула Эйлера

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \dots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \dots) = \cos x + i \sin x$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

$$5^\circ \text{ Биномиальный ряд}$$

$$f(x) = (1+x)^m, n \in \mathbb{Q}$$

Заметим, что $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$

$$(1+x)f'(x) = m(1+x)^m = mf(x)$$

Получаем дифференциальное уравнение: $(1+x)f'(x) = mf(x)$

Nota. Если дополнить ДУ начальными условиями, то задача Коши будет решаться единственным образом, то есть, найдя ряд $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ как единственное решение, получим, что $S(x) = f(x)$ и не надо исследовать остаток R_n на убывание к нулю

Задача Коши:

$$\begin{cases} (1+x)f'(x) = mf(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда $S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + ka_kx^{k-1} + \dots$$

$$(1+x)S'(x) = a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + \dots + (ka_k + (k+1)a_{k+1})x^k + \dots$$

$$mS(x) = ma_0 + ma_1x + ma_2x^2 + \dots + ma_kx^k + \dots$$

Начальные условия: $a_0 = 1$. Тогда приравниваем коэффициенты: $a_1 = m, a_2 = \frac{m(m-1)}{2}, a_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$

Выявили закономерность: $a_k = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{k!}$

Таким образом: $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} C_m^k x^k$

При $m \in \mathbb{N}$ ряд - конечная сумма, при остальных - бесконечная

$$\text{Lab. } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} = (\arcsin x)' \quad \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin t$$

6° $\ln(1+x)$

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n \right) dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Интервал сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}n}{(n+1)x^n} \right| = |x| < 1 \quad D = (-1, 1)$

При $x = 1$ $\ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ - сходится $D = (-1, 1]$

Nota. Сходимость остатка требует исследования

Nota. Заметим, если $x = \frac{1}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$, то $\ln(1 + \frac{1}{k}) = \ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$ - рекуррентная формула логарифмов натуральных чисел

$$7^\circ \arctg x - \text{Lab. } ((\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2})$$

3.2. Приложения

$$\text{Ex. 1. } I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad x = \frac{1}{2} \in u(0)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots) dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \dots \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 3 \cdot 6} + \frac{1}{32 \cdot 5 \cdot 120} - \dots$$

Ряд знакопеременный - можем найти такой u_n , который будет меньше заданной точности вычисления ε

$$\text{Ex. 2. } \int_0^a e^{-x^2} dx = \int_0^a (1 + (-x^2) + \frac{x^4}{2!} + \dots) dx = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{10} + \dots \Big|_0^a = a - \frac{a^3}{5} + \frac{a^5}{10} - \dots$$

Отсюда были вычислены таблицы для функции Лапласа $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Ex. 3. Вычисление пределов

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctg x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3}) + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

4. Ряды Фурье

4.1. Определение

Мет. Линейное функциональное пространство со скалярным произведением

$$f(x) \in C_{[a,b]}$$

$$\text{Скалярное произведение } (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\text{Из этого норма } \|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Главное приложение евклидовых пространств - задача о перпендикуляре: найти перпендикуляр h из конца вектора f на подпространство L' . Иначе: ищем расстояние $\|f - h\|$ (метрика) или ортогональную проекция f_0 вектора f на L' , такую, что $f_0 + h = f$

Будем искать f_0 , задав подпространство L' множеством функций $\{\sin mx, \cos mx\}$

Тригонометрические функции полезны для описания периодических явлений

Раньше рассматривали тригонометрический многочлен

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + \dots + b_m \sin mx + a_m \cos mx$$

Дальше стоит задача: при каких a_i, b_i многочлен $T_m(x)$ будет наименее отстоящим от данной $f(x)$