

Th. Морера. $f(z)$ непрерывна в D и $\forall \gamma \subset D \int_{\gamma} f(z)dz = 0 \implies f(z)$ аналитична в D

При данных условиях $\exists \Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta \mid \Phi'(z) = f(z)$ и $\Phi(z)$ аналитична

Так как $\Phi(z)$ дифференцируема, то она дифференцируема сколько угодно раз. Таким образом, существуют $f'(z), f''(z)$ и так далее, а из этого означает, что $f(z)$ – аналитична

Th. Лиувилля. $f(z)$ аналитична в \mathbb{C} и $\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid |f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$

Тогда $f(z) \equiv \text{const}$

Докажем, что $f'(z) = 0$

$$|f'(z)| = \left[\text{контур } \gamma - \text{круг } z + \rho e^{i\varphi} \right] = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\varphi}) \rho i e^{i\varphi}}{\rho^2 e^{2i\varphi}} d\varphi \right| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z + \rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}} \right| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\rho} d\varphi = \frac{M}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0 \implies f'(z) = \text{const}$$

Nota. $w = \sin z \neq \text{const} \implies \sin z$ – неограниченная функция

4.4. Ряд Лорана

Def. Ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$, где $C_n, z_0 \in \mathbb{C}$, называется рядом Лорана в точке z_0

Nota. Исследуем ряд. Обозначим $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$

$$f_2 = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n(z - z_0)^n \xrightarrow{m=-n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

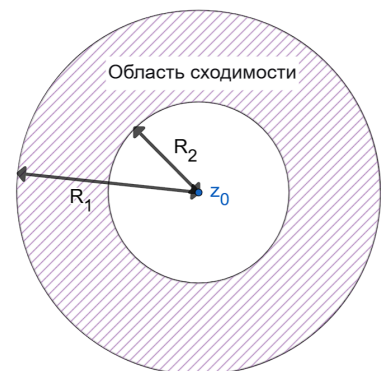
Тогда ряд можно записать так: $C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n(z - z_0)^n + \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} \right)$

Рассмотрим $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ – ряд согласно теореме Абеля

сходится в круге с центром z_0 и радиусом $R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$

Рассмотрим $f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} \xrightarrow{t = \frac{1}{z - z_0}} \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} t^n$ – ряд сходится в

круге $|t| < r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{-n}}{C_{-n-1}} \right|$ или $|z - z_0| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{-n-1}}{C_{-n}} \right| = R_2$



Таким образом, ряд Лорана сходится в *кольце* с внутренним радиусом R_2 и внешним радиусом R_1 и центром z_0 к значению некой аналитической функции $f(z)$

$f(z)$, аналитичная в кольце $K = (z_0, R_2, R_1)$, однозначно представима рядом Лорана в кольце K

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{\Gamma = \Gamma_2 \cup \Gamma_1}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Разложим $\frac{1}{\zeta - z}$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \begin{cases} \frac{1}{(\zeta - z_0)(1 - (\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\ \frac{1}{-(z - z_0)(1 - (\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}))} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \end{cases}$$

1. Первый ряд сходится, если $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| < |\zeta - z_0|$

– это Γ_1

Также $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$

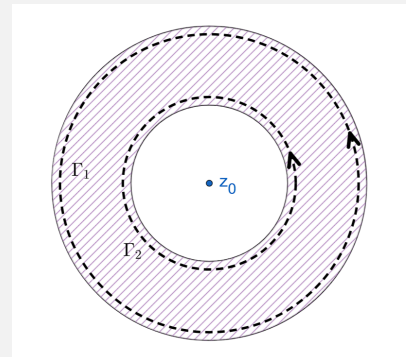
По теореме Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

Из этого $C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$

2. Второй ряд сходится, если $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| > |\zeta - z_0|$ – это Γ_2

Lab.



Nota. Таким образом, коэффициенты ряда Лорана $C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$

Def. Изолированной особой точкой однозначного характера называется точка $a \in \mathbb{C} \mid f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - a| < \rho$, но не определена в $z = a$

Def. Точка $a = \infty$ называется изолированной особой, если $f(z)$ аналитична в кольце $\rho < |z| < \infty$

Def. Устранимой особой точкой a называется точка, для которой $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$, в a функция не определена

Полюсом a называется точка, для которой $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

Существенно особой точкой a называется точка, для которой $\nexists \lim_{z \rightarrow a} f(z)$

Ex. 1. Для $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ точка $z = 0$ является устранимой особой – $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

Ex. 2. Для $f(z) = \frac{z}{(z+i)^2}$ $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z}{(z+i)^2} = \left[\frac{1}{0^2} = \infty^2 \right]$, $a = -i$ - полюс 2-ого порядка

Ex. 3. Для $f(z) = \sin z$ $\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} \sin z$

Def. Для ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности особой точки $z = a \in \mathbb{C}$ $f(z) =$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n}_{\text{это правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}}_{\text{это главная часть}}$$

Def. Для ряда Лорана в $a = \infty$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n}_{\text{это главная часть}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}}_{\text{это правильная часть}}$

Def. Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется C_{-1} коэффициент ряда Лорана, если $z_0 \in \mathbb{C}$, и $-C_{-1}$, если $z_0 = \infty$