

## Лекция 15

### Характеристические функции

*Mem.*  $i$  - комплексная единица

*Mem.*  $e^{it} = \cos t + i \sin t$

Пусть  $\xi + i\eta$  - комплексная случайная величина, где  $\xi$  - вещественная часть, а  $\eta$  - мнимая часть

**Def.**  $E(\xi + i\eta) = E\xi + iE\eta$

**Def.** Характеристической функцией случайной величины  $\xi$  называется функция

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, t \in \mathbb{R}$$

Свойства:

- Любая случайная величина  $\xi$  имеет характеристическую функцию, причем  $|\varphi_\xi(t)| \leq 1$

Характеристическая функция существует по теореме об абсолютной сходимости интеграла от произведения ограниченной и нормированной функций

Докажем неравенство:

$$|\varphi_\xi(t)|^2 = |Ee^{it\xi}|^2 = |E \cos t\xi + iE \sin t\xi|^2 = (E \cos t\xi)^2 + (E \sin t\xi)^2 \leq [по неравенству Йенсена] \leq E \cos^2 t\xi + E \sin^2 t\xi = E(\cos^2 t\xi + \sin^2 t\xi) = E1 = 1$$

- Пусть  $\varphi_\xi(t)$  - характеристическая функция случайной величины  $\xi$ . Тогда характеристическая функция случайной величины  $a + b\xi$  равна  $\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita}\varphi_\xi(bt)$

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = Ee^{it(a+b\xi)} = E(e^{ita} \cdot e^{itb\xi}) = e^{ita} Ee^{itb\xi} = e^{ita} \varphi_\xi(bt)$$

- Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций

Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  - независимы. Тогда

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = E(e^{it\xi} \cdot e^{it\eta}) = [\text{так как они независимы}] = Ee^{it\xi} \cdot Ee^{it\eta} = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

Аналогично для большего числа величин

- Пусть  $E\xi^k < \infty$ . Тогда

$$\varphi_\xi(t) = 1 + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + o(|t|^k)$$

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{it\xi} = E(1 + it\xi + \frac{(it\xi)^2}{2!} + \dots + \frac{(it\xi)^k}{k!} + o(|t|^k)) = 1 + itE\xi + \frac{i^2 t^2}{2} E\xi^2 + \dots + \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + o(|t|^k)$$

5. Пусть  $E\xi^k < \infty$ . Тогда  $\varphi_{\xi}^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$

$$E\xi^k < \infty \implies \text{существует } k \text{ членов разложения в ряд Маклорена: } \frac{\varphi_{\xi}^{(k)}(0)}{k!} t^k = \frac{i^k E\xi^k}{k!} t^k;$$

$$\varphi_{\xi}^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$$

6. Существует взаимно-однозначное соответствие между распределениями и характеристическими функциями. Зная характеристическую функцию можно восстановить распределение.

*Ex.* Если распределение абсолютно непрерывное, то его можно восстановить по преобразованию Фурье

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_{\xi}(t) dt$$

7. Теорема о непрерывном соответствии

**Th.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  слабо сходится к  $\xi$  тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций сходится поточечно к  $\varphi_{\xi}(t)$

$$\{\xi_n\} \rightharpoonup \xi \iff \varphi_{\xi_n}(t) \longrightarrow \varphi_{\xi}(t) \forall t \in \mathbb{R}$$

## Характеристические функции стандартных распределений

- Распределение Бернулли

$\xi$	0	1
$p$	$1-p$	$p$

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{i\xi t} = e^{i \cdot 0 \cdot t} p(\xi = 0) + e^{i \cdot 1 \cdot t} p(\xi = 1) = 1 - p + pe^{it}$$

- Биномиальное распределение

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Если  $t \in B_{n,p}$ , то  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n$ , где  $\xi_i \in B_p$  - независимы

$$\varphi_{\xi}(t) = (\varphi_{\xi_n}(t))^n = (1 - p + pe^{it})^n$$

- Распределение Пуассона

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Следствие: распределение Пуассона устойчиво относительно суммирования

$\exists \xi \in \Pi_{\lambda}, \eta \in \Pi_{\mu}$ , они независимы. Тогда  $\xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}$

По третьему свойству  $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}$  - характеристическая функция распределения Пуассона  $\Pi_{\lambda+\mu}$

- Стандартное нормальное распределение

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2itx)} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2itx-t^2)} e^{-\frac{t^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} d(x-it) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- Нормальное распределение

$$\xi \in N(a, \sigma^2)$$

Если  $\eta \in N(0, 1)$ , то  $\xi = a + \sigma\eta \in N(a, \sigma^2)$

По второму свойству  $\varphi_{\xi}(t) = e^{ita} \varphi_{\eta}(st) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Следствие: нормальное распределение устойчиво относительно суммирования

Если  $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2), \eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$  и они независимы, то  $\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t)\varphi_{\eta}(t) = e^{ita_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{ita_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{it(a_1+a_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}}$  - характеристическая функция  $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

## Доказательства теорем через свойства характеристических функций

Докажем некоторые теоремы с помощью характеристических функций

### Закон больших чисел Хинчина

Для доказательства закона больших чисел Хинчина докажем такую лемму:

$$\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$$

$$\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{x}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{n(\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n}) + o(\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n})))} = e^{n(\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n}) + o(\frac{1}{n}))} = e^{x + no(\frac{1}{n})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^x$$

**Th.** Закон больших чисел Хинчина

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным матожиданием. Тогда  $\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_1$

Обозначим  $a = E\xi_1$

Ранее было доказано, что сходимость по вероятности к константе эквивалентно к слабой сходимости. Поэтому достаточно доказать, что  $\frac{S_n}{n} \Rightarrow a$

По теореме о непрерывном соответствии остается доказать, что  $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \rightarrow \varphi_a(t) = e^{ita}$

По четвертому свойству  $\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + itE\xi_1 + o(|t|) = 1 + ita + o(|t|)$

$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = [\text{по второму свойству}] = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\left|\frac{t}{n}\right|\right)\right)^n \xrightarrow{\text{по лемме}} e^{ita} = \varphi_a(t)$

## Центральная предельная теорема

**Th.** Центральная предельная теорема Ляпунова, 1901 г.

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом ( $D\xi_1 < \infty$ )

Обозначим  $a = E\xi_1$ ,  $\sigma^2 = D\xi_1$ . Тогда

$$\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1)$$

Пусть  $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma}$  - стандартизованная случайная величина  
 $E\eta_i = 0$ ,  $D\eta_i = 1$

$$\text{Обозначим } Z_n = \eta_1 + \dots + \eta_n = \frac{(\xi_1 + \dots + \xi_n) - na}{\sigma} = \frac{S_n - na}{\sigma}$$

Надо доказать, что  $\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1)$

По четвертому свойству  $\varphi_{\eta_1}(t) = 1 + itE\eta_1 - \frac{t^2}{2}D\eta_1 + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{n}}} = \varphi_{Z_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}{2} + o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- характеристическая функция  $N(0, 1)$

## Предельная теорема Муавра-Лапласа

**Th.** Пусть  $v_n(A)$  - число появления события  $A$  при  $n$  независимых испытаний,  $p$  - вероятность успеха при одном испытании,  $q = 1 - p$ . Тогда  $\frac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow N(0, 1)$

$v_n(A) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = S_n$ , где  $\xi_i \in B_p$  и независимы,  $E\xi_1 = p$ ,  $D\xi_1 = pq$

По ЦПТ  $\frac{v_n(A) - np}{\sqrt{npq}} = \frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \Rightarrow N(0, 1)$

Следствие. Интегральная формула Лапласа:

$$p(k_1 \leq v_n \leq k_2) = p\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{v_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right). \text{ Обозначим } \eta = \frac{v_n - np}{\sqrt{npq}}$$

$$p\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{v_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) = F_\eta\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - F_\eta\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - F_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ где}$$

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

*Nota.* Аналогичным образом ЦПТ применяется для приближенного вычисления вероятностей, связанных с суммами большого числа независимых одинаковых случайных величин, заменяя стандартизованную сумму на стандартное нормальное распределение. Возникает вопрос: какова погрешность данного вычисления?

**Th.** Неравенство Берри-Эссеена

В условиях ЦПТ для  $\xi_1$  с конечным третьим моментом можно оценить так:

$$\left| p\left(\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < x\right) - F_0(x) \right| \leq C \frac{E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sqrt{n(D\xi_1)^3}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

*Nota.* На практике берут  $C = 0.4$ , точная оценка сверху  $C < 0.77$