

Для линейной параметризации форма дифференциала сохраняется

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z \stackrel{\text{инвариант}}{=} z_t^{(n)} dt^n$$

Введем функцию: $z(x(t), y(t)) \stackrel{\text{обозн}}{=} \varphi(t)$ – она ($n+1$) раз дифференцируема (композиция ($n+1$) дифференцируемых и линейных функций)

Заметим, что $x = x_0 + \Delta x t \stackrel{t_0=0}{=} x_0$, $y = y_0 + \Delta y t \stackrel{t_0=0}{=} y_0$, тогда $M \stackrel{t \rightarrow t_0=0}{\rightarrow} M_0$

То есть $z(M_0) = z(x_0, y_0) = z(x(t_0), y(t_0)) = \varphi(t_0) = \varphi(0)$

Таким образом $\varphi(t)$ как функция одной переменной может быть разложена в окрестности $t_0 = 0$ по формуле Маклорена

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{d\varphi(0)}{1!} \Delta t + \cdots + \frac{d^n \varphi(0)}{n!} \Delta t^n + o((\Delta t)^n)$$

Вернемся к $z(x, y)$ ($\Delta t = t - t_0 = 1$):

$$z(x, y) = z(M) = z(M_0) + \frac{dz(M_0)}{1!} + \frac{d^2z(M_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n z(M_0)}{n!} + r_n(x, y)$$

где остаток в форме Лагранжа $r_n(x, y) = r_n(t) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta \Delta t)}{(n+1)!} \Delta t = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta \Delta t)}{(n+1)!}$

Остаток $r_n(x, y)$ должен быть бесконечно малым по отношению к $(\Delta \rho)^n$, то есть $r_n(x, y) = o((\Delta \rho)^n)$

$(r_n(t) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$, если $\varphi(t)$ нужное число раз дифференцируема \Rightarrow ограничена, $r_n(t)$ – ограниченная бесконечно малая)

Nota. В дальнейшем для исследования $z(x, y)$ на экстремум достаточно разложения по формуле Тейлора до 2-ого порядка включительно. Покажем сходимость $r_n(x, y) \stackrel{(\Delta \rho)^n \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ на примере

$$r_2(x, y) = \frac{d^3 z(M_{\text{сред.}})}{3!}$$

$$r_2(x, y) = \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^3 z = \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} (\Delta x)^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} (\Delta y)^2 \Delta x \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} (\Delta y)^3 \right)$$

Вообще говоря, значения частных производных берутся в различных средних точках

$$r_2(x, y) = \frac{1}{3!} (z_{xxx}(\mu_1)(\Delta x)^3 + 3z_{xxy}(\mu_2)(\Delta x)^2 \Delta y + z_{xyy}(\mu_3)(\Delta y)^2 \Delta x + 3z_{yyy}(\mu_4)(\Delta y)^3) = \left[\text{вынесем } (\Delta \rho)^3 \right] =$$

$$\frac{(\Delta \rho)^3}{3!} \left(\text{огран.} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{(\Delta \rho)^3} + \text{огран.} \cdot \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta \rho)^3} + \text{огран.} \cdot \frac{(\Delta y)^2 \Delta x}{(\Delta \rho)^3} + \text{огран.} \cdot \frac{(\Delta y)^3}{(\Delta \rho)^3} \right)$$

$$\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta \rho)^3} = \frac{(\Delta x)^3}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}^3} \stackrel{\Delta x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0, \text{ то есть дробь и выражение выше ограничены}$$

$$\frac{r_2(x, y)}{(\Delta \rho)^2} = \frac{1}{3!} \frac{(\Delta \rho)^3 \cdot \text{огр.}}{(\Delta \rho)^2} = \frac{1}{3!} \Delta \rho \cdot \text{огр.} \stackrel{\Delta \rho \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

4.7. Геометрия ФНП

4.7.1. Линии и поверхности уровня

Положим $z = \text{const}$.

В сечении плоскостью $z = c$ образуется кривая l с уравнением $\begin{cases} z = c \\ \varphi(x, y) = 0 \leftarrow \text{уравнение } l_{\text{проек}} \text{ на } Oxy \end{cases}$

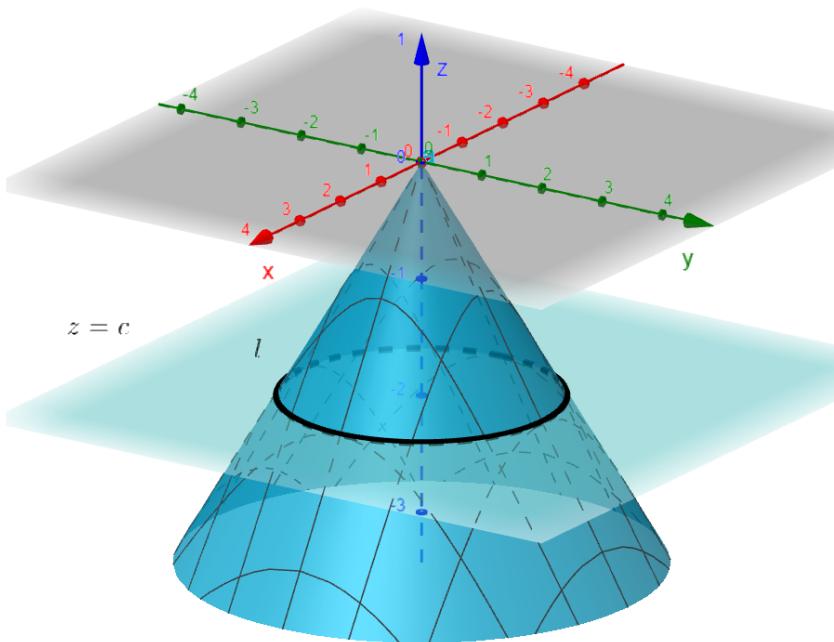
Кривая l с уравнением $z(x, y) = c$ называется линией уровня функции двух переменных $z = z(x, y)$

Def. Поверхность уровня \mathcal{P} – это поверхность с уровнем $u(x, y, z) = c$

Физический смысл: Пусть $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (значения функции $u(x, y, z)$ – скаляры). Тогда говорят, что в \mathbb{R}^3 задано скалярное поле. Например, поле температур, давления, плотности и т. д.

Тогда $u = c$ – поверхности постоянных температур, давления и т. п. (изотермические, изобарные, эквипотенциальные)

Ex. Конус: $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$



Линии уровня $z = c$:

1. $c > 0 \quad \emptyset$
2. $c = 0 \quad x = y = 0$ – точка $(0, 0)$
3. $c < 0 \quad -|c| = -\sqrt{x^2 + y^2}$ или $c^2 = x^2 + y^2$

4.7.2. Производная по направлению, градиент

Задача. Дано скалярное поле $u = u(x, y, z)$ (например, давления). Как меняется давление при перемещении в заданном направлении?

Это задача о нахождении скорости изменения $u(x, y, z)$ в заданном направлении \vec{s}

Из $M_0(x_0, y_0, z_0)$ движемся в $M(x, y, z)$ в направлении \vec{s} , $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, $z = z_0 + \Delta z$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \quad \left| \cdot \frac{1}{\Delta s} \right.$$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^2}$$

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}, \frac{\Delta y}{\Delta s}, \frac{\Delta z}{\Delta s}\right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \vec{s}^0$$

Потребуем, чтобы $u(x, y, z)$ имела непрерывность u_x, u_y, u_z в D

То есть $u(x, y, z)$ дифференцируема и $\Delta u = du + o(\Delta s) = u_x \Delta x + u_y \Delta y + u_z \Delta z + o(\Delta s)$

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = u_x \cos \alpha + u_y \cos \beta + u_z \cos \gamma + \frac{o(\Delta s)}{\Delta s}$$

В предельном переходе получаем: $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$

Nota. Изначально $\Delta u = du + (\text{б. м.}) \Delta x + (\text{б. м.}) \Delta y + (\text{б. м.}) \Delta z \quad \left| \cdot \frac{1}{\Delta s} \right.$

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{du}{\Delta s} + (\text{б. м.}) \cos \alpha, (\text{б. м.}) \cos \alpha \rightarrow 0$$

Def. Производной функции $u = u(x, y, z)$ в направлении \vec{s} называют величину $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$, где α, β, γ - направления \vec{s}

Nota. Производная в определении – число, но $\frac{\partial u}{\partial s} \vec{s}^0$ – вектор скорости

Nota. Заметим, что если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – декартовы орты, то $\frac{\partial u}{\partial i} = \frac{\partial u}{\partial x} 1 + \frac{\partial u}{\partial y} 0 + \frac{\partial u}{\partial z} 0 = \frac{\partial u}{\partial x}$

И аналогично в других направлениях: $\frac{\partial u}{\partial j} = \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial k} = \frac{\partial u}{\partial z}$

Составим вектор $\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \xrightarrow{\text{обозн}} \vec{\nabla} u$

$\vec{\nabla}$ – набла-оператор (оператор Гамильтона); $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – условный вектор

Def. $\overrightarrow{\text{grad}} u \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} u$ – называют градиентом функции $u(x, y, z)$

Свойства градиентов:

Th. 1. $\frac{\partial u}{\partial s} = \text{проек}_{\vec{s}} \vec{\nabla} u$

В любом заданном направлении \vec{s} производная $\frac{\partial u}{\partial s}|_M$ равна проекции градиента в M

Th. 2. $\vec{\nabla} u$ – направление наибольшего значения $\frac{\partial u}{\partial s}$

Th. 3. $\vec{s} \perp \vec{\nabla} u \implies \frac{\partial u}{\partial s} = 0$

Th. 4. $u = u(x, y)$, $u = c$ – линии уровня l . Тогда $\vec{\nabla} u \perp l$

Прямая, содержащая $\vec{\nabla} u$ (т. е. перпендикулярная касательной к l), называется нормалью к l а тогда $\vec{\nabla} u$ – вектор нормали

Доказательства:

1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \vec{s}^0 \right) u = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) u \cdot \vec{s}^0 = \vec{\nabla} u \cdot \vec{s}^0 \\ |\vec{\nabla} u \cdot \vec{s}^0| &= |\vec{\nabla} u| |\vec{s}^0| \cos(\widehat{\vec{\nabla} u, \vec{s}^0}) = |\vec{\nabla} u| \cos(\widehat{\vec{\nabla} u, \vec{s}^0}) = \text{проек}_{\vec{s}} \vec{\nabla} u\end{aligned}$$

2.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\vec{\nabla} u| \cos \varphi, \text{ где } \varphi - \text{угол между } \vec{s} \text{ и } \vec{\nabla} u$$

Косинус принимает наибольшее значение, если угол между \vec{s} и $\vec{\nabla} u$ равен нулю, то есть направления векторов совпадают. Значит, при $\vec{s} = \vec{\nabla} u$ производная принимает наибольшее значение

3.

Из доказательства **Th. 2.** следует, что если \vec{s} сонаправлен с $\vec{\nabla} u$, то производная принимает наибольшее значение. Следовательно, если $\vec{s} \perp \vec{\nabla} u$, то $\cos \varphi = 0$, $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$

4.

$u = c$ – уравнение $l_{\text{пр}}$ в плоскости Oxy , то есть $u(x, y) = c$ мы можем рассмотреть как неявную функцию $u(x, y(x)) - c = 0$

Производная неявной функции: $\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = k_l$ – угловой коэффициент касательной к l

$\vec{\nabla}u = (u_x, u_y) \quad \frac{u_y}{u_x} = k_{\text{град.}}$ – наклон вектора градиента.

Очевидно $k_l \cdot k_{\text{град.}} = -1 \implies \vec{\nabla}u \perp l$