

Разберем пример поверхностного интеграла:

$$\text{Ex. } S_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad S_2 : z = 0, \quad S_3 : z = 1$$

$$S = \bigcup_{i=1}^3 S_i - \text{цилиндр}$$

$$\vec{F} = (P, Q, R) = (x, y, z)$$

$$\iint_{S_{\text{внешн.}}} xdydz + ydxdz + zdx dy = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}$$

Так как проекции S_2 и S_3 на Oxz и Oyz – отрезки, то $dx dz = 0$, $dy dz = 0$:

$$\iint_{S_2} xdydz + ydxdz + zdx dy = \iint_{S_2} zdx dy = 0$$

$$\iint_{S_3} zdx dy \stackrel{z|_{S_3}=1}{=} \iint_{S_3} dx dy \stackrel{\text{с «+», так как } \vec{n}_3 \uparrow Oz}{=} \iint_{D_{xy}} dx dy = \pi$$

$$\iint_{S_1} xdydz + ydxdz = \iint_{D_{yz}^+ : x=\sqrt{1-y^2}} xdydz + \left(- \iint_{D_{yz}^- : x=-\sqrt{1-y^2}} xdydz \right) + \iint_{D_{xz}^+} ydxdz + \left(- \iint_{D_{xz}^-} ydxdz \right) =$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi$$

$$\iint_S = 3\pi$$

5.7. Связь поверхностных интегралов с другими

Th. Гаусса-Остроградского.

$S_1 : z = z_1(x, y)$, $S_3 : z = z_3(x, y)$, $S_2 : f(x, y) = 0$ (проекция на Oxy – кривая)

$S = \bigcup_{i=1}^3 S_i$ – замкнута и ограничивает тело T (S_2 – цилиндр, S_1 – шапочка сверху, S_3 – шапочка снизу)

$P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – непрерывно дифференцируемы, действуют в области $\Omega \supset T$

Тогда
$$\iint_{S_{\text{внешн.}}} Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Мет. Формула Грина:
$$\oint_K Pdx + Qdy = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Вычислим почленно
$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

$$\begin{aligned} \iiint_T \left(\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz \right) dx dy &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z) \Big|_{z=z_1(x, y)}^{z=z_3(x, y)} dx dy = \iint_{D_{xy}} (R(x, y, z_3(x, y)) - \\ &R(x, y, z_1(x, y))) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_3) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1) dx dy = \iint_{S_3} R(x, y, z) dx dy + \\ &\quad \text{двойной} \quad \text{поверхностный} \end{aligned}$$

$$\iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy = \iint_{S_{\text{внешн.}}} R dx dy$$

равен 0, т.к. $dx dy|_{S_2} = 0$

Аналогично остальные члены:

$$\iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{S_{\text{внешн.}}} Q dx dz, \quad \iiint_T \frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz = \iint_{S_{\text{внешн.}}} P dx dz$$

Nota. Если считаем поток через внутреннюю поверхность, то $\iint_{S_{\text{внутр}}} = - \iiint_T$

Nota. С учетом связи поверхностных интегралов $\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dv$

Th. Стокса.

Пусть $S : z = z(x, y)$ – незамкнутая поверхность, L – контур, на которую она опирается
 проек. Oxy $L = K_{xy}$, проек. Oxy $S = D_{xy}$

В области $\Omega \supset S$ действуют функции P, Q, R , непрерывно дифференцируемые

Тогда $\oint_{L^+} P dx + Q dy + R dz = \iint_{S^+} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma$

Найдем слагаемое $\oint_L P(x, y, z) dx$ на $L : z = z(x, y)$ $\oint_{K_{xy}^+} \tilde{P}(x, y, z(x, y)) dx = \oint_{K_{xy}} \tilde{P} dx +$
 $\tilde{Q} dy = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial \tilde{P}(x, y)}{\partial y} dx dy = - \iint_{S^+} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} dx dy =$
 $- \iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma + \frac{\partial P}{\partial z} (-\cos \beta) \right) d\sigma$
 $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} \\ \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \end{pmatrix}$
 $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$

Аналогично $\oint_L Q dy = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) d\sigma, \quad \oint_L R dz = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma$

Остается сложить интегралы

Nota. Формула Грина является частным случаем теоремы Стокса при $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ и $\cos \gamma = 1$
 – элементарная площадка на плоскости Oxy всегда сонаправлена оси Oz

Ех. 1. Возьмем пример выше: $S_1 : x^2 + y^2 = 1$, $S_2 : z = 0$, $S_3 : z = 1$, $S = \bigcup_{i=1}^3 S_i$ – замкнутый цилиндр, $\vec{F} = (P, Q, R) = (x, y, z)$. Получаем по теореме Гаусса-Остроградского:

$$\iint_{S_{\text{внешн}}} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv = 3V_{\text{цил.}} = 3 \cdot 1 \cdot \pi \cdot 1^2 = 3\pi$$

Ех. 2. Те же P, Q, R . По теореме Стокса:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\overbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right)}^{=0} \cos \alpha + 0 + 0 \right) d\sigma = 0$$

6. Теория поля

6.1. Определения

Def. 1. Дано многомерное пространство $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется скалярным полем в Ω

Def. 2. Функция $\vec{F} = (F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x})) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется векторным полем

Nota. Далее будем рассматривать функции в \mathbb{R}^3 , то есть $u = u(x, y, z)$ и $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

Nota. Функции u и \vec{F} могут зависеть от времени t . Тогда эти поля называются нестационарными.

В противном случае стационарными

6.2. Геометрические характеристики полей

$u = u(x, y, z)$: l – линии уровня $u = \text{const}$

$\vec{F} = (P, Q, R)$: w – векторная линия, в каждой точке w вектор \vec{F} – касательная к w

Векторная трубка – совокупность непересекающихся векторных линий

Nota. Отыскание векторных линий

Возьмем $\vec{\tau}$ – элементарный касательный вектор, $\vec{\tau} = (dx, dy, dz)$

Определение векторной линии: $\vec{\tau} \parallel \vec{F} \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ – система ДУ

Ex. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$, $M_0(1, 0)$ – ищем векторную линию $w \ni M_0$

Задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xdx = -ydy \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = -y^2 + C \\ y(1) = 0 \implies C = +1 \end{cases} \iff x^2 + y^2 = 1$$

6.3. Дифференциальные характеристики

Mem. $\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad}} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ – градиент скалярного поля

$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – набла-оператор

Nota. Так как $\vec{\nabla}$ – это вектор, то для $\vec{\nabla}$ определены действия:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$

$$\bullet \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Причем:

$$\bullet \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta - \text{лапласиан, оператор Лапласа}$$

$$\bullet \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 - \text{повторяющиеся строки в определителе}$$

Nota. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ – уравнение, определяющее гармоническую функцию $u(x, y, z)$,
часть волнового уравнения матфизики
 уравнение Лапласа

Def. 1. Дивергенцией поля (от *divergence* – расхождение) называется $\operatorname{div} \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

Def. 2. Вихрем (ротором) поля называется $\operatorname{rot} \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \times \vec{F}$

Def. 3. Если $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, то \vec{F} называется безвихревым полем

Def. 4. Если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, то \vec{F} называется соленоидальным полем

Nota. Безвихревое поле имеет незамкнутые векторные линии, а вихревое – замкнутые

Th. 1. Свойство безвихревого поля: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \iff \exists u(x, y, z) \mid \vec{\nabla} u = \vec{F}$

\implies

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = 0$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Рассмотрим $u = u(x, y, z) \mid \frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R$ – эта функция удовлетворяет системе равенств

$$\vec{F} = (P, Q, R) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \vec{\nabla} u$$

\impliedby Дана $\vec{F} = \vec{\nabla} u$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} u) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) u = 0$$

Nota. Доказали, что если векторное поле является градиентом какого-то скалярного, то его вихрь равен нулю: $\text{rot } \overrightarrow{\text{grad}} u = 0$

Def. Пусть $\vec{F} = \vec{\nabla} u$. Поле $u(x, y, z)$ называется потенциалом поля \vec{F}

Таким образом, доказано, что безвихревое поле потенциально

Th. 2. Свойство соленоидального поля: если $\text{div } \vec{F} = 0$, то $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{F} = 0$$

6.4. Интегральные характеристики. Теоремы теории поля

Mem. Поток поля \vec{F} через поверхность S называется величина $\Pi = \iint_S \vec{F} d\vec{\sigma}$

Def. Циркуляцией поля \vec{F} через контур L называется величина $\Gamma = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = \oint_L P dx + Q dy + R dz$

Nota. Запишем **Th.** на векторном языке

1* Гаусса-Остроградского

$$\begin{aligned} \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy &= \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ \iint_S (P, Q, R)(dydz, dx dz, dx dy) &= \iint_S (P, Q, R)(\cos \alpha d\sigma, \cos \beta d\sigma, \cos \gamma d\sigma) = \iint_S \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_S \vec{F} d\vec{\sigma} \\ \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \iiint_T (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dv = \iiint_T \text{div } \vec{F} dv \end{aligned}$$

Th. Гаусса-Остроградского. Поток поля \vec{F} через замкнутую поверхность равен тройному интегралу дивергенции этого поля по объему внутри поверхности:

$$\iint_S \vec{F} d\vec{\sigma} = \iiint_T \text{div } \vec{F} dv$$

2* Стокса

$$\begin{aligned} P dx + Q dy + R dz &= \vec{F} d\vec{l} \\ \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma = \\ &= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) d\sigma = \iint_S \text{rot } \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_S \text{rot } \vec{F} d\vec{\sigma} \end{aligned}$$

Th. Стокса. Циркуляция поля \vec{F} через контур равен интегралу ротора этого поля по поверхности внутри контура

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{F} d\vec{\sigma}$$

3* Th. О потенциале

Рассмотрим **Th.** об интеграле, не зависящего от пути. Для поля $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$

третий пункт $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ можно представить как $\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = 0$

Так как $\text{rot } \vec{F} = 0$, то по свойству безвихревого поля $\exists u(x, y, z) \mid \vec{\nabla} u = \vec{F}$

Поэтому $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{F} d\vec{l} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, 0 \right) \cdot (dx, dy, dz) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy = \Phi(x, y)$

Th. О потенциале. Для поля $\vec{F} = (P, Q)$ и для любого контура L верно:

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0 \iff \text{rot } \vec{F} = 0 \iff \exists u(x, y, z) \mid \vec{\nabla} u = \vec{F}$$

Ех. $\vec{F} = x\vec{i} + xy\vec{j}$, $L : x = y, x = -y, x = 1$

По формуле Грина (Стокса) $\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D y dx dy \quad \text{rot } \vec{F} \neq 0$

$$\oint_L x dx + xy dy = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} = \int_0^1 (x + x^2) dx + \int_{-1}^1 y dy - \int_0^1 (x + x^2) dx = \int_{-1}^1 y dy = 0$$

$$\iint_D y dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_{-x}^x dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

6.5. Механический смысл

1* Дивергенция

По **Th.** Гаусса-Остроградского поток $\Pi = \iiint_T \text{div } \vec{F} dv$

По **Th.** о среднем существует точка $M_1 \in T \mid \iiint_T \text{div } \vec{F} dv = \text{div } \vec{F} \Big|_{M_1} \cdot V_T = \Pi$

$$\text{div } \vec{F} \Big|_{M_1} = \frac{\Pi}{V_T}$$

Выберем точку M_0 внутри произвольного объема T . Пусть $V_T \rightarrow 0$, тогда $\text{div } \vec{F} \Big|_{M_1 \rightarrow M_0} =$

$\lim_{V_T \rightarrow 0} \frac{\Pi}{V_T}$ – поток через границу бесконечно малого объема с центром M_0 или мощность источника в M_0

Таким образом, дивергенция поля – мощность источников

Nota. Смысл утверждения $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$ – поле вихря свободно от источников

Nota. Утверждение $\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}) = 0$ – поле потенциалов свободно от вихрей

2* Ротор

По **Th.** Стокса циркуляция $\Gamma = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{\sigma}$

По **Th.** о среднем существует точка M_1 | $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{\sigma} = \operatorname{rot} \vec{F}|_{M_1} \cdot S = \Gamma$

$\operatorname{rot} \vec{F}|_{M_1} = \frac{\Gamma}{S}$, будем стягивать поверхность S к точке M_0 , тогда $\operatorname{rot} \vec{F}|_{M_0} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S}$ – циркуляция по бесконечно малому контуру с центром M_0