

## Лекция 6.

### Проверка статистических гипотез

Пусть  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$  из некоторого распределения  $F$

**Def.** Гипотезой  $H$  называется предположение о распределении наблюдаемой случайной величины.

Доказать какое-то утверждение с помощью методов матстатистики невозможно - можно лишь с какой-то долей уверенности утверждать

**Def.** Гипотеза называется простой, если она однозначно определяет распределение:  $H : F = F_1$ , где  $F_1$  - распределение известного типа с известными параметрами

В противном случае гипотеза называется сложной - она является объединением конечного или бесконечного числа гипотез

Например, «величина  $X$  принадлежит нормальному распределению» - сложная гипотеза, а «величина  $X$  принадлежит нормальному распределению с матожиданием  $a = 1$  и дисперсией  $\sigma^2 = 1$ » - простая

В общем случае работаем со схемой из двух или более гипотез. В ходе проверки принимается ровно одна из них. Мы ограничимся самой простой схемой из 2 гипотез:  $H_0$  - основная (нулевая) гипотеза,  $H_1 = \overline{H_0}$  - альтернативная (конкурирующая) гипотеза, состоящая в том, что основная гипотеза неверна

Основная гипотеза  $H_0$  принимается или отклоняется при помощи статистики критерия  $K$

$$K(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow \mathbb{R} = \bar{S} \cup S \longrightarrow (H_0, H_1)$$

$$\begin{cases} H_0, & \text{если } K(X_1, \dots, X_n) \in \bar{S} \\ H_1, & \text{если } K(X_1, \dots, X_n) \in S \end{cases}$$

Вместо «гипотеза доказана» лучше употреблять «гипотеза принимается/отвергается»

Область  $S$  называется критической областью, а точка  $t_{кр}$  на границе областей называется критической

**Def.** Ошибка первого рода состоит в том, что  $H_0$  отклоняется, хотя она верна. Аналогично, ошибка второго рода состоит в том, что  $H_1$  отклоняется, хотя она верна.

**Def.** Вероятность  $\alpha$  ошибки первого рода называется уровнем значимости критерия. Вероятность ошибки второго рода обозначаем  $\beta$ . Мощностью критерия называется вероятность  $1 - \beta$  (вероятность недопущения ошибки второго рода)

Ясно, что критерий будет тем лучше, чем меньше вероятности ошибок  $\alpha$  и  $\beta$ . При увеличении объема выборки уменьшаются обе вероятности. При фиксированном объеме попытки уменьшить одну вероятность увеличат другую

Одним из способов является фиксация одной вероятности (принято  $\alpha$ ) и уменьшение другой

## Построение критериев согласия

**Def.** Говорят, что критерий  $K$  является критерием асимптотического уровня  $\varepsilon$ , если вероятность ошибки первого рода  $\alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varepsilon$

**Def.** Критерий  $K$  для проверки гипотезы  $H_0$  называется состоятельным, если вероятность ошибки второго рода  $\beta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

**Def.** Критерием согласия уровня  $\varepsilon$  называем состоятельный критерий асимптотического уровня  $\varepsilon$

Обычно критерий согласия строится по следующей схеме: берется статистика  $K(X_1, \dots, X_n)$ , обладающая свойствами:

1. Если  $H_0$  верна, то  $K(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow Z$ , где  $Z$  - известное распределение
2. Если  $H_0$  неверна, то есть верна  $H_1$ , то  $K(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \infty$  (достаточно сильно отклоняться от распределения  $Z$ )

Построенный таким образом критерий является критерием согласия, то есть обладает свойствами

1. критерия асимптотического уровня
2. состоятельного критерия

Пусть  $t_{кр}$  - критическая точка такая, что  $P(|Z| \geq t_{кр}) = \varepsilon$  - заданный уровень ошибки первого рода

$$\begin{cases} H_0, & \text{если } |K| < t_{кр} \\ H_1, & \text{если } |K| \geq t_{кр} \end{cases}$$

1. Тогда  $\alpha = P(|K| \geq t_{кр} \mid H_0) = 1 - P(|K| < t_{кр} \mid H_0) = 1 - (F_K(t_{кр}) -$

$$F_K(-t_{кр})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{\text{т.к. при верной } H_0 \\ F_K(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_Z(x)}} 1 - (F_Z(t_{кр}) - F_Z(-t_{кр})) = P(|Z| \geq t_{кр}) = \varepsilon$$

2. Если  $H_1$  верна, то  $|K| \xrightarrow{P} \infty$ , то есть  $\forall C \ P(|K| > C \mid H_1) \xrightarrow{P} 1 \implies \beta = P(|K| < C \mid H_1) \xrightarrow{P} 0$

## Гипотеза о среднем нормальной совокупности при известной дисперсии

Пусть  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$  из  $N(a, \sigma^2)$ , причем  $\sigma^2$  известен.

Проверяется гипотеза, что  $H_0 : a = a_0$ , против  $H_1 : a \neq a_0$  для уровня значимости  $\alpha$

1. По пункту 1 теоремы, если  $H_0 : a = a_0$  верна, то  $K = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma} = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - a}{\sigma} \in N(0, 1)$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ Если верна } H_1 : a \neq a_0, \text{ то } |K| &= \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma} \right| = \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x} - a}{\sigma} + \frac{a - a_0}{\sigma} \right| = \\
 &= \left| \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - a)}{\sigma}}_{\substack{\in N(0,1), \text{ограничен} \\ \text{по вероятности}}} + \underbrace{\sqrt{n} \frac{a - a_0}{\sigma}}_{\substack{\rightarrow \infty \\ \text{const}}} \right| \xrightarrow{p} \infty
 \end{aligned}$$

Для уровня значимости  $\alpha$  находим  $t_{кр}$  такую, что  $\alpha = P(|K| \geq t_{кр} \mid H_0) = P(|Z| \geq t_{кр}) \implies P(|Z| < t_{кр}) = 2F_0(t_{кр}) - 1 = 1 - \alpha$

$F_0(t_{кр}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$  - то есть  $t_{кр}$  - квантиль стандартного нормального распределения уровня  $1 - \frac{\alpha}{2}$

$$\begin{cases} H_0, & \text{если } |K| < t_{кр} \\ H_1, & \text{если } |K| \geq t_{кр} \end{cases}$$

## Гипотеза о среднем нормальной совокупности при неизвестной дисперсии

1. По пункту 4 основной теоремы, если  $H_0 : a = a_0$  верна, то  $K = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - a_0}{S} = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - a}{S} \in T_{n-1}$

2. Если верна  $H_1 : a \neq a_0$ , то  $|K| = \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x} - a_0}{S} \right| = \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x} - a}{S} + \frac{a - a_0}{S} \right| =$

$$= \left| \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - a)}{S}}_{\substack{\in T_{n-1}, \text{ограничен} \\ \text{по вероятности}}} + \underbrace{\sqrt{n} \frac{a - a_0}{S}}_{\substack{\rightarrow \infty \\ \text{const}}} \right| \xrightarrow{p} \infty$$

Аналогично получаем  $t_{кр}$  - квантиль распределения  $T_{n-1}$  уровня  $1 - \frac{\alpha}{2}$

## Доверительные интервалы как критерии гипотез по параметрам распределения

Пусть  $(X_1, \dots, X_n)$  из  $F_\theta$ , где  $F_\theta$  - распределение известного типа с неизвестным параметром  $\theta$

Проверяется гипотеза, что  $H_0 : \theta = \theta_0$ , против  $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Допустим, что для  $\theta$  построен доверительный интервал  $(\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+)$ , то есть  $P(\theta_\gamma^- < \theta < \theta_\gamma^+) = \gamma$ .

Тогда критерий  $\begin{cases} H_0, & \text{если } \theta_0 \in (\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+) \\ H_1, & \text{если } \theta_0 \notin (\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+) \end{cases}$  будет уровня  $\alpha = 1 - \gamma$

$$\alpha = P(\theta_0 \notin (\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+) \mid H_0) = 1 - P(\theta_0 \in (\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+) \mid X \in F_{\theta_0}) = 1 - \gamma$$

Поэтому доверительные интервалы можно использовать для проверки гипотез

Но почему в схеме  $\begin{cases} H_0 : a = \bar{x} \\ H_1 : a \neq \bar{x} \end{cases}$  основная гипотеза всегда верна, тогда как выборочно среднее на практике почти всегда не равняется матожиданию. Потому что ...

А вот нефиг такие гипотезы вообще выдвигать

© Блаженнов А. В.

## Критерий вероятности появления события

$\square P(A) = p$  - вероятность успеха при одном испытании. При достаточно большом количестве испытаний  $n$  событие  $A$  появилось  $m$  раз. Проверяется  $H_0 : p = p_0$  против  $H_1 : p \neq p_0$   
В качестве статистики критерия возьмем величину  $K = \frac{m - np_0}{\sqrt{np_0q_0}}$

1. Если  $H_0$  верна, то  $K = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow N(0, 1)$  по ЦПТ

2. Lab.

Из тех же соображений  $t_{кр}$  - квантиль  $N(0, 1)$  уровня  $1 - \frac{\alpha}{2}$

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0, & \text{если } |K| < t_{кр} \\ H_1 : p \neq p_0 & \text{если } |K| \geq t_{кр} \end{cases}$$

Ех. При посеве 4000 семян 970 всходов оказались рецессивного цвета, а 3030 - доминантного. Проверим гипотезу  $H_0 : p = \frac{1}{4}$  - Мендель прав, против  $H_1 : p \neq \frac{1}{4}$  - Мендель не прав, для уровня значимости - 0.05

$$K = \frac{m - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} = \frac{970 - 4000 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{4000 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}} \approx -1.095$$

Так как  $|K| = 1.095 < 1.96 = t_{кр}$ , то  $H_0 : p = \frac{1}{4}$  верна