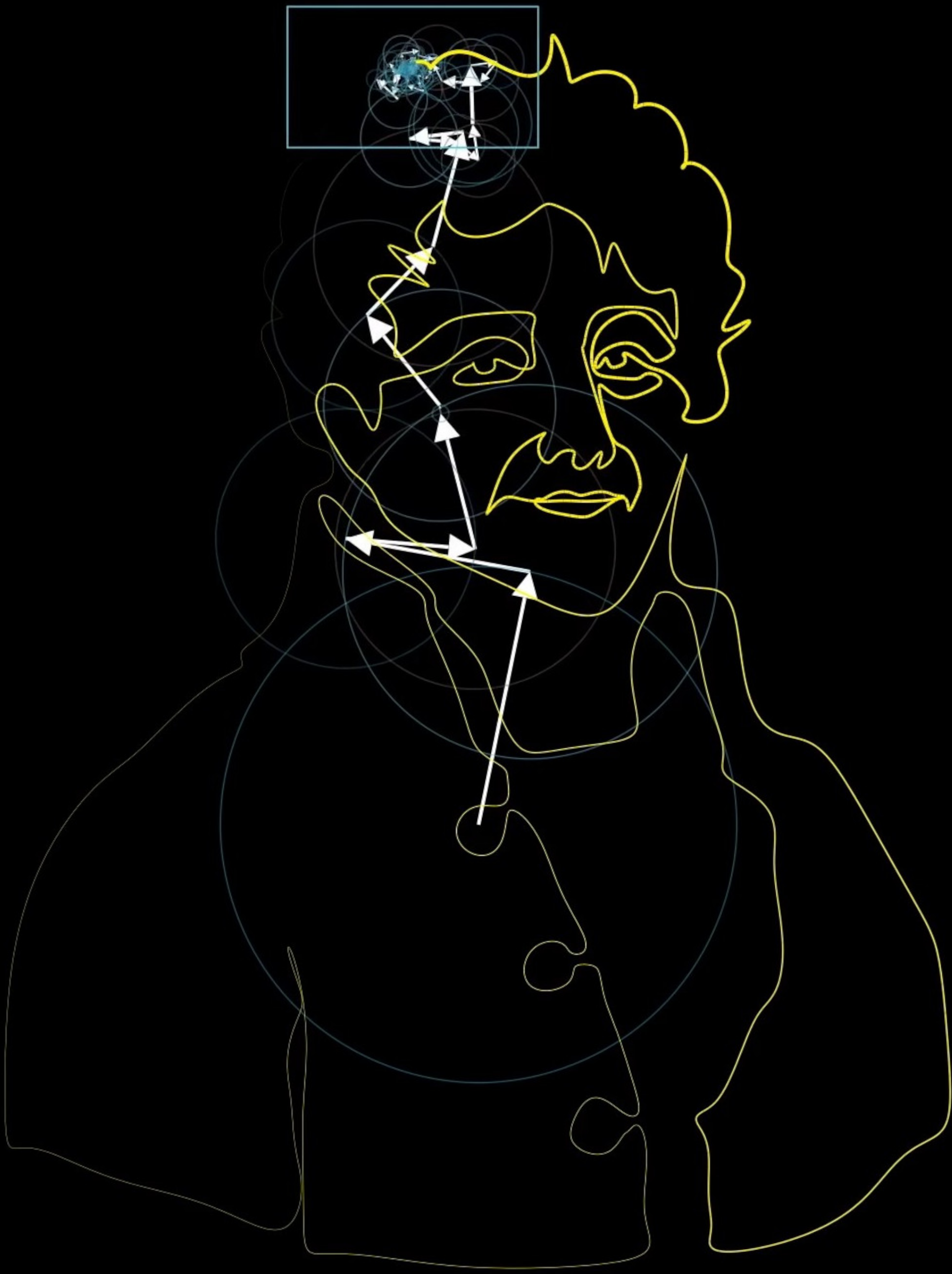
Analyse de Fourier



Contents

Chapter 1

Abstract

Soit $s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, sans supposé périodicités de s,

$$s(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\zeta} f(\zeta)\, d\zeta \tag{1.1}$$

Où f défini dans $\mathbb{R}^n$, s'appelle la transformée de Fourier de s,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\zeta} s(x)\, dx \tag{1.2}$$

L'expression (1) exprime s comme superposition indexé par $\zeta, defonctionsimple$:

x $\mapsto e^{ix\zeta}$ qui oscillent à la fréquence $2\pi|\zeta|$ étant affecté à l'amplitude $|s(\zeta)|$ et d'une phase $\arg s(\zeta)$.

Ainsi, ce lien permet d'exprimer s en fonction de f et vice-versa. On observe une **dualité importante entre analyse de l'amplitude et l'analyse fréquentiel.** (En mécanique quantique les rôles joués par s et f sont parfaitement symétrique).

À travers ce cours nous allons parcourir les chapitres suivants :

- **Fonction holomorphe d'une variable complexe** : permettra d'introduire les coefficients de Fourier
- **Espace fonctionnel et convergent**
- **Espace hilbertiens** : permet en replaçant le signal dans un nouvelles espace de simplifier les calculs et d'attaquer les fonctions de carré sommable
- **Série de Fourier** : est une étape intermédiaire pour manipuler par la suite les intégral en question
- **Transformé de Fourier**

Chapter 2

Introduction Visuelle à Fourier

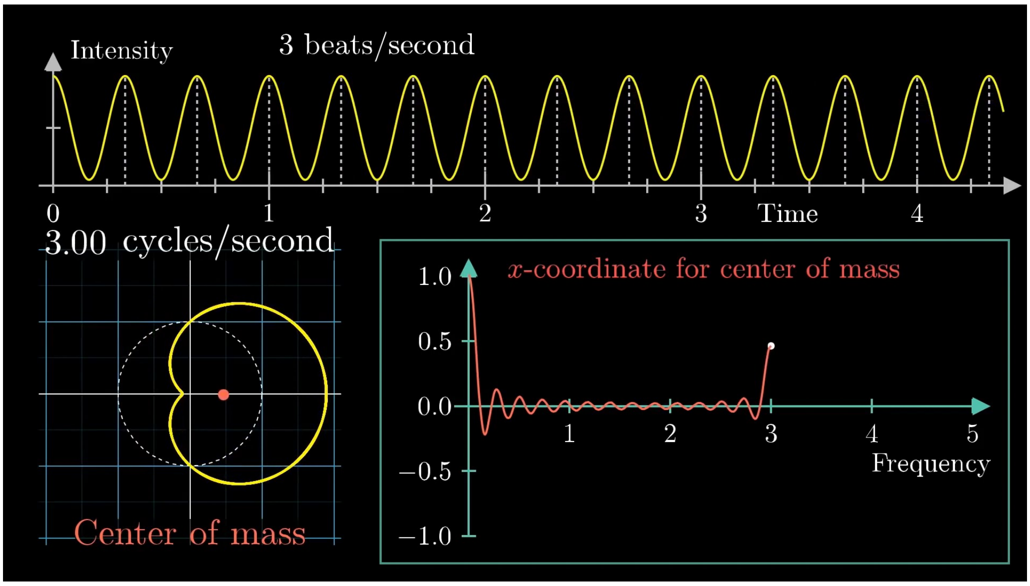


Figure 2.1: Enroulement du signal sur un cercle complexe : © 3blue1brown

Pour comprendre l'idée général de la Transformé de Fourier, il faut **impérativement** regarder cette vidéo : 3blue1brown : But what is the Fourier Transform? A visual introduction.

Point clefs à retenir

- toutes fonctions périodiques est représentable sur un cercle complexe "enroulement d'une fonction".
- En observant le point de gravité (qui sera détaillé dans le chapitre **Fonction holomorphe d'une variable complexe**) on remarque que lorsque la fréquence de représentation sur le cercle coïncide avec celle du signal

donné alors, la coordonnée x a un comportement spécifique. Cette dernière est décentré.

- L'objectif de la Transformé de Fourier est de repérer ce changement de comportement. Il permet ainsi d'obtenir les différentes fréquences que comporte ce signal.
- Ainsi le signal et exprimable par les différentes fréquences qu'il comportent.

Avant de continuer plus loins dans l'analyse de Fourier voici une série de documents que je recommande particulièrement pour comprendre la théorie de Fourier, mais aussi et surtout, pour voir l'intérêt d'étudier Fourier :

- **3blue1brown** :
  - 3blue1brown : But what is the Fourier Transform? A visual introduction.
  - But what is a Fourier series? From heat flow to circle drawings — DE4
  - The more general uncertainty principle, beyond quantum (explique la relation entre la transformé de Fourier et le signal (au niveau des radars sur Doppler)). Ce qui montre que les chauve-souris sont capables instinctivement d'effectuer des Transformer de Fourier.
- **Reducible** :
  - The Fast Fourier Transform (FFT): Most Ingenious Algorithm Ever?
- **SmarterEveryDay** :
  - What is a Fourier Series? (Explained by drawing circles) - Smarter Every Day 205 redondant à une des vidéos de **3blue1brown**
  - What is a Fourier Series? (Explained by drawing circles) - Smarter Every Day 205 mathématiques appliqués à l'art
- **Jean-Michel Bony** :
  - Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. Dont la structure de ce cours est fortement inspirés.

Chapter 3

Fonction holomorphe d'une variable complexe

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'on effectue un "enroullement du signal sur le cercle unité complexe". L'exploitation de ses données s'effectue via l'étude du point de gravité. Ce chapitre introduit les méthodes permettent son obtention.

3.2 Définition

source : Wikipedia

En géométrie différentielle, l'intégrale curviligne est une intégrale où la fonction à intégrer est évaluée sur une courbe Γ. Il y a deux types d'intégrales curvilignes, selon que la fonction est à valeurs réelles ou à valeurs dans les formes linéaires. Le second type (qui peut se reformuler en termes de circulation d'un champ de vecteurs) a comme cas particulier les intégrales que l'on considère en analyse complexe.

Dans cet article, Γ est un arc orienté dans $\mathbb{R}^n$, rectifiable c'est-à-dire paramétré par une fonction continue à variation bornée $t \mapsto \gamma(t)$, avec $t \in [a, b]$.

3.2.1 Exemple

Soit la fonction $f(z) = 1/z$, et soit C le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique, ce qui peut se paramétrer par e^{it}, avec t parcourant $[0, 2\pi]$. L'intégrale correspondante est :

$$\int_{\mathrm{C}} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi \tag{3.1}$$