

Analyse de Fourier



Table des matières

1	Avant-propos	5
I	Introduction Visuelle à Fourier	7
2	Enroulement du signal sur le cercle complexe	9
2.1	Visualisation	9
2.2	Transcription Mathématiques	10
3	Cas appliqué : Doppler	13
3.1	Environnement simple	13
3.2	Détermination du la vitesse	14
3.3	Environnement réel	16
3.4	Conclusion	19
II	Pré requis mathématiques	21
4	Fonction holomorphe d'une variable complexe	23
4.1	Introduction	23
4.2	Définition : fonction holomorphe	23
4.2.1	Rappel : fonction de classe C^1	23
4.2.2	Définition fonction holomorphe	23
4.3	Intégral curviligne	24
4.3.1	Exemple	24
4.3.2	Intégrale continue par morceau	24
5	Intégrale	25
5.1	Fonctions sommables	25
III	Analyse de Fourier	27
6	Convolution	29
6.1	Définition	29

7	Transformation de Fourier	31
7.1	Transformation de Fourier des fonctions sommables	31
7.1.1	Transformée	31
7.1.2	Transformée inverse	31
IV	Ressources	33
8	Document introductif	35

Chapitre 1

Avant-propos

L'objectif final de ce cours est de comprendre les **Transformée de Fourier**. Savoir d'où elles viennent, en comprendre ses expressions et ce qu'elles permettent de faire. La physique a pour objectif l'étude des phénomènes naturelles. *Ici nous nous concentrerons sur le traitement du signal.*

Le **signal** est une mesure physique observable d'un phénomène le plus souvent électrique, acoustique ou optiques. L'étude par Fourier permet de réinterpréter le signal, qui est une fonction complexe, en une somme de fonctions périodiques qui en permet une simplification de calcul. **Plus de détails dans le chapitre suivant s'intitulant Introduction Visuelle à Fourier.**

Pour le moment, ce qui suit n'est que présenté, et sera détaillé plus tard dans le chapitre **Transformée de Fourier**. Soit $\hat{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, sans supposé périodicités de \hat{f} ,

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\zeta} \hat{f}(\zeta) d\zeta \quad (1.1)$$

Où f défini dans \mathbb{R}^n , s'appelle la transformée de Fourier de \hat{f} ,

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\zeta} dx \quad (1.2)$$

L'expression (1) exprime \hat{f} comme superposition indexé par ζ , *de fonctions simple* :

$x \mapsto e^{ix\zeta}$ qui oscillent à la fréquence $2\pi|\zeta|$ étant affecté à l'amplitude $|\hat{f}(\zeta)|$ et d'une phase $\arg \hat{f}(\zeta)$.

Ainsi, ce lien permet d'exprimer \hat{f} en fonction de f et vice-versa. On observe une **dualité importante entre analyse de l'amplitude et l'analyse fréquentiel**. (En mécanique quantique les rôles joués par \hat{f} et f sont parfaitement symétrique).

À travers ce cours nous allons parcourir les chapitres suivants :

- **Fonction holomorphe d'une variable complexe** : permettra d'introduire les coefficients de Fourier
- **Espace fonctionnel et convergent**
- **Espace hilbertiens** : permet en remplaçant le signal dans un nouvelles espace de simplifier les calculs et d'attaquer les fonctions de carré sommable

- **Série de Fourier** : est une étape intermédiaire pour manipuler par la suite les intégral en question
- **Transformée de Fourier**

Première partie

**Introduction Visuelle à
Fourier**

Chapitre 2

Enroulement du signal sur le cercle complexe

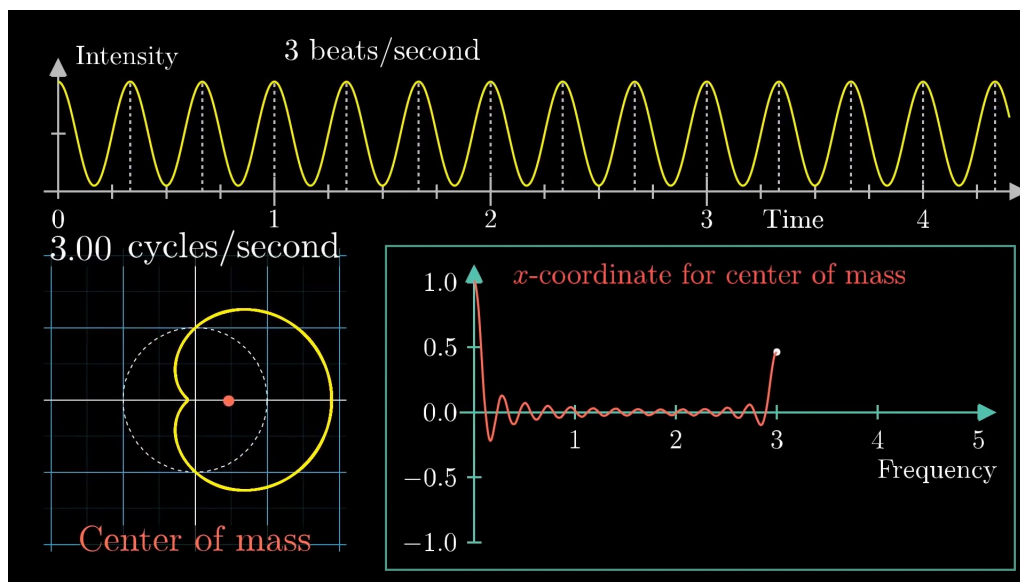


FIGURE 2.1 – Enroulement du signal sur le cercle complexe : © 3blue1brown

Pour comprendre l'idée général de la Transformé de Fourier, il faut **impérativement** regarder cette vidéo : [3blue1brown : But what is the Fourier Transform? A visual introduction.](#)

2.1 Visualisation

- **Objectif** : le signal est une fonction complexe. L'objectif est de le représenter d'une manière plus simple. Or selon Fourier, une fonction quelconque peut se représenter sous la sommes de plusieurs fonctions périodiques.

- Toutes fonctions périodiques sont représentables sur un cercle complexe "enroulement d'une fonction". En effet, liée à leur caractéristique d'être périodique, elle peut se représenter sur un cercle où la vitesse parcourut sur un cycle correspondrai à la fréquence du signal que l'on étudie.
- Comment "enrouler la fonction" ? Imaginons que l'on a un vecteur qui est en rotation sur un cercle unitaire en fonction du temps. Nous lui associons, le module à l'amplitude du signal à l'instant t correspondant. La vitesse à laquelle un tour est effectué en parcourant le cercle, s'intitule un cycle. Ainsi un cycle par unité de temps s'intitule une fréquence. Cette représentation s'effectue sur un cercle complexe pour ainsi simplifier la représentation des coordonnées de points, où l'axe des abscisses correspond à celui de la partie réel, et l'axe des ordonnées à celui de la partie imaginaire. Soit $(x, y) \mapsto x + iy$.
- **Remarque** : à ce stade, on constate qu'il y a deux fréquences différentes. La première, correspond à celle du signal, c'est-à-dire au bout de combien de temps le plus motifs se répète. La seconde, celle sur le cercle détaillés au point précédent. Pour le moment ces deux fréquences sont dissociées.
- En observant le point de gravité (qui sera détaillé dans le chapitre **Fonction holomorphe d'une variable complexe**) on remarque que lorsque la fréquence de représentation sur le cercle coïncide avec celle du signal donné alors, la coordonnée x a un comportement spécifique. Cette dernière est décentré. En effet, tant que les fréquences ne coïncident pas, le point de gravité gravite aux alentours du point $z_0 = 0 + i0$.
- L'objectif de la Transformée de Fourier est de repérer ce changement de comportement. Il permet ainsi d'obtenir les différentes fréquences que comporte ce signal.
- Ainsi le signal est exprimable par les différentes fréquences qu'il comporte.

2.2 Transcription Mathématiques

Cette représentation permet de simplifier le signal, comme prévu. Voici ce que l'on obtient par étapes, pour obtenir le **centre de gravité** en question. Premièrement, rappelons que l'équation du cercle complexe s'écrit sous cette forme $e^{2\pi it}$. Pour représenter la fréquence f , cela équivaut à accélérer ou ralentir le temps, autrement dit, appliqué un facteur au temps qui lui s'écoule de la même manière :

$$e^{-2\pi itf} \quad (2.1)$$

Remarque : par convention dans le contexte de Fourier le sens est négatif. Maintenant, associons l'amplitude du signal $g(t)$ au module :

$$g(t)e^{-2\pi itf} \quad (2.2)$$

À ce niveau là, nous venons d'exprimer la coordonnée (x, y) d'un point correspondant à l'enroulement du signal en question à l'instant t . Pour obtenir le point de gravité, il faut obtenir la moyenne de tous les points :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N g(t_k) e^{-2\pi it_k f} \quad (2.3)$$

Ainsi, pour obtenir le meilleur point de gravité, il faut tendre N vers ∞ . Ce qui revient à écrire :

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} g(t) e^{-2\pi i t f} dt \quad (2.4)$$

Nous venons d'obtenir l'équation du **point de gravité**.

Mais la transformée de Fourier ne correspond qu'à la partie intégral, soit :

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) e^{-2\pi i t f} dt \quad (2.5)$$

Remarque : l'intérêt réside dans le fait que l'extraction de fréquence sera plus facile. En effet, sans la fraction, nous n'obtenons plus une moyennes, et ainsi nous obtenons une accumulation ; lorsque le point de gravité se décentrera alors la différence sera plus importante, surtout si l'on effectue plusieurs tours.

Chapitre 3

Cas appliqué : Doppler

Maintenant étudions un cas spécifique d'application de Fourier, pour cela voir [3blue1brown : more general uncertainty principle, quantum](#).

Nous allons admettre le Principe d'incertitude de Heisenberg (en théorie quantique) pour la suite, (et nous allons appercevoir que nous retrouveron l'analyse de Fourier).

Que dit ce théorème ? Plus nous sommes précis sur la position d'une particule, moins nous en savons sur son momentum (*càd ici, fréquence*). Et vice-versa.

3.1 Environnement simple

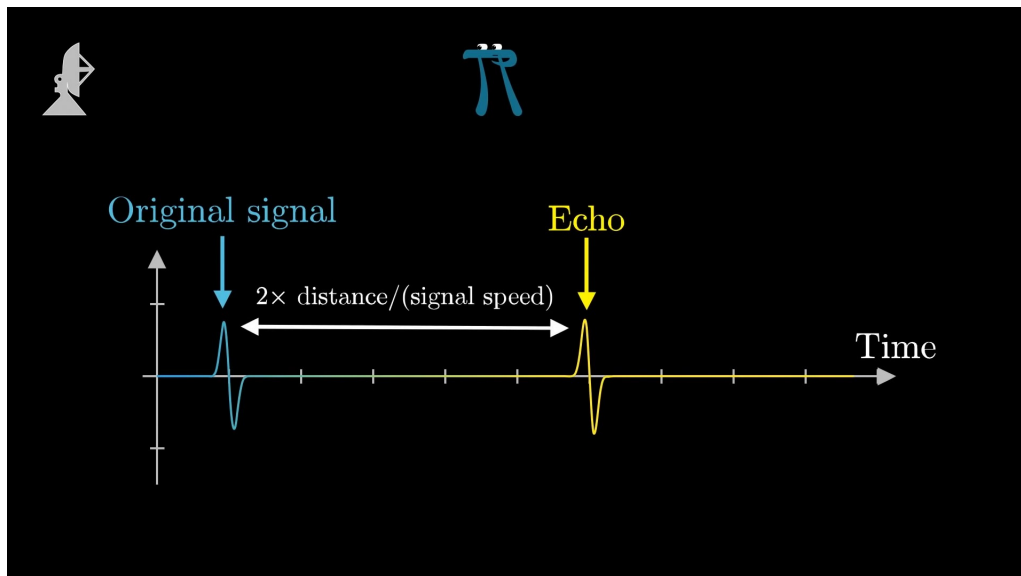


FIGURE 3.1 – Étude de Doppler dans un environnement simple : ©3blue1brown

Le radar émet une impulsion courte. Lorsque cette onde entre en collision avec la cible, elle est réfléchi au radar qui la capte. Grâce au laps de temps écoulé entre l'émission de l'onde d'origine et la réception de l'onde de retour, nous pouvons déterminer la distance entre le radar et la cible.

3.2 Détermination du la vitesse

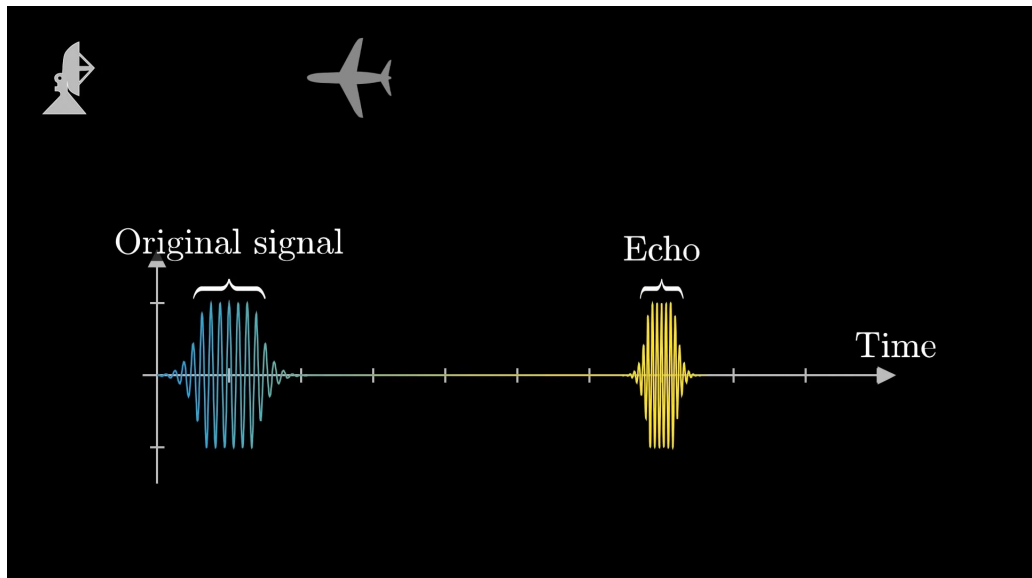


FIGURE 3.2 – Détermination de la vitesse par compression d'onde :
©3blue1brown

Dans le cas précédent nous obtenions que très peu d'information. Maintenant, le radar envoie une impulsion longue. Cette impulsion rentre en collision contre la cible. Si la cible avance[/s'éloigne] vers[/du] le radar, alors le signal de retour sera compressé[/décompressé]. Autrement dit sa fréquence sera plus élevé[/basse].

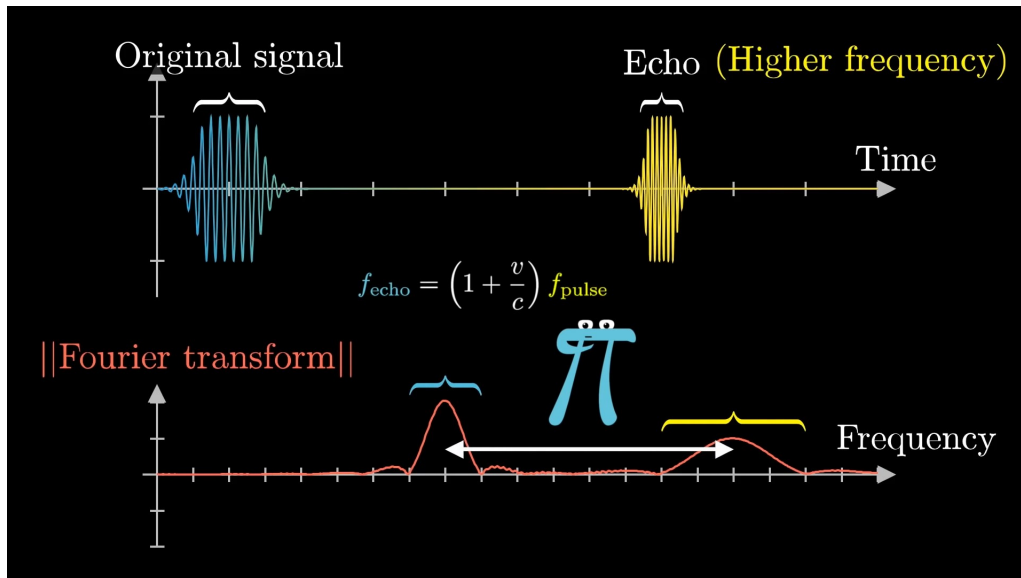


FIGURE 3.3 – Analyse fréquentiel des signaux d’origine et de retour :
©3blue1brown

Lorsque nous effectuons une transformée de Fourier de l’impulsion d’origine et de l’impulsion de retour, nous pouvons en extraire les informations concernant la vitesse de la cible en question.

Remarque : Un signal concentré dans le temps a un transformé de Fourier élargi et vice-versa. Nous obtenons par analogie au Principe d’incertitude de Heisenberg.

$$\begin{aligned} \text{temps} &\Leftrightarrow \text{distance} \\ \text{fréquence} &\Leftrightarrow \text{vitesse} \end{aligned}$$

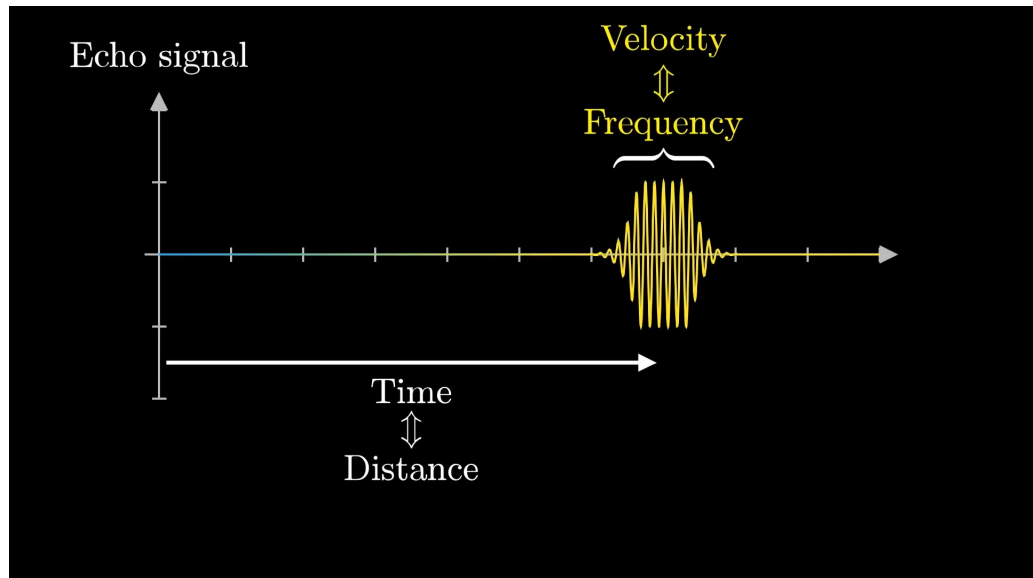


FIGURE 3.4 – Ainsi plus un radar est certain de la position de la cible, moins il est précis sur la vitesse de l'objet. : ©3blue1brown

3.3 Environnement réel

Mais dans un environnement réel, le signal de retour est altéré. Son altération peut être dû à des paramètres extérieurs, à la qualité du radar, mais aussi le nombre de cibles scannées. En effet, les signaux de retours peuvent s'altérer entre eux. Donc lorsque le radar effectue un envoi long d'un signal dans un environnement comportant une multitude de cibles, la chance d'altération est plus élevée.

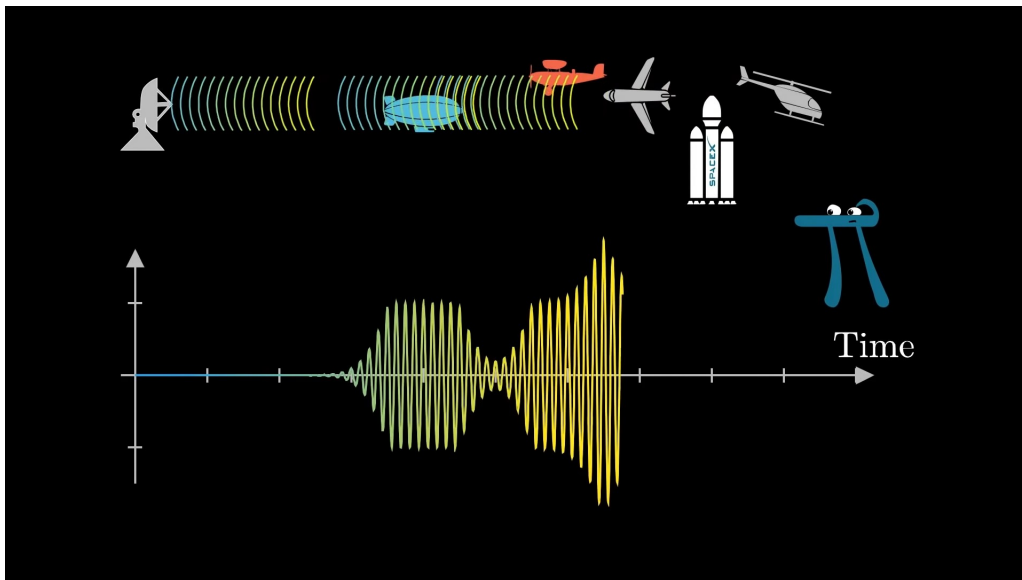


FIGURE 3.5 – Collision avec multiples cibles : ©3blue1brown

Une des solutions est de ne pas envoyer une impulsion longue mais plusieurs très courtes impulsions pour ainsi en déterminer les positions de chaque cible (comme vu dans la sous-section traitant du **Cas simple**).

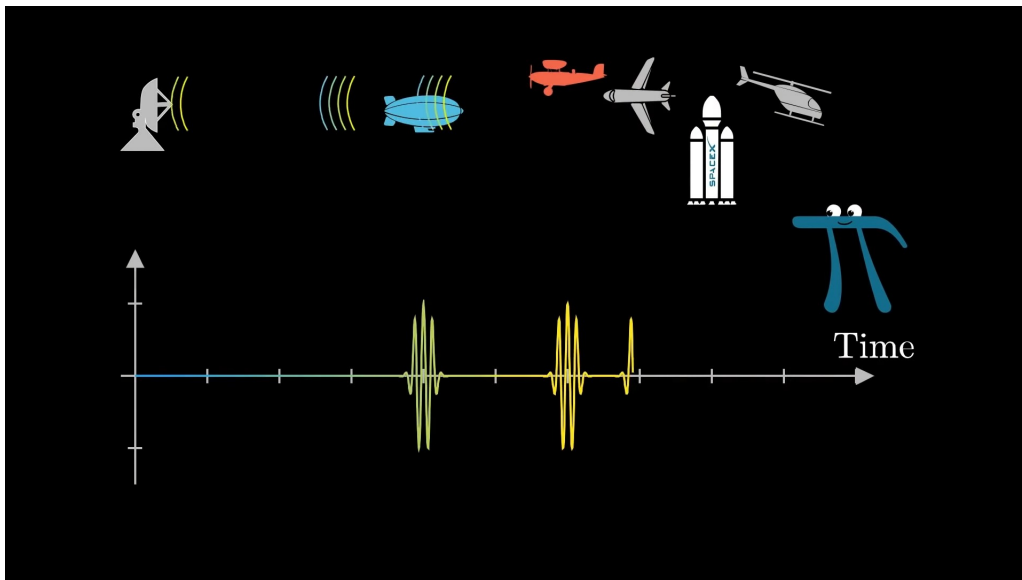


FIGURE 3.6 – Envoie d'impulsions courtes sur multitude de cibles : ©3blue1brown

Lors de l'application de Fourier, étant donné, que l'impulsion est courte et par le principe d'incertitude de Heisenberg, nous obtenons un résultat plus complexe pour l'interprétation de la vitesse.

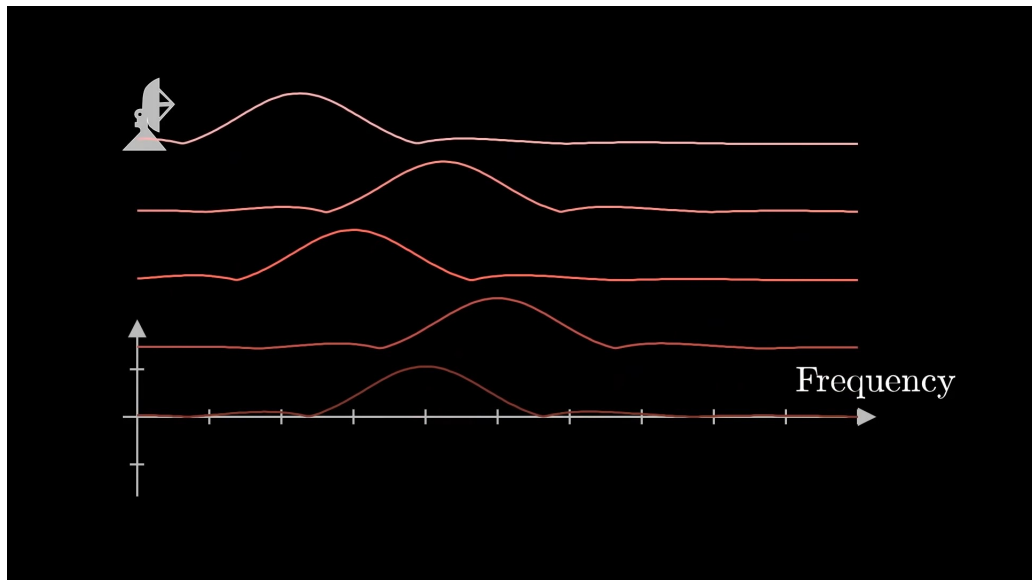


FIGURE 3.7 – Extraction des fréquences après la Transformée de Fourier des signaux de retours à impulsions courtes : ©3blue1brown

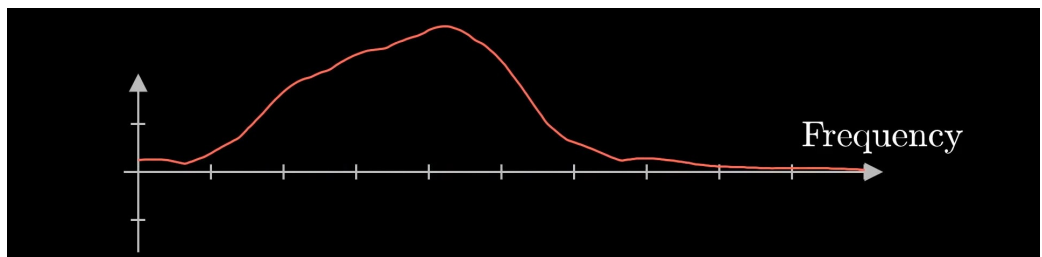


FIGURE 3.8 – Transformée de Fourier des signaux de retours à impulsion courtes qui démontre la complexité en l'extraction de fréquences indépendantes. (Il est difficile d'obtenir la décomposition comme sur la figure précédente. : ©3blue1brown

Pour obtenir une décomposition plus claire, il faut envoyer des impulsions longues.

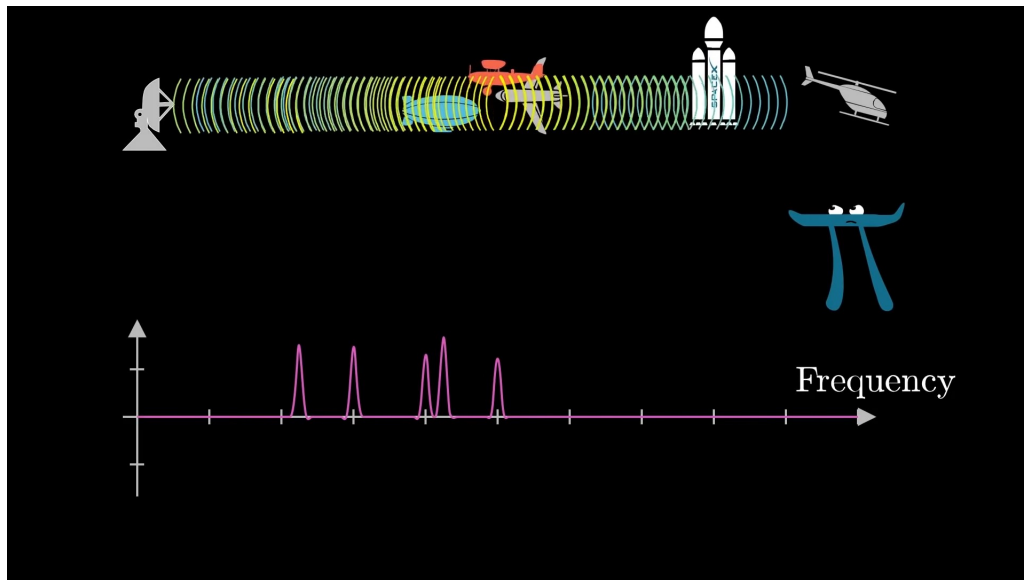


FIGURE 3.9 – Transformée de Fourier des signaux de retours à impulsion long, qui démontre une simplicité d'extraction d'information concernant les différentes cibles. : ©3blue1brown

3.4 Conclusion

Ici, l'objectif de cette apparté sur Doppler, n'est pas de comprendre Doppler, mais le rapport entre le signal et la transformée de Fourier.

À retenir : Un signal concentré dans le temps a un transformé de Fourier élargi et vice-versa.

Deuxième partie

Pré requis mathématiques

Chapitre 4

Fonction holomorphe d'une variable complexe

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'on effectue un enroulement du signal sur le cercle unité complexe". L'exploitation de ses données s'effectue via l'étude du point de gravité. Ce chapitre introduit les méthodes qui en permettent son obtention.

4.2 Définition : fonction holomorphe

La théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe peut apparaître que comme une généralisation naturelle de la théorie des fonctions dérivables d'une variable réelle. Or nous pouvons constater :

$$D(f) \subset \mathbb{C} \wedge f \in C^1 \implies f \in C^\infty$$

4.2.1 Rappel : fonction de classe C^1

Une application f est de classe C^1 si $D_f = \Omega$,

$$f : (x, y) \mapsto F(x, y)$$

avec Ω un ouvert dans R^2 , et $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existes et continues dans Ω .

4.2.2 Définition fonction holomorphe

$$(\Omega \subset \mathbb{C}, \forall z \in \Omega, \partial z \rightarrow 0), \frac{f(z + \partial z) - f(z)}{\partial z} \implies f'(z) \quad (4.1)$$

$$(f \in C^1 \wedge f \in \Omega), \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

et donc f holomorphe $\iff (4.1) \iff (4.2)$.

Formulation complémentaire. Posons $P(x, y) = \Re f(x + iy)$ et $Q(x, y) = \Im f(x + iy)$. Nous avons donc f holomorphe,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \wedge \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \iff \frac{\partial f}{\partial x} = i \frac{\partial f}{\partial y} \iff f \text{ holomorphe}$$

Exemple de fonctions holomorphes :

$$\forall a \in \mathbb{C}, f : z \mapsto az, f' = a$$

Exemple de fonctions non holomorphes :

$$z \mapsto \bar{z}, z \mapsto \Re z, z \mapsto \Im z,$$

4.3 Intégral curviligne

source : [Wikipedia](#)

En géométrie différentielle, l'**intégrale curviligne** est une intégrale où la fonction à intégrer est évaluée sur une courbe Γ . Il y a deux types d'intégrales curvilignes, selon que la fonction est à valeurs réelles ou à valeurs dans les formes linéaires. Le second type (qui peut se reformuler en termes de circulation d'un champ de vecteurs) a comme cas particulier les intégrales que l'on considère en analyse complexe.

Dans cet article, Γ est un arc orienté dans \mathbb{R}^n , rectifiable c'est-à-dire paramétré par une fonction continue à variation bornée $t \mapsto \gamma(t)$, avec $t \in [a, b]$.

4.3.1 Exemple

Soit la fonction $f(z) = 1/z$, et soit C le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique, ce qui peut se paramétrer par e^{it} , avec t parcourant $[0, 2\pi]$. L'intégrale correspondante est :

$$\int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi \quad (4.3)$$

4.3.2 Intégrale continue par morceau

Un chemin de classe de C^1 par morceaux dans Ω une application continue γ de $[a, b]$ dans Ω tel qu'il existe une subdivision :

$$a = t_0 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

où chaque sous intervalle soit un chemin de C^1 .

Le chemin est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Par les fonctions holomorphes nous pouvons obtenir les résultats vu précédemment de l'enroulement du signal sur le cercle complexe.

Chapitre 5

Intégrale

5.1 Fonctions sommables

Source : Méthode mathématiques pour les sciences physiques

Les fonctions sommables sont une notion essentiel pour la convolution lors des Transformée de Fourier.

Définition : Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$, on dit que f est sommable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty \quad (5.1)$$

L'espace de fonction sommable est notée $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Rappel :

$$f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \int (\lambda f + g) = \lambda \int f + \int g \quad (5.2)$$

Remarque : Pour montrer qu'une fonction est sommable, Il suffit de montrer qu'elle est majorée en module par une fonction positive dont on sait déjà qu'elle est d'intégrale finie.

Remarque : Pour les fonctions sommables positives, nous obtenons les propriétés suivantes :

— **Linéarité**

— **Croissance :**

- Si f et g , sommables à valeurs réels, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int f \leq \int g$
- Pour f et g , sommables à valeurs complexe, on a :

$$\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx \quad (5.3)$$

et,

$$\int |f(x) + g(x)| dx \leq \int |g(x)| dx + \int |f(x)| dx \quad (5.4)$$

Troisième partie

Analyse de Fourier

Chapitre 6

Convolution

source : Analyse de Fourier, Christophe Duroseau

La convolution est un opérateur notée $*$ s'applique à deux fonctions, ici x et y . Soit :

$$z = x * y \quad (6.1)$$

La correspondance physique est tel :

- x signal mesuré
- y instrument de mesure
- z mesure obtenu

Remarque : si l'appareil de mesure est parfaitement précis, alors nous obtenons $z = x * y = x$, soit $y = 1$.

Le problème à résoudre est d'inverser le produit pour obtenir x soit $x = z * y^{-1}$. Où y^{-1} inverse la convolution de y .

6.1 Définition

x, y fonctions réelles localements sommables,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u) du \quad (6.2)$$

Lorsque cette intégrale converge.

Lorsque cette intégrale converge on a :

$$x * y = y * x \quad (6.3)$$

Chapitre 7

Transformation de Fourier

Lorsqu'une fonction quelconque n'est pas périodique, alors nous ne pouvons pas utiliser les séries de Fourier. Nous allons donc prendre une période infinie et ainsi utiliser les transformées de Fourier.

7.1 Transformation de Fourier des fonctions sommables

7.1.1 Transformée

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n),$$
$$\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-i\xi x} dx$$

7.1.2 Transformée inverse

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) | \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n),$$
$$f = (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})$$

avec

$$\overline{\mathcal{F}}(\hat{f}) : \xi \mapsto f(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Quatrième partie

Ressources

Chapitre 8

Document introductif

Avant de continuer plus loin dans l'analyse de Fourier voici une série de documents que je recommande particulièrement pour comprendre la théorie de Fourier, mais aussi et surtout, pour voir l'intérêt d'étudier Fourier :

- **3blue1brown** :
 - [3blue1brown : But what is the Fourier Transform? A visual introduction.](#)
 - [But what is a Fourier series? From heat flow to circle drawings](#) — DE4
 - [The more general uncertainty principle, beyond quantum](#) (explique la relation entre la transformé de Fourier et le signal (au niveau des radars sur Doppler)). Ce qui montre que les chauve-souris sont capables instinctivement d'effectuer des Transformer de Fourier.
- **Reducible** :
 - [The Fast Fourier Transform \(FFT\): Most Ingenious Algorithm Ever?](#)
- **SmarterEveryDay** :
 - [What is a Fourier Series? \(Explained by drawing circles\)](#) - Smarter Every Day 205 redondant à une des vidéos de **3blue1brown**
 - [Oscilloscope Music - \(Drawing with Sound\)](#) - Smarter Every Day 224 mathématiques appliqués à l'art
- **Jean-Michel Bony** :
 - [Méthodes mathématiques pour les sciences physiques](#). Dont la structure de ce cours est fortement inspirés.
- **Christophe Duroisseau** :
 - [Analyse de Fourier](#)