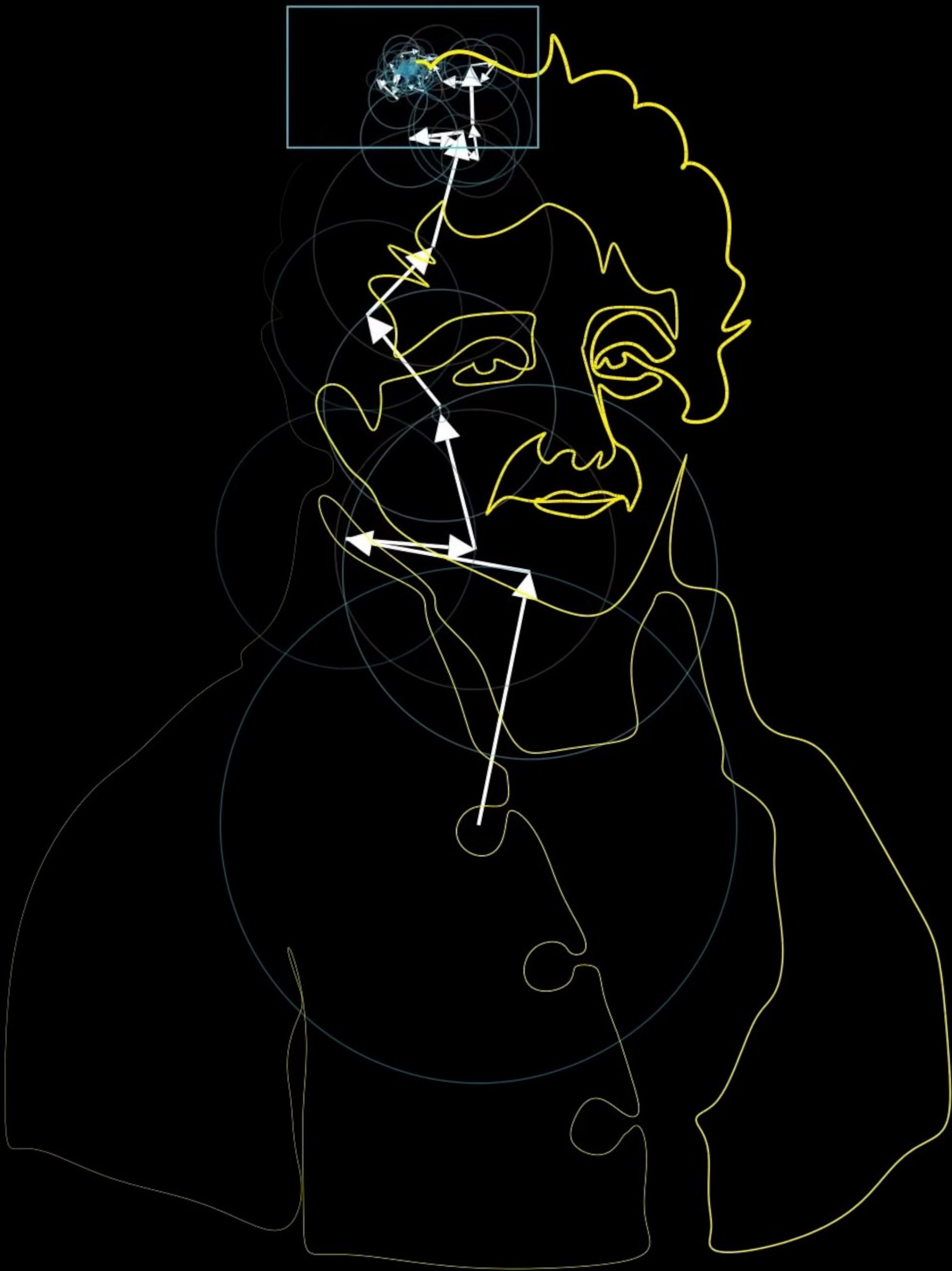
Analyse de Fourier



Contents

Chapter 1

Abstract

L'objectif final de ce cours est de comprendre les <u>Transformée de Fourier</u>. Savoir d'où elles viennent, en comprendre ses expressions et ce qu'elles permettent de faire. La physique a pour objectif l'étude des phénomènes naturelles. *Ici nous nous concentrerons sur le traitement du signal.*

Le **signal** est une mesure physique observable d'un phénomène le plus souvent électrique, acoustique ou optiques. L'étude par Fourier permet de réinterpréter le signal, qui est une fonction complexe, en une somme de fonctions périodiques qui en permet une simplification de calcul. **Plus de détails dans le chapitre suivant s'intitulant <u>Introduction Visuelle à Fourier</u>.**

Pour le moment, ce qui suit n'est que présenté, et sera détaillé plus tard dans le chapitre **Transformée de Fourier**. Soit $\hat{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, sans supposé périodicités de $\hat{f}$,

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\zeta} \hat{f}(\zeta)\, d\zeta \tag{1.1}$$

Où f défini dans $\mathbb{R}^n$, s'appelle la transformée de Fourier de $\hat{f}$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{-ix\zeta}\, dx \tag{1.2}$$

L'expression (1) exprime $\hat{f}$ comme superposition indexé par $\zeta, de fonction simple$:

x $\mapsto e^{ix\zeta}$ qui oscillent à la fréquence $2\pi|\zeta|$ étant affecté à l'amplitude $|\hat{f}(\zeta)|$ et d'une phase $\arg \hat{f}(\zeta)$.

Ainsi, ce lien permet d'exprimer $\hat{f}$ en fonction de f et vice-versa. On observe une **dualité importante entre analyse de l'amplitude et l'analyse fréquentiel.** (En <u>mécanique quantique</u> les rôles joués par $\hat{f}$ et f sont <u>parfaitement symétrique</u>).

À travers ce cours nous allons parcourir les chapitres suivants :

- **Fonction holomorphe d'une variable complexe** : permettra d'introduire les coefficients de Fourier
- **Espace fonctionnel et convergent**
- **Espace hilbertiens** : permet en replaçant le signal dans un nouvelles espace de simplifier les calculs et d'attaquer les fonctions de carré sommable

- **Série de Fourier** : est une étape intermédiaire pour manipuler par la suite les intégral en question
- **Transformée de Fourier**

Chapter 2

Introduction Visuelle à Fourier

2.1 Enroulement du signal sur le cercle complexe

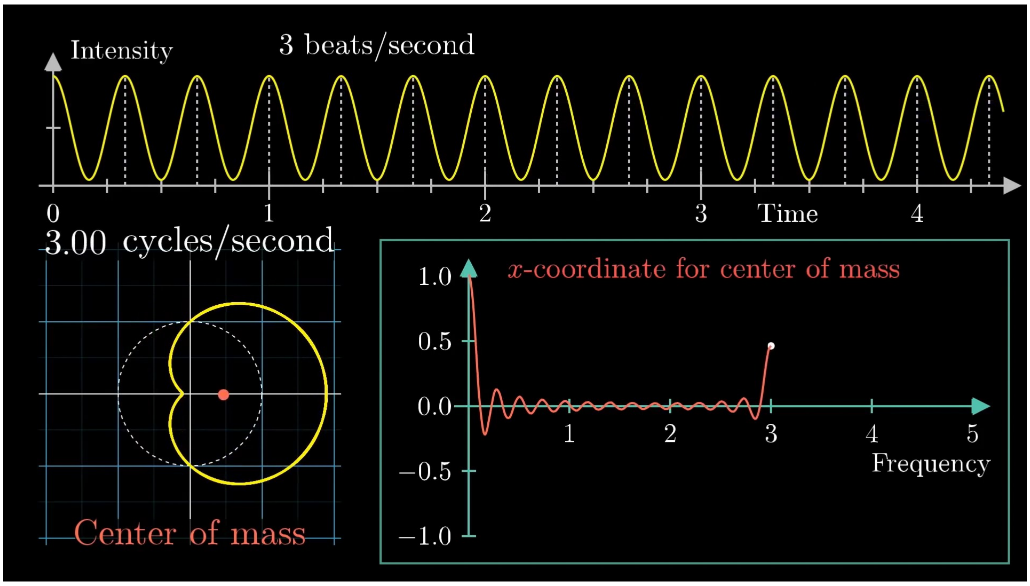


Figure 2.1: Enroulement du signal sur le cercle complexe : © 3blue1brown

Pour comprendre l'idée général de la Transformé de Fourier, il faut **impérativement** regarder cette vidéo : 3blue1brown : But what is the Fourier Transform? A visual introduction.

Point clefs à retenir

- **Objectif** : le signal est une fonction complexe. L'objectif est de le représenter d'une manière plus simple. Or selon Fourier, une fonction quelconque peut se représenter sous la sommes de plusieurs fonctions périodiques.

- Toutes fonctions périodiques sont représentables sur un cercle complexe "enroulement d'une fonction". En effet, liée à leur caractéristique d'être périodique, elle peut se représenter sur un cercle où la vitesse parcourut sur un cycle correspondrai à la fréquence du signal que l'on étudie.

- Comment "enrouler la fonction" ? Imaginons que l'on a un vecteur qui est en rotation sur un cercle unitaire en fonction du temps. Nous lui associons, le module à l'amplitude du signal à l'instant t correspondant. La vitesse à laquelle un tour est éffectué en parcourant le cercle, s'intitule un cycle. Ainsi un cycle par unité de temps s'intitule une fréquence. Cette représentation s'effectue sur un cercle complexe pour ainsi simplifier la représentation des coordonées de points, où l'axe des absices correspond à celui de la partie réel, et l'axe des ordonées à celui de la partie imaginaire. Soit $(x, y) \mapsto x + iy$.

- **Remarque** : à ce stade, on constate qu'il y a deux fréquences différentes. La première, correspond à celle du signal, càd au bout de combien de temps le plus motifs se répète. La seconde, celle sur le cercle détaillés au point précédent. Pour le moment ces deux fréquence sont dissocier.

- En observant le point de gravité (qui sera détaillé dans le chapitre **Fonction holomorphe d'une variable complexe**) on remarque que lorsque la fréquence de représentation sur le cercle coïncide avec celle du signal donné alors, la coordonnée x a un comportement spécifique. Cette dernière est décentré. En effet, tant que les fréquences ne coïncide pas, le point de gravité gravite aux alentours du point $z_0 = 0 + i0$.

- L'objectif de la Transformé de Fourier est de repérer ce changement de comportement. Il permet ainsi d'obtenir les différentes fréquences que comporte ce signal.

- Ainsi le signal est exprimable par les différentes fréquences qu'il comporte.

Transcription Mathématiques : Cette représentation permet de simplifier le signal, comme prévu. Voici ce que l'on obtient par étapes, pour obtenir le **centre de gravité** en question.
Premièrement, rappelons que l'équation du cercle complexe s'écrit sous cette forme $e^{2\pi it}$. Pour représenté la fréquence f, cela équivaut à accélérer ou ralentir le temps, autrement dit, appliqué un facteur au temps qui lui s'écoule de la même manière :

$$e^{-2\pi itf} \tag{2.1}$$

Remarque : par convention dans le contexte de Fourier le sens est négatif.
Maintenant, associons l'amplitude du signal $g(t)$ au module :

$$g(t)e^{-2\pi itf} \tag{2.2}$$

À ce niveau là, nous venons d'exprimer la coordonnée (x, y) d'un point correspondant à l'enroulement du signale en question à l'instant t.

Pour obtenir le point de gravité, il faut obtenir la moyenne de tout les points :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} g(t_k)e^{-2\pi i t_k f} \tag{2.3}$$

Ainsi, pour obtenir le meilleur point de gravité, il faut tendre N vers ∞. Ce qui revient à écrire :

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} g(t)e^{-2\pi i t f}\, dt \tag{2.4}$$

Nous venons d'obtenir l'équation du **point de gravité**.
Mais la transformée de Fourier ne correspond qu'à la partie intégral, soit :

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)e^{-2\pi i t f}\, dt \tag{2.5}$$

Remarque : l'intérêt réside dans le fait que l'extraction de fréquence sera plus facile. En effet, sans la fraction, nous n'obtenons plus une moyennes, et ainsi nous obtenons une accumulation; lorsque le point de gravité se décentrera alors la différence sera plus importante, surtout si l'on effectue plusieurs tours.

2.2 Cas appliqué : Doppler

Maintenant étudions un cas spécifique d'application de Fourier, pour cela voir 3blue1brown : more general uncertainty principle, quantum.

Nous allons admettre le Principe d'incertitude de Heisenberg (en théorie quantique) pour la suite, (et nous allons appercevoir que nous retrouveron l'analyse de Fourier).
Que dit ce théoreme ? Plus nous sommes précis sur la position d'une particule, moins nous en savons sur son momentum (*càd ici, fréquence*). Et vice-versa.

2.2.1 Environnement simple

Le radar émet une impulsion simple. Lorsque cette onde entre en collision avec la cible, elle est retourné au radar qui la capte. À partir du delta nous pouvons déduire la distance de la cible en question.

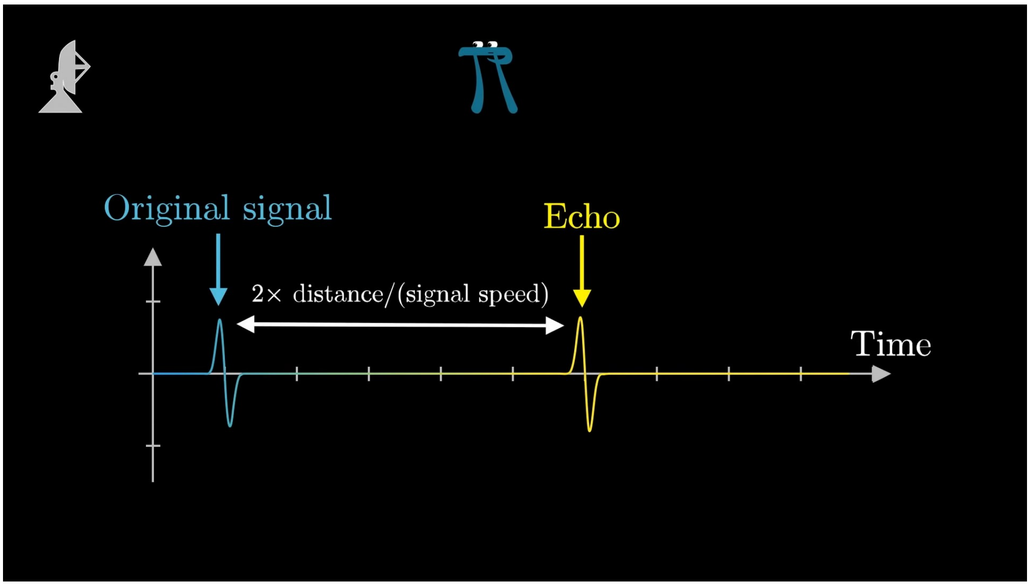


Figure 2.2: Étude de Doppler dans un environnement simple : ©3blue1brown

2.2.2 Détermination du la vitesse

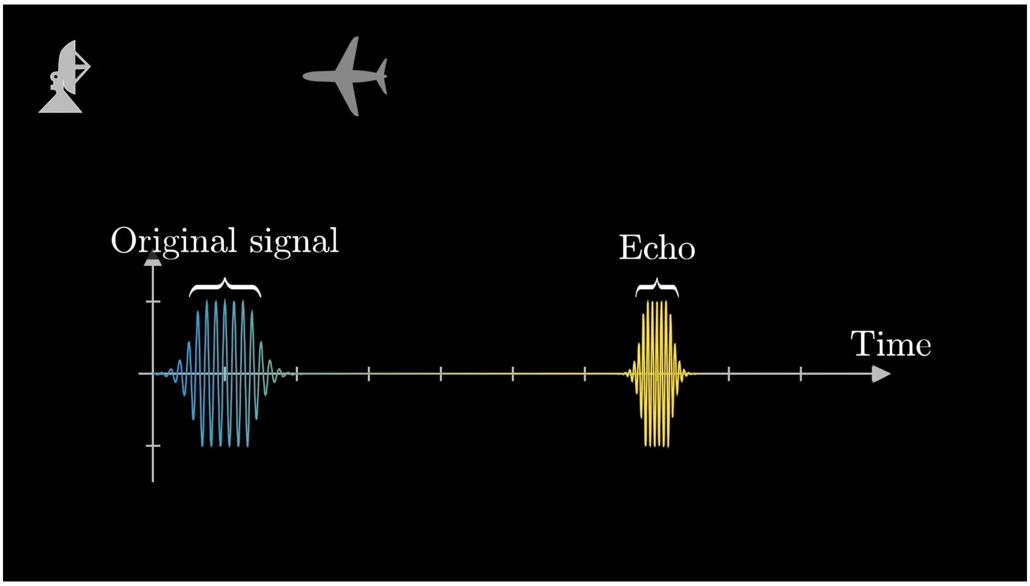


Figure 2.3: Détermination de la vitesse par compression d'onde : ©3blue1brown

Dans le cas précèdent nous obtenions que très peu d'information. Maintenant, le radar envoie un signal (comportant une fréquence). Ce signal rentre en collision contre la cible. Si la cible avance[/s'eloigne] vers[/du] le radar, alors le signal de retour sera compressé[/décompressé].

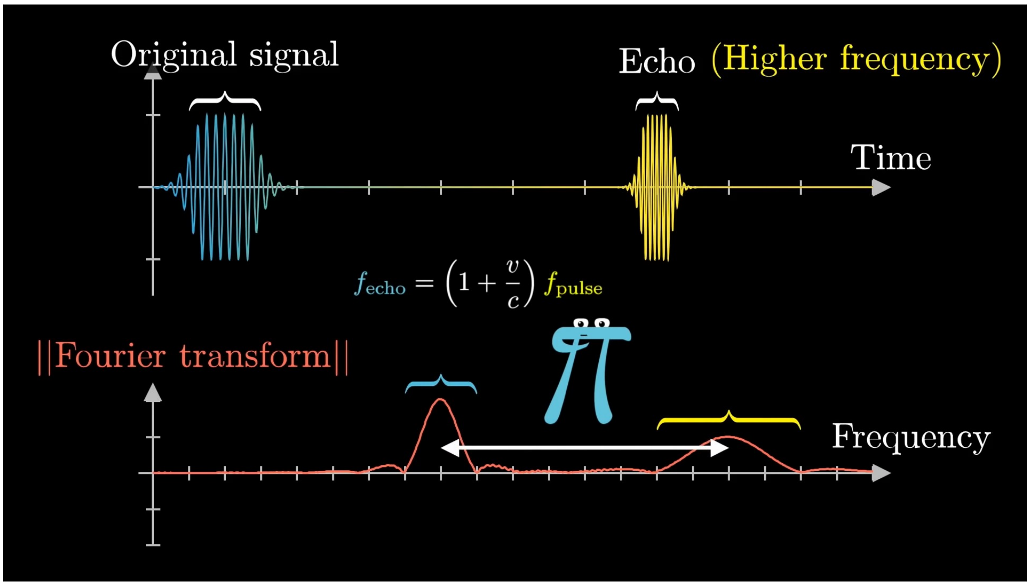


Figure 2.4: Analyse fréquentiel des signaux d'origine et de retour : ©3blue1brown

Ainsi par la transformée de Fourier nous obtenons suffisamment d'informations sur le déplacement de la cible.
Remarque : Nous obtenons :

$$temps \Leftrightarrow distance$$
$$fréquence \Leftrightarrow vitesse$$

Ce qui est analogue au Principe d'incertitude de Heisenberg.

2.2.3 Environnement réel

Mais dans un environnement réel, le signal de retour est altéré. Son altération peut être dû à des paramètres extérieur, à la qualité du radar, mais aussi le nombre de cibles scannées. En effet, les signaux de retours peuvent s'altérer entre eux. Donc lorsque le radar effectue un envoie long d'un signal dans un environnement comportant une multitude de cibles, la chance d'altération est plus élevé.

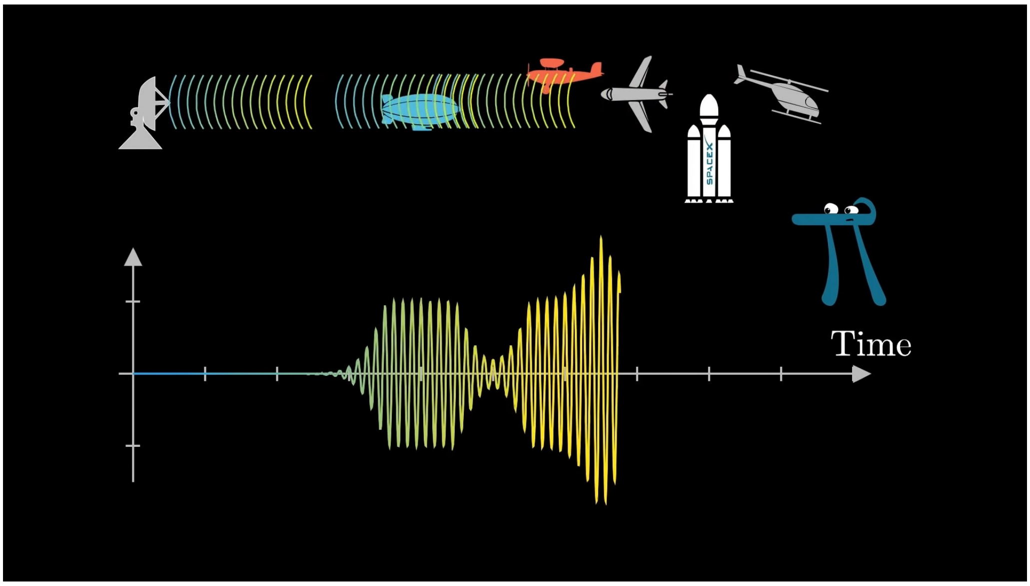


Figure 2.5: Collision avec multiples cibles : ©3blue1brown

Une des solutions est de ne pas envoyer un signal long mais de très courtes impulsions pour ainsi en déterminer les positions de chaque cible (comme vu dans la sous-section traitant du **Cas simple**).

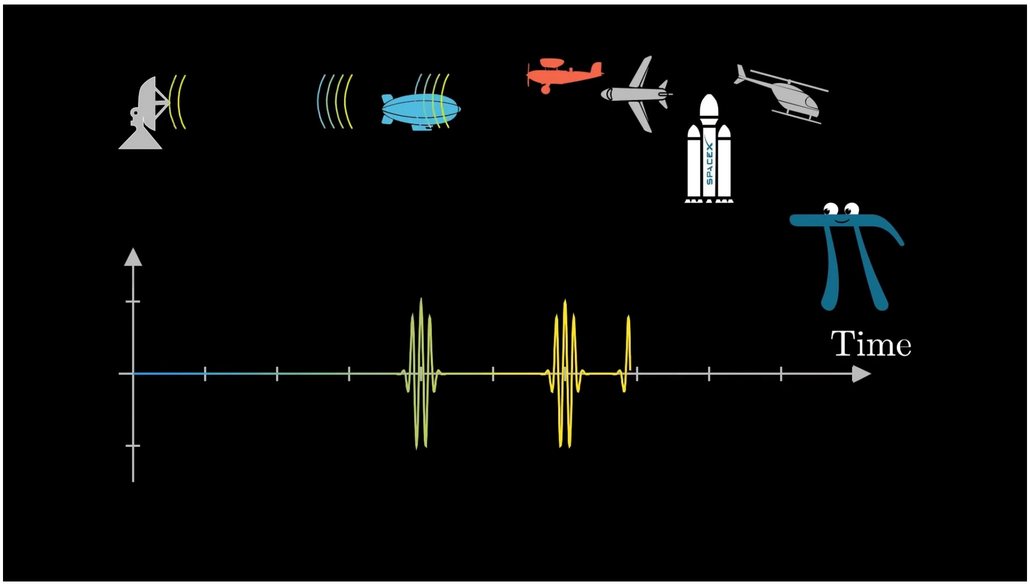


Figure 2.6: Envoie d'impulsions courtes sur multitude de cibles : ©3blue1brown

Lors de l'application de Fourier, étant donné, que l'impulsion est courte et par le principe d'incertitude de Heisenberg, nous obtenons un résultat plus complexe pour l'interprétation de la vitesse.

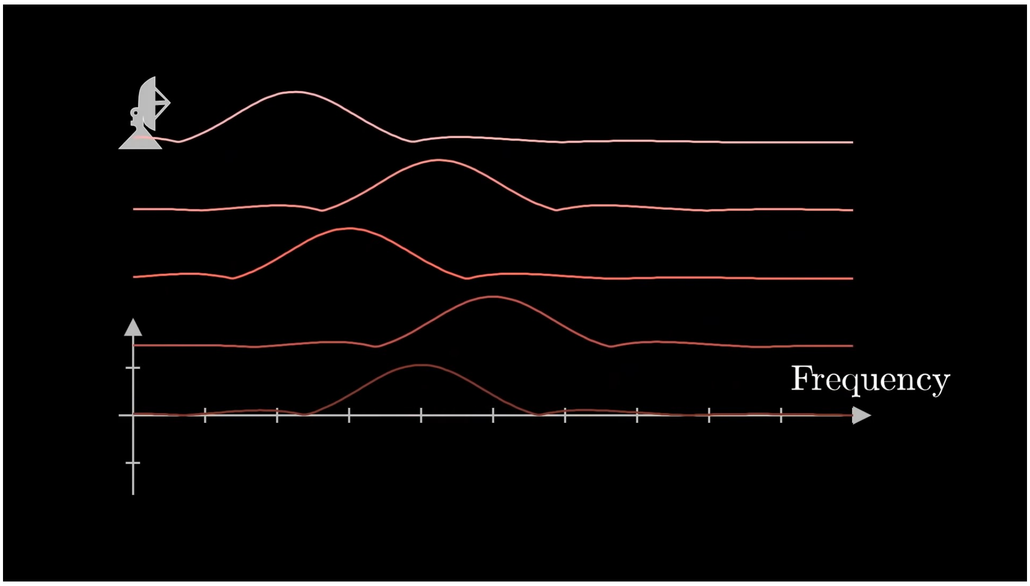


Figure 2.7: Extraction des fréquences après la Transformée de Fourier des signaux de retours à impulsions courtes : ©3blue1brown

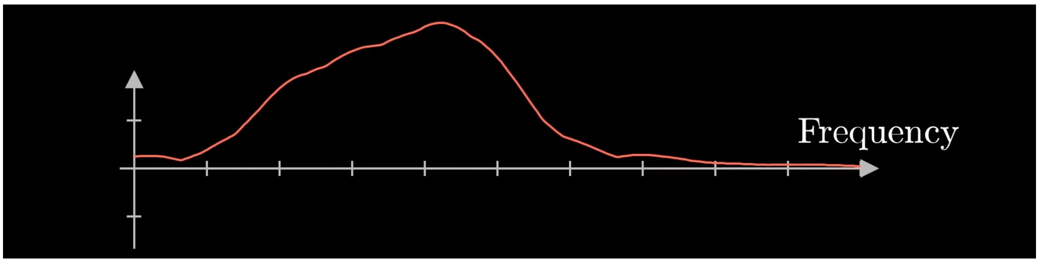


Figure 2.8: Transformée de Fourier des signaux de retours à impulsion courtes qui démontre la complexité en l'extraction de fréquences indépendantes. (Il est difficile d'obtenir la décomposition comme sur la figure précédente. : ©3blue1brown

Pour obtenir une décomposition plus claire, il faut envoyer un signal long.

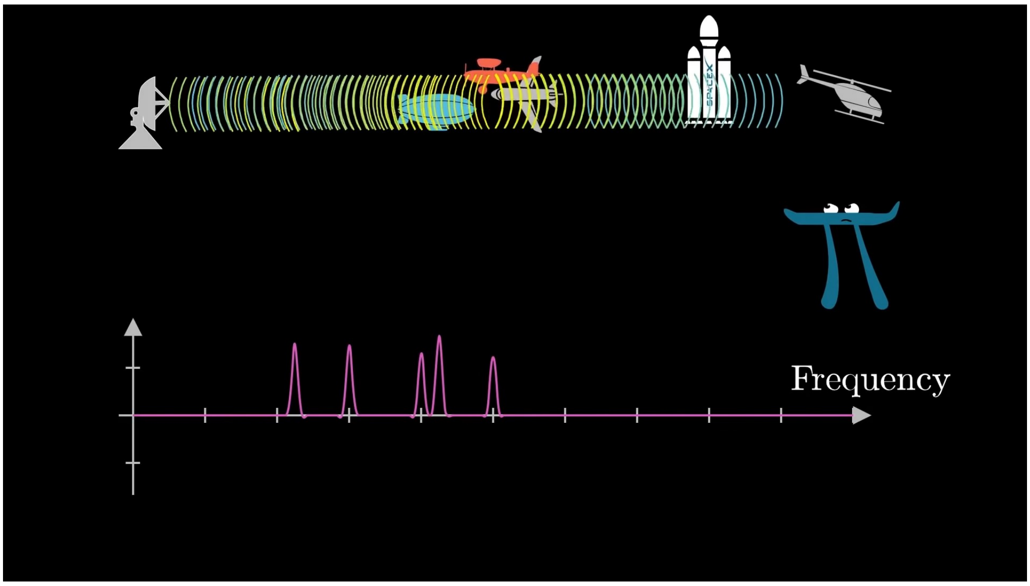


Figure 2.9: Transformée de Fourier des signaux de retours à impulsion long, qui démontre une simplicité d'extraction d'information concernant les différentes cibles. : ©3blue1brown

2.3 Ressources

Avant de continuer plus loins dans l'analyse de Fourier voici une série de documents que je recommande particulièrement pour comprendre la théorie de Fourier, mais aussi et surtout, pour voir l'intérêt d'étudier Fourier :

- **3blue1brown** :
  - 3blue1brown : But what is the Fourier Transform? A visual introduction.
  - But what is a Fourier series? From heat flow to circle drawings — DE4
  - The more general uncertainty principle, beyond quantum (explique la relation entre la transformé de Fourier et le signal (au niveau des radars sur Doppler)). Ce qui montre que les chauve-souris sont capables instinctivement d'effectuer des Transformer de Fourier.
- **Reducible** :
  - The Fast Fourier Transform (FFT): Most Ingenious Algorithm Ever?
- **SmarterEveryDay** :
  - What is a Fourier Series? (Explained by drawing circles) - Smarter Every Day 205 redondant à une des vidéos de **3blue1brown**
  - Oscilloscope Music - (Drawing with Sound) - Smarter Every Day 224 mathématiques appliqués à l'art

- **Jean-Michel Bony** :
  - Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. Dont la structure de ce cours est fortement inspirés.
- **Christophe Durousseau** :
  - Analyse de Fourier

Chapter 3

Fonction holomorphe d'une variable complexe

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'on effectue un "enroullement du signal sur le cercle unité complexe". L'exploitation de ses données s'effectue via l'étude du point de gravité. Ce chapitre introduit les méthodes qui en permettent son obtention.

3.2 Intégral curviligne

source : Wikipedia

En géométrie différentielle, l'**intégrale curviligne** est une intégrale où la fonction à intégrer est évaluée sur une courbe Γ. Il y a deux types d'intégrales curvilignes, selon que la fonction est à valeurs réelles ou à valeurs dans les formes linéaires. Le second type (qui peut se reformuler en termes de circulation d'un champ de vecteurs) a comme cas particulier les intégrales que l'on considère en analyse complexe.

Dans cet article, Γ est un arc orienté dans $\mathbb{R}^n$, rectifiable c'est-à-dire paramétré par une fonction continue à variation bornée $t \mapsto \gamma(t)$, avec $t \in [a, b]$.

3.2.1 Exemple

Soit la fonction $f(z) = 1/z$, et soit C le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique, ce qui peut se paramétrer par e^{it}, avec t parcourant $[0, 2\pi]$. L'intégrale correspondante est :

$$\int_{\mathrm{C}} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi \qquad (3.1)$$