

Analyse de Fourier



Contents

1	Abstract	5
2	Introduction Visuelle à Fourier	7
3	Fonction holomorphe d'une variable complexe	9
3.1	Introduction	9
3.2	Définition	9
3.2.1	Exemple	9

Chapter 1

Abstract

L'objectif final de ce cours est de comprendre les Transformée de Fourier. Savoir d'où elles viennent, en comprendre ses expressions et ce qu'elles permettent de faire. La physique a pour objectif l'étude des phénomènes naturelles. *Ici nous nous concentrerons sur le traitement du signal.*

Le **signal** est une mesure physique observable d'un phénomène le plus souvent électrique, acoustique ou optiques. L'étude par Fourier permet de réinterpréter le signal, qui est une fonction complexe, en une somme de fonctions périodiques qui en permet une simplification de calcul. **Plus de détails dans le chapitre suivant s'intitulant Introduction Visuelle à Fourier.**

Soit $s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, sans supposé périodicité de s ,

$$s(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\zeta} f(\zeta) d\zeta \quad (1.1)$$

Où f défini dans \mathbb{R}^n , s'appelle la transformée de Fourier de s ,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\zeta} s(x) dx \quad (1.2)$$

L'expression (1) exprime s comme superposition indexé par ζ , *de fonctions simple* :

$x \mapsto e^{ix\zeta}$ qui oscillent à la fréquence $2\pi|\zeta|$ étant affecté à l'amplitude $|s(\zeta)|$ et d'une phase $\arg s(\zeta)$.

Ainsi, ce lien permet d'exprimer s en fonction de f et vice-versa. On observe une **dualité importante entre analyse de l'amplitude et l'analyse fréquentiel**. (En mécanique quantique les rôles joués par s et f sont parfaitement symétrique).

À travers ce cours nous allons parcourir les chapitres suivants :

- **Fonction holomorphe d'une variable complexe** : permettra d'introduire les coefficients de Fourier
- **Espace fonctionnel et convergent**
- **Espace hilbertiens** : permet en remplaçant le signal dans un nouvelles espace de simplifier les calculs et d'attaquer les fonctions de carré sommable

- **Série de Fourier** : est une étape intermédiaire pour manipuler par la suite les intégral en question
- **Transformée de Fourier**

Chapter 2

Introduction Visuelle à Fourier

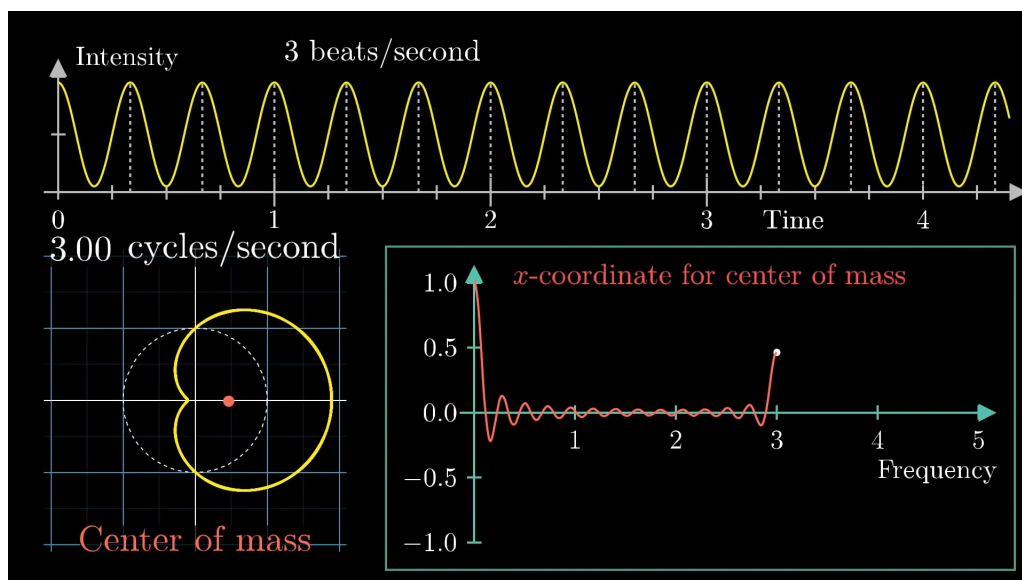


Figure 2.1: Enroulement du signal sur un cercle complexe : © 3blue1brown

Pour comprendre l'idée général de la Transformé de Fourier, il faut **impérativement** regarder cette vidéo : [3blue1brown : But what is the Fourier Transform? A visual introduction.](#)

Point clefs à retenir

- toutes fonctions périodiques est représentable sur un cercle complexe "enroulement d'une fonction".
- En observant le point de gravité (qui sera détaillé dans le chapitre **Fonction holomorphe d'une variable complexe**) on remarque que lorsque la fréquence de représentation sur le cercle coïncide avec celle du signal

donné alors, la coordonnée x a un comportement spécifique. Cette dernière est décentré.

- L'objectif de la Transformé de Fourier est de repérer ce changement de comportement. Il permet ainsi d'obtenir les différentes fréquences que comporte ce signal.
- Ainsi le signal est exprimable par les différentes fréquences qu'il comporte.

Avant de continuer plus loin dans l'analyse de Fourier voici une série de documents que je recommande particulièrement pour comprendre la théorie de Fourier, mais aussi et surtout, pour voir l'intérêt d'étudier Fourier :

- **Christophe Dourousseau** :
 - Analyse de Fourier
- **3blue1brown** :
 - **3blue1brown** : But what is the Fourier Transform? A visual introduction.
 - **But what is a Fourier series? From heat flow to circle drawings — DE4**
 - **The more general uncertainty principle, beyond quantum** (explique la relation entre la transformé de Fourier et le signal (au niveau des radars sur Doppler)). Ce qui montre que les chauve-souris sont capables instinctivement d'effectuer des Transformer de Fourier.
- **Reducible** :
 - **The Fast Fourier Transform (FFT): Most Ingenious Algorithm Ever?**
- **SmarterEveryDay** :
 - **What is a Fourier Series? (Explained by drawing circles) - Smarter Every Day 205** redondant à une des vidéos de **3blue1brown**
 - **Oscilloscope Music - (Drawing with Sound) - Smarter Every Day 224** mathématiques appliqués à l'art
- **Jean-Michel Bony** :
 - Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. Dont la structure de ce cours est fortement inspirés.

Chapter 3

Fonction holomorphe d'une variable complexe

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'on effectue un "enroulement du signal sur le cercle unité complexe". L'exploitation de ses données s'effectue via l'étude du point de gravité. Ce chapitre introduit les méthodes qui permettent son obtention.

3.2 Définition

source : [Wikipedia](#)

En géométrie différentielle, l'intégrale curviligne est une intégrale où la fonction à intégrer est évaluée sur une courbe Γ . Il y a deux types d'intégrales curvilignes, selon que la fonction est à valeurs réelles ou à valeurs dans les formes linéaires. Le second type (qui peut se reformuler en termes de circulation d'un champ de vecteurs) a comme cas particulier les intégrales que l'on considère en analyse complexe.

Dans cet article, Γ est un arc orienté dans \mathbb{R}^n , rectifiable c'est-à-dire paramétré par une fonction continue à variation bornée $t \mapsto \gamma(t)$, avec $t \in [a, b]$.

3.2.1 Exemple

Soit la fonction $f(z) = 1/z$, et soit C le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique, ce qui peut se paramétrer par e^{it} , avec t parcourant $[0, 2\pi]$. L'intégrale correspondante est :

$$\int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi \quad (3.1)$$