

Equações Diferenciais: Notas de Aula

EDOs de 1a ordem Separáveis

Prof: Felipe Figueiredo

<http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo>

Versão: 20150724

1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula, o aluno deve saber reconhecer se uma EDO é separável, e resolvê-la usando o Método de Separação de Variáveis.

2 Pré-requisitos da aula

- Propriedades de exponenciais:

$$- 2^{2+3} = 2^2 2^3 \text{ e } 5^{2+3} = 5^2 5^3$$

$$- e^{2+3} = e^2 e^3$$

$$- e^{x+c} = e^x e^c = e^c e^x$$

- Logaritmo e exponencial são funções inversas uma da outra (mesma base!):

$$- 2^{\log_2 3} = 3$$

$$- 5^{\log_5 12} = 12$$

$$- e^{\ln u} = u$$

- Primitiva de $\frac{1}{u}$

$$- \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$- \int \frac{dy}{y} = \ln y$$

3 Conteúdo

3.1 Problema

Pelo que foi visto na primeira aula sabemos verificar que as soluções da equação $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ são círculos da forma $x^2 + y^2 = K$. Como encontrar essa solução?

3.2 Equações Separáveis

Primeiro exemplo: Equação: $\frac{dy}{dx} - y = 0$

Resolução:

Arrumando a equação, temos:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Separando as variáveis, temos:

$$\frac{dy}{y} = 1 dx$$

Integrando o lado esquerdo para y e o lado direito para x temos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln y = x + c$$

Aplicando a exponencial para eliminar o logaritmo:

$$y = e^{x+c}$$

Pela propriedade da exponencial:

$$y = e^x e^c$$

Como e^c é uma constante, vamos renomeá-la de K :

$$y = K e^x$$

Que é a *família de soluções* da equação. Qualquer valor de K dá uma função diferente que também é solução da equação.

Observe que as equações $y' - y = x$ e $y' = xy + x$ **não são** separáveis.

Uma equação é separável se você puder escrevê-la como $y' = f(x)g(y)$ (produto!).

No primeiro exemplo, podemos chamar $f(x) = 1$ (função constante, não varia com x) e $g(y) = y$, portanto $y' = 1y$ é separável.

Outros exemplos:

Equação: $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

Resolução:

(arrumando) $\frac{dy}{dx} = 2y$

(separando) $\frac{dy}{y} = 2 \, dx$

(integrando) $\ln y = 2x + c$

(exponencial) $y = e^{2x+c} = e^{2x} e^c$

(constante) $y = K e^{2x}$

Equação: $\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

Resolução:

(arrumando) $\frac{dy}{dx} = -5y$

(separando) $\frac{dy}{y} = -5 \, dx$

(integrando) $\ln y = -5x + c$

(exponencial) $y = e^{-5x+c} = e^{-5x} e^c$

(constante) $y = K e^{-5x}$

E quando a equação original não for igual a 0? E se for igual a outro número qualquer?

Exemplos:

Equação: $y' - y = 2$

Resolução:

(arrumando) $y' = y + 2$

(separando) $\frac{y'}{y+2} = 1$

(integrando) $\ln(y+2) = x + c$

(exponencial) $y+2 = e^{x+c} = e^x e^c$

(constante) $y+2 = K e^x$

(resposta) $y = K e^x - 2$

Equação: $y' + y = -1$

Resolução:

(arrumando) $y' = -y + 1 = -(y-1)$

(separando) $\frac{y'}{y-1} = -1$

(integrando) $\ln(y-1) = -x + c$

(exponencial) $y-1 = e^{-x+c} = e^{-x} e^c$

(constante) $y-1 = K e^{-x}$

(resposta) $y = K e^{-x} + 1$

Por que foi necessário arrumar a última equação daquela forma, antes de começar a resolvê-la? Vamos ver esse truque na próxima equação, com duas resoluções diferentes.

Equação: $y' - 2y = 6$

Modo 1

$\frac{dy}{dx} = 2y + 6$ (arrumando)

$\frac{dy}{2y+6} = 1 \, dx$ (separando)

Precisamos da substituição:

$u = 2y + 6$

$du = 2 \, dy \Rightarrow dy = \frac{du}{2}$

$\int \frac{1}{u} \frac{du}{2} = \int 1 \, dx \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \int dx$

$\int \frac{du}{u} = 2 \int dx$

$\ln(u) = 2x + c$ (integrando)

Voltando para y , temos:

$\ln(2y+6) = 2x + c$

$2y+6 = e^{2x+c} = e^{2x} e^c$ (exponencial)

$2y+6 = K_1 e^{2x}$ (a constante $K_1 = e^c$)

$2y = K_1 e^{2x} - 6$

Dividindo por 2 e chamando $K = \frac{K_1}{2}$

$y = \frac{K_1}{2} e^{2x} - 3 \Rightarrow y = K e^{2x} - 3$

(Ufa!)

Modo 2

$\frac{dy}{dx} = 2y + 6 = 2(y+3)$ (arrumando)

$\frac{dy}{y+3} = 2 \, dx$ (separando)

$\ln(y+3) = 2x + c$ (integrando)

$y+3 = e^{2x+c} = e^{2x} e^c$ (exponencial)

$y+3 = K e^{2x}$ (constante)

$y = K e^{2x} - 3$ (resposta)

Conclusão: Os dois modos são igualmente válidos. Qual você prefere?