Equações Diferenciais: Notas de Aula
EDOs de 1a ordem Separáveis

Prof: Felipe Figueiredo
http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo
Versão: 20150825

1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula, o aluno deve saber reconhecer se uma EDO é separável, e resolvê-la usando o Método de Separação de Variáveis.

2 Pré-requisitos da aula

- Propriedades de exponenciais:
  - $2^{2+3} = 2^2 2^3$ e $5^{2+3} = 5^2 5^3$
  - $e^{x+c} = e^x e^c = e^c e^x$
- Logaritmo e exponencial são funções inversas uma da outra (mesma base!):
  - $2^{\log_2 3} = 3$
  - $5^{\log_5 12} = 12$
  - $e^{\ln u} = u$
- Primitiva de $\dfrac{1}{u}$
  - $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln u$

3 Conteúdo

O aluno deve consultar o livro texto na seção 11.4 para se aprofundar no conteúdo desta aula.

3.1 Problema

Pelo que foi visto na primeira aula sabemos verificar que as soluções da equação $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{y}$ são círculos da forma $x^2 + y^2 = K$. Como encontrar essa solução?

3.2 Equações Separáveis

Primeiro exemplo: Equação: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 0$

Resolução:
Arrumando a equação, temos:
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$
Separando as variáveis, temos:
$\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = 1\,\mathrm{d}x$
Integrando o lado esquerdo para y e o lado direito para x temos:
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}x \Rightarrow \ln y = x + c$

Aplicando a exponencial para eliminar o logaritmo:
$y = e^{x+c}$

Pela propriedade da exponencial:
$y = e^x e^c$

Como e^c é uma constante, vamos renomeá-la, chamando de K:
$y = Ke^x$

Que é a *família de soluções* da equação. Qualquer valor de K dá uma função diferente que também é solução da equação.

Observe que as equações $y' - y = x$ e $y' = xy + 1$ **não são** separáveis.

Uma equação é separável se você puder escrevê-la como $y' = f(x)g(y)$ (produto!).

No primeiro exemplo, podemos chamar $f(x) = 1$ (função constante, não varia com x) e $g(y) = y$, portanto $y' = 1y$ é separável.

Outros exemplos:

Equação: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 0$
Resolução:
(arrumando) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y$
(separando) $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = 2\ \mathrm{d}x$
(integrando) $\ln y = 2x + c$
(exponencial) $y = e^{2x+c} = e^{2x}e^{c}$
(constante) $y = Ke^{2x}$

Equação: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 5y = 0$
Resolução:
(arrumando) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -5y$
(separando) $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -5\ \mathrm{d}x$
(integrando) $\ln y = -5x + c$
(exponencial) $y = e^{-5x+c} = e^{-5x}e^{c}$
(constante) $y = Ke^{-5x}$

E quando a equação original não for igual a 0? E se for igual a outro número qualquer?
Exemplos:

Equação: $y' - y = 2$
Resolução:
(arrumando) $y' = y + 2$
(separando) $\dfrac{y'}{y+2} = 1$
(integrando) $\ln(y+2) = x + c$
(exponencial) $y + 2 = e^{x+c} = e^{x}e^{c}$
(constante) $y + 2 = Ke^{x}$
(resposta) $y = Ke^{x} - 2$

Equação: $y' + y = -1$
Resolução:
(arrumando) $y' = -y - 1 = -(y+1)$
(separando) $\dfrac{y'}{y+1} = -1$
(integrando) $\ln(y+1) = -x + c$
(exponencial) $y + 1 = e^{x+c} = e^{-x}e^{c}$
(constante) $y + 1 = Ke^{-x}$
(resposta) $y = Ke^{-x} - 1$

Por que foi necessário arrumar a última equação daquela forma, antes de começar a resolvê-la? Vamos ver esse truque na próxima equação, com duas resoluções diferentes.
Equação: $y' - 2y = 6$

Modo 1
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y + 6$ (arrumando)
$\dfrac{\mathrm{d}y}{2y+6} = 1\ \mathrm{d}x$ (separando)
Precisamos da substituição:
$u = 2y + 6$
$\mathrm{d}u = 2\ \mathrm{d}y \Rightarrow\ \mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$
$\displaystyle\int \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2} = \int 1\ \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int\ \mathrm{d}x$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = 2\int\ \mathrm{d}x$
$\ln(u) = 2x + c$ (integrando)
Voltando para y, temos:
$\ln(2y+6) = 2x + c$
$2y + 6 = e^{2x+c} = e^{2x}e^{c}$ (exponencial)
$2y + 6 = K_1e^{2x}$ (a constante $K_1 = e^{c}$)
$2y = K_1e^{2x} - 6$
Dividindo por 2 e chamando $K = \dfrac{K_1}{2}$
$y = \dfrac{K_1}{2}e^{2x} - 3 \Rightarrow y = Ke^{2x} - 3$
(Ufa!)

Modo 2
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y + 6 = 2(y+3)$ (arrumando)
$\dfrac{\mathrm{d}y}{y+3} = 2\ \mathrm{d}x$ (separando)
$\ln(y+3) = 2x + c$ (integrando)
$y + 3 = e^{2x+c} = e^{2x}e^{c}$ (exponencial)
$y + 3 = Ke^{2x}$ (constante)
$y = Ke^{2x} - 3$ (resposta)

Conclusão: Os dois modos são igualmente válidos. Qual você prefere?