

Equações Diferenciais: Notas de Aula

Introdução às EDOs

Prof: Felipe Figueiredo

<http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo>

Versão: 20150724

1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula o aluno deve saber identificar uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), em comparação aos tipos de equações elementares já familiares ao aluno. O aluno também conhecerá as principais nomenclaturas para as EDOs e saber testar possíveis soluções.

2 Pré-requisitos da aula

1. Derivação das funções polinomiais e exponenciais

(a) $y = x^2$

(b) $y = 5x^3$

(c) $y = e^{2x}$

(d) $y = 2e^{2x}$

2. Notações de derivada

(a) y'

(b) $\frac{dy}{dx}$

3 Conteúdo

O aluno deve consultar o livro-texto na seção 11.1 para se aprofundar no conteúdo desta aula.

3.1 Problema

Um CSI chega na cena de um assassinato à meia noite e introduz um termômetro no corpo, observando a temperatura 27°C . Duas horas depois, ele observa a temperatura 25°C . O ar condicionado mantém a temperatura ambiente em 19°C . Qual é a hora aproximada da morte?

3.2 Tipos de equações já familiares

Equações algébricas são as que envolvem apenas operações algébricas na variável. Nelas a variável representa um número.

3.2.1 Equação de primeiro grau

Equação: $3x - 6 = 0$

Verificar candidato a solução: $x = 2$

Resolução (observar o lado esquerdo da igualdade)

$$3(2) - 6 = 0$$

$$6 - 6 = 0$$

$$0 = 0$$

A igualdade é verdadeira, portanto $x = 2$ satisfaz a equação. Dizemos que $x = 2$ é uma solução.

3.2.2 Equação de segundo grau

Equação: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Verificar candidato a solução: $x_1 = 1, x_2 = 3$

Resolução:

x_1 :	x_2 :
$1^2 - 3(1) + 2 = 0$	$3^2 - 3(3) + 2 = 0$
$1 - 3 + 2 = 0$	$9 - 9 + 2 = 0$
$-2 + 2 = 0$	$0 + 2 = 0$
$0 = 0$ (Satisfaz)	$2 = 0$ (Não satisfaz)

3.2.3 Sistema de equações lineares

Sistema: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \end{cases}$

Verificar candidato a solução: $x = \{x_1 = 1, x_2 = 2\}$

Resolução:

Primeira equação:	Segunda equação:
$2(1) + 4(2) = 10$	$3(1) + 4(2) = 12$
$2 + 8 = 10$	$3 + 8 = 12$
$10 = 10$ (Satisfaz a primeira equação)	$11 = 12$ (Não satisfaz a segunda equação)

3.2.4 Equação exponencial

Equação: $2^x = 4$

Verificar candidato a solução: $x = 3$

Resolução:

$2^3 = 4$
 $8 = 4$ (Não satisfaz)

3.3 Equações Diferenciais

Equações em que a variável representa uma função, $y = y(x)$. Nesta equação aparecem tanto a função y como suas derivadas y' , y'' , etc.

Equação: $y' = y + 1$

Equação: $y' = y - y^2$

Como verificar candidatos a soluções nesse caso? Como sempre, basta substituir na equação. Para isso, precisaremos derivar a função quantas vezes for necessário.

3.3.1 Exemplos

Equação: $y' - 3y = 0$

Testar os seguintes candidatos de solução: $y = x^3$, $y = e^{3x}$ e $y = 2e^{3x}$.

Resolução:

Primeiramente vamos reescrever a equação como:

$y' - 3y = 0$

$y = e^{3x}$ $y' = 3e^{3x}$ Substituindo na equação: $3e^{3x} - 3(e^{3x}) = 0$ $3e^{3x} - 3e^{3x} = 0$ $0 = 0$ (Satisfaz para todo x)	$y = 2e^{3x}$ $y' = 6e^{3x}$ Substituindo na equação: $6e^{3x} - 3(2e^{3x}) = 0$ $6e^{3x} - 6e^{3x} = 0$ $0 = 0$ (Satisfaz para todo x)	$y = x^3$ $y' = 3x^2$ Substituindo na equação: $3x^2 - 3(x^3) = 0$ $3x^2 - 3x^3 = 0$ (Não satisfaz para todo x !)
--	--	--