Equações Diferenciais: Notas de Aula
EDOs de 2a ordem homogêneas

Prof: Felipe Figueiredo
http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo
Versão: 20151015

1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula o aluno deve saber resolver uma EDO de segunda ordem, com coeficientes constantes, usando o método da equação característica, e resolver PVIs e PVCs homogêneos.

2 Pré-requitos da aula

- Raízes do polinômio do segundo grau
- Parte real e parte imaginária de um número complexo

3 Conteúdo

O aluno deve consultar o livro texto na seção 11.11 para se aprofundar no conteúdo desta aula.

3.1 O método da Equação Característica

Considere a seguinte EDO linear de segunda ordem homogênea:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Como ela tem os coeficientes (a, b e c) constantes, podemos resolvê-la usando sua equação característica. Para identificá-la, basta construir um polinômio com os mesmos coeficientes que a EDO, "substituindo" as derivadas pelos expoentes:

$$ar^2 + br + c = 0$$

Assim, a segunda derivada y'' está associada a r^2, e assim sucessivamente. Observe que a função y não tem derivadas, por isto está associada a $r^0 = 1$.

Para resolver o polinômio, usamos a tradicional fórmula de Bhaskara:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Fazendo o estudo dos sinais de Δ, podemos descobrir como são as raízes. Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas (r_1 e r_2). Se $\Delta = 0$, ela possui duas raízes reais iguais ($r_1 = r_2 = r$). Quando $\Delta < 0$, a equação característica possui duas raízes complexas conjugadas ($\alpha \pm \beta i$).

Estas três situações possíveis nos retornam três fórmulas para a solução geral da EDO de segunda ordem:

1. $\Delta > 0$
$$y(x) = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}$$
2. $\Delta = 0$
$$y(x) = K_1 e^{rx} + K_2 x e^{rx}$$
3. $\Delta < 0$
$$y(x) = K_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + K_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

3.2 Exemplos

Exemplo 1 Considere o seguinte PVI:

$$y'' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$$

Equação característica:

$$r^2 - 1 = 0$$

Como $\Delta > 0$, existem duas raízes reais distintas:

$$r_1 = 1, r_2 = -1$$

Substituindo na fórmula, encontramos a solução geral da EDO:

$$y(x) = K_1 e^x + K_2 e^{-x}$$

Para encontrar o valor das constantes K, usamos as condições iniciais (y_0 e y'_0):

$$y(0) = K_1 e^0 + K_2 e^0 = K_1 + K_2$$
$$1 = K_1 + K_2$$

Para usar a condição $y'(0)$, precisamos calcular a derivada de y, que é:

$$y'(x) = K_1 e^x - K_2 e^{-x}$$

Substituindo:

$$y'(0) = K_1 e^0 - K_2 e^0$$

$$3 = K_1 - K_2$$

Temos assim, um sistema 2×2 para as constantes K:

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 1 \\ K_1 - K_2 = 3 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $K_1 = 2$ e $K_2 = -1$. Substituindo estes valores na solução geral, encontramos a solução do PVI:

$$y(x) = 2e^x - e^{-x}$$

Exemplo 2
Considere o seguinte PVI:

$$y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 10$$

Equação característica

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

Discriminante: $\Delta = 0$ (uma raiz real r).
Raiz: $r = 2$
Solução geral:

$$y(x) = K_1 e^{2x} + K_2 x e^{2x}$$

Substituindo a condição inicial $y(0)$:

$$y(0) = K_1 e^0 + 0 \Rightarrow K_1 = 3$$

Derivada: $y'(x) = 2K_1 e^{2x} + K_2 e^{2x} + 2K_2 x e^{2x}$
Substituindo a condição inicial $y'(0)$:

$$y'(0) = 2 \times 3 \times e^0 + K_2 e^0 + 0 \Rightarrow 6 + K_2 = 10$$

Portanto $K_1 = 3$ e $K_2 = 4$. A solução do PVI é portanto:

$$y(x) = 3e^{2x} + 4xe^{2x}$$

Exemplo 3
Considere o seguinte PVC:

$$y'' + 4y = 0, y(0) = 2, y(\frac{\pi}{4}) = 3$$

Equação característica:

$$r^2 + 4 = 0$$

Discriminante: $\Delta = -16$ (raízes complexas)
Raízes: $0 \pm 2i$
Solução geral:

$$y(x) = K_1 e^{0x} \cos(2x) + K_2 e^{0x} \operatorname{sen}(2x)$$

$$y(x) = K_1 \cos(2x) + K_2 \operatorname{sen}(2x)$$

Condição inicial $y(0)$

$$y(x) = K_1 \cos 0 + K_2 \operatorname{sen} 0$$
$$2 = K_1 + 0$$

Condição final $y(\frac{\pi}{4})$

$$y(\frac{\pi}{4}) = K_1 \cos(2\frac{\pi}{4}) + K_2 \operatorname{sen}(2\frac{\pi}{4})$$

$$y(\frac{\pi}{4}) = K_1 \cos(\frac{\pi}{2}) + K_2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})$$
$$3 = 0 + K_2$$

Portanto $K_1 = 2$ e $K_2 = 3$. A solução do PVC é portanto:

$$y(x) = 2\cos(2x) + 3\operatorname{sen}(2x)$$