Equações Diferenciais: Notas de Aula
Modelagem matemática com EDOs de segunda ordem

Prof: Felipe Figueiredo
http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo
Versão: 20151015

1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula o aluno deve saber ...

2 Pré-requitos da aula

-
-

3 Conteúdo

O aluno deve consultar o livro texto na seção X.Y para se aprofundar no conteúdo desta aula.

3.1 Problema

Um tijolo de 2Kg está em repouso, pendurado em uma mola que tem coeficiente de elasticidade $8\frac{N}{cm}$. Você puxa o tijolo para baixo, esticando a mola em 5cm e o solta. Assumindo que não há atrito, o tijolo oscila para cima e para baixo em movimento harmônico simples. Descrever este movimento no como a posição s no espaço em função do tempo, a amplitude, a frequência e o período da oscilação.

3.2 A Lei de Hooke e o Oscilador Harmônico Simples

Quando o tijolo está na posição s força da mola que atua no tijolo é dada pela lei de Hooke.

$$F = -ks$$

Sabemos pela segunda lei de Newton, que a resultante é $F = ma$ e que a aceleração $a = s''$. Assim

$$ma = -ks \Rightarrow ms'' + ks = 0$$

$$s'' + \frac{k}{m}s = 0$$

Que é uma EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Para simplificar a notação, vamos substituir a constante $\frac{k}{m}$ por ω^2. Assim, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Após essa transformação, a equação fica:

$$s'' + \omega^2 s = 0$$

Essa mudança de variáveis tem algumas vantagens: (a) A equação fica com uma única constante e (b) Esta constante tem uma interpretação física: a frequência (angular) da oscilação e (c) ω já aparece na solução da EDO!

$$s(t) = K_1 \cos(\omega t) + K_2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Podemos descobrir os valores de K_1 e K_2 tanto com valores iniciais, ou valores de contorno. No problema inicial desta aula, temos valores iniciais.

As características deste movimento são dados pelas seguintes fórmulas:

1. Frequência (ω)
$$\omega = \frac{k}{m}$$
2. Período (T)
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
3. Amplitude (A)
$$A = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$$

Vamos agora usar estas fórmulas para descrever o movimento do tijolo:
Equação
$$s'' + 4s = 0$$

Assim, podemos identificar que $\omega^2 = \frac{8}{2} = 4$, donde $\omega = 2$. O período é $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Para encontrarmos a amplitude, precisamos descobrir K_1 e K_2.

Como o tijolo foi deslocado para a posição inicial $s(0) = 5$, e solto com velocidade inicial $s'(0) = 0$, podemos estas informações para calcular K_1 e K_2 e encontrar a solução do PVI.

$$s(0) = K_1 \cos 0 + K_2 \operatorname{sen} 0 = K_1 \Rightarrow K_1 = 5$$

Calculando a derivada de $s(t)$ (exercício!) temos $s'(t) = -2K_1 \operatorname{sen} t + 2K_2 \cos t$. Assim:

$$s'(0) = -2K_1 \operatorname{sen} 0 + 2K_2 \cos 0 = 2K_2 \Rightarrow 2K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = 0$$

Agora com os valores de K_1 e K_2 podemos escrever a solução do PVI ($s(t) = 5\cos(2t)$), e calcular a amplitude do movimento:

$$A = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$$

Conclusão: na ausência de atrito, o tijolo sobe e desce a 5cm da posição de repouso.
Mas e se houver atrito?

3.3 Oscilador Harmônico Amortecido