Equações Diferenciais: Notas de Aula
Problemas de Valor Inicial (PVI) e de Contorno (PVC)

Prof: Felipe Figueiredo
http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo
Versão: 20150831

1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula o aluno deve saber o que é um Problema de Valor Inicial (PVI) e um Problema de Valor de Contorno (PVC).

2 Pré-requitos da aula

-
-

3 Conteúdo

O aluno deve consultar o livro texto nas seções 11.1 (PVI) e 11.10 (PVC) para se aprofundar no conteúdo desta aula.

3.1 Problema

Um carro acelera em uma rua reta de acordo com a equação $v' = \dfrac{1}{100}v$. Após $t = 60$s, qual é a velocidade final do carro?

Para resolver esse problema, precisamos de uma informação adicional!

3.2 Problema de Valor Inicial

A família de soluções de uma EDO tem uma constante que não pode ser determinada pelo método de resolução (que convencionamos chamar de K). Para cada valor de $K \in \mathbb{R}$ temos uma função diferente, e todas essas funções são soluções da EDO. Porém, cada função é solução de um único problema. Assim, para resolver um problema, precisamos encontrar o valor de K que corresponde a ele.

Para isto, precisamos de uma informação adicional, chamada de *condição inicial* do problema. Vejamos alguns exemplos:

Primeiro exemplo:

Resolver o PVI:

$$\begin{cases} y' = y + 5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Resolução:

Vimos na aula passada como aplicar o método de separação de variáveis nesta equação para encontrar a solução $y = Ke^t - 5$. Só falta usar a condição inicial $y(0) = 1$ para encontrar o valor de K.

Substituindo a condição inicial temos (para $t = 0$):

$y(0) = Ke^0 - 5$

$1 = K - 5$

$K = 1 + 5$

$K = 6$

Substituindo esse valor de K na família de soluções, encontramos a solução do PVI:

$y = 6e^t - 5$

Exemplo
$$\begin{cases} 2y' - 2y + 1 = 0 \\ y(0) = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Resolução:
$2y' = 2y - 1$
$y' = y - \dfrac{1}{2}$
$\dfrac{\mathrm{d}y}{y - \frac{1}{2}} = \mathrm{d}t$
$\ln\left(y - \dfrac{1}{2}\right) = t + c$
$y - \dfrac{1}{2} = Ke^t$
$y(t) = Ke^t + \dfrac{1}{2}$
Agora, substituindo a condição inicial:
$y(0) = Ke^0 + \dfrac{1}{2}$
$\dfrac{5}{2} = K + \dfrac{1}{2}$
$K = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2}$
$K = 2$
Substituindo na solução, temos:
$y(t) = 2e^t + \dfrac{1}{2}$

Exercício
$$\begin{cases} y' = -5y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Resolução:
$\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -5\ \mathrm{d}t$
$y(t) = Ke^{-5t}$
Substituindo o tempo inicial:
$y(0) = Ke^{-5\times 0}$
$2 = K \times 1 \Rightarrow K = 2$
Substituindo K na solução, temos:
$y(t) = 2e^{-5t}$

Exemplo: (EDO não linear)
$$\begin{cases} 2yy' = t + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Resolução:
$2\displaystyle\int y\ \mathrm{d}y = \int (t+2)\ \mathrm{d}t$
$2\dfrac{y^2}{2} = t^2 + 2t + c$
$y^2 = t^2 + 2t + c$
$y = \pm\sqrt{t^2 + 2t + K}$

Condição inicial:
$y(0) = \pm\sqrt{0^2 + 2 \times 0 + K}$
$2 = \pm\sqrt{0 + 0 + K} = \pm\sqrt{K}$
Para encontrar K, basta elevar ambos os lados ao quadrado:
$2^2 = \left(\pm\sqrt{K}\right)^2$
$4 = K \Rightarrow K = 4$
Substituindo K para encontrar a solução:
$y(t) = \pm\sqrt{t^2 + 2t + 4}$

3.3 Problema de Valor de Contorno