Equações Diferenciais: Notas de Aula
Modelagem matemática com EDOs de primeira ordem

Prof: Felipe Figueiredo
http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo
Versão: 20150905

1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula o aluno deve saber ...

2 Pré-requitos da aula

-
-

3 Conteúdo

O aluno deve consultar o livro texto na seção X.Y para se aprofundar no conteúdo desta aula.

3.1 Resistência do ar

Como funciona um pára-quedas?

Um corpo em queda livre tem sua velocidade acelerada pela força da gravidade. Assim, a força que atua no corpo, para baixo é $F_g = mg$, onde m é a massa e g é a aceleração da gravidade, que assumiremos constante por simplicidade.

O pára-quedas tem a função de diminuir ou cancelar essa aceleração, atuando na direção oposta (a força atua para cima). Ele cria uma enorme resistência do ar que é proporcional à velocidade atual. Assim, a força gerada pelo pára-quedas pode ser escrita como $F_p = \alpha v$. Isso implica que, quanto maior for a velocidade, maior será também a resistência do ar (diretamente proporcionais).

A resultante dessas duas forças é a diferença entre ambas, isto é $F = F_g - F_p$. Pela segunda lei de Newton essa força resultante é $F = mv'$, onde v' é a aceleração. Juntando tudo em uma única equação, temos:

$$mv' = mg - \alpha v$$

Simplificando, isto é, dividindo por m, temos:

$$v' = g - \frac{\alpha}{m} v$$

Podemos colocar o coeficiente de v em evidência, no lado direito da igualdade, dividindo ambos os termos por ele:

$$v' = g - \frac{\alpha}{m} v = -\frac{\alpha}{m} v + g$$

$$v' = -\frac{\alpha}{m}(v - \frac{mg}{\alpha})$$

Agora, com o coeficiente de v do lado direito em evidência, fica um pouco mais fácil para separar as variáveis e resolver a equação.

Exemplo:

Josefina salta de um avião e abre o pára-quedas imediatamente. Sua velocidade inicial é $v_0 = 0$. Jô pesa $50kg$ e digamos que o coeficiente de arrasto do ar nesse local é $\alpha = 50$. Assumindo que a gravidade é $g = 10\frac{m}{s^2}$, qual será a velocidade de Jô após os primeiros $2s$ de pura adrenalina?

Resolução:
Substituindo as informações do enunciado temos:

$$v' = -\frac{50}{50}(v - \frac{50 \times 10}{50}) = -(v - 10)$$

Agora já podemos resolver o:

PVI pára-quedas: $\begin{cases} v' = -(v - 10) \\ \\ v(0) = 0 \end{cases}$

A família de soluções da EDO é $v(t) = Ke^{-t} + 10$. Substituindo a velocidade inicial, encontramos o valor de K:

$v(0) = Ke^0 + 10$
$0 = K + 10$
$K = -10$

E a solução desse PVI é:

$$v(t) = -10e^{-t} + 10$$

Com essa função, podemos saber a velocidade Jô em qualquer instante de tempo. Como queremos saber a velocidade depois de $2s$, basta substituir $t = 2$ e encontrar a resposta procurada:

$$v(2) = -10e^{-2} + 10$$

Como curiosidade, podemos efetuar essa resposta na calculadora e encontrar um valor numérico aproximado de $8.6\frac{m}{s} \approx 31\frac{km}{h}$.

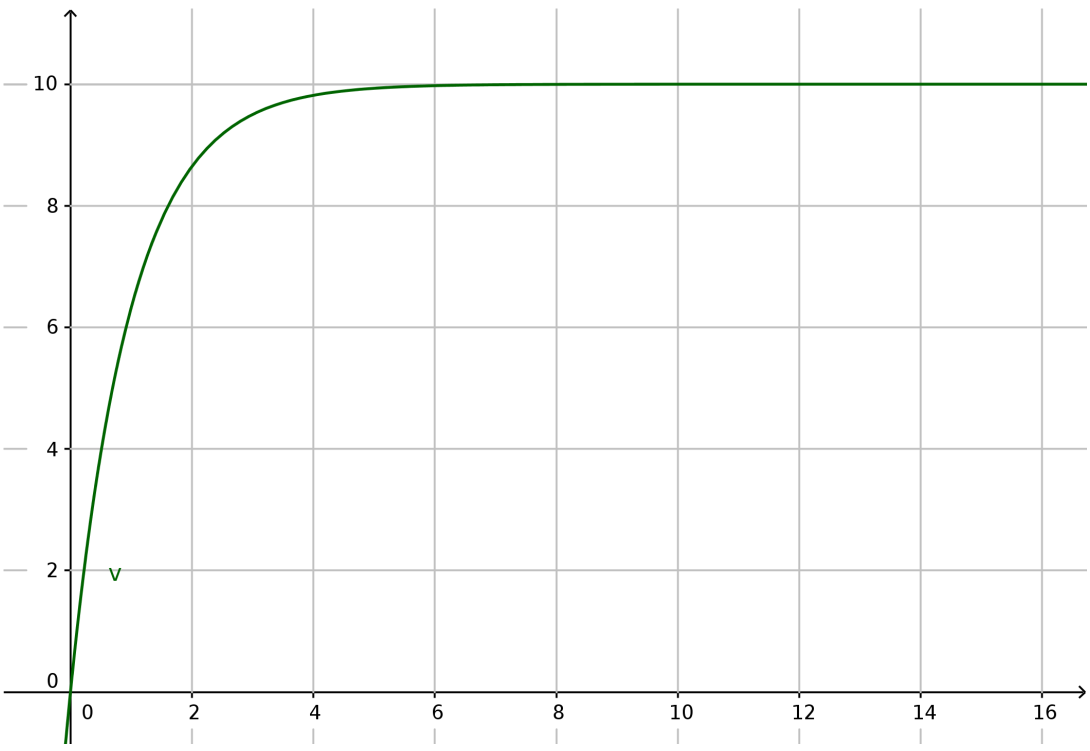

Figura 1: Gráfico da velocidade da Jô no tempo

Desafio 1: Qual seria a velocidade de Jô depois de $2s$ se ela não tivesse um pára-quedas? (O que muda no problema?)

Desafio 2: Como a resistência do ar aumenta com a velocidade causada pela gravidade, em algum momento as duas forças F_g e F_p se igualam e se cancelam, e nesse momento Jô passa a cair com velocidade constante (força resultante nula $\Rightarrow$ aceleração nula $\Rightarrow v' = 0$). Qual é essa velocidade terminal?

O gráfico na figura 1 mostra a velocidade terminal.

3.2 Lei de Newton do Resfriamento (ou Aquecimento)

Como exatamente uma tulipa de cerveja esquenta, ou uma xícara de café esfria com o tempo?

Considere a temperatura $T(t)$ de um objeto, que está em um local onde a temperatura ambiente T_a é constante.

Em poucas palavras, a **Lei de Newton do Resfriamento** (ou do aquecimento) diz que "*a temperatura T do corpo tende a se igualar com a temperatura T_a do ambiente, a uma taxa proporcional à diferença entre ambas, isto é a diferença entre T e T_a*".

Ora, a diferença entre a temperatura do objeto (T) e a temperatura do ambiente (T_a) é simplesmente a subtração destes: $T - T_a$. A variação da temperatura é sua derivada T'. Assim, a proporcionalidade entre essas duas grandezas é dada pela equação

$$T' = -\alpha(T - T_a)$$

Por que α tem sinal negativo? Observe que conforme o tempo passa, a diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do ambiente vai diminuindo. A tendência é que, após um tempo muito grande, essas temperaturas se igualem. Com isso, a temperatura T do objeto deixa de variar (ou seja, derivada $T' = 0$).

Se você souber o valor da temperatura do ambiente T_a, a temperatura inicial $T(0)$ do objeto e a constante α, você pode montar e resolver um PVI substituindo esses valores na equação acima.

Exemplos: Duas pessoas estão em um restaurante, onde a temperatura ambiente é $T_a = 25^o$C. Uma delas pede um café, com temperatura inicial 90^oC, e a outra pede um chope com temperatura inicial 6^oC. Qual é a função $T(t)$ que determina como a temperatura de cada um desses objetos varia com o tempo? Considere que a taxa de transferência nesse local de temperatura é $\alpha = 1\%$.

Resoluções:

Substituindo os valores $\alpha = \dfrac{1}{100}$ e $T_a = 25$, temos a equação $T' = -\dfrac{1}{100}(T - 25)$. Para cada uma das temperaturas iniciais $T(0)$ acima, temos um PVI, conforme abaixo.

Como vimos nas aulas anteriores, a família de soluções da equação $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{100}(T - 25)$ é: $T(t) = Ke^{-t/100} + 25$ (você pode chegar nessa resposta usando separação de variáveis).

Assim, a solução específica de cada PVI é:

PVI café: $\begin{cases} T' = -\dfrac{1}{100}(T - 25) \\ T(0) = 90 \end{cases}$

$T(t) = Ke^{-t/100} + 25$
$T(0) = Ke^0 + 25$
$90 = K + 25$
$K = 90 - 25$
$K = 65$
$T(t) = 65e^{-t/100} + 25$

PVI chope: $\begin{cases} T' = -\dfrac{1}{100}(T - 25) \\ T(0) = 6 \end{cases}$

$T(t) = Ke^{-t/100} + 25$
$T(0) = Ke^0 + 25$
$6 = K + 25$
$K = 6 - 25$
$K = -19$
$T(t) = -19e^{-t/100} + 25$

Qual vai ser a temperatura de cada um após 1 minuto ($t = 60$s?)

Café após 60s: $T(60) = 65e^{-60/100} + 25 = 65e^{-3/5} + 25$

Chope após 60s: $T(60) = -19e^{-60/100} + 25 = -19e^{-3/5} + 25$

Como somos todos curiosos, podemos usar uma calculadora qual é o valor numérico dessa expressão (mas apenas em casa ou na aula, não na prova!):

Café após 60s: $T(60) \approx 60.7^o$C

Chope após 60s: $T(60) \approx 14.6^o$C

Veja os gráficos das duas funções na figura 2

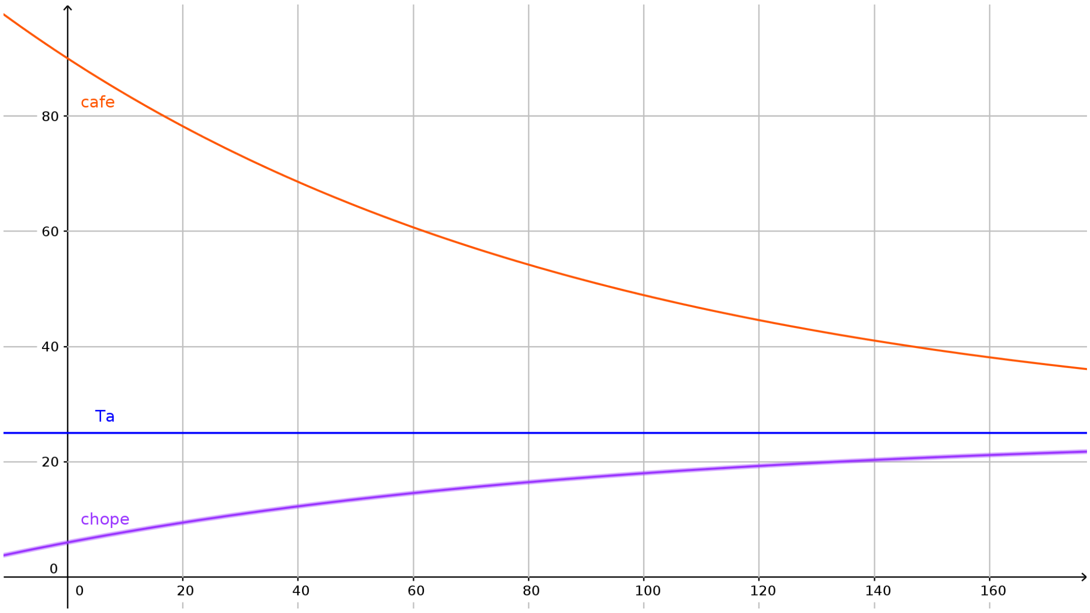

Figura 2: Gráficos das temperaturas do café e o chope no tempo

---

Desafio: Qual é o limite dessas duas funções quando $t \to \infty$? O que você pode concluir desse resultado?

3.3 Tempo de meia vida