

# Equações Diferenciais: Notas de Aula

## Modelagem matemática com EDOs de primeira ordem

Prof: Felipe Figueiredo

<http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo>

Versão: 20150906

## 1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula o aluno deve saber ...

## 2 Pré-requisitos da aula

- 
- 

## 3 Conteúdo

O aluno deve consultar o livro texto na seção X.Y para se aprofundar no conteúdo desta aula.

### 3.1 Lei de Newton do Resfriamento (ou Aquecimento)

Como exatamente uma tulipa de cerveja esquentar, ou uma xícara de café esfria com o tempo?

Considere a temperatura  $T(t)$  de um objeto, que está em um local onde a temperatura ambiente  $T_a$  é constante.

Em poucas palavras, a **Lei de Newton do Resfriamento** (ou do aquecimento) diz que “a temperatura  $T$  do corpo tende a se igualar com a temperatura  $T_a$  do ambiente, a uma taxa proporcional à diferença entre ambas, isto é a diferença entre  $T$  e  $T_a$ ”.

Ora, a diferença entre a temperatura do objeto ( $T$ ) e a temperatura do ambiente ( $T_a$ ) é simplesmente a subtração destes:  $T - T_a$ . A variação da temperatura é sua derivada  $T'$ . Assim, a proporcionalidade entre essas duas grandezas é dada pela equação

$$T' = -\alpha(T - T_a)$$

Por que  $\alpha$  tem sinal negativo? Observe que conforme o tempo passa, a diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do ambiente vai diminuindo. A tendência é que, após um tempo muito grande, essas temperaturas se igualem. Com isso, a temperatura  $T$  do objeto deixa de variar (ou seja, derivada  $T' = 0$ ).

Se você souber o valor da temperatura do ambiente  $T_a$ , a temperatura inicial  $T(0)$  do objeto e a constante  $\alpha$ , você pode montar e resolver um PVI substituindo esses valores na equação acima.

**Exemplos:** Duas pessoas estão em um restaurante, onde a temperatura ambiente é  $T_a = 25^\circ\text{C}$ . Uma delas pede um café, com temperatura inicial  $90^\circ\text{C}$ , e a outra pede um chope com temperatura inicial  $6^\circ\text{C}$ . Qual é a função  $T(t)$  que determina como a temperatura de cada um desses objetos varia com o tempo? Considere que a taxa de transferência nesse local de temperatura é  $\alpha = 1\%$ .

**Resoluções:**

Substituindo os valores  $\alpha = \frac{1}{100}$  e  $T_a = 25$ , temos a equação  $T' = -\frac{1}{100}(T - 25)$ . Para cada uma das temperaturas iniciais  $T(0)$  acima, temos um PVI, conforme abaixo.

Como vimos nas aulas anteriores, a família de soluções da equação  $\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{100}(T - 25)$  é:  $T(t) = Ke^{-t/100} + 25$  (você pode chegar nessa resposta usando separação de variáveis).

Assim, a solução específica de cada PVI é:

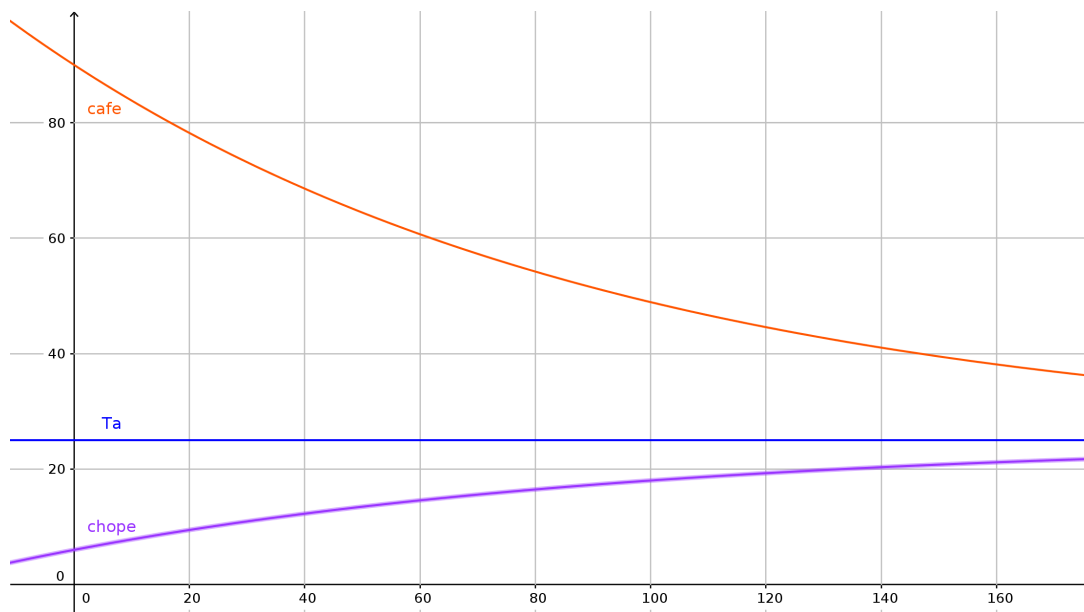


Figura 1: Gráficos das temperaturas do café e o chope no tempo

<p>PVI café: <math>\begin{cases} T' = -\frac{1}{100}(T - 25) \\ T(0) = 90 \end{cases}</math></p> <p> <math>T(t) = Ke^{-t/100} + 25</math>  <math>T(0) = Ke^0 + 25</math>  <math>90 = K + 25</math>  <math>K = 90 - 25</math>  <math>K = 65</math>  <math>T(t) = 65e^{-t/100} + 25</math> </p>	<p>PVI chope: <math>\begin{cases} T' = -\frac{1}{100}(T - 25) \\ T(0) = 6 \end{cases}</math></p> <p> <math>T(t) = Ke^{-t/100} + 25</math>  <math>T(0) = Ke^0 + 25</math>  <math>6 = K + 25</math>  <math>K = 6 - 25</math>  <math>K = -19</math>  <math>T(t) = -19e^{-t/100} + 25</math> </p>
---	---

Qual vai ser a temperatura de cada um após 1 minuto ( $t = 60s$ )?

Café após 60s:  $T(60) = 65e^{-60/100} + 25 = 65e^{-3/5} + 25$

Chope após 60s:  $T(60) = -19e^{-60/100} + 25 = -19e^{-3/5} + 25$

Como somos todos curiosos, podemos usar uma calculadora qual é o valor numérico dessa expressão (mas apenas em casa ou na aula, não na prova!):

Café após 60s:  $T(60) \approx 60.7^\circ\text{C}$

Chope após 60s:  $T(60) \approx 14.6^\circ\text{C}$

Veja os gráficos das duas funções na figura 1

---

**Desafio:** Qual é o limite dessas duas funções quando  $t \rightarrow \infty$ ? O que você pode concluir desse resultado?

### 3.2 Resistência do ar

Como funciona um pára-quedas?

Um corpo em queda livre tem sua velocidade acelerada pela força da gravidade. Assim, a força que atua no corpo, para baixo é  $F_g = mg$ , onde  $m$  é a massa e  $g$  é a aceleração da gravidade, que assumiremos constante por simplicidade.

O pára-quedas tem a função de diminuir ou cancelar essa aceleração, atuando na direção oposta (a força atua para cima). Ele cria uma enorme resistência do ar que é proporcional à velocidade atual. Assim, a força gerada pelo pára-quedas pode ser escrita como  $F_p = \alpha v$ . Isso implica que, quanto maior for a velocidade, maior será também a resistência do ar (diretamente proporcionais).

A resultante dessas duas forças é a diferença entre ambas, isto é  $F = F_g - F_p$ . Pela segunda lei de Newton essa força resultante é  $F = mv'$ , onde  $v'$  é a aceleração. Juntando tudo em uma única equação, temos:

$$mv' = mg - \alpha v$$

Simplificando, isto é, dividindo por  $m$ , temos:

$$v' = g - \frac{\alpha}{m}v$$

Podemos colocar o coeficiente de  $v$  em evidência, no lado direito da igualdade, dividindo ambos os termos por ele:

$$v' = g - \frac{\alpha}{m}v = -\frac{\alpha}{m}v + g$$

$$v' = -\frac{\alpha}{m}\left(v - \frac{mg}{\alpha}\right)$$

Agora, com o coeficiente de  $v$  do lado direito em evidência, fica um pouco mais fácil para separar as variáveis e resolver a equação.

### Exemplo:

Josefina salta de um avião e abre o pára-quedas imediatamente. Sua velocidade inicial é  $v_0 = 0$ . Jô pesa  $50kg$  e digamos que o coeficiente de arrasto do ar nesse local é  $\alpha = 50$ . Assumindo que a gravidade é  $g = 10\frac{m}{s^2}$ , qual será a velocidade de Jô após os primeiros  $2s$  de pura adrenalina?

### Resolução:

Substituindo as informações do enunciado temos:

$$v' = -\frac{50}{50}\left(v - \frac{50 \times 10}{50}\right) = -(v - 10)$$

Agora já podemos resolver o:

$$\text{PVI pára-quedas: } \begin{cases} v' = -(v - 10) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

A família de soluções da EDO é  $v(t) = Ke^{-t} + 10$ . Substituindo a velocidade inicial, encontramos o valor de  $K$ :

$$v(0) = Ke^0 + 10$$

$$0 = K + 10$$

$$K = -10$$

E a solução desse PVI é:

$$v(t) = -10e^{-t} + 10$$

Com essa função, podemos saber a velocidade Jô em qualquer instante de tempo. Como queremos saber a velocidade depois de  $2s$ , basta substituir  $t = 2$  e encontrar a resposta procurada:

$$v(2) = -10e^{-2} + 10$$

Como curiosidade, podemos efetuar essa resposta na calculadora e encontrar um valor numérico aproximado de  $8.6\frac{m}{s} \approx 31\frac{km}{h}$ .

**Desafio 1:** Qual seria a velocidade de Jô depois de  $2s$  se ela não tivesse um pára-quedas? (O que muda no problema?)

**Desafio 2:** Como a resistência do ar aumenta com a velocidade causada pela gravidade, em algum momento as duas forças  $F_g$  e  $F_p$  se igualam e se cancelam, e nesse momento Jô passa a cair com velocidade constante (força resultante nula  $\Rightarrow$  aceleração nula  $\Rightarrow v' = 0$ ). Qual é essa velocidade terminal?

O gráfico na figura 2 mostra a velocidade terminal.

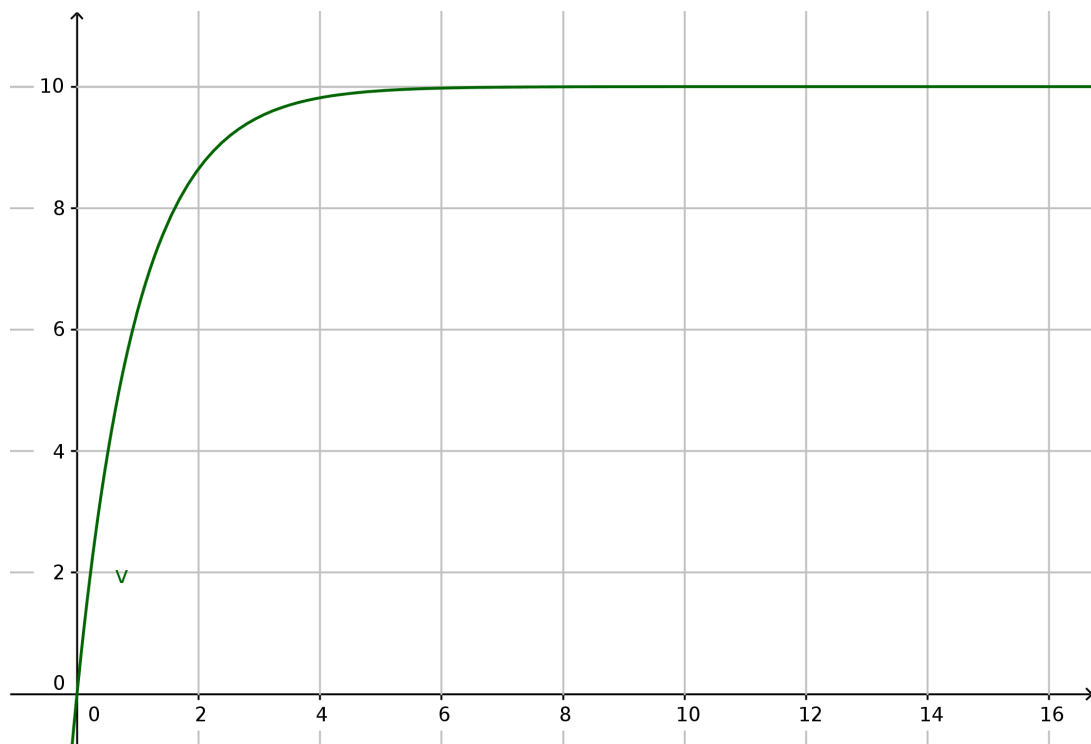


Figura 2: Gráfico da velocidade da Jô no tempo

### 3.3 Tempo de meia vida