Wstęp

W geometrii często spotykamy się z obiektami, które chociaż są zdefiniowane jednym zdaniem, kryją w sobie wiele tajemnic.

Poniższa praca traktuje o jednym z nich, a mianowicie o PROSTEJ EULERA.

Jest to prosta, do której należą ortocentrum H, środek ciężkości G oraz środek okręgu opisanego na danym trójkącie O. W drugiej kolejności mówi się również o tym, że do prostej Eulera należy środek okręgu Eulera[1], a więc okręgu, na którym leżą spodki wysokości, środki boków oraz punkty Eulera[2] danego trójkąta.[3]

W rzeczywistości jednak należy do niej wiele innych punktów charakterystycznych. W tej pracy postaram się wskazać kilka z nich, a także zdefiniować te najbardziej znane trochę inaczej.

Najpierw opiszę kilka trójkątów, które mają wspólną prostą Eulera. Następnie podam przykłady takich, których środki ciężkości lub środki okręgów nań opisanych należą do prostej Eulera danego trójkąta. W kolejnej części scharakteryzuję inne jeszcze punkty, które leżą na prostej Eulera. Na koniec opiszę kilka niezmienników związanych z punktami charakterystycznymi prostej Eulera.

Zacznę jednak od przytoczenia dowodu tego, iż ortocentrum, środek ciężkości i środek okręgu opisanego w istocie są współliniowe.

Dowód. [4] Niech X, Y, Z będą odpowiednio środkami boków BC, CA, AB trójkąta ABC.

Trójkąt XYZ jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{1}{2}$. Wysokości w trójkącie XYZ przecinają się w punkcie O, więc $OX : HA = 1 : 2$.

Niech G' będzi punktem przecięcia odcinków OH i AX. Zatem $AG' : G'X = OX : HA = 1 : 2$, więc $G' = G$ oraz $OG' : G'H = OX : HA = 1 : 2$, z czego otrzymujemy, że odległość środka ciężkości od ortocentrum jest dwa razy większa niż jego odległość od środka okręgu opisanego na trójkącie.

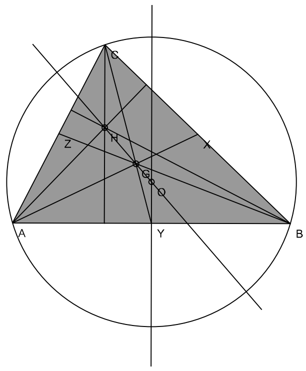
□

[1] Okrąg Eulera nazywany jest również okręgiem Feuerbacha lub okręgiem dziewięciu punktów.

[2] Punkty Eulera są to środki odcinków o jednym końcu w ortocentrum, a drugim w jednym z wierzchołków danego trójkąta.

[3] S.I. Zetel "Geometria trójkąta"

[4] V. Prasolov "Problems in plane and solid geometry"



Rysunek 1: Prosta Eulera

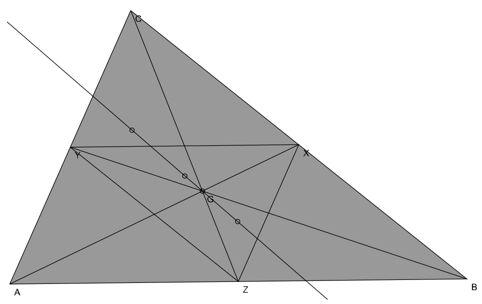
I. O trójkątach, które mają tą samą prostą Eulera.

Chociaż jeden trójkąt ma dokładnie jedną prostą Eulera, to prosta Eulera nie wyznacza jednoznacznie trójkąta. Istnieje wiele trójkątów, które mają wspólną prostą Eulera. Najprostszym przykładem może być zbiór trójkątów przystających do danego przesuniętych o wektor dowolnej długości równoległy do prostej Eulera tego trójkąta.

Poniżej przedstawione są dwa trójkąty, które nie należą do tego zbioru, a pomimo to mają tę samą prostą Eulera, co dany trójkąt ABC.

Twierdzenie 1. *Prosta Eulera trójkąta XYZ, którego wierzchołki leżą w środkach boków trójkąta ABC pokrywa się z prostą Eulera trójkąta ABC. Tym samym ortocentrum, środek ciężkości i środek okręgu opisanego na trójkącie XYZ leżą na prostej Eulera trójkąta ABC.*

Dowód. Środkowe trójkąta ABC przecinają się w punkcie G i dzielą się w stosunku 2:1 Zatem trójkąt XYZ jest jednokładny do trójkąta ABC względem punktu G i w skali $-1/2$. Prosta Eulera trójkąta XYZ jest więc obrazem prostej Eulera trójkąta ABC w tej samej jednokładności. Ponieważ zaś środek jednokładności, tj. punkt G leży na prostej Eulera trójkąta ABC, jej obraz pokrywa się z nią samą, co kończy dowód. □



Rysunek 2: Proste Eulera trójkątów ABC i XYZ pokrywają się

Twierdzenie 2. *Niech A', B' i C' oznaczają środki boków odpowiednio BC, CA oraz AB. Trójkąt powstały przez połączenie środków ciężkości trójkątów $AC'B'$, $C'BA'$ oraz $C'B'C$ ma tę samą prostą Eulera, co trójkąt ABC.*

Dowód. Niech G_1 oznacza środek ciężkości trójkąta $A'B'C$.

Odcinek łączący środki boków AB i BC jest równoległy do boku AB, a zatem prosta zawierająca środkową trójkąta ABC wychodzącą z wierzchołka C, zawiera także środkową trójkąta $A'B'C$, czyli również jego środek ciężkości.

Ponieważ:

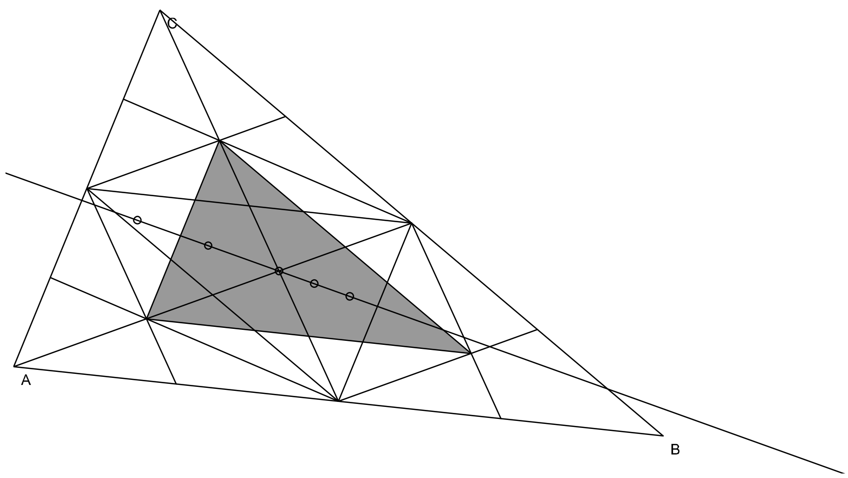
•środkowe w każdym trójkącie dzielą się w stosunku $2:1$;

•odcinek $A'B'$ dzieli środkową CC_1 w stosunku $1:1$(na podstawie twierdzenia Talesa dla $\angle ACC'$ i prostych równoległych AB i $A'B'$)

•Czworokąt $B'GA'G_1$ jest równoległobokiem (z twierdzenia odwrotnego do Talesa), a więc odcinek $A'B'$ połowi odcinek GG_1,

mamy: $GG_1 = \frac{CC'}{3}$.

Z tej równości oraz równości analogicznych dla trójkątów $AC'B'$ i $C'BA'$ wynika, że omawiany trójkąt (powstały przez połączenie ortocentrów trójkątów $B'A'C$, $AC'B'$ oraz $C'BA'$) jest jednokładny do trójkąta ABC względem punktu G, a zatem jego prosta Eulera, jest obrazem prostej Eulera trójkąta ABC w tej jednokładności, czyli nią samą. □



Rysunek 3: Te dwa trójkąty mają tą samą prostą Eulera.

II. O wspólnych środkach ciężkości.

W tej części pracy przedstawię kilka trójkątów, których proste Eulera przecinają się w ich wspólnym środku ciężkości.

Oczywiście, poniższe przykłady można scalać poprzez przyjęcie za trójkąt ABC innego trójkąta, opisanego w jednym z poniższych czterech twierdzeń i w ten sposób otrzymać kolejny trójkąt, którego środek ciężkości również pokrywa się z trójkątem ABC.

Twierdzenie 3. *Niech K, L oraz M będą odpowiednio punktami powstałymi przez odbicie wierzchołka A względem wierzchołka C, wierzchołka C względem wierzchołka B oraz wierzchołka B względem wierzchołka A. Środek ciężkości trójkąta KLM (G') leży na prostej Eulera trójkąta ABC, gdyż pokrywa się ze środkiem ciężkości trójkąta ABC.*

Dowód. Niech punkty A, B i C mają odpowiednio współrzędne (x_1, y_1), (x_2, y_2) oraz (x_3, y_3),a punkty K, L i M (a_1, b_1), (a_2, b_2) oraz (a_3, b_3).

Mamy: $G = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$;

$x_2 = \frac{a_2+x_3}{2} \iff a_2 = 2x_2 - x_3$

i analogicznie: $a_1 = 2x_3 - x_1$

$a_3 = 2x_1 - x_2$

oraz: $b_1 = 2y_3 - y_1$

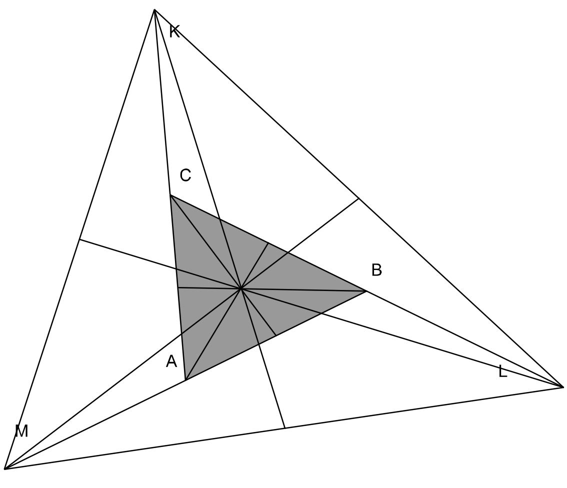
$b_2 = 2y_2 - y_3$

$b_3 = 2y_1 - y_2$

Zatem: $G' = (\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{b_1+b_2+b_3}{3})$

$\iff G' = \frac{2x_3-x_1+2x_2-x_3+2x_1-x_2}{3}, \frac{2y_3-y_1+2y2-y_3+2y_1-y_2}{3})$

$\iff G' = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$, co kończy dowód. □



Rysunek 4: Środki ciężkości trójkątów ABC i KLM pokrywają się.

Twierdzenie 4. *Na bokach trójkąta ABC zbudowano trójkąty równoboczne AUB, BTC i CSA. Środki ciężkości trójkątów ABC i STU pokrywają się.*

Dowód. Pozostańmy przy oznaczeniach:

$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2) \qquad C = (x_3, y_3)$

Niech tym razem:

$S = (a_1, b_1) \qquad T = (a_2, b_2) \qquad U = (a_3, b_3)$

A G' oznacza środek ciężkości nowopowstałego trójkąta.

Punkt U leży na prostej prostopadłej do boku AB przechodzącej przez jego środek. Współrzędne środka wynoszą $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, a współczynnik kierunkowy prostej, na której leży bok AB: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Współczynnik kierunkowy ww. prostej, na której leży punkt U wynosi: $-\frac{1}{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}} = \frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}$.

Podstawiając współrzędne środka boku AB otrzymuję równanie prostej, na której leży punkt U:

$\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1} \cdot \frac{x_1+x_2}{2} + b = \frac{y_1+y_2}{2}$

$b = \frac{y_1+y_2}{2} - \frac{x_1-x_2}{y_2-y_1} \cdot \frac{x_1+x_2}{2}$

$y = \frac{x_1-x_2}{y_2-y_1} \cdot x + \frac{y_1+y_2}{2} - \frac{x_1-x_2}{y_2-y_1} \cdot \frac{x_1+x_2}{2}$

Prawdziwa jest zatem równość:

$(a_1 - \frac{x_1+x_2}{2})^2 + (\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1} \cdot a_1 + \frac{y_1+y_2}{2} - \frac{x_1-x_2}{y_2-y_1} \cdot \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{y_1+y_2}{2})^2 = \frac{3}{4} \cdot ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)$ (*)

Które daje następujące rozwiązania:

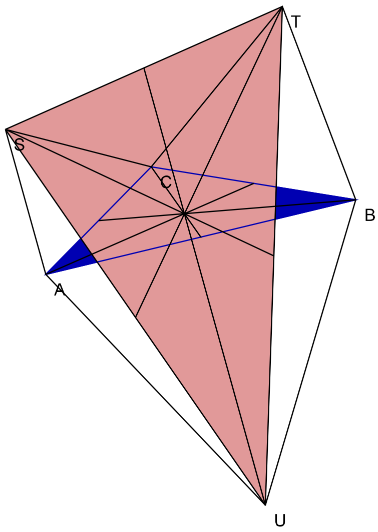
$a_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot y_2 - \sqrt{3} \cdot y_1 + x_1 + x_2}{2} \qquad \vee \qquad a_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot y_1 - \sqrt{3} \cdot y_2 + x_1 + x_2}{2}$

Można przyjąć $a_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot y_2 - \sqrt{3} \cdot y_1 + x_1 + x_2}{2}$

I analogicznie: $a_2 = \frac{\sqrt{3} \cdot y_3 - \sqrt{3} \cdot y_2 + x_2 + x_3}{2} \qquad a_3 = \frac{\sqrt{3} \cdot y_3 - \sqrt{3} \cdot y_2 + x_2 + x_3}{2}$

Stąd: $b_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot (x_3 - x_2) + y_1 + y_2}{2} \qquad b_2 = \frac{\sqrt{3} \cdot (x_1 - x_3) + y_2 + y_3}{2} \qquad b_3 = \frac{\sqrt{3} \cdot (x_2 - x_1) + y_3 + y_1}{2}$

I ostatecznie: $G' = (\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{b_1+b_2+b_3}{3})$ czyli: $G' = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$. □



Rysunek 5: Środki ciężkości tych dwóch trójkątów pokrywają się.

Twierdzenie 5. *Na bokach trójkąta ABC po ich zewnętrznej stronie zbudowano kwadraty AA_1B_2B, BB_1C_2C, CC_1A_2A. Połączono środki przekątnych tych kwadratów. Środki ciężkości nowopowstałego trójkąta oraz trójkąta ABC pokrywają się.*

Dowód. Ten przypadek jest bardzo podobny do rozważanego w twierdzeniu 4. Rozumowanie jest identyczne, aż do równania (*), w którym prawa strona zostaje zastąpiona przez

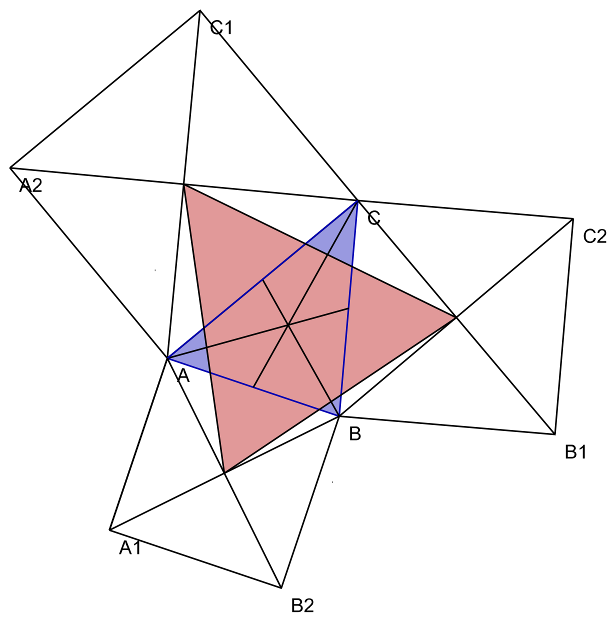
$\frac{1}{2} \cdot ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)$

Stąd: $a_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot y_1 - \sqrt{2} \cdot y_2 + x_1 + x_2}{2}$ $\quad a_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot y_2 - \sqrt{2} \cdot y_3 + x_2 + x_3}{2}$ $\quad a_3 = \frac{\sqrt{2} \cdot y_3 - \sqrt{2} \cdot y_1 + x_3 + x_1}{2}$

Czyli: $b_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot (x_1 - x_2) + y_1 + y_2}{2}$ $\quad b_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot (x_2 - x_3) + y_2 + y_3}{2}$ $\quad b_3 = \frac{\sqrt{2} \cdot (x_3 - x_1) + y_2 + y_3}{2}$

Więc: $G' = (\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$

□



Rysunek 6: Środki ciężkości tych dwóch trójkątów pokrywają się.

Twierdzenie 6. *Połączono wierzchołki kwadratów z poprzedniego przykładu jak na rys. 7. Środek ciężkości nowopowstałego trójkąta pokrywa się ze środkiem ciężkości trójkąta ABC.*

Dowód. Z tego, że G jest środkiem ciężkości trójkąta ABC mamy:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$

Teza zaś jest równoważna: $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = 0$

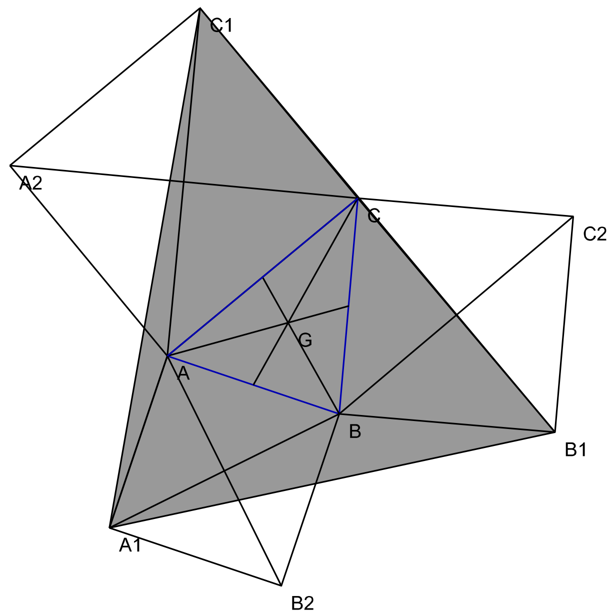
$\iff (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{B_2A_1}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC_2} + \overrightarrow{C_2B_1}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{A_2C_1}) = 0$

$\iff \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{B_2A_1} + \overrightarrow{CC_2} + \overrightarrow{C_2B_1} + \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{A_2C_1} = 0$

$\iff \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1} = 0$

$\iff \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$

$\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ i $\overrightarrow{CC_1}$ są odpowiednio obrazami wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ o $\frac{\pi}{2}$ w prawo, to ich suma równa jest sumie wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ obróconej o $\frac{\pi}{2}$ w prawo, a więc wynosi 0, co kończy dowód. $\square$



Rysunek 7: Środki ciężkości tych dwóch trójkątów pokrywają się.

III. O trójkątach, na których opisane okręgi mają środki współliniowe.

Na prostej leży nieskończenie wiele punktów. Każdy punkt jest środkiem nieskończenie wielu okręgów. W każdy okrąg zaś da się wpisać nieskończenie wiele trójkątów. Moc zbioru figur, które spełniają warunek z tytułu tej części pracy jest zatem olbrzymia. Zdecydowałam się na opisanie dwóch takich trójkątów.

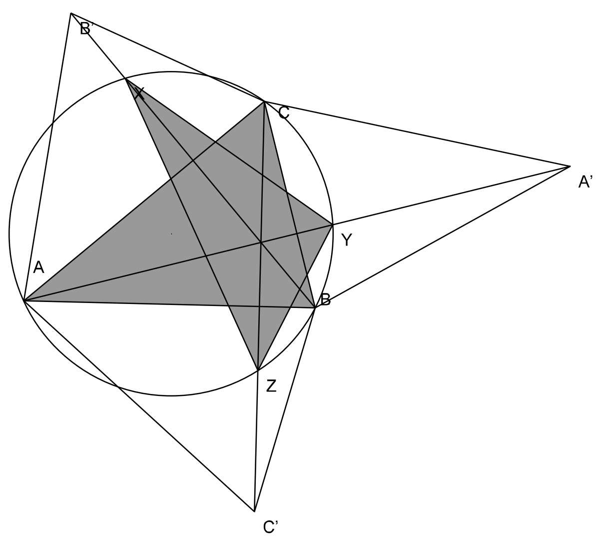
Twierdzenie 7. *Przekształcono wierzchołki trójkąta ABC w symetrii względem przeciwległych boków, otrzymując punkty A' na przeciw A, B' na przeciw B oraz C' na przeciw C. Połączono ortocentra trójkątów $BA'C$, $CB'A$ oraz $AC'B$. Środek okręgu opisanego na powstałym w ten sposób trójkącie pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a trójkąty te mają środek perspektywy, który pokrywa się z ortocentrum trójkąta ABC.*

Dowód. Z konstrukcji puntów A', B' i C' wynika, że leżą one na prostych prostopadłych odpowiednio do BC, CA, AB i przechodzących odpowiednio przez punkty A, B oraz C. Jak łatwo zauważyć, ortocentra trójkątów $BA'C$, $CB'A$ oraz $AC'B$ leżą na tych samych prostych. Do nich również należą wysokości trójkąta ABC, które przecinają się w ortocentrum, a więc również tam będzie się znajdował środek perspektywy omawianych trójkątów.

Ponadto ortocentrum trójkąta $AC'B$ jest obrazem ortocentrum trójkąta ABC w symetrii względem prostej zawierającej AB.

Analogicznie ortocentra trójkątów $BA'C$ i $CB'A$ są obrazami ortocentrum trójkąta ABC w symetrii względem prostych zawierających boki BC oraz CA.

Zatem ortocentra trójkątów $BA'C$, $CB'A$ i $AC'B$ leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC. □



Rysunek 8:

Twierdzenie 8. *Na trójkącie ABC opisano okrąg i poprowadzono styczne do tego okręgu w punktach A, B oraz C. Punkty przecięcia tych stycznych oznaczono przez P, R oraz S (rys.9). Środek okręgu opisanego na trójkącie PRS leży na prostej Eulera trójkąta ABC.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że środki okręgów opisanych na trójkątach ABC, XYZ (przykład 1) oraz PRS są współliniowe.

Rozważmy inwersję względem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech I będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a α miarą $\angle CIX$.

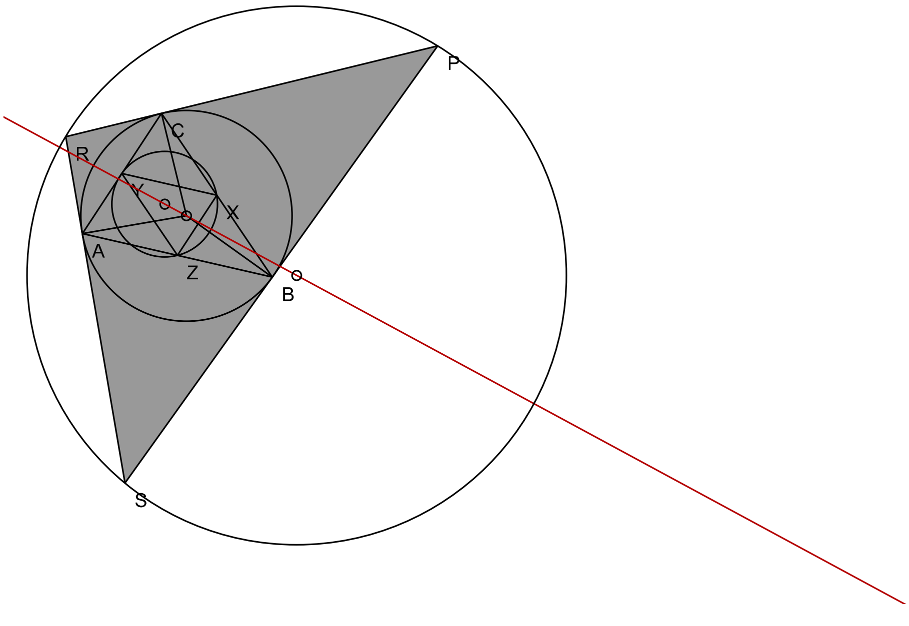
Punkt X leży w środku podstawy trójkąta równoramiennego PCB, a zatem PX jest wysokością tego trójkąta i jednocześnie $PX \perp BC$. Ponadto z założenia $IX \perp BC$, więc punkty P, X oraz I są współliniowe.

Ponieważ zaś trójkąty IXC oraz ICP mają kąty o miarach α, $\frac{\pi}{2}$ i $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, są one podobne. Prawdziwa jest więc następująca równość:

$\frac{IX}{IC} = \frac{IC}{IP}$,

czyli $IC^2 = IX \cdot IP$.

Zatem punkt X jest obrazem punktu P w rozważanej inwersji. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, otrzymujemy również, iż Y jest obrazem R, a Z obrazem S w tej inwersji, czyli okrąg opisany na trójkącie XYZ jest obrazem okręgu opisanego na trójkącie PRS w inwersji względem okręgu opisanego na trójkącie ABC, z czego wynika, że środki tych okręgów są współliniowe. □



Rysunek 9: Współliniowe środki okręgów opisanych.

IV. O innych punktach leżących na prostej Eulera.

Poniżej znajdują się jeszcze dwa przykłady konstrukcji punktów, które należą do prostej Eulera danego trójkąta ABC.

Twierdzenie 9. *Środek perspektywy trójkąta spodkowego oraz ww. trójkąta PRS (twierdzenie 8) leży na prostej Eulera trójkąta ABC.*

Dowód. Oznaczmy przez H_A, H_B oraz H_C spodki wysokości trójkąta ABC opuszczone odpowiednio z wierzchołków A, B i C.

$\angle H_CH_AB = \frac{\pi}{2} - \angle AH_AH_C = \frac{\pi}{2} - \angle ACH_C$,

gdyż na czworoącie ACH_AH_C można opisać okrąg ($\angle CHCA = \angle AH_AC = \frac{\pi}{2}$)

$= \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \angle CAB) = \angle CAB$

I analogicznie:

$\angle H_BH_AC = \angle CAB$

$\angle H_AH_CB = \angle H_BH_CA = \angle BCA$

$\angle H_AH_BC = \angle H_CH_BA = \angle ABC$

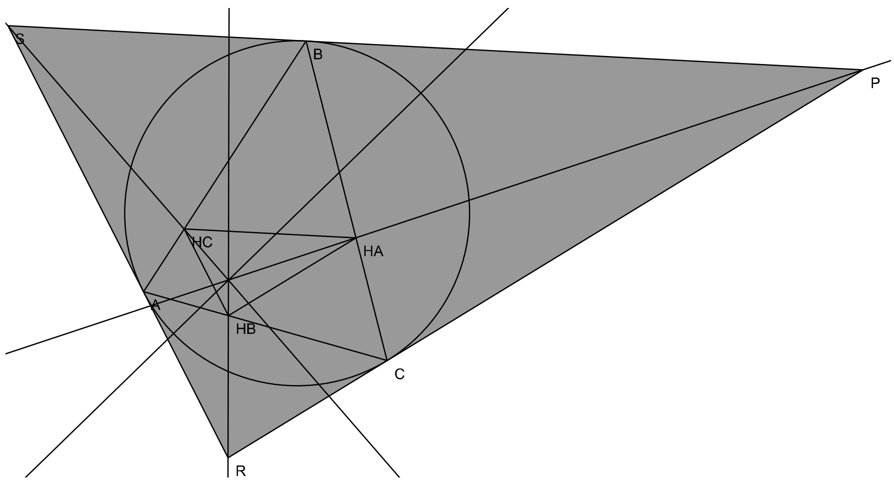
Korzystając z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą mamy ponadto:

$\angle PBC = \angle BAC$

$\angle RCA = \angle CBA$

$\angle SAB = \angle ACB$.

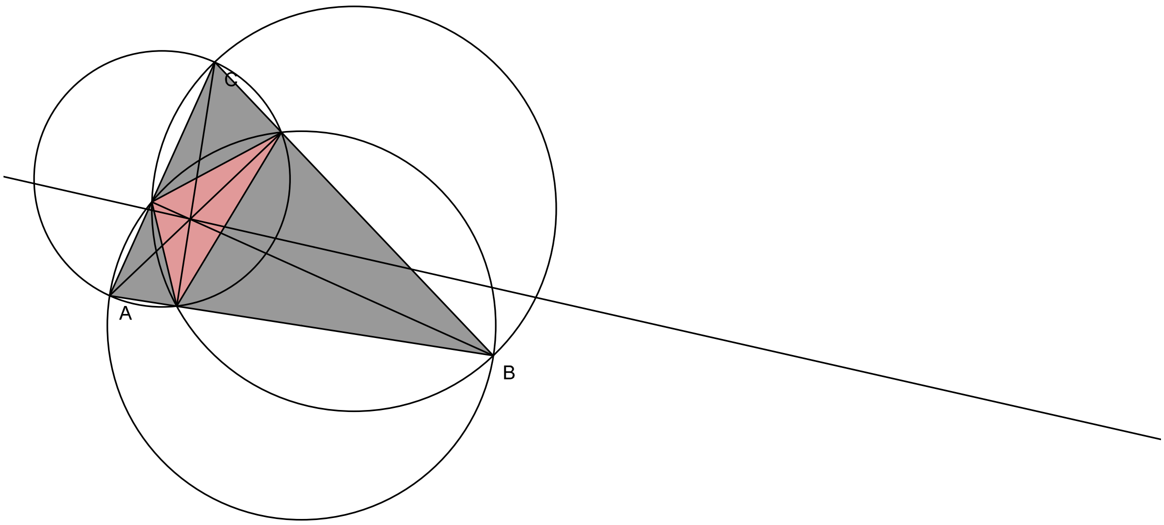
Zatem trójkąty $H_AH_BH_C$ i PRS mają parami równoległe boki, a więc są podobne. W związku z tym istnieje jednokładność, która przekształca trójkąt $H_AH_BH_C$ wraz z opisanym na nim okręgiem na trójkąt PRS wraz z opisanym na nim okręgiem, a środek tej jednokładności jest środkiem perspektywy tych trójkątów. Ponieważ środki okręgów opisanych na każdym z tych trójkątów leżą na prostej Eulera trójkąta ABC, środek jednokładności również leży na tej prostej, co kończy dowód. □



Rysunek 10: Środek perspektywy tych dwóch trójkątów leży na prostej Eulera.

Twierdzenie 10. *Wykreślono okręgi, których średnicami są odcinki AB, BC oraz CA. Punkty przecięć okręgów niebędące wierzchołkami wyznaczają nowy trójkąt, a środek perspetywy jego i trójkąta ABC leży w ortocentrum trójkąta ABC.*

Dowód. Odcinki łączące przeciwległe wierzchołki tych trójkątów są prostopadłe do boków, na których leżą wierzchołki nowopowstałego trójkąta, gdyż kąt pomiędzy nimi jest kątem wpisanym opartym na półokręgu. Zatem przecinają się one w ortocentrum trójkąta ABC. □



Rysunek 11: Środek perspektywy tych dwóch trójkątów jest ortocentrum większego z nich.

V. O pewnych wielkościach stałych.

W tej części pracy chciałabym przedstawić pewne niezmienniki, które dotyczą środka ciężkości, ortocentrum oraz środka okręgu opisanego na danym trójkącie.

Twierdzenie 11. *Dany jest środek ciężkości G oraz wierzchołek A trójkąta ABC.*

Wybrano punkt F należący do odcinka AG. Wartość wyrażenia:

$$FB^2 + FC^2 - GB^2 - GC^2$$

jest stała, to znaczy nie zależy od położenia punktów B i C, a jedynie od wyboru punktu F.

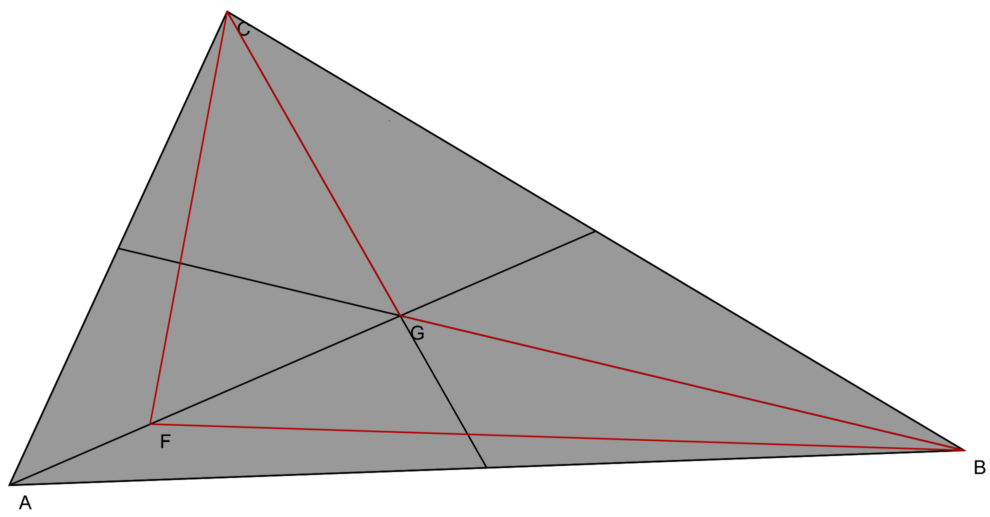
Dowód. Prawdziwe są następujące równości:

$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC}$

Czyli: $FB^2+FC^2-GB^2-GC^2 = FG^2+2\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GB}+GB^2+FG^2+2\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GC}+GC^2-GB^2-GC^2 =$
$= 2(FG^2 + \overrightarrow{FG}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})) = 2(FG^2 + \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AG}) = 2FG(FG + AG) = const.$

□



Rysunek 12: $FB^2 + FC^2 - GB^2 - GC^2 = const.$

Twierdzenie 12. *Dany jest bok AB trójkąta ABC oraz okrąg opisany na tym trójkącie. Niech K będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta ACB z łukiem niezawierającym punktu C.*

Wartość wyrażenia:

$$\frac{AC+BC}{CK}$$

zależy tylko od wyboru łuku ograniczonego przez wierzchołki A i B, na którym leży punkt C, nie zaś od wyboru punktu C.

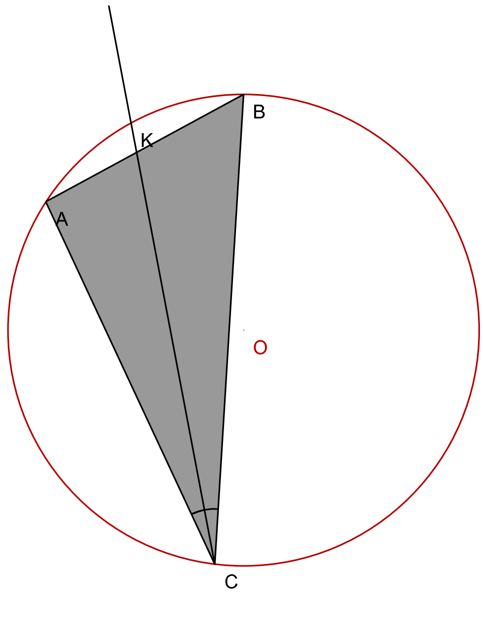
Dowód. Z twierdzenia Ptolemeusza mamy:

$AC \cdot KB + BC \cdot KA = CK \cdot AB.$

Ponieważ łuki $\widehat{AK}$ i $\widehat{KB}$ są równe, to odcinki AK i BK mają jednakowe długości, a zatem:

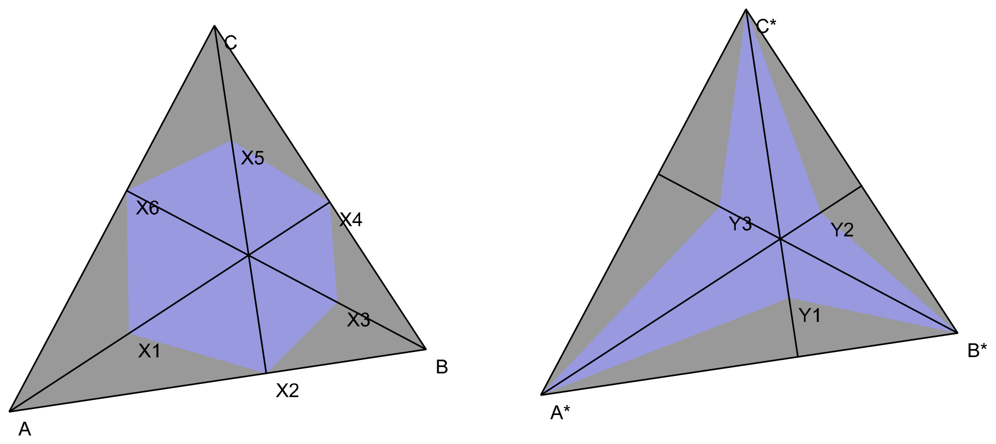
$\frac{AC+BC}{CK} = AB/KB = const.,$

gdyż AB i KB są wielkościami stałymi. □



Rysunek 13: $\frac{AC+BC}{CK} = const.$

Tym razem przyjrzyjmy się dwóm sześciokątom związanym z ortocentrum, które mają wspólną cechę: iloczyn długości ich parzystych boków jest równy iloczynowi długości ich nieparzystych boków.



Rysunek 14: $\frac{X_1X_2}{X_2X_3} \cdot \frac{X_3X_4}{X_4X_5} \cdot \frac{X_5X_6}{X_6X_1} = 1$ oraz $\frac{AY_1}{Y_1B} \cdot \frac{BY_2}{Y_2C} \cdot \frac{CY_3}{Y_3A} = 1$

Twierdzenie 13. *Połączono punkty Eulera trójkąta ABC ze spodkami wierzchołków (jak na powyższym rysunku). Zachodzi równość:*

$$\frac{X_1X_2}{X_2X_3} \cdot \frac{X_3X_4}{X_4X_5} \cdot \frac{X_5X_6}{X_6X_1} = 1.$$

Dowód. Niech H oznacza ortocentrum trójkąta ABC.

Ponieważ $\angle HX_2B = \angle HX_4B = \frac{\pi}{2}$ na czworokącie HX_2BX_4 można opisać okrąg, a odcinek HB jest średnicą tego okręgu.

Z definicji X_3jest środiem tego odcinka, a więc środkiem okręgu opisanego na czworokącie HX_2BX_4.

Zatem $X_2X_3 = X_3X_4$.

Analogicznie $X_4X_5 = X_5X_6$ i $X_6X_1 = X_1X_2$.

Dlatego $\frac{X1X2}{X2X3} \cdot \frac{X3X4}{X4X5} \cdot \frac{X5X6}{X6X1} = 1.$ □

Twierdzenie 14. *Niech Y_1, Y_2 i Y_3 będą środkami odcinków o jednym końcu w ortocentrum, a drugim w wierzchołkach trójkąta ABC. Zachodzi równość:*

$$\frac{AY_1}{Y_1B} \cdot \frac{BY_2}{Y_2C} \cdot \frac{CY_3}{Y_3A} = 1$$

Dowód. Niech H oznacza ortocentrum, a H_A, H_B i H_C spodki wysokości trójkąta ABC opuszczone odpowiednio z wierzchołów A, B i C.

Z twierdzenia Cévy mamy:

$$\frac{AH_C}{H_CB} \cdot \frac{BH_A}{H_AC} \cdot \frac{CH_B}{H_BA} = 1.$$

Zatem:

$$\frac{AH_C \cdot \frac{1-Y_1H_C}{2HH_C}}{H_CB \cdot \frac{1-Y_1H_C}{2HH_C}} \cdot \frac{BH_A \cdot \frac{1-Y_2H_A}{2HH_A}}{H_AC \cdot \frac{1-Y_2H_A}{2HH_A}} \cdot \frac{CH_B \cdot \frac{1-Y_3H_B}{2HH_B}}{H_BA \cdot \frac{1-Y_3H_B}{2HH_B}} = 1$$

$$\iff \frac{[AY_1H]}{[BY_1H]} \cdot \frac{[BY_2H]}{[CY_2H]} \cdot \frac{[CY_3H]}{[AY_3H]} = 1$$

$$\iff \frac{AY_1}{Y_1B} \cdot \frac{BY_2}{Y_2C} \cdot \frac{CY_3}{Y_3A} \cdot \frac{sin\angle AY_1H}{sin\angle BY_1H} \cdot \frac{sin\angle BY_2H}{sin\angle CY_2H} \cdot \frac{sin\angle CY_3H}{sin\angle AY_3H} = 1$$

Wystarczy zatem pokazać, że:

$$\frac{sin\angle AY_1H}{sin\angle BY_1H} \cdot \frac{sin\angle BY_2H}{sin\angle CY_2H} \cdot \frac{sin\angle CY_3H}{sin\angle AY_3H} = 1. \ (**)$$

Odcinek Y_2Y_3 łączy środki boków trójkąta H_AH_BH.

Zatem $Y_2Y_3 \parallel H_AH_B$, czyli $\angle Y_3Y_2H = \angle H_BH_AH$.

Ponieważ na czworoącie ABH_AH_B da się opisać okrąg, to $\angle H_BH_AH = \angle H_BBA$.

Prawdziwa jest więc równość $\angle Y_3Y_2H = \angle H_BBA$, równoważna temu, że na czworokącie ABY_2Y_3 można opisać okrąg.

Zatem $\angle AY_3B = \angle AY_2B$, czyli $sin\angle AY_3B = sin\angle AY_2B$.

Analogicznie: $sin\angle BY_1C = sin\angle BY_3C$ i $sin\angle AY_1C = sin\angle AY_2C$.

Powyższe trzy równości dowodzą równości (**). □

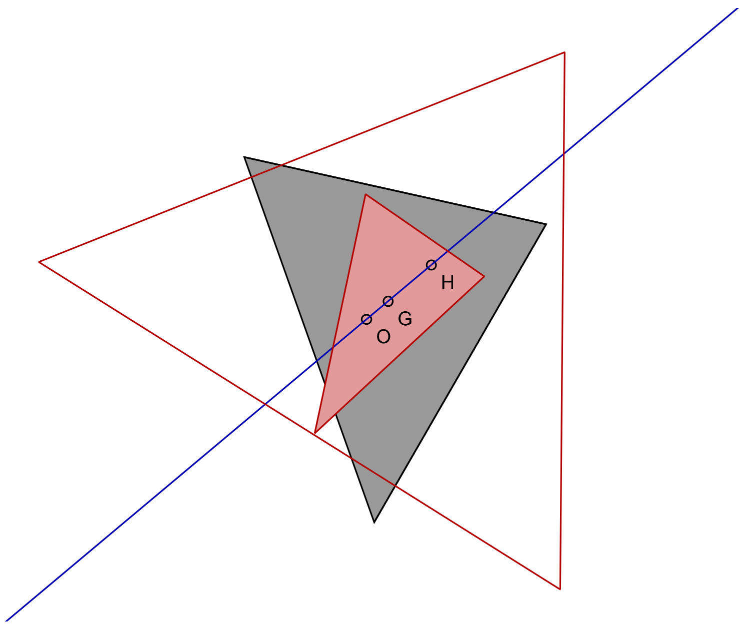
Twierdzenie 15. *Istnieje nieskończenie wiele trójkątów, które można przyporządkować do wspólnego ortocentrum, środka ciężkości i środka okręgu na nich opisanego jednocześnie. Dla danej takiej trójki punktów (H,G,O) i dla każdego punktu płaszczyzny nieleżącego na prostej wyznaczonej przez te punkty jako dla jednego z wierzchołków trójkąta, istnieje dokładnie jeden taki trójkąt.*

Dowód. Wystarczy wskazać jednoznaczną konstrukcję trójkąta ABC, spełniającego powyższe warunki.

Oznaczmy wybrany punkt przez A.

Konstruujemy:	Otrzymujemy:
1.Półprostą AG, a na niej punkt leżący w odległości $\frac{AG}{2}$ od punktu G po przeciwnej stronie punktu G niż punkt A.	1. Punkt M, będący środkiem boku BC trójkąta ABC.
2. Półprostą AH; 3. Prostą prostopadłą do półprostej AH, przechodzącą przez punkt M.	2-3. Prostą BC zawierającą bok BC trójkąta ABC.
4. Okrąg o środku w punkcie O i promieniu OA.	4. Punkty przecięć okręgu z prostą BC, to jest wierzchołki B i C trójkąta ABC.

□



Rysunek 15: Te trzy niemające z pozoru nic ze sobą wspólnego trójkąty mają wspólne ortocentrum, wspólny środek cikeżkości oraz wspólny środek oręgu na nich opisanego (choć ich wierzchołki nie leżą na jednym okręgu).

Jednak...

Twierdzenie 16. *Dany jest trójkąt nierównoboczny ABC. Nie istnieje trójkąt wpisany w trójkąt ABC, którego wyżej wymienione trzy punkty szczególne porywają się z tymi samymi punktami szczególnymi trójkąta ABC.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje trójkąt XYZ wpisany w trójkąt ABC, który ma wspólne punkty O i G (co implikuje również wspólne ortocentrum) z trójkątem ABC.

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na poniższym rysunku.

Ponieważ okręgi opisane na trójkątach ABC i XYZ są koncentryczne, a AB jest cięciwą większego z nich, to $AZ = SB$. Analogicznie, $BX = PC$ i $CY = RA$. Z potęgi punktu A względem mniejszego okręgu mamy:

$$AZ \cdot (AB - AZ) = AR \cdot (AC - AR).$$

Ponieważ:

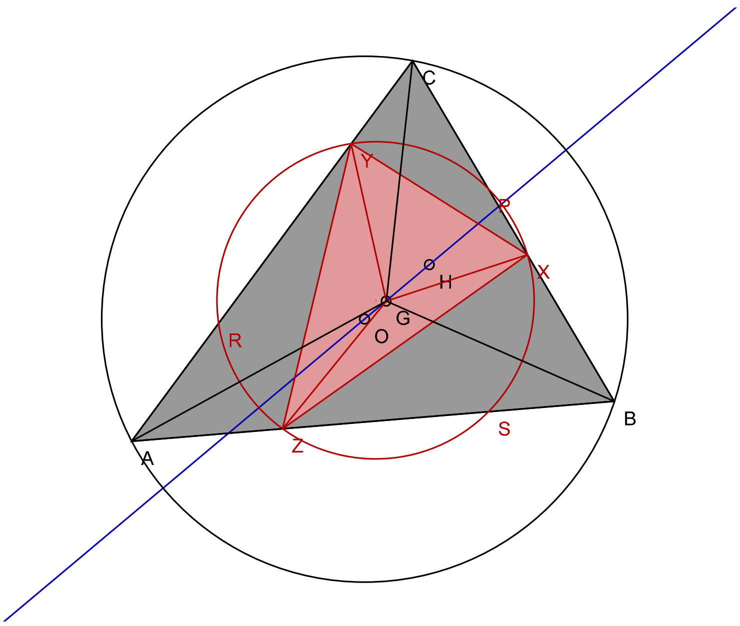
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0 \text{ i } \overrightarrow{GX} + \overrightarrow{GY} + \overrightarrow{GZ} = 0;$$

to: $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{YC} + \overrightarrow{ZA} = 0$,

a zatem: $\frac{XB}{BC} = \frac{YC}{CA} = \frac{ZA}{AB} = \frac{1}{k}$.

Mamy więc: $kAB \cdot (1-k)AB = kAC \cdot (1-k)AC$,

a ponieważ $k > 1$, to: $AB = AC$ i analogicznie $AC = BC$, co prowadzi do sprzeczności, gdyż trójkąt ABC nie jest równoboczny. □



Rysunek 16: Hipotetyczny układ trójkątów.

W tym miejscu chciałabym jeszcze raz przytoczyć zdanie ze wstępu. W geometrii często spotykamy się z obiektami, które choć są zdefiniowane jednym zdaniem kryją w sobie wiele tajemnic. Prosta Eulera zdecydowanie jest jednym z nich.