1. Composantes de l'algèbre de Boole

Toute algèbre est composée de deux éléments : **les variables** et **les opérateurs**. Dans l'algèbre conventionnelle, les variables sont les nombres et les opérateurs sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

L'algèbre de Boole est, elle aussi, constituée de **variables dites "booléennes"** et d'opérateurs.

Variables booléennes :

Une variable booléenne est une quantité logique qui n'admet que deux états possibles : "VRAI" ou "FAUX".

L'état logique "VRAI" est symbolisé par 1. Il indique que la variable est à **un niveau logique "HAUT"**, c'est-à-dire qu'elle existe et qu'elle est bien présente.Dans la pratique, un niveau "HAUT" peut signifier une tension de 5V ou un contact fermé.

L'état logique "FAUX" désigne l'inverse, c'est-à-dire que la variable est absente. Elle est alors **symbolisée par 0**. Un contact ouvert qui ne laisse pas passer le courant ou une tension de 0V sont des exemples de variables booléennes d'un **niveau logique "BAS"**.

Ceci est semblable à la notion des bits du système binaire que vous avez étudié dans l'étude sur les systèmes de numérotation et de codage. En effet, une variable booléenne peut être représentée par un bit qui est égal à 0 ou à 1. Dans la pratique, ces variables sont symbolisées par les lettres de l'alphabet. Par exemple, un vérin peut être désigné par la lettre *C* et un moteur par la lettre *M*.

Opérateurs de l'algèbre Booléenne :

Trois opérateurs logiques ont été définis par Georges Boole. Ce sont les façons de combiner les variables booléennes entre elles. Il s'agit de :

- l'addition,
- la multiplication,
- la négation.

Addition Booléenne "+"

Cet opérateur défini l'addition dans l'algèbre de Boole. Le symbole logique de cet opérateur est **"OU"**. Le tableau de la figure suivante montre l'ensemble des combinaisons possibles et le résultat correspondant de l'opération logique "OU" pour deux variables booléennes a et b.

Opérateur "OU" :

a	b	OU
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Le résultat de l'addition booléenne prend **la valeur 0** si les deux variables additionnées ont simultanément l'état logique 0. Il prend **la valeur 1** si l'une des deux variables au moins ou les deux simultanément ont l'état logique 1.

Le tableau de la figure ci-dessus est appelé **la table de vérité de l'opérateur "OU"**. Dans le cas général, la table de vérité d'une fonction logique est la compilation sous forme de tableau de l'état logique de la variable de sortie par rapport aux états logiques des variables d'entrée.

Multiplication booléenne "·"

Le symbole logique de cet opérateur est **"ET"**. Pour deux variables booléennes, **le résultat** de cette opération est **0** si une variable ou les deux sont à l'état logique 0. **Le résultat 1** est obtenu quand les deux variables d'entrée sont à l'état logique 1. Le tableau de la figure 2.2 présente toutes ces possibilités.

Opérateur "ET" :

a	b	ET
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Opérateur "NON"

Cet opérateur s'applique à une seule variable booléenne et il **donne la négation de cette variable**. Si une variable a est à l'état logique 1, le **"NON A"** qui est noté ā (prononcez a barre) est à l'état logique 0. La négation d'une variable booléenne est l'opposé ou le négatif de cette variable. Le tableau de la figure suivante contient l'ensemble des possibilités lorsque cet opérateur est appliqué à une variable booléenne a.

Opérateur "NON" :

a	NON a
0	1
1	0

2. Notion de fonction logique booléenne

Supposez plusieurs propositions indépendantes. Une décision prise en fonction d'un arrangement de ces propositions fait en sorte que la décision est une fonction logique de ces propositions. Plus simplement, la décision est une fonction logique alors que les propositions sont les variables indépendantes du problème. Voici un exemple d'une fonction logique.

On veut contrôler le départ d'une course. Deux contrôleurs sont responsables du départ :

- a = contrôleur n°1

- b = contrôleur n°2

Le départ a lieu si 1 contrôleur est prêt. En terme d'opérateur logique, une variable est remplacée par son nom quand elle est **"fausse"**. Le départ sera donné :

- si le contrôleur n°1 est prêt donc a = "vraie" et b ="fausse".

- ou si le contrôleur n°2 est prêt donc b = "vraie" et a = "fausse".

Ainsi la fonction départ s'écrit : $a \cdot \bar{b} + \bar{a}\, b$.

3. Règles de base de l'algèbre booléenne

L'algèbre booléenne dispose d'un ensemble de lois, de postulats et de théorèmes fondamentaux qui définissent les règles de base de la combinaison des variables booléennes.

Postulats :

Les postulats sont **les exigences et les conditions** relatives à chacun des opérateurs de l'algèbre booléenne. Ils forment un ensemble de **10 règles** qui régissent les opérateurs **"OU"**, **"ET"** et **"NON"**. Le tableau de la figure ci-dessous et les schémas de la figure ci-après les présentent.

Postulats de l'algèbre booléenne :

(1) $\overline{0} = 1$	(6) $\overline{1} = 0$
(2) $0 + 0 = 0$	(7) $0 \cdot 0 = 0$
(3) $0 + 1 = 1$	(8) $0 \cdot 1 = 0$
(4) $1 + 0 = 1$	(9) $1 \cdot 0 = 0$
(5) $1 + 1 = 1$	(10) $1 \cdot 1 = 1$

Théorèmes de base pour une seule variable booléenne :

Un ensemble de théorèmes s'appliquent à une seule variable booléenne en présence des opérateurs "OU", "ET" et "NON". Ce sont les théorèmes de l'identité et ils apparaissent au tableau des figures suivantes.

Théorèmes pour une seule variable :

(11) $a + 1 = 1$ (15) $a \cdot 1 = a$

(12) $a + 0 = a$ (16) $a \cdot 0 = 0$

(13) $a + a = a$ (17) $a \cdot a = a$

(14) $a + \overline{a} = 1$ (18) $a \cdot \overline{a} = 0$

(19) $\overline{\overline{a}} = a$