دانشکده مهندسی کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف

استاد درس: دکتر شهره کسایی

بهار ۱۴۰۰

تمرین سوم
درس پردازش تصویر

نام و نام خانوادگی: امیر پورمند

شماره دانشجویی: ۹۹۲۱۰۲۵۹

آدرس ایمیل **pourmand1376@gmail.com**

۱ سوال ۱

خب ابتدا میدانیم

$$\bar{N}(x,y) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} N_i(x,y)$$

در فرض سوال نیز بیان شده است که:

$$N_i(x,y) = I(x,y) + \mu_i(x,y)$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}
E[\overline{N}(x,y)] &= E\left[\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} N_i(x,y)\right] \\
&= \frac{1}{M}E\left[\sum_{i=0}^{M} N_i(x,y)\right] \\
&= \frac{1}{M}\sum E[I(x,y)] + \frac{1}{M}\sum E[\mu_i(x,y)] \\
&= \frac{1}{M}M\, I(x,y) + \frac{1}{M}\times 0 \\
&= I(x,y)
\end{aligned}$$

برای واریانس هم داریم:

$$\begin{aligned}
Var[\overline{N}(x,y)] &= E\left[(\overline{N}(x,y) - E[\overline{N}(x,y)])^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} N_i(x,y) - I(x,y)\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} [I(x,y) + \mu_i(x,y)] - I(x,y)\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} \mu_i(x,y)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{M^2}E\left[\sum \mu_i(x,y)\right]^2 \\
&= \frac{1}{M^2}\sum E[\mu_i(x,y)]^2 \\
&= \frac{1}{M^2}\sum \sigma_i(x,y)^2 \\
&= \frac{M}{M^2}\sigma^2(x,y) \\
&= \frac{1}{M}\sigma^2(x,y)
\end{aligned}$$

۲ سوال ۲

خب ابتدا میخواهیم با معیار MSE که رایج است بهترین فیلتری که بتواند نویز را کنسل کند بیابیم. پس از تعریف برویم:

$$\begin{aligned} E\left[e^2[n]\right] &= E\left[(d[n]-y[n])^2\right] \\ &= E\left[d^2[n]\right] + E\left[y^2[n]\right] - 2E[y[n]d[n]] \\ &= \phi_{dd}[0] - 2\,\phi_{yd}[0] + \phi_{yy}[0] \end{aligned}$$

از طرفی میدانیم تابع y به شکل زیر تعریف میشود:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

با جایگذاری این تعریف در فرمول های قبلی به نتایج جالبی میرسیم:

$$\begin{aligned} \phi_{yd}[0] &= E[y[n]d[n]] \\ &= E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]x[n-m]d[n]\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]\phi_{xd}[m] \end{aligned}$$

سپس برای ϕ_{yy} داریم:

$$\begin{aligned} \phi_{yy}[0] &= E[y[n]y[n]] \\ &= E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]x[n-m] \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l]x[n-l]\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[m]h[l]\phi_{xx}[l-m] \end{aligned}$$

پس عبارت اول مساوی زیر خواهد بود:

$$k = \phi_{xx}[0] - 2\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]\phi_{xd}[m] + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[m]h[l]\phi_{xx}[l-m]$$

حال باید از این عبارت نسبت به h مشتق بگیریم تا بهینه بدست آید:

$$\begin{aligned} derivative &= -2\phi_{xd}[n_i] + 2\sum h_{opt}[m]\phi_{xx}[n_i-m] = 0 \\ \rightarrow 2\phi_{xd}[n_i] &= \sum h_{opt}[m]\phi_{xx}[n_i-m] \\ \rightarrow H_{opt}(z)\phi_{xx}(z) &= \phi_{xd}(z) \\ \rightarrow H_{optimal}(z) &= \phi_{xd}(z)\phi_{xx}^{-1}(z) \end{aligned}$$

که این عبارت دقیقا معادل فیلتر واینر هست پس دو چیز اثبات شد. یک این که فیلتر واینر بهینه است و دو این که فیلتر بدست آمده فیتلر واینر است .

۳ سوال ۳

خب ابتدا طبق صورت مسئله چیز هایی که میدانیم را بنویسیم تا پیش برویم و حل شود:

$$V = \int_0^u P_u(u)du$$

این فرض مشخص مسئله بود داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^v p_V(z)dz &= P[0 \leq V \leq v] \\ &= P[0 \leq U \leq F^{-1}(v) \\ &= \int_0^{F^{-1}(v)} p_x(w)dw\end{aligned}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}\int_0^v p_V(z)dz &= p_V(z) \\ &= p_U(F^{-1}(v)\frac{\partial}{\partial v}F^{-1}(u)\end{aligned}$$

باتوجه به این که میدانیم:

$$\frac{\partial}{\partial u}F(F^{-1}(u)) = \frac{\partial}{\partial u}u = 1$$

بنابراین میتوان نتیجه گرفت که توزیع V یک توزیع یکنواخت در بازه صفر ویک است و به درستی میتواند به جای یک احتمال مورد استفاده قرار بگیرد.

۴ سوال ۴

خب در سوال خواسته که رابطه را بدست آوریم پس بیاییم و لاپلاسین را از تصویر کم کنیم ببینیم چه میشود:

$$\begin{aligned}subtraction &= f(x,y) \ - \ \nabla^2 f(x,y) \\ &= \ f(x,y) \ - \ [f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y-1) + f(x,y+1) - 4f(x,y)] \\ &= \ 6f(x,y) \ - \ [f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y-1) + f(x,y+1) + f(x,y)] \\ &= \ 6f(x,y) \ - \ 5\overline{f}(x,y) \\ &= \ 5[1.2f(x,y) \ - \ \overline{f}(x,y)]\end{aligned}$$

خب خدا رو شکر. مشخص شد که این دو با نادیده گرفتن ضرایب نسبت خوبی با یکدیگر دارند و به نوعی معادل یکدیگر هستند.

۵ سوال ۵

PCA چیست؟

در واقع یک روش کاهش ابعاد است که سعی میکند بیشترین اطلاعات ممکن را از ابعاد استخراج کند و نوعی فشرده سازی انجام دهد.

ویژگی ها بر اساس واریانسی که با خروجی دارند انتخاب میشوند و اولین ویژگی انتخاب شده معمولا مهم ترین آنها است.
مزایای این روش:

۱. پاک کردن ویژگی هایی که با هم correlated هستند نکته مهم در این الگوریتم این است که ویژگی های خروجی از یکدیگر در واقع مستقل هستند.

۲. افزایش دقت و کارایی الگوریتم: در این روش چون تعداد ویژگی های ورودی کم میشود مشخصا کارایی الگوریتم بالاتر میرود و در ثانی چون ویژگی هایی که بدست امدند ویژگی های مهم تری هستند معمولا دقت الگوریتم نیز بهتر میشود.

۳. کم کردن overfit داده ها. مشخص است که وقتی تعداد بسیار زیادی از ویژگی ها در دیتاست وجود دارند شانس overfit افزایش پیدا میکند

۴. برای مقاصد visualization نیز این کار مفید است زیرا تعداد ویژگی ها به شدت کم میشود

یک سری از معایب این روش نیز عبارتند از:

۱. مانند هر الگوریتم فشرده ساز دیگری یک سری اطلاعات به هر حال از دست میرود که ممکن است مفید باشند.

۲. اگر از فیچرهای معمولی استفاده کرده بودیم مدل تفسیرپذیری بهتری داشت ولی وقتی از PCA استفاده شود تفسیرپذیری مدل کاهش پیدا میکند زیرا ارتباط ویژگی ها و خود ویژگی دیگر آنقدرها مشخص نیست.