



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

یادگیری ماشین

زمستان ۱۳۹۹

تمرین سری دوم

مدرس: دکتر محمدحسین رهبان

زمان تحویل: ۲۶ اسفند

سوال ۱ مدل سبد مهره‌ها را برای فرضیه‌ی  $h$  که در تخمین تابع هدف قطعی  $f$  با احتمال  $\mu$  دچار خطا می‌شود، در نظر بگیرید. دقت کنید که  $h$  و  $f$  دودویی<sup>۱</sup> هستند. حال اگر همان  $h$  را برای تخمین نسخه‌ی حاوی نویز  $f$  استفاده کنیم، که

$$P(y|x) = \begin{cases} \lambda & : y = f(x) \\ 1 - \lambda & : y \neq f(x) \end{cases}$$

آ) احتمال خطایی که  $h$  در تخمین  $y$  مرتکب می‌شود را بیابید. (۱۰ نمره)

ب) به ازای چه مقدار از  $\lambda$ ، عملکرد  $h$  از  $\mu$  مستقل است؟ (۱۰ نمره)

سوال ۲ به دو سوال زیر در مورد خطای داخل نمونه<sup>۲</sup> و خطای خارج نمونه<sup>۳</sup> پاسخ دهید:

آ) برای دو ماتریس ریسک مطرح شده در کلاس (سوپرمارکت و CIA)، خطای  $E_{in}$  که با حساب کردن کمینه آن،  $g$  به دست می‌آید را به صورت صریح تعیین کنید. (۱۰ نمره)

ب) برای رگرسیون خطی، خطای خارج نمونه به شکل زیر است:

$$E_{out}(h) = \mathbb{E}[(h(\mathbf{x}) - y)^2]$$

نشان دهید مقدار کمینه  $E_{out}$  به ازای فرضیه  $h^* = \mathbb{E}[y|x]$  بدست می‌آید که  $h^*$  را می‌توان یک تابع هدف قطعی به صورت  $y = h^*(\mathbf{x}) + \epsilon(\mathbf{x})$  نشان دهیم امید ریاضی  $\epsilon(\mathbf{x})$  برابر صفر است. (۱۰ نمره)

<sup>1</sup> Binary

<sup>2</sup> In Sample Error

<sup>3</sup> Out of Sample Error

**سوال ۳** در این سوال با استفاده از دو مثال متفاوت به بررسی  $B(N, k)$  و دو حد بالای ارائه شده برای آن می‌پردازیم:

(آ) با توجه به مثال *puzzle* که در اسلایدهای درس آورده شده، توضیح دهید چند تفکیک<sup>۱</sup> روی چهار نقطه می‌توان در نظر گرفت به طوری که هیچ زیرمجموعه سه تایی از آن‌ها *shattered* نشود (از دسته‌بندی‌ای شبیه آنچه در کلاس بیان شده استفاده کنید)؟ سپس درستی رابطه زیر را برای آن بررسی نمایید. (۱۰ نمره)

$$B(N, k) \leq B(N - 1, k) + B(N - 1, k - 1)$$

(ب) همانطور که در کلاس دیدیم، کوچکترین نقطه شکست<sup>۲</sup> برای مدل پرسپترون در فضای دو بعدی، چهار نقطه است. کوچکترین نقطه شکست را برای این مدل در فضای سه بعدی به دست آورید. سپس با استفاده از آن یک حد بالا برای بیشترین تعداد تفکیک‌ها روی  $N$  نقطه ارائه دهید  $(B(N, k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \binom{N}{i})$ . (۱۰ نمره)

**سوال ۴** با توجه به کلاس‌های فرضیه زیر، مقدار نقطه شکست را برای هر دسته‌بند بیابید و سپس یک حد بالا برای تابع رشد آن  $(m_H(N))$  ارائه دهید. (آ) فرض کنید  $H$  مجموعه مستطیل‌های موازی محورهای مختصات در فضای  $\mathbb{R}^2$  را نشان می‌دهد؛ به عبارت دیگر هر  $h \in H$  نمایانگر یک بازه از مقادیر  $x$  و یک بازه از مقادیر  $y$  است. هر مستطیل یک دسته بند دودویی است که نقاط داخل آن به دسته‌ی مثبت و نقاط خارج آن به دسته‌ی منفی اختصاص می‌یابند. (۱۰ نمره)

(ب) فرض کنید  $H$  مجموعه مستطیل‌های قابل چرخش در فضای  $\mathbb{R}^2$  را نشان می‌دهد و هر مستطیل یک دسته‌بند دودویی است که نقاط داخل آن به دسته‌ی مثبت و نقاط خارج آن به دسته‌ی منفی اختصاص می‌یابند. (۱۰ نمره)

(پ) فرض کنید  $H$  مجموعه دایره‌ها در فضای  $\mathbb{R}^2$  را نشان می‌دهد و هر دایره یک دسته‌بند دودویی است که نقاط داخل آن به دسته‌ی مثبت و نقاط خارج آن به دسته‌ی منفی اختصاص می‌یابند. (۱۰ نمره)

**سوال ۵** نامساوی *Hoeffding* را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\mathbb{P}[|E_{in}(g) - E_{out}(g)| > \epsilon] \leq 2Me^{-2\epsilon^2 N}$$

اگر مقدار  $\epsilon = 0.05$  باشد و بخواهیم بیشینه مقدار  $2Me^{-2\epsilon^2 N}$  برابر 0.03 شود، کمینه تعداد نمونه‌های مورد نیاز ( $N$ ) را به ازای  $M \in \{1, 10, 1000\}$  به دست آورید. از مقایسه این سه مقدار چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ (۱۰ نمره)

**سوال ۶** (امتیازی) کلاس فرضیه زیر را برای  $x \in \mathbb{R}$  در نظر بگیرید:

$$H_{\text{sine}} = \{ \text{sign}(\sin(ax + b)) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

<sup>1</sup>Dichotomy

<sup>2</sup>Break Point

آ) یک تابع دلخواه از این کلاس را رسم کرده و نشان دهید که *shattered* کردن نقطه‌های  $x, 2x, 3x, 4x$  توسط  $H_{\text{sine}}$  امکان پذیر نیست. (۵ نمره)

ب) بعد  $VC$  این کلاس فرضیه را حساب کنید. (۱۰ نمره)

---

پاینده باشید