Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación
CC3501-2 Modelación y Computación Gráfica para Ingenieros

Tarea 1: Diferencias Finitas

Autor: Pablo Pizarro
Profesor: Nancy Hitschfeld K.
Auxiliares: Michel Llorens, Sebastián González
Ayudantes: Israel Peña, Pablo Polanco
Fecha de Entrega: 12 - 04 – 2015

Introducción

Tras la erupción del volcán Villarica, la ONEMI y el gobierno regional necesitan sobrevolar el cráter del macizo para hacer un balance de la situación y estimar el riesgo que corren las localidades cercanas al volcán. Pese a la urgencia del sobrevuelo, el piloto no despegará hasta que se haya logrado estimar una distancia mínima de seguridad, ya que las altas temperaturas del cráter podrían producir corrientes de aire que suponen un riesgo para la aeronave y las autoridades a bordo.

Para esta importante situación, la ONEMI le solicita a Ud., un importante ingeniero, que implemente una simulación de las temperaturas del volcán y sus alrededores y estimar una distancia mínima de seguridad a partir de las velocidades del viento.

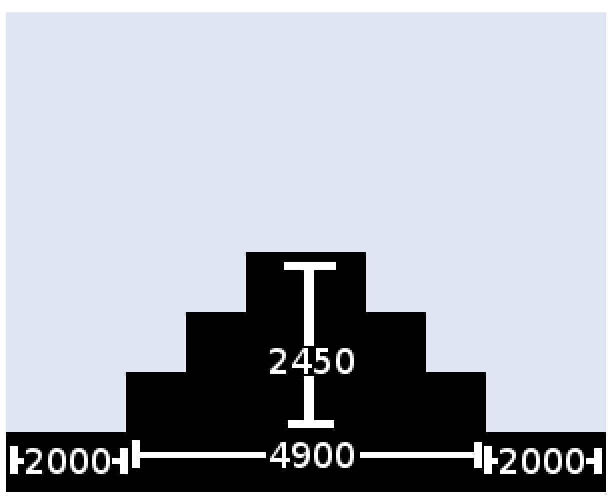
Diseño de la solución

El problema consiste en representar un volcán, con varias dimensiones en una matriz. Una idea intuitiva es crear una matriz 1:1 con respecto a las dimensiones en metros, ello sería fácil de implementar pero muy costoso en términos de hardware: esto no se puede realizar todo el tiempo (y menos si tuviésemos que modelar, por ejemplo, las temperaturas ambientales de un continente entero). Ahí entra en juego el tema de la tarea: diferencias finitas.

Y hablamos de finito dado que el computador en si es una herramienta finita, no se dispone de infinita memoria para poder simular en “condiciones reales” todas las situaciones en las que tuviese que usarse la computación (que prácticamente es todo). Por lo tanto se reducirá el problema a algo más abordable, de menores medidas pero que aún así permite modelar correctamente el fenómeno expuesto.

Partiremos en un principio enumerando todas las dimensiones del volcán en una tabla y calculando el tamaño máximo de la matriz final en las direcciones x (entiéndase por ancho) e y (el alto):

Eje x		Eje y	
Elemento	Dimensión [m]	Elemento	Dimensión [m]
Entorno izquierdo	2000	Altura del volcán	2450
Entorno derecho	2000	Atmosfera	6000
Ancho del volcán	4900	Base	400
Total	8900		6400



Visualización de las dimensiones del modelo

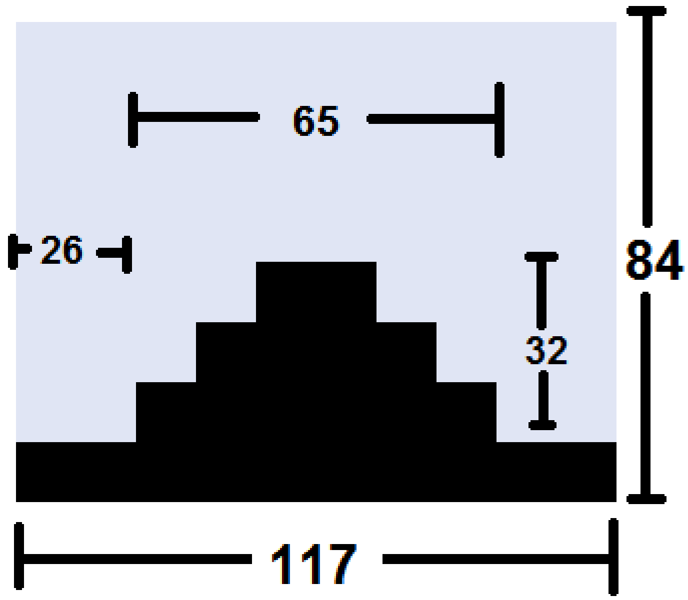
Si hiciéramos luego una matriz de la misma razón que el modelo teórico planteado tendríamos una matriz gigante ¡de dimensiones 8900x6000! (Sólo si consideráramos una celda por metro, si por ejemplo fuesen 10 casillas por cada metro sería una matriz de 89.000x60.000). Una matriz así no es muy manejable en los ordenadores convencionales, Aquí entra el término discreto: ¿Qué pasa si mantenemos las mismas dimensiones (manteniendo su proporción) pero las hacemos más pequeñas? Para efectos de la solución planteada todas las dimensiones se multiplicaron por un factor $0{,}004$, con ello se redujo el problema a lo siguiente:

Eje x		Eje y	
Elemento	Dimensión [un]	Elemento	Dimensión [un]
Entorno izquierdo	8	Altura del volcán	9.8
Entorno derecho	8	Atmosfera	24
Ancho del volcán	19.6	Base	1.6
Total	35.6		25.6

Dado que ya tenemos mejores dimensiones con las que trabajar es momento de decidir el grado de detalle que queremos representar. Ahí entra el factor h que corresponde a la dimensión de cada celda en la matriz de nuestro modelo; Mientras h sea mas pequeño el detalle será mayor. Para efectos de la solución se planteó un h igual a 0.3 obteniendo lo siguiente en número de celdas en la matriz:

Eje x		Eje y	
Elemento	N° de celdas	Elemento	N° de celdas
Entorno izquierdo	26	Altura del volcán	32
Entorno derecho	26	Atmosfera	79
Ancho del volcán	65	Base	5
Total	117		84

Finalmente para efectos de cálculo se contemplara una matriz de dimensiones 117x84, dicha matriz permite una buena representación del modelo acercando a la realidad los resultados obtenidos. Esto puede verse en la siguiente imagen, cada dimensión corresponde al número de celdas en la matriz:



Nótese que para lo anterior no se especificó el número de peldaños del volcán, tras varias pruebas se concluyó que con 30 escalones el problema se modela de forma "real", dado que un número de peldaños muy bajo se obtiene un cráter descomunalmente grande, para un número muy grande de peldaños el cráter es minúsculo.

Una vez que se poseen las dimensiones del modelo hay que representarlo en la matriz de nuestra solución, para ello cada dimensión se almacenó en un arreglo de números $dimensiones[i]$, en donde:

$dimensiones[0]$	Entorno
$dimensiones[1]$	Altura máxima
$dimensiones[2]$	Ancho del volcán
$dimensiones[3]$	Distancia entre altura máxima y el cráter
$dimensiones[4]$	Altura de cada escalón
$dimensiones[5]$	Base

Luego tenemos que el ancho total corresponde a $2 * dimensiones[0] + dimensiones[2]$ y el alto *trabajable* es igual a $dimensiones[1]$+ $dimensiones[3]$ (Recalco en trabajable dado que la base del volcán no está incluida en el desarrollo) para efectos del código m corresponde al ancho y n al alto. Usando luego la librería $numpy$ (el cual se importó como np) se crea la nueva matriz la cual se llamará a y estará inicialmente rellena de 1's

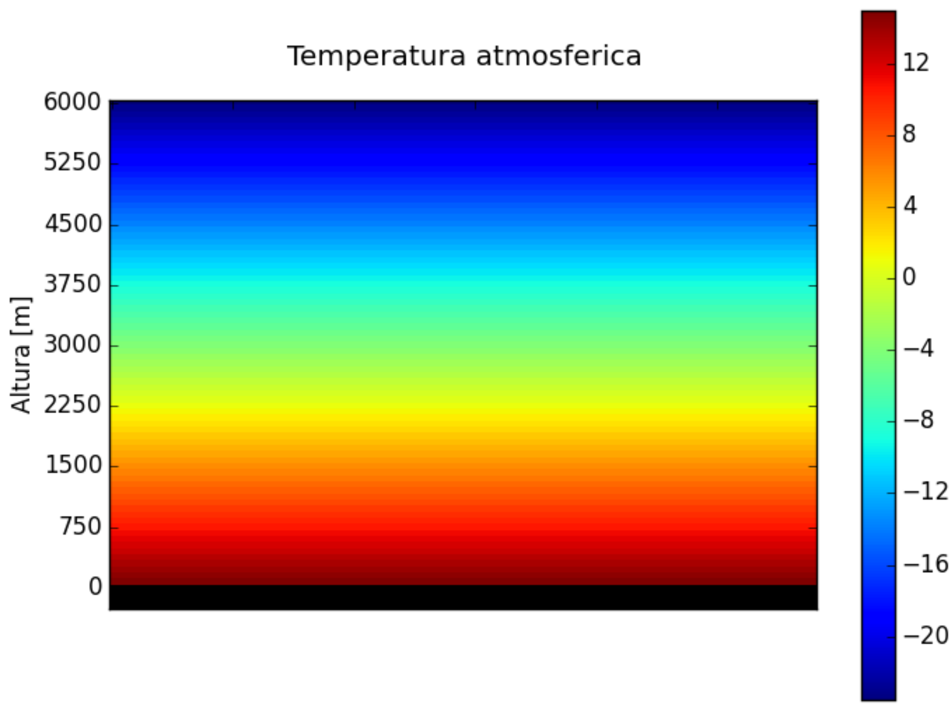
```
a = np.ones(n, m)
```

Dado que la atmosfera inicialmente posee una temperatura entonces se incluye en la matriz, esta será de 15 grados al nivel del suelo (esto es cuando la coordenada y es igual a n) y luego para celda esta disminuirá en un factor $\frac{0.0065*h}{0,004}$, esto pasa dado que por cada metro la temperatura disminuye 0,0065 grados centígrados, y si aplicamos las mismas transformaciones que hicimos con las dimensiones del volcán se obtiene dicho coeficiente. Si consideramos $h = 0,3$ se tiene que para cada celda la variación sería de $0,487$ grados.

Lo anterior se puede conseguir con un bucle ***for*** en la altura de la matriz, donde para cada una de las iteraciones se establece lo siguiente:

```
Temperatura fila[i] = Temperatura fila [i-1] - 0,0487;
```

Si sólo graficáramos la temperatura atmosférica se obtendría lo siguiente:



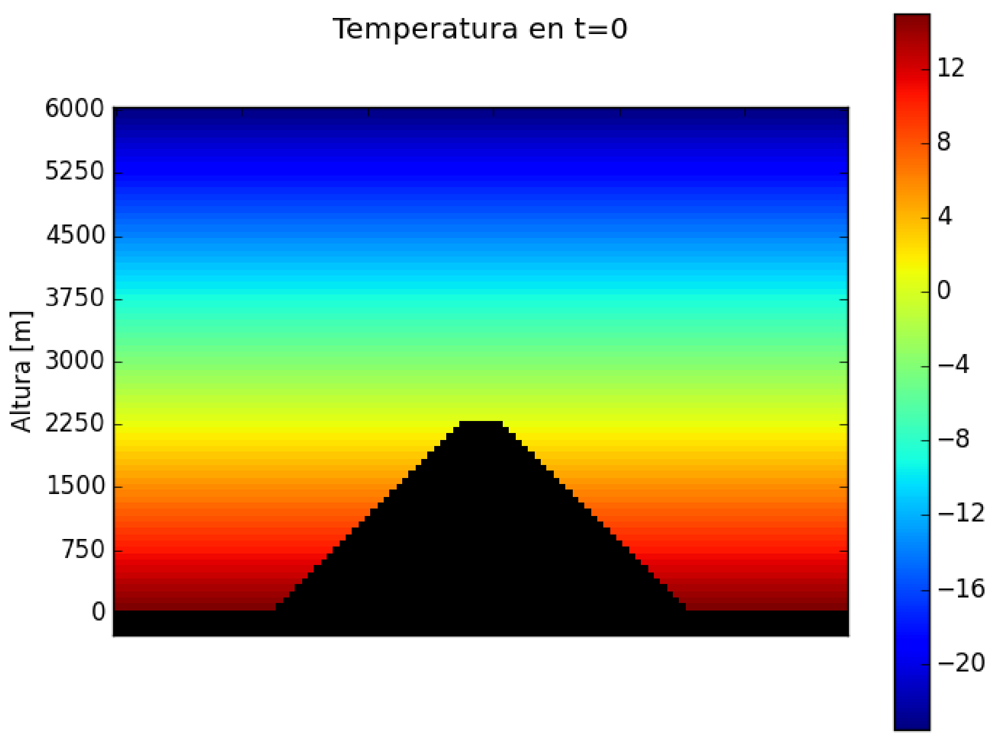
Una vez que toda la atmósfera se ha inicializado hay que construir el volcán, para ello se consideró una iteración ***en el número de peldaños*** en donde para cada iteración se calcula un cierto dx que corresponde al número de celdas entre $dimensiones[0]$ y el peldaño respectivo. Mientras mayor es el dx menor corresponde al ancho de dicho peldaño; así mismo el dy corresponde sólo al tamaño de cada escalón ($dimensiones[4]$) en nro. De celdas. La relación para el dx corresponde a:

$$dx = \frac{1}{2}\left(\frac{dimensiones[2]}{numero\ de\ escalones}\right) * i, i = 0 \rightarrow numero\ de\ escalones$$

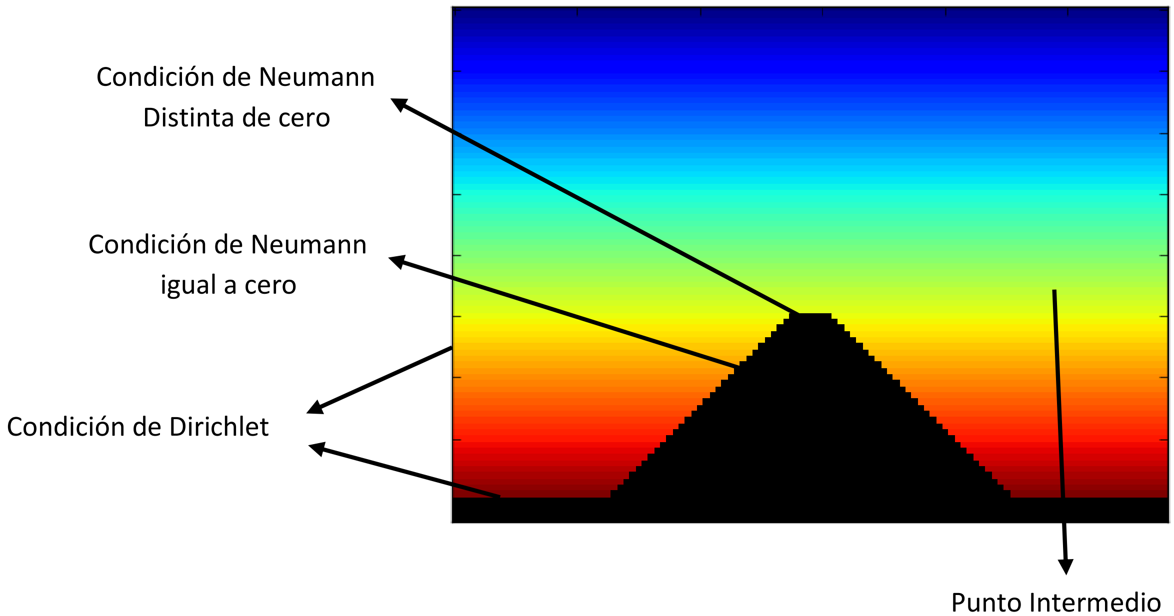
Esto puede verse en pseudocódigo como:

```
#Función auxiliar que crea un rectángulo en la matriz A
Function createRect(xi, yi, xf, yf, valor){
      For(x = xi hasta xf){
            For(y = yi hasta yf){
                  A[x][y]=valor
            }
      }
}

e = número de escalones
For (i = 0 hasta N) {
      dx = 0.5*(dimensiones[2]/e)*i
      createRect( dimensiones[0]+ dx, n- dy *(i+1),
                  m- dimensiones[0]- dx, n- dy*i,
                  NAN)
}
```

Lo anterior gráficamente queda así:



Una vez que se tiene la matriz inicializada completamente es hora de ejecutar la solución interativa, para ello primero hay que identificar las condiciones de cada punto: si es un punto intermedio o si está en el borde (se entiende por borde como el límite entre lo calculable y lo que no):



El cráter es una condición de Neumann distinta de cero dado que en cada instante de tiempo se tiene que la temperatura del cráter cambia con respecto al tiempo en una forma de derivada. Las laderas son Neumann igual a cero dado que se puede entender la tierra como un aislante (o un medio adiabático) por lo tanto la tierra misma no interactúa con la temperatura ambiental. Y el resto de bordes es considerado de Dirichlet dado que las variaciones de temperatura para el resto de la atmosfera pueden ser consideradas extremadamente bajas, por lo tanto se asume constante la temperatura para esas regiones (tanto el resto de la atmosfera como en la tierra a cota 0.

Dependiendo de cada condición se calculará de forma distinta, si resulta que $a[i][j]$ es un punto intermedio, esto es:

- $0 < i < n$, n el alto de la matriz.
- $0 < j < m$, m el ancho de la matriz.
- $not\ nearNan(i,j)$, donde `nearNan(i,j)` es una función auxiliar que retorna ***true*** si existe algún NAN alrededor de dicho casillero, ***false*** si no.

Entonces se cumple que en cada iteración:

$$a[i][j] = a[i][j] + \omega\left(\frac{a[i-1][j] + a[i+1][j] + a[i][j+1] + a[i][j-1] - 4a[i][j]}{4}\right)$$

Donde:

$$\omega = coeficiente\ de\ relajación = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\right)^2}}$$

$$m = ancho\ de\ la\ matriz, n = alto\ de\ la\ matriz$$

Si $a[i][j]$ está en un borde de Dirichlet, esto es si:

- $i = 0 \vee i = n$, n el alto de la matriz.
- $j = 0\ v\ j = m$, m el ancho de la matriz

Entonces dicho punto no se modificará en cada iteración.

Si $a[i][j]$ está en el borde con condición de Neumann, igual a cero (ello quiere decir que está en una ladera del volcán), esto es:

- $0 < i < n \wedge 0 < j < m$, n es el alto de la matriz, m es el ancho de la matriz.
- $nearNan(i, j)$, donde $nearNan$ es la función auxiliar presentada anteriormente.
- $i \neq icrater \wedge \backsim (jcratermin < j < jcratermax)$, donde $icrater$ es la posición vertical del cráter en la matriz, $jcratermin$ es la coordenada horizontal minima del cráter y $jcratermax$ es la coordenada horizontal máxima del cráter. Dichos puntos son guardados tras la creación del volcán en una variable llamada **pos_lava.**

Entonces se usará la siguiente relación:

1) Si está sobre un peldaño

$$a[i][j] = a[i][j] + \omega\left(\frac{2a[i-1][j] + a[i][j+1] + a[i][j-1] - 4a[i][j]}{4}\right)$$

2) Si está en el borde izquierdo de un peldaño

$$a[i][j] = a[i][j] + \omega\left(\frac{2a[i][j-1] + a[i-1][j] + a[i+1][j] - 4a[i][j]}{4}\right)$$

3) Si está en el borde derecho de un peldaño

$$a[i][j] = a[i][j] + \omega\left(\frac{2a[i][j+1] + a[i-1][j] + a[i+1][j] - 4a[i][j]}{4}\right)$$

Si $a[i][j]$ está en un borde con condición de Neumann distinto de cero (quiere decir sobre el cráter), esto es:

- $0 < i < n \wedge 0 < j < m$, n es el alto de la matriz, m es el ancho de la matriz.
- $nearNan(i, j)$, donde $nearNan$ es la función auxiliar presentada anteriormente.
- $i = icrater \wedge (jcratermin < j < jcratermax)$.

Entonces se cumple la siguiente relación:

$$a[i][j] = a[i][j] + \ \omega\left(\frac{2a[i-1][j] + a[i][j-1] + a[i][j+1] - 4a[i][j-1] - 2h^2C(t)}{4}\right)$$

$$C(t) = -\frac{1}{200}\left(2^{\sqrt{5-\frac{t}{10}}} + cos(t)\right)$$

Tras modificar cada punto $a[i][j]$ se debe calcular el error asociado, esto es la diferencia entre el $a[i][j]$ previo y el nuevo $a[i][j]$. Esto es importante para comprobar la condición de término de la solución iterativa: que el error sea menor a una cierta cota denominada $epsilon$ que para el caso de esta solución se fijó en $0{,}001$.

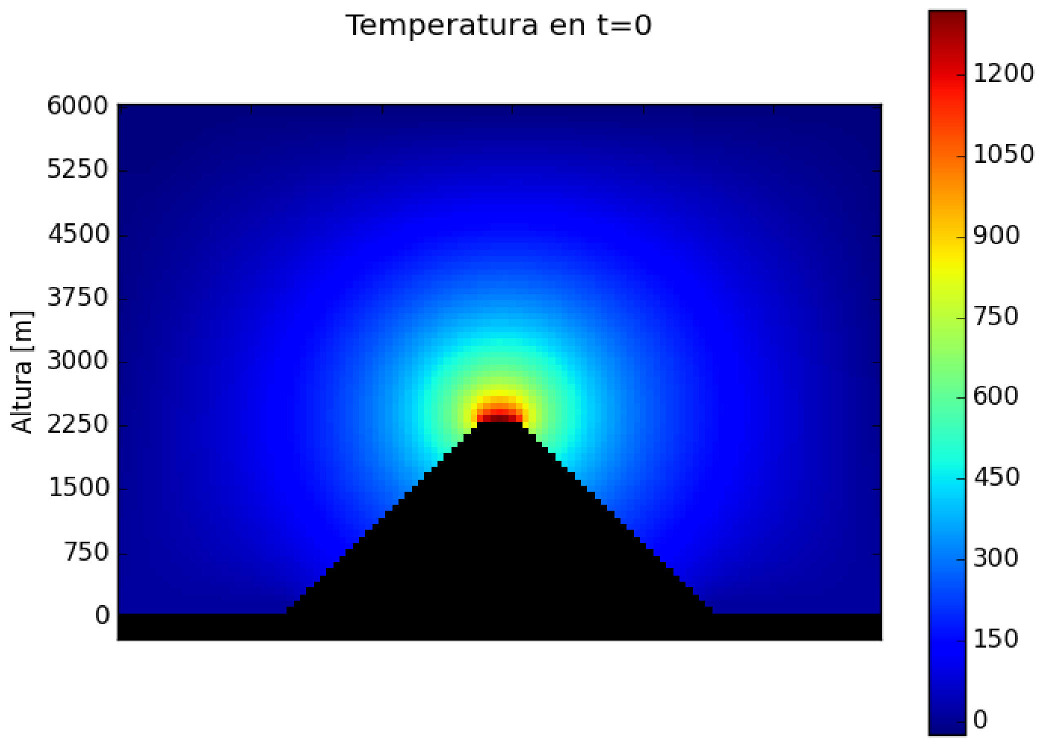
Sea luego la función auxiliar f la encargada de modificar cada punto $a[i][j]$ que toma por parámetro la referencia de a, las posiciones (i, j), el tiempo t, el ancho y el alto (m, n), el coeficiente de relajación ω y la posición del cráter pos_lava se tiene que el método iterativo en pseudocódigo es igual a :

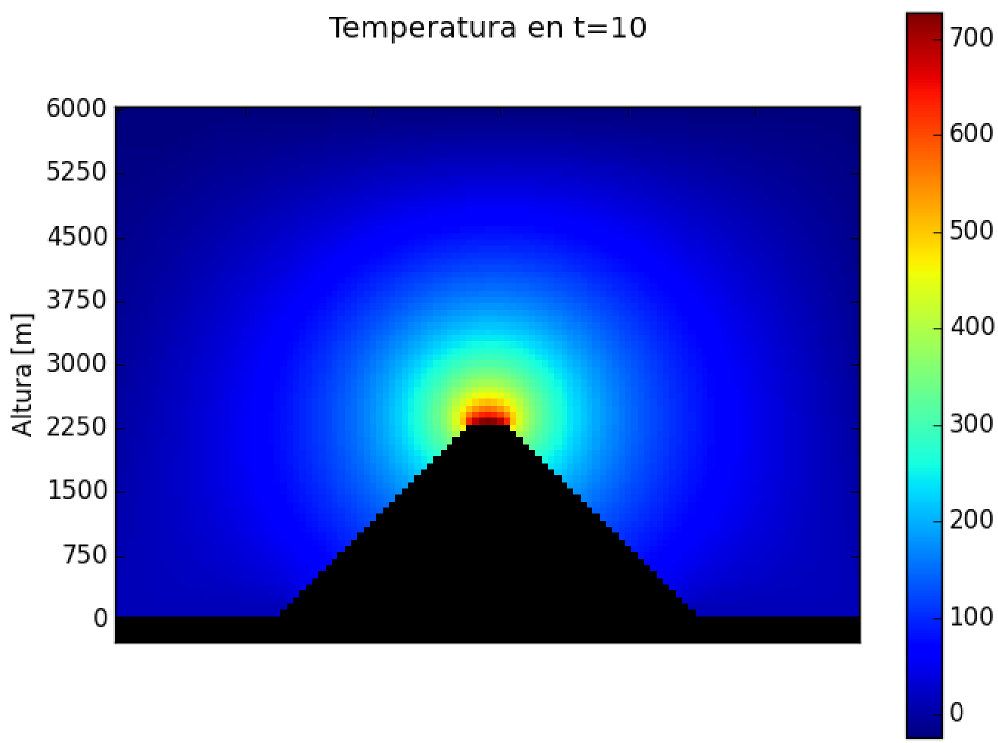
```
Iteraciones = 0
Máximo_iteraciones = 10000

While (iteraciones <= máximo_iteraciones){
      For (i=0 hasta n){
            For(j=0 hasta m){
                  (a[i][j],error)=f(a,i,j,error,t,w,m,n,pos_lava,h)
                  If (error < épsilon){
                        break
                  }
            }
      }
      *Imprimir porcentaje de avance*
}
```

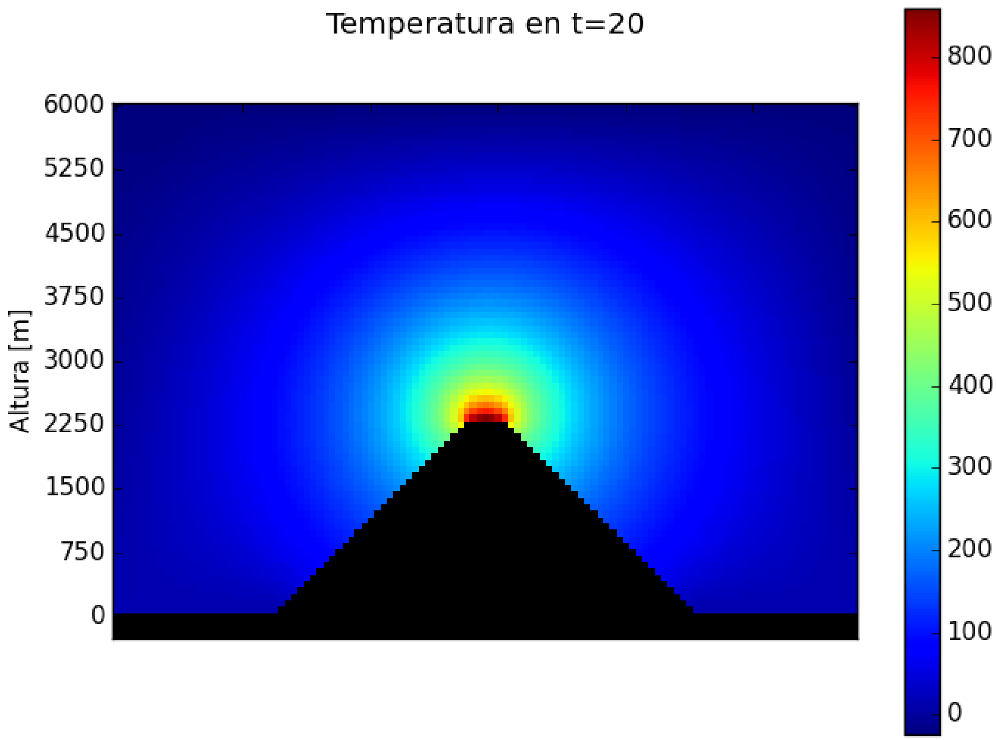
Finalmente tras el while se tiene que la matriz $a[i][j]$ es uniforme en su solución, por lo tanto se imprime usando la librería de Python $matplotlib$ usando funciones auxiliares que para el caso de este informe son irrelevantes.

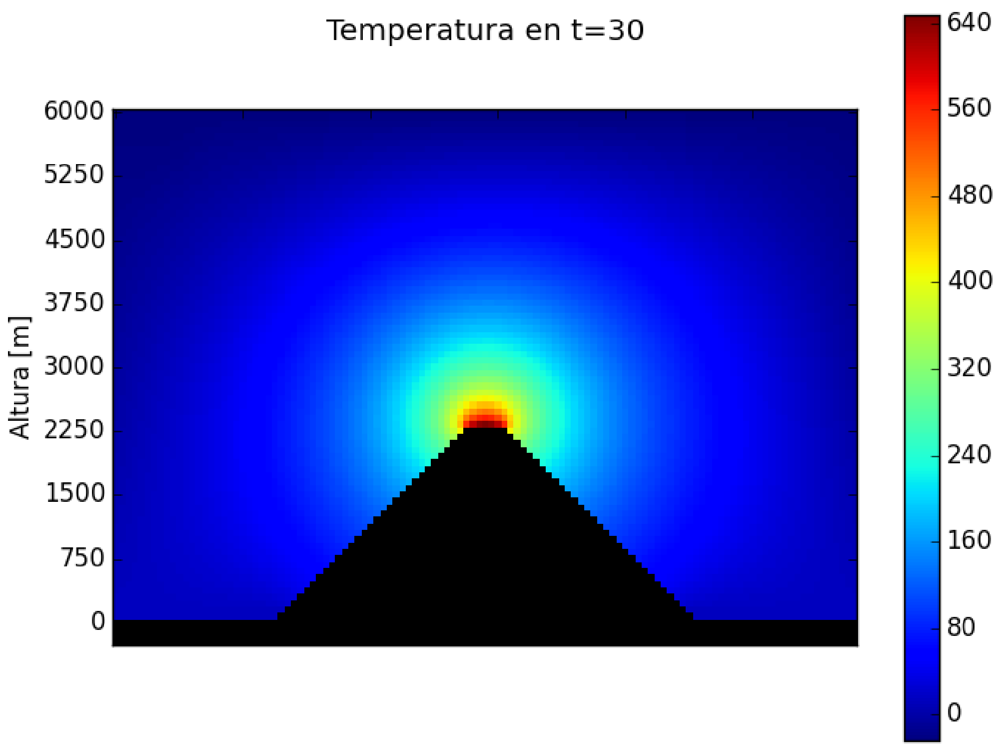
Resultados

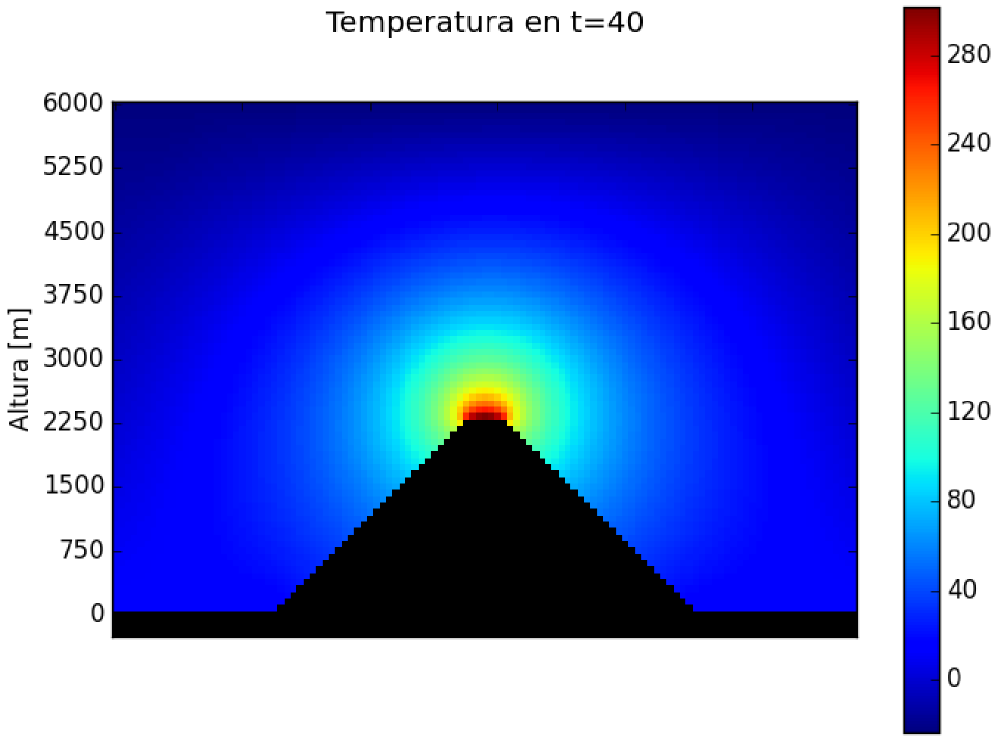
Para $h = 0.3$ y el siguiente arreglo de tiempos $t = \{0, 10, 20, 30, 40, 49\}$ se obtuvo los siguientes gráficos:

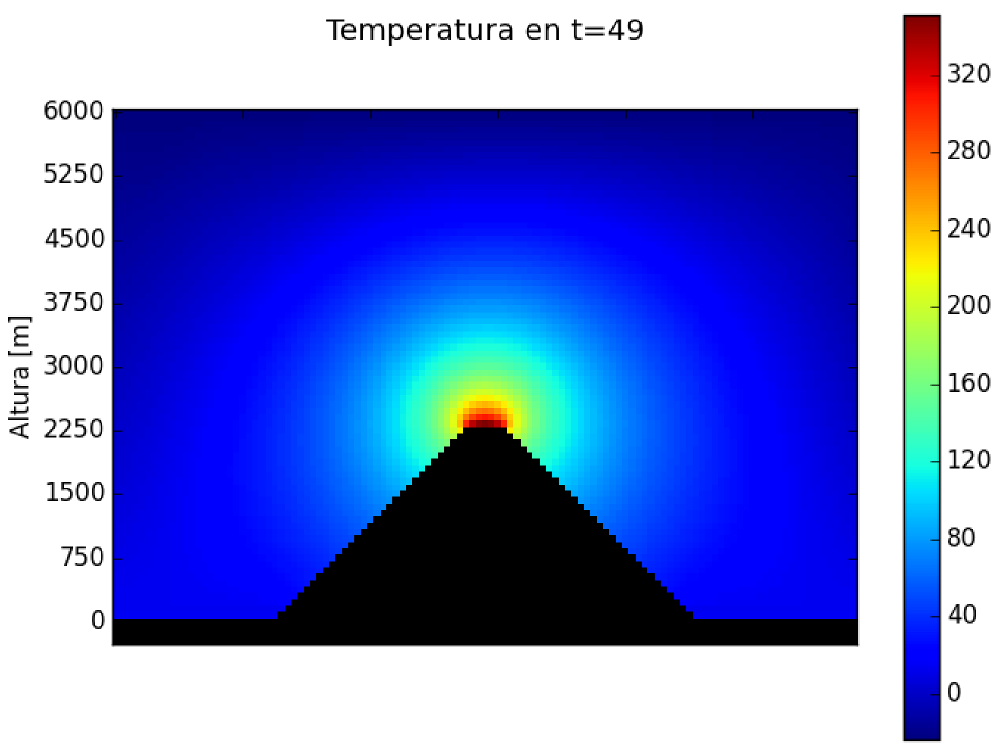




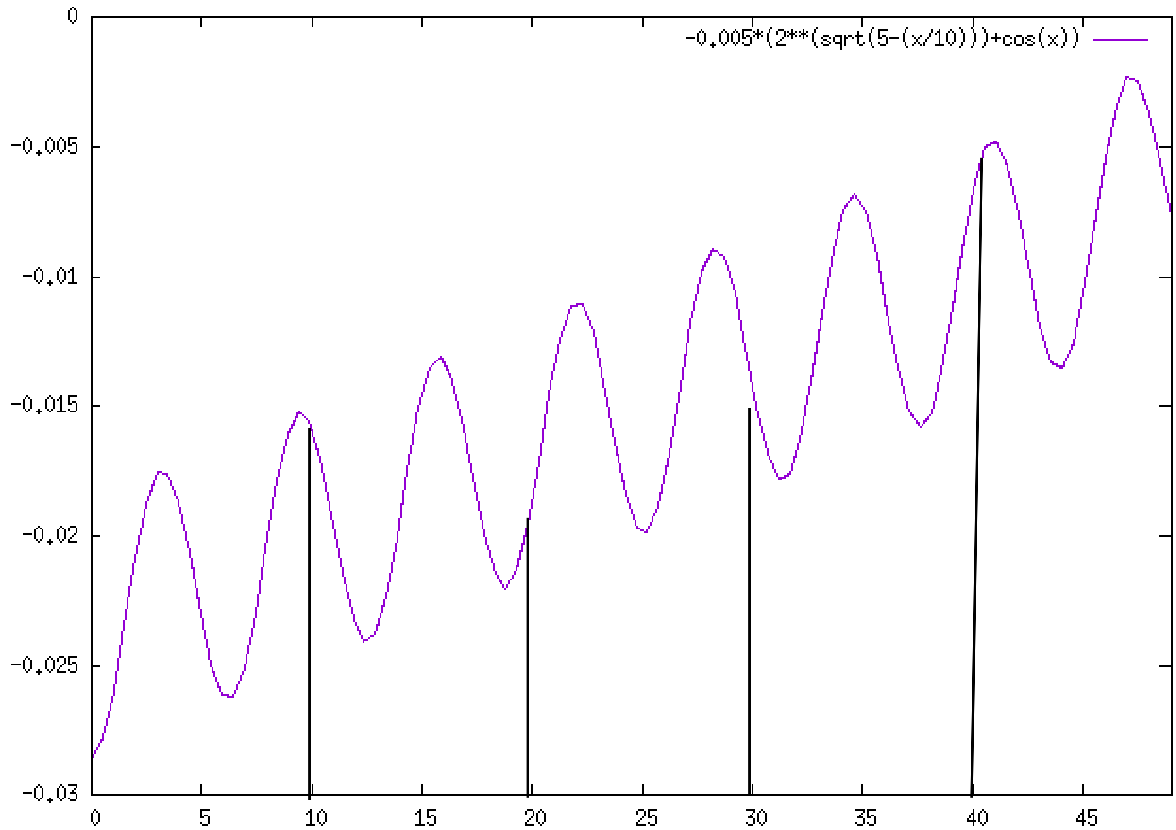

Temperatura en t=20
Altura [m]
6000
5250
4500
3750
3000
2250
1500
750
0
800
700
600
500
400
300
200
100
0


Temperatura en t=30
Altura [m]
6000
5250
4500
3750
3000
2250
1500
750
0
640
560
480
400
320
240
160
80
0


Temperatura en t=40
Altura [m]
6000
5250
4500
3750
3000
2250
1500
750
0
280
240
200
160
120
80
40
0

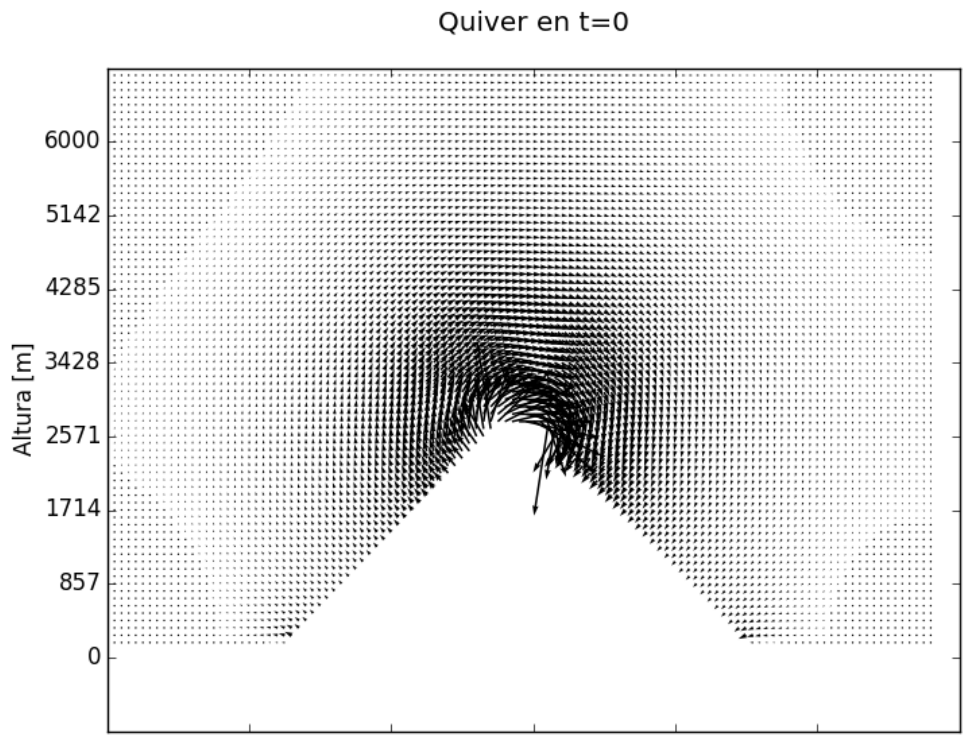

Temperatura en t=49
Altura [m]
6000
5250
4500
3750
3000
2250
1500
750
0
320
280
240
200
160
120
80
40
0

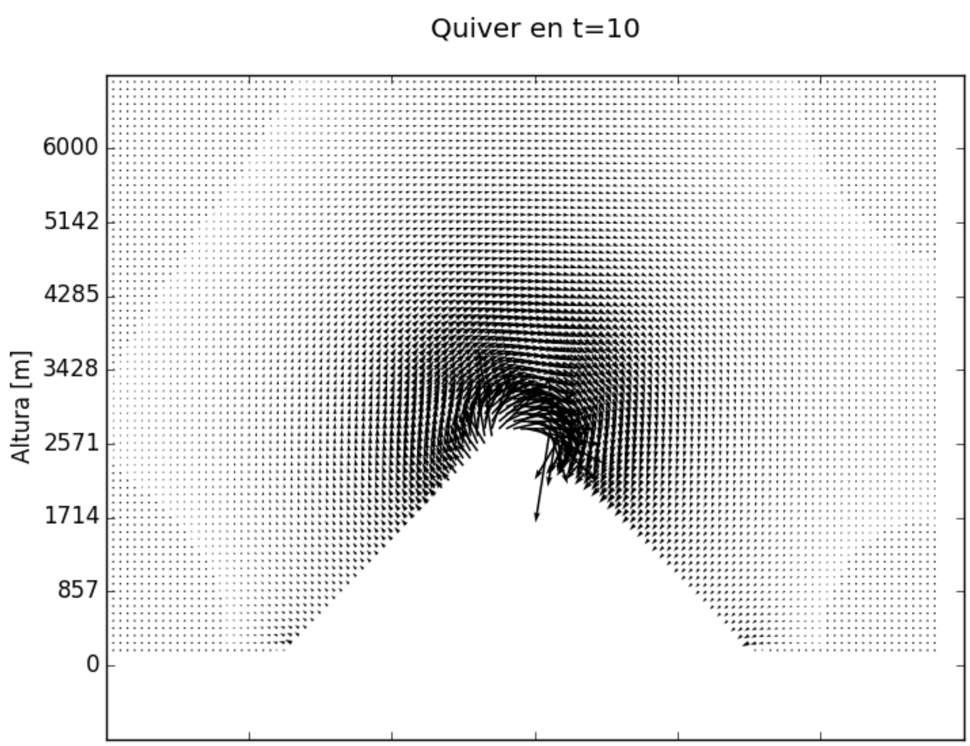
Una de las principales diferencias en los gráficos es la temperatura máxima alcanzada, *esta va disminuyendo conforme al tiempo* sin embargo esta disminución no es lineal, sino que viene dada por una relación sinusoidal proveniente de la forma con la que el flujo de calor fue definido:

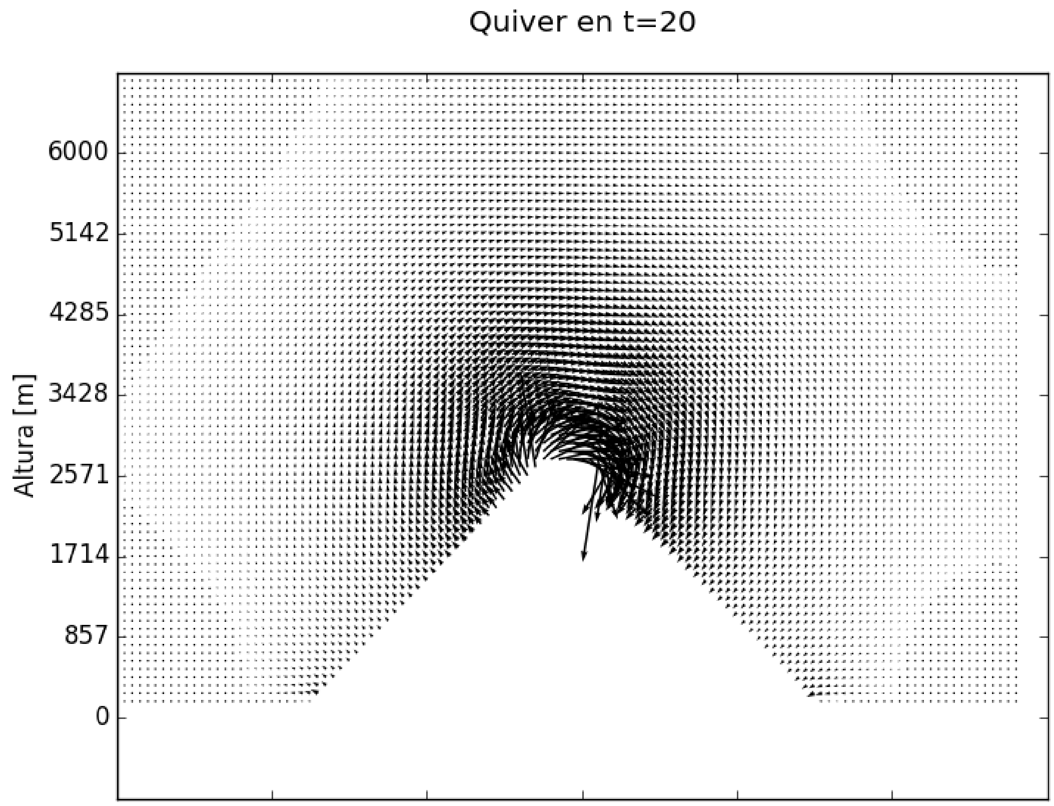


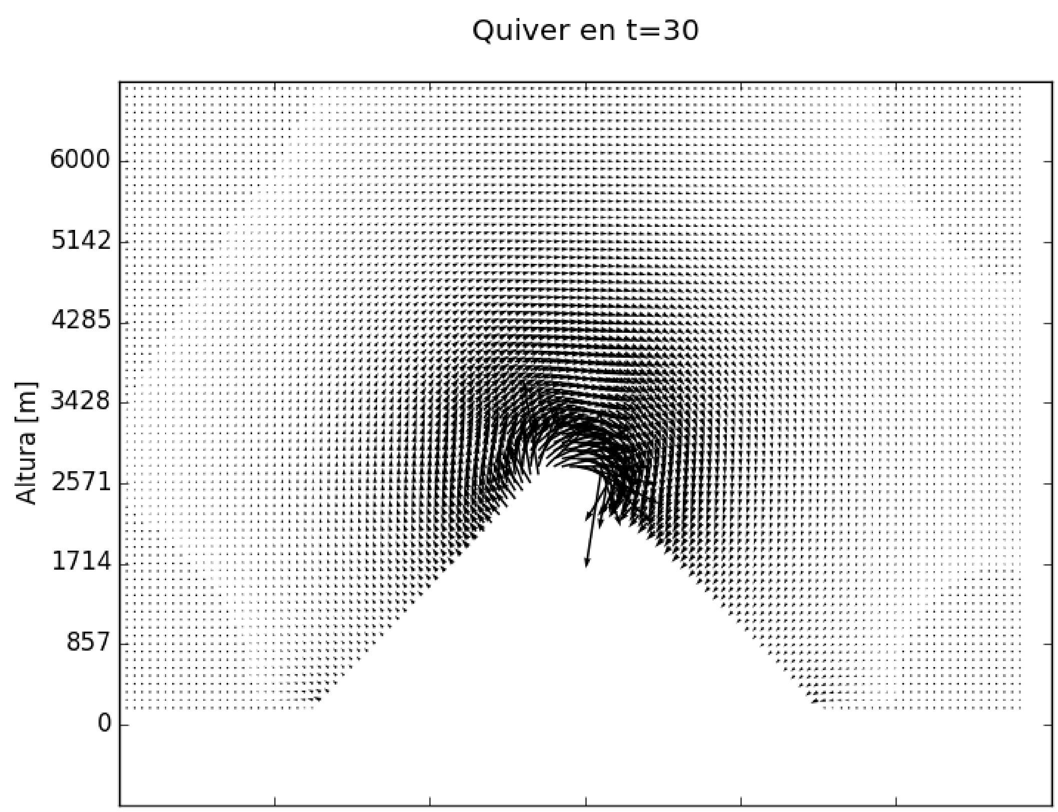
Se puede apreciar que si bien la variación de flujo va disminuyendo con respecto al tiempo esta disminución tiene “saltos y bajos”, por eso se tiene que la temperatura en t=20 sea mayor que en t=10 (o que en t=49 sea mayor que en t=40); Otra diferencia clara es que a medida que aumenta el tiempo el calor en la superficie es más uniforme: no existe tanta diferencia de temperaturas.

Adicionalmente se obtuvieron los siguientes gráficos Quiver:

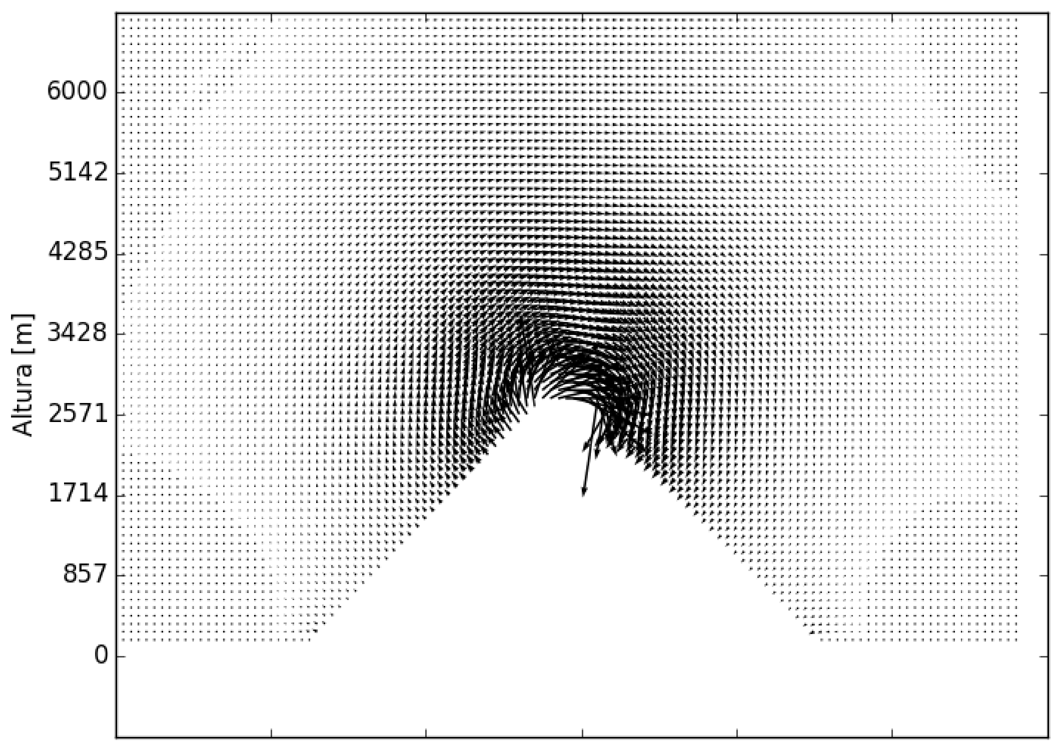




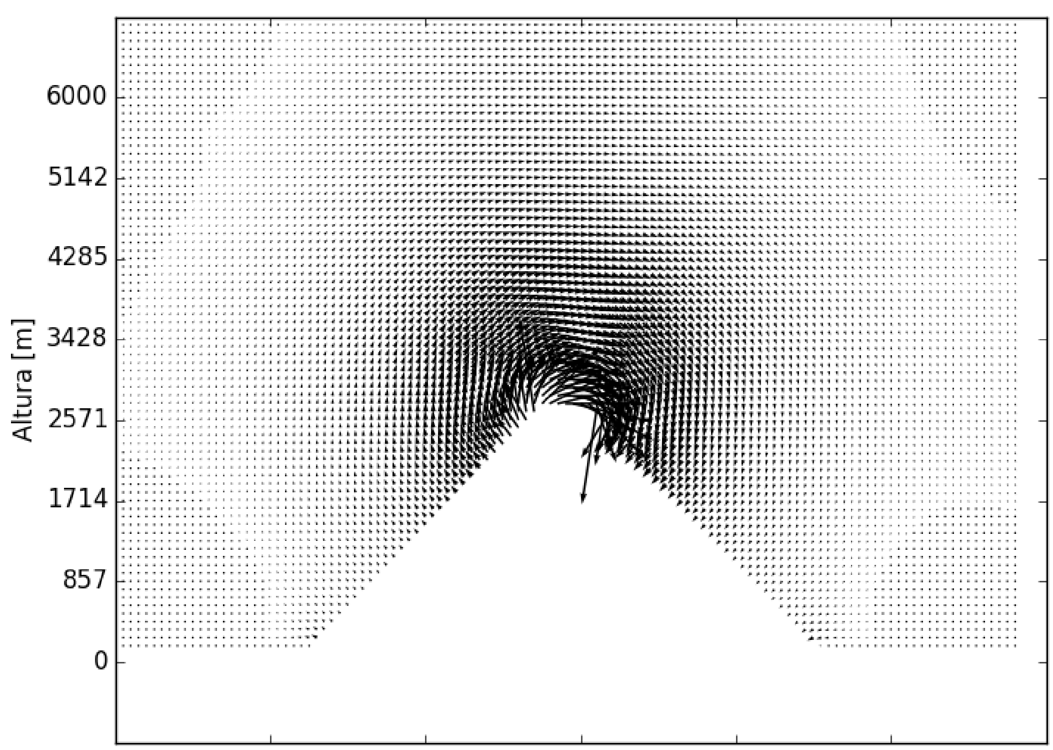

Quiver en t=20
Altura [m]
6000
5142
4285
3428
2571
1714
857
0


Quiver en t=30
Altura [m]
6000
5142
4285
3428
2571
1714
857
0

Quiver en t=40



Quiver en t=49



Respuestas

1) Estime una distancia segura para la aeronave

Suponiendo que un avión puede resistir temperaturas de 150-200 grados se tiene entonces que para el momento de la erupción el avión no debería descender de los 5000 metros altura por sobre el nivel terrestre, luego para $10 \leq t \leq 20$ el avión debería mantener una altura segura de 4000 metros. Para $t = 30$ el avión debería tener una altura mínima de 3700 metros, para $t \leq 40 \leq 49$ el avión debería tener una altura de 3000 metros.

Sin embargo, como ingeniero se debería dar siempre un mínimo con tal de que el avión siempre esté seguro, si es que no puede evitar el volcán (suponiendo que le quede poco combustible como para tener que realizar un trayecto mayor) entonces la altura mínima para cualquier caso debería ser de 5000 metros aunque el volcán ya se esté apagando. Además hay que considerar que los volcanes no solo producen calor sino que además producen material particulado dañino para los motores y para las personas.

2) ¿Cómo modelaría el flujo de lava por la corteza del volcán? Explique sus consecuencias.

Si adicionalmente se tuviera que modelar el flujo del volcán entonces procedería de la siguiente manera: Para cada instante de tiempo mayor a 0 se tendría que considerar hasta un cierto punto, que la ladera del volcán también tiene una condición de borde de Neumann no nula (dado que hay lava escurriendo ahí). Como invariante se tiene que para cada instante de tiempo el largo de dicha condición va creciendo con el tiempo y que para cada tiempo $t_i, v(t_{i+1}) < v(t_i)$, ello quiere decir que la velocidad del flujo va disminuyendo con el paso del tiempo.

Lo anterior se puede realizar manteniendo una variable que indique la posición de la lava en el tiempo anterior, dicha posición corresponderá a dos pares (g, h) y (k, l) en donde cada par apuntará a un punto de cada ladera del volcán en donde se encuentra la lava, luego la condición de borde de Neumann no nulo se comprobará de la siguiente manera:

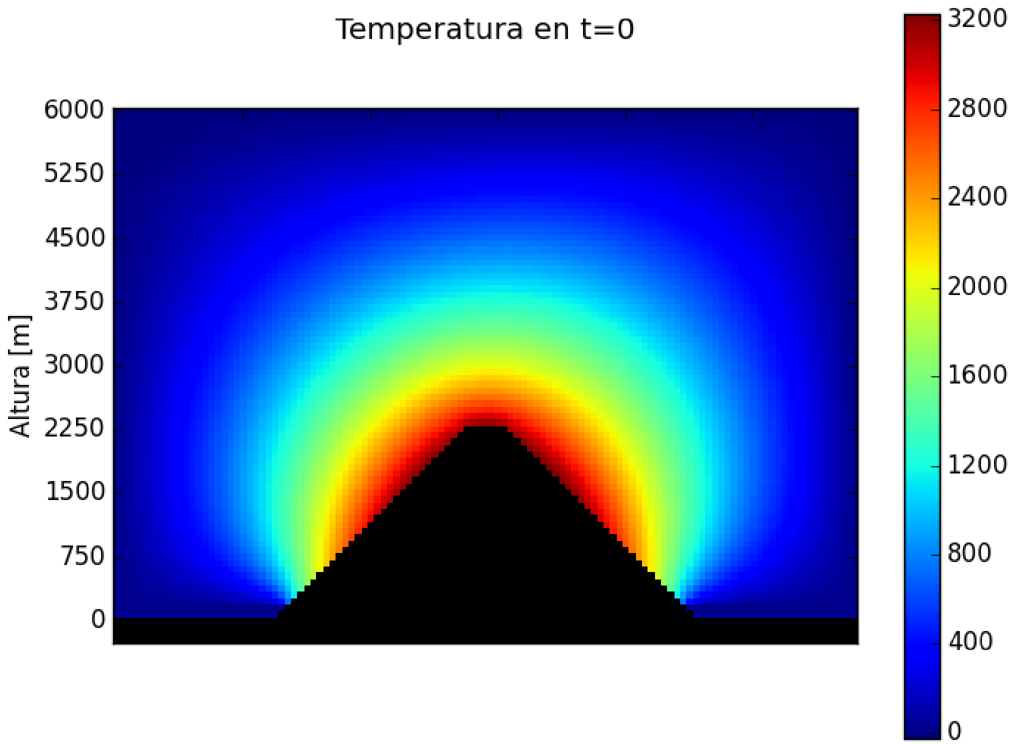
$a[i][j]$ Es Neumann no nulo si:

- $0 < i < n \wedge 0 < j < m$, n es el alto de la matriz, m es el ancho de la matriz.
- $nearNan(i, j)$.
- $g \leq i \leq k \wedge h \leq j \leq l$

Para representar el desplazamiento de la lava se puede considerar una velocidad de desplazamiento inicial v y un coeficiente de desaceleración η los cuales deben ser estudiados previamente. Luego para cada par anterior $(g, h)\ y\ (k, l)$ se tiene lo siguiente:

$$v = v - \eta \Delta t$$
$$(g, h) = (g - v\Delta t, h - v\Delta t)$$
$$(k, l) = (k - v\Delta \mathrm{t}, l + v\Delta \mathrm{t})$$

Una potencial consecuencia de lo anterior es que ahora mayor cantidad de atmósfera se verá involucrada en flujo de calor de la lava, por lo tanto la temperatura atmosférica total aumentará considerablemente en las zonas circundantes a las laderas del volcán. Además la temperatura máxima aumentaría debido a una mayor región de contacto. Una situación hipotética en que toda la ladera del volcán se encuentra con magma se podría visualizar de la siguiente manera:



Como se puede apreciar bajo las mismas condiciones que en los gráficos anteriores al tener un volcán completamente cubierto de magma se ve que las temperaturas máximas subieron casi en un factor de 2.5