Звіт з предмету
Алгоритми та аналіз складності
Пустовіта Дмитра
КА-32

1. Умова Задачі (Варіант 16)

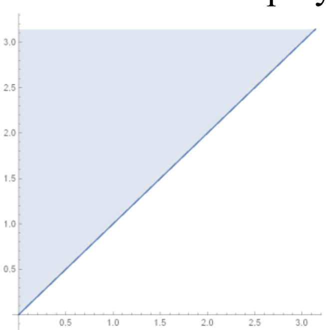
Обчислити інтеграл

√76. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy$, де область D обмежена прямими $x=0$, $y=\pi$, $y=x$.

Методом Монте-Карло.

2. Математичне розв’язання задачі

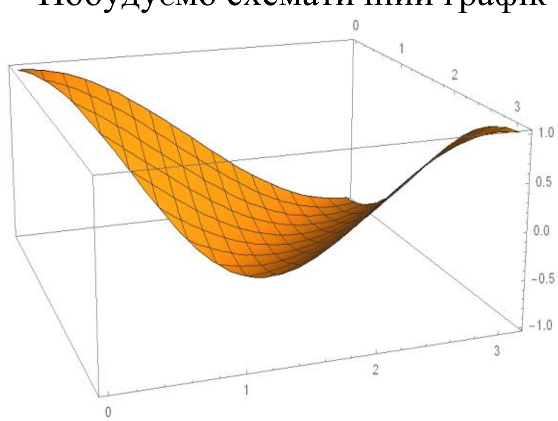
Обчислимо спершу цей інтеграл вручну:

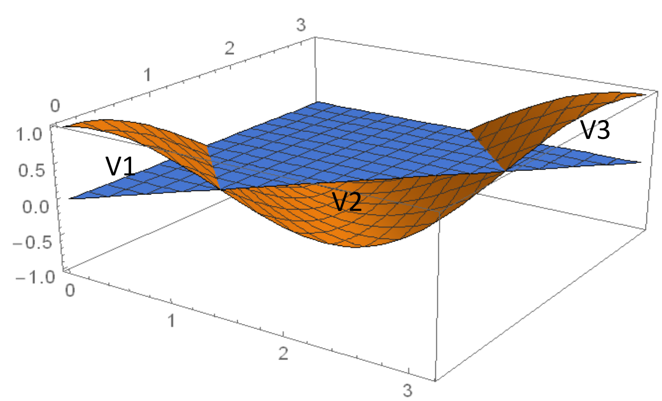


$$\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_x^{\pi} \cos(x+y)\,dy = \int_0^{\pi} \sin(x+y)|_x^{\pi} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x+\pi)dx - \int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx = -cos2\pi + cos\pi + \frac{1}{2}cos2\pi - \frac{1}{2}cos0 = -1 - 1 = -2$$

Побудуємо схематичний графік функції $f(x,y) = \cos(x+y)$ в області D





Подвійний інтеграл від функції f можна звести до потрійного по 1.

$$\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy = \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_x^{\pi} dy \int\limits_0^{\cos(x+y)} dz = 2V1 - V2$$

Тобто потрібно обчислити об'єми трьох фігур, два з яких є рівними.

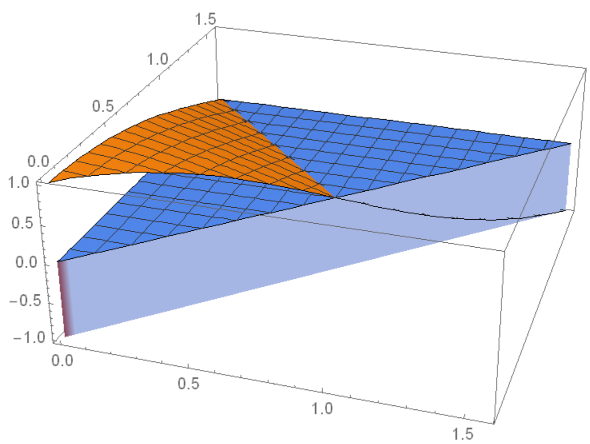
Об'єм V1:

Обмежимо V1 ззовні кубом T1 та зсередини пірамідою T2. Знайдемо рівняння прямих, що лежать на перетині z=cos(x+y) та площини XoY.

$$Cos(x+y) = 0 \quad \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

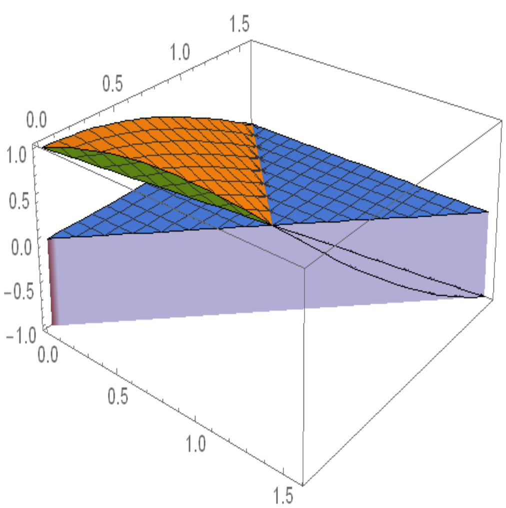
Так як в області D $0 \le x + y \le 2\pi$ маємо

$0 \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le 2\pi$, тобто k=0, або k=1. Та відповідно 2 прямі: $\begin{cases} z = 0 \\ y = \frac{\pi}{2} - x \\ x = x \end{cases}$ та $\begin{cases} z = 0 \\ y = \frac{3\pi}{2} - x \\ x = x \end{cases}$.



Кубом T1 візьмемо паралелепіпед : $\begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$

А піраміду T2 побудуємо на площині що буде січною до $Cos(x+y) = z$ в точках $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{Bmatrix}$ та $\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$, та площинами x=0, x=y.



Рівняння цієї площини через 3 точки:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} & -1 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$z = 1 - \frac{2}{\pi}(x+y) < \cos(x+y)\text{, за рахунок опуклості косинуса.}$$

Маємо тепер $V(T1) = \frac{\pi^2}{8} \approx 1.2337$

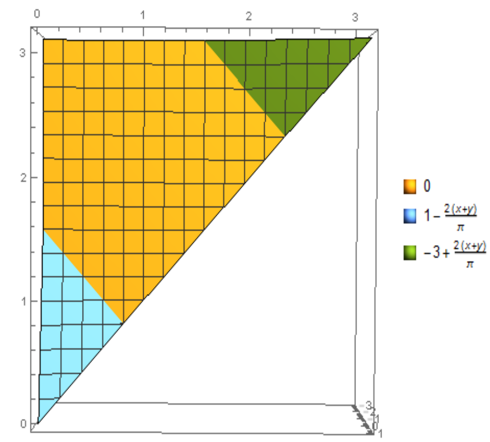
$$V(T2) = \frac{\pi^2}{16} \times \frac{1}{3} = \frac{\pi^2}{48} \approx 0.205617$$

Скориставшись програмою отримаємо що з рівнем надійності 0.95

$$0.288543 - 0.0081 \leq V_1 \leq 0.288543 + 0.0081$$

Об'єм V2:

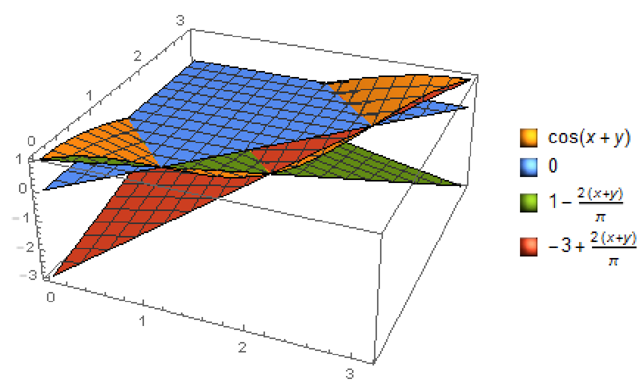
Обмежимо V2 ззовні кубом L1 та зсередини призмою L2.



Кубом L1 візьмемо паралелепіпед :$\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi \\ -1 \leq z \leq 0 \end{cases}$

Призма L2 обмежена

- Площиною x=y
- Площиною $-3 + \frac{2}{\pi}(x+y)$
- Площиною $1 - \frac{2}{\pi}(x+y)$
- Площиною $y - x = \frac{\pi}{\sqrt{8}}$
- Площиною z=0;



$$V(L1) = \pi^2 \approx 9.8696$$

$$V(L2) = \frac{\pi}{\sqrt{8}} * \frac{1}{2} * \left(\pi\sqrt{2} - 2\frac{\pi}{\sqrt{8}}\right) * 1 = \frac{\pi^2}{8} \approx 1.2337$$

Скориставшись програмою отримаємо що з рівнем надійності 0.95

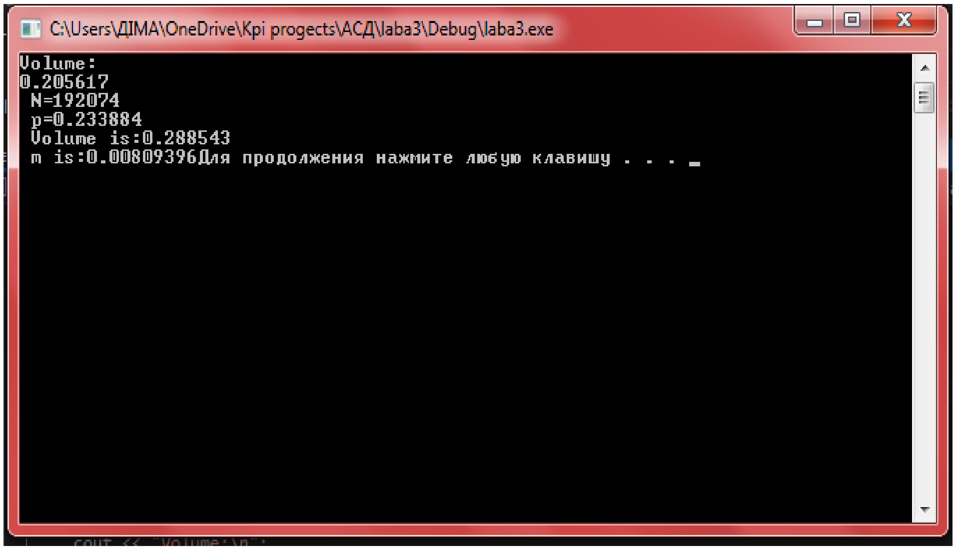
$$2.56486 - 0.00638 \leq V_2 \leq 2.56486 + 0.00638$$

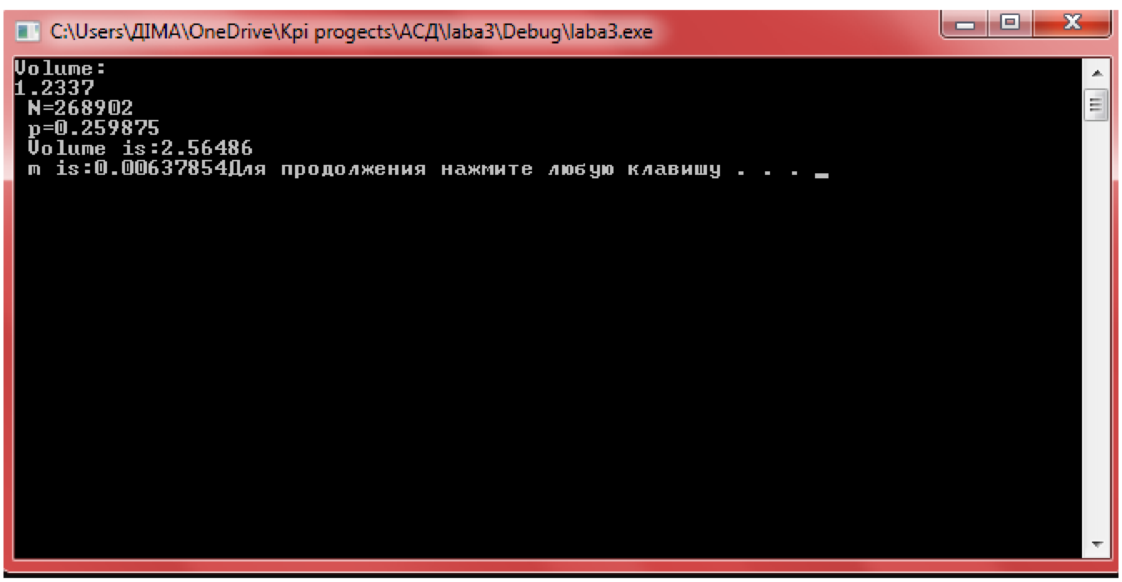
Тобто остаточно отримуємо:

$$-1.98777 - 0.02258 \geq V_1 - 2V_2 \geq -1.98777 + 0.02258$$

$$-1.69519 \geq V_1 - 2V_2 \geq -2.01035$$

3. Результати роботи:





4. Код програми

```
// laba3.cpp : Defines the entry point for the console application.
//

#include "stdafx.h"
#include <iostream>
#include <fstream>
#include "Interval.h"
#include "Distributions.h"
#include <time.h>
#define _USE_MATH_DEFINES
#include <math.h>
#define alfa 0.475
#define m 0.01
#define w 300
#define eps 0.000001

using namespace std;

int getN(double p, double *t){
	double x = 0, f, h = 1;
	//Laplas(t)=alfa/2
```

```
	do{
		do{
			*t = I::Laplas(x);
			x += h;
		} while (((h>0) && (*t<alfa)) ||
((h<0) && (*t>alfa)));
		if (h > 0) f = x;
		else if (fabs(x - f) < eps) break;
		h *= -0.5;
	} while (true);
	*t = (x + f) / 2;
	//(*t) = 1.96;
	return (int)(pow((*t),2)*(1-
p)/(pow(m,2)*p))+1;
}

double f(double x, double y){
	return cos(x + y);
}

bool inD1(double x, double y){
	if ((x< M_PI / 4) && (y < M_PI / 2 - x))
return 1;
	return 0;
}

bool inD3(double x, double y){
	if ((y> 3*M_PI/4) && (y > 3*M_PI / 2 - x))
return 1;
	return 0;
}

bool inD2(double x, double y){
	if (inD1(x,y)) return 0;
	if (inD3(x,y)) return 0;
	return 1;
}

int getK(int N, double *Tx, double* Ty, double* Tz,
bool Up){
	srand(time(NULL));
	int k = 0;
	double x, y, z;
	do{
		x = Tx[0] + (Tx[1] - Tx[0])*(rand() %
w) / w;
		y = Ty[0] + (Ty[1] - Ty[0])*(rand() %
w) / w;
		z = Tz[0] + (Tz[1] - Tz[0])*(rand() %
w) / w;
		if(y>x)
		if (Up)
		{
			if (inD1(x, y)&&(z < f(x, y)))
k++;
		}
		else if (inD2(x, y)&&(z > f(x, y)))
k++;
	} while (--N>0);
	return k;
}
double getM(double z, int N, double p){
	return z*pow((1 - p) /( p*N), 0.5);
}

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
	double *x = new double[2], *y = new double[2],
*z = new double[2];
	ifstream fin("in2.txt");
	double t;
	for (int i = 0; i < 2; i++) fin >> x[i];
	for (int i = 0; i < 2; i++) fin >> y[i];
	for (int i = 0; i < 2; i++) fin >> z[i];
	double v1, v2;
	cout << "Volume:\n";
	cin >> v2;
	v1 = (x[1] - x[0])*(y[1] - y[0])*(z[1] -
z[0]);
	int N = getN(v2 / v1,&t);
	int K = getK(N, x, y, z, 0);
	cout << " N=" << N << "\n p=" << (double)K / N
<< "\n Volume is:" << v1*K / N << "\n m is:" <<
getM(t, N, (double)K / N);
	system("Pause");
	return 0;
}
```

5. Висновок

Методом Монте-Карло було отримано що на рівні значущості 0.95 можна вважати що значення шуканого інтеграла лежить на відрізку $[-1.69519; -2.01035]$