МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Лабораторна робота №2

з курсу «Чисельні методи»

Тема: Задача Коші

Варіант 16

Виконав: студент 3 курсу
групи КА-32
Пустовіт Д.Т.

Прийняв:
Коновалюк М.М.

Київ – 2015

Завдання:

1. Методами Рунге-Кутта четвертого порядку та Адамса четвертого порядку розв'язати задачу Коші

$$y' = f(x, y);$$
$$y(x_0) = y_0;$$

на відрізку $[x_0; x_0 + 1]$ з кроком h.

На початку інтервалу у необхідній кількості точок значення для методу Адамса визначити методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

2. Дослідити залежність помилки обох методів від кроку дискретизації h. Для цього розв'яжіть задачу Коші, розбиваючи інтервал розв'язання $[x_0; x_0 + 1]$ на різні кількості відрізків, щоразу фіксуючи середню або максимальну помилку.

2.16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

Математичний розв'язок задачі:

Метод Рунге-Кутти

Розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь довільного порядку, що записується у векторній формі як

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0.$$

Тоді значення невідомої функції в точці x_{n+1} обчислюється відносно значення в попередній точці x_n за формулою:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),$$
$$x_{n+1} = x_n + h$$

де h — крок інтегрування, а коефіцієнти $\mathbf{k}_n$ розраховуються таким чином:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n),$$
$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right),$$
$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right),$$
$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_3).$$

Це метод 4-го порядку, тобто похибка на кожному кроці становить $O(h^5)$, а сумарна похибка на кінцевому інтервалі інтегрування є величиною $O(h^4)$.

Метод Адамса

У методі Адамса значення наближеного розв'язку обчислюються за формулою:

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h\left(\frac{3}{8}f(t_{n+3}, y_{n+3}) + \frac{19}{24}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{5}{24}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{24}f(t_n, y_n)\right)$$

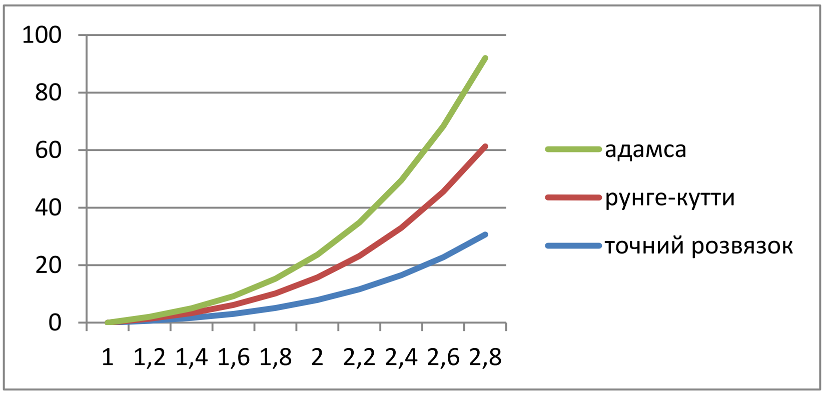
Лістинг:

```
// ZadKoshi.cpp : Defines the entry point for the console application.
//

#include "stdafx.h"
#include <cmath>
#include <iostream>
#include <fstream>

using namespace std;

#define X0 1
#define Y0 0

inline double f(double x, double y){
	return 3 * pow(1 + pow(y / x, 2), 1 / 2.0) + y / x;
}

inline double ansv(double x){
	return (pow(x, 6) - 1) / (2 * x * x);
}

void err(double *y, double h, int n,double x0){
	ofstream stm("error.txt", ios_base::app);
	double s = 0,t=abs(ansv(x0) - y[0]);
	stm << "err(" << x0 << ") = " << t << endl;
	for (int i = 1; i < n; i++){
		x0 += h;
		t = abs(ansv(x0) - y[i]);
		stm << "err(" <<x0 << ") = "<<t<<endl;
	}
}

void runge_kut(double* y, double h,double x,int n){
	double k1, k2, k3, k4;
	for (int i = 0; i < n-1;i++){
		k1 = f(x, y[i]);
		k2 = f(x + h / 2.0, y[i] + h* k1 / 2.0 );
		k3 = f(x + h / 2.0, y[i] + h* k2 / 2.0 );
		k4 = f(x + h, y[i] + h*k3);
		x += h;
		y[i + 1] = y[i] + h*(k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6.0;
	}
}
void adams(double* y, double h, double x, int n){
	for (int i = 0; i < n-3; i++){
		y[i + 3] = y[i+2]+h*(3*f(x+3*h,y[i+3])/8.0+19*f(x+2*h,y[i+2])/24.0-5*f(x+h,y[i+1])/24.0+f(x,y[i])/24.0);
		x += h;
	}
}

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
	int n;
	double h, x = X0;
	cin >> n >> h;
	double *y = new double[n];
	y[0] = Y0;
	runge_kut(y,h,x,n);
	err(y, h, n, x);
	adams(y, h, x, n);
	err(y, h, n, x);
	system("Pause");
	return 0;
}
```

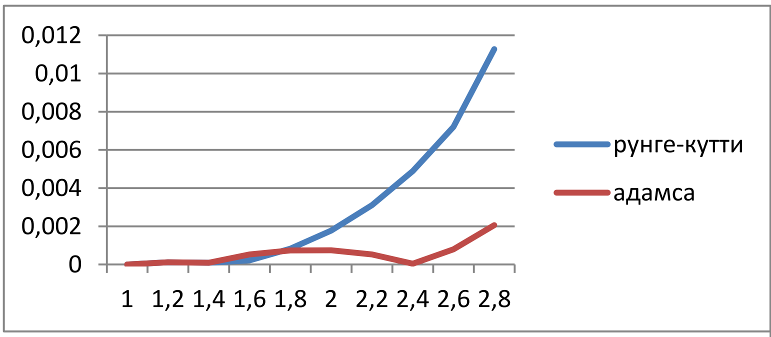
Результати роботи(для h=0.2; n=10)

Метод Рунге-Кутти:
err(1) = 0
err(1.2) = 0.000113713
err(1.4) = 9.27227e-005
err(1.6) = 0.000215587
err(1.8) = 0.000829724
err(2) = 0.00177801
err(2.2) = 0.00311046
err(2.4) = 0.00489291
err(2.6) = 0.00720285
err(2.8) = 0.0101272

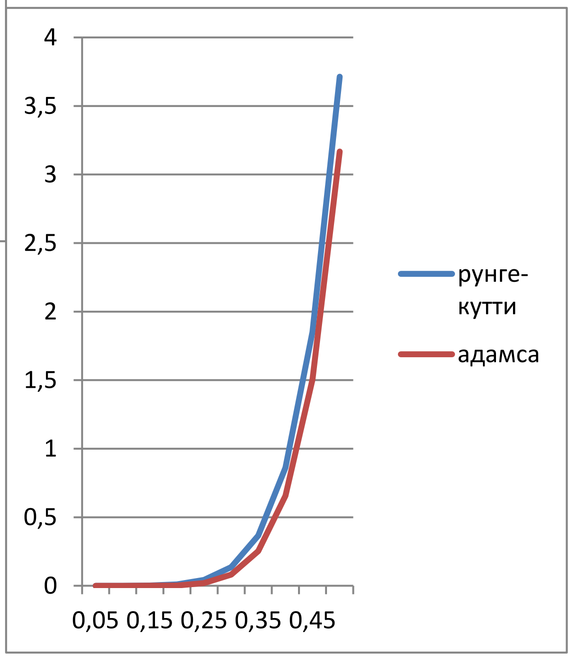
Метод Адамса:
err(1) = 0
err(1.2) = 0.000113713
err(1.4) = 9.27227e-005
err(1.6) = 0.000523768
err(1.8) = 0.000736166
err(2) = 0.000742887
err(2.2) = 0.000529908
err(2.4) = 4.16449e-005
err(2.6) = 0.000793845
err(2.8) = 0.00205832



x	точний розвязок	рунге-кутти	адамса
1	0	0	0
1,2	0,689578	0,689691	0,689691
1,4	1,6657	1,66579	1,66579
1,6	3,08149	3,08127	3,08201
1,8	5,09448	5,09	5,09522
2	7,875	7,87322	7,87574
2,2	11,6095	11,6064	11,61
2,4	16,502	16,4971	16,502
2,6	22,7748	22,7676	22,774
2,8	30,669	30,6589	30,667



h	рунге-кутти	адамса
0,05	6,016E-07	8,17523E-06
0,1	9,71881E-06	0,000152031
0,15	0,00154587	0,000479908
0,2	0,0101272	0,00205832
0,25	0,0425995	0,0189537
0,3	0,136579	0,0810106
0,35	0,365369	0,252857
0,4	0,861477	0,656582
0,45	1,85292	1,505805
0,5	3,71414	3,16783



Висновок:

Працюючи над лабораторною роботою, я навчився задачу Коші методами Рунге Кутти та Адамса.