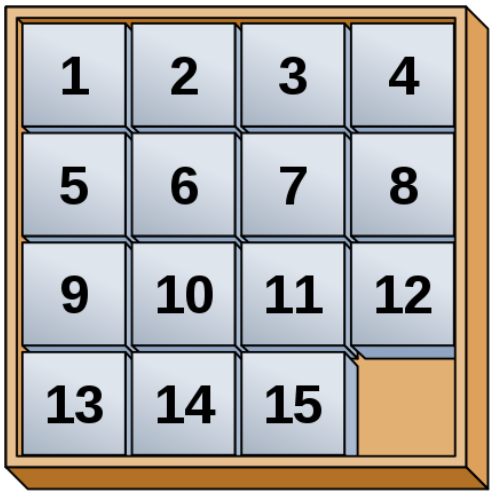
INSA | INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN NORMANDIE

Contraintes et Programmation Logique

Le Jeu du Taquin



Quentin LOISEAU
Rand ASSWAD
Génie Mathématique

A l'attentien de :
M. Habib ABDULRAB

Table des matières

1 Introduction

1.1 Principe du jeu

- Se joue sur un carré (n, n).
- A chaque état : déplacement d'une tuile d'une case
- 4 possibilités maximum : droite, gauche, bas, haut

1.2 Formulation du problème

1.3 Complexité

- Le problème est NP-difficile
- L'espace d'état est de taille $n^2!$.
- Pour $n = 3$, la taille est 362880.

2 Algorithmes

Ils existent de nombreux algorithmes pour la recherche d'un chemin dans un graphe, nous avons implémentés quelques algorithmes qui correspondent bien à notre problème et qui s'adaptent bien aux principes de la programmation logique.

2.1 Depth-First Search (DFS)

L'algorithme de parcours en profondeur (DFS) est un algorithme complet permettant de trouver un chemin dans un graphe.

Cette algorithme est le principe *inné* de **prolog** de l'arbre de résolution.

L'implémentation de DFS dans un arbre se fait simplement par le code

```
dfs(Etat, [Etat]) :- final(Etat).
dfs(E1, [E1|Chemin]) :-
    adjacent(E1, E2),
    dfs(E2, Chemin).
```

On obtient notre chemin par la requête

```
?- dfs([EtatInitial], Chemin).
```

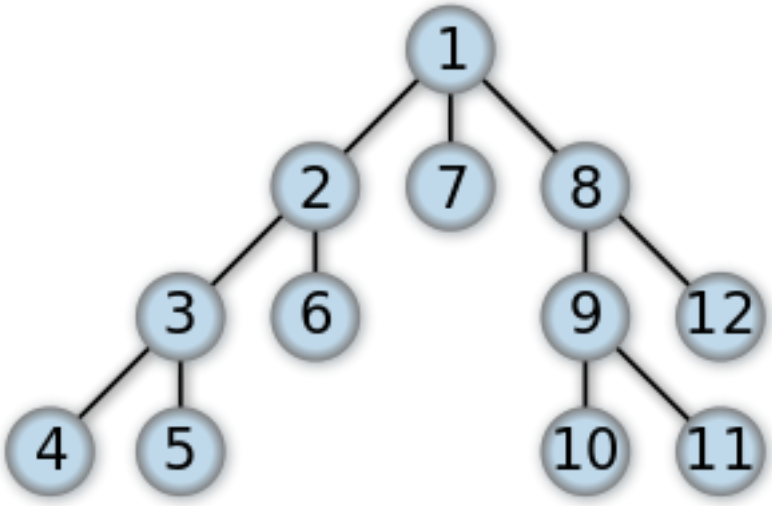


FIGURE 1 – L'ordre de parcours des nœuds dans l'algorithme DFS

Néanmoins, cet algorithme ne fonctionne pas pour la plupart des puzzles; il parcourt en profondeur donc il prendra toujours le premier adjacent de `E1` jusqu'à ce que le dernier `E1` n'a plus d'adjacents, et puis tentera le deuxième adjcent du `E1` précedant, et ainsi suite... sauf que dans le jeu du taquin *il y a toujours au moins 2 adjacents!* le programme est donc infiniment récursif.

Si on suppose que le prédicat `adjacent/2` est défini par

```
adjacent(A, B) :- adjacent(A, B, gauche).
adjacent(A, B) :- adjacent(A, B, droite).
adjacent(A, B) :- adjacent(A, B, haut).
adjacent(A, B) :- adjacent(A, B, bas).
```

L'arbre de résolution de prolog dépend de l'ordre de définition des prédicats, il tentera les adjacents dans l'ordre (gauche, droite, haut, bas) donc pour l'état suivant qui est adjacent au but, il modulera entre ces deux états jusqu'à ce qu'il na plus de mémoire.

```
1 2 3       1 2 3       1 2 3       1 2 3       1 2 3
4 5         4 5         4   5       4 5         4   5
7 8 6       7 8 6       7 8 6       7 8 6       7 8 6       ...
```

Il est donc nécessaire d'interdire de prendre un adjacent `E2` déjà visité. Or, un nouveau problème s'introduit:

```
1 2 3       1 2 3       1 2 3       1 2 3       1 2 3
4 5         4 5           4 5       7 4 5       7 4 5
7 8 6       7 8 6       7 8 6         8 6       8   6       ...
```

Nous avons testé cet algorithme avec cette configuration, il fait 27 mouvements afin d'arriver au but ! Théoriquement, il trouvera toujours un chemin, mais en pratique pour la plupart des configurations le overflow arrive avant de trouver une solution.

D'où la nécessité de prendre des décisions informées, nous allons ainsi introduire la notion d'**heuristique**.

2.2 Heuristiques

Une **fonction heuristique** sur un graphe est une fonction $h : E \to \mathbb{N}$ où E est l'espace d'états du problème, $h(n)$ représente le coût estimé pour arriver au but à partir du nœud n.

On appelle **heuristique admissible** une heuristique h telle que

$$\forall n \in E, h(n) \leq h^*(n)$$

où $h^*(n)$ est le vrai coût minimal pour arriver au but à partir du nœud n (dite l'*heuristique parfaite*).

Trivialement, l'heuristique nulle est admissible mais elle ne rajoute aucune valeur à la résolution du graphe.

(Wikipedia contributors 2018)

Nous allons introduire deux heuristiques qu'on a utilisé dans nos algorithmes.

2.2.1 Distance de Hamming

La distance de Hamming est définie pour deux listes (ou mots) de même taille par le nombre de valeurs qui diffèrent entre ces deux listes.

Soit mathématiquement, avec A l'ensemble des atoms (ou alphabet)

$$d_{\text{Hamming}} : A^n \times A^n \to \mathbb{N}$$
$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (1 - \delta_{x[i],y[i]}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x[i] = y[i] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans notre contexte, on ne prend pas en compte de la case vide dans ce calcul.

L'heuristique de Hamming est donc la distance de Hamming entre le tableau du nœud n et le nœud final. Cette heuristique est admissible.

2.2.2 Distance de Manhattan

La distance de Manhattan est la distance L_1 dans les espaces de Banach. Soit V un espace de Banach de dimension n.

$$d_1 : V \times V \to \mathbb{R}_+$$
$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Dans notre contexte, la distance est définie sur $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ et ne prend pas en compte de la case vide.

De même, l'heuristique de Manhattan est la distance entre le nœud n et le nœud final. Cette heuristique est admissible.

État n			Final		
8	1	3	1	2	3
4		2	4	5	6
7	6	5	7	8	

Heuristique	Hamming								Manhattan								h^*
Tuile	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	
Distance	1	1	0	0	1	1	0	1	1	2	0	0	2	2	0	3	
Total	5								10								14

FIGURE 2 – Heuristiques de Hamming et de Manhattan

2.3 Algorithme Greedy

Dans le cas du jeu du taquin, l'algorithme de Greedy est un algorithme d'optimisation locale; lorsqu'il faut faire un choix parmi une liste d'adjacents il prend l'adjacent qui minimise la fonction coût.

L'algorithme est complet mais pas toujours optimale, dans notre implémentation nous avons obtenue les meilleurs résultats pour l'heuristique définie par

$$h(n) := \text{Manhattan}(n) + 3 \cdot \text{Hamming}(n)$$

Cette heuristique n'est pas admissible car elle vaut pour un état n adjacent au but

$$h(n) = (1) + 3(1) = 4 > 1 = h^*(n)$$

mais cela n'a aucune importance dans cet algorithme.

L'algorithme trouve une solution en quelques secondes pour toutes les configurations du taquin de taille 3×3, la plupart des solutions ne sont pas optimales.

Pour les tailles plus grandes, l'algorithme prends plus de temps et ne trouve pas toujours une solution (overflow ou timeout).

2.4 Iterative Deepening DFS (ID-DFS)

L'algorithme ID-DFS est une variante du DFS, il effectue une recherche en profondeur DFS itérativement pour un profondeur limite donnée D, et l'incrémente succéssivement en commençant par $D = 0$ jusqu'à ce qu'il trouve une solution. (Wikipedia contributors 2019b)

Classiquement, $D = 0$ à la première itération mais cela est loin d'être optimale, nous proposons donc de commencer par une sous-estimation du longeur du chemin, $D = h(n_{\text{initial}})$ est une sous-estimation si h est une heuristique admissible.

Compléxité

- Compléxité en temps: $O(b^d)$
- Compléxité spaciale: $O(d)$ où d est le profondeur, et b est le facteur de branchement.

L'algorithme trouve en quelques secondes des solutions optimales pour toutes les configurations de taille 3×3, et trouve rarement des solution pour les tailles plus grandes.

Ceci est dû au fait qu'une fois d est grand, ID-DFS est presque comme DFS et a les mêmes problèmes.

2.5 Algorithme A*

L'algorithme A* est un complet, optimal et efficace. C'est un algorithme *à mémoire*, qui a une compléxité spaciale importante.

A* utilise la fonction d'évaluation f défini par

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

où

- $f(n)$ le coût total estimé au nœud n
- $g(n)$ le vrai coût pour arriver au nœud n à partir du nœud initial
- $h(n)$ le coût estimé pour arrivé au but à partir du nœud n

Il garde une liste des candidats, et en choisit succéssivement celui qui minimise le coût f et rajoute tous ses états adjacents (non visité) à la liste des candidats.

Les solutions obtenues sont optimale si l'heuristique est admissible, les meilleurs résultats sont obtenus pour la distance de Manhattan. (Wikipedia contributors 2019a)

Pour les configurations faciles la solution est obtenue instantanément, mais pour les configurations faciles l'algorithme peut prendre plus de temps que les algorithmes précédents. Cependant, pour les tailles plus grande que 3×3, A* est le meilleur algorithme pour trouver une solution.

3 Implémentation

Explication de notre code.

4 Conclusion

4.1 Développements possibles du projet

Ce qu'on peut faire encore.

4.2 Apport personnel

Ce qu'on a appris.

Références

Wikipedia contributors. 2018. « Admissible heuristic — Wikipedia, The Free Encyclopedia ». https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Admissible_heuristic&oldid=873230067.

———. 2019a. « A* search algorithm — Wikipedia, The Free Encyclopedia ». https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=A*_search_algorithm&oldid=925009518.

———. 2019b. « Iterative deepening depth-first search — Wikipedia, The Free Encyclopedia ». https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Iterative_deepening_depth-first_search&oldid=925129768.