



Emaster

Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme

Klausur: IN0010 / Hausaufgabe 2
Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Georg Carle

Datum: Montag, 4. Mai 2020
Uhrzeit: 00:01 – 23:59

Bearbeitungshinweise

- Bitte geben Sie bis spätestens Sonntag, den **10. Mai um 23:59 CEST** über TUMexam ab.
Bitte haben Sie Verständnis, wenn das Abgabesystem noch nicht reibungslos funktioniert. Wir arbeiten daran!
- Ihren **persönlichen** Link zur Abgabe finden Sie auf Moodle. Geben Sie diesen **nicht** weiter.
- Bitte haben Sie Verständnis, falls die Abgabeseite zeitweilig nicht erreichbar ist.

Bitte nehmen Sie die Hausaufgaben dennoch ernst:

- Neben der Einübung des Vorlesungsstoffs und der Klausurvorbereitung dienen die Hausaufgaben auch dazu, den Ablauf der Midterm zu erproben.
- Finden Sie einen für sich selbst praktikablen und effizienten Weg, die Hausaufgaben zu bearbeiten. Hinweise hierzu haben wir auf https://grnvs.net/homework_submission.pdf für Sie zusammengestellt.

Hörsaal verlassen von _____ bis _____ / Vorzeitige Abgabe um _____



☐ Klausur leer



Aufgabe 1 Quellenentropie (14 Punkte)

Gegeben sei eine binäre, gedächtnislose Nachrichtenquelle Q , welche voneinander statistisch unabhängige Zeichen aus dem Alphabet $\mathcal{X} = \{a, b\}$ emittiert. Wir modellieren diese Nachrichtenquelle als diskrete Zufallsvariable X . Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle das Zeichen $X = a$ emittiert, betrage $p_a = \Pr[X = a] = 0.25$.

a)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_b , dass das Zeichen $X = b$ emittiert wird.

$$\Pr(X=a) + \Pr(X=b) = 1$$

$$\Leftrightarrow \Pr(X=b) = 1 - \Pr(X=a) = 0.75$$

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} p_x = 1$$

b) Bestimmen Sie den Informationsgehalt $I(a)$ und $I(b)$ beider Zeichen.

$$I(a) = -\log_2(\Pr(X=a)) = -\log_2(0.25) = 2 \text{ bit}$$

$$I(b) = -\log_2(\Pr(X=b)) \approx 0.72 \text{ bit}$$

$$I(x) = -\log_2(\Pr[X=x])$$

$$H(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} \Pr[X=x] \log_2(\Pr[X=x])$$

c) Bestimmen Sie die Entropie H der Quelle.

$$H(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} \Pr(X=x) \log_2(\Pr(X=x)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \Pr(X=x) \cdot I(x)$$

$$= 0.25 \cdot 2 \text{ bit} + 0.75 \cdot 0.72 \text{ bit} \approx 0.81 \text{ bit}$$

d) Bestimmen Sie die Auftretswahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 einer anderen binären Nachrichtenquelle Q' , so dass deren Entropie H maximal ist.

$$(1) p_0 + p_1 = 1 \Leftrightarrow p_1 = 1 - p_0$$

$$(2) H(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p_x \log_2(p_x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x I(x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$H = -p_0 \log_2(p_0) - p_1 \log_2(p_1) = -p_0 \log_2(p_0) - (1-p_0) \log_2(1-p_0)$$

$$\frac{dH}{dp_0} = -\log_2(p_0) - \frac{1}{p_0} - (-1 \cdot \log_2(1-p_0) - (1-p_0) \cdot \frac{1}{1-p_0} \cdot (-1))$$

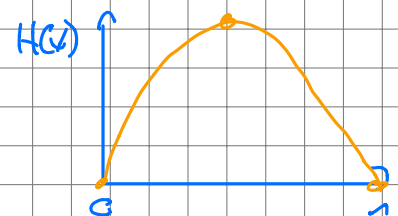
$$= -\log_2(p_0) + \log_2(1-p_0)$$

$$\log_2(1-p_0) - \log_2(p_0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(1-p_0) = \log_2(p_0) \quad | 2^x$$

$$\Leftrightarrow 1-p_0 = p_0$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2p_0 \quad \Leftrightarrow p_0 = 1/2, \quad p_1 = 1/2$$

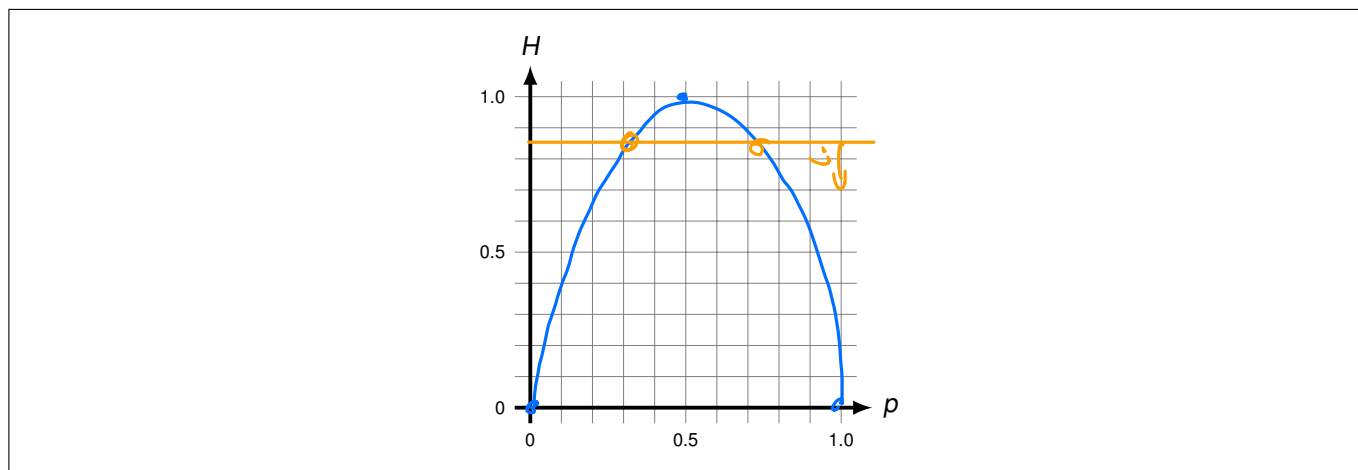


e) Wie hoch ist demnach die maximale Entropie einer binären Quelle?

noch d.) $p = p_n = \frac{1}{2}$ $I\left(\frac{1}{2}\right) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ bit}$

$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x \cdot I(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \text{ bit}\right) = 1 \text{ bit}$$

f) Skizzieren Sie die Quellenentropie H einer binären Quelle allgemein in Abhängigkeit der Auftrittswahrscheinlichkeit p .



g) Offensichtlich ist die Entropie $H(X) < 1$ nicht maximal. Welche Schlussfolgerung lässt sich aus dieser Tatsache für den von der Quelle Q emittierten Datenstrom hinsichtlich Redundanz ableiten?

Datenstrom enthält Redundanz!

⇒ Diese Redundanz kann verringert werden (Huffman-Codes)

h) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben d) und e) auf eine N -äre Quelle, d. h. auf eine Quelle, die N unterschiedliche Zeichen emittiert.

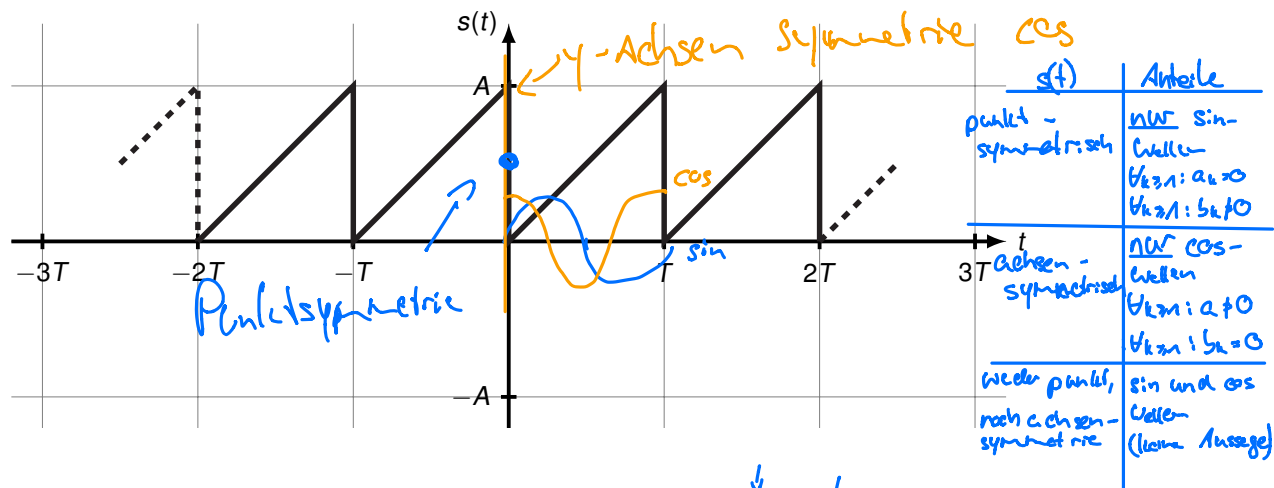
$$p_i = \frac{1}{N} \quad N\text{-Zeichen: } |\mathcal{Z}| = N$$





Aufgabe 2 Fourierreihe (15 Punkte)

Gegeben sei das folgende T -periodische Zeitsignal $s(t)$:



0 ☐
1 ☐

a)* Finden Sie einen analytischen Ausdruck für $s(t)$ im Intervall $[0, T]$. $y = mx + b$

$$\begin{aligned} s(0) &= 0 \\ s(0) &= y = mx + b \\ m \cdot 0 + b &= 0 \Rightarrow b = 0 \\ s(T) &= A \\ s(T) &= m \cdot T = A \Rightarrow m = \frac{A}{T} \end{aligned}$$

Das Signal $s(t)$ lässt sich als Fourierreihe entwickeln, d. h. $\Rightarrow s(t) = \frac{A}{T} t$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)). \quad (1)$$

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$k \neq 0: \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t) dt \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega t) dt. \quad (2)$$

0 ☐
1 ☐

b)* Welcher Koeffizient in Formel (1) ist für den Gleichanteil von $s(t)$ verantwortlich?

$\omega = 2\pi$

$= a_0/2$

a_0 ist für den Gleichanteil verantwortlich

0 ☐
1 ☐
2 ☐

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Gleichanteil des Signals $s(t)$.

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \frac{\cos(0 \cdot \omega t)}{\cos(0) = 1} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t \cdot 1 dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{T} \int_0^T t dt \\ &= \frac{2A}{T^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^T = \frac{2A}{T^2} \left(\frac{T^2}{2} - 0 \right) = A = a_0 \end{aligned}$$

φ -Verschiebung: $\frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}$





d)* Hätte man das Ergebnis aus der vorhergehenden Teilaufgabe auch *by inspection* erahnen können?



e)* Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k .

Hinweis: Sie benötigen hier keine Rechnung. Vergleichen Sie stattdessen die Symmetrie von $s(t)$ mit einer Kosinus-Schwingung. Kann ein gewichteter Kosinus einen Beitrag zum Gesamtsignal liefern?



$s(t)$	Anteile
punkt-symmetrisch	nur Sin-Wellen $\forall k \geq 1: a_k = 0 \leftarrow$ $\forall k \geq 1: b_k \neq 0$
geraden-symmetrisch	nur Cos-Wellen $\forall k \geq 1: a_k \neq 0$ $\forall k \geq 1: b_k = 0$
weder punkt-, noch geraden-symmetrisch	sin und cos-Wellen (keine Aussage)

Da $s(t)$ punktsymmetrisch zu $\frac{A}{2}$: $\forall k \geq 1: a_k = 0$

$k=1$
 $s(t) = \cos(2\pi t)$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

$a_0 = 0$
 $b_{k=1} = 1$ $a_{k>1} = 0$





$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

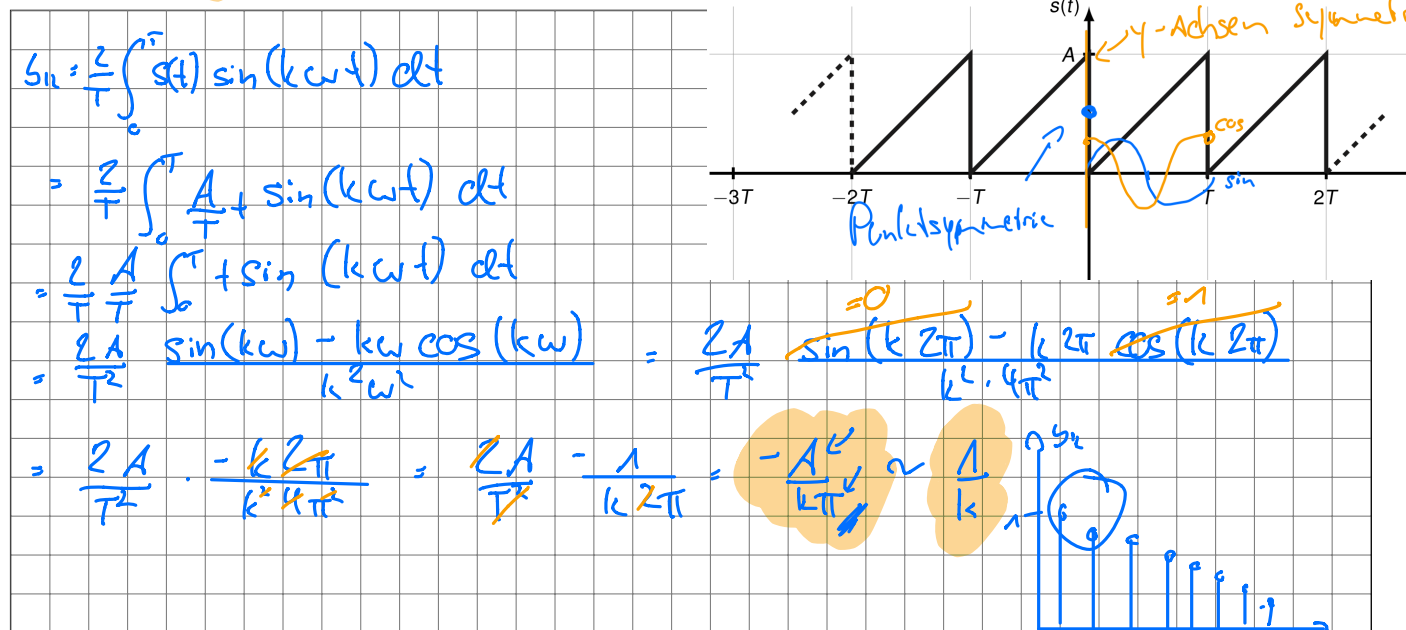
Von nun an nehmen wir zur Vereinfachung $T = 1$ an.

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t) dt \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega t) dt.$$

f)* Bestimmen Sie die Koeffizienten b_k .

Hinweise: $\int_0^1 t \sin(ct) dt = \frac{\sin(c) - c \cdot \cos(c)}{c^2}$ und $\omega = 2\pi/T = 2\pi$



g) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Gleichanteil $a_0/2$, die ersten beiden Harmonischen sowie deren Summe für $A = \pi$ in einem Koordinatensystem.

