Lehrstuhl für Netzarchitekturen und Netzdienste
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Emaster
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:
- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme

Klausur:	IN0010 / Hausaufgabe 2	**Datum:**	Montag, 4. Mai 2020
Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Georg Carle	**Uhrzeit:**	00:01 – 23:59

Bearbeitungshinweise

- Bitte geben Sie bis spätestens Sonntag, den **10. Mai um 23:59 CEST** über TUMexam ab.
  Bitte haben Sie Verständnis, wenn das Abgabesystem noch nicht reibungslos funktioniert. Wir arbeiten daran!
- Ihren **persönlichen** Link zur Abgabe finden Sie auf Moodle. Geben Sie diesen **nicht** weiter.
- Bitte haben Sie Verständnis, falls die Abgabeseite zeitweilig nicht erreichbar ist.

Bitte nehmen Sie die Hausaufgaben dennoch ernst:

- Neben der Einübung des Vorlesungsstoffs und der Klausurvorbereitung dienen die Hausaufgaben auch dazu, den Ablauf der Midterm zu erproben.
- Finden Sie einen für sich selbst praktikablen und effizienten Weg, die Hausaufgaben zu bearbeiten. Hinweise hierzu haben wir auf `https://grnvs.net/homework_submission.pdf` für Sie zusammengestellt.

Hörsaal verlassen von __________ bis __________ / Vorzeitige Abgabe um __________

P_0 P_1 $P_0 + P_1 = 1$

$x = \{a, b\}$

$\boxed{Q} \rightarrow 0101001011$

Aufgabe 1 Quellenentropie (14 Punkte)

Gegeben sei eine binäre, gedächtnislose Nachrichtenquelle Q, welche voneinander statistisch unabhängige Zeichen aus dem Alphabet $\mathcal{X} = \{a, b\}$ emittiert. Wir modellieren diese Nachrichtenquelle als diskrete Zufallsvariable X. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle das Zeichen $X = a$ emittiert, betrage $p_a = \Pr[X = a] = 0.25$.

0 1

a)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_b, dass das Zeichen $X = b$ emittiert wird.

$\sum_{x \in \mathcal{X}} p_x = 1$

$\Pr(X=a) + \Pr(X=b) = 1$

$\Leftrightarrow \Pr(X=b) = 1 - \underbrace{\Pr(X=a)}_{0{,}25} = 0{,}75$

$I(x) = -\log_2(\Pr[X = x])$

$H(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} \Pr[X = x] \log_2(\Pr[X = x])$

0 1 2

b) Bestimmen Sie den Informationsgehalt $I(a)$ und $I(b)$ beider Zeichen.

$I(a) = -\log_2(\Pr(X=a)) = -\log_2(0{,}25) = 2 \text{ bit}$

$I(b) = -\log_2(\Pr(X=b)) \approx 0{,}42 \text{ bit}$

0 1 2

c) Bestimmen Sie die Entropie H der Quelle.

$H(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} \Pr(X=x) \log(\Pr(X=x)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \Pr(X=x) \cdot I(x)$

$= 0{,}25 \cdot 2 \text{ bit} + 0{,}75 \cdot 0{,}42 \text{ bit} \approx 0{,}81 \text{ bit}$

0 1 2

d) Bestimmen Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 einer anderen binären Nachrichtenquelle Q', so dass deren Entropie H maximal ist.

(1) $p_0 + p_1 = 1 \Leftrightarrow p_1 = 1 - p_0$

(2) $H(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p_x \log_2(p_x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \underbrace{p_x}_{\geq 0} \underbrace{I(x)}_{\geq 0} \geq 0$

$H = -p_0 \log_2(p_0) - p_1 \log_2(p_1) = -p_0 \log_2(p_0) - (1-p_0)\log_2(1-p_0)$

$\frac{dH}{dp_0} = -\log_2(p_0) - \cancel{\left(p_0 \frac{1}{p_0}\right)} - \left(-1 \cdot \log_2(1-p_0) - (1-p_0)\frac{1}{1-p_0}(-1)\right)$

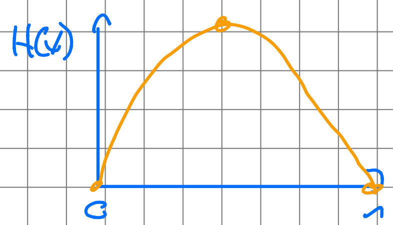
$= -\log_2(p_0) + \log_2(1-p_0)$

$\log_2(1-p_0) - \log_2(p_0) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \log_2(1-p_0) = \log_2(p_0) \quad | 2^x$

$\Leftrightarrow 1 - p_0 = p_0$

$\Leftrightarrow 1 = 2p_0 \Leftrightarrow p_0 = 1/2, \quad p_1 = 1/2$



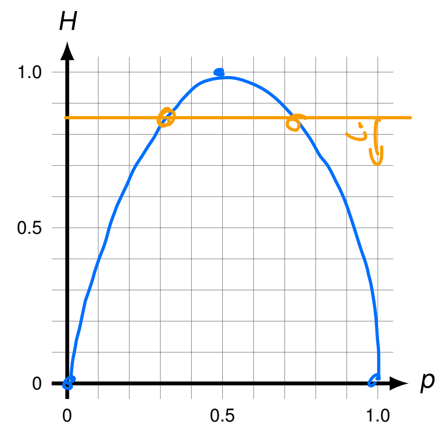
e) Wie hoch ist demnach die maximale Entropie einer binären Quelle?

$I(\frac{1}{2}) = -\log_2(\frac{1}{2}) = 1$ bit

Nach d.) $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$

$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x I(x) = 2 \cdot (\frac{1}{2}\, 1\,\text{bit}) = 1$ bit

f) Skizzieren Sie die Quellenentropie H einer binären Quelle allgemein in Abhängigkeit der Auftrittswahrscheinlichkeit p.



g) Offensichtlich ist die Entropie $H(X) < 1$ nicht maximal. Welche Schlussfolgerung lässt sich aus dieser Tatsache für den von der Quelle Q emittierten Datenstrom hinsichtlich Redundanz ableiten?

Datenstrom enthält Redundanz!

⇒ Diese Redundanz kann dann verringert werden (Huffman-Codes)

h) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben d) und e) auf eine N-äre Quelle, d. h. auf eine Quelle, die N unterschiedliche Zeichen emittiert.

$p_i = \frac{1}{N}$ N-Zeichen: $|\mathcal{X}| = N$

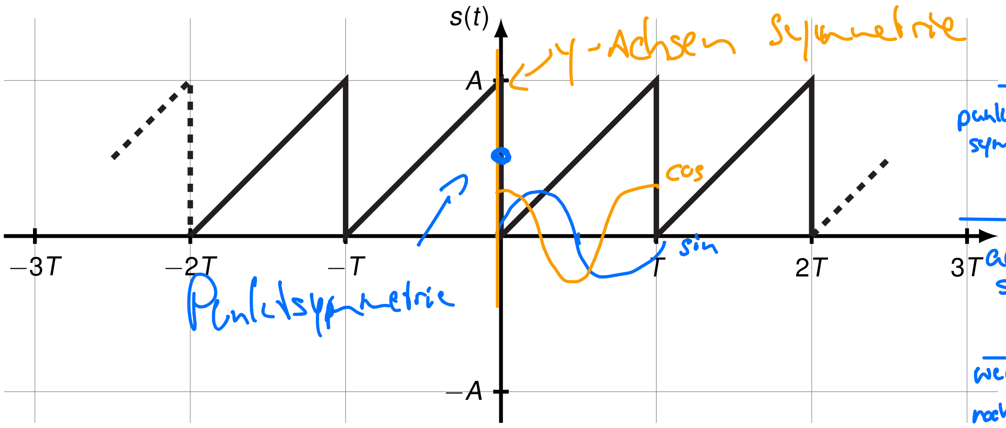
Zeitbereich → Frequenzbereich

→ Fourierreihe : Nur bei periodischen Signalen

Fouriertransformation : periodischen & nicht-periodischen Signalen

Aufgabe 2 Fourierreihe (15 Punkte)

Gegeben sei das folgende T-periodische Zeitsignal $s(t)$:



s(t)	Anteile
punktsymmetrisch	nur sin-Wellen; $\forall k \geq 1: a_k = 0$; $\forall k \geq 1: b_k \neq 0$
achsensymmetrisch	nur cos-Wellen; $\forall k \geq 1: a_k \neq 0$; $\forall k \geq 1: b_k = 0$
weder punkt-, noch achsensymmetrie	sin und cos Wellen (keine Aussage)

0
1

a)* Finden Sie einen analytischen Ausdruck für $s(t)$ im Intervall $[0, T]$. $y = mx + b$

$s(0) = 0$

$s(0) = y = mx + b = m \cdot 0 + b = b \stackrel{!}{=} 0$

$s(T) = A$

$s(T) = m \cdot T \stackrel{!}{=} A \Rightarrow m = \frac{A}{T}$

Das Signal $s(t)$ lässt sich als Fourierreihe entwickeln, d. h. $\Rightarrow s(t) = \frac{A}{T} t$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \,. \tag{1}$$

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$k \geq 0: \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t)\, dt \text{ und } b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega t)\, dt. \tag{2}$$

$\omega = 2\pi$

0
1

b)* Welcher Koeffizient in Formel (1) ist für den Gleichanteil von $s(t)$ verantwortlich?

$= a_0 / 2$

a_0 ist für den Gleichanteil verantwortlich

0
1
2

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Gleichanteil des Signals $s(t)$.

$a_0 = ?$

$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \underbrace{\cos(0 \cdot \omega t)}_{= \cos(0) = 1} dt$

$= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t \cdot 1 \, dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{T} \int_0^T t \, dt =$

$= \frac{2A}{T^2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^T = \frac{\cancel{2}A}{\cancel{T^2}} \left(\frac{\cancel{T^2}}{\cancel{2}} - 0 \right) = A = a_0$

y-Verschiebung: $\frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}$

d)* Hätte man das Ergebnis aus der vorhergehenden Teilaufgabe auch *by inspection* erahnen können?

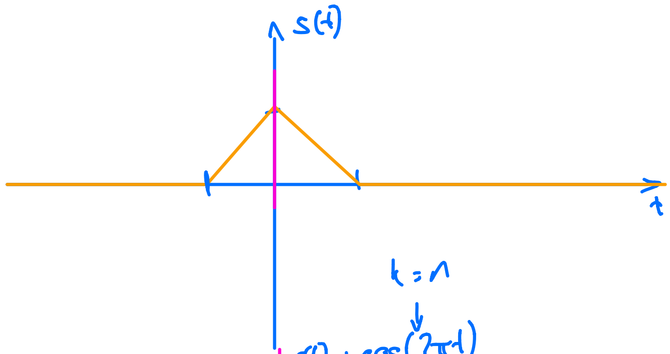
0
1

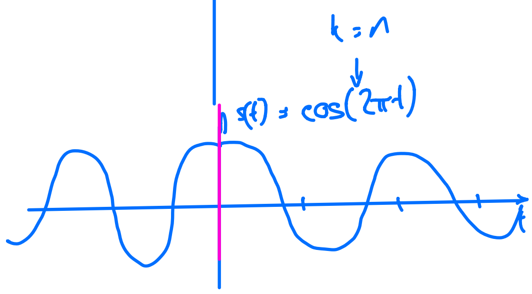
e)* Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k.
Hinweis: Sie benötigen hier keine Rechnung. Vergleichen Sie stattdessen die Symmetrie von $s(t)$ mit einer Kosinus-Schwingung. Kann ein gewichteter Kosinus einen Beitrag zum Gesamtsignal liefern?

0
1
2
3
4

s(t)	Anteile
punkt-symmetrisch	nur Sin-Wellen $\forall k \geq 1: a_k = 0$ ← $\forall k \geq 1: b_k \neq 0$
achsen-symmetrisch	nur cos-Wellen $\forall k \geq 1: a \neq 0$ $\forall k \geq 1: b_k = 0$
weder punkt, noch achsen-symmetrie	sin und cos Wellen (keine Aussage)

Da s(t) punktsymmetrisch zu $\frac{A}{2}$: $\forall k \geq 1 : a_k = 0$





$$s(t) = \underbrace{\cancel{\frac{a_0}{2}}}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + \cancel{b_k \sin(k\omega t)}) .$$

$a_1 = 1$ $\quad a_{k>1} = 0$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right).$$

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

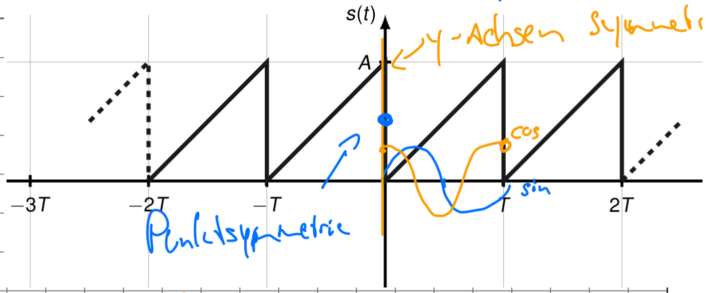
$k \neq 0$: $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t)\, dt$ und $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega t)\, dt.$

Von nun an nehmen wir zur Vereinfachung $T = 1$ an.

0 1 2

f)* Bestimmen Sie die Koeffizienten b_k.

Hinweise: $\int_0^1 t \sin(ct)\, dt = \frac{\sin(c) - c \cdot \cos(c)}{c^2}$ und $\omega = 2\pi/T$. $= 2\pi$



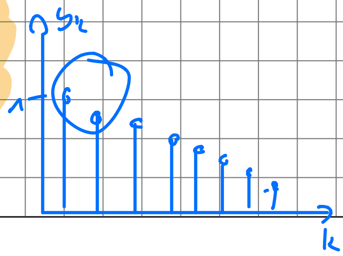
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t) \sin(k\omega t)\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T} t \sin(k\omega t)\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\frac{A}{T}\int_0^T t \sin(k\omega t)\, dt$$

$$= \frac{2A}{T^2} \frac{\sin(k\omega) - k\omega\cos(k\omega)}{k^2\omega^2} = \frac{2A}{T^2} \frac{\cancel{\underbrace{\sin(k2\pi)}_{=0}} - k2\pi \cancel{\underbrace{\cos(k2\pi)}_{=1}}}{k^2 \cdot 4\pi^2}$$

$$= \frac{2A}{T^2} \cdot \frac{-\cancel{k}\,\cancel{2}\pi}{k^{\cancel{2}}\,\cancel{4}\pi^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{2}A}{\cancel{T^2}} \cdot \frac{-1}{k\,\cancel{2}\pi} = -\frac{A}{k\pi} \sim \frac{1}{k}$$



0 1 2 3 4

g) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Gleichanteil $a_0/2$, die ersten beiden Harmonischen sowie deren Summe für $A = \pi$ in einem Koordinatensystem.