Lehrstuhl für Netzarchitekturen und Netzdienste
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Emaster
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:
- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme

Klausur:	IN0010 / Hausaufgabe 2	**Datum:**	Montag, 4. Mai 2020
Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Georg Carle	**Uhrzeit:**	12:01 – 23:59

Bearbeitungshinweise

- Bitte geben Sie bis spätestens Sonntag, den **10. Mai um 23:59 CEST** über TUMexam ab.
  Bitte haben Sie Verständnis, wenn das Abgabesystem noch nicht reibungslos funktioniert. Wir arbeiten daran!
- Ihren **persönlichen** Link zur Abgabe finden Sie auf Moodle. Geben Sie diesen **nicht** weiter.
- Bitte haben Sie Verständnis, falls die Abgabeseite zeitweilig nicht erreichbar ist.

Bitte nehmen Sie die Hausaufgaben dennoch ernst:

- Neben der Einübung des Vorlesungsstoffs und der Klausurvorbereitung dienen die Hausaufgaben auch dazu, den Ablauf der Midterm zu erproben.
- Finden Sie einen für sich selbst praktikablen und effizienten Weg, die Hausaufgaben zu bearbeiten. Hinweise hierzu haben wir auf `https://grnvs.net/homework_submission.pdf` für Sie zusammengestellt.

Hörsaal verlassen von ________ bis ________ / Vorzeitige Abgabe um ________

☐ Klausur leer

Aufgabe 1 **Quellenentropie (14 Punkte)**

Gegeben sei eine binäre, gedächtnislose Nachrichtenquelle Q, welche voneinander statistisch unabhängige Zeichen aus dem Alphabet $\mathcal{X} = \{a, b\}$ emittiert. Wir modellieren diese Nachrichtenquelle als diskrete Zufallsvariable X. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle das Zeichen $X = a$ emittiert, betrage $p_a = \Pr[X = a] = 0.25$.

0 1

a)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_b, dass das Zeichen $X = b$ emittiert wird.

$\underbrace{\Pr[X=b]}_{=p_b} = 1 - \underbrace{\Pr[X=a]}_{p_a} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

0 1 2

b) Bestimmen Sie den Informationsgehalt $I(a)$ und $I(b)$ beider Zeichen. Formel: $I(x) = -\log_2(p_x)$

$I(a) = -\log_2(p_a) = 2$ bit

$I(b) = -\log_2(p_b) \approx 0{,}42$ bit

0 1 2

c) Bestimmen Sie die Entropie H der Quelle. Formel: $H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x I(x)$

$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x I(x) = p_a I(a) + p_b I(b) = \frac{3}{4} \cdot 2 \text{ bit} + \frac{1}{4} \cdot 0{,}42 \text{ bit}$

$= 0{,}82 \text{ bit}$

0 1 2

d) Bestimmen Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 einer anderen binären Nachrichtenquelle Q', so dass deren Entropie H maximal ist.

Es folgt $p_1 = 1 - p_0 =: p$

$H = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)$

$\frac{d}{dx}\left(\log_2(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right) = \frac{1}{x\ln(2)}$

$\frac{dH}{dp} = -\log_2(p) + -\cancel{p} \cdot \frac{1}{\cancel{p}\ln(2)}$

$- \left(-\log_2(1-p) - \frac{\cancel{(1-p)}}{\cancel{(1-p)}\ln(2)}\right)$

$= -\log_2(p) + \log_2(1-p) \overset{!}{=} 0$

Da Extremstelle gefunden werden soll.

$\Leftrightarrow \log_2(p) = \log_2(1-p) \quad | \, 2^x$

$\Leftrightarrow p = 1-p$

$\Leftrightarrow p = 1/2$

Das ist ebenfalls Klausurrelevant

Also partielles differenzieren und Gleichungen auflösen

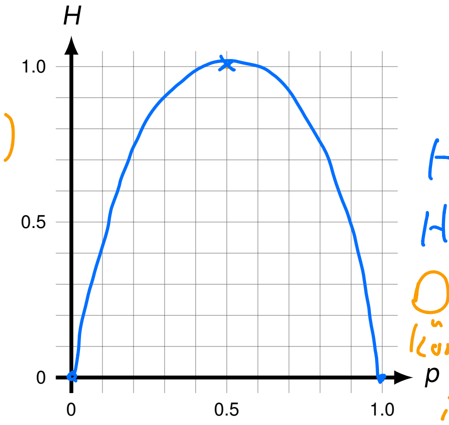
e) Wie hoch ist demnach die maximale Entropie einer binären Quelle?

Nach der vorherigen Aufgabe muss $Pr[X=a] = Pr[X=b] = \frac{1}{2}$ damit die Entropie maximiert wird.

$$H = \sum_{x\in\mathcal{X}} p_x I(x) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot \log_2(1/2)\right) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ bit}$$

f) Skizzieren Sie die Quellenentropie H einer binären Quelle allgemein in Abhängigkeit der Auftrittswahrscheinlichkeit p.

$$H(p) = p\, I(p) + (1-p)\, I(1-p) = -p \log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)$$



$H(0) = H(1) = 0$

$H(1/2) = 1$

Die restlichen Werte können durch "Hinsehen" interpoliert werden.

g) Offensichtlich ist die Entropie $H(X) < 1$ nicht maximal. Welche Schlussfolgerung lässt sich aus dieser Tatsache für den von der Quelle Q emittierten Datenstrom hinsichtlich Redundanz ableiten?

Die Zeichen können mit durchschnittlich weniger als 1 bit / Zeichen dargestellt werden.

$\Rightarrow$ Das Signal enthält Redundanz

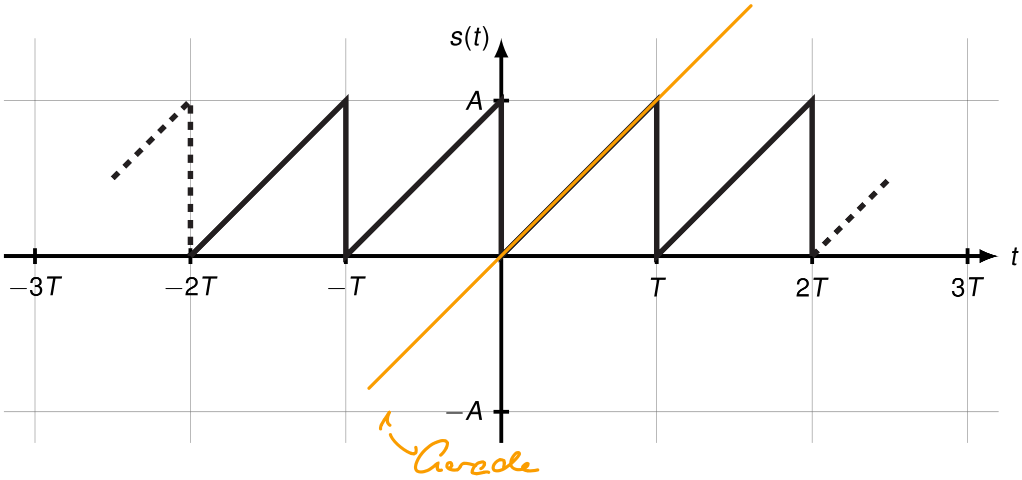
h) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben d) und e) auf eine N-äre Quelle, d. h. auf eine Quelle, die N unterschiedliche Zeichen emittiert.

$$H = (X) = \sum_{x\in\mathcal{X}} I(x)\, p_x$$
$$= \sum_{i=1}^{N} -p \log_2(p)$$
$$= -\frac{1}{N}\log_2\left(\frac{1}{N}\right)\cdot N$$
$$= -(\log_2(1) - \log_2(N))$$
$$= \log_2(N)$$

Nach d), e) ist ersichtlich, dass für eine N-äre Quelle alle Zeichen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit emittiert werden sollten $\Rightarrow \forall x: p_x = p = 1/N$ für $N = |\mathcal{X}|$

Aufgabe 2 Fourierreihe (15 Punkte)

Gegeben sei das folgende T-periodische Zeitsignal $s(t)$:



a)* Finden Sie einen analytischen Ausdruck für $s(t)$ im Intervall $[0, T)$. Geradengleichung: $y = mx + b$

Fixpunkte: $s(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ | $s(T) = A \Rightarrow mT = A \quad m = \frac{A}{T}$ $\Rightarrow s(t) = \frac{A}{T} t \quad t \in [0, T)$

Das Signal $s(t)$ lässt sich als Fourierreihe entwickeln, d. h.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right). \tag{1}$$

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t)\, dt \;\text{ und }\; b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega t)\, dt. \tag{2}$$

b)* Welcher Koeffizient in Formel (1) ist für den Gleichanteil von $s(t)$ verantwortlich?

a_0 da dies ein constantes offset ist

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Gleichanteil des Signals $s(t)$.

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(k\omega t)\,dt \overset{k=0}{=} \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\underbrace{\cos(0)}_{=1}\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T} t \cdot 1\,dt = \frac{2A}{T^2}\int_0^T t\,dt = \frac{2A}{T^2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^T$$

$$= \frac{\cancel{2}A}{\cancel{T^2}} \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{T^2} = A = a_0$$

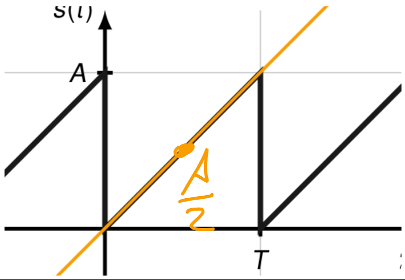
$$\Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}$$

durch Hinschauen

d)* Hätte man das Ergebnis aus der vorhergehenden Teilaufgabe auch *by inspection* erahnen können?

0 1

Man schaut sich den zeitlichen Mittelwert des Signals an
↳ Da das Signal nur positive Werte annehmen kann, muss ein Gleichanteil existieren



e)* Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k.
Hinweis: Sie benötigen hier keine Rechnung. Vergleichen Sie stattdessen die Symmetrie von $s(t)$ mit einer Kosinus-Schwingung. Kann ein gewichteter Kosinus einen Beitrag zum Gesamtsignal liefern?

0 1 2 3 4

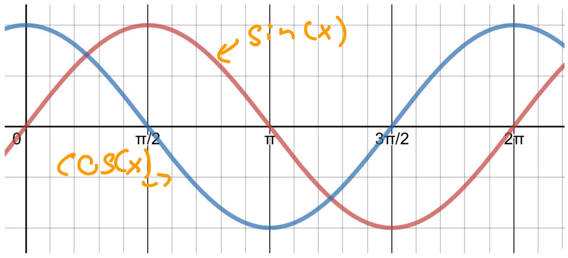
Durch Anschauen des Signals lassen sich folgende Aussagen über die vorhandenen Grundschwingungen machen:

punktsymmetrisch:	nur sin Wellen
achsensymmetrisch:	nur cos Wellen
weder punkt- noch achsensymmetrisch:	sin & cos Wellen

Da das Signal punktsymmetrisch zum Ursprung ist, enthält es nur sin Wellen

$\Rightarrow a_k = 0$ für alle $k \geq 1$

Von nun an nehmen wir zur Vereinfachung $T = 1$ an.



0 1 2

f)* Bestimmen Sie die Koeffizienten b_k.

Hinweise: $\int_0^1 t\sin(ct)\,dt = \frac{\sin(c) - c\cdot\cos(c)}{c^2}$ und $\omega = 2\pi/T$.

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(k\omega t)\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}t\sin(k\omega t)\,dt$$

$$= \frac{2A}{T^2}\int_0^T t\sin(k\omega t)\,dt \overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{2A}{T^2}\cdot\frac{\sin(k\omega) - k\omega\cos(k\omega)}{k^2\omega^2}$$

$\omega = 2\pi$

$$= \frac{2A}{T^2}\,\frac{\underbrace{\cancel{\sin(2\pi k)}}_{=0} - k2\pi\underbrace{\cancel{\cos(k2\pi)}}_{=1}}{k^2 4\pi^2}$$

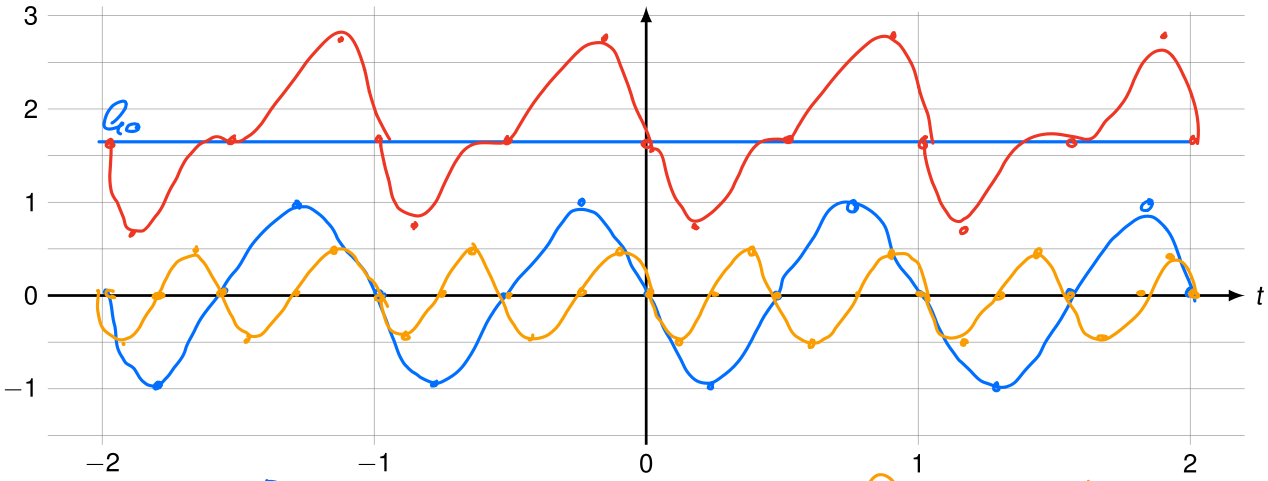
$k \in \mathbb{N}$

$$= \frac{\cancel{2}A}{T^2}\,\frac{-\cancel{k}\cancel{2}\pi}{k^{\cancel{2}}\cancel{4}\pi^{\cancel{2}}} = -\frac{A}{T^2 k\pi} \overset{T=1}{=} -\frac{A}{k\pi}$$

0 1 2 3 4

g) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Gleichanteil $a_0/2$, die ersten beiden Harmonischen sowie deren Summe für $A = \pi$ in einem Koordinatensystem.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \underbrace{\cancel{\cos(k\omega t)}}_{=0} + b_k\sin(k\omega t)\right).$$



$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi k t)$$

Das muss hier nicht perfekt gezeichnet sein

$$a_0 = \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$$

$$h_1 = b_1\sin(1\cdot 2\pi t) = -\frac{\cancel{A}}{1\cancel{\pi}}\cdot\sin(2\pi t)$$

$$h_2 = b_2\sin(2\cdot 2\pi\cdot t) = -\frac{\cancel{A}}{2\cdot\cancel{\pi}}\cdot\sin(4\pi t)$$

Interaktives Beispiel hier: https://www.desmos.com/calculator/fmb3evfzv6