

CONSOLIDATION DES SOLS (ÉTUDE MATHÉMATIQUE)*

par

J. MANDEL

SYNOPSIS

Terzaghi a donné la solution du problème du tassement d'une couche d'argile dans un cas particulier : celui d'une couche soumise à une pression normale uniforme. Dans ce cas la filtration se fait suivant la direction perpendiculaire à la couche et le phénomène est indépendant des coordonnées dans le plan de la couche. L'auteur de cet article fait une étude générale du problème du tassement ; il indique la forme générale de la solution, et précise entièrement celle-ci dans le cas d'une couche plane et d'une force concentrée à la surface du sol.

Terzaghi has given the solution of the problem of the settlement of a stratum of clay in a particular case—that of a stratum subjected to a normal uniform pressure. In this case, the percolation takes place in a direction perpendicular to the stratum and the phenomenon is independent of the co-ordinates of the plane of the stratum. The Author makes a general study of the problem of settlement, and indicates the general form of the solution. He then gives the full solution in the case of a plane stratum and of a force concentrated on the surface of the soil.

Bases de cette étude

1. L'argile est supposée saturée d'eau. Le tenseur des contraintes totales devra être décomposé en :

- (a) tenseur des *contraintes de contact* (ou intergranulaires, ou effectives)
- (b) tenseur des *contraintes de l'eau*. Ce dernier lui-même se décompose :

pression moyenne isotrope, déviateur dû à la viscosité.

Quoique la viscosité de l'eau soit la cause initiale des déformations différées de l'argile, le déviateur dû à la viscosité est extrêmement petit et négligeable vis-à-vis de la pression moyenne. C'est seulement par l'existence d'un gradient de la pression moyenne que se traduira dans les calculs l'effet de la viscosité, conformément aux lois de Poiseuille et de Darcy. Pour saisir la raison de ce paradoxe, considérons l'équilibre du volume liquide compris entre 2 sections distantes de dx d'un tube circulaire de rayon r . q désignant les pressions normales sur les sections droites (égales à la pression moyenne isotrope), τ les cisaillements sur la surface latérale (provenant du déviateur), on a :

$$2\pi r\tau = \pi r^2 \frac{dq}{dx} \quad \text{d'où : } \tau = \frac{1}{2}r \frac{dq}{dx}$$

Dans les sols, les rayons r des canaux sont très petits, par suite les contraintes τ sont très faibles. Par exemple pour $r = 210^{-4}$ cm. et pour un gradient de 1 gramme-poids/cm.² on a : $\tau = 10^{-4}$ gramme/cm.².

2. On néglige la compressibilité de l'eau vis-à-vis de celle de l'ossature (le rapport compressibilité de l'ossature : compressibilité de l'eau est de l'ordre de 200).

3. En ce qui concerne les déformations de l'ossature, on admet qu'elles sont liées au tenseur de contact par les relations linéaires classiques de la théorie de l'élasticité. Autrement dit les déformations sont supposées réversibles et fonctions linéaires des contraintes de contact. Une telle hypothèse ne peut donner qu'une traduction imparfaite des phénomènes réels et l'auteur avait attiré l'attention sur ce point au congrès de Rotterdam (1948). Mais tant que les essais triaxiaux ne nous auront pas renseignés sur la forme générale des relations entre contraintes et déformations, il nous manque une base solide pour établir une théorie plus correcte.

* Communication faite au Comité Français de Mécanique des Sols le 7 décembre 1950. Texte revu en juin 1953

Lorsqu'une charge est appliquée à un terrain contenant une couche d'argile on note une déformation immédiate suivie d'une déformation différée (la charge étant supposée maintenue) qui évolue à vitesse progressivement décroissante. On va étudier successivement ces deux déformations.

DÉFORMATION IMMÉDIATE

Lors de l'application de la charge, l'eau ne peut être expulsée des vides immédiatement. Puisqu'on néglige la compressibilité de l'eau, le volume des vides reste constant. La compressibilité des grains étant à fortiori négligeable (vis-à-vis de la compressibilité de leur assemblage), le volume d'un élément du sol (élément considéré comme infinitésimal mais contenant cependant de nombreux grains) reste constant. Ceci n'implique pas que la déformation immédiate soit nulle, mais seulement qu'elle comporte une dilatation cubique nulle. On peut en gros considérer le sol comme une juxtaposition de cellules à l'intérieur desquelles l'eau circule sans difficulté, tandis qu'elle passe difficilement de l'une à l'autre: un tel assemblage peut subir une distorsion mais pas de variation de volume immédiate. La distorsion de l'ossature s'accompagne bien de mouvements de l'eau, mais dans ces mouvements la vitesse moyenne de l'eau par rapport à l'ossature et la vitesse de filtration (égale à la précédente multipliée par la porosité) restent nulles (plus exactement négligeables vis-à-vis des vitesses de l'ossature).

Soit $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ les contraintes principales de contact* $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ les dilatations principales. Si λ, μ désignent les coefficients de Lamé de l'ossature supposée élastique et isotrope,† on a :

$$\text{avec : } \Delta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad \left. \begin{aligned} -\sigma'_1 &= \lambda \Delta + 2\mu\epsilon_1 \\ -\sigma'_2 &= \lambda \Delta + 2\mu\epsilon_2 \\ -\sigma'_3 &= \lambda \Delta + 2\mu\epsilon_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Il est utile de mettre ces relations sous une autre forme en décomposant chacun des tenseurs (tenseur de contact et tenseur de déformation) en un tenseur moyen isotrope et un déviateur. Posons :

$$\sigma' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3}{3} \quad \epsilon = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3}$$

σ' et ϵ sont les 2 tenseurs moyens, liés entre eux par la relation :

$$-\sigma' = (3\lambda + 2\mu)\epsilon \dots \dots \dots (2)$$

Les déviateurs ($\sigma'_1 - \sigma', \sigma'_2 - \sigma', \sigma'_3 - \sigma'; \epsilon_1 - \epsilon, \epsilon_2 - \epsilon, \epsilon_3 - \epsilon$) sont liés entre eux par les relations :

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 - \sigma' &= -2\mu(\epsilon_1 - \epsilon) \\ \sigma'_2 - \sigma' &= -2\mu(\epsilon_2 - \epsilon) \\ \sigma'_3 - \sigma' &= -2\mu(\epsilon_3 - \epsilon) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

dont 2 seulement sont indépendantes (puisque par addition des 3 équations on obtient une identité $0 = 0$).

Les équations (2) et (3) équivalent au système (1). Dans le cas de la déformation immédiate nous devons leur ajouter la condition :

$$\epsilon = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Au lieu des contraintes de contact introduisons maintenant dans les équations les contraintes totales :

$$\sigma_1 = \sigma'_1 + q; \sigma_2 = \sigma'_2 + q; \sigma_3 = \sigma'_3 + q; \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma' + q$$

* On prendra ici les pressions comme contraintes positives.

† Si E désigne le module d'Young, ν le coefficient de Poisson de l'ossature, on a :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Nous aurons

$$-\sigma + q = (3\lambda + 2\mu)\epsilon \quad (2')$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma &= -2\mu(\epsilon_1 - \epsilon) \\ \sigma_2 - \sigma &= -2\mu(\epsilon_2 - \epsilon) \\ \sigma_3 - \sigma &= -2\mu(\epsilon_3 - \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

$$\epsilon = 0 \quad (4')$$

Or les équations (3') et (4') sont les relations contraintes-déformations pour un milieu élastique incompressible ($\lambda = \infty$) ayant pour 2ème coefficient de Lamé μ celui de l'ossature (on voit en effet que l'équation (2) devient (4') si $\lambda = \infty$). Par ces équations (3'), (4'), les 3 équations d'équilibre et les conditions à la surface, les contraintes totales σ et les déformations sont entièrement déterminées. Donc :

les contraintes totales et déformations immédiates sont les mêmes que si l'argile était un milieu élastique incompressible ($\lambda = \infty$) ayant pour module de glissement μ celui de l'ossature.

Quant à la pression de l'eau, q (plus exactement la variation de pression de l'eau), elle est donnée par l'équation (2)' où $\epsilon = 0$, d'où :

$$q = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

C'est la moyenne des 3 contraintes principales totales évaluées comme on vient de l'indiquer. Autrement dit, dans le tenseur des contraintes totales, qui s'évalue comme si l'argile était élastique et incompressible, la pression moyenne isotrope est supportée par l'eau, le déviateur est supporté par l'ossature.

Exemple 1.—Un cylindre d'argile libre latéralement est soumis sur ses bases à l'action d'une pression normale, p . Les contraintes totales principales sont p, o, o , et la pression de l'eau $q = \frac{p}{3}$. L'accourcissement immédiat suivant l'axe du cylindre est :

$$\epsilon_0 = -\frac{p}{E_0} = \frac{-p}{2\mu(1+\nu_0)} = -\frac{p}{3\mu}$$

E_0 désignant le module d'Young et ν_0 le coefficient de Poisson du milieu élastique incompressible dont les coefficients de Lamé sont

$$\lambda = \infty \text{ et } \mu \cdot \nu_0 \text{ est égal à } \frac{1}{2}$$

L'accourcissement définitif atteint au bout d'un temps infini est :

$$\epsilon_\infty = \frac{-p}{E} = -\frac{p}{2\mu(1+\nu)}$$

ν = coefficient de Poisson de l'ossature.

On a donc :

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_\infty} = \frac{2(1+\nu)}{3}$$

Même avec $\nu = 0$ la proportion de la déformation immédiate à la déformation définitive est importante (2/3). On ne peut échapper à cette conclusion qu'en renonçant aux relations classiques de l'élasticité. Ce n'est pas tant la linéarité des relations qui semble devoir être mise en cause que l'existence même de relations entre déformations et contraintes de contact actuelles, indépendantes notamment de la vitesse de chargement. Il est possible que l'ossature possède une réactivité dont les effets sont d'autant plus importants que la déformation est plus rapide et peuvent diminuer beaucoup la déformation immédiate. En ne retenant que la viscosité de l'eau pour expliquer le tassement progressif de l'argile, on fait une simplification qui se révèle excessive au début du phénomène, le tassement réel étant beaucoup plus faible que celui auquel conduit la théorie. C'est ce que montre encore l'exemple suivant.

Exemple 2.—Force concentrée à la surface limite d'un massif semi-indéfini.—Soit une force P normale à la surface limite d'un massif élastique ; la solution de Boussinesq donne pour les contraintes et déplacements en M situé à la distance r du support Oy de la force (Fig. 1) :

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{P(1+\nu)}{\pi} \frac{y}{p^3}$$

$$u = \frac{P}{4\pi\mu} \left[\frac{ry}{p^3} - \frac{(1-2\nu)r}{p(y+p)} \right]$$

$$v = \frac{P}{4\pi\mu} \left[\frac{y^2}{p^3} + \frac{2(1-\nu)}{p} \right]$$

Pour la déformation immédiate on a :

$$\nu = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad q = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\text{d'où :} \quad q = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{y}{p^3}$$

$$u_0 = \frac{P}{4\pi\mu} \cdot \frac{ry}{p^3}$$

$$v_0 = \frac{P}{4\pi\mu} \left[\frac{y^2}{p^3} + \frac{1}{p} \right]$$

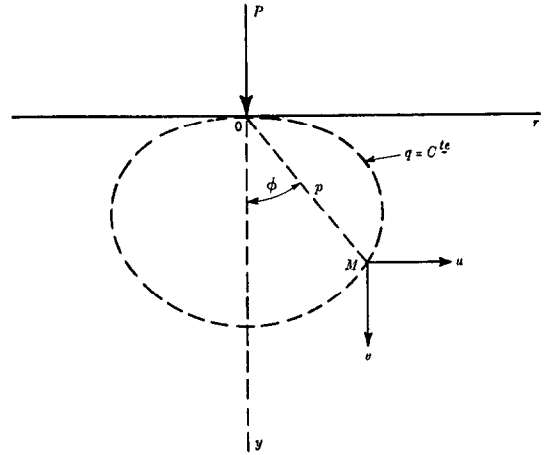


Fig. 1

Le rapport du tassement immédiat au tassement définitif en un point quelconque de la surface du massif ($y = 0$) est :

$$\frac{v_0}{v_\infty} = \frac{1}{2(1-\nu)}$$

DÉFORMATION DIFFÉRÉE

Les conditions d'équilibre d'un petit élément du sol font intervenir les contraintes totales ; en faisant apparaître les contraintes de contact puis exprimant celles-ci au moyen des relations (1) on obtient les 3 équations :

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u - \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v - \frac{\partial q}{\partial y} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w - \frac{\partial q}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

u, v, w désignant les composantes du déplacement $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ le laplacien. Les

quantités $-\frac{\partial q}{\partial x}, -\frac{\partial q}{\partial y}, -\frac{\partial q}{\partial z}$ sont les composantes de la force de courant de Terzaghi.

Exprimant d'autre part que la diminution de volume d'un élément du sol est égale au volume d'eau évacuée (l'eau étant considérée comme incompressible), on a d'après la loi de Darcy :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{k_w}{\gamma_w} \nabla^2 q \dots \dots \dots (6)$$

k_w : perméabilité de l'argile, γ_w : poids spécifique de l'eau.*

* Les équations (5), (6), (7) avaient déjà été posées par M. A. Biot (1941), (*J. Applied Physics* 12 : 151). Biot et F. M. Clingan ont résolu à l'aide de ces équations trois problèmes de tranches planes relatifs à la con-

Des équations (5) on déduit :

$$(\lambda + 2\mu) \Delta^2 \Delta = \nabla^2 q$$

et comparant à (6) on a :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = c \nabla^2 \Delta \quad \text{avec} \quad c = \frac{k_w(\lambda + 2\mu)}{\gamma_w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Cette équation (7) est l'équation de Fourier, à laquelle obéit la température dans un milieu conducteur où la chaleur diffuse. Cependant dans le cas général le problème du tassement et le problème de la diffusion de la chaleur sont complètement différents : dans le problème de Fourier les conditions à la limite concernent Δ de sorte que l'équation (7) est la seule équation indéfinie à considérer ; il n'en est pas de même dans le problème du tassement, car les conditions à la limite concernent d'autres grandeurs que Δ . L'analogie entre les 2 problèmes n'existe que dans le cas particulier étudié par Terzaghi.

Notons que q ne satisfait pas en général à l'équation de Fourier, contrairement à ce qu'ont admis divers auteurs.

Les 4 équations (5) et (6) déterminent les 4 fonctions u, v, w, q de x, y, z, t lorsqu'on leur adjoint :

- (a) les *conditions au contour* : 4 conditions à tout instant $t > 0$ en chaque point du contour : 3 concernent les contraintes ou les déplacements, la 4ème concerne la pression de l'eau.
- (b) les *conditions initiales* : D'après ce que nous avons vu, elles se réduisent à la condition :

$$\Delta(x, y, z, 0) = 0$$

Les déplacements immédiats u_0, v_0, w_0 sont différents de zéro et nous avons vu comment on pouvait les calculer directement. Mais ils ne figurent pas parmi les conditions initiales du problème actuel. La solution du problème les fournira et l'on vérifiera l'accord des valeurs ainsi trouvées avec celles que donne le calcul direct.

Equations indéfinies et conditions à la limite sont linéaires par rapport à u, v, w, q . Il en résulte que le principe de superposition des états d'équilibre s'étend au problème actuel ; il joue dans l'espace et dans le temps.

Nous envisagerons seulement ici le cas d'une charge appliquée à l'instant 0, puis maintenue constante par la suite, car par superposition le cas d'une charge, évoluant d'une façon quelconque dans le temps peut en être déduit.†

Principe de la solution—Considérons :

(1) Une solution indépendante de t satisfaisant aux conditions au contour. Cette solution $u_\infty, v_\infty, w_\infty, q_\infty$ définit l'état vers lequel tend le massif d'argile pour $t = \infty$.

(2) Des solutions de la forme : $u(x, y, z)e^{-st}; \dots; q(x, y, z)e^{-st}$ satisfaisant aux conditions au contour *rendues homogènes*. Nous entendons par là que si, par exemple, en un point du contour les 3 composantes du déplacement et la variation de la pression de l'eau sont imposées, soit :

$$u = A, \quad v = B, \quad w = C, \quad q = D$$

les solutions partielles envisagées devront satisfaire aux conditions :

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0 \quad q = 0$$

solidation d'une couche indéfinie lorsque la charge appliquée est uniformément répartie sur une bande indéfinie de la surface libre du sol (*J. Applied Physics*, vol. 12 et 13).

† J. Mandel, 1950. Étude mathématique de la consolidation des sols. *Actes du Colloque International de Mécanique de Poitiers*. IV : 9.

Pour s quelconque, le système des équations indéfinies et des conditions au contour homogènes n'a d'autre solution que u, v, w, q nuls. Des solutions non nulles n'existent que pour certaines valeurs de s dites *valeurs propres*. Ces valeurs $s_1, \dots, s_2, \dots, s_p$, forment une suite dénombrable ou *spectre discontinu* si le domaine qui se déforme est fini.

Lorsque le domaine devient infini, on obtient un *spectre continu* (auprès duquel peuvent subsister des valeurs isolées de s). La recherche des valeurs propres et des fonctions correspondantes dites fonctions propres est un problème analogue à la détermination des vibrations propres d'un domaine.

Soit $q_i(x, y, z)$, $\Delta_i(x, y, z)$ les fonctions propres (pour q et Δ) correspondant à une valeur propre s_i . On peut montrer* que :

(1) toutes les valeurs propres s_i sont positives. On les rangera par ordre de grandeur croissante : $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \dots$

(2) pour 2 solutions propres différentes on a :

$$\iiint q_i \Delta_j dV = 0 \quad i \neq j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

l'intégrale triple étant étendue à tout le domaine qui se déforme : on dira que les fonctions $q_i(x, y, z)$ et $\Delta_j(x, y, z)$ sont orthogonales dans ce domaine.

$$\begin{aligned} \text{Formons, alors, la solution : } u(x, y, z, t) &= u_\infty(x, y, z) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i u_i(x, y, z) e^{-s_i t} \\ q(x, y, z, t) &= q_\infty(x, y, z) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i q_i(x, y, z) e^{-s_i t} \end{aligned}$$

Elle satisfait aux conditions au contour (du fait que u_∞, q_∞ satisfont pleinement à ces conditions, tandis que u_i, q_i satisfont aux mêmes conditions rendues homogènes) et aux équations indéfinies. Il reste à satisfaire à la condition initiale qui s'écrit :

$$-\Delta_\infty(x, y, z) = \sum_i A_i \Delta_i(x, y, z)$$

On a donc à développer $-\Delta_\infty$ en série de fonctions Δ_i ce qui est facile en vertu de la relation d'orthogonalité (8). En multipliant les 2 membres de l'égalité par q_i et intégrant dans tout le domaine il vient d'après (8) :

$$A_i = \iiint -\Delta_\infty q_i dV : \iiint \Delta_i q_i dV$$

Pour t assez grand, on a sensiblement :

$$u = u_\infty(x, y, z) + A_1 u_1(x, y, z) e^{-s_1 t}$$

Dans le cas d'un spectre continu (domaine infini) la solution prend la forme :

$$u = u_\infty(x, y, z) + \int \phi(s) u(x, y, z, s) e^{-st} ds$$

la série étant remplacée par une intégrale simple s'il s'agit d'un spectre continu à une dimension (on verra que pour une couche plane indéfinie on a en réalité une série d'intégrales) et la condition initiale :

$$-\Delta_\infty(x, y, z) = \int \phi(s) \Delta(x, y, z, s) ds$$

permettra de déterminer la fonction $\phi(s)$ comme on le verra dans le cas de la couche plane.

La recherche de $\Delta_\infty(x, y, z)$ est un problème d'élasticité ordinaire. On peut donc dire que dès que l'on connaît les fonctions propres correspondant aux conditions au contour rendues homogènes, le problème de la consolidation du domaine est résolu, quelles que soient les valeurs des contraintes et déplacements imposés au contour. Le *problème essentiel* est donc la recherche des fonctions propres.

* J. Mandel, loc. cit.

L'application de cette méthode au cas unidimensionnel de Terzaghi redonne immédiatement la solution classique où q et Δ sont fournis par une série de Fourier ordinaire. Nous avons pu appliquer la méthode à un certain nombre d'autres problèmes, dont nous ne citerons que deux.

Couche plane comprimée entre deux parois rigides imperméables sans frottement.

La couche est indéfinie dans la direction perpendiculaire à la Fig. 2. Une force constante $F = 2 p_0 a$ est appliquée normalement aux parois (F désigne la force par unité de longueur suivant la perpendiculaire au plan de la figure). On trouve que les contraintes et les déformations sont indépendantes de la coordonnée y . La vitesse de filtration est parallèle à Ox . Les fonctions propres pour Δ sont :

$$\Delta_i = A \cos \left(\frac{\alpha_i x}{a} \right) \quad \text{et que : } s_i = \frac{c \alpha_i^2}{a^2}$$

α_i étant une racine de l'équation :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha$$

Cette équation a une infinité de racines qui constituent le spectre des valeurs α_i .

On trouve pour l'expression de la surpression de l'eau :

$$q = \sum_i A_i \left(\cos \frac{\alpha_i x}{a} - \cos \alpha_i \right) e^{-\frac{\alpha_i^2 c t}{a^2}}$$

avec :

$$A_i = \frac{p_0 (\lambda + 2\mu) \cos \alpha_i}{\mu - (\lambda + 2\mu) \cos^2 \alpha_i}$$

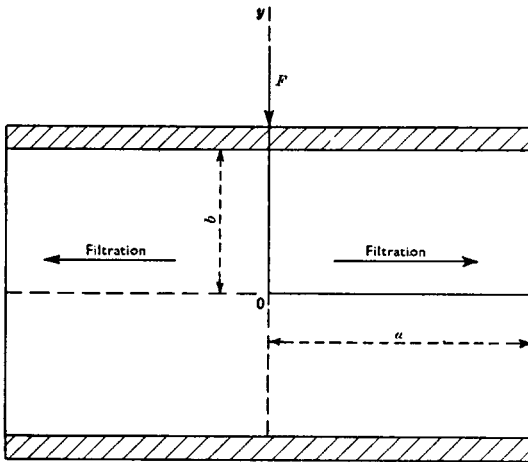


Fig. 2

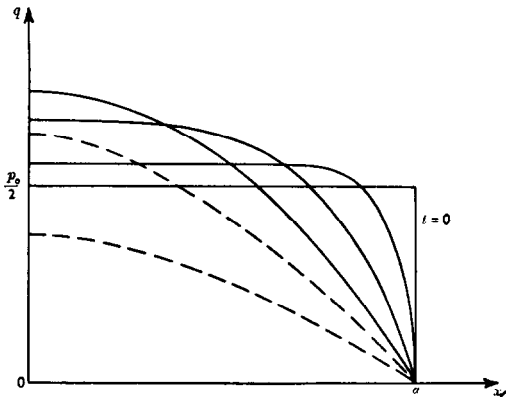


Fig. 3

L'allure de la consolidation offre ceci de particulier qu'au début, dans la région centrale, la pression de l'eau va en augmentant, comme on le voit sur les courbes isochrones de la Fig. 3. Ce fait s'explique de la façon suivante : Pour $x = +a$, q tombe de suite à 0 ; la pression totale subit également une chute brusque dans ces régions. La force totale F restant constante, il en résulte que la pression exercée par la paroi se trouve reportée vers la région centrale, où q va augmenter. A une époque de l'ordre du 2ème temps de relaxation T_2 , q passe par un maximum au centre $x = 0$. Dans la suite, q décroît en tout point.

Couche plane soumise sur ses 2 faces à un système de contraintes de révolution, les 2 faces étant perméables (Fig. 4).

Soit une couche d'argile comprise entre des couches perméables. A la surface du sol est appliquée une charge de révolution autour d'une verticale Oy , par exemple une force concentrée P de support Oy . On se propose d'étudier en fonction du temps les déplacements suivant la verticale des points de la surface du sol (Fig. 4).

Même avec les hypothèses faites (relations linéaires de l'élasticité), la solution rigoureuse de ce problème est extrêmement difficile lorsqu'on suppose différents les coefficients d'élasticité des diverses couches. Si en effet nous recherchons l'état d'équilibre définitif du terrain ($t = \infty$), nous sommes en face d'un simple problème d'élasticité, dont cependant la solution n'est bien connue que dans le cas d'un terrain isotrope homogène (solution de Boussinesq), ce qui signifie que l'argile et les couches encaissantes doivent avoir les mêmes coefficients d'élasticité. Nous nous limitons ici à ce cas.*

Nous admettrons en outre pour simplifier que les contraintes totales qui s'exercent sur les 2 faces de la couche d'argile ne varient pas sensiblement au cours de la consolidation.

Pour éliminer les difficultés provenant du fait que la couche est infinie, nous considérerons d'abord un cylindre de rayon a autour de Oy . En faisant tendre ensuite a vers l'infini, nous aurons le cas de la couche indéfinie (voir Fig. 5).

L'origine étant placée au centre du cylindre, les conditions à la limite rendues homogènes sont :

(a) sur les 2 faces de la couche :

$y = \pm b \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{ry} = 0 \quad q = 0$
d'après ce qui a été dit concernant les contraintes sur ces faces (σ_y contrainte normale, τ_{ry} cisaillement)

(b) sur la surface latérale du cylindre

$r = a : u = 0 \quad \tau_{ry} = 0 \quad \frac{\partial q}{\partial r} = 0$

u désignant le déplacement radial. Ces 3 dernières conditions sont quelque peu arbitraires mais choisies de manière que lorsque a tendra vers l'infini les conditions à l'infini soient respectées. Il est loisible de leur substituer d'autres conditions, par exemple : $v = 0 \quad \sigma_r = 0 \quad q = 0$, sans que les résultats concernant la couche indéfinie soient modifiés.

Posons :

$$\xi = \frac{r}{b} \quad \eta = \frac{y}{b} \quad T = \frac{ct}{b^2}$$

D'après l'équation (7) les fonctions propres pour Δ vérifient l'équation : $\frac{c}{s} \nabla^2 \Delta + \Delta = 0$

* Depuis la rédaction de cet article nous avons pu généraliser la solution que nous développons ici au cas où les diverses couches ont des coefficients d'élasticité différents (communication au congrès de Zurich).

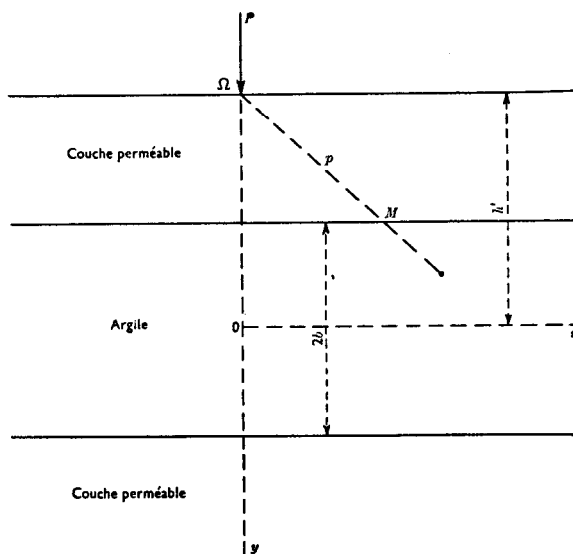


Fig. 4

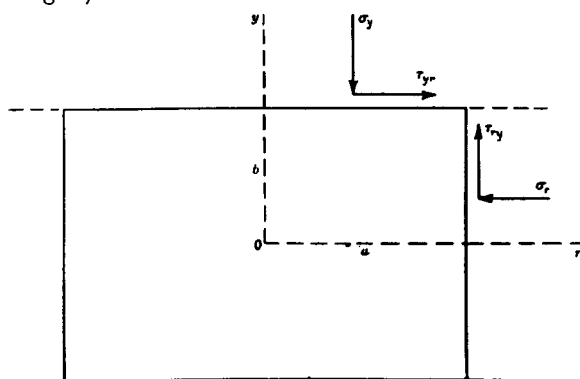


Fig. 5

Il est loisible de leur substituer d'autres conditions, par exemple : $v = 0 \quad \sigma_r = 0 \quad q = 0$, sans que les résultats concernant la couche indéfinie soient modifiés.

qui admet des solutions de la forme :

$$\Delta = A \cos (\beta \eta) J_0(\alpha \xi) \quad s = \frac{c}{b^2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

$J_0(x)$ désignant la fonction de Bessel d'ordre zéro.

A partir d'une telle solution on peut déterminer des contraintes et déplacements satisfaisant à toutes les conditions imposées, moyennant les deux conditions suivantes :

$$J_1\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \quad J_1(X) \text{ fonction de Bessel d'ordre 1.}$$

$$\frac{\alpha \theta \alpha + \beta \theta \beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\theta \alpha}{\alpha} \left(1 + \frac{2\alpha}{sh 2\alpha}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (9)$$

La 1ère condition définit un spectre discontinu de valeurs de α . La 2me définit pour chacune des valeurs précédentes de α un spectre discontinu de valeurs de β . Au total on obtient un spectre double (Fig. 6).

Pour la solution propre correspondant aux valeurs α_i et β_j le tassement en un point d'abscisse réduite ξ , c'est-à-dire, la diminution d'épaisseur de la couche pour cette abscisse, est :

$$\tau(\xi, T) = -A_{ij} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} b \frac{\theta \alpha_i}{\alpha_i} \cos \beta_j J_0(\alpha_i \xi) e^{-(\alpha_i^2 + \beta_j^2)T}$$

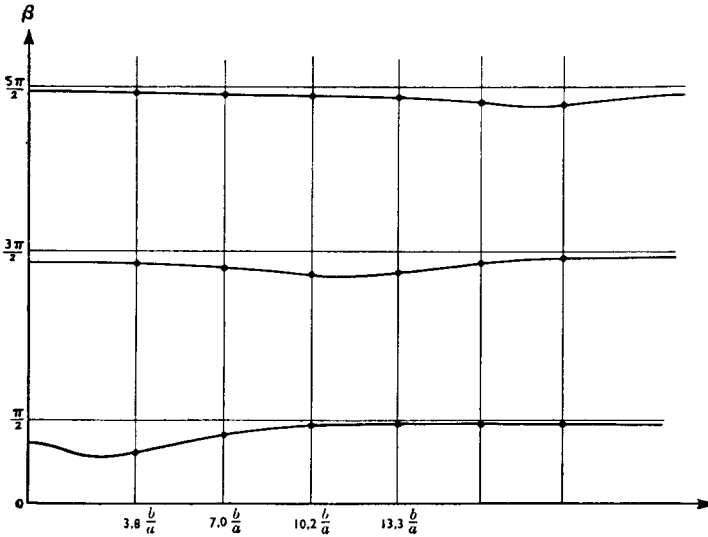


Fig. 6

On peut également partir des fonctions propres de la forme :

$$\Delta = A \sin (\beta' \eta) J_0(\alpha \xi)$$

(On trouve le même spectre que dans le cas précédent pour les valeurs de α), mais dans une telle solution le déplacement vertical v est fonction paire de y de sorte qu'il n'y a pas de tassement. Toutefois ces solutions sont à prendre en considération pour obtenir la suite complète de fonctions suivant laquelle on développera une grandeur quelconque. Les coefficients A_{ij} , A'_{ij} s'obtiendront en développant Δ_{∞} .

$$-\Delta_{\infty}(\xi, \eta) = \sum_{i,j} [A_{ij} \cos \beta_j \eta + A'_{ij} \sin \beta'_j \eta] J_0(\alpha_i \xi)$$

Si maintenant a tend vers l'infini, l'intervalle de deux valeurs successives de α tend vers 0 : le spectre en α devient continu, tandis que le spectre β reste discontinu. Remplaçant A_{ij} par $f_j(\alpha) \alpha d\alpha$ les sommes par rapport à α deviennent des intégrales. En particulier :

$$-\Delta_{\infty}(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} \phi(\alpha, \eta) J_0(\alpha \xi) \alpha d\alpha \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (10)$$

$$\text{avec : } \phi(\alpha, \eta) = \sum_j f_j(\alpha) \cos \beta_j \eta + f'_j(\alpha) \sin \beta'_j \eta$$

Pour avoir les $f_j(\alpha)$ on a donc à déterminer $\phi(\alpha, \eta)$ à partir de θ_∞ problème résolu par la relation (réciproque de la relation (10)) :

$$\phi(\alpha, \eta) = \int_0^\infty -\Delta(\xi_\infty, \eta) J_0(\alpha\xi) \xi d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

puis à développer ϕ en série de fonctions $\cos \beta_j \eta$ et $\sin \beta_j \eta$.

Dans le cas d'une force concentrée à la surface du sol, partant de la valeur donnée par les formules de Boussinesq :

$$-\Delta_\infty = \frac{P}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{y}{p^3}$$

(origine en Ω à la surface du sol), on obtient : $\phi(\alpha, \eta) = \frac{P}{2\pi(\lambda + \mu)b^2} e^{-\frac{\alpha h'}{b} - \alpha \eta} *$

$$\text{puis, en développant } e^{-\alpha \eta} : \quad f_j(\alpha) = \frac{P}{2\pi(\lambda + 2\mu)b^2} \frac{ch\alpha}{\cos \beta_j} \frac{e^{-\frac{\alpha h'}{b}}}{D_j - 1}$$

$$\text{où :} \quad D_j \left(\frac{\lambda}{\mu}, \alpha \right) = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{ch^2 \alpha \left(1 + \frac{\sin^2 \beta_j}{2\beta_j} \right)}{\cos^2 \beta_j \left(1 + \frac{sh 2\alpha}{2\alpha} \right)}$$

On déduit de là la valeur du tassement :

$$\tau(\xi, T) = \tau(\xi, \infty) - \frac{P}{2\pi(\lambda + \mu)b} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha h'}{b} - \alpha^2 T} sh \alpha \sum_j \left(V_j e^{-\beta_j^2 T} \right) J_0(\alpha\xi) d\alpha \quad . \quad (12)$$

où nous avons posé :

$$V_j = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{1}{D_j - 1}$$

La valeur de $\tau(\xi, \infty)$ est déduite de la solution de Boussinesq. En faisant $T = 0$ on obtient le tassement immédiat. Or on peut montrer que :

$$\sum_j V_j = 1$$

Par conséquent :

$$\tau(\xi, \infty) - \tau(\xi, 0) = \frac{P}{4\pi(\lambda + \mu)b} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{\alpha(h-b)}{b}} - e^{-\frac{\alpha(h+b)}{b}} \right] J_0(\alpha\xi) d\alpha = \frac{P}{4\pi(\lambda + \mu)} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right)$$

p et p' désignant les distances au point d'application de la force P de deux points pris sur une même verticale dans les 2 faces de la couche. On vérifie immédiatement à l'aide des formules de Boussinesq appliquées pour $t = 0$ avec $\nu = \frac{1}{2}$ que ce résultat est en accord avec le théorème énoncé sur les déformations immédiates.

$$* \text{ On a en effet :} \quad \int_0^\infty e^{-m y} J_0(m r) dm = \frac{y}{p}$$

$$\text{d'où en dérivant par rapport à } y : \quad \int_0^\infty e^{-m y} J_0(m r) m dm = \frac{y}{p^2}$$

Cas d'une couche d'épaisseur infinie (Fig. 7).

Soit h la distance de la face supérieure de la couche à la surface du sol. En posant :

$$h' = h + b \quad a = mb \quad \beta_j = mbx_j$$

la formule (12) s'écrit :

$$\tau(r, t) = \tau(r, \infty) - \frac{P}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_0^\infty e^{-mbshmb} e^{-mb \sum_j V_j e^{-(1+x_j^2)m^2ct}} J_0(mr) dm$$

Faisons tendre b vers l'infini. $e^{-mbshmb}$ tend vers $\frac{1}{2}$. D'après (9) $tg\beta$ tend, pour des valeurs

déterminées de m et x vers $\frac{\lambda}{2\mu} \left(\frac{1}{x} + \omega x \right)$ en posant : $\omega = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}$. D_j est équivalent à

$$mb \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{\cos^2 \beta} \quad \text{et } V_j \text{ à } \frac{\lambda + \mu}{\mu D_j} \quad \text{soit encore à : } \frac{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}{\mu^2 mb} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2}{4\mu^2} \left(\frac{\lambda}{x} + \omega x \right)^2}$$

D'autre part l'intervalle de 2 valeurs successives de β tendant vers π , l'intervalle Δx de 2 valeurs successives de x tend vers 0 comme π/mb , de sorte que nous pouvons, dans V_j ,

remplacer $1/mb$ par $\Delta x/\pi$. La somme : $\sum_j V_j e^{-(1+x_j^2)m^2ct}$

$$\text{a donc pour limite l'intégrale : } f(v, m\sqrt{ct}) = \frac{1}{\pi} \frac{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}{\mu^2} \int_0^\infty \frac{e^{-(1+x^2)m^2ct}}{1 + \frac{\lambda^2}{4\mu^2} \left(\frac{\lambda}{x} + \omega x \right)^2} dx$$

Remplaçant enfin $\lambda + \mu$ par $\frac{\mu}{1-2\nu}$ *, nous obtenons :

$$\tau(r, \infty) - \tau(r, t) = \frac{P(1-2\nu)}{4\pi\mu} \int_0^\infty e^{-mbf(v, m\sqrt{ct})} J_0(mr) dm \quad (13)$$

L'intégrale f peut être ramenée à l'intégrale de Gauss (erf.). On a :

$$f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \int_k^\infty e^{-u^2} du - \frac{\lambda}{\mu} e^{-\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)^2} k^2} \int_{\frac{k\lambda}{\lambda + 2\mu}}^\infty e^{-u^2} du \right]$$

où : $k = m\sqrt{ct}$

$$\text{Pour } \frac{\lambda}{\mu} = 0, \quad f = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_k^\infty e^{-u^2} du$$

$$\text{Pour } \frac{\lambda}{\mu} = \infty, \quad f = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[(1 + 2k^2) \int_k^\infty e^{-u^2} du - k e^{-k^2} \right]$$

Dans tous les cas, pour $t = \infty$ $f = 0$ et pour $t = 0$ $f = 1$ (comme on le prévoyait puisque

$$\sum_j V_j = 1). \quad \text{Pour } t \text{ voisin de } 0 : \quad f = 1 - \frac{4k}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2m\sqrt{ct}}{(1-\nu)\sqrt{\pi}}$$

* Si $M_c = \lambda + 2\mu$ désigne le module de compression que l'on mesure à l'œdomètre :

$$\frac{1-2\nu}{\mu} = \frac{2(1-\nu)}{M_c}$$

Nous poserons maintenant (Fig. 7) :

$$h = \rho \cos \phi \quad r = \rho \sin \phi \quad m\rho = v$$

La formule (13) devient alors :

$$\tau(r, \infty) - \tau(r, t) = \frac{P(1 - 2\nu)}{4\pi\mu\rho} I \quad (14)$$

avec :
$$I\left(\nu, \phi, \frac{\sqrt{ct}}{\rho}\right) =$$

$$\int_0^\infty e^{-v \cos \phi f} \left(\nu, v \frac{\sqrt{ct}}{\rho}\right) J_0(v \sin \phi) dv$$

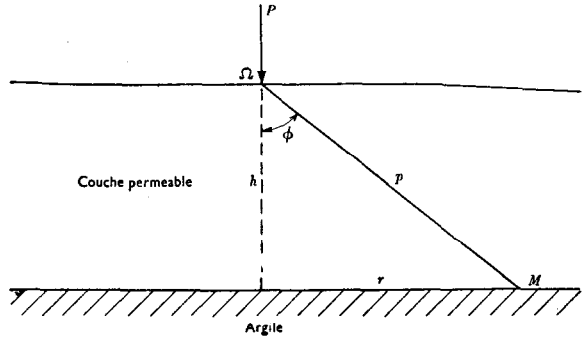


Fig. 7

Pour $t = 0$, on a : $I = 1$, d'où : $\tau(r, \infty) - \tau(r, 0) = \frac{P(1 - 2\nu)}{4\pi\mu\rho}$ (15)

conformément au théorème sur la déformation immédiate.

Par différence entre (15) et (14), en posant: $1 - I = U\left(\nu, \phi, \frac{\sqrt{ct}}{\rho}\right)$ on obtient :

$$\tau(r, t) - \tau(r, 0) = \frac{P(1 - 2\nu)}{4\pi\mu\rho} U \quad (16)$$

U , égal à 0 pour $t = 0$, à 1 pour $t = \infty$, est le *degré de consolidation* au temps t et au point M . Pour t voisin de 0, on a :

$$U = \frac{\cos \phi}{1 - \nu} \frac{\sqrt{ct}}{\rho} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad \text{d'où :} \quad \tau(r, t) - \tau(r, 0) = \frac{P}{(\pi)^{\frac{3}{2}} M_c} \frac{h\sqrt{ct}}{\rho^3}$$

Le tassement croît donc au début proportionnellement à la racine carrée du temps et ne dépend dans cette première phase que du module de compression M_c .

Pour les valeurs élevées de t , on trouve :

$$1 - U = I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho}{\sqrt{ct}} \frac{g(\nu)}{1 + \nu}$$

$g(\nu)$ désignant une fonction du coefficient de Poisson qui est égale à 1 pour $\nu = 0$ et $\nu = \frac{1}{2}$, supérieure à 1 dans l'intervalle $0, \frac{1}{2}$, mais sans dépasser 1,06.

L'abaque ci-joint (Fig. 8) donne les valeurs de U en fonction de l'angle ϕ et de $\frac{\sqrt{ct}}{\rho}$, pour $\nu = 0$ (courbes en trait plein) et pour $\nu = \frac{1}{2}$ (courbes en trait interrompu). Nous avons porté en abscisses : $x = \cos \phi$ et en ordonnées : $y = (1 + \nu) \frac{\sqrt{ct}}{\rho}$. Grâce à ce choix des ordonnées, les courbes $U = C^te$ pour $\nu = 0$ et $\nu = \frac{1}{2}$ coïncident sensiblement lorsque $U > 0,7$.

Notons pour terminer la différence énorme entre les résultats que nous venons d'obtenir pour une couche d'épaisseur infinie et ceux que donnerait l'application de la solution de Terzaghi. On sait que, dans le cas unidimensionnel traité par Terzaghi, le tassement pour une couche d'épaisseur infinie croît proportionnellement à la racine carrée du temps et par conséquent croît *au delà toute limite*. Nous trouvons au contraire un tassement tendant vers la limite fournie par la solution de Boussinesq.

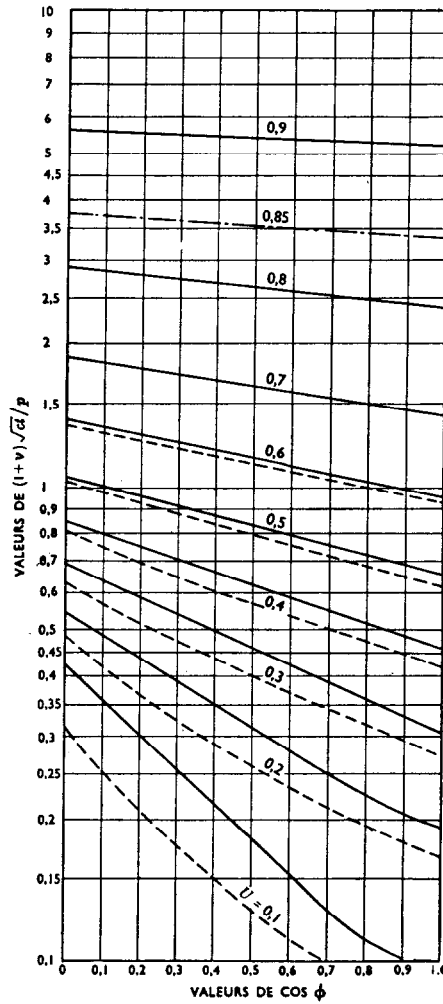


Fig. 8

La validité de la solution de Terzaghi à titre d'approximation pour les couches minces n'est pas douteuse et cette solution a l'avantage de la simplicité.

Pour les couches épaisses cette solution n'est plus du tout valable ; la méthode que nous avons exposée nous paraît ainsi combler une lacune qui subsistait dans la prévision des tassements des couches argileuses.