

# Programación funcional I

Ricardo Pérez López

IES Doñana, curso 2019/2020

## Índice general

<b>1. El lenguaje de programación Python</b>	<b>2</b>
1.1. Historia . . . . .	2
1.2. Características principales . . . . .	3
<b>2. Modelo de ejecución</b>	<b>3</b>
2.1. Modelo de ejecución . . . . .	3
2.2. Modelo de sustitución . . . . .	4
<b>3. Expresiones</b>	<b>4</b>
3.1. Concepto . . . . .	5
3.2. Evaluación de expresiones . . . . .	5
3.2.1. Valores, expresión canónica y forma normal . . . . .	6
3.2.2. Formas normales y evaluación . . . . .	7
3.2.3. Transparencia referencial . . . . .	7
3.3. Literales . . . . .	8
3.4. Operaciones, operadores y operandos . . . . .	8
3.4.1. Aridad de operadores . . . . .	9
3.4.2. Paréntesis . . . . .	9
3.4.3. Prioridad de operadores . . . . .	10
3.4.4. Asociatividad de operadores . . . . .	10
3.5. Funciones y métodos . . . . .	10
3.5.1. Funciones . . . . .	10
3.5.2. Igualdad de funciones . . . . .	11
3.5.3. Funciones con varios argumentos . . . . .	12
3.5.4. Composición de funciones . . . . .	12
3.5.5. Métodos . . . . .	12
<b>4. Tipos de datos</b>	<b>14</b>
4.1. Concepto . . . . .	14
4.2. <code>type</code> . . . . .	14
4.3. Sistema de tipos . . . . .	15
4.4. Tipado fuerte vs. débil . . . . .	15
4.5. Errores de tipos . . . . .	15
4.6. Tipos de datos básicos . . . . .	16

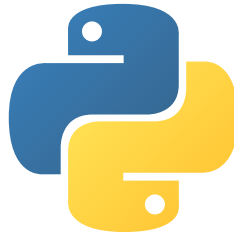
4.6.1. Números . . . . .	16
4.6.2. Cadenas . . . . .	17
4.7. Conversión de tipos . . . . .	17
4.8. Operaciones predefinidas . . . . .	18
4.8.1. Operadores predefinidos . . . . .	18
4.8.2. Funciones predefinidas . . . . .	18
4.8.3. Métodos predefinidos . . . . .	19
4.9. Actividades . . . . .	19
<b>5. Álgebra de Boole</b>	<b>21</b>
5.1. El tipo de dato <i>booleano</i> . . . . .	21
5.2. Operadores relacionales . . . . .	21
5.3. Operadores lógicos . . . . .	21
5.3.1. Tablas de verdad . . . . .	22
5.4. Axiomas . . . . .	23
5.4.1. Traducción a Python . . . . .	23
5.5. Teoremas fundamentales . . . . .	24
5.5.1. Traducción a Python . . . . .	24
5.6. El operador ternario . . . . .	25
5.6.1. Actividad . . . . .	25
<b>6. Definiciones</b>	<b>26</b>
6.1. Definiciones . . . . .	26
6.2. Identificadores y ligaduras ( <i>binding</i> ) . . . . .	26
6.2.1. Reglas léxicas . . . . .	27
6.3. Evaluación de expresiones con ligaduras . . . . .	27
6.3.1. Marcos ( <i>frames</i> ) . . . . .	28
6.4. Entorno ( <i>environment</i> ) . . . . .	30
6.5. Tipo de un identificador . . . . .	30
6.6. <i>Scripts</i> . . . . .	30
6.7. Ámbito de una ligadura . . . . .	30
<b>7. Documentación interna</b>	<b>31</b>
7.1. Identificadores significativos . . . . .	31
7.2. Comentarios . . . . .	31
<b>Bibliografía</b>	<b>32</b>

## 1. El lenguaje de programación Python

### 1.1. Historia

- Python fue creado a finales de los ochenta por **Guido van Rossum** en el Centro para las Matemáticas y la Informática (CWI, Centrum Wiskunde & Informatica), en los Países Bajos, como un sucesor del lenguaje de programación ABC.

- El nombre del lenguaje proviene de la afición de su creador por los humoristas británicos **Monty Python**.



Logo de Python

- Python alcanzó la versión 1.0 en enero de 1994.
- Python 2.0 se publicó en octubre de 2000 con muchas grandes mejoras.
- Python 3.0 se publicó en septiembre de 2008 y es una gran revisión del lenguaje que no es totalmente retrocompatible con Python 2.

## 1.2. Características principales

- Python es un lenguaje **interpretado, dinámico y multiplataforma**, cuya filosofía hace hincapié en una sintaxis que favorezca un **código legible**.
- Es un lenguaje de programación **multiparadigma**. Esto significa que más que forzar a los programadores a adoptar un estilo particular de programación, permite varios estilos: **programación orientada a objetos, programación imperativa y programación funcional**.
- Tiene una **gran biblioteca estándar**, usada para una diversidad de tareas. Esto viene de la filosofía «pilas incluidas» (*batteries included*) en referencia a los módulos de Python.
- Es administrado por la **Python Software Foundation** y posee una licencia de **código abierto**.
- La estructura de un programa se define por su anidamiento.

## 2. Modelo de ejecución

### 2.1. Modelo de ejecución

- Cuando escribimos programas (y algoritmos) nos interesa abstraernos del funcionamiento detallado de la máquina que va a ejecutar esos programas.
- Nos interesa buscar una *metáfora*, un símil de lo que significa ejecutar el programa.

- De la misma forma que un arquitecto crea modelos de los edificios que se pretenden construir, los programadores podemos usar modelos que *simulan* en esencia el comportamiento de nuestros programas.
- Esos modelos se denominan **modelos de ejecución**.
- Los modelos de ejecución nos permiten **razonar** sobre los programas sin tener que ejecutarlos.
- Definición:

**Modelo de ejecución:**

Es una herramienta conceptual que permite a los programadores razonar sobre el funcionamiento de un programa sin tener que ejecutarlo directamente en el ordenador.

- Podemos definir diferentes modelos de ejecución dependiendo, principalmente, de:
  - El paradigma de programación utilizado (ésto sobre todo).
  - El lenguaje de programación con el que escribamos el programa.
  - Los aspectos que queramos estudiar de nuestro programa.

## 2.2. Modelo de sustitución

- En programación funcional, **un programa es una expresión** y lo que hacemos al ejecutarlo es **evaluar dicha expresión**, usando para ello las definiciones de operadores y funciones predefinidas por el lenguaje, así como las definidas por el programador en el código fuente del programa.
- La **evaluación de una expresión**, en esencia, es el proceso de **sustituir**, dentro de ella, unas *sub-expresiones* por otras que, de alguna manera, estén *más cerca* del valor a calcular, y así hasta calcular el valor de la expresión al completo.
- Por ello, la ejecución de un programa funcional se puede modelar como un **sistema de reescritura** al que llamaremos **modelo de sustitución**.
- La ventaja de este modelo es que no necesitamos recurrir a pensar que debajo de todo esto hay un ordenador con una determinada arquitectura *hardware*, que almacena los datos en celdas de la memoria principal, que ejecuta ciclos de instrucción en la CPU, que las instrucciones modifican los datos de la memoria, etc.
- Todo resulta mucho más fácil que eso.
- **Todo se reduce a evaluar expresiones.**

## 3. Expresiones

### 3.1. Concepto

#### Expresión:

Una **expresión** es una frase (secuencia de símbolos) sintáctica y semánticamente correcta según las reglas del lenguaje que estamos utilizando, cuya finalidad es la de *representar* o **denotar** un determinado objeto, al que denominamos el **valor** de la expresión.

- El ejemplo clásico es el de las *expresiones aritméticas*:
  - Están formados por secuencias de números y símbolos que representan operaciones aritméticas
  - Denotan un valor numérico, que es el resultado de calcular el valor de la expresión tras hacer las operaciones que aparecen en ella.

La expresión  $(2 * (3 + 5))$  denota un valor, que es el número abstracto **16**.

- En general, las expresiones correctamente formadas satisfacen una gramática similar a la siguiente:

```
<expresión> ::= (<expresión> <opbin> <expresión> )
              | (<opun> <expresión> )
              | <número>
              | <identificador>
              | <identificador> ([<lista_argumentos>])
<lista_argumentos> ::= <expresión> (, <expresión>)*
<opbin> ::= + | - | * | / | // | ** | %
<opun> ::= + | -
```

- Esta gramática da lugar a expresiones *totalmente parentizadas*, en las que cada operación a realizar va agrupada entre paréntesis, incluso aunque no sea estrictamente necesario. Por ejemplo:

$(3 + (4 - 7))$

### 3.2. Evaluación de expresiones

- Ya hemos visto que la ejecución de un programa funcional consiste, en esencia, en evaluar una expresión.
- **Evaluar una expresión** consiste en determinar el **valor** de la expresión. Es decir, una expresión *representa* o **denota** el valor que se obtiene al evaluarla.
- En programación funcional, el significado de una expresión es su valor, y no puede ocurrir ningún otro efecto, ya sea oculto o no, en ninguna operación que se utilice para calcularlo.
- Una característica de la programación funcional es que **toda expresión posee un valor definido**, a diferencia de otros paradigmas en los que, por ejemplo, existen las *sentencias*, que no poseen ningún valor.
- Además, el orden en el que se evalúe no debe influir en el resultado.

- Podemos decir que las expresiones:

3

(1 + 2)

(5 - 2)

denotan todas el mismo valor (el número abstracto **3**).

- Es decir: todas esas expresiones son representaciones diferentes del mismo ente abstracto.
- Lo que hace el intérprete es buscar **la representación más simplificada o reducida** posible (en este caso, 3).
- Por eso a menudo usamos, indistintamente, los términos *reducir*, *simplificar* y *evaluar*.

### 3.2.1. Valores, expresión canónica y forma normal

- Los ordenadores no manipulan valores, sino que sólo pueden manejar representaciones concretas de los mismos.
  - Por ejemplo: utilizan la codificación binaria en complemento a 2 para representar los números enteros.
- Pidamos que la **representación del valor** resultado de una evaluación sea **única**.
- De esta forma, seleccionemos de cada conjunto de expresiones que denoten el mismo valor, a lo sumo una que llamaremos **expresión canónica de ese valor**.
- Además, llamaremos a la expresión canónica que representa el valor de una expresión la **forma normal de esa expresión**.
- Con esta restricción pueden quedar expresiones sin forma normal.
- Ejemplo:

- De las expresiones anteriores:

3

(1 + 2)

(5 - 2)

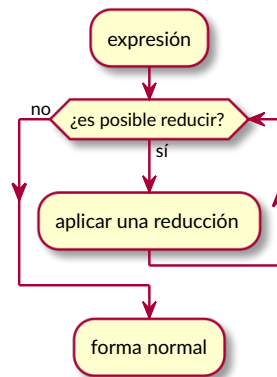
que denotan todas el mismo valor abstracto **3**, seleccionamos una (la expresión 3) como la **expresión canónica** de ese valor.

- Igualmente, la expresión 3 es la **forma normal** de todas las expresiones anteriores (y de cualquier otra expresión con valor 3).
- Es importante no confundir el valor abstracto **3** con la expresión 3 que representa dicho valor.
- Hay valores que no tienen expresión canónica:
  - Las funciones (los valores de tipo *función*).

- El número  $\pi$  no tiene representación decimal finita, por lo que tampoco tiene expresión canónica.
- Y hay expresiones que no tienen forma normal:
  - Si definimos  $inf = inf + 1$ , la expresión  $inf$  (que es un número) no tiene forma normal.
  - Lo mismo ocurre con  $\frac{1}{0}$ .

### 3.2.2. Formas normales y evaluación

- A partir de todo lo dicho, la ejecución de un programa será el proceso de encontrar su forma normal.
- Un ordenador evalúa una expresión (o ejecuta un programa) buscando su forma normal y mostrando este resultado.
- Con los lenguajes funcionales los ordenadores alcanzan este objetivo a través de múltiples pasos de reducción de las expresiones para obtener otra equivalente más simple.
- El sistema de evaluación dentro de un ordenador está hecho de forma tal que cuando ya no es posible reducir la expresión es porque se ha llegado a la forma normal.



### 3.2.3. Transparencia referencial

- En programación funcional, el valor de una expresión depende, exclusivamente, de los valores de sus sub-expresiones constituyentes.
- Dichas sub-expresiones, además, pueden ser sustituidas libremente por otras que tengan el mismo valor.
- A esta propiedad se la denomina **transparencia referencial**.
- En la práctica, eso significa que la evaluación de una expresión no puede provocar **efectos laterales**.
- Formalmente, se puede definir así:

**Transparencia referencial:**

Si  $p = q$ , entonces  $f(p) = f(q)$ .

**3.3. Literales**

- Un **literal** es un valor escrito directamente en el código del programa (en una expresión).
- El literal representa un valor constante.
- Ejemplos:
  - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 (literales que representan números enteros)
  - 3.5, -2.7 (literales que representan números reales)
  - "hola", "pepe", "25", "" (literales de tipo cadena)
- Los literales tienen que satisfacer las reglas de sintaxis del lenguaje.
- Gracias a esas reglas sintácticas, el intérprete puede identificar qué literales son, qué valor representan y de qué tipo son.
- Se deduce, pues, que **un literal debe ser la expresión canónica del valor correspondiente**.

**3.4. Operaciones, operadores y operandos**

- En una expresión puede haber:
  - **Datos**
  - **Operaciones** a realizar sobre esos datos
- A su vez, las operaciones se pueden representar en forma de:
  - Operadores
  - Funciones
  - Métodos

En una expresión hay  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Datos} \\ \text{Operaciones} \end{array} \right\}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Operadores} \\ \text{Funciones} \\ \text{Métodos} \end{array} \right\}$

- Un **operador** es un símbolo o palabra clave que representa la realización de una *operación* sobre unos datos llamados **operandos**.
- Ejemplos:
  - Los operadores aritméticos: +, -, \*, / (entre otros):



```
( 3 + 4 )
```

(aquí los operandos son los números 3 y 4)

```
( 9 * 8 )
```

(aquí los operandos son los números 9 y 8)

- El operador `in` para comprobar si un carácter pertenece a una cadena:

```
"c" in "barco"
```

(aquí los operandos son las cadenas "c" y "barco")

### 3.4.1. Aridad de operadores

- Los operadores se clasifican en función de la cantidad de operandos sobre los que operan en:

- **Unarios:** operan sobre un único operando.

Ejemplo: el operador `-` que cambia el signo de su operando:

```
-5
```

- **Binarios:** operan sobre dos operandos.

Ejemplo: la mayoría de operadores aritméticos.

- **Ternarios:** operan sobre tres operandos.

Veremos un ejemplo más adelante.

### 3.4.2. Paréntesis

- Los **paréntesis** sirven para agrupar elementos dentro de una expresión y romper la ambigüedad sobre el orden en el que se han de realizar las operaciones.
- Se usan, sobre todo, para hacer que varios elementos actúen como uno solo en el contexto de una operación.

- Por ejemplo:

$((3 + 4) * 5)$  vale 35

$(3 + (4 * 5))$  vale 23

- Para reducir la cantidad de paréntesis en una expresión, se puede:
  - Quitar los paréntesis más externos que rodean a toda la expresión.
  - Acudir a un esquema de **prioridades** y **asociatividades** de operadores.

### 3.4.3. Prioridad de operadores

- En ausencia de paréntesis, cuando un operando está afectado a derecha e izquierda por **distinto operador**, se aplican las reglas de la **prioridad**:

```
8 + 4 * 2
```

El 4 está afectado a derecha e izquierda por distintos operadores (+ y \*), por lo que se aplican las reglas de la prioridad. El \* tiene *más prioridad* que el +, así que actúa primero el \*. Equivale a hacer:

```
8 + (4 * 2)
```

Si hiciéramos

```
(8 + 4) * 2
```

el resultado sería distinto.

- Ver prioridad de los operadores en Python en <https://docs.python.org/3/reference/expressions.html#operator-precedence>.

### 3.4.4. Asociatividad de operadores

- En ausencia de paréntesis, cuando un operando está afectado a derecha e izquierda por el **mismo operador** (o distintos operadores con la **misma prioridad**), se aplican las reglas de la **asociatividad**:

```
8 / 4 / 2
```

El 4 está afectado a derecha e izquierda por el mismo operador /, por lo que se aplican las reglas de la asociatividad. El / es *asociativo por la izquierda*, así que se actúa primero el operador que está a la izquierda. Equivale a hacer:

```
(8 / 4) / 2
```

Si hiciéramos

```
8 / (4 / 2)
```

el resultado sería distinto.

- En Python, todos los operadores son **asociativos por la izquierda** excepto el \*\*, que es asociativo por la derecha.

## 3.5. Funciones y métodos

### 3.5.1. Funciones

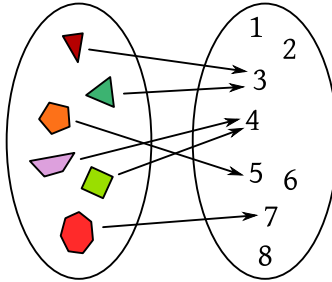
- Matemáticamente, una **función** es una regla que *asocia* a cada elemento de un conjunto (el conjunto *origen* o *dominio*) un único elemento de un segundo conjunto (el conjunto *imagen* o *codominio*).

- Se representa así:

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x)$$

donde  $A$  es el conjunto *origen* y  $B$  el conjunto *imagen*.



Función que asocia a cada polígono con su número de lados

- La **aplicación de la función**  $f$  sobre el elemento  $x$  se representa por  $f(x)$  y corresponde al valor que la función asocia al elemento  $x$  en el conjunto imagen.
- En la aplicación  $f(x)$ , al valor  $x$  se le llama **argumento** de la función.
- Por ejemplo:

La función **valor absoluto**, que asocia a cada número entero ese mismo número sin el signo (un número natural).

$$abs : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \rightarrow abs(x)$$

Cuando aplicamos la función  $abs$  al valor  $-35$  obtenemos:

$$abs(-35) = 35$$

El valor 35 es el resultado de aplicar la función  $abs$  a su argumento  $-35$ .

### 3.5.2. Igualdad de funciones

- Dos funciones son **iguales** si devuelven resultados iguales para argumentos iguales.
- Este principio recibe el nombre de **principio de extensionalidad**.

**Principio de extensionalidad:**

$f = g$  si y sólo si  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$ .

- Por ejemplo, una función que calcule el doble de su argumento multiplicándolo por 2, sería exactamente igual a otra función que calcule el doble de su argumento sumándolo consigo mismo.

En ambos casos, las dos funciones devolverán siempre los mismos resultados ante los mismos argumentos.

### 3.5.3. Funciones con varios argumentos

- El concepto de función se puede generalizar para obtener **funciones con más de un argumento**.
- Por ejemplo, podemos definir una función *max* que asocie a cada par de números el máximo de los dos.

$$\text{max} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(x, y) \rightarrow \text{max}(x, y)$$

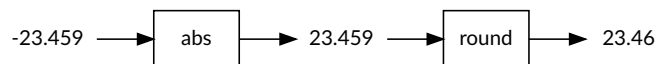
- Si aplicamos la función *max* a los argumentos 13 y -25, el resultado sería 13:

$$\text{max}(13, -25) = 13$$

### 3.5.4. Composición de funciones

- La manera más sencilla de realizar varias operaciones sobre los mismos datos es hacer que el resultado de una operación sea la entrada de otra operación.
- Se va creando así una **secuencia de operaciones** donde la salida de una es la entrada de la siguiente.
- Es una técnica que ayuda a **descomponer un problema en partes** que se van resolviendo por pasos como en una **cadena de montaje**.
- En programación funcional esto se consigue **componiendo funciones**, es decir, haciendo **que el resultado de una función sea un argumento para otra función**:

```
round(abs(-23.459), 2) # devuelve 23.46
```



### 3.5.5. Métodos

- Los **métodos** son, para la *programación orientada a objetos*, el equivalente a las **funciones** para la *programación funcional*.
- Los métodos son como funciones que actúan *sobre* un valor.

- La *aplicación* de un método se denomina **invocación** o **llamada** al método, y se escribe:

$$v.m()$$

que representa la **llamada** al método  $m$  sobre el valor  $v$ .

- Los métodos también pueden tener argumentos como cualquier función:

$$v.m(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

- En la práctica, no hay mucha diferencia entre hacer:

$$v.m(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

y hacer

$$m(v, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

- Pero conceptualmente, hay una gran diferencia entre un estilo y otro:
  - El primero es más **orientado a objetos** (el *objeto*  $v$  «recibe» un mensaje solicitando la ejecución del método  $m$ ).
  - En cambio, el segundo es más **funcional** (la *función*  $m$  se aplica a sus argumentos, de los cuales  $v$  es uno más).
- Python es un lenguaje *multiparadigma* que soporta ambos estilos y por tanto dispone tanto de funciones como de métodos. Hasta que no veamos la orientación a objetos, supondremos que un método es como otra forma de escribir una función.
- Por ejemplo:

Las cadenas tienen definidas el método `count()` que devuelve el número de veces que aparece una subcadena dentro de la cadena:

```
'hola caracola'.count('ol')
```

devuelve 2.

```
'hola caracola'.count('a')
```

devuelve 4.

- Si `count()` fuese una función en lugar de un método, recibiría dos parámetros: la cadena y la subcadena. En tal caso, se usaría así:

```
count('hola caracola', 'ol')
```

- Una operación podría tener *forma* de **operador**, de **función** o de **método**.
- De hecho, en Python hay operaciones que tienen **las tres formas**.
- Por ejemplo, la suma de dos números enteros se puede expresar:

- Mediante el operador `+`:

```
4 + 3
```

- Mediante la función `int.__add__`:

```
int.__add__(4, 3)
```

- Mediante el método `__add__` ejecutado sobre uno de los enteros (y pasando el otro número como *argumento* del método):

```
(4).__add__(3)
```

## 4. Tipos de datos

### 4.1. Concepto

- Los datos que comparten características y propiedades se agrupan en **conjuntos**.
- Asimismo, sobre cada conjunto de valores se definen una serie de **operaciones**, que son aquellas que tiene sentido realizar con esos valores.
- Un **tipo de datos** define un conjunto de **valores** y el conjunto de **operaciones** válidas que se pueden realizar sobre dichos valores.

- Definición:

#### Tipo de un dato:

Es una característica del dato que indica el conjunto de *valores* al que pertenece y las *operaciones* que se pueden realizar sobre él.

- El **tipo de una expresión** es el tipo del valor resultante de evaluar dicha expresión.
- Ejemplos:
  - El tipo `int` en Python define el conjunto de los **números enteros**, sobre los que se pueden realizar las operaciones aritméticas (suma, producto, etc.) entre otras.
  - El tipo `str` define el conjunto de las **cadenas**, sobre las que se pueden realizar otras operaciones (la *concatenación*, la *indexación*, etc.).

### 4.2. `type`

- La función `type` devuelve el tipo de un valor:

```
>>> type(3)
<class 'int'>
>>> type(3.0)
<class 'float'>
>>> type('hola')
```

```
<class 'str'>
```

- Es muy útil para saber el tipo de una expresión compleja:

```
>>> type(3 + 4.5 ** 2)
<class 'float'>
```

### 4.3. Sistema de tipos

- El **sistema de tipos** de un lenguaje es el conjunto de reglas que asigna un tipo a cada elemento del programa.
- Exceptuando a los lenguajes **no tipados** (Ensamblador, código máquina, Forth...) todos los lenguajes tienen su propio sistema de tipos, con sus características.
- El sistema de tipos de un lenguaje depende también del paradigma de programación que soporte el lenguaje. Por ejemplo, en los lenguajes **orientados a objetos**, el sistema de tipos se construye a partir de los conceptos propios de la orientación a objetos (*clases, interfaces...*).

### 4.4. Tipado fuerte vs. débil

- Un lenguaje de programación es **fuertemente tipado** (o de **tipado fuerte**) si no se permiten violaciones de los tipos de datos.
- Es decir, un valor de un tipo concreto no se puede usar como si fuera de otro tipo distinto a menos que se haga una *conversión explícita*.
- Un lenguaje es **débilmente tipado** (o de **tipado débil**) si no es de tipado fuerte.
- En los lenguajes de tipado débil se pueden hacer operaciones entre datos cuyo tipos no son los que espera la operación, gracias al mecanismo de *conversión implícita*.
- Ejemplo:
  - Python es un lenguaje **fuertemente tipado**, por lo que no podemos hacer lo siguiente (da un error de tipos):

```
2 + "3"
```

- En cambio, PHP es un lenguaje **débilmente tipado** y la expresión anterior en PHP es perfectamente válida (y vale 5).

El motivo es que el sistema de tipos de PHP convierte *implícitamente* la cadena "3" en el entero 3 cuando se usa en una operación de suma (+).

### 4.5. Errores de tipos

- Cuando se intenta realizar una operación sobre un dato cuyo tipo no admite esa operación, se produce un **error de tipos**.
- Ese error puede ocurrir cuando:

- Los operandos de un operador no pertenecen al tipo que el operador necesita (ese operador no está definido sobre datos de ese tipo).
- Los argumentos de una función o método no son del tipo esperado.

- Por ejemplo:

```
4 + "hola"
```

es incorrecto porque el operador `+` no está definido sobre un entero y una cadena (no se pueden sumar un número y una cadena).

- En caso de que exista un error de tipos, lo que ocurre dependerá de si estamos usando un lenguaje interpretado o compilado:

- Si el lenguaje es **interpretado** (Python):

El error se localizará **durante la ejecución** del programa y el intérprete mostrará un mensaje de error advirtiéndolo en el momento justo en que la ejecución alcance la línea de código errónea, para acto seguido finalizar la ejecución del programa.

- Si el lenguaje es **compilado** (Java):

Es muy probable que el comprobador de tipos del compilador detecte el error de tipos **durante la compilación** del programa, es decir, antes incluso de ejecutarlo. En tal caso, se abortará la compilación para impedir la generación de código objeto erróneo.

## 4.6. Tipos de datos básicos

### 4.6.1. Números

- Hay dos tipos numéricos básicos en Python: los enteros y los reales.
  - Los **enteros** se representan con el tipo `int`.  
Sólo contienen parte entera, y sus literales se escriben con dígitos sin punto decimal (ej: `13`).
  - Los **reales** se representan con el tipo `float`.  
Contienen parte entera y parte fraccionaria, y sus literales se escriben con dígitos y con punto decimal separando ambas partes (ej: `4.87`). Los números en notación exponencial (`2e3`) también son reales.
- Las **operaciones** que se pueden realizar con los números son los que cabría esperar (aritméticas, trigonométricas, matemáticas en general).
- Los enteros y los reales generalmente se pueden combinar en una misma expresión aritmética y suele resultar en un valor real, ya que se considera que los reales *contienen* a los enteros.
  - Ejemplo: `4 + 3.5` devuelve `7.5`.



### 4.6.2. Cadenas

- Las **cadenas** son secuencias de cero o más caracteres codificados en Unicode.
- En Python se representan con el tipo `str`.
  - No existe el tipo *carácter* en Python. Un carácter en Python es simplemente una cadena que contiene un solo carácter.
- Un literal de tipo cadena se escribe encerrando sus caracteres entre comillas simples (`'`) o dobles (`"`).
  - No hay ninguna diferencia entre usar unas comillas u otras, pero si una cadena comienza con comillas simples, debe acabar también con comillas simples (y viceversa).

- Ejemplos:

```
"hola"  
'Manolo'  
"27"
```

- También se pueden escribir literales de tipo cadena encerrándolos entre triples comillas (`'''` o `"""`).
  - Estos literales se usan para escribir cadenas formadas por varias líneas. La sintaxis de las triples comillas respetan los saltos de línea.
  - Ejemplo:

```
"""Bienvenido  
a  
Python"""
```

- No es lo mismo `27` que `"27"`.
  - `27` es un número entero (un literal de tipo `int`).
  - `"27"` es una cadena (un literal de tipo `str`).
- Una **cadena vacía** es aquella que no contiene ningún carácter. Se representa con el literal `''` o `""`.

## 4.7. Conversión de tipos

- Hemos visto que en Python las conversiones de tipos deben ser **explícitas**, es decir, que debemos indicar en todo momento qué dato queremos convertir a qué tipo.
- Para ello existen funciones cuyo nombre coincide con el tipo al que queremos convertir el dato: `str()`, `int()` y `float()`, entre otras.

```
>>> 4 + '24'  
Traceback (most recent call last):  
File "<stdin>", line 1, in <module>  
TypeError: unsupported operand type(s) for +: 'int' and 'str'
```

```
>>> 4 + int('24')
28
```

- Convertir un dato a cadena suele funcionar siempre, pero convertir una cadena a otro tipo de dato puede fallar dependiendo del contenido de la cadena:

```
>>> int('hola')
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
ValueError: invalid literal for int() with base 10: 'hola'
```

## 4.8. Operaciones predefinidas

### 4.8.1. Operadores predefinidos

#### 4.8.1.1. Operadores aritméticos

Operador	Descripción	Ejemplo	Resultado	Comentarios
+	Suma	3 + 4	7	
-	Resta	3 - 4	-1	
*	Producto	3 * 4	12	
/	División	3 / 4	0.75	Devuelve un <code>float</code>
%	Módulo	4 % 3	1	Resto de la división
		8 % 3	2	
**	Exponente	3 ** 4	81	Devuelve 3 <sup>4</sup>
//	División entera	4 // 3	1	
	hacia abajo	-4 // 3	-2	??

#### 4.8.1.2. Operadores de cadenas

Operador	Descripción	Ejemplo	Resultado
+	Concatenación	'ab' + 'cd' 'ab'	'abcd'
*	Repetición	'ab' * 3 3 * 'ab'	'ababab'
			'ababab'
[0]	Primer carácter	'hola'[0]	'h'
[1:]	Resto de cadena	'hola'[1:]	'ola'

### 4.8.2. Funciones predefinidas

Función	Descripción	Ejemplo	Resultado
<code>abs(n)</code>	Valor absoluto	<code>abs(-23)</code>	23

Función	Descripción	Ejemplo	Resultado
<code>len(cad)</code>	Longitud de la cadena	<code>len('hola')</code>	4
<code>max(n<sub>1</sub>(, n<sub>2</sub>)*)</code>	Valor máximo	<code>max(2, 5, 3)</code>	5
<code>min(n<sub>1</sub>(, n<sub>2</sub>)*)</code>	Valor mínimo	<code>min(2, 5, 3)</code>	2
<code>round(n[, p])</code>	Redondeo	<code>round(23.493)</code> <code>round(23.493, 1)</code>	23 23.5
<code>type(v)</code>	Tipo del valor	<code>type(23.5)</code>	<class 'float'>

#### 4.8.2.1. Funciones matemáticas

- Python incluye una gran cantidad de funciones matemáticas agrupadas dentro del módulo `math`.
- Los **módulos** en Python son conjuntos de funciones (y más cosas) que se pueden **importar** dentro de nuestra sesión o programa.
- Son la base de la **programación modular**, que ya estudiaremos.
- Para *importar* una función de un módulo se puede usar la orden `from`. Por ejemplo, para importar la función `gcd` (que calcula el máximo común divisor de dos números) se haría:

```
>>> from math import gcd # importamos la función gcd que está en el módulo math
>>> gcd(16, 6)           # la función se usa como cualquier otra
2
```

- También se puede importar directamente el módulo en sí:

```
>>> import math          # importamos el módulo math
>>> math.gcd(16, 6)      # la función gcd sigue estando dentro del módulo
2
```

- La lista completa de funciones que incluye el módulo `math` se puede consultar en su documentación:

<https://docs.python.org/3/library/math.html>

#### 4.8.3. Métodos predefinidos

- Igualmente, en la documentación podemos encontrar una lista de métodos interesantes que operan con datos de tipo cadena:

<https://docs.python.org/3/library/stdtypes.html#string-methods>

### 4.9. Actividades

1. Representar, según el modelo de sustitución, la evaluación las siguientes expresiones, aplicando paso a paso la reducción que corresponda. Indicar también el tipo del valor resultante:

a. `3 + 6 * 14`

- b. `8 + 7 * 3.0 + 4 * 6`
- c. `-4 * 7 + 2 ** 3 / 4 - 5`
- d. `4 / 2 * 3 / 6 + 6 / 2 / 1 / 5 ** 2 / 4 * 2`

2. Convertir en expresiones aritméticas algorítmicas las siguientes expresiones algebraicas:

- a.  $5 \cdot (x + y)$
- b.  $a^2 + b^2$
- c.  $\frac{x+y}{u+\frac{w}{a}}$
- d.  $\frac{x}{y} \cdot (z + w)$

3. Determinar, según las reglas de prioridad y asociatividad del lenguaje Python, qué paréntesis sobran en las siguientes expresiones. Reescribirlas sin los paréntesis sobrantes. Calcular su valor y deducir su tipo:

- a. `(8 + (7 * 3) + 4 * 6)`
- b. `-(2 ** 3)`
- c. `(33 + (3 * 4)) / 5`
- d. `2 ** (2 * 3)`
- e. `(3.0) + (2 * (18 - 4 ** 2))`
- f. `(16 * 6) - (3) * 2`

4. Usar la función `math.sqrt` para escribir dos expresiones en Python que calculen las dos soluciones a la ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Recordar que las soluciones son:

$$x_1 = -b + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = -b - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. Evaluar las siguientes expresiones:

- a. `9 - 5 - 3`
- b. `2 // 3 + 3 / 5`
- c. `9 // 2 / 5`
- d. `7 % 5 % 3`
- e. `7 % (5 % 3)`
- f. `(7 % 5) % 3`
- g. `(7 % 5 % 3)`
- h. `((12 + 3) // 2) / (8 - (5 + 1))`
- i. `12 / 2 * 3`
- j. `math.sqrt(math.cos(4))`
- k. `math.cos(math.sqrt(4))`
- l. `math.trunc(815.66) + round(815.66)`

6. Escribir las siguientes expresiones algorítmicas como expresiones algebraicas:

- a. `b ** 2 - 4 * a * c`
- b. `3 * x ** 4 - 5 * x ** 3 + x * 12 - 17`
- c. `(b + d) / (c + 4)`
- d. `(x ** 2 + y ** 2) ** (1 / 2)`

## 5. Álgebra de Boole

### 5.1. El tipo de dato *booleano*

- Un dato **lógico** o *booleano* es aquel que puede tomar uno de dos posibles valores, que se denotan normalmente como **verdadero** y **falso**.
- Esos dos valores tratan de representar los dos valores de verdad de la **lógica** y el **álgebra booleana**.
- Su nombre proviene de **George Boole**, matemático que definió por primera vez un sistema algebraico para la lógica a mediados del S. XIX.
- En Python, el tipo de dato lógico se representa como `bool` y sus posibles valores son `False` y `True` (con la inicial en mayúscula).
- Esos dos valores son *formas especiales* para los enteros `0` y `1`, respectivamente.

### 5.2. Operadores relacionales

- Los **operadores relacionales** son operadores que toman dos operandos (que usualmente deben ser del mismo tipo) y devuelven un valor *booleano*.
- Los más conocidos son los **operadores de comparación**, que sirven para comprobar si un dato es menor, mayor o igual que otro, según un orden preestablecido.
- Los operadores de comparación que existen en Python son:

`<`   `>`   `<=`   `>=`   `==`   `!=`

- Por ejemplo:

```
>>> 4 == 3
False
>>> 5 == 5
True
>>> 3 < 9
True
```

```
>>> 9 != 7
True
>>> False == True
False
>>> 8 <= 8
True
```

### 5.3. Operadores lógicos

- Las **operaciones lógicas** se representan mediante **operadores lógicos**, que son aquellos que toman uno o dos operandos *booleanos* y devuelven un valor *booleano*.
- Las operaciones básicas del álgebra de Boole se llaman **suma**, **producto** y **complemento**.

- En **lógica proposicional** (un tipo de lógica matemática que tiene estructura de álgebra de Boole), se llaman:

Operación	Operador
Disyunción	$\vee$
Conjunción	$\wedge$
Negación	$\neg$

- En Python se representan como `or`, `and` y `not`, respectivamente.

### 5.3.1. Tablas de verdad

- Una **tabla de verdad** es una tabla que muestra el valor lógico de una expresión compuesta, para cada uno de los valores lógicos que puedan tomar sus componentes.
- Se usan para definir el significado de las operaciones lógicas y también para verificar que se cumplen determinadas propiedades.
- Las tablas de verdad de los operadores lógicos son:

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

A	$\neg A$
F	V
V	F

- Que traducido a Python sería:

A	B	A or B
False	False	False

A	B	A or B
False	True	True
True	False	True
True	True	True

A	B	A and B
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	True

A	not A
False	True
True	False

## 5.4. Axiomas

1. Ley asociativa:  $\begin{cases} \forall a, b, c \in \mathfrak{B} : (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \\ \forall a, b, c \in \mathfrak{B} : (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \end{cases}$
2. Ley conmutativa:  $\begin{cases} \forall a, b \in \mathfrak{B} : a \vee b = b \vee a \\ \forall a, b \in \mathfrak{B} : a \wedge b = b \wedge a \end{cases}$
3. Ley distributiva:  $\begin{cases} \forall a, b, c \in \mathfrak{B} : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ \forall a, b, c \in \mathfrak{B} : a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{cases}$
4. Elemento neutro:  $\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B} : a \vee F = a \\ \forall a \in \mathfrak{B} : a \wedge V = a \end{cases}$
5. Elemento complementario:  $\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B} ; \exists \neg a \in \mathfrak{B} : a \vee \neg a = V \\ \forall a \in \mathfrak{B} ; \exists \neg a \in \mathfrak{B} : a \wedge \neg a = F \end{cases}$

Luego  $(\mathfrak{B}, \neg, \vee, \wedge)$  es un álgebra de Boole.

### 5.4.1. Traducción a Python

1. Ley asociativa:

```
(a or b) or c == a or (b or c)
(a and b) and c == a and (b and c)
```

2. Ley conmutativa:

```
a or b == b or a
a and b == b and a
```

3. Ley distributiva:

```
a or (b and c) == (a or b) and (a or c)
a and (b or c) == (a and b) or (a and c)
```

4. Elemento neutro:

```
a or False == a
a and True == a
```

5. Elemento complementario:

```
a or (not a) == True
a and (not a) == False
```

## 5.5. Teoremas fundamentales

6. Ley de idempotencia:  $\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B} : a \vee a = a \\ \forall a \in \mathfrak{B} : a \wedge a = a \end{cases}$

7. Ley de absorción:  $\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B} : a \vee V = V \\ \forall a \in \mathfrak{B} : a \wedge F = F \end{cases}$

8. Ley de identidad:  $\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B} : a \vee F = a \\ \forall a \in \mathfrak{B} : a \wedge V = a \end{cases}$

9. Ley de involución:  $\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B} : \neg\neg a = a \\ \neg V = F \\ \neg F = V \end{cases}$

10. Leyes de De Morgan:  $\begin{cases} \forall a, b \in \mathfrak{B} : \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \\ \forall a, b \in \mathfrak{B} : \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \end{cases}$

### 5.5.1. Traducción a Python

6. Ley de idempotencia:

```
a or a == a
a and a == a
```

7. Ley de absorción:



```
a or True == True
a and False == False
```

8. Ley de identidad:

```
a or False == a
a and True == a
```

9. Ley de involución:

```
not (not a) == a
not True == False
not False == True
```

10. Leyes de De Morgan:

```
not (a or b) == (not a) and (not b)
not (a and b) == (not a) or (not b)
```

## 5.6. El operador ternario

- Las expresiones lógicas (o *booleanas*) se pueden usar para comprobar si se cumple una determinada **condición**.
- Las condiciones en un lenguaje de programación se representan mediante expresiones lógicas cuyo valor (*verdadero* o *falso*) indica si la condición se cumple o no se cumple.
- Con el **operador ternario** podemos hacer que el resultado de una expresión varíe entre dos posibles opciones dependiendo de si se cumple o no una condición.
- El operador ternario se llama así porque es el único operador en Python que actúa sobre tres operandos.
- Su sintaxis es:

```
<expr_condicional> ::= <valor_si_cierto> if <condición> else <valor_si_falso>
```

donde:

- *<condición>* debe ser una expresión lógica
- *<valor\_si\_cierto>* y *<valor\_si\_falso>* pueden ser expresiones de cualquier tipo
- El valor de la expresión completa será *<valor\_si\_cierto>* si la *<condición>* es cierta; en caso contrario, su valor será *<valor\_si\_falso>*.
- Ejemplo:

```
25 if 3 > 2 else 17
```

evalúa a 25.

### 5.6.1. Actividad

7. ¿Cuál es la asociatividad del operador ternario? Demostrarlo.

## 6. Definiciones

### 6.1. Definiciones

- Introduciremos ahora en nuestro lenguaje una nueva instrucción (técnicamente es una **sentencia**) con la que vamos a poder hacer **definiciones**.
- A esa sentencia (en este momento) la llamaremos **definición**, y expresa el hecho de que **un nombre representa un valor**.
- Las definiciones tienen la siguiente sintaxis:

```
<definición> ::= <identificador> = <expresión>
```

- Por ejemplo:

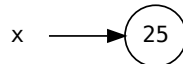
```
x = 25
```

A partir de ese momento, el identificador `x` representa el valor `25`.

Y si `x` vale `25`, la expresión `2 + x * 3` vale `77`.

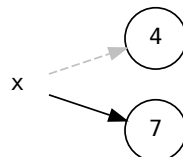
### 6.2. Identificadores y ligaduras (*binding*)

- Los **identificadores** son los nombres o símbolos que representan a los elementos del lenguaje.
- Cuando hacemos una definición, lo que hacemos es asociar un identificador con un valor.
- Esa asociación se denomina **ligadura** (o *binding*).
- Por esa razón, también se dice que una definición es una ligadura.
- También decimos que el identificador está **ligado** (*bound*).



- En un **lenguaje funcional puro**, un identificador ya ligado no se puede ligar a otro valor. Por ejemplo, lo siguiente daría un error:

```
x = 4  
x = 7
```



- Python no es un lenguaje funcional puro, por lo que se permite volver a ligar el mismo identificador a otro valor distinto (*rebinding*).
  - Eso hace que se pierda el valor anterior.

- Por ahora, **no lo hagamos**.

### 6.2.1. Reglas léxicas

- Cuando hacemos una definición debemos tener en cuenta ciertas cuestiones relativas al identificador:
  - ¿Cuál es la **longitud máxima** de un identificador?
  - ¿Qué **caracteres** se pueden usar?
  - ¿Se distinguen **mayúsculas** de **minúsculas**?
  - ¿Coincide con una palabras clave o reservada?
    - \* **Palabra clave**: palabra que forma parte de la sintaxis del lenguaje.
    - \* **Palabra reservada**: palabra que no puede emplearse como identificador.

### 6.3. Evaluación de expresiones con ligaduras

- Podemos usar un identificador ligado dentro de una expresión (siempre que la expresión sea una expresión válida según las reglas del lenguaje, claro está):

```
>>> x = 25
>>> 2 + x * 3
77
```

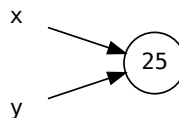
- Intentar usar en una expresión un identificador no ligado provoca un error (*nombre no definido*):

```
>>> y
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
NameError: name 'y' is not defined
```

- Podemos hacer:

```
x = 25
y = x
```

- En este caso estamos ligando a **y** el valor que tiene **x**.
- **x** e **y** comparten valor.



### 6.3.1. Marcos (frames)

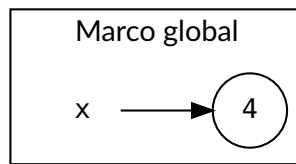
- Un **marco** (del inglés *frame*) es un **conjunto de ligaduras**.
- En un marco, un identificador sólo puede tener como máximo una ligadura.
- En cambio, ese mismo identificador puede estar ligado a diferentes valores en diferentes marcos.
- La existencia de un marco dependerá de la estructura y el funcionamiento del programa, es decir, que cuando se ejecutan ciertas construcciones del programa, éstas crean sus propios marcos.
  - Por ejemplo, cuando definamos una función y la apliquemos a unos argumentos, dicha aplicación llevará asociada su propio marco.
- El **marco global** es un marco que siempre existe en cualquier punto del programa y contiene las ligaduras definidas fuera de cualquier construcción o estructura del mismo.
  - Por ahora es el único marco que existe para nosotros.
- En un momento dado, un marco contendrá las ligaduras que se hayan definido hasta ese momento en el contexto asociado a ese marco:

```
1 >>> x
2 Traceback (most recent call last):
3   File "<stdin>", line 1, in <module>
4   NameError: name 'x' is not defined
5 >>> x = 25
6 >>> x
7 25
```

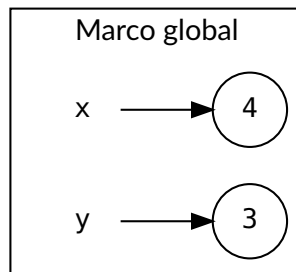
- Aquí estamos trabajando con el *marco global* (el único que existe hasta ahora para nosotros).
  - En la línea 1, el identificador `x` aún no está ligado, por lo que su uso genera un error (el marco global no contiene hasta ahora ninguna ligadura para `x`).
  - En la línea 6, en cambio, el identificador puede usarse sin error ya que ha sido ligado previamente en la línea 5 (el marco global ahora contiene una ligadura para `x` con el valor 25).
- Si tenemos:

```
1 >>> x = 4
2 >>> y = 3
3 >>> z = y
```

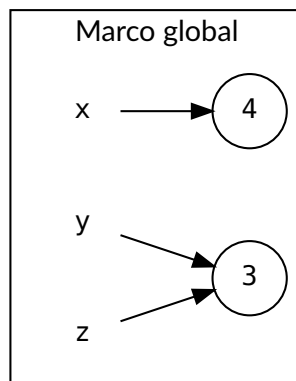
Según la línea en la que nos encontremos, tenemos los siguientes marcos globales:



Marco global en la línea 1



Marco global en la línea 2



Marco global en la línea 3

## 6.4. Entorno (*environment*)

- Un **entorno** (del inglés, *environment*) es una secuencia de **marcos** que contienen todas las ligaduras válidas en un punto concreto del programa.
- Es decir, el entorno nos dice qué identificadores son accesibles en un momento dado, y con qué valores están ligados.
- El entorno, por tanto, depende del punto del programa en el que se calcule.
- Como por ahora sólo tenemos un marco, que es el *marco global*, nuestro entorno sólo podrá tener un único marco, es decir, que el entorno coincidirá con el marco global.
- La cosa cambiará en cuanto empecemos a crear funciones.

## 6.5. Tipo de un identificador

- Cuando un identificador está ligado a un valor, a efectos prácticos el identificador actúa como si fuera el valor.
- Como cada valor tiene un tipo de dato asociado, también podemos hablar del **tipo de un identificador**.

El **tipo de un identificador** es el tipo del dato con el que está ligado.

- Si un identificador no está ligado, no tiene sentido preguntarse qué tipo de dato tiene.

## 6.6. Scripts

- Cuando tenemos varias definiciones o muy largas resulta tedioso tener que introducirlas una y otra vez en el intérprete interactivo.
- Lo más cómodo es teclearlas juntas dentro un archivo que luego cargaremos desde dentro del intérprete.
- Ese archivo se llama **script** y, por ahora, contendrá una lista de las definiciones que nos interese usar en nuestras sesiones interactivas con el intérprete.
- Los nombres de archivo de los *scripts* en Python llevan extensión **.py**.
- Para cargar un *script* en nuestra sesión usamos la orden **from**. Por ejemplo, para cargar un *script* llamado **definiciones.py**, usaremos:

```
from definiciones import *
```

## 6.7. Ámbito de una ligadura

- El **ámbito de una ligadura** es la porción del programa en la que dicha ligadura tiene validez.

- Es un concepto nada trivial y, a medida que vayamos incorporando nuevos elementos al lenguaje, el concepto de *ámbito* irá cambiando para tener en cuenta más condicionantes.
- *Por ahora*, diremos que el ámbito de una ligadura abarca desde su propia definición hasta el final del *script* (o el final de la sesión actual en el intérprete interactivo).

## 7. Documentación interna

### 7.1. Identificadores significativos

- Se recomienda usar identificadores descriptivos.

Es mejor usar:

```
ancho = 640
alto = 400
superficie = ancho * alto
```

que

```
x = 640
y = 400
z = x * y
```

aunque ambos programas sean equivalentes en cuanto al efecto que producen y el resultado que generan.

- Si el identificador representa varias palabras, se puede usar el carácter de guión bajo (`_`) para separarlas y formar un único identificador:

```
altura_triangulo = 34.2
```

### 7.2. Comentarios

- Los comentarios en Python empiezan con el carácter `#` y se extienden hasta el final de la línea.
- Los comentarios pueden aparecer al comienzo de la línea o a continuación de un espacio en blanco o una porción de código.
- Los comentarios no pueden ir dentro de un literal de tipo cadena.

Un carácter `#` dentro de un literal cadena es sólo un carácter más.

```
# este es el primer comentario
spam = 1 # y este es el segundo comentario
        # ... y este es el tercero
texto = "# Esto no es un comentario porque va entre comillas."
```

## Bibliografía

Abelson, Harold, Gerald Jay Sussman, and Julie Sussman. 1996. *Structure and Interpretation of Computer Programs*. 2nd ed. Cambridge, Mass. : New York: MIT Press ; McGraw-Hill.

Blanco, Javier, Silvina Smith, and Damián Barsotti. 2009. *Cálculo de Programas*. Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Córdoba.

Van-Roy, Peter, and Seif Haridi. 2004. *Concepts, Techniques, and Models of Computer Programming*. Cambridge, Mass: MIT Press.