

Abstracciones funcionales

Ricardo Pérez López

IES Doñana, curso 2022/2023

Generado el 2022/10/17 a las 16:52:00

Índice

1. Abstracciones lambda	2
1.1. Expresiones lambda	2
1.2. Parámetros y cuerpos	2
1.3. Aplicación funcional	3
1.3.1. Evaluación de una aplicación funcional	3
1.3.2. Funciones con nombre	4
1.4. Variables ligadas y libres	5
2. Ámbitos	6
2.1. Ámbitos léxicos	6
2.2. Ámbito de creación de una ligadura	8
2.2.1. Visibilidad	8
2.2.2. Almacenamiento	10
2.3. Ámbito de un identificador	11
2.4. Ámbito de un parámetro	12
2.5. Ámbito de una variable ligada	13
3. Evaluación	14
3.1. Entorno (<i>environment</i>)	14
3.1.1. Ámbitos, marcos y entornos	15
3.2. Evaluación de expresiones con entornos	17
3.3. Evaluación de expresiones lambda con entornos	19
3.3.1. Ligaduras <i>sombreadas</i>	23
3.3.2. Renombrado de parámetros	25
3.3.3. Visualización en <i>Pythontutor</i>	25
3.4. Resolución de atributos de objetos	26
3.5. Estrategias de evaluación	27
3.5.1. Orden de evaluación	27
3.5.2. Composición de funciones	28
3.5.3. Evaluación estricta y no estricta	30
4. Abstracciones funcionales	32

4.1. Pureza	32
4.2. Las funciones como abstracciones	34
4.2.1. Especificaciones de funciones	36

1. Abstracciones lambda

1.1. Expresiones lambda

Las **expresiones lambda** (también llamadas **abstracciones lambda** o **funciones anónimas** en algunos lenguajes) son expresiones que capturan la idea abstracta de «función».

Son la forma más simple y primitiva de describir funciones en un lenguaje funcional.

Su sintaxis (simplificada) es:

```
⟨expresión_lambda⟩ ::= lambda [⟨lista_parámetros⟩]: ⟨expresión⟩
⟨lista_parámetros⟩ := identificador (, identificador)*
```

Por ejemplo, la siguiente expresión lambda captura la idea general de «suma»:

```
lambda x, y: x + y
```

1.2. Parámetros y cuerpos

Los identificadores que aparecen entre la palabra clave **lambda** y el carácter de dos puntos (:) son los **parámetros** de la expresión lambda.

La expresión que aparece tras los dos puntos (:) es el **cuerpo** de la expresión lambda.

En el ejemplo anterior:

```
lambda x, y: x + y
```

- Los parámetros son **x** e **y**.
- El cuerpo es **x + y**.
- Esta expresión lambda captura la idea general de sumar dos valores (que en principio pueden ser de cualquier tipo, siempre y cuando admitan el operador **+**).
- En sí misma, esa expresión devuelve un valor válido que representa a una función.

1.3. Aplicación funcional

De la misma manera que podemos aplicar una función a unos argumentos, también podemos aplicar una expresión lambda a unos argumentos.

Por ejemplo, la aplicación de la función `max` sobre los argumentos `3` y `5` es una expresión que se escribe como `max(3, 5)` y que denota el valor **cinco**.

Igualmente, la aplicación de una expresión lambda como

```
lambda x, y: x + y
```

sobre los argumentos `4` y `3` se representa así:

```
(lambda x, y: x + y)(4, 3)
```

O sea, que la expresión lambda representa el papel de una función.

1.3.1. Evaluación de una aplicación funcional

En nuestro *modelo de sustitución*, la **evaluación de la aplicación de una expresión lambda** consiste en **sustituir**, en el cuerpo de la expresión lambda, **cada parámetro por su argumento correspondiente** (por orden) y devolver la expresión resultante *parentizada* (entre paréntesis).

A esta operación se la denomina **aplicación funcional** o **β -reducción**.

Siguiendo con el ejemplo anterior:

```
(lambda x, y: x + y)(4, 3)
```

sustituimos en el cuerpo de la expresión lambda los parámetros `x` e `y` por los argumentos `4` y `3`, respectivamente, y parentizamos la expresión resultante, lo que da:

```
(4 + 3)
```

que simplificando (según las reglas del operador `+`) da **7**.

Es importante hacer notar que el cuerpo de una expresión lambda sólo se evalúa cuando se lleva a cabo una β -reducción (es decir, cuando se aplica la expresión lambda a unos argumentos), y no antes.

Por tanto, el cuerpo de la expresión lambda no se evalúa cuando se define la expresión.

Por ejemplo, al evaluar la expresión:

```
lambda x, y: x + y
```

el intérprete no evalúa la expresión del cuerpo (`x + y`), sino que crea un valor de tipo «función» pero sin entrar a ver «qué hay» en el cuerpo.

Sólo se mira lo que hay en el cuerpo cuando se aplica la expresión lambda a unos argumentos.

En particular, podemos tener una expresión lambda como la siguiente, que sólo dará error cuando se aplique a un argumento, no antes:

```
lambda x: x + 1/0
```

1.3.2. Funciones con nombre

Si hacemos la siguiente definición:

```
suma = lambda x, y: x + y
```

le estamos dando un nombre a la expresión lambda, es decir, a una función.

A partir de ese momento podemos usar `suma` en lugar de su valor (la expresión lambda), por lo que podemos hacer:

```
suma(4, 3)
```

en lugar de

```
(lambda x, y: x + y)(4, 3)
```

Cuando aplicamos a sus argumentos una función así definida también podemos decir que estamos **invocando** o **llamando** a la función. Por ejemplo, en `suma(4, 3)` estamos *llamando* a la función `suma`, o hay una *llamada* a la función `suma`.

La evaluación de la llamada a `suma(4, 3)` implicará realizar los siguientes tres pasos y en este orden:

1. Sustituir el nombre de la función `suma` por su definición, es decir, por la expresión lambda a la cual está ligado.
2. Evaluar los argumentos que aparecen en la llamada.
3. Aplicar la expresión lambda a sus argumentos.

Esto implica la siguiente secuencia de reescrituras:

```
suma(4, 3)           # evalúa suma y devuelve su definición
= (lambda x, y: x + y)(4, 3) # evalúa 4 y devuelve 4
= (lambda x, y: x + y)(4, 3) # evalúa 3 y devuelve 3
= (lambda x, y: x + y)(4, 3) # aplica la expresión lambda sus argumentos
= (4 + 3)            # evalúa 4 + 3 y devuelve 7
= 7
```

Como una expresión lambda es una función, **aplicar una expresión lambda a unos argumentos es como llamar a una función pasándole dichos argumentos**.

Por tanto, también podemos decir que **llamamos o invocamos una expresión lambda**, pasándole unos argumentos durante esa llamada.

En consecuencia, ampliamos ahora nuestra gramática de las expresiones en Python incorporando las expresiones lambda como un tipo de función:

```

<llamada_función> ::= <función>(<lista_argumentos>))
<función> ::= identificador
            | (<expresión_lambda>)
<expresión_lambda> ::= lambda [<lista_parámetros>]: <expresión>
<lista_parámetros> ::= identificador(, identificador)*
<lista_argumentos> ::= <expresión>(<expresión>)*

```

Ejemplo

Dado el siguiente código:

```
suma = lambda x, y: x + y
```

¿Cuánto vale la expresión siguiente?

```
suma(4, 3) * suma(2, 7)
```

Según el modelo de sustitución, reescribimos:

```

suma(4, 3) * suma(2, 7)           # definición de suma
= (lambda x, y: x + y)(4, 3) * suma(2, 7) # evaluación de 4
= (lambda x, y: x + y)(4, 3) * suma(2, 7) # evaluación de 3
= (lambda x, y: x + y)(4, 3) * suma(2, 7) # aplicación a 4 y 3
= (4 + 3) * suma(2, 7)           # evaluación de 4 + 3
= 7 * suma(2, 7)                 # definición de suma
= 7 * (lambda x, y: x + y)(2, 7)  # evaluación de 2
= 7 * (lambda x, y: x + y)(2, 7)  # evaluación de 7
= 7 * (lambda x, y: x + y)(2, 7)  # aplicación a 2 y 7
= 7 * (2 + 7)                   # evaluación de 2 + 7
= 7 * 9                         # evaluación de 7 * 9
= 63

```

1.4. Variables ligadas y libres

Si un *identificador* de los que aparecen en el *cuerpo* de una expresión lambda también aparece en la *lista de parámetros* de esa expresión lambda, a ese identificador le llamamos **variable ligada** de la expresión lambda.

En caso contrario, le llamamos **variable libre** de la expresión lambda.

En el ejemplo anterior:

```
lambda x, y: x + y
```

los dos identificadores que aparecen en el cuerpo (*x* e *y*) son variables ligadas, ya que ambos aparecen también en la lista de parámetros de la expresión lambda.

En cambio, en la expresión lambda:

```
lambda x, y: x + y + z
```

x e y son variables ligadas mientras que z es una variable libre.

En realidad, **una variable ligada y un parámetro son la misma cosa**.

Tan sólo cambia su denominación dependiendo del lugar donde aparece su identificador en la expresión lambda:

- Cuando aparece **antes** del «:», le llamamos «parámetro».
- Cuando aparece **después** del «:», le llamamos «variable ligada».

Por ejemplo: en la siguiente expresión lambda:

```
lambda x, y: x + y
```

el identificador x aparece dos veces, pero en los dos casos representa la misma cosa. Tan sólo se llama de distinta forma («parámetro» o «variable ligada») dependiendo de dónde aparece.

El que se llame «variable ligada» no tiene nada que ver con las *ligaduras* que hemos estudiado hasta ahora.

Son conceptos totalmente distintos:

- A las variables ligadas se las llama así porque están *ligadas a un parámetro*.
- En cambio, una *ligadura* es la asociación que se establece entre un *identificador* y un *valor*.

2. Ámbitos

2.1. Ámbitos léxicos

Un **ámbito léxico** es una porción del código fuente de un programa.

Decimos que **ciertas construcciones sintácticas definen ámbitos léxicos**.

Cuando una construcción define un ámbito léxico, **la sintaxis del lenguaje determina dónde empieza y acaba** ese ámbito léxico en el código fuente.

Por tanto, siempre se puede determinar sin ambigüedad si **una instrucción está dentro de un determinado ámbito léxico**, tan sólo leyendo el código fuente del programa y sin necesidad de ejecutarlo.

Eso significa que el concepto de *ámbito léxico* es un concepto **estático**.

Por ejemplo: en el lenguaje de programación Java, los bloques son estructuras sintácticas delimitadas por llaves `{` y `}` que contienen instrucciones.

Los bloques de Java definen ámbitos léxicos; por tanto, si una instrucción está dentro de un bloque (es decir, si está situada entre las llaves `{` y `}` que delimitan el bloque), entonces esa instrucción se encuentra dentro del ámbito léxico que define el bloque.

Además de los ámbitos léxicos, existen también los llamados **ámbitos dinámicos**, que funcionan de otra forma y que no estudiaremos en este curso.

La mayoría de los lenguajes de programación usan ámbitos léxicos, salvo excepciones (como LISP o los *shell scripts*) que usan ámbitos dinámicos.

Por esa razón, a partir de ahora, cuando hablemos de «ámbitos» sin especificar de qué tipo, nos estaremos siempre refiriendo a «ámbitos léxicos».

Los ámbitos **se pueden anidar recursivamente**, o sea, que pueden estar contenidos unos dentro de otros.

Por tanto, una instrucción puede estar en varios ámbitos al mismo tiempo (anidados unos dentro de otros).

De todos ellos, el **ámbito más interno** es el que no contiene, a su vez, a ningún otro ámbito.

En un momento dado, el **ámbito actual** es el ámbito más interno en el que se encuentra la instrucción que se está ejecutando actualmente.

El concepto de *ámbito* es un concepto nada trivial y, a medida que vayamos incorporando nuevos elementos al lenguaje, tendremos que ir adaptándolo para tener en cuenta más condicionantes.

Por ahora sólo hemos tenido un ámbito llamado **ámbito global**:

- Si se está ejecutando un *script* en el intérprete por lotes (con `python script.py`), el *ámbito global* abarca todo el *script*, desde la primera instrucción hasta la última.
- Si estamos en el intérprete interactivo (con `python` o `ipython3`), el *ámbito global* abarca toda nuestra sesión con el intérprete, desde que arrancamos la sesión hasta que finalicemos la misma.

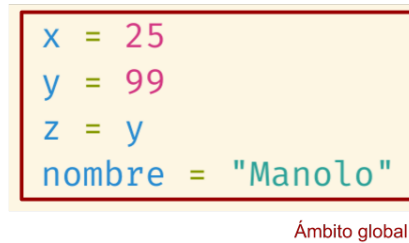
En el momento en que se empieza a ejecutar un *script* o se arranca una sesión con el intérprete interactivo, se entra en el *ámbito global*.

Del ámbito global sólo se sale cuando se finaliza la ejecución del *script* o se cierra el intérprete interactivo.

Se denominan **definiciones globales** a las definiciones que se ejecutan cuando el ámbito actual es el ámbito global.

Las ligaduras que crean las definiciones globales se denominan **ligaduras globales** o **ligaduras de ámbito global**.

Por ejemplo, en el siguiente *script* se ejecutan cuatro instrucciones. El ámbito actual de cada una de las instrucciones es el ámbito global, que es el único ámbito que existe en el *script*:



```
x = 25
y = 99
z = y
nombre = "Manolo"
```

Ámbito global

2.2. Ámbito de creación de una ligadura

Para nosotros, los ámbitos interesantes son los llamados *ámbitos de creación de una ligadura*.

El **ámbito de creación de una ligadura** es el ámbito actual de la instrucción que crea la ligadura.

Dicho de otra forma: es el ámbito más interno donde se crea la ligadura.

Se dice que **la ligadura es local al ámbito donde se crea la ligadura**.

Si ese ámbito es el ámbito *global*, decimos que la ligadura es *global*.

Como estamos usando un lenguaje de programación que trabaja con *ámbitos léxicos*, **el ámbito de creación de una ligadura siempre estará definido por una construcción sintáctica**.

Por tanto:

- Sus *límites* vienen marcados únicamente por la *sintaxis* de la construcción sintáctica que define el ámbito y dentro de la cual se está creando la ligadura.
- El ámbito de creación de una ligadura se puede determinar simplemente leyendo el código fuente del programa, sin tener que ejecutarlo (es decir, que se puede determinar de forma *estática*).

2.2.1. Visibilidad

El ámbito de creación de una ligadura es una «región» cuyas fronteras limitan la porción del código fuente en la que es visible esa ligadura.

En la mayoría de los lenguajes (incluyendo Python y Java), las ligaduras empiezan a existir justo donde se crea la ligadura, es decir, en el punto donde se ejecuta la instrucción que *define* la ligadura.

Por tanto, no es posible *acceder* a esa ligadura *antes* de ese punto.

Por otra parte, una ligadura deja de existir (y, por tanto, deja de ser visible) allí donde termina su ámbito de creación.

Eso significa que **no es posible acceder a esa ligadura fuera de su ámbito de creación**: sólo es visible dentro de él.

En el siguiente ejemplo vemos cómo se crean varias ligaduras:


```
1 x = 25
2 y = 99
3 z = y
4 nombre = 'Manolo'
```

Todas esas ligaduras se definen en el ámbito global, por lo que el **ámbito de creación** de todas ellas es el **ámbito global** (y, por tanto, decimos que cada una de esas ligaduras es una **ligadura global** o **de ámbito global**).

Una ligadura empieza a existir justo donde se crea, y termina de existir al final de su ámbito de creación.

Por tanto, la ligadura `y → 99` empieza a existir en la línea 2 y termina al final del *script*, que es donde termina su ámbito de creación (en este caso, el *ámbito global*).

Eso quiere decir que esa ligadura sólo es visible desde que se crea hasta el final de su ámbito de creación.

En resumen:

Ámbito (léxico):

Porción del código fuente de un programa.

Ámbito de creación de una ligadura:

El ámbito actual de la instrucción que define la ligadura; es decir: el ámbito más interno donde se define la ligadura. Los límites de ese ámbito sólo vienen determinados por la sintaxis del lenguaje, ya que ciertas construcciones sintácticas definen su propio ámbito.

Este ámbito determina dónde está el límite de visibilidad de la ligadura (*dónde se puede ver la ligadura dentro del programa*).

Como a nosotros nos interesan principalmente los *ámbitos de creación*, a partir de ahora supondremos que, cuando hablamos de «*ámbito*», nos referimos al *ambito de creación de una ligadura*, si no se dice lo contrario.

Un caso especial ocurre con los atributos de los *objetos* de Python.

Recordemos que, por ejemplo, cuando importamos un módulo usando la sentencia `import`, podemos acceder al objeto que representa ese módulo usando su nombre, lo que nos permite acceder a sus atributos y crear otros nuevos.

Esos atributos y sus ligaduras correspondientes (tanto las ya existentes como las nuevas que podamos crear) sólo son visibles cuando accedemos a ellas usando el operador punto (`.`) a través del objeto donde se ha definido, que es quien determina el contexto válido en el que esos atributos son visibles.

Por tanto, no son visibles fuera del objeto:

```
>>> import math
>>> math.pi
3.141592653589793      # El nombre 'pi' es visible dentro del objeto
```

```
>>> pi # El nombre 'pi' no es visible fuera del objeto
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
NameError: name 'pi' is not defined
```

Igualmente, si creamos un nuevo atributo dentro del objeto, esa ligadura sólo existirá en el propio objeto y, por tanto, sólo será visible cuando accedamos al atributo a través del objeto donde se ha definido.

```
>>> import math
>>> math.x = 95 # Creamos un nuevo atributo en el objeto
>>> math.x # El nombre 'x' es visible dentro del objeto
95
>>> x # El nombre 'x' no es visible fuera del objeto
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
NameError: name 'x' is not defined
```

En resumen: al resolver el nombre de un atributo de un objeto, la visibilidad de su ligadura no vendrá definida por un determinado ámbito, sino por el *contexto* en el que se quiere acceder al atributo.

Sólo podremos acceder al atributo si usamos el contexto adecuado, que en este caso es el objeto que contiene ese atributo.

2.2.2. Almacenamiento

Las ligaduras se almacenan en *espacios de nombres*.

Si una instrucción crea una ligadura, se denomina **espacio de nombres actual** al espacio de nombres donde se almacena dicha ligadura.

El espacio de nombres actual, es decir, el espacio de nombres que el compilador o el intérprete selecciona para almacenar una ligadura, depende del *contexto* en el que se crea la ligadura.

Tenemos dos posibilidades:

1. El espacio de nombres seleccionado depende del ámbito donde se crea la ligadura.
 2. El espacio de nombres seleccionado NO depende del ámbito donde se crea la ligadura.
1. Si el espacio de nombres seleccionado depende del ámbito donde se crea la ligadura, tenemos que:
 - a. Si el ámbito donde se crea la ligadura lleva asociado un espacio de nombres, ese espacio de nombres almacenará las ligaduras que se crean dentro de ese ámbito.
 - b. Si no, entonces la ligadura se almacenará en el espacio de nombres del ámbito de creación más interno que contenga al actual y que sí lleve asociado un espacio de nombres.

Por tanto, a la hora de almacenar una ligadura, se van mirando todos los ámbitos desde el ámbito actual, pasando por todos los ámbitos que incluyen a éste (en orden, de más interno a más externo), hasta encontrar el primer ámbito que lleve asociado un espacio de nombres.

En todo caso, en Python, cuando el lugar donde se almacena la ligadura depende del ámbito donde se crea la ligadura, el espacio de nombres seleccionado será siempre un marco.

2. Si el espacio de nombres seleccionado NO depende del ámbito donde se crea la ligadura, entonces es porque la instrucción ya está indicando directamente el espacio de nombres apropiado.

Esto es lo que ocurre cuando se crea una ligadura dentro de un objeto en Python usando el operador punto (`.`), ya que los objetos son espacios de nombres en este lenguaje.

Por ejemplo, si en Python hacemos:

```
import math
math.x = 75
```

estamos creando la ligadura $x \rightarrow 75$ en el espacio de nombres que representa el módulo `math` (que es un objeto en Python y que, por tanto, es quien almacena la ligadura), no en el espacio de nombres global ni en ningún otro.

Por tanto, el espacio de nombres ha sido seleccionado a través del operador punto (`.`), no en función del ámbito donde se ha ejecutado la sentencia `math.x = 75`.

En resumen:

El **ámbito** de una ligadura determina la **visibilidad** de la ligadura: dónde es *visible* esa ligadura.

El **espacio de nombres** determina el **almacenamiento** de la ligadura: dónde se *almacena* esa ligadura.

Cuando las ligaduras se definen en el ámbito global, se dice que tienen **ámbito global**.

Cuando las ligaduras se almacenan en el espacio de nombres global, se dice que tienen **almacenamiento global**.

Ampliaremos ahora el concepto de *ámbito* para incluir los aspectos nuevos que incorporan las expresiones lambda.

2.3. Ámbito de un identificador

A veces, por economía del lenguaje, se suele hablar del «**ámbito de un identificador**», en lugar de hablar del «*ámbito de creación de la ligadura que liga ese identificador con un valor*».

Por ejemplo, en el siguiente *script*:

```
x = 25
```

tenemos que:

- En el ámbito global, se crea una ligadura que liga al identificador `x` con el valor `25`.
- Por tanto, se dice que **el ámbito de creación de esa ligadura es el ámbito global**.
- Pero también se suele decir que «*el identificador `x` es global*» (o, simplemente, que «*`x` es global*»), **asociando al ámbito** no la ligadura, sino **el identificador en sí**.

Pero hay que tener cuidado, ya que ese mismo identificador puede aparecer en ámbitos diferentes y, por tanto, ligarse en ámbitos diferentes.

Así que no tendría sentido hablar del ámbito que tiene ese identificador (ya que podría tener varios) sino, más bien, **del ámbito que tiene una aparición concreta de ese identificador**.

Por eso, sólo deberíamos hablar del ámbito de un identificador cuando no haya ninguna ambigüedad respecto a qué aparición concreta nos estamos refiriendo.

Por ejemplo, en el siguiente *script*:

```
1 x = 4
2 suma = (lambda x, y: x + y)(2, 3)
```

el identificador `x` que aparece en la línea 1 y el identificador `x` que aparece en la línea 2 pertenecen a ámbitos distintos (como veremos en breve) aunque sea el mismo identificador.

2.4. Ámbito de un parámetro

El cuerpo de la expresión lambda define un ámbito.

Al llamar a la expresión lambda, se empieza a ejecutar su cuerpo y, por tanto, **se entra en dicho ámbito**.

En ese momento, **se crea un nuevo marco** en la memoria, que representa esa ejecución concreta de dicha expresión lambda.

Lo primero que ocurre entonces es que **cada parámetro de la expresión lambda se liga a uno de esos argumentos** en el orden en que aparecen en la llamada a la expresión lambda (primer parámetro con primer argumento, segundo con segundo, etcétera).

Esas ligaduras **se almacenan en el marco de la expresión lambda** nada más entrar en el cuerpo de la expresión lambda.

Ese marco se eliminará de la memoria cuando se termine de ejecutar la expresión lambda.

En consecuencia, podemos decir que:

- El **ámbito de creación de la ligadura** entre un parámetro y su argumento es el **cuerpo** de la expresión lambda, así que la **visibilidad** del parámetro es ese cuerpo.
- Esa ligadura se crea justo al entrar en ese ámbito, así que se puede **acceder** a ella en cualquier parte del cuerpo de la expresión lambda.
- El **espacio de nombres** que almacena las ligaduras entre parámetros y argumentos es el marco que se crea al llamar a la expresión lambda.

Esto se resume diciendo que «el **ámbito de un parámetro** es el **cuerpo** de su expresión lambda».

También se dice que el parámetro tiene un **ámbito local** y un **almacenamiento local** al cuerpo de la expresión lambda; por tanto, y resumiendo: que es **local** a dicha expresión lambda.

En consecuencia, **sólo podemos acceder al valor de un parámetro dentro del cuerpo de su expresión lambda**.

En resumen:

El **ámbito de un parámetro** es el ámbito de la ligadura que se establece entre éste y su argumento

correspondiente, y se corresponde con el **cuerpo** de la expresión lambda donde aparece.

Por tanto, el parámetro sólo existe dentro del cuerpo de la expresión lambda y no podemos **acceder** a su valor fuera del mismo; por eso se dice que tiene un **ámbito local** a la expresión lambda.

Además, la **ligadura** entre el parámetro y su argumento **se almacena en el marco** de la llamada a la expresión lambda, y por eso se dice que tiene un **almacenamiento local** a la expresión lambda.

2.5. Ámbito de una variable ligada

Hemos visto que a los **parámetros** de una expresión lambda se les llama **variables ligadas** cuando aparecen dentro del cuerpo de dicha expresión lambda.

Por tanto, todo lo que se dijo sobre el ámbito de un parámetro se aplica exactamente igual al ámbito de una variable ligada.

Recordemos que el ámbito de un parámetro es el cuerpo de su expresión lambda, que es la porción de código donde podemos acceder al valor del argumento con el que está ligado.

Por tanto, el **ámbito de una variable ligada es el cuerpo de la expresión lambda** donde aparece, y es el único lugar dentro del cual podremos acceder al valor de la variable ligada (que también será el valor del argumento con el que está ligada).

Por eso también se dice que la variable ligada tiene un **ámbito local** al cuerpo de la expresión lambda o que es **local** a dicha expresión lambda.

Por contraste, las variables, identificadores y ligaduras que no tienen ámbito local se dice que tienen un **ámbito no local** o, a veces, un **ámbito más global**.

Si, además, ese ámbito resulta ser el **ámbito global**, decimos directamente que esa variable, identificador o ligadura es **global**.

Por ejemplo, las **variables libres** que aparecen en una expresión lambda no son locales a dicha expresión (ya que no representan parámetros de la expresión) y, por tanto, tienen un ámbito más global que el cuerpo de dicha expresión lambda y se almacenarán en otro espacio de nombres distinto al marco que se crea al llamar a la expresión lambda.

En resumen:

El **ámbito de una variable ligada** es el ámbito de la ligadura que se crea entre ésta y su argumento correspondiente, y se corresponde con el **cuerpo** de la expresión lambda donde aparece.

Por tanto, la variable ligada sólo existe dentro del cuerpo de la expresión lambda y no podemos **acceder** a su valor fuera del mismo; por eso se dice que tiene un **ámbito local** a la expresión lambda.

Además, la **ligadura** entre la variable ligada y su argumento **se almacena en el marco** de la llamada a la expresión lambda, y por eso se dice que tiene un **almacenamiento local** a la expresión lambda.

O sea: con los **variables ligadas** ocurre exactamente lo mismo que con los **parámetros**, ya que, de hecho, **un parámetro y una variable ligada son la misma cosa**, como ya hemos visto.

Ejemplo

En el siguiente *script*:

```
1 # Aquí empieza el script (no hay más definiciones antes de esta línea):  
2 producto = lambda x: x * x  
3 y = producto(3)  
4 z = x + 1 # da error
```

Hay dos ámbitos: (1) el ámbito global y (2) el ámbito local definido el cuerpo de la expresión lambda (la expresión `x * x`).

La expresión lambda de la línea 2 tiene un parámetro (`x`) que aparece como la variable ligada `x` en el cuerpo de la expresión lambda.

El ámbito de la variable ligada `x` es el **cuerpo** de la expresión lambda.

Por tanto, fuera del cuerpo de la expresión lambda, no es posible acceder al valor de la variable ligada `x`, al encontrarnos **fuera de su ámbito** (la `x` **sólo está ligada en el cuerpo** de la expresión lambda).

Por eso, la línea 4 dará un error al intentar acceder al valor del identificador `x`, que no está ligado en el ámbito actual (el global).

3. Evaluación

3.1. Entorno (*environment*)

El **entorno** es una extensión del concepto de *marco*, usado por los lenguajes interpretados en la **resolución de identificadores**, ya que:

El **entorno** nos dice **todas las ligaduras que son accesibles en un momento concreto de la ejecución de un programa interpretado**.

Durante la ejecución del programa, se van creando y destruyendo marcos a medida que se van ejecutando *scripts*, funciones o métodos.

Según se van creando en memoria, esos marcos van enlazándose unos con otros creando una **secuencia de marcos** que se denomina **entorno** (del inglés, *environment*).

En un momento dado, el entorno contendrá más o menos marcos dependiendo de por dónde haya pasado la ejecución del programa hasta ese momento.

El entorno, por tanto, es un concepto **dinámico** que **depende del momento en el que se calcule**, es decir, de por dónde va la ejecución del programa.

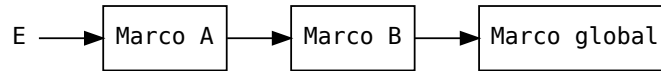
O, más concretamente: depende de qué *scripts*, funciones, métodos y definiciones se han ejecutado hasta ahora.

Por tanto, el entorno depende de qué partes del programa se han ido ejecutando hasta llegar a la instrucción actual.

El entorno **siempre contendrá**, al menos, un marco: el *marco global*, que **siempre será el último de la secuencia de marcos** que forman el entorno.

Gráficamente, representaremos los entornos como una **lista enlazada de marcos** conectados entre sí formando secuencias, de manera que:

- Usaremos la letra E como un indicador que siempre apunta al primer marco de la lista (el *marco actual*).
- El último marco siempre será el marco global.



Por ejemplo:

- Cuando entramos a ejecutar un *script*, se crea su *marco global*.
- Si dentro de ese *script* llamamos a una expresión lambda, se creará un marco para esa ejecución concreta de la expresión lambda.

En ese caso habrá dos marcos en la memoria: el *global* y el de esa llamada a la expresión lambda. Este último marco se eliminará de la memoria cuando termine esa ejecución de la expresión lambda.

- El marco global sólo se eliminará de la memoria cuando se finalice la ejecución del *script*.

3.1.1. Ámbitos, marcos y entornos

Hagamos un resumen rápido de todo lo visto hasta ahora.

El entorno contiene todas las ligaduras accesibles en un punto concreto de la ejecución del programa interpretado.

Un marco contiene un conjunto de ligaduras (representa un *espacio de nombres*), y un entorno es una secuencia de marcos.

Los marcos se van creando y destruyendo a medida que se van activando ciertas partes del programa (*scripts*, funciones o métodos) durante la ejecución del mismo.

Una expresión lambda representa una función.

Cuando se llama a una función, se crea un nuevo marco que contiene las ligaduras que ligan a los parámetros con los valores de esos argumentos.

El cuerpo de una expresión lambda define su propio ámbito, de forma que, las ligaduras que ligan a los parámetros con los argumentos, se definen dentro de ese ámbito y son, por tanto, *locales* a ese ámbito.

Es decir: los parámetros (y las ligaduras entre los parámetros y los argumentos) tienen **un ámbito local** al cuerpo de la expresión lambda y sólo existen y son visibles dentro de él.

Además, esas ligaduras tienen un **almacenamiento local** al **marco** que se crea al llamar a la expresión lambda.

Ese **marco** y ese **ámbito** van ligados:

- Cuando **se empieza** a ejecutar el cuerpo de la expresión lambda, **se entra** en el ámbito y **se crea** el marco en la memoria.

- Cuando **se termina** de ejecutar el cuerpo de la expresión lambda, **se sale** del ámbito y **se elimina** el marco de la memoria.

Todo marco lleva asociado un ámbito.

Cuando se crea el nuevo marco, éste se enlaza con el marco que hasta ese momento había sido el marco actual, en cadena.

El último marco de la cadena es siempre el marco global.

Se va formando así una **secuencia de marcos** que representa el **entorno** del programa allí donde se está ejecutando la instrucción actual.

A partir de ahora ya no vamos a tener un único marco (el *marco global*) sino que tendremos, además, al menos uno más cada vez que se llame a una expresión lambda y mientras dure la ejecución de la misma.

El **ámbito** es un concepto *estático*: es algo que existe y se reconoce simplemente leyendo el código del programa, sin tener que ejecutarlo.

El **marco** es un concepto *dinámico*: es algo que se crea y se destruye a medida que se van ejecutando y terminando de ejecutar ciertas partes del programa: *scripts*, funciones y métodos.

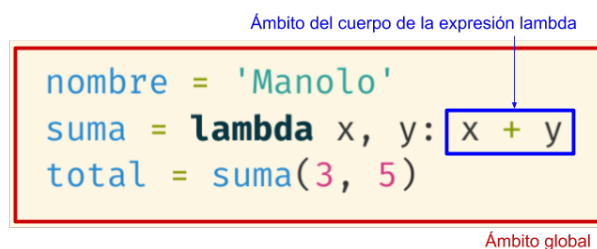
Dicho de otra forma: los marcos se crean cuando se va entrando y saliendo de ciertos ámbitos.

Por ejemplo, en el siguiente código:

```
suma = lambda x, y: x + y
```

el cuerpo de la función `suma` define un nuevo ámbito.

Por tanto, en el siguiente código tenemos dos ámbitos: el ámbito global (más externo) y el ámbito del cuerpo de la expresión lambda (más interno y anidado dentro del ámbito global):



Además, cada vez que se llama a `suma`, la ejecución del programa entra en su cuerpo, lo que crea un nuevo marco que almacena las ligaduras entre sus parámetros y los argumentos usados en esa llamada.

El concepto de **entorno** refleja el hecho de que los ámbitos se contienen unos a otros (están anidados unos dentro de otros).

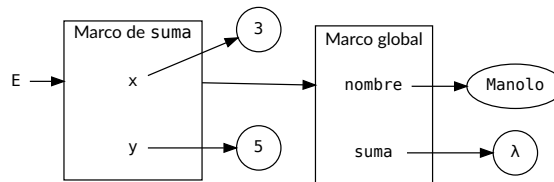
Si un marco A apunta a un marco B en el entorno, significa que el ámbito de A está contenido en el ámbito de B.

El **primer marco** en la cadena del entorno siempre será el último marco que se ha creado y que todavía no se ha destruido.

Ese marco es el **marco actual**.

Por otra parte, el **último marco** del entorno siempre es el *marco global*.

Por ejemplo, si en cierto momento de la ejecución de un programa tenemos el siguiente entorno (donde *suma* es una expresión lambda):



Podemos afirmar que:

- El marco de la expresión lambda apunta al marco global en el entorno.
- El ámbito de la expresión lambda está contenido en el ámbito global.
- El marco actual es el marco de la expresión lambda.
- Por tanto, el programa se encuentra actualmente ejecutando el cuerpo de la expresión lambda.
- De hecho, está evaluando la llamada *suma(3, 5)*.

3.2. Evaluación de expresiones con entornos

Al evaluar una expresión, el intérprete **buscará en el entorno el valor al que está ligado cada identificador** que aparezca en la expresión.

Para saber cuánto vale cada identificador, el intérprete buscará **en el primer marco del entorno** (el *marco actual*) una ligadura para ese identificador, y si no la encuentra, **irá subiendo por la secuencia de marcos** hasta encontrarla.

Si no aparece en ningún marco, querrá decir que el identificador no está ligado (porque aún no se ha creado la ligadura), o que su ligadura está fuera del entorno (en otro ámbito inaccesible desde el ámbito actual).

En cualquiera de estos casos, **generará un error** de tipo `NameError` («nombre no definido»).

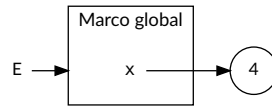
Por ejemplo:

```

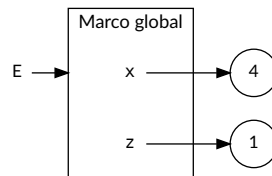
1 x = 4
2 z = 1
3 suma = (lambda x, y: x + y + z)(8, 12)
4 y = 3
5 w = 9

```

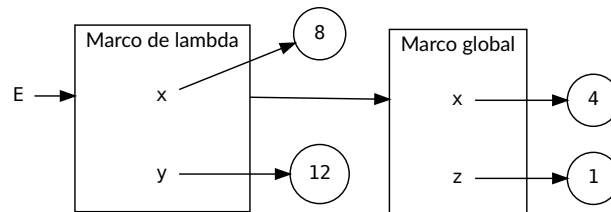
A medida que vamos ejecutando cada línea del código, tendríamos los siguientes entornos:



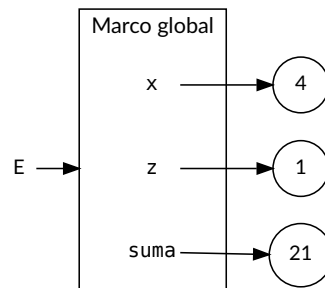
Entorno en la línea 1

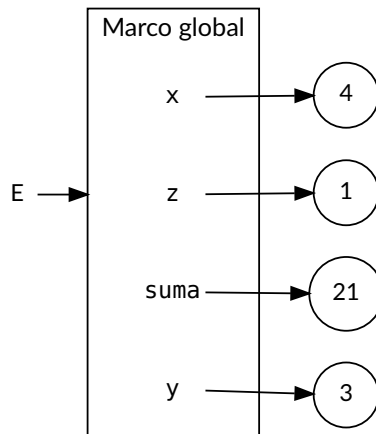


Entorno en la línea 2

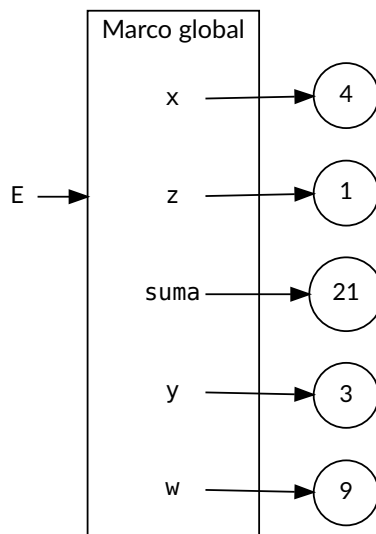


Entorno en la línea 3 en el cuerpo de la expresión lambda, después de aplicar los argumentos y **durante** la ejecución del cuerpo

Entorno en la línea 3, **después** de ejecutar el cuerpo y devolver el resultado



Entorno en la línea 4



Entorno en la línea 5

3.3. Evaluación de expresiones lambda con entornos

Para que una expresión lambda funcione, sus variables libres deben estar ligadas a algún valor en el entorno **en el momento de evaluar la aplicación de la expresión lambda sobre unos argumentos**.

Por ejemplo:

```

1 >>> prueba = lambda x, y: x + y + z # aquí no da error
2 >>> prueba(4, 3) # aquí sí
3 Traceback (most recent call last):
4   File "<stdin>", line 1, in <module>
5     File "<stdin>", line 1, in <lambda>
6   NameError: name 'z' is not defined

```

da error porque `z` no está definido (no está ligado a ningún valor en el entorno) en el momento de llamar a `prueba` en la línea 2.

En cambio:

```

1 >>> prueba = lambda x, y: x + y + z
2 >>> z = 9
3 >>> prueba(4, 3)
4 16

```

sí funciona (y devuelve `16`) porque, en el momento de evaluar la aplicación de la expresión lambda (en la línea 3), el identificador `z` está ligado a un valor en el entorno (en este caso, `9`).

Observar que no es necesario que las variables libres estén ligadas en el entorno cuando *se crea* la expresión lambda, sino cuando *se evalúa el cuerpo de la expresión lambda*, o sea, cuando se llama a la expresión lambda.

Ejemplo

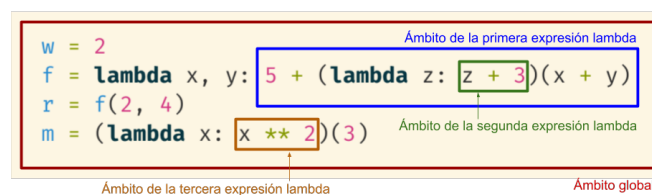
En el siguiente *script*:

```

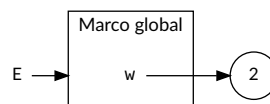
1 w = 2
2 f = lambda x, y: 5 + (lambda z: z + 3)(x + y)
3 r = f(2, 4)
4 m = (lambda x: x ** 2)(3)

```

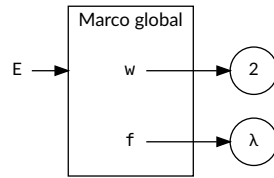
existen cuatro ámbitos:



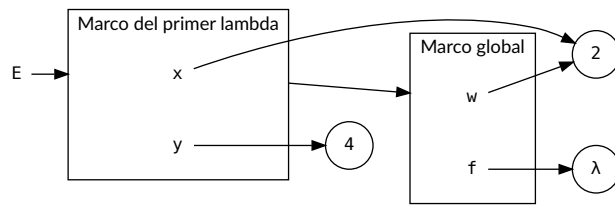
Su ejecución, línea a línea, produce los siguientes entornos:



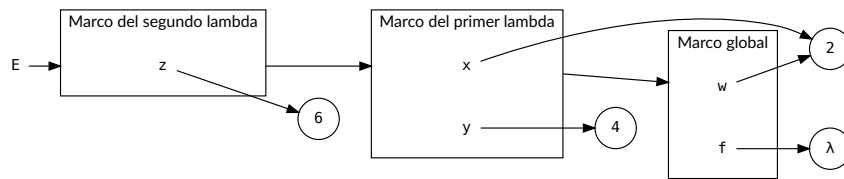
Entorno en la línea 1



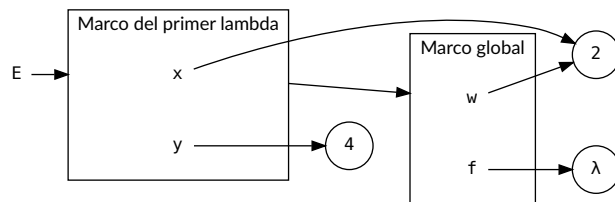
Entorno en la línea 2



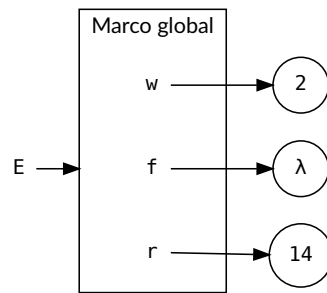
Entorno en la línea 3 en el cuerpo de la primera expresión lambda, después de aplicar sus argumentos y durante la ejecución de su cuerpo



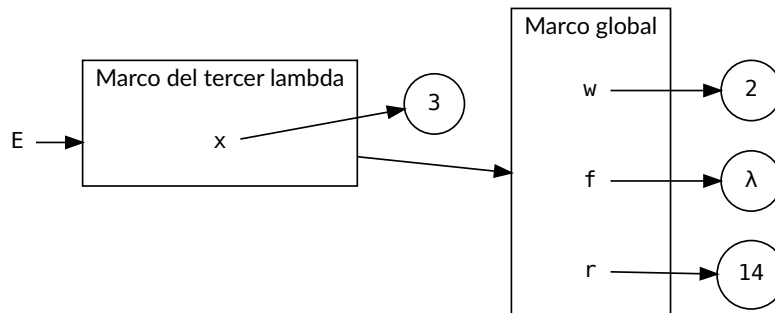
Entorno en la línea 3 en el cuerpo de la segunda expresión lambda, después de aplicar sus argumentos y durante la ejecución de su cuerpo



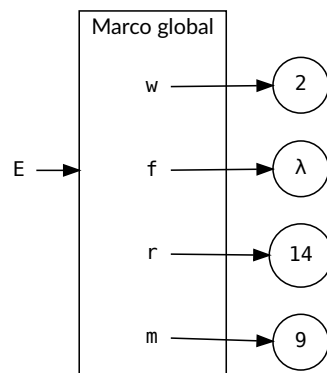
Entorno en la línea 3 en el cuerpo de la segunda expresión lambda, después de ejecutar su cuerpo y devolver su resultado



Entorno en la línea 3 en el cuerpo de la primera expresión lambda, después de ejecutar su cuerpo y devolver su resultado



Entorno en la línea 4 en el cuerpo de la tercera expresión lambda, después de aplicar sus argumentos y durante la ejecución de su cuerpo



Entorno en la línea 4 en el cuerpo de la tercera expresión lambda, después de ejecutar su cuerpo y devolver su resultado

3.3.1. Ligaduras sombreadas

Recordemos que la **resolución de identificadores** es el proceso por el cual el compilador o el intérprete determinan qué ligadura se corresponde con una aparición concreta de un determinado identificador.

¿Qué ocurre cuando una expresión lambda contiene como parámetros identificadores que ya están ligados en el entorno, en un espacio de nombres asociado a un ámbito más global?

Por ejemplo:

```
1 x = 4
2 total = (lambda x: x * x)(3) # Su valor es 9
```

¿Cómo resuelve el intérprete de Python las distintas `x` que aparecen en el código? ¿Son la misma `x`? ¿Se corresponden con la misma ligadura? ¿Están todas esas `x` ligadas al mismo valor?

La `x` que aparece en la línea 1 es distinta a las que aparecen en la 2:

- La `x` de la línea 1 es un identificador ligado a un valor en el ámbito global (el ámbito de creación de esa ligadura es el ámbito global). Esa ligadura, se almacena en el marco global, y por eso decimos que esa `x` es *global*.

Por tanto, la aparición de la `x` en la línea 1 representa a la `x` cuya ligadura se encuentra almacenada en el marco global (es decir, la `x` global) y que está ligada al valor `4`.

- Las `x` de la línea 2 representan el parámetro y la variable ligada (que ya sabemos que son la misma cosa) de la expresión lambda. Ese parámetro está ligado al argumento de la llamada, el ámbito de creación de esa ligadura es el cuerpo de la expresión lambda y esa ligadura se almacena en el marco de la llamada a la expresión lambda.

En consecuencia, las apariciones de la `x` en la línea 2 representan a la `x` *local* a la expresión lambda, cuya ligadura se encuentra almacenada en el marco de la llamada a la expresión lambda y que está ligada a `3`.

Por tanto, la `x` que aparece en el cuerpo de la expresión lambda **no** se refiere al identificador `x` que está fuera de la expresión lambda (y que aquí está ligado al valor `4`), sino al parámetro `x` que, en la llamada de la línea 2, está ligado al valor `3` (el argumento de la llamada).

Es decir:

- Dentro del cuerpo de la expresión lambda, `x` vale `3`.
- Fuera del cuerpo de la expresión lambda, `x` vale `4`.

Para determinar cuánto vale cada aparición de la `x` en el código (es decir, para resolver la aparición de cada `x`), el intérprete de Python consulta el **entorno** siempre que se encuentra el identificador `x` en el código y tiene que evaluarlo.

Cada una de las apariciones de la `x` en este ejemplo se corresponde con una ligadura distinta que tiene un ámbito distinto y se almacena en un espacio de nombres distinto.

Por tanto, la misma `x` podrá tener un valor u otro dependiendo de cuál es el espacio de nombres actual en el momento de evaluar la `x`.

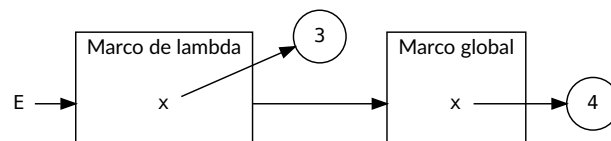
Cuando un mismo identificador está ligado dos veces en dos ámbitos anidados uno dentro del otro, decimos que:

- El identificador que aparece en el ámbito más externo está **sombreado** (y su ligadura está **sombreada**) por el del ámbito más interno.
- El identificador que aparece en el ámbito más interno **hace sombra** al identificador sombreado (y su ligadura también se dice que **hace sombra** a la ligadura sombreada) que aparece en el ámbito más externo.

En nuestro ejemplo, podemos decir que el parámetro x de la expresión lambda hace sombra al identificador x que aparece en el ámbito global.

Eso significa que no podemos acceder a ese identificador x global desde dentro del cuerpo de la expresión lambda como si fuera una variable libre, porque la x dentro del cuerpo siempre se referirá a la x local (el parámetro de la expresión lambda).

Esto ocurre así porque la primera ligadura del identificador x que se encuentra el intérprete al recorrer la secuencia de marcos del entorno cuando busca un valor para x , es la que está en el marco de la expresión lambda, que es el marco actual cuando se está ejecutando su cuerpo.

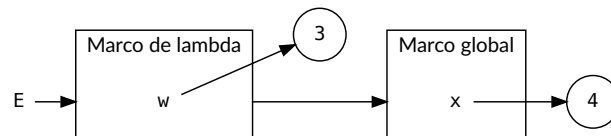


Entorno en el cuerpo de la expresión lambda, con ligadura sombreada

Si necesitáramos acceder, desde el cuerpo de la expresión lambda, al valor de la x que está fuera de la expresión lambda, lo que podemos hacer es **cambiar el nombre** al parámetro x . Por ejemplo:

```
x = 4
total = (lambda w: w * x)(3) # Su valor es 12
```

Así, tendremos en la expresión lambda una variable ligada (el parámetro w) y una variable libre (el identificador x ligado en el ámbito global) al que ahora sí podemos acceder al no estar sombreada y encontrarse dentro del entorno.



Entorno en el cuerpo de la expresión lambda, sin variable sombreada

3.3.2. Renombrado de parámetros

Los parámetros se pueden *renombrar* (siempre que se haga de forma adecuada) sin que se altere el significado de la expresión lambda.

A esta operación se la denomina **α -conversión**.

Un ejemplo de α -conversión es la que hicimos antes.

La α -conversión hay que hacerla correctamente para evitar efectos indeseados. Por ejemplo, en:

```
lambda x, y: x + y + z
```

si renombramos x a z tendríamos:

```
lambda z, y: z + y + z
```

lo que es claramente incorrecto. A este fenómeno indeseable se le denomina **captura de variables**.

3.3.3. Visualización en Pythontutor

Pythontutor es una herramienta online muy interesante y práctica que nos permite ejecutar un *script* paso a paso y visualizar sus efectos.

Muestra la pila de control, los marcos dentro de ésta, las ligaduras dentro de éstos y los datos almacenados en el montículo.

Entrando en <http://pythontutor.com/visualize.html> se abre un área de texto donde se puede teclear (o copiar y pegar) el código fuente del *script* a ejecutar.

Pulsando en «*Visualize Execution*» se pone en marcha, pudiendo ejecutar todo el *script* de una vez o hacerlo paso a paso.

Conviene elegir las siguientes opciones:

- *Hide exited frames (default)*
- *Render all objects on the heap (Python/Java)*
- *Draw pointers as arrows (default)*

Visualizar el *script* anterior en Pythontutor

Ejercicio

1. En el *script* anterior:

```
1 w = 2
2 f = lambda x, y: 5 + (lambda z: z + 3)(x + y)
3 r = f(2, 4)
4 m = (lambda x: x ** 2)(3)
```

indicar:

- a. Los identificadores.

- b. Los ámbitos.
- c. Los entornos, marcos y ligaduras en cada línea de código.
- d. Los ámbitos de cada ligadura.
- e. Los ámbitos de creación de cada ligadura.
- f. Los ámbitos de cada aparición de cada identificador.
- g. Las ligaduras sombreadas y los identificadores sombreados.
- h. Los identificadores y ligaduras que hacen sombra.

3.4. Resolución de atributos de objetos

Ya estudiamos que el acceso a un atributo de un objeto suponía buscar la correspondiente ligadura únicamente en el espacio de nombres asociado a ese objeto, y no en ningún otro.

Por tanto, dicha resolución requiere de un mecanismo algo distinto a lo visto hasta ahora, ya que las ligaduras que ligán el nombre del atributo con su valor se almacenan en el propio objeto, no en un marco.

En consecuencia, el acceso a un atributo de un objeto usando el operador punto (`.`), como en la expresión `math.pi` de este ejemplo:

```
import math
x = math.pi * 2
```

no requiere usar el entorno.

De hecho, el lenguaje ni siquiera tiene por qué tener entornos. Recordemos que los lenguajes compilados no usan entornos para resolver identificadores y pueden resolver perfectamente los atributos de los objetos.

Concretamente, resolver el identificador `pi` en la expresión `math.pi` requerirá de los siguientes pasos:

1. Se busca el valor de `math` en el entorno, que devuelve el objeto que representa al módulo `math`.
2. Una vez que sabemos que el operando izquierdo del operador punto (`.`) es un objeto, procedemos a resolver el identificador `pi`, pero para ello sólo se considera el espacio de nombres asociado al objeto `math`.

Es decir: buscamos el valor de `pi` en el espacio de nombres de `math`, y sólo ahí.

3. Una vez localizado, se devolverá el valor ligado al nombre `pi` en el espacio de nombres de `math`, o se lanzará un error `NameError` en caso de que no haya ninguna ligadura para `pi` en `math`.

Como se puede observar, en ningún momento se usa el entorno para resolver el identificador `pi` dentro de `math`.

3.5. Estrategias de evaluación

A la hora de evaluar una expresión (cualquier expresión) existen varias **estrategias** diferentes que se pueden adoptar.

Cada lenguaje implementa sus propias estrategias de evaluación que están basadas en las que vamos a ver aquí.

Básicamente se trata de decidir, en cada paso de reducción, qué subexpresión hay que reducir, en función de:

- El orden de evaluación:
 - * De fuera adentro o de dentro afuera.
 - * De izquierda a derecha o de derecha a izquierda.
- La necesidad o no de evaluar dicha subexpresión.

3.5.1. Orden de evaluación

En un lenguaje de programación funcional puro se cumple la **transparencia referencial**, según la cual el valor de una expresión depende sólo del valor de sus subexpresiones (también llamadas *redexes*, del inglés, *reducible expression*).

Pero eso también implica que **no importa el orden en el que se evalúen las subexpresiones**: el resultado debe ser siempre el mismo.

Gracias a ello podemos usar nuestro modelo de sustitución como modelo computacional.

Hay dos **estrategias básicas de evaluación**:

- **Orden aplicativo**: reducir siempre el *redex* más **interno** (y más a la izquierda).
- **Orden normal**: reducir siempre el *redex* más **externo** (y más a la izquierda).

Python usa el orden aplicativo, salvo excepciones.

3.5.1.1. Orden aplicativo

El **orden aplicativo** consiste en evaluar las expresiones *de dentro afuera*, es decir, empezando por el *redex* más **interno** y a la izquierda.

El *redex* más interno es el que no contiene a otros *redexes*. Si existe más de uno que cumpla esa condición, se elige el que está más a la izquierda.

Eso implica que los operandos y los argumentos se evalúan **antes** que los operadores y las aplicaciones de funciones.

Corresponde a lo que en muchos lenguajes de programación se denomina **paso de argumentos por valor** (*call-by-value*).

Por ejemplo, si tenemos la siguiente función:

```
cuadrado = lambda x: x * x
```

según el orden aplicativo, la expresión `cuadrado(3 + 4)` se reduce así:

```
cuadrado(3 + 4)      # definición de cuadrado
= (lambda x: x * x)(3 + 4) # evalúa 3 y devuelve 3
= (lambda x: x * x)(3 + 4) # evalúa 4 y devuelve 4
= (lambda x: x * x)(3 + 4) # evalúa 3 + 4 y devuelve 7
= (lambda x: x * x)(7)    # aplicación a 7
= (7 * 7)                # evalúa (7 * 7) y devuelve 49
= 49
```

3.5.1.2. Orden normal

El **orden normal** consiste en evaluar las expresiones *de fuera adentro*, es decir, empezando siempre por el *redex* más **externo** y a la izquierda.

El *redex* más externo es el que no está contenido en otros *redexes*. Si existe más de uno que cumpla esa condición, se elige el que está más a la izquierda.

Eso implica que los operandos y los argumentos se evalúan **después** de las aplicaciones de los operadores y las funciones.

Por tanto, los argumentos que se pasan a las funciones lo hacen **sin evaluarse** previamente.

Corresponde a lo que en muchos lenguajes de programación se denomina **paso de argumentos por nombre** (*call-by-name*).

Por ejemplo, si tenemos la siguiente función:

```
cuadrado = lambda x: x * x
```

según el orden normal, la expresión `cuadrado(3 + 4)` se reduce así:

```
cuadrado(3 + 4)      # definición de cuadrado
= (lambda x: x * x)(3 + 4) # aplicación a (3 + 4)
= ((3 + 4) * (3 + 4))    # evalúa 3 y devuelve 3
= ((3 + 4) * (3 + 4))    # evalúa 4 y devuelve 4
= ((3 + 4) * (3 + 4))    # evalúa (3 + 4) y devuelve 7
= 7 * (3 + 4)           # evalúa 3 y devuelve 3
= 7 * (3 + 4)           # evalúa 4 y devuelve 4
= 7 * (3 + 4)           # evalúa (3 + 4) y devuelve 7
= 7 * 7                # evalúa 7 * 7 y devuelve 49
= 49
```

3.5.2. Composición de funciones

Podemos crear una función que use otra función. Por ejemplo, para calcular el área de un círculo usamos otra función que calcule el cuadrado de un número:

```
cuadrado = lambda x: x * x
area = lambda r: 3.1416 * cuadrado(r)
```

La expresión `area(11 + 1)` se evaluaría así según el *orden aplicativo*:

```

1 area(11 + 1) # definición de area
2 = (lambda r: 3.1416 * cuadrado(r))(11 + 1) # evalúa 11 y devuelve 11
3 = (lambda r: 3.1416 * cuadrado(r))(11 + 1) # evalúa 1 y devuelve 1
4 = (lambda r: 3.1416 * cuadrado(r))(11 + 1) # evalúa 11 + 1 y devuelve 12
5 = (lambda r: 3.1416 * cuadrado(r))(12) # aplicación a 12
6 = (3.1416 * cuadrado(12)) # evalúa 3.1416 y devuelve 3.1416
7 = (3.1416 * cuadrado(12)) # definición de cuadrado
8 = (3.1416 * (lambda x: x * x)(12)) # aplicación a 12
9 = (3.1416 * (12 * 12)) # evalúa (12 * 12) y devuelve 144
10 = (3.1416 * 144) # evalúa (3.1416 * 11) y...
11 = 452.3904 # ... devuelve 452.3904

```

En detalle:

- **Línea 1:** Se evalúa `area`, que devuelve su definición (una expresión lambda).
- **Líneas 2-4:** Lo siguiente a evaluar es la aplicación de `area` sobre su argumento, por lo que primero evaluamos éste (es el *redex* más interno).
- **Línea 5:** Ahora se aplica la expresión lambda a su argumento `12`.
- **Línea 6:** El *redex* más interno y a la izquierda es el `3.1416`, que ya está evaluado.
- **Línea 7:** El *redex* más interno que queda por evaluar es la aplicación de `cuadrado` sobre `12`. Primero se evalúa `cuadrado`, sustituyéndose por su definición...
- **Línea 8:** ... y ahora se aplica la expresión lambda a su argumento `12`.
- Lo que queda es todo aritmética.

La expresión `area(11 + 1)` se evaluaría así según el *orden normal*:

```

1 area(11 + 1) # definición de area
2 = (lambda r: 3.1416 * cuadrado(r))(11 + 1) # aplicación a (11 + 1)
3 = (3.1416 * cuadrado(11 + 1)) # evalúa 3.1416 y devuelve 3.1416
4 = (3.1416 * cuadrado(11 + 1)) # definición de cuadrado
5 = (3.1416 * (lambda x: x * x)(11 + 1)) # aplicación a (11 + 1)
6 = (3.1416 * ((11 + 1) * (11 + 1))) # evalúa (11 + 1) y devuelve 12
7 = (3.1416 * (12 * (11 + 1))) # evalúa (11 + 1) y devuelve 12
8 = (3.1416 * (12 * 12)) # evalúa (12 * 12) y devuelve 144
9 = (3.1416 * 144) # evalúa (3.1416 * 144) y...
10 = 452.3904 # ... devuelve 452.3904

```

En ambos casos (orden aplicativo y orden normal) se obtiene el mismo resultado.

En detalle:

- **Línea 1:** Se evalúa el *redex* más externo, que es `area(11 + 1)`. Para ello, se reescribe la definición de `area`...
- **Línea 2:** ... y se aplica la expresión lambda al argumento `11 + 1`.
- **Línea 3:** El *redex* más externo es el `*`, pero para evaluarlo hay que evaluar primero todos sus argumentos, por lo que primero se evalúa el izquierdo, que es `3.1416`.
- **Línea 4:** Ahora hay que evaluar el derecho (`cuadrado(11 + 1)`), por lo que se reescribe la definición de `cuadrado`...
- **Línea 5:** ... y se aplica la expresión lambda al argumento `11 + 1`.

- Lo que queda es todo aritmética.

A veces no resulta fácil determinar si un *redex* es más interno o externo que otro, sobre todo cuando se mezclan funciones y operadores en una misma expresión.

En ese caso, puede resultar útil reescribir los operadores como funciones, cuando sea posible.

Por ejemplo, la siguiente expresión:

```
abs(-12) + max(13, 28)
```

se puede reescribir como:

```
from operator import add
add(abs(-12), max(13, 28))
```

lo que muestra claramente que la suma es más externa que el valor absoluto y el máximo (que están, a su vez, al mismo nivel de profundidad).

Un ejemplo más complicado:

```
abs(-12) * max((2 + 3) ** 5, 37)
```

se reescribiría como:

```
from operator import add, mul
mul(abs(-12), max(pow(add(2, 3), 5), 37))
```

donde se aprecia claramente que el orden de las operaciones, de más interna a más externa, sería:

1. Suma (+ o `add`).
2. Potencia (** o `pow`).
3. Valor absoluto (`abs`) y máximo (`max`) al mismo nivel.
4. Producto (* o `mul`).

3.5.3. Evaluación estricta y no estricta

Existe otra forma de ver la evaluación de una expresión:

- **Evaluación estricta o *impaciente*:** Reducir todos los *redexes* aunque no hagan falta para calcular el valor de la expresión.
- **Evaluación no estricta o *perezosa*:** Reducir sólo los *redexes* que sean estrictamente necesarios para calcular el valor de la expresión.

Ejemplo

Sabemos que la expresión `1 / 0` da un error de *división por cero*:

```
>>> 1 / 0
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
ZeroDivisionError: division by zero
```

Supongamos que tenemos la siguiente definición:

```
primero = lambda x, y: x
```

de forma que `primero` es una función que simplemente devuelve el primero de sus argumentos.

Es evidente que la función `primero` no necesita evaluar nunca su segundo argumento, ya que no lo utiliza (simplemente devuelve el primero de ellos). Por ejemplo, `primero(4, 3)` devuelve `4`.

Sabiendo eso... ¿qué valor devolvería la siguiente expresión?

```
primero(4, 1 / 0)
```

Curiosamente, el resultado dependerá de si la evaluación es estricta o perezosa:

- **Si es estricta**, el intérprete evaluará todos los argumentos de la expresión lambda aunque no se utilicen luego en su cuerpo. Por tanto, al evaluar `1 / 0` devolverá un error.

Es lo que ocurre cuando se evalúa siguiendo el **orden aplicativo**.

- En cambio, **si es perezosa**, el intérprete evaluará únicamente aquellos argumentos que se usen en el cuerpo de la expresión lambda, y en este caso sólo se usa el primero, así que dejará sin evaluar el segundo, no dará error y devolverá directamente `4`.

Es lo que ocurre cuando se evalúa siguiendo el **orden normal**:

```
primero(4, 1 / 0) = (lambda x, y: x)(4, 1 / 0) = (4) = 4
```

Hay un resultado teórico que avala lo que acabamos de observar:

Teorema de estandarización:

Si una expresión tiene forma normal, el **orden normal** de evaluación conduce seguro a la misma.

En cambio, el orden aplicativo es posible que no encuentre la forma normal de la expresión.

En **Python** la evaluación es **estricta**, salvo algunas excepciones:

- El operador ternario:

```
<expr_condicional> ::= <valor_si_cierto> if <condición> else <valor_si_falso>
```

evalúa perezosamente `<valor_si_cierto>` y `<valor_si_falso>` dependiendo del valor de la `<condición>`.

- Los operadores lógicos **and** y **or** también son perezosos (se dice que evalúan **en cortocircuito**):

- * `True or x`

- siempre es igual a `True`.

- * `False and x`

- siempre es igual a `False`.

En ambos casos no es necesario evaluar `x`.

En Java también existe un operador ternario (`? :`) y unos operadores lógicos (`||` y `&&`) que se evalúan de igual forma que en Python.

La mayoría de los lenguajes de programación usan evaluación estricta y paso de argumentos por valor (siguen el orden aplicativo).

Haskell, por ejemplo, es un lenguaje funcional puro que usa evaluación perezosa y sigue el orden normal.

La evaluación perezosa en Haskell permite resultados muy interesantes, como la posibilidad de manipular estructuras de datos infinitas.

4. Abstracciones funcionales

4.1. Pureza

Si el cuerpo de una expresión lambda no contiene variables libres, el valor que obtendremos al aplicarla a unos argumentos dependerá únicamente del valor que tengan esos argumentos (no dependerá de nada más que sea «exterior» a la expresión lambda).

En cambio, si el cuerpo de una expresión lambda sí contiene variables libres, el valor que obtendremos al aplicarla a unos argumentos no sólo dependerá del valor de esos argumentos, sino también de los valores a los que estén ligadas las variables libres en el momento de evaluar la aplicación de la expresión lambda.

Es el caso del ejemplo anterior, donde tenemos una expresión lambda que contiene una variable libre (`z`) y, por tanto, cuando la aplicamos a los argumentos `4` y `3` obtenemos un valor que depende, no sólo de los valores de `x` e `y`, sino también del valor de `z`:

```
>>> prueba = lambda x, y: x + y + z
>>> z = 9
>>> prueba(4, 3)
16
```

En este otro ejemplo, escribimos una expresión lambda que calcula la suma de tres números a partir de otra expresión lambda que calcula la suma de dos números:


```
suma = lambda x, y: x + y
suma3 = lambda x, y, z: suma(x, y) + z
```

En este caso, hay un identificador (`suma`) que no aparece en la lista de parámetros de la expresión lambda `suma3`, por lo que es una variable libre en el cuerpo de la expresión lambda de `suma3`.

En consecuencia, el valor de dicha expresión lambda dependerá de lo que valga `suma` en el entorno actual.

Se dice que una expresión lambda es **pura** si, siempre que la apliquemos a unos argumentos, el valor obtenido va a depender únicamente del valor de esos argumentos, es decir, de sus parámetros o variables ligadas.

Podemos decir que hay distintos **grados de pureza**:

- Una expresión lambda que contiene **sólo variables ligadas** es **más pura** que otra que también contiene variables libres.
- Una expresión lambda cuyas **variables libres** representan **funciones** que se usan en el cuerpo de la expresión lambda, es **más pura** que otra cuyas variables libres representan cualquier otro tipo de valor.

En el ejemplo anterior, tenemos que la expresión lambda de `suma3`, sin ser *totalmente pura*, a efectos prácticos se la puede considerar **pura**, ya que su única variable libre (`suma`) se usa como una **función**.

Por ejemplo, las siguientes expresiones lambda están ordenadas de mayor a menor pureza, siendo la primera totalmente **pura**:

```
# producto es una expresión lambda totalmente pura:
producto = lambda x, y: x * y
# cuadrado es casi pura; a efectos prácticos se la puede
# considerar pura ya que sus variables libres (en este
# caso, sólo una: producto) son funciones:
cuadrado = lambda x: producto(x, x)
# suma es impura, porque su variable libre (z) no es una función:
suma = lambda x, y: x + y + z
```

La pureza de una función es un rasgo deseado y que hay que tratar de alcanzar siempre que sea posible, ya que facilita el desarrollo y mantenimiento de los programas, además de simplificar el razonamiento sobre los mismos, permitiendo aplicar directamente nuestro modelo de sustitución.

Es más incómodo trabajar con `suma` porque hay que *recordar* que depende de un valor que está *fuera* de la expresión lambda, cosa que no resulta evidente a no ser que mires en el cuerpo de la expresión lambda.

4.2. Las funciones como abstracciones

Recordemos la definición de la función `area`:

```
cuadrado = lambda x: x * x
area = lambda r: 3.1416 * cuadrado(r)
```

Aunque es muy sencilla, la función `area` ejemplifica la propiedad más potente de las funciones definidas por el programador: la **abstracción**.

La función `area` está definida sobre la función `cuadrado`, pero sólo necesita saber de ella qué resultados de salida devuelve a partir de sus argumentos de entrada (o sea, **qué** calcula y no **cómo** lo calcula).

Podemos escribir la función `area` sin preocuparnos de cómo calcular el cuadrado de un número, porque eso ya lo hace la función `cuadrado`.

Los detalles sobre cómo se calcula el cuadrado están **ocultos dentro de la definición** de `cuadrado`. Esos detalles **se ignoran en este momento** al diseñar `area`, para considerarlos más tarde si hiciera falta.

De hecho, por lo que respecta a `area`, `cuadrado` no representa una definición concreta de función, sino más bien la abstracción de una función, lo que se denomina una **abstracción funcional**, ya que a `area` le sirve igual de bien cualquier función que calcule el cuadrado de un número.

Por tanto, si consideramos únicamente los valores que devuelven, las tres funciones siguientes son indistinguibles e igual de válidas para `area`. Ambas reciben un argumento numérico y devuelven el cuadrado de ese número:

```
cuadrado = lambda x: x * x
cuadrado = lambda x: x ** 2
cuadrado = lambda x: x * (x - 1) + x
```

En otras palabras: la definición de una función debe ser capaz de **ocultar sus detalles internos de funcionamiento**, ya que para usar la función no debe ser necesario conocer esos detalles.

«*Abstraer*» es centrarse en lo importante en un determinado momento e ignorar lo que en ese momento no resulta importante.

«*Crear una abstracción*» es meter un mecanismo más o menos complejo dentro de una caja negra y darle un nombre, de forma que podamos referirnos a todo el conjunto simplemente usando su nombre y sin tener que conocer su composición interna ni sus detalles internos de funcionamiento.

Por tanto, para usar la abstracción nos bastará con conocer su *nombre* y *lo que hace*, sin necesidad de saber *cómo lo hace* ni de qué elementos está formada *internamente*.

La abstracción es el principal instrumento de control de la complejidad, ya que nos permite ocultar detrás de un nombre los detalles que componen una parte del programa, haciendo que esa parte actúe (a ojos del programador que la utilice) como si fuera un elemento *predefinido* del lenguaje.

Las funciones son, por tanto, **abstracciones** porque nos permiten usarlas sin tener que conocer los detalles internos del procesamiento que realizan.

Por ejemplo, si queremos usar la función `cubo` (que calcula el cubo de un número), nos da igual que dicha función esté implementada de cualquiera de las siguientes maneras:

```
cubo = lambda x: x * x * x
cubo = lambda x: x ** 3
cubo = lambda x: x * x ** 2
```

Para **usar** la función, nos basta con saber que calcula el cubo de un número, sin necesidad de saber qué cálculo concreto realiza para obtener el resultado.

Los detalles de implementación quedan ocultos y por eso también decimos que `cubo` es una abstracción.

Las funciones también son abstracciones porque describen operaciones compuestas a realizar sobre ciertos valores sin importar cuáles sean esos valores en concreto (son **generalizaciones** de casos particulares).

Por ejemplo, cuando definimos:

```
cubo = lambda x: x * x * x
```

no estamos hablando del cubo de un número en particular, sino más bien de un **método** para calcular el cubo de cualquier número.

Por supuesto, nos las podemos arreglar sin definir el concepto de *cubo*, escribiendo siempre expresiones explícitas (como `3*3*3`, `y*y*y`, etc.) sin usar la palabra «cubo», pero eso nos obligaría siempre a expresarnos usando las operaciones primitivas de nuestro lenguaje (como `*`), en vez de poder usar términos de más alto nivel.

Es decir: **nuestros programas podrían calcular el cubo de un número, pero no tendrían la habilidad de expresar el concepto de elevar al cubo.**

Una de las habilidades que deberíamos pedir a un lenguaje potente es la posibilidad de **construir abstracciones** asignando nombres a los patrones más comunes, y luego trabajar directamente usando dichas abstracciones.

Las funciones nos permiten esta habilidad, y esa es la razón de que todos los lenguajes (salvo los más primitivos) incluyan mecanismos para definir funciones.

Por ejemplo: en el caso anterior, vemos que hay un patrón (multiplicar algo por sí mismo tres veces) que se repite con frecuencia, y a partir de él construimos una abstracción que asigna un nombre a ese patrón (*elevar al cubo*).

Esa abstracción la definimos como una función que describe la *regla* necesaria para elevar algo al cubo.

Por tanto, algunas veces, analizando ciertos *casos particulares*, observamos que se repite el mismo patrón en todos ellos, y de ahí extraemos un *caso general* que agrupa a todos los posibles casos particulares que cumplen el mismo patrón.

A ese caso general le damos un nombre y ocultamos sus detalles internos en una «caja negra».

Eso es una **abstracción**.

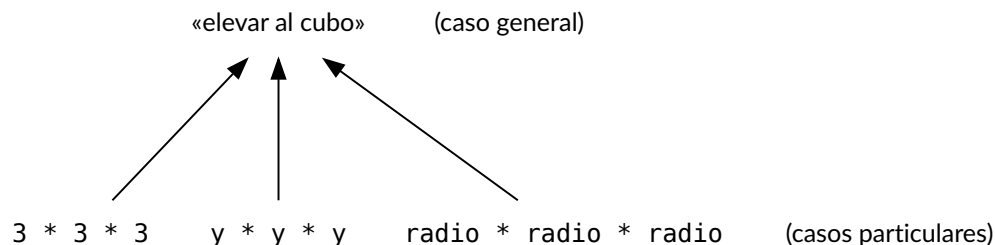
Crear casos generales a partir de patrones que se repiten en casos particulares es una de las principales razones por las que creamos abstracciones.

Otras veces creamos abstracciones cuando queremos **reducir la complejidad**, dándole un nombre a un mecanismo complejo para poder referirnos a todo el conjunto a través de su nombre sin tener que recordar continuamente qué piezas contiene el mecanismo.

Y otras veces simplemente cuando queremos que nuestro programa pueda **expresar un concepto abstracto**, como el de «elevar al cubo».

Por ejemplo, cuando vemos que en nuestros programas es frecuente tener que multiplicar una cosa por sí misma tres veces, deducimos que ahí hay un patrón común que se repite en todos los casos.

De ahí, creamos la abstracción que describe ese patrón general y le llamamos «*elevar al cubo*»:



La **especificación de una función** es la descripción de **qué** hace la función sin entrar a detallar **cómo** lo hace.

La **implementación de una función** es la descripción de **cómo** hace lo que hace, es decir, los detalles de su algoritmo interno.

Para poder usar una función, un programador no debe necesitar saber cómo está implementada.

Eso es lo que ocurre, por ejemplo, con las funciones predefinidas del lenguaje (como `max`, `abs` o `len`): sabemos *qué* hacen pero no necesitamos saber *cómo* lo hacen.

Incluso puede que el usuario de una función no sea el mismo que la ha escrito, sino que la puede haber recibido de otro programador como una «**caja negra**», que tiene unas entradas y una salida pero no se sabe cómo funciona por dentro.

4.2.1. Especificaciones de funciones

Para poder **usar una abstracción funcional** *nos basta* con conocer su *especificación*, porque es la descripción de qué hace esa función.

Igualmente, para poder **implementar una abstracción funcional** *necesitamos* conocer su *especificación*, ya que necesitamos saber *qué tiene que hacer* la función antes de diseñar *cómo va a hacerlo*.

La especificación de una abstracción funcional describe tres características fundamentales de dicha función:

- El **dominio**: el conjunto de datos de entrada válidos.
- El **rango** o **codominio**: el conjunto de posibles valores que devuelve.
- El **propósito**: qué hace la función, es decir, la relación entre su entrada y su salida.

Hasta ahora, al especificar **programas**, hemos llamado «**entrada**» al dominio, y hemos agrupado el rango y el propósito en una sola propiedad que llamamos «**salida**».

Por ejemplo, cualquier función `cuadrado` que usemos para implementar `area` debe satisfacer esta especificación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Entrada} : n \in \mathbb{R} \\ \text{cuadrado} \\ \text{Salida} : n^2 \end{array} \right.$$

La especificación **no concreta cómo** se debe llevar a cabo el propósito. Esos son **detalles de implementación** que se abstraen a este nivel.

Este esquema es el que hemos usado hasta ahora para especificar programas, y se podría seguir usando para especificar funciones, ya que éstas son consideradas *subprogramas* (programas que forman parte de otros programas más grandes).

Pero para especificar funciones resulta más adecuado usar el siguiente esquema, al que llamaremos **especificación funcional**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pre} : \text{True} \\ \text{cuadrado}(n: \text{float}) \rightarrow \text{float} \\ \text{Post} : \text{cuadrado}(n) = n^2 \end{array} \right.$$

«**Pre**» representa la **precondición**: la propiedad que debe cumplirse justo *en el momento* de llamar a la función.

«**Post**» representa la **postcondición**: la propiedad que debe cumplirse justo *después* de que la función haya terminado de ejecutarse.

Lo que hay en medio es la **signatura**: el nombre de la función, el nombre y tipo de sus parámetros y el tipo del valor de retorno.

La especificación se lee así: «**Si se llama a la función respetando su signatura y cumpliendo su precondición, la llamada termina cumpliendo su postcondición**».

En este caso, la **precondición** es `True`, que equivale a decir que cualquier condición de entrada es buena para usar la función.

Dicho de otra forma: no hace falta que se dé ninguna condición especial para usar la función. Siempre que la llamada respete la signatura de la función, el parámetro `n` puede tomar cualquier valor de tipo `float` y no hay ninguna restricción adicional.

Por otro lado, la **postcondición** dice que al llamar a la función `cuadrado` con el argumento `n` se debe devolver `n2`.

Tanto la precondición como la postcondición son **predicados**, es decir, expresiones lógicas que se escriben usando el lenguaje de las matemáticas y la lógica.

La **signatura** se escribe usando la sintaxis del lenguaje de programación que se vaya a usar para implementar la función (Python, en este caso).

Recordemos la diferencia entre:

- **Dominio y conjunto origen** de una función.
- **Rango** (o **codominio**) y **conjunto imagen** de una función.

¿Cómo recoge la especificación esas cuatro características de la función?

- La **signatura** expresa el **conjunto origen** y el **conjunto imagen** de la función.
- El **dominio** viene determinado por los valores del conjunto origen que cumplen la **precondición**.
- El **codominio** viene determinado por los valores del conjunto imagen que cumplen la **postcondición**.

En el caso de la función **cuadrado** tenemos que:

- El conjunto origen es **float**, ya que su parámetro n está declarado de tipo **float** en la signatura de la función.

Por tanto, los datos de entrada a la función deberán pertenecer al tipo **float**.

- El dominio coincide con el conjunto origen, ya que su precondición es **True**. Eso quiere decir que cualquier dato de entrada es válido siempre que pertenezca al dominio (en este caso, el tipo **float**).
- El conjunto imagen también es **float**, ya que así está declarado el tipo de retorno de la función.

Las pre y postcondiciones no es necesario escribirlas de una manera **formal y rigurosa**, usando el lenguaje de las Matemáticas o la Lógica.

Si la especificación se escribe en *lenguaje natural* y se entiende bien, completamente y sin ambigüedades, no hay problema.

El motivo de usar un lenguaje formal es que, normalmente, resulta **mucho más conciso y preciso que el lenguaje natural**.

El lenguaje natural suele ser:

- **Más prolijo**: necesita más palabras para decir lo mismo que diríamos matemáticamente usando menos caracteres.
- **Más ambiguo**: lo que se dice en lenguaje natural se puede interpretar de distintas formas.
- **Menos completo**: quedan flecos y situaciones especiales que no se tienen en cuenta.

En este otro ejemplo, más completo, se especifica una función llamada **cuenta**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pre : } car \neq "" \wedge \text{len}(car) = 1 \\ \text{Post : } \text{cuenta}(cadena, car) \geq 0 \wedge \\ \text{cuenta}(cadena, car) = cadena.\text{count}(car) \end{array} \right.$$

Con esta especificación, estamos diciendo que **cuenta** es una función que recibe una cadena y un carácter (otra cadena con un único carácter dentro).

Ahora bien: esa cadena y ese carácter no pueden ser cualesquiera, sino que tienen que cumplir la *precondición*.

Eso significa, entre otras cosas, que aquí **el dominio y el conjunto origen de la función no coinciden** (no todos los valores pertenecientes al conjunto origen sirven como datos de entrada válidos para la función).

En esta especificación, `count` se usa como un **método auxiliar**.

Las *operaciones auxiliares* se puede usar en una especificación siempre que estén perfectamente especificadas, aunque no estén implementadas.

En este caso, se usa en la *postcondición* para decir que la función `cuenta`, la que se está especificando, debe devolver el mismo resultado que devuelve el método `count` (el cual ya conocemos perfectamente y sabemos qué hace, puesto que es un método que ya existe en Python).

Es decir: la especificación anterior describe con total precisión que la función `cuenta` **cuenta el número de veces que el carácter `car` aparece en la cadena `cadena`**.

En realidad, las condiciones de la especificación anterior se podrían simplificar aprovechando las propiedades de las expresiones lógicas, quedando así:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Pre :} & \text{len(car)} = 1 \\ & \text{cuenta(cadena: str, car: str) -> int} \\ \text{Post :} & \text{cuenta(cadena, car)} = \text{cadena.count(car)} \end{array} \right.$$

Ejercicio

2. ¿Por qué?

Finalmente, podríamos escribir la misma especificación en lenguaje natural:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Pre :} & \text{car debe ser un único carácter} \\ & \text{cuenta(cadena: str, car: str) -> int} \\ \text{Post :} & \text{cuenta(cadena, car) devuelve el número de veces} \\ & \text{que aparece el carácter car en la cadena cadena.} \\ & \text{Si cadena es vacía o car no aparece nunca en la} \\ & \text{cadena cadena, debe devolver 0.} \end{array} \right.$$

Probablemente resulta más fácil de leer (sobre todo para los novatos), pero también es más largo y prolijo.

Es como un contrato escrito por un abogado en lenguaje jurídico.

Bibliografía

Abelson, Harold, Gerald Jay Sussman, and Julie Sussman. 1996. *Structure and Interpretation of Computer Programs*. 2nd ed. Cambridge, Mass. : New York: MIT Press ; McGraw-Hill.