Expresiones

Ricardo Pérez López

IES Doñana, curso 2020/2021

Índice general

1. El lenguaje de programación Python

1.1. Historia

Python fue creado a finales de los ochenta por **Guido van Rossum** en el Centro para las Matemáticas y la Informática (CWI, Centrum Wiskunde & Informatica), en los Países Bajos, como un sucesor del lenguaje de programación ABC.

El nombre del lenguaje proviene de la afición de su creador por los humoristas británicos **Monty Python**.

Logo de Python

Python alcanzó la versión 1.0 en enero de 1994.

Python 2.0 se publicó en octubre de 2000 con muchas grandes mejoras. Actualmente, Python 2 está obsoleto.

Python 3.0 se publicó en septiembre de 2008 y es una gran revisión del lenguaje que no es totalmente retrocompatible con Python 2.

1.2. Características principales

Python es un lenguaje **interpretado**, **dinámico** y **multiplataforma**, cuya filosofía hace hincapié en una sintaxis que favorezca un **código legible**.

Es un lenguaje de programación **multiparadigma**. Esto significa que más que forzar a los programadores a adoptar un estilo particular de programación, permite varios estilos: **programación orientada a objetos**, **programación imperativa** y **programación funcional**.

Tiene una **gran biblioteca estándar**, usada para una diversidad de tareas. Esto viene de la filosofía «pilas incluidas» (*batteries included*) en referencia a los módulos de Python.

Es administrado por la **Python Software Foundation** y posee una licencia de **código abierto**.

La estructura de un programa se define por su anidamiento.

Para entrar en el intérprete, se usa el comando `python` desde la línea de comandos del sistema operativo:

```
$ python
Python 3.8.2 (default, Apr 27 2020, 15:53:34)
[GCC 9.3.0] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>>
```

El mensaje que obtengamos puede que no sea exactamente igual, pero es importante comprobar que estamos usando Python 3 y no 2.

Para salir, se pulsa `Ctrl+D`.

El `>>>` es el *prompt* del intérprete de Python, desde el que se ejecutan las expresiones y sentencias que tecleemos:

```
>>> 4 + 3
7
>>>
```

2. Elementos de un programa

2.1. Expresiones y sentencias

El código fuente de un programa está formado por elementos que pertenecen a dos grandes grupos principales:

- **Expresiones**: son secuencias de símbolos que *representan valores* y que están formados por *datos* y (posiblemente) *operaciones* a realizar sobre esos datos. El valor al que representa la expresión se obtiene *evaluando* dicha expresión.
- **Sentencias**: son *instrucciones* que sirven para pedirle al intérprete que *ejecute* una determinada *acción*. Las sentencias también pueden contener expresiones.

$$\text{En un programa hay} \begin{cases} \textbf{Expresiones}\text{, formadas por} \begin{cases} \textbf{Datos} \\ \textbf{Operaciones} \end{cases} \\ \textbf{Sentencias}\text{, que también pueden contener expresiones} \end{cases}$$

Las **expresiones** se *evalúan*.

Las **sentencias** se *ejecutan*.

2.2. Conceptos básicos

Definición:

Una **expresión** es una frase (secuencia de símbolos) sintáctica y semánticamente correcta según las reglas del lenguaje que estamos utilizando, cuya finalidad es la de *representar* o **denotar** un determinado objeto, al que denominamos el **valor** de la expresión.

El ejemplo clásico es el de las *expresiones aritméticas*:

- Están formados por secuencias de números y símbolos que representan operaciones aritméticas.
- Denotan un valor numérico, que es el resultado de calcular el valor de la expresión tras hacer las operaciones que aparecen en ella.

  La expresión `(2 * (3 + 5))` denota un valor, que es el número abstracto **16**.

En general, las expresiones correctamente formadas satisfacen una gramática similar a la siguiente:

```
⟨expresión⟩ ::= ( ⟨expresión⟩ ⟨opbin⟩ ⟨expresión⟩ )
              | ( ⟨opun⟩ ⟨expresión⟩ )
              | ⟨literal⟩
              | ⟨identificador⟩
              | ⟨identificador⟩ ( [⟨lista_argumentos⟩] )
⟨lista_argumentos⟩ ::= ⟨expresión⟩(, ⟨expresión⟩)*
⟨opbin⟩ ::= + | - | * | / | // | ** | %
⟨opun⟩ ::= + | -
```

Esta gramática da lugar a expresiones aritméticas *totalmente parentizadas*, en las que cada operación a realizar con operadores va agrupada entre paréntesis, incluso aunque no sea estrictamente necesario. Por ejemplo:

```
(3 + (4 - 7))
```

3. Valores

3.1. Evaluación de expresiones

***Evaluar* una expresión** consiste en determinar el **valor** de la expresión. Es decir, una expresión *representa* o **denota** el valor que se obtiene al evaluarla.

La **evaluación de una expresión**, en esencia, es el proceso de **sustituir**, dentro de ella, unas *subexpresiones* por otras que, de alguna manera, estén *más cerca* del valor a calcular, y así hasta calcular el valor de la expresión al completo.

Además de las expresiones existen las *sentencias*, que no poseen ningún valor y que, por tanto, no se evalúan sino que se *ejecutan*. Las sentencias son básicas en ciertos paradigmas como el *imperativo*.

Podemos decir que las expresiones:

```
3
```

```
(1 + 2)
```

```
(5 - 2)
```

denotan todas el mismo valor (el número abstracto **3**).

Es decir: todas esas expresiones son representaciones diferentes del mismo ente abstracto.

Cuando introducimos una expresión en el intérprete, lo que hace éste es buscar **la representación más simplificada o reducida** posible.

- En el ejemplo anterior, sería la expresión `3`.

Por eso a menudo usamos, indistintamente, los términos *reducir*, *simplificar* y *evaluar*.

3.2. Expresión canónica y forma normal

Los ordenadores no manipulan valores, sino que sólo pueden manejar representaciones concretas de los mismos.

- Por ejemplo: utilizan la codificación binaria en complemento a 2 para representar los números enteros.

Pidamos que la **representación del valor** resultado de una evaluación sea **única**.

De esta forma, seleccionemos de cada conjunto de expresiones que denoten el mismo valor, a lo sumo una que llamaremos **expresión canónica de ese valor**.

Además, llamaremos a la expresión canónica que representa el valor de una expresión la **forma normal de esa expresión**.

Con esta restricción pueden quedar expresiones sin forma normal.

Ejemplo:

- De las expresiones anteriores:

  ```
  3
  ```

  ```
  (1 + 2)
  ```

  ```
  (5 - 2)
  ```

  que denotan todas el mismo valor abstracto **3**, seleccionamos una (la expresión `3`) como la **expresión canónica** de ese valor.

- Igualmente, la expresión `3` es la **forma normal** de todas las expresiones anteriores (y de cualquier otra expresión con valor **3**).

- Es importante no confundir el valor abstracto **3** con la expresión `3` que representa dicho valor.

Hay valores que no tienen expresión canónica:

- Las funciones (los valores de tipo *función*).

- El número π no tiene representación decimal finita, por lo que tampoco tiene expresión canónica.

Y hay expresiones que no tienen forma normal:

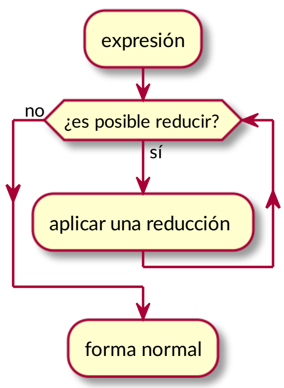
- Si definimos $inf = inf + 1$, la expresión inf (que es un número) no tiene forma normal.
- Lo mismo ocurre con $\frac{1}{0}$.

3.3. Formas normales y evaluación

Según lo visto hasta ahora, la evaluación de una expresión es el proceso de encontrar su forma normal.

El intérprete evalúa una expresión buscando su forma normal y mostrando este resultado.

El sistema de evaluación dentro del intérprete está hecho de forma tal que cuando ya no es posible reducir la expresión es porque se ha llegado a la forma normal.



3.4. Literales

Un **literal** es un valor escrito directamente en el código del programa (en una expresión).

El literal representa un **valor constante**.

Los literales tienen que satisfacer las reglas de sintaxis del lenguaje.

Gracias a esas reglas sintácticas, el intérprete puede identificar qué literales son, qué valor representan y de qué tipo son.

Se deduce, pues, que **un literal debe ser la *expresión canónica* del valor correspondiente**.

Ejemplos de distintos tipos de literales:

Números enteros	Números reales	Cadenas
`-2`	`3.5`	`"hola"`
`-1`	`-2.7`	`"pepe"`
`0`		`"25"`
`1`		`""`
`2`		

Los números reales tienen siempre un `.` decimal.

Las cadenas van siempre entre comillas (simples `'` o dobles `"`).

En apartados posteriores estudiaremos los tipos de datos con más profundidad.

4. Operaciones

4.1. Clasificación

En una expresión puede haber:

- **Datos**
- **Operaciones** a realizar sobre esos datos

A su vez, las operaciones pueden aparecer en forma de:

- Operadores
- Funciones
- Métodos

$$\text{En una expresión hay} \begin{cases} \text{Datos} \\ \text{Operaciones} \begin{cases} \text{Operadores} \\ \text{Funciones} \\ \text{Métodos} \end{cases} \end{cases}$$

4.2. Operadores

Un **operador** es un símbolo o palabra clave que representa la realización de una *operación* sobre unos datos llamados **operandos**.

Ejemplos:

- Los operadores aritméticos: `+`, `-`, `*`, `/` (entre otros):

  ```
  (3 + 4)
  ```

  (aquí los operandos son los números `3` y `4`)

  ```
  (9 * 8)
  ```

  (aquí los operandos son los números `9` y `8`)

- El operador `in` para comprobar si un carácter pertenece a una cadena:

```
("c" in "barco")
```

(aquí los operandos son las cadenas `"c"` y `"barco"`)

4.2.1. Aridad de operadores

Los operadores se clasifican en función de la cantidad de operandos sobre los que operan en:

- **Unarios**: operan sobre un único operando.

  Ejemplo: el operador `-` que cambia el signo de su operando:

  ```
  (-5)
  ```

- **Binarios**: operan sobre dos operandos.

  Ejemplo: la mayoría de operadores aritméticos.

- **Ternarios**: operan sobre tres operandos.

  Veremos un ejemplo más adelante.

4.2.2. Paréntesis

Los **paréntesis** sirven para agrupar elementos dentro de una expresión y romper la ambigüedad sobre el orden en el que se han de realizar las operaciones.

Se usan, sobre todo, para hacer que varios elementos actúen como uno solo en el contexto de una operación.

- Por ejemplo:

  `((3 + 4) * 5)` vale `35`

  `(3 + (4 * 5))` vale `23`

Para reducir la cantidad de paréntesis en una expresión, se puede:

- Quitar los paréntesis más externos que rodean a toda la expresión.
- Acudir a un esquema de **prioridades** y **asociatividades** de operadores.

4.2.3. Prioridad de operadores

En ausencia de paréntesis, cuando un operando está afectado a derecha e izquierda por **distinto operador**, se aplican las reglas de la **prioridad**:

```
8 + 4 * 2
```

El `4` está afectado a derecha e izquierda por distintos operadores (`+` y `*`), por lo que se aplican las reglas de la prioridad. El `*` tiene *más prioridad* que el `+`, así que actúa primero el `*`. Equivale a hacer:

```
8 + (4 * 2)
```

Si hiciéramos

```
(8 + 4) * 2
```

el resultado sería distinto.

Ver prioridad de los operadores en Python en https://docs.python.org/3/reference/expressions.html#operator-precedence.

4.2.4. Asociatividad de operadores

En ausencia de paréntesis, cuando un operando está afectado a derecha e izquierda por el **mismo operador** (o distintos operadores con la **misma prioridad**), se aplican las reglas de la **asociatividad**:

```
8 / 4 / 2
```

El `4` está afectado a derecha e izquierda por el mismo operador `/`, por lo que se aplican las reglas de la asociatividad. El `/` es *asociativo por la izquierda*, así que se actúa primero el operador que está a la izquierda. Equivale a hacer:

```
(8 / 4) / 2
```

Si hiciéramos

```
8 / (4 / 2)
```

el resultado sería distinto.

En Python, todos los operadores son **asociativos por la izquierda** excepto el `**`, que es asociativo por la derecha.

4.2.5. Tipos de operandos

Es importante respetar el tipo de los operandos que espera recibir un operador. Si los intentamos aplicar sobre operandos de tipos incorrectos, obtendremos resultados inesperados (o, directamente, un error).

Por ejemplo, los operadores aritméticos esperan operandos de tipo *numérico*. Así, si intentamos dividir dos cadenas usando el operador `/`:

```
>>> "hola" / "pepe"
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: unsupported operand type(s) for /: 'str' and 'str'
>>>
```

El concepto de **tipo de dato** es uno de los más importantes en Programación y lo estudiaremos en profundidad más adelante.

4.3. Funciones

Las funciones son otra forma de representar operaciones.

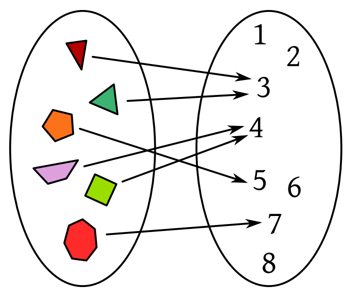
Matemáticamente, una **función** es una regla que **asocia** a cada elemento de un conjunto (el conjunto *origen* o *dominio*) un único elemento de un segundo conjunto (el conjunto *imagen* o *codominio*).

Se representa así:

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x)$$

donde A es el conjunto *origen* y B el conjunto *imagen*.



Función que asocia a cada polígono con su número de lados

La expresión $f : A \rightarrow B$ es la **declaración** o **signatura** de la función.

La **aplicación de la función** f sobre el elemento x se representa por $f(x)$ y corresponde al valor que la función asocia al elemento x en el conjunto imagen.

En la aplicación $f(x)$, al valor x se le llama **argumento** de la función.

Por ejemplo:

La función **valor absoluto**, que asocia a cada número entero ese mismo número sin el signo (un número natural). Su signatura es:

$$abs : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \rightarrow abs(x)$$

Cuando aplicamos la función *abs* al valor -35 obtenemos:

$$abs(-35) = 35$$

El valor 35 es el **resultado** de aplicar la función *abs* al argumento -35.

Otra forma de expresarlo es decir que la función *abs* **recibe** un argumento de tipo entero y **devuelve** un resultado de tipo natural.

La función *abs* se puede usar directamente en Python ya que una función **predefinida** en el lenguaje. Por ejemplo:

```
>>> abs(-35)
35
```

Al igual que pasa con los operadores, es importante respetar la signatura de una función. Si la aplicamos a un argumento de un tipo incorrecto (por ejemplo, una cadena en lugar de un número), obtendremos un error:

```
>>> abs("hola")
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: bad operand type for abs(): 'str'
>>>
```

Otro ejemplo:

$$\begin{gathered} longitud : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \rightarrow longitud(x) \end{gathered}$$

La función *longitud* asocia a cada cadena su longitud (la *longitud* de una cadena es el número de caracteres que contiene).

También puede decirse que devuelve la longitud de la cadena que recibe como argumento.

Así:

$$longitud(hola) = 4$$

En Python, la función *longitud* se llama `len`:

```
>>> len("hola")
4
```

En Programación, a la aplicación de una función también se le denomina **invocación** o **llamada** a la función.

Por ejemplo, cuando hacemos `abs(-35)` podemos decir que:

- Estamos *aplicando* la función `abs` al argumento `-35`.
- Estamos *llamando* a la función `abs` (con el argumento `-35`).
- Estamos *invocando* a la función `abs` (con el argumento `-35`).

De hecho, en Programación es mucho más común decir «*se llama a la función*» que decir «*se aplica la función*».

También se suele decir que «*se **ejecuta** la función*».

4.3.1. Funciones con varios argumentos

El concepto de función se puede generalizar para obtener **funciones con más de un argumento**.

Por ejemplo, podemos definir una función *max* que asocie, a cada par de números enteros, el máximo de los dos:

$$
\begin{aligned}
max : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\
(x, y) \to max(x, y)
\end{aligned}
$$

También podemos decir que *max* es una función que recibe dos argumentos enteros y devuelve un entero.

Si aplicamos la función *max* a los argumentos 13 y -25, el resultado sería 13:

$$max(13, -25) = 13$$

Al igual que ocurre con los operadores, la **aridad de una función** es el número de argumentos que necesita la función.

El símbolo $\times$ representa el **producto cartesiano** de dos conjuntos, y devuelve todas las parejas que se pueden formar emparejando elementos del primer conjunto con elementos del segundo conjunto.

Por ejemplo, si tenemos los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, el producto cartesiano $A \times B$ resultaría:

$$A \times B = \big\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\big\}$$

Este concepto es fundamental en **bases de datos**.

Otro ejemplo de función con varios argumentos:

$$
\begin{aligned}
pow : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
(x, y) \to pow(x, y)
\end{aligned}
$$

La función *pow* recibe dos números (el primero es la *base* y el segundo es el *exponente*) y devuelve el resultado de elevar la base al exponente. Es decir, $pow(x, y) = x^y$.

Por ejemplo, al aplicar la función *pow* sobre los valores 3 y 2, obtenemos:

$$pow(3, 2) = 9$$

Es importante respetar el *orden* de los argumentos. El primero siempre es la base y el segundo siempre es el exponente. Si los pasamos al revés, tendríamos un resultado diferente:

$$pow(2, 3) = 8$$

Curiosamente, la operación de elevar un número a la potencia del otro existe en Python de dos formas diferentes:

- Como operador (`**`):

```
>>> 2 ** 3
8
```

- Como función (`pow`):

```
>>> pow(2, 3)
8
```

En ambos casos, la operación es exactamente la misma.

4.3.2. Evaluación de expresiones con funciones

En una expresión podemos colocar aplicaciones de función en cualquier lugar donde sea sintácticamente correcto situar un valor.

La evaluación de una expresión que contiene aplicaciones de funciones se realiza sustituyendo (*reduciendo*) cada aplicación por su valor correspondiente, es decir, por el valor que dicha función asocia a sus argumentos.

Por ejemplo, en la siguiente expresión se combinan varias funciones y operadores:

`abs(-12) + max(13, 28)`

Aquí se aplica la función *abs* al argumento -12 y la función *max* a los argumentos 13 y 28, y finalmente se suman los dos valores obtenidos.

¿Cómo se calcula el valor de toda la expresión anterior?

En la expresión `abs(-12) + max(13, 28)` tenemos que calcular la suma de dos valores, pero esos valores aún no los conocemos porque son el resultado de llamar a dos funciones.

Por tanto, lo primero que tenemos que hacer es evaluar las dos sub-expresiones principales que contiene dicha expresión:

- `abs(-12)`
- `max(13, 28)`

¿Cuál se evalúa primero?

En Matemáticas no importa el orden de evaluación de las sub-expresiones, ya que el resultado debe ser siempre el mismo, así que da igual evaluar primero uno u otro.

Por tanto, la evaluación paso a paso de la expresión matemática anterior, podría ser de cualquiera de estas dos formas:

1. $$\left\{\begin{aligned} & \underline{abs(-12)} + max(13, 28) \\ & = 12 + \underline{max(13, 28)} \\ & = \underline{12 + 28} \\ & = 40 \end{aligned}\right.$$

2. $$\begin{cases} abs(-12) + \underline{max(13, 28)} \\ = \underline{abs(-12)} + 28 \\ = \underline{12 + 28} \\ = 40 \end{cases}$$

En cada paso, la sub-expresión subrayada es la que se va a evaluar (reducir) en el paso siguiente.

En programación funcional ocurre lo mismo que en Matemáticas, gracias a que se cumple la *transparencia referencial*.

Sin embargo, Python no es un lenguaje funcional puro, y llegado el caso será importante tener en cuenta el orden de evaluación que aplica.

En concreto, y mientras no se diga lo contrario, **Python siempre evalúa las expresiones de izquierda a derecha**.

Importante:

En **Python**, salvo excepciones, los operandos y los argumentos de las funciones se evalúan **de izquierda a derecha**.

En Python, la expresión anterior se escribe exactamente igual, ya que Python conoce las funciones *abs* y *max* (son **funciones predefinidas** en el lenguaje):

```
>>> abs(-12) + max(13, 28)
40
```

Sabiendo que Python evalúa de izquierda a derecha, la evaluación de la expresión anterior en Python, siguiendo nuestro modelo de sustitución, sería:

```
abs(-12) + max(13, 28)    # se evalúa primero abs(-12)
= 12 + max(13, 28)        # ahora se evalúa max(13, 28)
= 12 + 28                 # se evalúa el operador +
= 40
```

4.3.3. Composición de operaciones y funciones

Como acabamos de ver, el resultado de una operación puede ser un dato sobre el que aplicar otra operación dentro de la misma expresión:

- En `4 * (3 + 5)`, el resultado de `(3 + 5)` se usa como operando para el operador `*`.
- En `abs(-12) + max(13, 28)`, los resultados de llamar a las funciones `abs` y `max` son los operandos del operador `+`.

A esto se le denomina **composición de operaciones**.

El orden en el que se evalúan este tipo de expresiones (aquellas que contienen composición de operaciones) es algo que se estudiará más en profundidad en el siguiente tema.

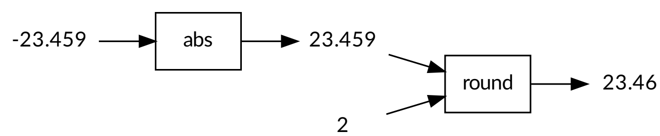
La manera más sencilla de realizar varias operaciones sobre los mismos datos es componer las operaciones, es decir, hacer que el resultado de una operación sea la entrada de otra operación.

Se va creando así una **secuencia de operaciones** donde la salida de una es la entrada de la siguiente.

Cuando el resultado de una función se usa como argumento de otra función le llamamos **composición de funciones**:

```
round(abs(-23.459), 2)  # devuelve 23.46
```

En programación funcional, la composición de funciones es una técnica que ayuda a **descomponer un problema en partes** que se van resolviendo por pasos como en una **cadena de montaje**.



4.4. Métodos

Los **métodos** son, para la **programación orientada a *objetos***, el equivalente a las **funciones** para la **programación *funcional***.

Los métodos son como funciones, pero en este caso se dice que actúan *sobre* un valor, que es el **objeto** sobre el que recae la acción del método.

La *aplicación* de un método se denomina **invocación** o **llamada** al método, y se escribe:

$$v.m()$$

que representa la **llamada** al método m **sobre el *objeto*** v.

Esta llamada se puede leer de cualquiera de estas formas:

- Se **llama** (o **invoca**) al método m sobre el objeto v.
- Se **ejecuta** el método m sobre el objeto v.
- Se **envía el mensaje** m al objeto v.

Los métodos también pueden tener argumentos, como cualquier función:

$$v.m(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

y en tal caso, los argumentos se pasarían al método correspondiente.

En la práctica, no hay mucha diferencia entre tener un método y hacer:

$$v.m(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

y tener una función y hacer:

$$m(v, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Pero conceptualmente, hay una gran diferencia entre un estilo y otro:

- El primero es más **orientado a objetos**: decimos que el *objeto v* «recibe» un mensaje solicitando la ejecución del método *m*.
- En cambio, el segundo es más **funcional**: decimos que la *función m* se aplica a sus argumentos, de los cuales *v* es uno más).

Python es un lenguaje *multiparadigma* que soporta ambos estilos y por tanto dispone tanto de funciones como de métodos. Hasta que no veamos la orientación a objetos, supondremos que un método es como otra forma de escribir una función.

Por ejemplo:

Las cadenas tienen definidas el método `count()` que devuelve el número de veces que aparece una subcadena dentro de la cadena:

```
'hola caracola'.count('ol')
```

devuelve 2.

```
'hola caracola'.count('a')
```

devuelve 4.

Si `count()` fuese una función en lugar de un método, recibiría dos parámetros: la cadena y la subcadena. En tal caso, se usaría así:

```
count('hola caracola', 'ol')
```

5. Otros conceptos sobre operaciones

5.1. Sobrecarga de operaciones

Un **mismo operador** (o nombre de función o método) puede representar **varias operaciones diferentes**, dependiendo del tipo de los operandos o argumentos sobre los que actúa.

Un ejemplo sencillo en Python es el operador `+`:

- Cuando actúa sobre números, representa la operación de suma:

```
>>> 2 + 3
5
```

- Cuando actúa sobre cadenas, representa la *concatenación* de cadenas:

```
>>> "hola" + "pepe"
'holapepe'
```

Cuando esto ocurre, decimos que el operador (o la función, o el método) está **sobrecargado**.

5.2. Equivalencia entre formas de operaciones

Una operación podría tener *forma* de **operador**, de **función** o de **método**.

También podemos encontrarnos operaciones con más de una forma.

Por ejemplo, ya vimos anteriormente la operación *potencia*, que consiste en elevar un número a la potencia de otro (x^y). Esta operación se puede hacer:

- Con el operador `**`:

  ```
  >>> 2 ** 4
  16
  ```

- Con la función `pow`:

  ```
  >>> pow(2, 4)
  16
  ```

Otro ejemplo es la operación *contiene*, que consiste en comprobar si una cadena contiene a otra (una *subcadena*). Esa operación también tiene dos formas:

- El operador `in`:

  ```
  >>> "o" in "hola"
  True
  ```

- El método `__contains__` ejecutado sobre la cadena (y pasando la subcadena como argumento):

  ```
  >>> "hola".__contains__("o")
  True
  ```

  Observar que, en este caso, el objeto que recibe el mensaje (es decir, el objeto al que se le pide que ejecute el método) es la cadena `"hola"`. Es como si le preguntáramos a la cadena `"hola"` si contiene la subcadena `"o"`.

De hecho, en Python hay operaciones que tienen **las tres formas**. Por ejemplo, la suma de dos números enteros se puede expresar:

- Mediante el operador `+`:

  ```
  4 + 3
  ```

- Mediante la función `int.__add__`:

  ```
  int.__add__(4, 3)
  ```

- Mediante el método `__add__` ejecutado sobre uno de los enteros (y pasando el otro número como *argumento* del método):

```
(4).__add__(3)
```

La forma **más general** y destacada de representar una operación es la **función**, ya que cualquier operador o método se puede expresar en forma de función (lo contrario no siempre es cierto).

Es decir: los operadores y los métodos son formas sintácticas especiales para expresar operaciones que se podrían expresar igualmente mediante funciones.

Por eso, cuando hablemos de operaciones, y mientras no se diga lo contrario, supondremos que están representadas como funciones.

Eso implica que los conceptos de *dominio*, *rango*, *aridad*, *argumento*, *resultado*, *composición* y *asociación* (o *correspondencia*), que estudiamos cuando hablamos de las funciones, también existen en los operadores y los métodos.

Es decir: todos esos son conceptos propios de cualquier operación, da igual la forma que tenga esta.

Muchos lenguajes de programación no permiten definir nuevos operadores, pero sí permiten definir nuevas funciones (o métodos, dependiendo del paradigma utilizado).

En algunos lenguajes, los operadores son casos particulares de funciones (o métodos) y se pueden definir como tales. Por tanto, en estos lenguajes se pueden crear nuevos operadores definiendo nuevas funciones (o métodos).

5.3. Igualdad de operaciones

Dos operaciones son **iguales** si devuelven resultados iguales para argumentos iguales.

Este principio recibe el nombre de **principio de extensionalidad**.

Principio de extensionalidad:

$f = g$ si y sólo si $f(x) = g(x)$ para todo x.

Por ejemplo: una función que calcule el doble de su argumento multiplicándolo por 2, sería exactamente igual a otra función que calcule el doble de su argumento sumándolo consigo mismo.

En ambos casos, las dos funciones devolverán siempre los mismos resultados ante los mismos argumentos.

Cuando dos operaciones son iguales, podemos usar una u otra indistintamente.

6. Operaciones predefinidas

6.1. Operadores predefinidos

6.1.1. Operadores aritméticos

Operador	Descripción	Ejemplo	Resultado	Comentarios
`+`	Suma	`3 + 4`	`7`	
`-`	Resta	`3 - 4`	`-1`	
`*`	Producto	`3 * 4`	`12`	
`/`	División	`3 / 4`	`0.75`	Devuelve un `float`
`%`	Módulo	`4 % 3` `8 % 3`	`1` `2`	Resto de la división
`**`	Exponente	`3 ** 4`	`81`	Devuelve 3^4
`//`	División entera hacia abajo	`4 // 3` `-4 // 3`	`1` `-2`	??

6.1.2. Operadores de cadenas

Operador	Descripción	Ejemplo	Resultado
`+`	Concatenación	`'ab' + 'cd'` `'ab' 'cd'`	`'abcd'`
`*`	Repetición	`'ab' * 3` `3 * 'ab'`	`'ababab'` `'ababab'`
`[0]`	Primer carácter	`'hola'[0]`	`'h'`
`[1:]`	Resto de cadena	`'hola'[1:]`	`'ola'`

6.2. Funciones predefinidas

Función	Descripción	Ejemplo	Resultado
`abs(`*n*`)`	Valor absoluto	`abs(-23)`	`23`
`len(`*cad*`)`	Longitud de la cadena	`len('hola')`	`4`
`max(`n_1`(, `n_2`)*)`	Valor máximo	`max(2, 5, 3)`	`5`
`min(`n_1`(, `n_2`)*)`	Valor mínimo	`min(2, 5, 3)`	`2`
`round(`*n*`[, `*p*`])`	Redondeo	`round(23.493)` `round(23.493, 1)`	`23` `23.5`
`type(`*v*`)`	Tipo del valor	`type(23.5)`	`<class 'float'>`

6.2.1. Funciones matemáticas

Python incluye una gran cantidad de funciones matemáticas agrupadas dentro del módulo `math`.

Los **módulos** en Python son conjuntos de funciones (y más cosas) que se pueden **importar** dentro de nuestra sesión o programa.

Son la base de la **programación modular**, que ya estudiaremos.

Para *importar* una función de un módulo se puede usar la orden `from`. Por ejemplo, para importar la función `gcd` (que calcula el máximo común divisor de dos números) del módulo `math` se haría:

```
>>> from math import gcd  # importamos la función gcd que está en el módulo math
>>> gcd(16, 6)            # la función se usa como cualquier otra
2
```

Una vez importada, la función ya se puede usar como cualquier otra.

También se puede importar directamente el módulo en sí:

```
>>> import math      # importamos el módulo math
>>> math.gcd(16, 6)  # la función gcd sigue estando dentro del módulo
2
```

Al importar el módulo, lo que se importan no son sus funciones, sino el nombre y la definición del propio módulo, el cual contiene dentro la definición de sus funciones.

Por eso, para poder llamar a una función del módulo usando esta técnica, debemos indicar el nombre del módulo, seguido de un punto (`.`) y el nombre de la función:

```
math.gcd(16, 6)
─┬── ─┬─
 │    └────── función
 │
 └── módulo
```

El punto `.` es un operador que nos permite acceder al interior de estructuras que tienen contenido propio, como los módulos.

La lista completa de funciones que incluye el módulo `math` se puede consultar en su documentación:

https://docs.python.org/3/library/math.html

6.3. Métodos predefinidos

Igualmente, en la documentación podemos encontrar una lista de métodos interesantes que operan con datos de tipo cadena:

https://docs.python.org/3/library/stdtypes.html#string-methods

Ejercicios

Ejercicios

1. Representar, según el modelo de sustitución, la evaluación las siguientes expresiones, aplicando paso a paso la reducción que corresponda. Indicar también el tipo del valor resultante:

   a. `3 + 6 * 14`
   b. `8 + 7 * 3.0 + 4 * 6`
   c. `-4 * 7 + 2 ** 3 / 4 - 5`
   d. `4 / 2 * 3 / 6 + 6 / 2 / 1 / 5 ** 2 / 4 * 2`

2. Convertir en expresiones aritméticas algorítmicas las siguientes expresiones algebraicas:

   a. $5 \cdot (x + y)$
   b. $a^2 + b^2$
   c. $\frac{x+y}{u+\frac{w}{a}}$
   d. $\frac{x}{y} \cdot (z + w)$

3. Determinar, según las reglas de prioridad y asociatividad del lenguaje Python, qué paréntesis sobran en las siguientes expresiones. Reescribirlas sin los paréntesis sobrantes. Calcular su valor y deducir su tipo:

   a. `(8 + (7 * 3) + 4 * 6)`
   b. `-(2 ** 3)`
   c. `(33 + (3 * 4)) / 5`
   d. `2 ** (2 * 3)`
   e. `(3.0) + (2 * (18 - 4 ** 2))`
   f. `(16 * 6) - (3) * 2`

4. Usar la función `math.sqrt` para escribir dos expresiones en Python que calculen las dos soluciones a la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

   Recordar que las soluciones son:

$$x_1 = -b + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = -b - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. Evaluar las siguientes expresiones:

   a. `9 - 5 - 3`
   b. `2 // 3 + 3 / 5`
   c. `9 // 2 / 5`
   d. `7 % 5 % 3`
   e. `7 % (5 % 3)`
   f. `(7 % 5) % 3`
   g. `(7 % 5 % 3)`
   h. `((12 + 3) // 2) / (8 - (5 + 1))`
   i. `12 / 2 * 3`
   j. `math.sqrt(math.cos(4))`
   k. `math.cos(math.sqrt(4))`
   l. `math.trunc(815.66) + round(815.66)`

6. Escribir las siguientes expresiones algorítmicas como expresiones algebraicas:

   a. `b ** 2 - 4 * a * c`
   b. `3 * x ** 4 - 5 * x ** 3 + x * 12 - 17`
   c. `(b + d) / (c + 4)`
   d. `(x ** 2 + y ** 2) ** (1 / 2)`

Bibliografía

Abelson, Harold, Gerald Jay Sussman, and Julie Sussman. 1996. *Structure and Interpretation of Computer Programs*. 2nd ed. Cambridge, Mass. : New York: MIT Press ; McGraw-Hill.

Blanco, Javier, Silvina Smith, and Damián Barsotti. 2009. *Cálculo de Programas*. Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Córdoba.

Van-Roy, Peter, and Seif Haridi. 2004. *Concepts, Techniques, and Models of Computer Programming*. Cambridge, Mass: MIT Press.

