

# Tipos y operaciones

Ricardo Pérez López

IES Doñana, curso 2025/2026

Generado el 2025/10/02 a las 00:15:00

## Índice

<b>1. Sistemas de tipos</b>	<b>2</b>
1.1. Concepto . . . . .	2
1.2. Errores de tipos . . . . .	2
1.3. Tipado fuerte vs. débil . . . . .	3
1.4. La función <code>type</code> . . . . .	4
1.5. Conversión de tipos . . . . .	4
1.6. Tipos de datos básicos . . . . .	5
<b>2. Números</b>	<b>5</b>
2.1. Los tipos <code>int</code> y <code>float</code> . . . . .	5
2.1.1. Operadores aritméticos . . . . .	5
2.2. Funciones numéricas predefinidas . . . . .	6
2.3. Funciones matemáticas y módulos . . . . .	6
2.3.1. El módulo <code>operator</code> . . . . .	8
<b>3. Cadenas</b>	<b>9</b>
3.1. El tipo <code>str</code> . . . . .	9
3.2. Operadores de cadenas . . . . .	10
3.3. Funciones predefinidas de cadenas . . . . .	10
3.4. Métodos predefinidos de cadenas . . . . .	11
<b>4. Funciones</b>	<b>11</b>
4.1. El tipo <i>función</i> . . . . .	11
<b>5. Álgebra de Boole</b>	<b>11</b>
5.1. El tipo de dato <i>booleano</i> . . . . .	11
5.2. Operadores relacionales . . . . .	12
5.3. Operadores lógicos . . . . .	12
5.3.1. Tablas de verdad . . . . .	13
5.4. Axiomas . . . . .	14
5.5. Teoremas fundamentales . . . . .	15
5.6. Lógica binaria . . . . .	16

5.7. Equivalencia lógica . . . . .	17
5.8. El operador ternario . . . . .	18
<b>6. Otros conceptos sobre operaciones</b>	<b>19</b>
6.1. Árboles sintácticos y evaluación . . . . .	19
6.2. Tipos polimórficos y operaciones polimórficas . . . . .	23
6.3. Sobrecarga de operaciones . . . . .	24
6.4. Equivalencia entre formas de operaciones . . . . .	24
6.5. Igualdad de operaciones . . . . .	26

## 1. Sistemas de tipos

### 1.1. Concepto

Un **tipo (o tipo de datos)** es un conjunto de **valores** y de **operaciones** que se pueden realizar sobre esos valores.

El **sistema de tipos** de un lenguaje es el conjunto de reglas que asigna un tipo a cada elemento del programa.

Exceptuando a los lenguajes **no tipados** (Ensamblador, código máquina, Forth...) todos los lenguajes tienen su propio sistema de tipos, con sus características.

El sistema de tipos de un lenguaje depende también del paradigma de programación que soporte el lenguaje. Por ejemplo, en los lenguajes **orientados a objetos**, el sistema de tipos se construye a partir de los conceptos propios de la orientación a objetos (*clases, interfaces...*).

### 1.2. Errores de tipos

Cuando se intenta realizar una operación sobre un dato cuyo tipo no admite esa operación, se produce un **error de tipos**.

Ese error puede ocurrir cuando:

- Los operandos de un operador no pertenecen al tipo que el operador necesita (ese operador no está definido sobre datos de ese tipo).
- Los argumentos de una función o método no son del tipo esperado.

Por ejemplo:

```
4 + "hola"
```

es incorrecto porque el operador `+` no está definido sobre un entero y una cadena (no se pueden sumar un número y una cadena).

En caso de que exista un error de tipos, lo que ocurre dependerá de si estamos usando un lenguaje interpretado o compilado:

- Si el lenguaje es **interpretado** (Python):

El error se localizará **durante la ejecución** del programa y el intérprete mostrará un mensaje de error advirtiéndolo del mismo en el momento justo en que la ejecución alcance la línea de código errónea, para acto seguido finalizar la ejecución del programa.

- Si el lenguaje es **compilado** (Java):

Es muy probable que el comprobador de tipos del compilador detecte el error de tipos **durante la compilación** del programa, es decir, antes incluso de ejecutarlo. En tal caso, se abortará la compilación para impedir la generación de código objeto erróneo.

### 1.3. Tipado fuerte vs. débil

Un lenguaje de programación es **fuertemente tipado** (o de **tipado fuerte**) si no se permiten violaciones de los tipos de datos.

Es decir, un valor de un tipo concreto no se puede usar como si fuera de otro tipo distinto a menos que se haga una *conversión explícita*.

Un lenguaje es **débilmente tipado** (o de **tipado débil**) si no es de tipado fuerte.

En los lenguajes de tipado débil se pueden hacer operaciones entre datos cuyo tipo no son los que espera la operación, gracias al mecanismo de *conversión implícita*.

Existen dos mecanismos de conversión de tipos:

- **Conversión implícita o coerción**: cuando el intérprete convierte un valor de un tipo a otro sin que el programador lo haya solicitado expresamente.
- **Conversión explícita o casting**: cuando el programador solicita expresamente la conversión de un valor de un tipo a otro usando alguna construcción u operación del lenguaje.

Los lenguajes de tipado fuerte no realizan conversiones implícitas de tipos salvo excepciones muy concretas (por ejemplo, conversiones entre enteros y reales en expresiones aritméticas).

Los lenguajes de tipado débil se caracterizan, precisamente, por realizar conversiones implícitas cuando, en una expresión, el tipo de un valor no se corresponde con el tipo necesario.

Ejemplo:

- Python es un lenguaje **fuertemente tipado**, por lo que no podemos hacer lo siguiente (da un error de tipos):

```
2 + "3"
```

- En cambio, PHP es un lenguaje **débilmente tipado** y la expresión anterior en PHP es perfectamente válida (y vale cinco).

El motivo es que el sistema de tipos de PHP convierte *implícitamente* la cadena "3" en el entero 3 cuando se usa en una operación de suma (+).

Es importante entender que **la conversión de tipos no modifica el dato original**, sino que devuelve un nuevo dato a partir del dato original pero con el tipo cambiado.

## 1.4. La función `type`

La función `type` devuelve el tipo de un valor:

```
>>> type(3)
<class 'int'>
>>> type(3.0)
<class 'float'>
>>> type('hola')
<class 'str'>
```

Es muy útil para saber el tipo de una expresión compleja:

```
>>> type(3 + 4.5 ** 2)
<class 'float'>
```

## 1.5. Conversión de tipos

Hemos visto que en Python las conversiones de tipos deben ser **explícitas**, es decir, que debemos indicar en todo momento qué dato queremos convertir a qué tipo.

Para ello existen funciones cuyo nombre coincide con el tipo al que queremos convertir el dato: `str`, `int` y `float`, entre otras.

```
>>> 4 + '24'
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: unsupported operand type(s) for +: 'int' and 'str'
>>> 4 + int('24')
28
```

Convertir un dato a cadena suele funcionar siempre, pero convertir una cadena a otro tipo de dato puede fallar dependiendo del contenido de la cadena:

```
>>> int('hola')
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
ValueError: invalid literal for int() with base 10: 'hola'
```

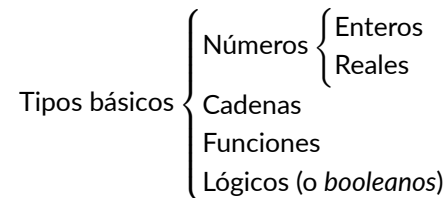
Recordando lo que dijimos anteriormente, la conversión de tipos no modifica el dato original, sino que devuelve un nuevo dato a partir del dato original pero con el tipo cambiado.

Las funciones de conversión de tipos hacen precisamente eso: devuelven un nuevo dato con un determinado tipo a partir del dato original que reciben como argumento.

Por tanto, la expresión `int('24')` devuelve el entero `24` pero no cambia en modo alguno la cadena `'24'` que ha recibido como argumento.

## 1.6. Tipos de datos básicos

Los tipos de datos básicos que empezaremos a estudiar en Python son:



## 2. Números

### 2.1. Los tipos `int` y `float`

Hay dos tipos numéricos básicos en Python: los enteros y los reales.

- Los **enteros** se representan con el tipo `int`.

Sólo contienen parte entera, y sus literales se escriben con dígitos sin punto decimal (ej: `13`).

- Los **reales** se representan con el tipo `float`.

Contienen parte entera y parte fraccionaria, y sus literales se escriben con dígitos y con punto decimal separando ambas partes (ej: `4.87`). Los números en notación exponencial (`2e3`) también son reales ( $2e3 = 2.0 \times 10^3$ ).

Las **operaciones** que se pueden realizar con los números son los que cabría esperar (aritméticas, trigonométricas, matemáticas en general).

Los enteros y los reales generalmente se pueden combinar en una misma expresión aritmética y suele resultar en un valor real, ya que se considera que los reales *contienen* a los enteros.

- Ejemplo: `4 + 3.5` devuelve `7.5`.

Por ello, y aunque el lenguaje sea de tipado fuerte, se permite la conversión implícita entre datos de tipo `int` y `float` dentro de una misma expresión para realizar las operaciones correspondientes.

En el ejemplo anterior, el valor entero `4` se convierte implícitamente en el real `4.0` debido a que el otro operando de la suma es un valor real (`3.5`). Finalmente, se obtiene un valor real (`7.5`).

#### 2.1.1. Operadores aritméticos

Operador	Descripción	Ejemplo	Resultado	Comentarios
<code>+</code>	Suma	<code>3 + 4</code>	<code>7</code>	
<code>-</code>	Resta	<code>3 - 4</code>	<code>-1</code>	
<code>*</code>	Producto	<code>3 * 4</code>	<code>12</code>	
<code>/</code>	División	<code>3 / 4</code>	<code>0.75</code>	Devuelve un <code>float</code>

Operador	Descripción	Ejemplo	Resultado	Comentarios
<code>%</code>	Módulo	<code>4 % 3</code> <code>8 % 3</code>	<code>1</code> <code>2</code>	Resto de la división
<code>**</code>	Exponente	<code>3 ** 4</code>	<code>81</code>	Devuelve $3^4$
<code>//</code>	División entera hacia abajo	<code>4 // 3</code> <code>-4 // 3</code>	<code>1</code> <code>-2</code>	??

## 2.2. Funciones numéricas predefinidas

Función	Descripción	Ejemplo	Resultado
<code>abs(n)</code>	Valor absoluto	<code>abs(-23)</code>	<code>23</code>
<code>max(n<sub>1</sub>(, n<sub>2</sub>)<sup>+</sup>)</code>	Valor máximo	<code>max(2, 5, 3)</code>	<code>5</code>
<code>min(n<sub>1</sub>(, n<sub>2</sub>)<sup>+</sup>)</code>	Valor mínimo	<code>min(2, 5, 3)</code>	<code>2</code>
<code>round(n[, p])</code>	Redondeo	<code>round(23.493)</code> <code>round(23.493, 1)</code>	<code>23</code> <code>23.5</code>

## 2.3. Funciones matemáticas y módulos

Python incluye una gran cantidad de funciones matemáticas agrupadas dentro del módulo `math`.

Los **módulos** en Python son conjuntos de funciones (y más cosas) que se pueden **importar** dentro de nuestra sesión o programa.

Son la base de la **programación modular**, que ya estudiaremos.

Para **importar** una función de un módulo se puede usar la orden **from**. Por ejemplo, para importar la función `gcd` del módulo `math` se haría:

```
>>> from math import gcd # importamos la función gcd que está en el módulo math
>>> gcd(16, 6)           # la función se usa como cualquier otra
2
```

Una vez importada, la función ya se puede usar directamente como cualquier otra.

También se puede **importar directamente el módulo en sí** usando la orden **import**.

```
>>> import math          # importamos el módulo math
```

Al importar el módulo, lo que se importan no son sus funciones, sino el propio módulo, el cual es un **objeto** (de tipo `module`) al que se accede a través de su nombre y cuyos **atributos** son (entre otras cosas) las funciones que están definidas dentro del módulo.

Por eso, para poder llamar a una función del módulo usando esta técnica, debemos indicar el nombre del módulo, seguido de un punto (.) y el nombre de la función:

```
>>> import math      # importamos el módulo math
>>> math.gcd(16, 6)  # la función gcd sigue estando dentro del módulo
2
```

```
math.gcd(16, 6)
└──┬── función
   │
   └── módulo
```

Eso significa que podríamos ampliar nuestra gramática para permitir que el nombre de una función en una llamada pudiera contener la parte del módulo:

```
<llamada_función> ::= <función>(<lista_argumentos>)]
<función> ::= [<módulo>].<identificador>
<módulo> ::= <identificador>
```

Pero técnicamente no es necesario, ya que las funciones contenidas en un módulo se invocan como si fueran **métodos que se ejecutan sobre el objeto módulo**, por lo que la sintaxis es la misma que para los métodos y está ya recogida en nuestra gramática:

```
<llamada_método> ::= <objeto>.<método>(<lista_argumentos>)]
<objeto> ::= <expresión>
<método> ::= <identificador>
```

Esto nos dice que hay una relación muy estrecha entre funciones y métodos (de hecho, los métodos son funciones que se invocan de una forma especial).

De hecho, cuando el objeto es un módulo, no hablamos de métodos sino de funciones (los módulos no contienen métodos).

No es lo mismo `math`, que `math.gcd`, que `math.gcd(16, 6)`:

- `math` es un *módulo* (un objeto de tipo `module`).
- `math.gcd` es una *función* (no es un método porque `math` es un módulo).
- `math.gcd(16, 6)` es una *llamada a función*.

```
>>> import math
>>> math
<module 'math' (built-in)>
>>> math.gcd
<built-in function gcd>
>>> math.gcd(16, 6)
2
```

La lista completa de funciones que incluye el módulo `math` se puede consultar en su documentación:

<https://docs.python.org/3/library/math.html>

### 2.3.1. El módulo `operator`

El módulo `operator` contiene, en forma de funciones, las operaciones básicas que hasta ahora hemos utilizado en forma de operadores:

Operador	Operación	Función en el módulo <code>operator</code>
<code>+</code>	Suma	<code>add</code>
<code>-</code>	Resta	<code>sub</code>
<code>-</code>	Cambio de signo	<code>neg</code>
<code>*</code>	Multiplicación	<code>mul</code>
<code>/</code>	División	<code>truediv</code>
<code>%</code>	Módulo	<code>mod</code>
<code>**</code>	Exponente	<code>pow</code>
<code>//</code>	División entera hacia abajo	<code>floordiv</code>

Gracias al módulo `operator`, podemos reescribir con funciones las expresiones que utilizan operadores.

Por ejemplo, la expresión:

```
>>> 3 * (4 + 5) - 10
17
```

se puede reescribir como:

```
>>> from operator import add, mul, sub
>>> sub(mul(3, add(4, 5)), 10)
17
```

Pasar los operadores de una expresión a funciones es un ejercicio muy interesante que ayuda a entender en qué orden se evalúan las subexpresiones y por qué.

En Python, en una llamada a función, los argumentos se evalúan siempre antes que la propia llamada (y de izquierda a derecha).

La expresión `3 * (4 + 5) - 10` se evalúa así:

```
3 * (4 + 5) - 10      # se evalúa 3 (devuelve 3)
= 3 * (4 + 5) - 10    # se evalúa 4 (devuelve 4)
= 3 * (4 + 5) - 10    # se evalúa 5 (devuelve 5)
= 3 * (4 + 5) - 10    # se evalúa (4 + 5) (devuelve 9)
= 3 * 9 - 10          # se evalúa 3 * 9 (devuelve 27)
= 27 - 10             # se evalúa 27 - 10 (devuelve 17)
= 17
```



Y la expresión `sub(mul(3, add(4, 5)), 10)` se evalúa así:

```
sub(mul(3, add(4, 5)), 10)  # se evalúa sub (devuelve la función resta)
= sub(mul(3, add(4, 5)), 10) # se evalúa mul (devuelve la función multiplicación)
= sub(mul(3, add(4, 5)), 10) # se evalúa 3 (devuelve 3)
= sub(mul(3, add(4, 5)), 10) # se evalúa add (devuelve la función suma)
= sub(mul(3, add(4, 5)), 10) # se evalúa 4 (devuelve 4)
= sub(mul(3, add(4, 5)), 10) # se evalúa 5 (devuelve 5)
= sub(mul(3, add(4, 5)), 10) # se evalúa add(4, 5) (devuelve 9)
= sub(mul(3, 9), 10)         # se evalúa mul(3, 9) (devuelve 27)
= sub(27, 10)                # se evalúa 10 (devuelve 10)
= sub(27, 10)                # se evalúa sub(27, 10) (devuelve 17)
= 17
```

### 3. Cadenas

#### 3.1. El tipo `str`

Las **cadenas** son secuencias de cero o más caracteres codificados en Unicode.

En Python se representan con el tipo `str`.

- No existe el tipo *carácter* en Python. Un carácter en Python es simplemente una cadena que contiene un solo carácter.

Un literal de tipo cadena se escribe encerrando sus caracteres entre comillas simples (`'`) o dobles (`"`).

- No hay ninguna diferencia entre usar unas comillas u otras, pero si una cadena comienza con comillas simples, debe acabar también con comillas simples (y viceversa).

Ejemplos:

```
"hola"
'Manolo'
"27"
```

También se pueden escribir literales de tipo cadena encerrándolos entre triples comillas (`' ' ' o " " "`).

Estos literales se usan para escribir cadenas formadas por varias líneas. La sintaxis de las triples comillas respeta los saltos de línea. Por ejemplo:

```
>>> """Bienvenido
... a
... Python"""
'Bienvenido\na\nPython' # el carácter \n representa un salto de línea
```

No es lo mismo `27` que `"27"`.

- `27` es un número entero (un literal de tipo `int`).
- `"27"` es una cadena (un literal de tipo `str`).

Una **cadena vacía** es aquella que no contiene ningún carácter. Se representa con los literales `' '`, `""`, `''''` o `''''''''`.

Si necesitamos meter el carácter de la comilla simple (') o doble (") en un literal de tipo cadena, tenemos dos opciones:

- Delimitar la cadena con el otro tipo de comillas. Por ejemplo:
  - \* `'Pepe dijo: "Yo no voy.", así que no fuimos.'`
  - \* `"Bienvenido, Señor O'Halloran."`
- «Escapar» la comilla, poniéndole delante una barra inclinada hacia la izquierda (\):
  - \* `"Pepe dijo: \"Yo no voy.\", así que no fuimos."`
  - \* `'Bienvenido, Señor O\'Halloran.'`

### 3.2. Operadores de cadenas

Operador	Descripción	Ejemplo	Resultado
<code>+</code>	Concatenación	<code>'ab' + 'cd'</code> <code>'ab' 'cd'</code>	<code>'abcd'</code>
<code>*</code>	Repetición	<code>'ab' * 3</code> <code>3 * 'ab'</code>	<code>'ababab'</code> <code>'ababab'</code>
<code>[0]</code>	Primer carácter	<code>'hola'[0]</code>	<code>'h'</code>
<code>[1:]</code>	Resto de cadena	<code>'hola'[1:]</code>	<code>'ola'</code>

### 3.3. Funciones predefinidas de cadenas

Función	Descripción	Ejemplo	Resultado
<code>len(cad)</code>	Longitud de la cadena	<code>len('hola')</code>	<code>4</code>
<code>max(n<sub>1</sub>(, n<sub>2</sub>)<sup>+</sup>)</code>	Valor máximo	<code>max(2, 5, 3)</code>	<code>5</code>
<code>min(n<sub>1</sub>(, n<sub>2</sub>)<sup>+</sup>)</code>	Valor mínimo	<code>min(2, 5, 3)</code>	<code>2</code>

### 3.4. Métodos predefinidos de cadenas

En la documentación podemos encontrar una lista de métodos interesantes que operan sobre cadenas:

<https://docs.python.org/3/library/stdtypes.html#string-methods>

## 4. Funciones

### 4.1. El tipo función

En programación funcional, **las funciones también son datos**:

```
>>> type(max)
<class 'builtin_function_or_method'>
```

La **única operación** que se puede realizar sobre una función es **llamarla**, que sintácticamente se representa poniendo paréntesis ( ) justo a continuación de la función.

Dentro de los paréntesis se ponen los *argumentos* que se aplican a la función en esa llamada (si es que los necesita), separados por comas.

Por tanto, `max` es la función en sí (un **valor** de tipo *función*), y `max(3, 4)` es una llamada a la función `max` con los argumentos `3` y `4` (una **operación** realizada sobre la función).

```
>>> max                                # la función max
<built-in function max>
>>> max(3, 4)                          # la llamada a max con los argumentos 3 y 4
4
```

Recordemos que **las funciones no tienen expresión canónica**, por lo que el intérprete no intentará nunca visualizar un valor de tipo función.

## 5. Álgebra de Boole

### 5.1. El tipo de dato *booleano*

Un dato **lógico** o *booleano* es aquel que puede tomar uno de dos posibles valores, que se denotan normalmente como **verdadero** y **falso**.

Esos dos valores tratan de representar los dos valores de verdad de la **lógica** y el **álgebra booleana**.

Su nombre proviene de **George Boole**, matemático que definió por primera vez un sistema algebraico para la lógica a mediados del S. XIX.

En Python, el tipo de dato lógico se representa como `bool` y sus posibles valores son `False` y `True`.

Esos dos valores son *formas especiales* para los enteros `0` y `1`, respectivamente.

## 5.2. Operadores relacionales

Los **operadores relacionales** son operadores que toman dos operandos (que usualmente deben ser del mismo tipo) y devuelven un valor *booleano*.

Los más conocidos son los **operadores de comparación**, que sirven para comprobar si un dato es menor, mayor o igual que otro, según un orden preestablecido.

Los operadores de comparación que existen en Python son:

`<   >   <=   >=   ==   !=`

Por ejemplo:

```
>>> 4 == 3
False
>>> 5 == 5
True
>>> 3 < 9
True
```

```
>>> 9 != 7
True
>>> False == True
False
>>> 8 <= 8
True
```

## 5.3. Operadores lógicos

Las **operaciones lógicas** se representan mediante **operadores lógicos**, que son aquellos que toman uno o dos operandos *booleanos* y devuelven un valor *booleano*.

Las operaciones básicas del álgebra de Boole se llaman **suma**, **producto** y **complemento**.

En **lógica proposicional** (un tipo de lógica matemática que tiene estructura de álgebra de Boole), se llaman:

Operación	Operador
Disyunción	$\vee$
Conjunción	$\wedge$
Negación	$\neg$

En Python se representan como **or**, **and** y **not**, respectivamente.

### 5.3.1. Tablas de verdad

Una **tabla de verdad** es una tabla que muestra el valor lógico de una expresión compuesta, para cada uno de los valores lógicos que puedan tomar sus componentes.

Se usan para definir el significado de las operaciones lógicas y también para verificar que se cumplen determinadas propiedades.

Las tablas de verdad de los operadores lógicos son:

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

A	$\neg A$
F	V
V	F

Que traducido a Python sería:

A	B	$A \text{ or } B$
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	True

A	B	$A \text{ and } B$
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	True

A	not A
False	True
True	False

## 5.4. Axiomas

1. Ley asociativa:  $\begin{cases} \forall a, b, c \in \mathbb{B} : (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \\ \forall a, b, c \in \mathbb{B} : (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \end{cases}$
2. Ley conmutativa:  $\begin{cases} \forall a, b \in \mathbb{B} : a \vee b = b \vee a \\ \forall a, b \in \mathbb{B} : a \wedge b = b \wedge a \end{cases}$
3. Ley distributiva:  $\begin{cases} \forall a, b, c \in \mathbb{B} : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ \forall a, b, c \in \mathbb{B} : a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{cases}$
4. Elemento neutro:  $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{B} : a \vee F = a \\ \forall a \in \mathbb{B} : a \wedge V = a \end{cases}$
5. Elemento complementario:  $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{B} ; \exists \neg a \in \mathbb{B} : a \vee \neg a = V \\ \forall a \in \mathbb{B} ; \exists \neg a \in \mathbb{B} : a \wedge \neg a = F \end{cases}$

Si  $(\mathbb{B}, \neg, \vee, \wedge)$  cumple lo anterior, entonces es un álgebra de Boole.

### Traducción a Python

1. Ley asociativa:

```
(a or b) or c == a or (b or c)
(a and b) and c == a and (b and c)
```

2. Ley conmutativa:

```
a or b == b or a
a and b == b and a
```

3. Ley distributiva:

```
a or (b and c) == (a or b) and (a or c)
a and (b or c) == (a and b) or (a and c)
```

4. Elemento neutro:

```
a or False == a
a and True == a
```

5. Elemento complementario:

```
a or (not a) == True
a and (not a) == False
```

## 5.5. Teoremas fundamentales

6. Ley de idempotencia:  $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{B} : a \vee a = a \\ \forall a \in \mathbb{B} : a \wedge a = a \end{cases}$
7. Ley del elemento absorbente:  $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{B} : a \vee V = V \\ \forall a \in \mathbb{B} : a \wedge F = F \end{cases}$
8. Ley de identidad:  $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{B} : a \vee F = a \\ \forall a \in \mathbb{B} : a \wedge V = a \end{cases}$
9. Ley de absorción:  $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{B} : a \vee (a \wedge b) = a \\ \forall a \in \mathbb{B} : a \wedge (a \vee b) = a \end{cases}$
10. Ley de involución:  $\forall a \in \mathbb{B} : \neg\neg a = a$
11. Ley del complemento:  $\begin{cases} \neg V = F \\ \neg F = V \end{cases}$
12. Leyes de De Morgan:  $\begin{cases} \forall a, b \in \mathbb{B} : \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \\ \forall a, b \in \mathbb{B} : \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \end{cases}$

### Traducción a Python

6. Ley de idempotencia:

```
a or a == a
a and a == a
```

7. Ley del elemento absorbente:

```
a or True == True
a and False == False
```

8. Ley de identidad:

```
a or False == a
a and True == a
```

9. Ley de absorción:

```
a or (a and b) == a
a and (a or b) == a
```

10. Ley de involución:

```
not (not a) == a
```

11. Ley del complemento:

```
not True == False
not False == True
```

12. Leyes de De Morgan:

```
not (a or b) == (not a) and (not b)
not (a and b) == (not a) or (not b)
```

## 5.6. Lógica binaria

Otra forma de representar los operadores y los valores del álgebra de Boole es mediante la notación de la **lógica binaria**.

Según la notación de la lógica binaria, los diferentes valores y operaciones del álgebra de Boole se representan de la siguiente forma:

Valor u operación	Notación
Valor verdadero	1
Valor falso	0
Producto de A y B	$A \cdot B$ $AB$
Suma de A y B	$A + B$
Complemento de A	$\bar{A}$

Por ejemplo, las leyes de DeMorgan, que en Python se escriben así:

```
not (a or b) == (not a) and (not b)
not (a and b) == (not a) or (not b)
```

se escribirían así según la notación de la lógica binaria:

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

Esta notación se emplea principalmente en el diseño de circuitos digitales.



## 5.7. Equivalencia lógica

Decimos que dos expresiones lógicas  $P$  y  $Q$  son **equivalentes** (y se representa como  $P \equiv Q$ , aunque nosotros lo representaremos simplemente como  $P = Q$ ) si tienen las mismas tablas de verdad, es decir, si se cumple que  $P$  vale  $V$  cuando  $Q$  también, y viceversa.

Para demostrar que se cumple una equivalencia en el álgebra de Boole, se pueden usar dos técnicas:

- Demostrar que la propiedad es un *teorema* que se puede deducir de los axiomas y de otros teoremas ya demostrados.
- Usar las *tablas de verdad* para comprobar si los valores de verdad de  $P$  y  $Q$  coinciden exactamente.

Por ejemplo, supongamos que queremos demostrar la siguiente propiedad:

$$A(A + B) = A$$

Podemos demostrarlo siguiendo la siguiente secuencia de razonamientos:

$$\begin{aligned} & A(A + B) \\ = & \quad \quad \quad \{ \text{Ley distributiva} \} \\ & AA + AB \\ = & \quad \quad \quad \{ \text{Ley de idempotencia} \} \\ & A + AB \\ = & \quad \quad \quad \{ \text{Ley de absorción} \} \\ & A \end{aligned}$$

También podemos obtener sus tablas de verdad y comprobar que son idénticas:

$A$	$B$	$A + B$	$A(A + B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Como podemos observar, las columnas de  $A$  y de  $A(A + B)$  son idénticas, lo que significa que toman siempre los mismos valores de verdad y, por tanto, ambas expresiones son equivalentes.

## 5.8. El operador ternario

Las expresiones lógicas (o *booleanas*) se pueden usar para comprobar si se cumple una determinada **condición**.

Las condiciones en un lenguaje de programación se representan mediante expresiones lógicas cuyo valor (*verdadero* o *falso*) indica si la condición se cumple o no se cumple.

Con el **operador ternario** podemos hacer que el resultado de una expresión varíe entre dos posibles opciones dependiendo de si se cumple o no una condición.

El operador ternario se llama así porque es el único operador en Python que actúa sobre tres operandos.

El uso del operador ternario permite crear lo que se denomina una **expresión condicional**.

Su sintaxis es:

```
⟨expr_condicional⟩ ::= ⟨valor_si_cierto⟩ if ⟨condición⟩ else ⟨valor_si_falso⟩
```

donde:

- *⟨condición⟩* debe ser una expresión lógica
- *⟨valor\_si\_cierto⟩* y *⟨valor\_si\_falso⟩* pueden ser expresiones de cualquier tipo

El valor de la expresión completa será *⟨valor\_si\_cierto⟩* si la *⟨condición⟩* es cierta; en caso contrario, su valor será *⟨valor\_si\_falso⟩*.

Ejemplo:

```
25 if 3 > 2 else 17
```

evalúa a 25.

El operador ternario, así como los operadores lógicos **and** y **or**, se evalúan siguiendo una estrategia según la cual **no siempre se evalúan todos sus operandos**.

La expresión condicional:

```
⟨valor_si_cierto⟩ if ⟨condición⟩ else ⟨valor_si_falso⟩
```

se evalúa de la siguiente forma:

- Primero siempre se evalúa la *⟨condición⟩*.
- Si es **True**, evalúa *⟨valor\_si\_cierto⟩*.
- Si es **False**, evalúa *⟨valor\_si\_falso⟩*.

Por tanto, en la expresión condicional nunca se evalúan todos sus operandos, sino sólo los estrictamente necesarios.

Además, no se evalúan de izquierda a derecha, como es lo normal.

La evaluación de los operadores **and** y **or** sigue un proceso similar:

- Primero se evalúa el operando izquierdo.
- El operando derecho sólo se evalúa si el izquierdo no proporciona la información suficiente para determinar el resultado de la operación.

Esto es así porque:

- `True or x`  
siempre es igual a `True`, valga lo que valga `x`.
- `False and x`  
siempre es igual a `False`, valga lo que valga `x`.

En ambos casos no es necesario evaluar `x`.

### Ejercicio

1. ¿Cuál es la asociatividad del operador ternario? Demostrarlo.

## 6. Otros conceptos sobre operaciones

### 6.1. Árboles sintácticos y evaluación

Durante la fase de análisis sintáctico, el compilador o el intérprete traducen el programa fuente en una representación intermedia llamada **árbol sintáctico**.

Resulta conveniente comprender qué forma tiene ese árbol sintáctico para entender adecuadamente cómo se evalúan las expresiones y, más concretamente, en qué orden se van evaluando las subexpresiones.

En un árbol sintáctico, las hojas representan valores, mientras que los nodos intermedios representan operaciones.

Si una expresión está correctamente escrita según la sintaxis del lenguaje, sólo tendrá un único árbol sintáctico equivalente.

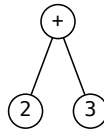
En caso contrario, es que la expresión no es sintácticamente correcta, o bien que la gramática del lenguaje no está bien diseñada.

Por ejemplo, tenemos las siguientes expresiones y sus árboles sintácticos equivalentes:

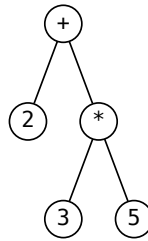
2

②

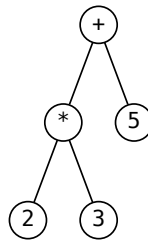
2 + 3



2 + 3 \* 5

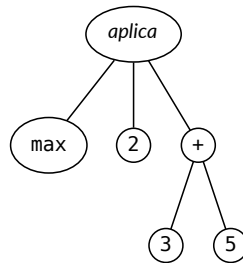


2 \* 3 + 5



Si la expresión contiene llamadas a funciones, se haría:

max(2, 3 + 5)



El nodo *aplica* representa la llamada a la función representada por su primer hijo, pasándole los argumentos representados por el resto de sus hijos.

Por tanto, tendrá tantos hijos como parámetros tenga la función, más uno (la propia función).

Para evaluar una expresión representada por su árbol sintáctico, se va recorriendo éste siguiendo un orden que dependerá del lenguaje de programación utilizado.

En Python se sigue un esquema de recorrido llamado **primero en profundidad**, donde se van visitan-

do los nodos del árbol de izquierda a derecha y de arriba abajo, buscando siempre el nodo que está más al fondo.

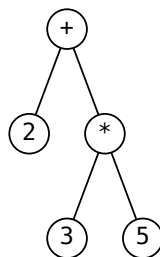
La idea es que, antes de evaluar un nodo, debemos evaluar primero todos sus nodos hijos, en orden, de izquierda a derecha.

De esta forma, para evaluar (reducir) un nodo, debemos reducir primero todos sus nodos hijo antes de reducir el propio nodo.

Si el nodo no tiene hijos, entonces se podrá evaluar directamente.

La evaluación consiste en ir sustituyendo unos subárboles por otros más reducidos hasta acabar teniendo un árbol que represente la forma normal de la expresión a evaluar.

Por ejemplo, en la expresión  $2 + 3 * 5$ , representada por este árbol:

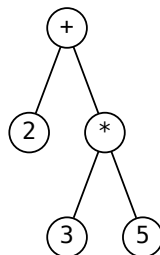


El orden en el que vamos evaluando los nodos sería el siguiente:

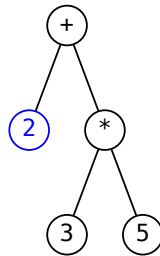
2, 3, 5, \*, +

La evaluación se realizaría de la siguiente forma, donde en azul destacamos los nodos que ya están evaluados:

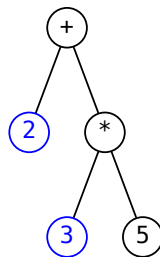
**Paso 1:** Se empieza visitando la raíz + pero, como tiene hijos, antes de evaluarlo se pasa a visitar su primer hijo (2).



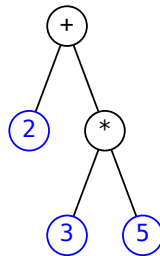
**Paso 2:** Como estamos en el nodo 2 y éste no tiene hijos, se puede evaluar directamente, ya que es un nodo hoja y, por tanto, representa un valor. La evaluación del nodo no cambia el nodo ni lo sustituye por ningún otro.



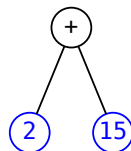
**Paso 3:** Volvemos al padre del nodo 2, que es el nodo raíz +, el cual todavía no lo podemos evaluar porque aún le queda otro nodo hijo por evaluar (el nodo \*), así que bajamos hasta él. Éste, a su vez, tampoco se puede evaluar porque tiene hijos que hay que evaluar antes, el primero de los cuales es el nodo 3, así que evaluamos 3, que se evalúa directamente ya que es un nodo hoja.



**Paso 4:** Volvemos al padre del nodo 3, que es el nodo \*, el cual todavía no lo podemos evaluar porque aún le queda otro nodo hijo por evaluar (el nodo 5), así que bajamos hasta éste, el cual se evalúa directamente ya que es un nodo hoja.



**Paso 5:** Volvemos al padre del nodo 5, que es el nodo \*, el cual ya se puede evaluar porque ya se han evaluado todos sus hijos, así que se realiza la operación  $3 * 5$ , dando como resultado 15, por lo que el subárbol que cuelga del nodo \* se reduce y se sustituye por un único nodo hoja 15.



**Paso 6:** Volvemos al padre del que ahora es el nodo 15, que es el nodo +, el cual ya se puede evaluar porque ya se han evaluado todos sus hijos, así que se realiza la operación  $2 + 15$ , dando como resultado 17, por lo que el subárbol que cuelga del nodo + se reduce y se sustituye por un único nodo hoja 17.

Como ya se ha reducido el nodo raíz, la evaluación de la expresión ha terminado, dando como resultado un árbol que representa a la forma normal de la expresión inicial.

### Importante

Recordar que este orden concreto de evaluación (*primero en profundidad*, donde se evalúan primero todos los nodos hijos antes de evaluar al nodo padre) es uno más de entre varios órdenes de evaluación que existen.

El orden de evaluación concreto que se use dependerá del lenguaje de programación utilizado.

Incluso dentro de un mismo lenguaje, podemos encontrarnos con algunas operaciones concretas que no siguen este orden de evaluación, aunque el resto de las operaciones sí lo hagan.

Por ejemplo, los operadores lógicos o el operador ternario en Python se evalúan siguiendo un orden diferente al indicado aquí, como ya veremos más adelante.

## 6.2. Tipos polimórficos y operaciones polimórficas

Hasta ahora, hemos visto que la función `abs` de Python tiene la siguiente signatura:

```
abs(x: int) -> int
```

Pero sabemos que también puede actuar sobre números reales, por lo que también podría tener la siguiente signatura:

```
abs(x: float) -> float
```

En realidad, podríamos definir la función `abs` de Python con la siguiente signatura:

```
abs(x: Number) -> Number
```

donde `Number` es un tipo que representa a todos los tipos numéricos en Python (como `int` o `float`).

Eso quiere decir que el parámetro `x` de la función `abs` admite un valor de cualquier tipo numérico, ya sea un entero o un real.

Por tanto, `Number` es un tipo que representa a varios tipos a la vez.

Cuando eso ocurre, decimos que **ese tipo es polimórfico**.

Por eso podemos afirmar que `Number` es un tipo polimórfico en Python.

De la misma forma (aunque se utiliza menos), podemos decir que un **valor polimórfico** es un valor que pertenece a un tipo polimórfico.

Asimismo, una **operación polimórfica** es aquella en cuya signatura aparece algún tipo polimórfico.

Por ejemplo, la función `abs` definida con un parámetro de tipo `Number` sería polimórfica, ya que ese parámetro tendría un tipo polimórfico.

### 6.3. Sobrecarga de operaciones

Un **mismo operador, nombre de función o nombre de método** puede representar **varias operaciones diferentes**, dependiendo del tipo de los operandos o argumentos sobre los que actúa.

Un ejemplo sencillo en Python es el operador `+`:

- Cuando actúa sobre números, representa la operación de suma:

```
>>> 2 + 3
5
```

- Cuando actúa sobre cadenas, representa la *concatenación* de cadenas:

```
>>> "hola" + "pepe"
'holapepe'
```

Cuando esto ocurre, decimos que el operador (o la función, o el método) está **sobrecargado**.

Es decir, es como si el operador `+` representara dos operaciones distintas con dos signatures distintas:

```
+(a: Number, b: Number) -> Number
```

```
+(a: str, b: str) -> str
```

de forma que, al usar el operador en una expresión del tipo:

```
<expr>1 + <expr>2
```

el intérprete llamará a una de las dos operaciones, dependiendo de los tipos de `<expr>1` y `<expr>2`.

La sobrecarga no es polimorfismo, pero induce un cierto tipo de polimorfismo que se denomina **polimorfismo *ad-hoc***.

Esto es así porque tener varias operaciones diferentes con el mismo nombre pero con distinta signature, equivale a tener una sola operación polimórfica donde algunos operandos pueden tomar un valor de varios tipos.

Por ejemplo, los tipos de `a` y `b` representarían a la vez a `Number` y `str`.

### 6.4. Equivalencia entre formas de operaciones

Una operación puede tener *forma* de **operador**, de **función** o de **método**.

También podemos encontrarnos operaciones con más de una forma.

Por ejemplo, ya vimos anteriormente la operación «*longitud*», que consiste en determinar el número de caracteres que tiene una cadena. Esta operación se puede hacer:

- Con la función `len`, pasando la cadena como argumento:

```
>>> len("hola")
4
```

- Con el método `__len__` ejecutado sobre la cadena:



```
>>> "hola".__len__()  
4
```

De hecho, en Python hay operaciones que tienen **las tres formas**. Por ejemplo, ya vimos anteriormente la operación *potencia*, que consiste en elevar un número a la potencia de otro ( $x^y$ ). Esta operación se puede hacer:

- Con el operador **`**`**:

```
>>> 2 ** 4  
16
```

- Con la función **`pow`**:

```
>>> pow(2, 4)  
16
```

- Con el método **`__pow__`**:

```
>>> (2).__pow__(4)  
16
```

La forma **más general** de representar una operación es la **función**, ya que **cualquier operación se puede expresar en forma de función** (cosa que no ocurre con los operadores y los métodos).

Los operadores y los métodos son **formas sintácticas especiales** para representar operaciones que se podrían representar igualmente mediante funciones.

Por eso, al hablar de operaciones, y mientras no se diga lo contrario, podremos suponer que están representadas como funciones.

Eso implica que los conceptos de *conjunto origen*, *conjunto imagen*, *dominio*, *rango*, *aridad*, *argumento*, *resultado*, *composición* y *asociación* (o *correspondencia*), que estudiamos cuando hablamos de las funciones, también existen en los operadores y los métodos.

Es decir: todos esos son conceptos propios de cualquier operación, da igual la forma que tenga esta.

Muchos lenguajes de programación no permiten definir nuevos operadores, pero sí permiten definir nuevas funciones (o métodos, dependiendo del paradigma utilizado).

En algunos lenguajes, los operadores son casos particulares de funciones (o métodos) y se pueden definir como tales. Por tanto, en estos lenguajes se pueden crear nuevos operadores definiendo nuevas funciones (o métodos).

## 6.5. Igualdad de operaciones

Dos operaciones son **iguales** si devuelven resultados iguales para argumentos iguales.

Este principio recibe el nombre de **principio de extensionalidad**.

**Principio de extensionalidad:**

$f = g$  si y sólo si  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$ .

Por ejemplo: una función que calcule el doble de su argumento multiplicándolo por 2, sería exactamente igual a otra función que calcule el doble de su argumento sumándolo consigo mismo.

En ambos casos, las dos funciones devolverán siempre los mismos resultados ante los mismos argumentos.

Cuando dos operaciones son iguales, podemos usar una u otra indistintamente.

## Bibliografía

- Abelson, Harold, Gerald Jay Sussman, and Julie Sussman. 1996. *Structure and Interpretation of Computer Programs*. 2nd ed. Cambridge, Mass. : New York: MIT Press ; McGraw-Hill.
- Blanco, Javier, Silvina Smith, and Damián Barsotti. 2009. *Cálculo de Programas*. Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Córdoba.
- Van-Roy, Peter, and Seif Haridi. 2004. *Concepts, Techniques, and Models of Computer Programming*. Cambridge, Mass: MIT Press.