

Programación funcional (I)

Ricardo Pérez López

IES Doñana, curso 2021/2022



Generado el 2021/10/14 a las 12:14:00

1. Introducción
2. Tipos de datos
3. Álgebra de Boole
4. Definiciones
5. Documentación interna

1. Introducción

1.1 Concepto

1.2 Transparencia referencial

1.3 Modelo de ejecución

1.1. Concepto

Concepto

- ▶ La **programación funcional** es un paradigma de programación declarativa basado en el uso de **definiciones**, **expresiones** y **funciones matemáticas**.
- ▶ Tiene su origen teórico en el **cálculo lambda**, un sistema matemático creado en 1930 por Alonzo Church.
- ▶ Los lenguajes funcionales se pueden considerar *azúcar sintáctico* (es decir, una forma equivalente pero sintácticamente más sencilla) del cálculo lambda.
- ▶ En programación funcional, una función define un cálculo a realizar a partir de unos datos de entrada, con la propiedad de que el resultado de la función sólo puede depender de esos datos de entrada.
- ▶ Eso significa que una función no puede tener estado interno ni su resultado puede depender del estado del programa.

- ▶ Además, una función no puede producir ningún efecto observable fuera de ella (los llamados **efectos laterales**), salvo calcular y devolver su resultado.
- ▶ Esto quiere decir que en programación funcional no existen los efectos laterales, o se dan de forma muy localizada en partes muy concretas e imprescindibles del programa.
- ▶ Por todo lo expuesto anteriormente, se dice que las funciones en programación funcional son **funciones puras**.
- ▶ En consecuencia, es posible sustituir cualquier expresión por su valor, propiedad que se denomina **transparencia referencial**.

- ▶ En programación funcional, las funciones también son valores, por lo que se consideran a éstas como **ciudadanas de primera clase**.
- ▶ Un programa funcional está formado únicamente por definiciones de valores y por expresiones que hacen uso de los valores definidos.
- ▶ Por tanto, en programación funcional, ejecutar un programa equivale a evaluar una expresión.
- ▶ Para describir el proceso llevado a cabo por el programa no es necesario bajar al nivel de la máquina, sino que basta con interpretarlo como un **sistema de evaluación de expresiones**.
- ▶ Esa evaluación de expresiones se lleva a cabo mediante **reescrituras** que usan las definiciones para tratar de alcanzar la forma normal de la expresión.

1.2. Transparencia referencial

Transparencia referencial

- ▶ En programación funcional, el valor de una expresión depende, exclusivamente, de los valores de sus sub-expresiones constituyentes.
- ▶ Dichas sub-expresiones, además, pueden ser sustituidas libremente por otras que tengan el mismo valor.
- ▶ A esta propiedad se la denomina **transparencia referencial**.
- ▶ Formalmente, se puede definir así:

Transparencia referencial:

Si $p = q$, entonces $f(p) = f(q)$.

- ▶ En la práctica, eso significa que la evaluación de una expresión no puede provocar **efectos laterales**.

- ▶ Los **efectos laterales** son aquellos que provocan un cambio de estado irremediable en el sistema, que además son observables fuera del contexto donde se producen y que puede dar lugar a que una misma expresión tenga dos valores según el momento en el que se evalúe.
- ▶ Por ejemplo, las **instrucciones de E/S** (entrada y salida) provocan efectos laterales, ya que:
 - Al **leer un dato** de la entrada (ya sea el teclado, un archivo del disco, una base de datos...) estamos afectando al estado del dispositivo de entrada, y además no se sabe de antemano qué valor se va a recibir, ya que éste proviene del exterior y no lo controlamos.
 - Al **escribir un dato** en la salida (ya sea la pantalla, un archivo, una base de datos...) estamos realizando un cambio que afecta irremediabilmente al estado del dispositivo de salida.
- ▶ En posteriores temas veremos que existe un paradigma (el **paradigma imperativo**) que se basa principalmente en provocar efectos laterales, principalmente mediante una instrucción llamada *asignación destructiva*.

1.3. Modelo de ejecución

1.3.1 Modelo de sustitución

Modelo de ejecución

- ▶ Cuando escribimos programas (y algoritmos) nos interesa abstraernos del funcionamiento detallado de la máquina que va a ejecutar esos programas.
- ▶ Nos interesa buscar una *metáfora*, un símil de lo que significa ejecutar el programa.
- ▶ De la misma forma que un arquitecto crea modelos de los edificios que se pretenden construir, los programadores podemos usar modelos que *simulan* en esencia el comportamiento de nuestros programas.
- ▶ Esos modelos se denominan **modelos computacionales** o **modelos de ejecución**.
- ▶ Los modelos de ejecución nos permiten **razonar** sobre los programas sin tener que ejecutarlos.

► Definición:

Modelo de ejecución:

Es una herramienta conceptual que permite a los programadores razonar sobre el funcionamiento de un programa sin tener que ejecutarlo directamente en el ordenador.

- Podemos definir diferentes modelos de ejecución dependiendo, principalmente, de:
- El paradigma de programación utilizado (ésto sobre todo).
 - El lenguaje de programación con el que escribamos el programa.
 - Los aspectos que queramos estudiar de nuestro programa.

Modelo de sustitución

- ▶ En programación funcional, **un programa es una expresión** y lo que hacemos al ejecutarlo es **evaluar dicha expresión**, usando para ello las definiciones de operadores y funciones predefinidas por el lenguaje, así como las definidas por el programador en el código fuente del programa.
- ▶ Recordemos que la **evaluación de una expresión**, en esencia, es el proceso de **sustituir**, dentro de ella, unas *sub-expresiones* por otras que, de alguna manera bien definida, estén *más cerca* del valor a calcular, y así hasta calcular el valor de la expresión al completo.
- ▶ Por ello, la ejecución de un programa funcional se puede modelar como un **sistema de reescritura** al que llamaremos **modelo de sustitución**.

- ▶ La ventaja de este modelo es que no necesitamos recurrir a pensar que debajo de todo esto hay un ordenador con una determinada arquitectura *hardware*, que almacena los datos en celdas de la memoria principal, que ejecuta ciclos de instrucción en la CPU, que las instrucciones modifican los datos de la memoria, etc.
- ▶ Todo resulta mucho más fácil que eso, ya que **todo se reduce a evaluar expresiones**.
- ▶ Y la evaluación de expresiones no requiere pensar que hay un ordenador que lleva a cabo el proceso de evaluación.
- ▶ Esto se debe a que la programación funcional se basa en el **cálculo lambda**, que es un modelo teórico matemático.

- ▶ Ya estudiamos que evaluar una expresión consiste en encontrar su forma normal.
- ▶ En programación funcional:
 - Los intérpretes alcanzan este objetivo a través de múltiples pasos de reducción de las expresiones para obtener otra equivalente más simple.
 - **Toda expresión posee un valor definido**, y ese valor no depende del orden en el que se evalúe.
 - El significado de una expresión es su valor, y no puede ocurrir ningún otro efecto, ya sea oculto o no, en ninguna operación que se utilice para calcularlo.

2. Tipos de datos

2.1 Concepto

2.2 Tipo de un dato

2.3 `type`

2.4 Sistema de tipos

2.5 Tipos de datos básicos

2.6 Conversión de tipos

2.1. Concepto

Concepto

- ▶ Los **valores** que comparten características y propiedades comunes se agrupan en **conjuntos** llamados **tipos de datos** o, simplemente, **tipos**.
- ▶ Por tanto, un **tipo** (o **tipo de datos**) es un conjunto de valores:

Tipo (de datos):

Es un conjunto de **valores**.

- ▶ Se dice que «*un valor pertenece a un tipo*» cuando pertenece a ese conjunto (es decir, cuando es uno de los elementos de ese conjunto).

Por ejemplo, el tipo *entero* representa el conjunto de los números enteros. Los diferentes números enteros pertenecen al tipo *entero*.

- ▶ En general, las **operaciones** se definen de forma que sólo pueden actuar sobre valores de determinados tipos.

O dicho de otra forma: esas son las operaciones que tiene sentido realizar sobre esos valores.

Esto es así porque recordemos que las operaciones actúan como funciones que están definidas sobre un **dominio**. Ese dominio sería, a grandes rasgos, el tipo de los valores sobre los que puede actuar.

Por ejemplo: sobre un valor de tipo *entero* se puede realizar la operación *cambio de signo* (pero no *raíz cuadrada*), y sobre dos enteros se pueden realizar las operaciones de *suma* y *producto*.

- ▶ En resumen, podemos decir que **un tipo**:
 - Es un conjunto de **valores**.
 - Que, indirectamente, define también el conjunto de **operaciones** válidas que se pueden realizar sobre dichos valores.

2.2. Tipo de un dato

Tipo de un dato

- ▶ Recordemos que un dato puede tomar valores.
- ▶ Por extensión, el **tipo de un dato** es el conjunto de los posibles valores que puede tomar ese dato.

En cierta forma, el tipo de un dato es como una etiqueta, característica o atributo que va asociado al dato y que define una cualidad muy importante del mismo.

Se dice que «*un dato **es de** un tipo*», o que «*un dato **tiene** un tipo*» o que «*un dato **pertenece a** un tipo*» cuando ese dato tiene (o puede tener) un valor de ese tipo.

- ▶ Dependiendo del lenguaje de programación utilizado, el tipo de un dato puede venir definido:
 - *Implícitamente*, como **el tipo del valor que tiene actualmente** el dato.
 - *Explícitamente*, asociando el tipo al dato mediante una instrucción especial llamada **declaración**.

- ▶ Como los datos tienen (o representan) valores, **las operaciones también pueden actuar sobre datos.**

En realidad, lo que hacen las operaciones es actuar sobre los valores que tienen esos datos.

- ▶ Por tanto, también se puede decir que **las operaciones que se pueden realizar sobre un dato dependen del tipo de ese dato.**
- ▶ Y, por extensión, podemos decir que **un tipo de datos:**
 - Es el conjunto de **valores** que puede tomar un dato de ese tipo.
 - Que, indirectamente, define también el conjunto de **operaciones** válidas que se pueden realizar sobre datos de ese tipo.

► Definiciones ampliadas:

Tipo (o tipo de datos):

Es un conjunto de **valores** que, indirectamente, define también el conjunto de **operaciones** que se pueden realizar sobre esos valores.

Tipo de un dato:

Es el tipo que tiene ese dato, es decir, una característica o atributo del dato que define el conjunto de **valores** que puede tomar ese dato y, en consecuencia, también las **operaciones** que se pueden realizar sobre ese dato.

► Igualmente, por extensión podemos definir también el **tipo de una expresión** como el tipo al que pertenece el valor de la expresión:

Tipo de una expresión:

Es el **tipo del valor** resultante de **evaluar** dicha expresión.

- ▶ Los tipos de un lenguaje de programación tienen un nombre (un *identificador*) que los representa.
- ▶ Ejemplos en Python:
 - El tipo `int` define el conjunto de los **números enteros**, sobre los que se pueden realizar, entre otras, las operaciones aritméticas.

Se corresponde *más o menos* con el símbolo matemático \mathbb{Z} , que ya hemos usado antes y que representa el conjunto de los números enteros en Matemáticas.
 - El tipo `float` define el conjunto de los **números reales**, sobre los que se pueden realizar también operaciones aritméticas.

Se corresponde *más o menos* con el símbolo matemático \mathbb{R} , que representa el conjunto de los números reales en Matemáticas.
 - El tipo `str` define el conjunto de las **cadenas**, sobre las que se pueden realizar otras operaciones (*concatenación*, *repeticón*, etc.).

¿Por qué decimos «*más o menos*»?

2.3. type

type

- La función `type` devuelve el tipo de un valor:

```
>>> type(3)
<class 'int'>
>>> type(3.0)
<class 'float'>
>>> type('hola')
<class 'str'>
```

- Es muy útil para saber el tipo de una expresión compleja:

```
>>> type(3 + 4.5 ** 2)
<class 'float'>
```

2.4. Sistema de tipos

2.4.1 Errores de tipos

2.4.2 Tipado fuerte vs. débil

Sistema de tipos

- ▶ El **sistema de tipos** de un lenguaje es el conjunto de reglas que asigna un tipo a cada elemento del programa.
- ▶ Exceptuando a los lenguajes **no tipados** (Ensamblador, código máquina, Forth...) todos los lenguajes tienen su propio sistema de tipos, con sus características.
- ▶ El sistema de tipos de un lenguaje depende también del paradigma de programación que soporte el lenguaje. Por ejemplo, en los lenguajes **orientados a objetos**, el sistema de tipos se construye a partir de los conceptos propios de la orientación a objetos (*clases, interfaces...*).

Errores de tipos

- ▶ Cuando se intenta realizar una operación sobre un dato cuyo tipo no admite esa operación, se produce un **error de tipos**.
- ▶ Ese error puede ocurrir cuando:
 - Los operandos de un operador no pertenecen al tipo que el operador necesita (ese operador no está definido sobre datos de ese tipo).
 - Los argumentos de una función o método no son del tipo esperado.
- ▶ Por ejemplo:

```
4 + "hola"
```

es incorrecto porque el operador `+` no está definido sobre un entero y una cadena (no se pueden sumar un número y una cadena).

- ▶ En caso de que exista un error de tipos, lo que ocurre dependerá de si estamos usando un lenguaje interpretado o compilado:

- Si el lenguaje es **interpretado** (Python):

El error se localizará **durante la ejecución** del programa y el intérprete mostrará un mensaje de error advirtiéndolo del mismo en el momento justo en que la ejecución alcance la línea de código errónea, para acto seguido finalizar la ejecución del programa.

- Si el lenguaje es **compilado** (Java):

Es muy probable que el comprobador de tipos del compilador detecte el error de tipos **durante la compilación** del programa, es decir, antes incluso de ejecutarlo. En tal caso, se abortará la compilación para impedir la generación de código objeto erróneo.

Tipado fuerte vs. débil

- ▶ Un lenguaje de programación es **fuertemente tipado** (o de **tipado fuerte**) si no se permiten violaciones de los tipos de datos.
- ▶ Es decir, un valor de un tipo concreto no se puede usar como si fuera de otro tipo distinto a menos que se haga una *conversión explícita*.
- ▶ Un lenguaje es **débilmente tipado** (o de **tipado débil**) si no es de tipado fuerte.
- ▶ En los lenguajes de tipado débil se pueden hacer operaciones entre datos cuyo tipos no son los que espera la operación, gracias al mecanismo de *conversión implícita*.

- ▶ Existen dos mecanismos de conversión de tipos:
 - **Conversión implícita o coerción:** cuando el intérprete convierte un valor de un tipo a otro sin que el programador lo haya solicitado expresamente.
 - **Conversión explícita o casting:** cuando el programador solicita expresamente la conversión de un valor de un tipo a otro usando alguna construcción u operación del lenguaje.
- ▶ Los lenguajes de tipado fuerte no realizan conversiones implícitas de tipos salvo excepciones muy concretas (por ejemplo, conversiones entre enteros y reales en expresiones aritméticas).
- ▶ Los lenguajes de tipado débil se caracterizan, precisamente, por realizar conversiones implícitas cuando, en una expresión, el tipo de un valor no se corresponde con el tipo necesario.

► Ejemplo:

- Python es un lenguaje **fuertemente tipado**, por lo que no podemos hacer lo siguiente (da un error de tipos):

```
2 + "3"
```

- En cambio, PHP es un lenguaje **débilmente tipado** y la expresión anterior en PHP es perfectamente válida (y vale **cinco**).

El motivo es que el sistema de tipos de PHP convierte *implícitamente* la cadena "3" en el entero 3 cuando se usa en una operación de suma (+).

- Es importante entender que **la conversión de tipos no modifica el dato original**, sino que devuelve un nuevo dato a partir del dato original pero con el tipo cambiado.

2.5. Tipos de datos básicos

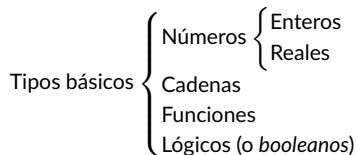
2.5.1 Números

2.5.2 Cadenas

2.5.3 Funciones

Tipos de datos básicos

- Los tipos de datos básicos que empezaremos a estudiar en Python son:



Números

- ▶ Hay dos tipos numéricos básicos en Python: los enteros y los reales.
 - Los **enteros** se representan con el tipo `int`.

Sólo contienen parte entera, y sus literales se escriben con dígitos sin punto decimal (ej: `13`).
 - Los **reales** se representan con el tipo `float`.

Contienen parte entera y parte fraccionaria, y sus literales se escriben con dígitos y con punto decimal separando ambas partes (ej: `4.87`). Los números en notación exponencial (`2e3`) también son reales ($2e3 = 2.0 \times 10^3$).
- ▶ Las **operaciones** que se pueden realizar con los números son los que cabría esperar (aritméticas, trigonométricas, matemáticas en general).

- ▶ Los enteros y los reales generalmente se pueden combinar en una misma expresión aritmética y suele resultar en un valor real, ya que se considera que los reales *contienen* a los enteros.
 - Ejemplo: $4 + 3.5$ devuelve 7.5 .
- ▶ Por ello, y aunque el lenguaje sea de tipado fuerte, se permite la conversión implícita entre datos de tipo `int` y `float` dentro de una misma expresión para realizar las operaciones correspondientes.
- ▶ En el ejemplo anterior, el valor entero 4 se convierte implícitamente en el real 4.0 debido a que el otro operando de la suma es un valor real (3.5). Finalmente, se obtiene un valor real (7.5).

Cadenas

- ▶ Las **cadenas** son secuencias de cero o más caracteres codificados en Unicode.
- ▶ En Python se representan con el tipo `str`.
 - No existe el tipo *carácter* en Python. Un carácter en Python es simplemente una cadena que contiene un solo carácter.
- ▶ Un literal de tipo cadena se escribe encerrando sus caracteres entre comillas simples (') o dobles (").
 - No hay ninguna diferencia entre usar unas comillas u otras, pero si una cadena comienza con comillas simples, debe acabar también con comillas simples (y viceversa).
- ▶ Ejemplos:

```
"hola"
```

```
'Manolo'
```

```
"27"
```

- También se pueden escribir literales de tipo cadena encerrándolos entre triples comillas (''' o ''').

Estos literales se usan para escribir cadenas formadas por varias líneas. La sintaxis de las triples comillas respeta los saltos de línea. Por ejemplo:

```
>>> """Bienvenido
... a
... Python"""
'Bienvenido\na\nPython' # el carácter \n representa un salto de línea
```

- No es lo mismo 27 que "27".
 - 27 es un número entero (un literal de tipo `int`).
 - "27" es una cadena (un literal de tipo `str`).
- Una **cadena vacía** es aquella que no contiene ningún carácter. Se representa con los literales '', "", '''' o ''''''''.

- ▶ Si necesitamos meter el carácter de la comilla simple (') o doble (") en un literal de tipo cadena, tenemos dos opciones:
 - Delimitar la cadena con el otro tipo de comillas. Por ejemplo:
 - `'Pepe dijo: "Yo no voy.", así que no fuimos.'`
 - `"Bienvenido, Señor O'Halloran."`
 - «Escapar» la comilla, poniéndole delante una barra inclinada hacia la izquierda (\):
 - `"Pepe dijo: \"Yo no voy.\", así que no fuimos."`
 - `'Bienvenido, Señor O\'Halloran.'`

Funciones

- En programación funcional, **las funciones también son datos**:

```
>>> type(max)
<class 'builtin_function_or_method'>
```

- La **única operación** que se puede realizar sobre una función es **llamarla**, que sintácticamente se representa poniendo paréntesis () justo a continuación de la función.

Dentro de los paréntesis se ponen los *argumentos* que se aplican a la función en esa llamada (si es que los necesita), separados por comas.

- Por tanto, `max` es la función en sí (un **valor** de tipo *función*) , y `max(3, 4)` es una llamada a la función `max` con los argumentos `3` y `4`.

```
>>> max                                # la función max
<built-in function max>
>>> max(3, 4)                         # la llamada a max con los argumentos 3 y 4
4
```

- Recordemos que **las funciones no tienen expresión canónica**, por lo que el intérprete no intentará nunca visualizar un valor de tipo función.

2.6. Conversión de tipos

Conversión de tipos

- ▶ Hemos visto que en Python las conversiones de tipos deben ser **explícitas**, es decir, que debemos indicar en todo momento qué dato queremos convertir a qué tipo.
- ▶ Para ello existen funciones cuyo nombre coincide con el tipo al que queremos convertir el dato: `str`, `int` y `float`, entre otras.

```
>>> 4 + '24'
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: unsupported operand type(s) for +: 'int' and 'str'
>>> 4 + int('24')
28
```

- ▶ Convertir un dato a cadena suele funcionar siempre, pero convertir una cadena a otro tipo de dato puede fallar dependiendo del contenido de la cadena:

```
>>> int('hola')
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
ValueError: invalid literal for int() with base 10: 'hola'
```

- ▶ Recordando lo que dijimos anteriormente, la conversión de tipos no modifica el dato original, sino que devuelve un nuevo dato a partir del dato original pero con el tipo cambiado.
- ▶ Las funciones de conversión de tipos hacen precisamente eso: devuelven un nuevo dato con un determinado tipo a partir del dato original que reciben como argumento.
- ▶ Por tanto, la expresión `int('24')` devuelve el entero `24` pero no cambia en modo alguno la cadena `'24'` que ha recibido como argumento.

3. Álgebra de Boole

3.1 El tipo de dato *booleano*

3.2 Operadores relacionales

3.3 Operadores lógicos

3.4 Axiomas

3.5 Teoremas fundamentales

3.6 El operador ternario

3.1. El tipo de dato *booleano*

El tipo de dato *booleano*

- ▶ Un dato **lógico** o *booleano* es aquel que puede tomar uno de dos posibles valores, que se denotan normalmente como **verdadero** y **falso**.
- ▶ Esos dos valores tratan de representar los dos valores de verdad de la **lógica** y el **álgebra booleana**.
- ▶ Su nombre proviene de **George Boole**, matemático que definió por primera vez un sistema algebraico para la lógica a mediados del S. XIX.
- ▶ En Python, el tipo de dato lógico se representa como `bool` y sus posibles valores son `False` y `True`.
- ▶ Esos dos valores son *formas especiales* para los enteros `0` y `1`, respectivamente.

3.2. Operadores relacionales

Operadores relacionales

- ▶ Los **operadores relacionales** son operadores que toman dos operandos (que usualmente deben ser del mismo tipo) y devuelven un valor *booleano*.
- ▶ Los más conocidos son los **operadores de comparación**, que sirven para comprobar si un dato es menor, mayor o igual que otro, según un orden preestablecido.
- ▶ Los operadores de comparación que existen en Python son:

< > <= >= == !=

- ▶ Por ejemplo:

```
>>> 4 == 3
False
>>> 5 == 5
True
>>> 3 < 9
True
```

```
>>> 9 != 7
True
>>> False == True
False
>>> 8 <= 8
True
```

3.3. Operadores lógicos

3.3.1 Tablas de verdad

Operadores lógicos

- ▶ Las **operaciones lógicas** se representan mediante **operadores lógicos**, que son aquellos que toman uno o dos operandos *booleanos* y devuelven un valor *booleano*.
- ▶ Las operaciones básicas del álgebra de Boole se llaman **suma**, **producto** y **complemento**.
- ▶ En **lógica proposicional** (un tipo de lógica matemática que tiene estructura de álgebra de Boole), se llaman:

Operación	Operador
Disyunción	\vee
Conjunción	\wedge
Negación	\neg

- ▶ En Python se representan como **or**, **and** y **not**, respectivamente.

Tablas de verdad

- ▶ Una **tabla de verdad** es una tabla que muestra el valor lógico de una expresión compuesta, para cada uno de los valores lógicos que puedan tomar sus componentes.
- ▶ Se usan para definir el significado de las operaciones lógicas y también para verificar que se cumplen determinadas propiedades.
- ▶ Las tablas de verdad de los operadores lógicos son:

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

A	$\neg A$
F	V
V	F

- Que traducido a Python sería:

A	B	A or B
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	True

A	B	A and B
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	True

A	not A
False	True
True	False

3.4. Axiomas

3.4.1 Traducción a Python

Axiomas

1. Ley asociativa:
$$\begin{cases} \forall a, b, c \in \mathfrak{B} : (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \\ \forall a, b, c \in \mathfrak{B} : (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \end{cases}$$
2. Ley conmutativa:
$$\begin{cases} \forall a, b \in \mathfrak{B} : a \vee b = b \vee a \\ \forall a, b \in \mathfrak{B} : a \wedge b = b \wedge a \end{cases}$$
3. Ley distributiva:
$$\begin{cases} \forall a, b, c \in \mathfrak{B} : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ \forall a, b, c \in \mathfrak{B} : a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{cases}$$
4. Elemento neutro:
$$\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B} : a \vee F = a \\ \forall a \in \mathfrak{B} : a \wedge V = a \end{cases}$$
5. Elemento complementario:
$$\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B}; \exists \neg a \in \mathfrak{B} : a \vee \neg a = V \\ \forall a \in \mathfrak{B}; \exists \neg a \in \mathfrak{B} : a \wedge \neg a = F \end{cases}$$

Luego $(\mathfrak{B}, \neg, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole.

Traducción a Python

1. Ley asociativa:

```
(a or b) or c == a or (b or c)
(a and b) and c == a and (b and c)
```

2. Ley conmutativa:

```
a or b == b or a
a and b == b and a
```

3. Ley distributiva:

```
a or (b and c) == (a or b) and (a or c)
a and (b or c) == (a and b) or (a and c)
```

4. Elemento neutro:

```
a or False == a
a and True == a
```

5. Elemento complementario:

```
a or (not a) == True
a and (not a) == False
```

3.5. Teoremas fundamentales

3.5.1 Traducción a Python

Teoremas fundamentales

6. Ley de idempotencia:
$$\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B} : a \vee a = a \\ \forall a \in \mathfrak{B} : a \wedge a = a \end{cases}$$

7. Ley de absorción:
$$\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B} : a \vee V = V \\ \forall a \in \mathfrak{B} : a \wedge F = F \end{cases}$$

8. Ley de identidad:
$$\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B} : a \vee F = a \\ \forall a \in \mathfrak{B} : a \wedge V = a \end{cases}$$

9. Ley de involución:
$$\begin{cases} \forall a \in \mathfrak{B} : \neg\neg a = a \\ \neg V = F \\ \neg F = V \end{cases}$$

10. Leyes de De Morgan:
$$\begin{cases} \forall a, b \in \mathfrak{B} : \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \\ \forall a, b \in \mathfrak{B} : \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \end{cases}$$

Traducción a Python

6. Ley de idempotencia:

```
a or a == a  
a and a == a
```

7. Ley de absorción:

```
a or True == True  
a and False == False
```

8. Ley de identidad:

```
a or False == a  
a and True == a
```

9. Ley de involución:

```
not (not a) == a  
not True == False  
not False == True
```

10. Leyes de De Morgan:

```
not (a or b) == (not a) and (not b)  
not (a and b) == (not a) or (not b)
```

3.6. El operador ternario

El operador ternario

- ▶ Las expresiones lógicas (o *booleanas*) se pueden usar para comprobar si se cumple una determinada **condición**.
- ▶ Las condiciones en un lenguaje de programación se representan mediante expresiones lógicas cuyo valor (*verdadero* o *falso*) indica si la condición se cumple o no se cumple.
- ▶ Con el **operador ternario** podemos hacer que el resultado de una expresión varíe entre dos posibles opciones dependiendo de si se cumple o no una condición.
- ▶ El operador ternario se llama así porque es el único operador en Python que actúa sobre tres operandos.
- ▶ El uso del operador ternario permite crear lo que se denomina una **expresión condicional**.

- Su sintaxis es:

```
⟨expr_condicional⟩ ::= ⟨valor_si_cierto⟩ if ⟨condición⟩ else ⟨valor_si_falso⟩
```

donde:

- ⟨condición⟩ debe ser una expresión lógica
- ⟨valor_si_cierto⟩ y ⟨valor_si_falso⟩ pueden ser expresiones de cualquier tipo
- El valor de la expresión completa será ⟨valor_si_cierto⟩ si la ⟨condición⟩ es cierta; en caso contrario, su valor será ⟨valor_si_falso⟩.
- Ejemplo:

```
25 if 3 > 2 else 17
```

evalúa a 25.

- ▶ El operador ternario, así como los operadores lógicos **and** y **or**, se evalúan siguiendo una estrategia según la cual **no siempre se evalúan todos sus operandos**.
- ▶ La expresión condicional:

```
⟨valor_si_cierto⟩ if ⟨condición⟩ else ⟨valor_si_falso⟩
```

se evalúa de la siguiente forma:

- Primero siempre se evalúa la **⟨condición⟩**.
 - Si es **True**, evalúa **⟨valor_si_cierto⟩**.
 - Si es **False**, evalúa **⟨valor_si_falso⟩**.
- ▶ Por tanto, en la expresión condicional nunca se evalúan todos sus operandos, sino sólo los estrictamente necesarios.
 - ▶ Además, no se evalúan de izquierda a derecha, como es lo normal.

- ▶ La evaluación de los operadores **and** y **or** sigue un proceso similar:
 - Primero se evalúa el operando izquierdo.
 - El operando derecho sólo se evalúa si el izquierdo no proporciona la información suficiente para determinar el resultado de la operación.
 - ▶ Esto es así porque:
 - **True or x**
siempre es igual a **True**.
 - **False and x**
siempre es igual a **False**.
- En ambos casos no es necesario evaluar x.

Ejercicio

1. ¿Cuál es la asociatividad del operador ternario? Demostrarlo.

4. Definiciones

4.1 Introducción

4.2 Identificadores y ligaduras (*binding*)

4.3 Espacios de nombres

4.4 Marcos (*frames*)

4.5 Evaluación de expresiones con identificadores

4.6 *Scripts*

4.7 Instalación de Visual Studio Code

4.1. Introducción

Introducción

- ▶ Introduciremos ahora en nuestro lenguaje una nueva instrucción (técnicamente es una **sentencia**) con la que vamos a poder hacer **definiciones**.
- ▶ A esa sentencia la llamaremos **definición**, y expresa el hecho de que **un nombre representa un valor**.
- ▶ Las definiciones tienen la siguiente sintaxis:

$\langle \text{definición} \rangle ::= \text{identificador} = \langle \text{expresión} \rangle$

- ▶ Por ejemplo:

$x = 25$

A partir de ese momento, el identificador x representa el valor 25 .

Y si x vale 25 , la expresión $2 + x * 3$ vale 77 .

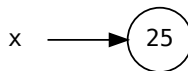
4.2. Identificadores y ligaduras (*binding*)

4.2.1 Reglas léxicas

4.2.2 Tipo de un identificador

Identificadores y ligaduras (*binding*)

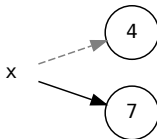
- ▶ Los **identificadores** son los nombres o símbolos que representan a los elementos del lenguaje.
- ▶ Cuando hacemos una definición, lo que hacemos es asociar un identificador con un valor.
- ▶ Esa asociación se denomina **ligadura** (o *binding*).
- ▶ Por esa razón, también se dice que **una definición crea una ligadura**.
- ▶ También decimos que el identificador está **ligado** (*bound*).
- ▶ Lo representaremos gráficamente así:



- ▶ Las ligaduras empiezan a existir cuando se crean, no antes.

- ▶ En un **lenguaje funcional puro**, un identificador ya ligado no se puede ligar a otro valor. Por ejemplo, lo siguiente daría un error:

```
x = 4 # ligamos el identificador x al valor 4  
x = 7 # intentamos ligar x al valor 7, pero ya está ligado al valor 4
```

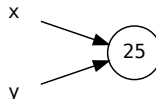


- ▶ Python no es un lenguaje funcional puro, por lo que sí se permite volver a ligar el mismo identificador a otro valor distinto (situación que se denomina **rebinding**).
 - Eso hace que se pierda el valor anterior.
 - Por ahora, **no lo hagamos**.

- Podemos hacer:

```
x = 25  
y = x
```

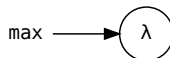
- En este caso estamos ligando a *y* el mismo valor que tiene *x*.
- Lo que hace el intérprete en este caso no es crear dos valores *25* en memoria (sería un gasto inútil), sino que *x* e *y* *comparten* el único valor *25* que existe:



- Por tanto:

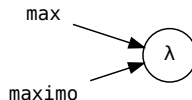
```
>>> x = 25  
>>> y = x  
>>> y  
25
```

- ▶ El **nombre** de una **función** es un identificador que está ligado a la función correspondiente (que en programación funcional es un valor como cualquier otro).
- ▶ Por ejemplo, `max` es un identificador ligado a la función que devuelve el máximo de dos números (que representaremos aquí como λ):



- ▶ Ese valor se puede ligar a otro identificador y, de esta forma, ambos identificadores compartirían el mismo valor y, por tanto, representarían a la misma función. Por ejemplo:

```
>>> maximo = max
>>> maximo(3, 4)
4
```



Reglas léxicas

- ▶ Cuando hacemos una definición debemos tener en cuenta ciertas cuestiones relativas al identificador:
 - ¿Cuál es la **longitud máxima** de un identificador?
 - ¿Qué **caracteres** se pueden usar?
 - ¿Se distinguen **mayúsculas** de **minúsculas**?
 - ¿Coincide con una palabra clave o reservada?
 - **Palabra clave:** palabra que forma parte de la sintaxis del lenguaje.
 - **Palabra reservada:** palabra que no puede emplearse como identificador.
- ▶ En Python, los identificadores pueden ser combinaciones de letras minúsculas y mayúsculas (y distingue entre ellas), dígitos y subrayados (`_`), no pueden empezar por un dígito, no pueden coincidir con una palabra reservada y pueden tener cualquier longitud.

Tipo de un identificador

- ▶ Cuando un identificador está ligado a un valor, a efectos prácticos el identificador actúa como si fuera el valor.
- ▶ Como cada valor tiene un tipo de dato asociado, también podemos hablar del **tipo de un identificador**.

El **tipo de un identificador** es el tipo del dato con el que está ligado.

- ▶ Si un identificador no está ligado, no tiene sentido preguntarse qué tipo tiene.

4.3. Espacios de nombres

Espacios de nombres

- ▶ Ciertas estructuras o construcciones sintácticas del programa definen lo que se denominan **espacios de nombres**.
- ▶ Un **espacio de nombres** (del inglés, *namespace*) es una correspondencia entre nombres y valores, es decir, es un **conjunto de ligaduras**.
- ▶ Su función es, por tanto, **almacenar ligaduras y permitir varias ligaduras con el mismo nombre** en distintas partes del programa.
- ▶ En un espacio de nombres, **un identificador sólo puede tener como máximo una ligadura**. En cambio, el mismo identificador puede estar ligado a diferentes valores en diferentes espacios de nombres.
- ▶ Por eso decimos que una ligadura es **local** al espacio de nombres donde se almacena, o que tiene un **almacenamiento local** a ese espacio de nombres.
- ▶ Los espacios de nombres pueden estar **anidados**, es decir, que puede haber espacios de nombres dentro de otros espacios de nombres, ya que también pueden estarlo las estructuras sintácticas que los definen.

- ▶ Algunos espacios de nombres provienen de estructuras estáticas (o sea, que vienen definidas en tiempo de compilación) y otras provienen de estructuras dinámicas (definidas en tiempo de ejecución).
- ▶ Por tanto, podemos tener **espacios de nombres *estáticos*** y **espacios de nombres *dinámicos***.
- ▶ En Java, las clases y los paquetes son espacios de nombres estáticos.
- ▶ Por otra parte, durante la ejecución de un programa se pueden ir creando ciertas estructuras en memoria que representan espacios de nombres dinámicos.

Los ejemplos más comunes de esas estructuras son:

- Los **marcos** que se crean al ejecutar *scripts* de Python y funciones o métodos definidos por el programador.
- Los **módulos** de Python.
- Los **objetos** y las **clases** de Python.
- ▶ En resumen: en Python, todos los espacios de nombres son dinámicos.

- ▶ Un espacio de nombres muy importante en Python es el que incluye las definiciones predefinidas del lenguaje (funciones `max` o `sum`, tipos como `str` o `int`, etc.)
- ▶ Ese espacio de nombres se denomina `__builtins__` y viene implementado en forma de *módulo* que se importa automáticamente en cada sesión interactiva o cada vez que se arranca un programa Python.
- ▶ Además de importarse el propio módulo, también se importan directamente las definiciones que contiene, por lo que se pueden usar directamente.
- ▶ Por tanto, es como si Python ejecutara las siguientes sentencias nada más entrar en el intérprete:

```
import __builtins__  
from __builtins__ import *
```


4.4. Marcos (*frames*)

Marcos (*frames*)

- ▶ Un **marco** (del inglés, *frame*) es una estructura que se crea en memoria para **representar la ejecución o activación de un *script* de Python o una función o método definido por el programador** en Python o Java.
- ▶ Los marcos son **espacios de nombres** y, entre otras cosas, almacenan las ligaduras que se definen dentro de ese *script*, función o método.
- ▶ Los marcos son conceptos ***dinámicos***:
 - Se crean y se destruyen a medida que la ejecución del programa pasa por ciertas partes del mismo.
 - Van almacenando nuevas ligaduras conforme se van ejecutando nuevas instrucciones que crean las ligaduras.

- ▶ Por ahora, el único marco que existe en nuestros programas es el llamado **marco global**, también llamado **espacio de nombres global**.
- ▶ El marco global se crea en el momento en que **se empieza a ejecutar el programa** y existe durante toda la ejecución del mismo (sólo se destruye al finalizar la ejecución del programa).
- ▶ Si se está trabajando en una sesión con el intérprete interactivo, el marco global **se crea justo al empezar la sesión** y existe durante toda la sesión (sólo se destruye al salir de la misma).

Por tanto, las definiciones que se ejecutan directamente en una sesión interactiva con el intérprete, crean ligaduras que se almacenan en el marco global.

- Por ejemplo, si iniciamos una sesión con el intérprete interactivo y justo a continuación tecleamos lo siguiente:

```
1 >>> x
2 Traceback (most recent call last):
3   File "<stdin>", line 1, in <module>
4   NameError: name 'x' is not defined
5 >>> x = 25
6 >>> x
7 25
```

- Aquí estamos trabajando con el *marco global* (el único marco que existe hasta ahora para nosotros).
- En la línea 1, el identificador `x` aún no está ligado, por lo que su uso genera un error (el marco global no contiene hasta ahora ninguna ligadura para `x`).
- En la línea 6, en cambio, el identificador puede usarse sin error ya que ha sido ligado previamente en la línea 5 (el marco global ahora contiene una ligadura para `x` con el valor 25).

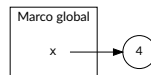
- ▶ Los marcos son espacios de nombres dinámicos, que se van creando y destruyendo durante la ejecución del programa.
- ▶ Igualmente, las ligaduras que contiene también se van creando y destruyendo a medida que se van ejecutando las instrucciones que forman el programa.
- ▶ Si tenemos la siguiente sesión interactiva:

```
1 >>> 2 + 3
2 5
3 >>> x = 4
4 >>> y = 3
5 >>> z = y
```

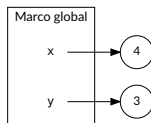
Según hasta donde hayamos ejecutado, el marco global contendrá lo siguiente:



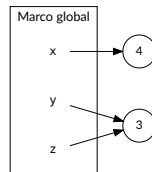
Marco global en las líneas 1-2



Marco global en la línea 3



Marco global en la línea 4



Marco global en la línea 5

- ▶ Hemos visto que una ligadura es una asociación entre un identificador y un valor.
- ▶ También hemos visto que los espacios de nombres almacenan ligaduras, y que un marco es un espacio de nombres.
- ▶ Por tanto, **los marcos almacenan ligaduras, pero NO almacenan los valores** a los que están asociados los identificadores de esas ligaduras.
- ▶ Por eso hemos dibujado a los valores fuera de los marcos en los diagramas anteriores.
- ▶ Los valores se almacenan en una zona de la memoria del intérprete conocida como el **montículo**.
- ▶ En cambio, los marcos se almacenan en otra zona de la memoria conocida como la **pila de control**, la cual estudiaremos mejor más adelante.

4.5. Evaluación de expresiones con identificadores

4.5.1 Resolución de identificadores

Evaluación de expresiones con identificadores

- Podemos usar un identificador ligado dentro de una expresión, siempre que la expresión resulte ser válida según las reglas del lenguaje.
- El identificador representa a su valor ligado y se evalúa a dicho valor en cualquier expresión donde aparezca ese identificador:

```
>>> x = 25
>>> 2 + x * 3
77
```

- Intentar usar en una expresión un identificador no ligado provoca un error de tipo **NameError** (*nombre no definido*):

```
>>> y
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
NameError: name 'y' is not defined
```

Resolución de identificadores

- ▶ Durante la evaluación de la expresión, el intérprete tiene que comprobar si el identificador que aparece en la expresión está ligado o no.
 - Si no está ligado, es un error de *nombre no definido*.
 - Si lo está, tendrá que determinar a qué valor está ligado para poder sustituir, en la expresión, cada aparición del identificador por su valor.
- ▶ Para ello, buscará una ligadura con ese identificador en el espacio de nombres correspondiente.
- ▶ Por ahora, el espacio de nombres donde lo busca tendrá que ser el marco global, ya que es el único que existe hasta ahora.
- ▶ El proceso de localizar (si es que existe) la ligadura adecuada que liga a un identificador con su valor, se denomina **resolución del identificador**.

- ▶ La resolución de identificadores es un proceso que usa mecanismos distintos dependiendo de si el lenguaje es interpretado o compilado:
 - Si es un **lenguaje interpretado** (como Python): el intérprete usa un concepto llamado **entorno** en tiempo de ejecución para localizar la ligadura.
 - Si es un **lenguaje compilado** (como Java): el compilador determina, en tiempo de compilación, si una ligadura es accesible haciendo uso del concepto de **ámbito** y, en caso afirmativo, deduce en qué espacio de nombres está la ligadura.
- Los conceptos de *ámbito* y de *entorno* los estudiaremos en breve más adelante.

4.6. *Scripts*

Scripts

- ▶ Cuando tenemos muchas definiciones o muy largas, resulta tedioso tener que introducirlas una y otra vez cada vez que abrimos una nueva sesión con el intérprete interactivo.
- ▶ Lo más cómodo es teclearlas todas una sola vez dentro un archivo que luego cargaremos desde dentro del intérprete.
- ▶ Ese archivo se llama **script** y, por ahora, contendrá una lista de las definiciones que nos interese usar en nuestras sesiones interactivas con el intérprete.
- ▶ Al cargar el *script*, se ejecutarán sus instrucciones una tras otra casi de la misma forma que si las estuviéramos tecleando nosotros directamente en nuestra sesión con el intérprete, en el mismo orden.
- ▶ Llegado el momento, los *scripts* contendrán el código fuente de nuestros programas y los ejecutaremos desde el intérprete por lotes.

- ▶ Los nombres de archivo de los *scripts* en Python llevan extensión `.py`.
- ▶ Para cargar un *script* en nuestra sesión tenemos dos opciones:
 1. Usar la orden `from` dentro de la sesión actual.

Por ejemplo, para cargar un *script* llamado `definiciones.py`, usaremos:

```
>>> from definiciones import *
```

Observar que en el `from` se pone el nombre del script pero **sin la extensión `.py`**.

2. Iniciar una nueva sesión con el intérprete interactivo indicándole que cargue el *script* mediante la opción `-i` en la línea de órdenes del sistema operativo:

```
$ python -i definiciones.py  
>>>
```

En este caso **sí** se pone el nombre completo del script, **con la extensión `.py`**.

- ▶ A partir de ese momento, en el intérprete interactivo podremos usar las definiciones que se hayan cargado desde del *script*.
- ▶ Por ejemplo, si el *script* `definiciones.py` tiene el siguiente contenido:

```
x = 25  
j = 14
```

- ▶ Al cargar el *script* (usando cualquiera de las dos opciones que hemos visto anteriormente) se ejecutarán sus instrucciones (las dos definiciones) y, en consecuencia, se crearán en el marco global las ligaduras `x` → 25 y `j` → 14:

```
>>> x                                     # antes de cargar el script, da error  
Traceback (most recent call last):  
  File "<stdin>", line 1, in <module>  
NameError: name 'x' is not defined  
>>> from definiciones import *           # aquí cargamos el script, y ahora  
>>> x                                     # la x sí está ligada a un valor  
25
```

- ▶ Una limitación importante que hay que tener en cuenta es que **el script sólo puede usar definiciones que se hayan creado en el mismo script** (exceptuando las definiciones predefinidas del lenguaje).
- ▶ Por ejemplo, si tenemos el siguiente script llamado `prueba.py`:

```
j = w + 1
```

donde se intenta ligar a `j` el valor ligado a `w` más uno, lo siguiente no funcionará:

```
>>> w = 3
>>> from prueba import *
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
  File "/home/ricardo/python/prueba.py", line 1, in <module>
    j = w + 1
NameError: name 'w' is not defined
```

- ▶ Aunque `w` esté ligado a un valor al cargar el script, éste no podrá acceder a esa ligadura y da error de «*nombre no definido*».
- ▶ Cuando estudiemos la programación modular entenderemos por qué.

4.7. Instalación de Visual Studio Code

4.7.1 Configuración básica de Visual Studio Code

Instalación de Visual Studio Code

► Instalación en Ubuntu:

NO instalar Visual Studio Code desde el *Centro de software de Ubuntu*.

En cambio, visitar <https://code.visualstudio.com> para descargar e instalar el paquete adecuado a la versión de Ubuntu que se está usando, que suele ser la que ya sugiere la propia página web (normalmente es el paquete `.deb` de 64 bits).

► Instalación en Windows:

Visitar <https://code.visualstudio.com>, descargar e instalar la versión adecuada a la versión de Windows que se está usando.

Configuración básica de Visual Studio Code

1. Abrir la aplicación.
2. Acceder al apartado de *Extensiones* (**Ctrl+Mayús+X**) e instalar las siguientes extensiones:
 - ▶ Python
 - ▶ Python Indent
 - ▶ Pylance
3. Configurar las siguientes opciones:
 - ▶ *Python: Language Server:* **Pylance**
 - ▶ *Python > Linting: Enabled:* Activado
 - ▶ *Python > Linting: Pylint Enabled:* Activado
 - ▶ *Python > Linting: Pylint Args:*
`--disable=invalid-name,redefined-outer-name,missing-docstring`

4. Se recomiendan, además, configurar las siguientes opciones:

- ▶ *Editor: Render Final Newline*: Desactivado
- ▶ *Editor: Smooth Scrolling*: Activado
- ▶ *Files: Insert Final Newline*: Activado
- ▶ *Files: Trim Final Newlines*: Activado
- ▶ *Files: Trim Trailing Whitespace*: Activado

5. Documentación interna

5.1 Identificadores significativos

5.2 Comentarios

5.1. Identificadores significativos

Identificadores significativos

- Se recomienda usar identificadores descriptivos.

Es mejor usar:

```
ancho = 640  
alto = 400  
superficie = ancho * alto
```

que

```
x = 640  
y = 400  
z = x * y
```

aunque ambos programas sean equivalentes en cuanto al efecto que producen y el resultado que generan.

- Si el identificador representa varias palabras, se puede usar el carácter de guión bajo (_) para separarlas y formar un único identificador:

```
altura_triangulo = 34.2
```

5.2. Comentarios

Comentarios

- ▶ Los comentarios en Python empiezan con el carácter `#` y se extienden hasta el final de la línea.
- ▶ Los comentarios pueden aparecer al comienzo de la línea o a continuación de un espacio en blanco o una porción de código.
- ▶ Los comentarios no pueden ir dentro de un literal de tipo cadena.

Un carácter `#` dentro de un literal cadena es sólo un carácter más.

```
# este es el primer comentario
spam = 1 # y este es el segundo comentario
        # ... y este es el tercero
texto = "# Esto no es un comentario porque va entre comillas."
```

- ▶ Cuando un comentario ocupa varias líneas, se puede usar el «truco» de poner una cadena con triples comillas:

```
x = 1
"""
Esta es una cadena
que ocupa varias líneas
y que actúa como comentario.
"""
y = 2
```

- ▶ Python evaluará la cadena pero, al no usarse dentro de ninguna expresión ni ligarse a ningún identificador, simplemente la ignorará (como un comentario).

6. Bibliografía

Bibliografía

Abelson, Harold, Gerald Jay Sussman, and Julie Sussman. 1996. *Structure and Interpretation of Computer Programs*. 2nd ed. Cambridge, Mass. : New York: MIT Press ; McGraw-Hill.

Blanco, Javier, Silvina Smith, and Damián Barsotti. 2009. *Cálculo de Programas*. Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Córdoba.

Van-Roy, Peter, and Seif Haridi. 2004. *Concepts, Techniques, and Models of Computer Programming*. Cambridge, Mass: MIT Press.