Fundamentos

Ricardo Pérez López

IES Doñana, curso 2021/2022

Generado el 2 de septiembre de 2021 a las 13:46:00

Índice general

Una **colección** es un grupo de objetos llamados **elementos** o **componentes**.

Las colecciones no tienen ninguna restricción especial. Por tanto, los elementos de una colección:

- Pueden aparecer varias veces en una colección (estar *repetidos*), o pueden no hacerlo.
- Pueden estar situados en un orden concreto dentro de una colección (estar *ordenados*), o pueden no estarlo.

Los dos grandes tipos de colecciones son los **conjuntos** y las **secuencias**.

Un **conjunto** es una colección de elementos que cumple lo siguiente:

- Sus elementos **no están ordenados** según un orden concreto. Por tanto, no se puede hablar del «*primer elemento*», «*segundo elemento*», etcétera.

  Debido a eso, decimos que los elementos de un conjunto están *desordenados*.

- Sus elementos **no pueden estar repetidos**. Por tanto, si un elemento está en un conjunto, sólo puede estarlo una vez.

  Debido a eso, decimos que los elementos de un conjunto son **únicos**.

En definitiva, de un elemento de un conjunto sólo tiene sentido preguntarse si pertenece o no pertenece al conjunto, no cuantas veces está ni en qué posición.

Por contra, una **secuencia** es una colección de elementos que cumple lo siguiente:

- Sus elementos **están ordenados** según un determinado orden. Por tanto (dependiendo de la cantidad de elementos que contenga), hay un elemento situado en primer lugar, otro situado en segundo lugar, y así sucesivamente.
- Sus elementos **pueden estar repetidos**. Por tanto, el mismo elemento puede aparecer varias veces en la misma secuencia, en distintas posiciones.

Una **variable** es un símbolo que representa un valor que puede cambiar. Por ejemplo: *X*, *x*, *a*, *total*.

Una **constante** es un símbolo que representa un valor que nunca cambia. Por ejemplo: 1, $($, $=$, π.

Muchas veces, el que un símbolo sea constante o variable depende del contexto y del acuerdo al que se haya llegado. Por ejemplo, el símbolo $+$ puede representar varias cosas según el momento.

Una **fórmula** es una secuencia de símbolos (números, letras y caracteres especiales) que tiene que cumplir unas reglas de formación determinadas por un **lenguaje formal**. En Matemáticas, las fórmulas también se denominan **expresiones matemáticas** y sirven para representar formalmente un concepto o una idea.

En Matemáticas, la expresión $a = b$ representa que a y b son la misma cosa. En tal caso, decimos que a y b son **iguales**.

Si no son la misma cosa, decimos que son **distintos** y se representa con la expresión $a \neq b$.

Una **proposición**, **aserción** o **aserto** es la expresión de que ocurre un suceso. Si el suceso ocurre realmente, decimos que la proposición es **verdadera** y, en caso contrario, decimos que es **falsa**.

Si siempre que una proposición J es verdadera, también lo es otra proposición K, decimos que J **implica** K, y se escribe:

$$J \implies K \quad \text{(implicación lógica)}$$

Cuando no sólo J implica K, sino que además K implica J, se dice que las proposiciones J y K son **lógicamente equivalentes**. En ese caso, decimos que el suceso de J ocurre si y sólo si ocurre el de K. Se escribe:

$$J \iff K \quad \text{(equivalencia lógica)}$$

Por ejemplo, las proposiciones

$$J = \text{hoy es martes}$$

y

$$K = \text{mañana es miércoles}$$

son equivalentes.

Si un elemento a pertenece a un conjunto C, se escribe $a \in C$. De lo contrario, se escribe $a \notin C$.

Dos conjuntos son **iguales** si tienen exactamente los mismos elementos.

Los conjuntos se pueden representar de varias formas:

- **Gráficamente:** mediante un **diagrama de Venn**.
- **Con una expresión:** en general, una expresión encerrada entre **llaves** $\{\}$ representa un conjunto.

  Normalmente, las variables que representan conjuntos se escriben con mayúsculas (A, B, C, ...) mientras que las letras minúsculas suelen representar elementos.

  A su vez, los conjuntos se pueden representar:

  * **Por extensión:** Indicando sus elementos encerrados entre llaves y separados por comas:

    $$C = \{\lambda, 4, \star, 23.7\}$$

    C se compone exactamente de esos cuatro elementos.

    $$C = \{\lambda, 4, \star, 23.7, \ldots\}$$

    C se compone de esos cuatro elementos y de algunos más.

Normalmente, los puntos suspensivos se utilizan cuando resulta evidente cuáles son los elementos que no aparecen indicados expresamente. Por ejemplo:

$$C = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

es el conjunto de todos los números naturales desde el 1 en adelante.

También se pueden utilizar los puntos suspensivos para expresar un rango de valores. Por ejemplo:

$$C = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$

es el conjunto de los números naturales comprendidos entre 1 y 10.

* **Por comprensión:** Según alguna propiedad que cumplen los elementos. Por ejemplo:

  $$C = \{a \mid a \text{ es un número primo menor que } 10\}$$

  es el conjunto $\{2, 3, 5, 7\}$ (el símbolo $\mid$ se lee «*tal que*»).

* **Por definición inductiva**: Indicando un método que permite obtener los elementos de un conjunto de forma progresiva (de «abajo» a «arriba») a partir de los anteriores. Por ejemplo, para representar el conjunto de los números naturales podemos seguir las siguientes reglas:

  1. 0 es un número natural.
  2. Si n es un número natural, también lo es $n + 1$.
  3. Sólo son números naturales los obtenidos siguiendo las reglas 1 y 2.

Existen varios conjuntos muy importantes en Matemáticas, tanto que tienen su propio símbolo especial para poder referirnos a ellos. Por ejemplo:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$: el conjunto $\mathbb{N}$ menos el cero.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: el conjunto de los números enteros.
- $\mathbb{Q}$: el conjunto de los números racionales.
- $\mathbb{R}$: el conjunto de los números reales.

El **cardinal** de un conjunto es el número de elementos que tiene. El cardinal de un conjunto C se representa $|C|$. Un conjunto puede ser **finito** o **infinito**.

Por ejemplo, si $C = \{2, 3, 5, 7\}$, entonces $|C| = 4$ y, por tanto, es un conjunto *finito*. En cambio, $|\mathbb{N}| = \infty$ y, por tanto, es un conjunto *infinito*.

Un conjunto A se dice que es un **subconjunto** de un conjunto B si cada elemento de A lo es también de B. En tal caso, se escribe:

$$A \subseteq B$$

Claramente, siempre se cumple que $A \subseteq A$.

Cuando $A \subseteq B$ y B posee algún elemento que no es de A (o sea, que $A \neq B$), se dice que A es un **subconjunto propio** de B y se escribe:

$$A \subset B$$

Está claro que $A \subseteq B, B \subseteq A \iff A = B$.

Llamaremos **par** o **pareja** de dos elementos a y b (y lo escribiremos como $\langle a, b\rangle$ o como (a, b)) a una **sucesión** de dos objetos a y b, donde a está señalado como primero y b como segundo. Por tanto, en general se cumple que $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$.

Igualmente, llamamos **terna** de tres elementos a, b y c (y lo escribimos como $\langle a, b, c\rangle$) a una sucesión de tres objetos, donde a está considerado como primero, b como segundo y c como tercero.

Siguiendo así, podemos definir **cuaterna**, **quíntupla**, **séxtupla**, ... y, en general, **enetupla**, ***n*-tupla** o, simplemente, **tupla**.

Una 1-tupla $\langle a\rangle$ se puede escribir simplemente a.

En general, a los objetos que forman una tupla se las llama **elementos** o **componentes**.

En Matemáticas, las **secuencias** se pueden escribir mediante **tuplas**.

El **producto cartesiano** de A por B es el conjunto de todos los pares $\langle a, b\rangle$ que se pueden formar tales que $a \in A$ y $b \in B$. Se escribe:

$$A \times B$$

Por tanto, se puede definir como:

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$$

Igualmente, se define el producto cartesiano de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ como el conjunto formado por las n-tuplas $\langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle$ tales que $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \ldots, e_n \in E_n$.

El producto cartesiano de A por sí mismo, $A \times A$, se puede escribir como A^2. Igualmente, el producto cartesiano de n conjuntos iguales a E se suele escribir E^n si no hay lugar a confusión. Está claro que $E^1 = E$.

Una **relación** R definida sobre los conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ es un subconjunto del producto cartesiano $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$:

$$R \subseteq E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$$

Por tanto, una relación es un conjunto de tuplas formadas con los elementos de los conjuntos sobre los que se define la relación.

Las relaciones, en definitiva, lo que hacen es *asociar* entre sí elementos de varios conjuntos.

El valor de n representa el **grado** de una relación.

Si $n = 1$, tenemos una relación 1-aria, que se puede considerar como un subconjunto de E_1.

El caso más importante es el de $n = 2$, es decir, el de las *relaciones binarias*.

Por supuesto, no es necesario que todos los conjuntos sobre los que se define una relación sean distintos. De hecho, muchas de las relaciones más interesantes que existen son las que relacionan a un conjunto consigo mismo.

Por ejemplo, la relación binaria R definida así:

$$R = \{\langle a, b\rangle \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, a < b\}$$

Una relación binaria R definida sobre un conjunto E (es decir, que relaciona a E consigo mismo) se dice que es **reflexiva**, o que tiene la propiedad reflexiva, si para todo elemento a de E se cumple que $\langle a, a \rangle \in E$.

Formalmente, esta propiedad se puede escribir así:

$$R \subseteq E \times E \text{ es reflexiva } \iff \forall a \in E : \langle a, a \rangle \in R$$

El símbolo $\forall$ se lee «*para todo*».

Se dice que R es **simétrica** o que posee la propiedad simétrica, cuando se cumple:

$$\forall a \in E, b \in E : \langle a, b \rangle \in R \implies \langle b, a \rangle \in R$$

Se dice que R es **antisimétrica** o que posee la propiedad antisimétrica, cuando se cumple:

$$\forall a \in E, b \in E : \langle a, b \rangle \in R, \langle b, a \rangle \in R \implies a = b$$

Se dice que R es **transitiva** o que posee la propiedad transitiva, cuando se cumple:

$$\forall a \in E, b \in E, c \in E : \langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R \implies \langle a, c \rangle \in R$$

Dados dos conjuntos A y B, una **función** o **aplicación** de A en B es un conjunto f de pares $\langle a, b \rangle$ de $A \times B$ que cumple que cada elemento de A sólo puede aparecer, como mucho, una única vez como primer componente en un par de f.

Dicho de otra forma: una función es una relación binaria en la que no puede haber dos pares distintos con el mismo primer componente (el primer componente no se puede repetir en ningún par).

Se puede decir que f asocia elementos de A con elementos de B, de forma que:

- Un elemento de A puede no estar asociado con ningún elemento de B.
- Si un elemento a de A está asociado con algún elemento b de B, entonces:
  * Se dice que a es el **origen** de b en f.
  * Se dice que b es la **imagen** de a por f.
  * b se puede expresar como $f(a)$.
  * Se puede escribir:

    $$f : a \to b$$

  Por lo dicho anteriormente, la imagen de a es única, es decir, cada elemento de A sólo puede tener una imagen como mucho (puede que ninguna).

Para indicar que f es una función de A en B, se escribe:

$$f : A \longrightarrow B$$

Se llama **dominio** de f al conjunto A y **rango** o **codominio** al conjunto B.

Asimismo, se llama **conjunto origen** (o simplemente **origen**) al conjunto de todos los orígenes de f, y **conjunto imagen** (o simplemente **imagen**) al conjunto de todas las imágenes de f. Nosotros lo vamos a escribir como A_f y B_f, respectivamente.

Es evidente que $A_f \subseteq A$ y que $B_f \subseteq B$.

Si se cumple que $A_f \neq A$, decimos que f es una **función parcial**. En caso contrario (cuando $A_f = A$), decimos que es una **función total**.

Se dice que f es **suprayectiva** (o **sobreyectiva**) si $B_f = B$, es decir, si cada elemento de B es imagen de algún elemento de A.

Se dice que f es **inyectiva** si se cumple que

Bibliografía