Abstandsbestimmung mittels orthogonaler Ebenen
(Alternativlösung zur Probeklausur-Aufgabe 4b))

Geg: $g = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Angenommen, E & F sind Ebenen mit

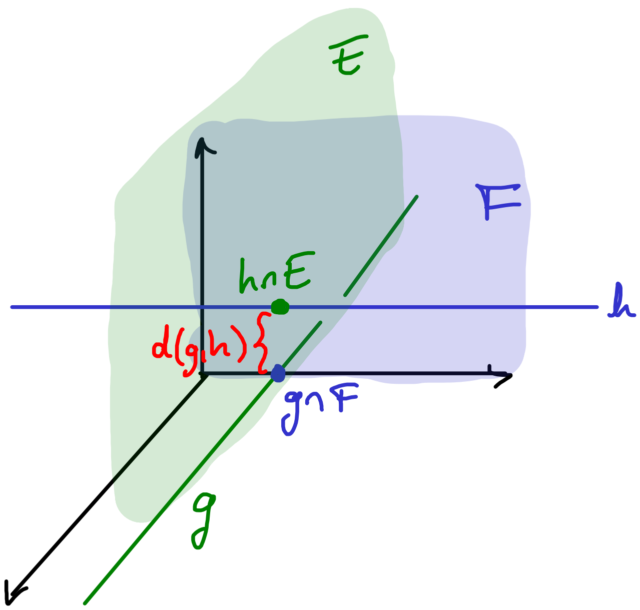
$$g \subseteq E \perp h, \qquad h \subseteq F \perp g$$

(solche Ebenen gibt es, da $g \perp h$).

Dann gilt: $d(g,h) = d(h \cap E, g \cap F)$.

[$\perp$:= die zum affinen Raum gehörigen VR sind orthogonal]

Veranschaulichung:



Bei uns:

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \{x_3 = 0\}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \{x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$

$h \cap E = ?$: $\quad ? = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \{x_3 = 0\}$

$\Rightarrow \lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad ? = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g \cap F = ??$: $\quad ?? = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \{x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$.

$$\iff \quad 3\mu + \alpha - 1 = 0 \quad \iff \quad \mu = \frac{1-\alpha}{3}.$$

Also: $\quad d(g,h) = d(h \cap E, g \cap F) = d\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1-\alpha}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$

$$= \left\| \frac{1-\alpha}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(1/9 + 4/9 + 1/9 \right) (\alpha-1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\, |\alpha - 1| .$$