Analysis 1, Tutorium 13

12.2.2021

<u>Taylorreihen</u> Beispiel eines überall gegen die falsche Fkt. konvergente Taylorreihe

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$0 \neq x \mapsto e^{-1/x^2}$, $f(0) = 0$.

1) f beliebig oft differenzierbar: <u>Beh.</u>: $q_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = f^{(n)}(x)$

↑ Polynom $x \neq 0$,

Induktions- & Rekursionsschritt: $f^{(n)}(0) = 0$

$x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)' =$$

$$= \left(q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \right)' =$$

$$= \underbrace{\left(q_{n-1}'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right)\right)}_{= q_n\left(\frac{1}{x}\right)} e^{-1/x^2}$$

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \to 0} 0 .$$

↑

$$\frac{e^{-1/x^2}}{x^k} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

<u>Lemma</u>: $f: \underset{\text{offen}}{U} \to \mathbb{R}$ stetig, $a \in U$,

diff'bar auf $U \setminus \{a\}$.

& $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x)$ existiere.

Dann: f ist differenzierbar in a & $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$

Begründung: Mittelwertsatz

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad T_{0,n} f = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 f(x) = \lim_{n\to\infty} T_{0,n}(x) = 0$$

$$\neq$$

$$e^{-1/x^2}, \quad x \neq 0$$

<u>Restgliedabschätzung</u>: $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log(\cos(x)).$$

$$|R_{0,2} f(x)| \le \frac{2}{3} x^3 \quad \text{auf } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$T_{0,2} f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{f'(0)}_{=0} x + \frac{f''(0)}{2} x^2 = -\frac{x^2}{2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$R_{0,2}(x) \underset{\uparrow \text{ Def.}}{=} f(x) - T_{0,2} f(x)$$

$$\Rightarrow \quad |R_{0,2} f(x)| \le \frac{4}{3!} x^3.$$

$$\simeq \frac{2}{3}$$

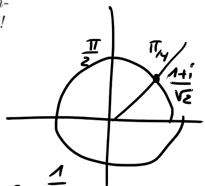
Satz 6.4 (Restglieddarstellungen in der Taylorformel) Es seien U ein offenes Intervall, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. Ist f n-mal differenzierbar in x, wobei $n \in \mathbb{N}$, so folgt
$$R_{x,n} f(y) = o((y-x)^n) \text{ für } y \to x, \tag{146}$$
also
$$\frac{R_{x,n} f(y)}{(y-x)^n} \xrightarrow{y \to x} 0.$$

2. Ist f sogar $(n+1)$-mal differenzierbar in U, $n \in \mathbb{N}_0$, so gibt es für $y \in U \setminus \{x\}$ ein ξ echt zwischen x und y mit
$$\boxed{R_{x,n} f(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1}.} \tag{147}$$
Ist zudem $f^{(n+1)}$ nahe bei x beschränkt, so folgt hieraus
$$R_{x,n} f(y) = O((y-x)^{n+1}) \text{ für } y \to x. \tag{148}$$

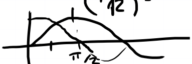
3. Ist f sogar $(n+1)$-mal *stetig* differenzierbar in U, $n \in \mathbb{N}_0$, so gilt für $y \in U$:
$$R_{x,n} f(y) = \int_x^y \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(y-t)^n \, dt. \tag{149}$$

äußerst wichtig!!!



$$|f'''(\xi)| = \left|\frac{-2\sin\xi}{\cos^3 \xi}\right| \le \frac{2 \sin \pi/4}{\cos^3 \pi/4} = \frac{2\,\frac{1}{\sqrt{2}}}{(1/\sqrt{2})^3} = 4$$

mit $\xi \in]0, x[\subseteq \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

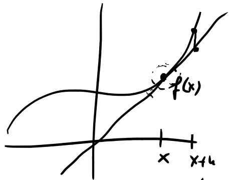


Aufgabe 4 (Landau-Ungleichung). Es seien $K_0, K_2 \in [0, \infty[$ und $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbar, sodass

$$\forall x \in [0, \infty[: |f(x)| \leq K_0 \wedge |f''(x)| \leq K_2. \qquad (*)$$

Folgere aus der Integraldarstellung des Restgliedes in der Taylorformel für f, dass dann gilt:

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{K_0 K_2}.$$



Taylorformel: $\quad y, x \in [0, \infty[$

$$f(x+h) = T_{x,1}(x+h) + R_{x,1}(x+h) = \underbrace{f(x) + \boxed{f'(x)}\, h}_{\substack{\text{affin-lineare} \\ \text{Approximation an } f \\ \text{in der Nähe von } x.}} + \int_x^{x+h} f''(t)(x+h-t)\,dt$$

$$\int_x^{x+h} f''(t)(x+h-t)\,dt \underset{\substack{u = t - x \\ du = dt}}{=} \int_0^h f''(u+x)(h-u)\,du$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x) - \int_0^h f''(u+x)(h-u)\,du}{h}$$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{|h|}\left(\underbrace{|f(x+h)|}_{\leq K_0} + \underbrace{|f(x)|}_{\leq K_0} + \underbrace{\left|\int_0^h f''(u+x)(h-u)\,du\right|}_{\leq \int_0^h \underbrace{|f''(u+x)|}_{\leq K_2} |h-u|\,du} \right)$$

$$\underset{h>0}{\leq} \frac{1}{h}\left(2K_0 + K_2 \underbrace{\int_0^h (h-u)\,du}_{= \left[-\frac{1}{2}(h-u)^2\right]_0^h} \right)$$

$$= \frac{1}{2} h^2$$

$$\le \frac{2K_0}{h} + K_2 h \stackrel{!}{=} 2\sqrt{K_0 K_2}$$

$$\frac{K_2}{2} h^2 - 2\sqrt{K_0 K_2} \cdot h + 2K_0 = 0$$

$$h = \frac{2\sqrt{K_0K_2} \pm \sqrt{4K_0K_2 - 4K_0K_2}}{K_2} = 2\sqrt{\frac{K_0}{K_2}}$$

falls $K_2 \neq 0$.

$\underline{K_2 = 0}$: $f''(x) = 0$

$\underset{HDI}{\Rightarrow}$ f ist ein Polynom vom Grad ≤ 2

f beschränkt durch K_0

$\Rightarrow f = \text{konst}$

$\Rightarrow f' = 0$.

$x^2 \gg x \gg \text{konst}$

nichttriviales Polynom

= unbeschränkt

<u>Topologie</u> : "Nähe" "Stetigkeit"

"Konvergenz"

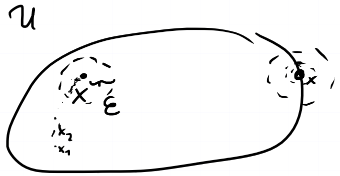
X Menge , $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Mengensystem von Teilmengen von X

=: "offene Mengen"

$(X \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$
2. $A_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$ Indexmenge $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$
3. $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \{ \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathcal{U} \; \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{U} \}$$



$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$

$\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathcal{U}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \partial \mathcal{U}$

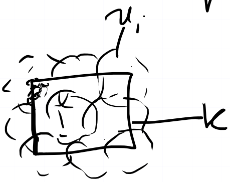
Konvergent:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}_0 \; \forall n > N : x_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\Big(\underbrace{\forall \mathcal{U} \in \mathcal{T} : x \in \mathcal{U}}_{\text{„nahe } x\text{"}} \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}_0 \; \forall n > N : x_n \in \mathcal{U} \Big)$$

Kompaktheit: $K \subseteq X$ heißt kompakt, falls für jede offene Überdeckung $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \supseteq K$ ($\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$) eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{i\in E} \mathcal{U}_i \supseteq K$ existiert, $|E| < \infty$.



K kompakt $\iff$ K beschränkt & abgeschlossen.

(z.B. $[a,b]$ = kompakt)

Repetitorium Analysis 1 Timmann

Sei $G \subset \mathbb{R}$ offen, $f\colon G \to \mathbb{R}$ und *blabla* irgendeine für Funktionen sinnvolle Eigenschaft. Man sagt, f ist in G *lokal blabla*, wenn jeder Punkt $x \in G$ eine Umgebung $U = U(x)$ besitzt, in ~~der f *blabla*~~ ist. Manchmal gilt dann die Aussage:

$f|_{U(x)}$ ist blabla

(∗) f ist in G lokal blabla $\iff$ f ist auf jedem Kompaktum $K \subset G$ blabla.

Prüfen Sie, ob diese Aussage (*) für die Eigenschaften *konstant* bzw *beschränkt* gilt.

„$\Leftarrow$": $x \in G$, $\overline{U_\varepsilon(x)}$ kompakt

$f|_{\overline{U_\varepsilon(x)}}$ ist blabla

$\Rightarrow f|_{U_\varepsilon(x)}$ ist blabla.

„$\Rightarrow$": $x \in K$, $U(x)$ Umgebung von x

z.B. beschränkt „blabla"

$f|_{U(x)}$ ist beschränkt,

z.B.

$\forall y \in U(x): \left| f|_{U(x)}(y) \right| \leq M_x$

zz:

$\left| f|_K \right| \leq M.$

$K \subseteq \bigcup_{x \in K} U(x)$,

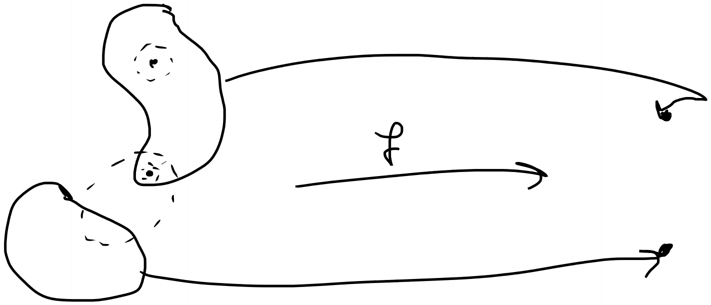
K kompakt $\Rightarrow$ Es gibt $x_1, \dots, x_m \in K$ mit $K \subseteq U(x_1) \cup \dots \cup U(x_m)$

$M := \max\{M_{x_1}, \dots, M_{x_m}\}$.

$y \in K \Rightarrow y \in U(x_i)$

$\Rightarrow |f(y)| = \left| f|_{U(x_i)}(y) \right| \leq M_{x_i} \leq M.$

f lokal konstant $\overset{?}{\Longrightarrow}$ f konstant



$$\mathbb{R}^- \dot\cup \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} &\quad \shortparallel \\ &\mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{f. } x>0 \\ -1 & \text{f. } x<0 \end{cases} \\ G &= \end{aligned}$$

Bem: X top. Raum, zusammenhängend,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig & lokal konstant

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ f konstant

(a) Finden Sie eine Stammfunktion F der Funktion

$$f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}.$$

(b) Entscheiden Sie mit Beweis, ob die Reihe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$