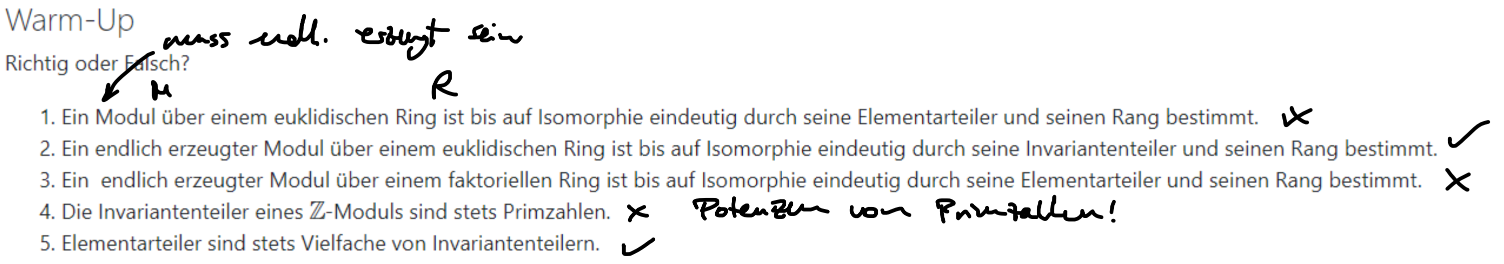
Lineare Algebra 2, Tutorium 11

23.6.2021



Warm-Up

Richtig oder Falsch?

muss endl. erzeugt sein

1. Ein Modul (M) über einem euklidischen Ring (R) ist bis auf Isomorphie eindeutig durch seine Elementarteiler und seinen Rang bestimmt. ✗
2. Ein endlich erzeugter Modul über einem euklidischen Ring ist bis auf Isomorphie eindeutig durch seine Invariantenteiler und seinen Rang bestimmt. ✓
3. Ein endlich erzeugter Modul über einem faktoriellen Ring ist bis auf Isomorphie eindeutig durch seine Elementarteiler und seinen Rang bestimmt. ✗
4. Die Invariantenteiler eines $\mathbb{Z}$-Moduls sind stets Primzahlen. ✗ Potenzen von Primzahlen!
5. Elementarteiler sind stets Vielfache von Invariantenteilern. ✓

Endlich erzeugt!

1. $$M \cong \underbrace{R \times \cdots \times R}_{\text{rang}(M)} \times R/\varepsilon_1 R \times R/\varepsilon_2 R \times \cdots \times R/\varepsilon_m R$$

↑ eindeutig

Elementarteiler (eindeutig)

2. Faktorisiere $$\varepsilon_i = a \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\pi_{ij}^{e_{ij}}}_{\text{Invariantenteiler}} \qquad \pi_{ij} \not\sim \pi_{ij'}, \text{ wenn } j \neq j'$$

irreduzibel

Elementarteiler

$a \in R^\times$

z.B. $$\mathbb{Z}/6 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \qquad 6 = 2 \cdot 3$$

Elementarteiler

3. Der Ring muss mindestens ein PID / HIR (Hauptidealring) sein.

z.B. $R = k[x,y]$ k Körper

$$M := k[x,y]/(x,y) \cong k$$

(als k-Vektorräume)

als $k[x,y]$-Modul erzeugt von 1.

A Ring, dann
A faktoriell
$\Rightarrow$ $A[x]$ faktoriell

Wäre $$M \cong k[x,y]^n \times k[x,y]/(f_1) \times \cdots \times k[x,y]/(f_m)$$

k-Dim. 1

k-Dimension $= \infty$

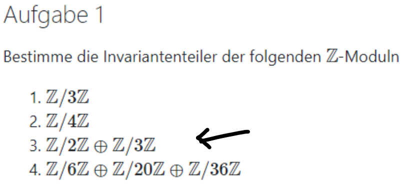
$n = 0$

$k[x,y]/(f)$ hätte k-Dim $= 1$

$\Rightarrow$ $1 \equiv ax \mod (f)$ & $1 \equiv by \mod (f)$ für $a, b \in k^\times$

$\Rightarrow$ $f \mid 1-ax$ & $f \mid 1-by$ $\Rightarrow$ $f \sim 1$

irred. ↑ irred.



Aufgabe 1

Bestimme die Invariantenteiler der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln

1. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ←
4. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$

Elementarteile ⟶ Invariantenteiler

3. 6 2, 3

Aufgabe 2

Sei $M = \mathbb{Z}^2/((2,4)\mathbb{Z} + (4,11)\mathbb{Z})$. Zeige, dass $M \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Moduln.

$$M = \mathbb{Z}^2 / \left\langle \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\11\end{pmatrix} \right\rangle \quad \rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix}2 & 4\\4 & 11\end{pmatrix}$$

Elementarteilersatz anwenden.

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\4 & 11\end{pmatrix} \overset{II-2I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 3\end{pmatrix} \overset{II-2I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix} \underset{\dots}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & \\ & 6\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \cong \mathbb{Z}/6$$

Aufgabe 4

Sei $A = \begin{pmatrix} 160 & 16 & 4 & 7 & 12 & 19 & 28 \\ 272 & 26 & 6 & 12 & 20 & 32 & 48 \\ 237 & 18 & 3 & 9 & 15 & 27 & 42 \\ 136 & 8 & 0 & 4 & 8 & 16 & 24 \end{pmatrix}$ die Matrix aus Einzelabgabe 5, Aufgabe 4.

1. Bestimme eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ sodass $AU = (N|H)$ ist, wobei N eine Nullmatrix und H eine obere Dreiecksmatrix passender Größe sind.
2. Bestimme alle $x \in \mathbb{Z}^7$ mit $Ax = 0$.

[4]

$$A : \mathbb{Z}^7 \to \mathbb{Z}^4$$

$$\begin{array}{ccccccc} 160 & 16 & 4 & 7 & 12 & 19 & 28 \\ 272 & 26 & 6 & 12 & 20 & 32 & 48 \\ 237 & 18 & 3 & 9 & 15 & 27 & 42 \\ 136 & 8 & 0 & 4 & 8 & 16 & 24 \\ \hline 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Z}^7}$$

I − 34 IV
II − 2 IV
V − 2 IV
VI − 4 IV
VII − 6 IV

NR:
237 − 34 · 9
= −103 + 34
= −69, nice

272 − 34 · 12
= 204 − 340
= −136

160 − 34 · 7
= 160 − 238
= −78

$$\begin{array}{ccccccc} -78 & 2 & 4 & 7 & -2 & -9 & -14 \\ -136 & 2 & 6 & 12 & -4 & -16 & -24 \\ -69 & 0 & 3 & 9 & -3 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ -34 & -2 & 0 & 1 & -2 & -4 & -6 \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

I + 23 III
IV − 3 III
V + III
VI + 3 III
VII + 4 III

NR:
−136 + 23 · 6 =
= −136 + 138 = 2

−78 + 23 · 4 = 14

$$\begin{array}{ccccccc} 14 & 2 & 4 & -5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & -6 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ 23 & 0 & 1 & -3 & 1 & 3 & 4 \\ -34 & -2 & 0 & 1 & -2 & -4 & -6 \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

I − II
III − 3 II
IV + 3 II
V − II
VI − II

$$\begin{array}{ccccccc} 12 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & & & & \\ -1 & 1 & -3 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 23 & 0 & 1 & -3 & 1 & 3 & 4 \\ -32 & -2 & 6 & -5 & 0 & -2 & -6 \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

I − 12 VI
II − 2 VI
III + 2 VI
IV − VI
VII − 2 VI

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 3 & -5 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -13 & -6 & 7 & -6 & 1 & 3 & -2 \\ -8 & 2 & 2 & -3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow$$

$$\overbrace{\quad 0 \quad}^{N} \quad \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{matrix}}^{H}$$

$$\left.\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 11 & -1 \\ -13 & 1 \\ -8 & 0 \\ 0 & 1 \\ -12 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}_{\ker A} \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 7 & -6 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} U$$

Hausaufg.:
Blatt 6, Aufgabe 1

$u = \prod$ Spaltenumformungen

$= (\mathrm{id}) \; \prod \; \ldots$

I-te Spalte

$+ \, a \cdot$ J-te Spalte $=$ Rechtsmultiplikation

mit
$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & a & & & 1 \end{pmatrix} & J \\ I & \end{array}$$

$= (\mathrm{id}) \cdot (\cdots)$

<u>Zusatzaufg</u>:

- R ein (komm., assoziativ, mit 1,) Ring

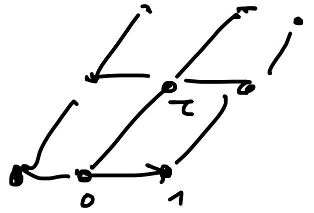
Zeige: $\left[\exists e \in R \setminus \{0,1\} : e^2 = e \right]$

$$\iff \left[\exists \text{ Ringe } R_1, R_2 : R \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ringisomorphismus.}}}{\cong} R_1 \times R_2 \right]$$

- $\rho, \tau \in \mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \}$

$\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} = \{ \mu + \tau\lambda \mid \mu, \lambda \in \mathbb{Z} \} \subseteq \mathbb{C}$

Gitter



Angenommen $\exists x \in \mathbb{C}^\times : x \cdot (\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$
$= \mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$

Zeige: $\exists \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \in GL_2(\mathbb{Z}) : \tau = \dfrac{a\rho + c}{b\rho + d}$

gebrochen rationale Transf. mit A

„$\Leftarrow$“: $R_1 \times R_2$

$(x,y) + (z,w) := (x+z, y+w)$

$(x,y) \cdot (z,w) := (xz, yw)$

„$\Rightarrow$“: $R \cong \underbrace{Re}_{} \times R\overbrace{(1-e)}^{\text{neutr. Element}}$

ist ein Ring mit neutralem Element e

$\mathbb{Z}$-Modul iso

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \arrow[r, phantom, "\underset{(*)}{\cong}"] \arrow[rrr, bend left, "\cdot x \in \mathbb{C}^\times \ \cong"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\cong"', "\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, phantom, "\overset{(**)}{\cong}"] & \mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z} \arrow[lll, bend right, "\cdot x^{-1}"'] \\
\tau & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[l, mapsto] & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] & \rho \\
1 & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \arrow[l, mapsto] & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] & 1
\end{tikzcd}$$

sowas wird durch eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dargestellt

$$x\tau \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \overset{(**)}{=} a\rho + c$$

$$x \cdot 1 \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b\rho + d$$

$$\tau = \frac{x\tau}{x} = \frac{a\rho + c}{b\rho + d}.$$