Analysis 1 – Tutorium 2
robin.mader@campus.lmu.de
13.11.2020

Aufgabe 1. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeige:

$$f(f^{-1}(X)) \subseteq X \qquad \text{für } X \subseteq B, \tag{1}$$
$$f^{-1}(f(X)) \supseteq X \qquad \text{für } X \subseteq A, \tag{2}$$
$$f(X \setminus Y) \supseteq f(X) \setminus f(Y) \qquad \text{für } X, Y \subseteq A, \tag{3}$$
$$f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y) \qquad \text{für } X, Y \subseteq B. \tag{4}$$

Warum gilt in (1)–(3) im Allgemeinen keine Gleichheit? Gib jeweils ein Gegenbeispiel an.

Lösung. (1) Sei $x \in f(f^{-1}(X))$, d.h. wir finden $y \in f^{-1}(X)$ mit $x = f(y)$. $y \in f^{-1}(X)$ bedeutet $f(y) \in X$. Also:

$$x = f(y) \in X.$$

(2) Sei $x \in X$. Dann ist $f(x) \in f(X)$, aber das bedeutet genau

$$x \in \{y \in A \mid f(y) \in f(X)\} = f^{-1}(f(X)).$$

(3) Sei $b \in f(X) \setminus f(Y)$, d.h. $b = f(x)$ für ein $x \in X$, und $\neg(\exists y \in Y : b = f(y))$. Aber daraus folgt $x \notin Y$, also $x \in X \setminus Y$, und somit

$$b = f(x) \in f(X \setminus Y).$$

(4) Für $a \in A$ bemerke, dass

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(X \setminus Y) &\iff f(a) \in X \setminus Y \\ &\iff f(a) \in X \wedge f(a) \notin Y \\ &\iff a \in f^{-1}(X) \wedge a \notin f^{-1}(Y) \\ &\iff a \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y). \end{aligned}$$

Um zu sehen, dass Gleichheit nicht gelten muss, betrachte die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ und die Funktion

$$f : A \to B, \quad 1 \mapsto 4, \quad 2 \mapsto 5, \quad 3 \mapsto 5.$$

In (1), betrachte $X = B = \{4, 5, 6\}$, und bemerke $f(f^{-1}(X)) = f(A) = \{4, 5\} \neq X$. In (2), betrachte $X = \{1, 2\}$, und bemerke $f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(\{4, 5\}) = A \neq X$. In (3), betrachte $X = A = \{1, 2, 3\}$ und $Y = \{3\}$, und bemerke $f(X \setminus Y) = f(\{1, 2\}) = \{4, 5\}$, sowie $f(X) = \{4, 5\}$ und $f(Y) = \{5\}$, also $f(X) \setminus f(Y) = \{4\} \neq \{4, 5\}$. □

Aufgabe 2. Seien E eine Menge und $\mathcal{P}(E)$ die Potenzmenge von E. Zeige: Es gibt keine Bijektion

$$f : E \to \mathcal{P}(E).$$

Lösung. Angenommen, es gäbe eine Bijektion $f : E \to \mathcal{P}(E)$. Betrachte

$$Y := \{x \in E \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E).$$

Da f insbesondere surjektiv ist, gibt es für $Y \in \mathcal{P}(E)$ ein $y \in E$ mit $f(y) = Y$. Wir unterscheiden zwei Fälle:
1. Fall: $y \in Y$. Dann $y \notin f(y) = Y$, Widerspruch.
2. Fall: $y \notin Y$. Dann $y \in f(y) = Y$, Widerspruch.
Da wir in jedem Fall einen Widerspruch erhalten, war unsere Annahme falsch, und es gibt keine solche Bijektion. □

Aufgabe 3 (Vollständige Induktion)**.** 1. Aus der GOP des Wintersemesters 2012/2013 (Übung 2.5):
(a) Formuliere eine Version des Induktionsprinzips, die zur Lösung der folgenden Teilaufgabe (b) nützlich ist.
(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv wie folgt definiert:

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 2, \quad a_{n+1} := 4(a_n - a_{n-1}) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Beweise mit Hilfe des Induktionsprinzips aus Teilaufgabe (a):

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = n2^n.$$

2. Aus der Nachklausur des Wintersemesters 2012/2013:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ werde rekursiv wie folgt definiert:

$$a_n := 1 + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k a_k}{k^k} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

(In dieser Formel ist der Rekursionsanfang enthalten.) Beweise mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = n^n.$$

Aufgabe 4 (Fibonacci-Zahlen, Aktivierungselement 1.18)**.** Die Folge der Fibonacci-Zahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$ wird rekursiv wie folgt definiert:

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

Setze nun

$$\omega_+ := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \quad \omega_- = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

Das sind genau die beiden Nullstellen des Polynoms $x^2 - x - 1$. Zeige mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\omega_+^n - \omega_-^n).$$

Aufgabe 5 (Wohlordnung der natürlichen Zahlen, Übung 2.6)**.** Beweise, dass jede nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ein minimales Element bestitzt, d.h.

$$\forall M \subseteq \mathbb{N} : (M \neq \emptyset \Rightarrow \exists n \in M \forall m \in \mathbb{N} : (m < n \Rightarrow m \notin M)).$$

Hinweis: Nutze Kontraposition, d.h. die Gleichwertigkeit der Implikationen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$, für Aussagen A und B. Verwende, dass für alle $M \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

$$M = \emptyset \iff \forall n \in \mathbb{N} : n \notin M.$$