Lineare Algebra 2

Probeklausur

Es besteht kein Zusammenhang mit möglichem Prüfungsstoff. Die Bearbeitungszeit dieser Probeklausur beträgt 90 Minuten. Hilfsmittel sind nicht vorgesehen.

Im Folgenden sei K ein Körper.

Aufgabe 1 (10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 Punkte)**.** Entscheide für folgende Aussagen, ob sie wahr sind. Eine Begründung ist nicht nötig.

Aussage	**wahr**	**falsch**
Ein Körper positiver Charakteristik ist endlich.	☐	☐
Für $A \in M_n(K)$ ist die Summe der Grade der Elementarteiler der charakteristischen Matrix $M_A(x)$ genau n.	☐	☐
Jeder Vektorraum V ist kanonisch isomorph zu seinem Bidualraum V^{**}.	☐	☐
Für jeden kommutativen Ring R ist der Polynomring $R[x]$ ein Hauptidealring.	☐	☐
Jedes irreduzible Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ erfüllt $\deg f \in \{1,2\}$. Dasselbe gilt für jedes irreduzible Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$.	☐	☐
Seien $f, g : V \to V$ Endomorphismen auf dem K-Vektorraum V. Dann gilt für die dualen Abbildungen: $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$.	☐	☐
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\beta : V \times V \to K$ eine K-Bilinearform. Dann ist β genau dann im ersten Argument ausgeartet, wenn β im zweiten Argument ausgeartet ist.	☐	☐
Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit $A^tA = AA^t$; dann ist A diagonalisierbar.	☐	☐
Hauptidealringe sind faktoriell.	☐	☐
Seien R faktoriell und M ein R-Modul. Dann ist der Torsionsmodul $T(M)$ ein Untermodul von M.	☐	☐

Lösung. Die richtigen Antworten von oben nach unten sind:

falsch, wahr, falsch, falsch, wahr, falsch, wahr, falsch[1], wahr, wahr.

[1] Da man an dieser Stelle sehr viel Zeit mit der Suche nach einem Gegenbeispiel verbringen kann, sollte man sich bei der Beantwortung dieser Frage, wie bei so vielen Dingen im Leben, wohl auf sein Bauchgefühl verlassen. Ein mögliches Gegenbeispiel ist $\begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

□

Aufgabe 2 (10 = 5+5 Punkte)**.** Für einen K-Vektorraum V sei $\Phi_V : V \to V^{**}$ die kanonische Abbildung $\Phi_V(v) : V^* \to K$, $f \mapsto f(v)$.

(a) Es seien U und W K-Vektorräume, und $g : U \to W$ linear. Es bezeichne $g^{**} = (g^*)^*$ die duale Abbildung zur dualen Abbildung g^* von g.

Beweise: $\Phi_W \circ g = g^{**} \circ \Phi_U$.

(b) Sei nun V endlichdimensional mit Basis $v_1, ..., v_n$. Zeige: Φ_V ist ein Isomorphismus mit $\Phi_V : v_i \mapsto (v_i^*)^*$, $1 \le i \le n$, wobei $(v_i^*)^*$ für alle i das duale Basiselement zum dualen Basiselement v_i^* von v_i ist.

Lösung. (a) Zu zeigen ist eine Gleichheit von Abbildungen $U \to W^{**}$. Diese rechnen wir auf einem beliebigen Element $u \in U$ nach: zu zeigen ist also $\Phi_W(g(u)) = g^{**}(\Phi_U(u))$. Dies ist selbst eine Gleichheit von Elementen in W^{**}, also von Abbildungen $W^* \to K$. Wir prüfen sie auf einem beliebigen Element $(f : W \to K) \in W^*$ nach:

$$\begin{aligned}(g^{**}(\Phi_U(u)))(f) &= (\Phi_U(u) \circ g^*)(f) = \Phi_U(u)(g^*(f)) \\ &= \Phi_U(u)(f \circ g) = f(g(u)) = (\Phi_W(g(u)))(f).\end{aligned}$$

(b) Wir wissen, dass $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V ist. Damit ist $v_1^*, ..., v_n^*$ eine Basis von V^*, und $v_1^{**}, ..., v_n^{**}$ eine Basis von V^{**}, wobei $v_i^{**} = (v_i^*)^*$ für alle $1 \le i \le n$ gesetzt wurde. Wenn also $\Phi_V(v_i) = v_i^{**}$ für alle i gezeigt ist, folgt dass $\Phi_V : V \xrightarrow{\cong} V^{**}$ ein Isomorphismus ist. Rechnen wir nach: Für alle i und j gilt:

$$\Phi_V(v_i)(v_j^*) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij} = (v_i)^{**}(v_j^*).$$

Da j beliebig war, haben wir die Gleichheit $\Phi_V(v_i) = (v_i)^{**} : V^* \to K$ auf einer Basis von V^* nachgerechnet. □

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Es bezeichne $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^*\}$ die unitäre Gruppe. Beweise:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\, \forall A \in U(n)\, \exists B \in U(n) : B^m = A.$$

Lösung. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in U(n)$ gegeben. Nach dem Spektralsatz gibt es $U \in U(n)$ mit $A = U^*DU$ und $D = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n) = (d_i\delta_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $d_1, ..., d_n \in \mathbb{C}$. Da $D = UAU^*$ ein Produkt von unitären Matrizen ist, muss auch D unitär sein, und es folgt: $\overline{d}_j = d_j^{-1}$ für alle j; oder anders gesagt: $d_j = e^{i\alpha_j}$, für irgendwelche $\alpha_j \in \mathbb{R}$, liegt auf dem Einheitskreis. Wir setzen $F = \operatorname{diag}(e^{i\alpha_1/m}, ..., e^{i\alpha_n/m})$. Wegen $\overline{e^{i\alpha_j/m}} = e^{-i\alpha_j/m} = (e^{i\alpha_j/m})^{-1}$ ist $F \in U(n)$, und $F^m = D$ ist klar. Also folgt für $B = U^*FU \in U(n)$:

$$B^m = (U^*FU)^m = U^*F^mU = U^*DU = A.$$ □

Aufgabe 4 (20 = 5+5+5+5 Punkte). (a) Bestimme den Torsionsmodul des $\mathbb{Z}$-Moduls

$$M = \mathbb{Z}^3 \Big/ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(b) Betrachte die beiden Geraden $g, h \subset \mathbb{R}^4$, definiert als

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimme den Abstand von g und h.

(c) Löse folgendes Gleichungssystem simultaner Kongruenzen nach $x \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x &= 7 \mod 8, \\ x &= 1 \mod 13, \\ x &= 2 \mod 5. \end{aligned}$$

(d) Bestimme die Weierstraßsche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

Lösung. (a) Wir wenden den Elementarteilersatz auf die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben dabei der Reihe nach folgende Umformungen gemacht: II.S + I.S, II.Z − 2I.Z und III.Z − 3I.Z, III.Z − 2II.Z, II.Z. − 3III.Z, Vertauchung II.Z und III.Z.

Es gibt also einen Isomorphismus $M \simeq \mathbb{Z}/1 \oplus \mathbb{Z}/1 \oplus \mathbb{Z}/0 \simeq \mathbb{Z}$, was torsionsfrei ist.

(b) Wir folgen der Vorlesung: Setze $p = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha - 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Beobachte: $u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Orthonormalbasis von U. Daher finden wir:

$$\pi_U(p) = (p, u)u + (p, w)w = \frac{\alpha - 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $(-,-)$ das Standardskalarprodukt bezeichnet. Also insgesamt:

$$\begin{aligned} d(g,h) = d(p,U) &= \sqrt{\|p\|^2 - \|\pi_U(p)\|^2} \\ &= \sqrt{(\alpha-1)^2 + 1 - 3\left(\frac{\alpha-1}{3}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)(\alpha-1)^2} = |\alpha - 1|\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

(c) $8, 13$ und 5 sind paarweise teilerfremd, also greift der chinesische Restklassensatz. Es ist $5 \cdot 13 = 65 = 1 + 8 \cdot 8$, also ist die Inverse von 65 modulo 8 gleich 1. Es ist $8 \cdot 5 = 40 = 1 + 3 \cdot 13$, also ist die Inverse von 40 modulo 13 gleich 1. Es ist $8 \cdot 13 = 104 = -1 + 21 \cdot 5$, also ist die Inverse von 104 modulo 5 gleich -1. Also ist

$$x = 7 \cdot 1 \cdot 65 + 1 \cdot 1 \cdot 40 + 2 \cdot (-1) \cdot 104 = 287$$

eine mögliche Lösung unseres Gleichungssystems.

(d) Ohne dass die effizienteste Rechnung garantiert wird, wenden wir den Elementarteilersatz auf die Matrix $-M_A(x) = \begin{pmatrix} -3-x & -5 & 0 & -4 \\ 2 & 3-x & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ an:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -3-x & -5 & 0 & -4 \\ 2 & 3-x & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -x^2-1 & 0 & 2x-2 \\ 2 & 3-x & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -x^2-1 & 3(x^2+1)(x-1) & 0 \\ 2 & 3-x & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3(x^2+1)(x-1) & 0 \\ 2 & 3-x & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diesmal überlassen wir die Beschriftung der Zwischenschritte dem Leser. Die Elementarteiler sind also $x-1$ und $(x-1)(x^2+1)$. Damit sind die Invariantenteiler $x-1, x-1, x^2+1$ und die Weierstraß Normalform ist

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Es seien G eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(n)$ und $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform $\neq 0$. Ferner gelten:

(1) $\forall A \in G\, \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \beta(Ax, Ay) = \beta(x, y)$,

(2) für alle Unterräume $U \leq \mathbb{R}^n$ gilt: Falls $\forall A \in G\, \forall u \in U : Au \in U$, so folgt bereits $U \in \{0, \mathbb{R}^n\}$.

Zeige: Es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda \cdot \beta$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Lösung. Wir vergleichen die Homomorphismen $\mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, die von den jeweiligen Bilinearformen induziert werden:

$$\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad \varphi(x) : y \mapsto \beta(x, y), \quad \psi(x) : y \mapsto (x, y),$$

wobei $(-,-)$ das Standardskalarprodukt bezeichnet. Weil dieses nicht ausgeartet ist, ist ψ ein Isomorphismus. Wir betrachten die Abbildung

$$A = \psi^{-1}\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Bekanntlich gilt: A ist symmetrisch $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n : (Ax, y) = (x, Ay)$. In unserem Fall folgt die rechte Seite der Äquivalenz aus der Symmetrie von β:

$$\begin{aligned}(Ax, y) = \psi(Ax)(y) = \varphi(x)(y) = \beta(x, y)& \\ = \beta(y, x) = \varphi(y)(x) = \psi(Ay)(x) = (Ay, x) = (x, Ay).&\end{aligned}$$

Das ist gut: Alle Eigenwerte eines symmetrischen $\mathbb{R}$-linearen Homomorphismus sind reell, und weil A nicht die Nullabbildung ist, ist ein Eigenwert $\mathbb{R} \ni \mu \neq 0$.[2] Betrachte nun

[2] Der Grund dafür: Bezeichnen wir mit A auch die darstellende Matrix von A bezüglich der Standardbasis, so ist diese insbesondere hermitesch. Ist nun $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert mit normiertem Eigenvektor $x \in \mathbb{C}^n$, so gilt: $\lambda = (\lambda x, x)_{\mathbb{C}} = (Ax, x)_{\mathbb{C}} = (x, Ax)_{\mathbb{C}} = (x, \lambda x)_{\mathbb{C}} = \overline{\lambda}$, wobei $(-,-)_{\mathbb{C}}$ das Standardskalarprodukt im unitären Vektorraum $\mathbb{C}^n$ bezeichne. Die Eigenwerte von A sind nicht alle 0, denn A ist diagonalisierbar nach dem Spektralsatz.

$U = \ker(A - \mu\,\mathrm{id})$. Wir zeigen, dass U die Voraussetzungen von (2) erfüllt. Seien also $B \in G$ und $u \in U$. Wir haben folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} Bu \in U &\iff ABu = \mu Bu \iff \varphi(Bu) = \psi(\mu Bu) \iff \forall y \in \mathbb{R}^n : \beta(Bu, y) = \mu(Bu, y) \\ &\overset{(1)}{\iff} \forall y \in \mathbb{R}^n : \beta(u, B^{-1}y) = \mu(u, B^{-1}y) \iff \forall x \in \mathbb{R}^n : \beta(u, x) = \mu(u, x) \iff u \in U, \end{aligned}$$

und $u \in U$ per Annahme. Also folgt nach (2) schon $U = \mathbb{R}^n$, da A mindestens einen Eigenvektor zu μ hat.

Wir haben also gezeigt: $\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mu x$. Es bleibt noch $\beta = \mu(-,-)$ zu bemerken: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu(x, y) = (\mu x, y) = \psi(\mu x)(y) = \psi(Ax)(y) = \varphi(x)(y) = \beta(x, y).$$

Setze abschließend $\lambda = \mu^{-1}$. $\square$