Funktionentheorie, Tutorium 9

2. (i) Harmonische Funktionen auf Gebieten in $\mathbb{C}$ sind glatt.

(ii) Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Die Komposition $h \circ f$ einer holomorphen Funktion $f : U \to V$ mit einer harmonischen Funktion $h : V \to \mathbb{R}$ ist harmonisch.

(i) $u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ harmonisch

$z \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ offen $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$: $D_\varepsilon(z) \subseteq \mathcal{U}$

einfach zsmhgd.

Blatt 6, Aufgabe 3 (i) $\Rightarrow$ $\exists f : D_\varepsilon(z) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $u|_{D_\varepsilon(z)} = \mathrm{Re}(f)$

Vorlesung $\Rightarrow$ f analytisch (d.h. überall als Taylorreihe entwickelbar)

$\Rightarrow$ f unendlich oft (reell) differenzierbar & $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist linear, also auch glatt

$\Rightarrow$ $\mathrm{Re} \circ f = u|_{D_\varepsilon(z)}$ auch glatt (Kettenregel)

z beliebig $\Rightarrow$ u glatt.

(ii) $f : \mathcal{U} \to V$ holomorph, $h : V \to \mathbb{R}$ harmonisch

zz: $h \circ f$ harmonisch (d.h. $\Delta h \circ f = 0$)

$z \in \mathcal{U}$, $\exists \varepsilon > 0$: $D_\varepsilon(f(z)) \subseteq \mathcal{U}$

$h|_{D_\varepsilon(f(z))} = \mathrm{Re}(g)$, $g : D_\varepsilon(f(z)) \to \mathbb{C}$ holomorph

$g = h + iv$

$g \circ f|_W$ holomorph $\quad W := f^{-1}(D_\varepsilon(f(z)))$ offen

& $\mathrm{Re}(g \circ f|_W) = (\mathrm{Re} \circ g) \circ f|_W$

$= h|_{..} \circ f|_W$

[zu prüfen: Realteile/Imaginärteile holomorpher Fkt. sind harmonisch.]

(Cauchy-Riemann-Gleichungen)

$\Rightarrow \quad h \circ f|_{W \ni z}$ ist harmonisch.

4. (i) Zeigen Sie, daß offene Scheiben und Halbebenen in $\mathbb{C}$ zueinander biholomorph sind. Geben Sie eine explizite gebrochen lineare Transformation an, welche die Einheitsscheibe $D_1(0)$ biholomorph auf die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ abbildet.

(ii) Eine Halbebene in $\mathbb{C}$ ist nicht zur gesamten Ebene $\mathbb{C}$ biholomorph.

(i) Offene Scheiben: $D_r(z) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - z| < r\}$

$z \in \mathbb{C}, \ r \in \mathbb{R}_{>0}$

Offene Halbebene: $z + e^{i\alpha} H$

$H = \{x \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(x) > 0\}$

$\alpha \in \mathbb{R}, \ z \in \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} D_{r_1}(z_1) \arrow[rr, bend left, "z \mapsto \frac{r_2}{r_1}(z - z_1) + z_2"] & & D_{r_2}(z_2) \arrow[ll, bend left, "\frac{r_1}{r_2}(z - z_2) + z_1 \mapsfrom z"] \end{tikzcd}$$

sind zueinander inverse Biholomorphismen.

$$\begin{tikzcd} z_1 + e^{i\alpha_1} H \arrow[rr, bend left, "z \mapsto e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)}(z - z_1) + z_2"] & & z_2 + e^{i\alpha_2} H \arrow[ll, bend left, "\text{Analog, } \leftarrow\!\shortmid\, z"] \end{tikzcd}$$

Analog, Rollentausch der Indizes $1 \leftrightarrow 2$ $\longleftarrow\!\shortmid$ z auch holomorph.

Für $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Mengen,

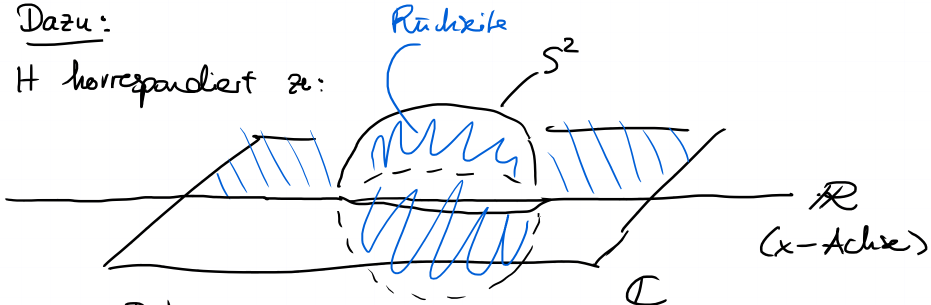
$(U \cong V) :=$ U & V sind zueinander biholomorph

ist eine Äquivalenzrelation.

Es genügt also, $D_1(0) \cong H$ zu zeigen.

<u>Dazu:</u>

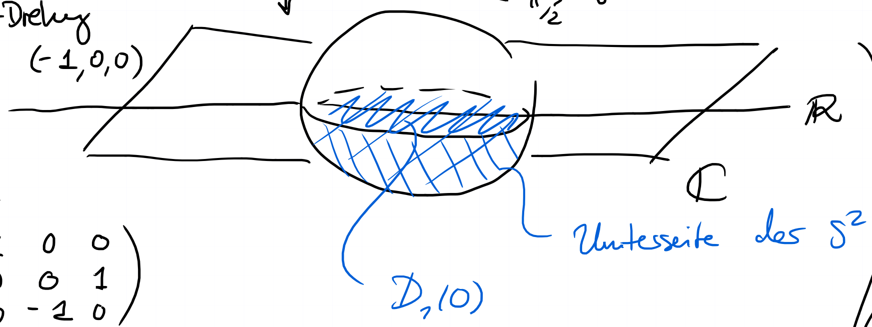
H korrespondiert zu:



Drehung Rückseite ⇝ Unterseite

$\frac{\pi}{2}$-Drehung um $(-1,0,0)$

Drehung um $(1,0,0)$ $\pi/2$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die gesuchten Formeln sind dann

$$H \longrightarrow D_1(0), \quad z \longmapsto \pi \circ A \circ \pi^{-1}$$

stereografische Projektion

$$\pi \circ B \circ \pi^{-1} \longleftarrow\!\shortmid\; z$$

π induziert einen außergewöhnlichen Isomorphismus $SO_3(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} PSU_2(\mathbb{C})$

$\nearrow$ Rotationsmatrizen

$\ni \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$ mod $\pm id$

Rotation um $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$

mit Winkel φ

$\downarrow$

(Cayley) $$\left(z \mapsto \frac{z\left(\cos\frac{\varphi}{2} + ix_3 \sin\frac{\varphi}{2}\right) - x_2 \sin\frac{\varphi}{2} + ix_1 \sin\frac{\varphi}{2}}{z\left(x_2 \sin\frac{\varphi}{2} + ix_1 \sin\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\frac{\varphi}{2} - ix_3 \sin\frac{\varphi}{2}}\right)$$

$$A \mapsto \left(z \mapsto \frac{z - i}{-iz + 1} = \frac{iz + 1}{z + i}\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$B \mapsto \left(z \mapsto \frac{-iz + 1}{z - i}\right)$$

$$f : z \mapsto \frac{iz + 1}{z + i}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, bend left] & D_1(0) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$$\frac{-iz + 1}{z - i} \longleftarrow\!\shortmid\; z : g$$

Wohldefiniert: $z \in H$

$$|f(z)|^2 = \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 = \frac{(z-i)(\bar z + i)}{(z+i)(\bar z - i)} =$$

$$= \frac{|z|^2 + 1 - i\bar z + iz}{|z|^2 + 1 \underbrace{+ i\bar z - iz}} = \frac{|z|^2 + 1 - 2\,\mathrm{Im}(z)}{|z|^2 + 1 + 2\,\mathrm{Im}(z)} \underset{\substack{\mathrm{Im}(z) > 0 \\ \text{da } z \in H}}{<} 1$$

$$= -(\overline{iz} + iz)$$
$$= -2\,\mathrm{Re}(iz)$$
$$= 2\,\mathrm{Im}(z)$$

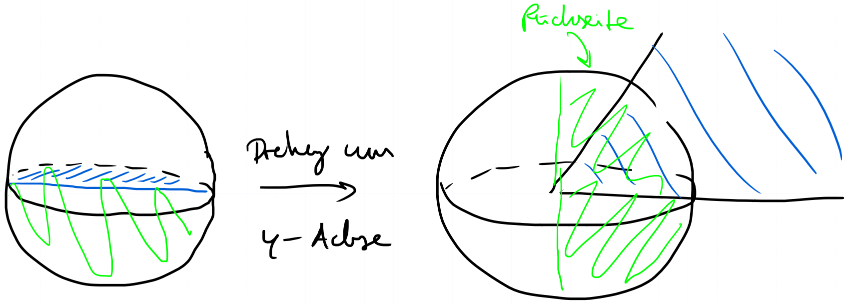
$$\underbrace{z \in D_1(0)} \implies -\mathrm{Im}(g(z)) = \mathrm{Re}(i\, g(z))$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(z+i)(\bar z + i)}{|z-i|^2}\right)$$

$$= \frac{|z|^2 - 1}{|z-i|^2} < 0$$

$\Rightarrow$ f & g sind wohldefiniert.
Holomorphie ist klar. (Quotientenregel)

$$\tau = g(z) = \frac{-iz+1}{z-i} \iff \tau(z-i) = -iz+1$$
$$\iff z(\tau + i) = 1 + i\tau$$
$$\iff z = \frac{i\tau + 1}{\tau + i} = f(\tau)$$

$$\Rightarrow \quad D_1(0) \cong H.$$



[Später: Riemannsches Abbildungssatz:

Alle einfach zshgd. Gebiete $\neq \mathbb{C}$

(eindeutig) $\cong$

$D_1(0)$]

(ii) Angenommen, $f : \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \tilde{H}$ ← eine Halbebene

Dann gibt es nach (i): $H \xrightarrow[h]{\cong} D_1(0)$

$\Longrightarrow \quad \mathbb{C} \xrightarrow[\cong]{f} \tilde{H} \xrightarrow[h]{} D_1(0) \xleftrightarrow[\text{„}\subseteq\text{“}]{} \mathbb{C}$

holomorphe (also ganz) Funktion mit beschränktem Bild $\subseteq D_1(0)$.

Liouville $\Longrightarrow$ $\underbrace{\text{„}\subseteq\text{“} \circ h}_{\text{injektiv}} \circ f$ ist konstant $\Longrightarrow$ f konstant, Wid. □

Typische Biholomorphismen:

(1) $\mathbb{H} \longrightarrow D_1(0)$

$z \longmapsto \dfrac{i-z}{i+z}$

$i\,\dfrac{1-z}{1+z} \longleftarrow z$

(2) $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto az+b$ } das sind die einzigen Biholomorphismen $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$

(3) obere Halbkreisscheibe $\longrightarrow$ erstes Quadrant

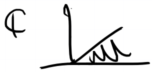
$= \{ z \in \mathbb{C} \mid |z|<1, \operatorname{Im}(z)>0 \}$ $\qquad = \{ \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) > 0 \}$

$z \longmapsto \dfrac{1+z}{1-z}$

$\dfrac{z-1}{z+1} \longleftarrow z$

(4) Obere Halbkreisscheibe $\longrightarrow$ obere Halbebene

$z \longmapsto -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$



(5) Sektoren

$= \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \alpha\pi \} \longrightarrow$ obere Halbebene

$0 < \alpha < 2$

$z \longmapsto z^{\alpha}$

(6) Obere Halbebene $\longrightarrow$ Streifen

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{\{}z \mid 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$

$$z \longmapsto \mathrm{Log}(z)$$

5. *Poissonsche Integralformel.* Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{D_1(0)} \subset U$. Sei $a \in D_1(0)$.

$\Rightarrow \exists \delta > 0: D_{1+\delta}(0) \subseteq U$
$\cup\!\!\!\;\mid$
S^1

(i) Für eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{S^1} \frac{f(z)}{1 - z\overline{a}}\, dz = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Cauchyschen Integralsatz.

Wähle δ so klein, dass $1+\delta < \frac{1}{|a|}$

$\Updownarrow$

$|a| < \frac{1}{1+\delta}$

(ii) Weiter gilt

$$\int_{S^1} \frac{f(z)}{\overline{z} - \overline{a}} \frac{dz}{iz} = 0.$$

Hinweis: $z\overline{z} = 1$ auf S^1.

(i) Der Integrand ist holomorph auf der (einfach zusammenhängend!) Scheibe $D_{1+\delta}(0) \subseteq U$:

$z\overline{a} = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{\overline{a}} \Rightarrow |z| = \frac{1}{|a|} > 1+\delta$.

$$\Rightarrow \int_{S^1} \frac{f(z)}{1 - z\overline{a}}\, dz = 0$$

S^1: geschlossen in $D_{1+\delta}(0)$; $\frac{f(z)}{1-z\overline{a}}$: holomorph

(ii)
$$\int_{S^1} \frac{f(z)}{\overline{z} - \overline{a}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{S^1} \frac{f(z)}{1 - \overline{a}z}\, dz = 0$$

$z\overline{z} = |z|^2 = 1$

(iii) Und weiter

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(z) \frac{1-|a|^2}{|z-a|^2} \frac{dz}{iz}.$$

Hinweis: Gehen Sie aus von der Cauchyschen Integralformel und verwenden Sie (ii).

(iv) Für eine harmonische Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ gilt die *Poissonsche Integralformel*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1-|a|^2}{|e^{it}-a|^2}\, dt.$$

(iii) $\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(z) \frac{1-|a|^2}{|z-a|^2} \frac{dz}{iz} =$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \underbrace{f(z) \frac{1-|a|^2}{(\bar{z}-\bar{a})z}}_{= f(z) \frac{1-|a|^2}{1-\bar{a}z}} \frac{dz}{z-a}$ holomorph auf $D_{1+\delta}(0)$

$\overset{\text{Cauchy-Integralformel}}{=} f(a) \frac{1-|a|^2}{1-\bar{a}a} = f(a).$

(iv) $(u : U \to \mathbb{R})\big|_{D_{1+\delta}(0)} = \operatorname{Re}(f),$

$f : D_{1+\delta}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph.

$\Rightarrow u(a) = \operatorname{Re}(f(a)) =$

$\overset{(iii)}{=} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(z) \frac{1-|a|^2}{|z-a|^2} \frac{dz}{iz}\right)$

$= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1-|a|^2}{|e^{it}-a|^2} \frac{de^{it}}{ie^{it}}\right)$ $\}\, ie^{it}\, dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{it}) \underbrace{\frac{1-|a|^2}{|e^{it}-a|^2}}_{\in \mathbb{R}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1-|a|^2}{|e^{it}-a|^2} dt.$$

1. (i) Die komplexe Konjugation $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto \overline{z}$ ist antiholomorph.

   (ii) Die Komposition einer holomorphen mit einer antiholomorphen Abbildung (offener Teilmengen von $\mathbb{C}$), egal in welcher Reihenfolge, ist antiholomorph. Die Komposition zweier antiholomorpher Abbildungen ist holomorph.

(i) antiholomorph $:\Longleftrightarrow$ das Differential ist $\mathbb{C}$-antilinear

$\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ ist $\mathbb{R}$-linear,

d.h. $\forall z \in \mathbb{C}$: $d\kappa_z = \kappa$ ist $\mathbb{C}$-antilinear,

da $\kappa(i) = -i = -i\kappa(1)$.

(ii) $f : U \to V$, $g : V \to W$

1. f hol., g antihol.

$\Rightarrow \forall z \in U$ $d(g \circ f)_z = dg_{f(z)} \, df_z$

ist $\mathbb{C}$-antilinear, da:

$$d(g \circ f)_z (i) = dg_{f(z)} (\underset{\uparrow \, \mathbb{C}\text{-linear}}{df_z} (i))$$

$$= \underset{\uparrow \, \mathbb{C}\text{-antilinear}}{dg_{f(z)}} (i \, df_z(1)) = -i \, d(g \circ f)_z (1)$$

$\underline{2}$: f antihol, g hol

$$\Rightarrow \quad \forall z \in \mathcal{U}: \quad dg_{f(z)} \underbrace{df_z(i)}_{\mathbb{C}\text{-antilinear}} = \underbrace{dg_{f(z)}}_{\mathbb{C}\text{-linear}}(-i\, df_z(1))$$

$$= -i\, d(g \circ f)_z (1)$$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ antihol.

$\underline{3}$: f, g antihol

$$\Rightarrow \quad d(g \circ f)_z(i) = dg_{f(z)}(df_z(i))$$
$$= dg_{f(z)}(-i\, df_z(1))$$
$$= i\, dg_{f(z)}\, df_z(1) = i\, d(g \circ f)_z(1).$$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ holomorph.