Funktionentheorie, Tutorium 13

(iii) Das *Doppelverhältnis* $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \overline{\mathbb{C}}$ eines Quadrupels (z_1, z_2, z_3, z_4) paarweise verschiedener Punkte in $\overline{\mathbb{C}}$ ist definiert als $\mu(z_1)$ für die eindeutige Möbiustransformation μ mit $\mu(z_2) = 1$, $\mu(z_3) = 0$ und $\mu(z_4) = \infty$. Zeigen Sie:

(a) Das Doppelverhältnis ist invariant unter Möbiustransformationen.

(iv) (a) Das Doppelverhältnis ist genau dann reell, wenn das Quadrupel auf einem Kreis oder einer Geraden liegt. (Wir sehen Geraden als Kreise durch ∞ an.)

(b*) *Satz von Ptolemäus.* Vier paarweise verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ liegen genau dann in dieser Reihenfolge auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn

$$|z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_4| = |z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4| + |z_2 - z_3| \cdot |z_1 - z_4|.$$

Hinweis: Ohne die Beträge der Differenzen zu nehmen, gilt die Identität immer.

(iii) (a) $\quad \eta(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\eta(z_1), \ldots, \eta(z_4))$

Sei μ die Möbiustrafo mit $\mu(z_2, z_3, z_4) = (1, 0, \infty)$.

Setze $\nu := \mu\eta^{-1}$, dann $\nu(\eta(z_2), \eta(z_3), \eta(z_4)) = (1, 0, \infty)$

$\Rightarrow \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mu(z_1)$

$\mathrm{DV}(\eta(z_1), \eta(z_2), \eta(z_3), \eta(z_4)) = \nu(\eta(z_1)) = \mu(z_1)$.

(iv) (a): Kreis / Gerade eindeutig bestimmt durch 3 Pkt.

„$\Rightarrow$": $z_1, z_2, z_3, z_4 \in K$ ← Kreis / Gerade

$\mu(K)$ ist ein Kreis / Gerade (Blatt 1) Aufgabe 7

$\mu(z_2, z_3, z_4) = (1, 0, \infty) \in \mu(K)^3 \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^3$

$\Rightarrow \mu(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Kreise eindeutig bestimmt

$\overset{\mathrm{DV}}{\Rightarrow} \mu(z_1) \in \mathbb{R}$

„$\Leftarrow$": $\mu(z_1)\in\mathbb{R} \Longrightarrow \mu(z_i)\in\mathbb{R}\cup\{\infty\} \quad \forall i$

$\mu^{-1}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ ist ein Kreis
$\ni$
z_1, z_2, z_3, z_4.

Skizze:

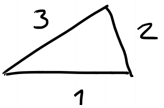
(b*)

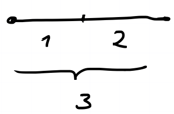
$$(z_1-z_3)(z_2-z_4) = (z_1-z_2)(z_3-z_4) + (z_2-z_3)(z_1-z_4)$$

gilt immer.

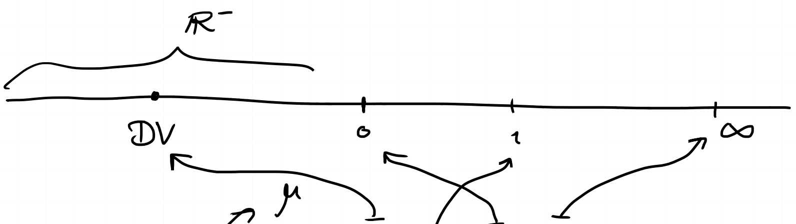
$$\underset{\Delta\text{-}\neq}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{|z_1-z_3||z_2-z_4|}_{3} \le \overbrace{|z_1-z_2||z_3-z_4|}^{1} + \overbrace{|z_2-z_3||z_1-z_4|}^{2}$$

mit Gleichheit $\Longleftrightarrow$ Quotient reell > 0





$$\underbrace{-\mathrm{DV}(z_1,z_3,z_2,z_4)}_{\in\mathbb{R}^-} = \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)} \in \mathbb{R}^+$$



(z_1, z_3, z_2, z_4) liegen auf Kreis wegen (a)

μ erhält die Reihenfolge der Punkte

$\Longleftarrow$ DV $\in\mathbb{R}$

$\Downarrow$

z_1, z_2, z_3, z_4

4. (o) Verallgemeinern Sie die Eindeutigkeit der Lösbarkeit des Dirichlet-Problems für harmonische Funktionen (Blatt 10, Aufgabe 4(iiia)) auf beschränkte Gebiete in $\mathbb{C}$.

(i*) *Spiegelungsprinzip für harmonische Funktionen.* Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und spiegelsymmetrisch bzgl der reellen Achse, $\kappa(U) = U$. Ist h_+ eine harmonische Funktion auf $U_+ = \{z \in U \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, die sich durch 0 stetig auf $U \cap \mathbb{R}$ fortsetzen läßt, so läßt sie sich zu einer harmonischen Funktion h auf U fortsetzen mit $\underline{h \circ \kappa = -h}$.

(0) Wie auf Blatt 10. (Ersetze D durch U ($\bar{U}$ kompakt))

(i*) $U_- := \kappa(U_+)$,

Definiere $h: U \to \mathbb{R}$, $h|_{U_+} = h_+$,

$h|_{U_-} = -h_+ \circ \kappa$,

$h|_{U \cap \mathbb{R}} = 0$

$-h = h \circ \kappa$ per Konstruktion

h stetig (da $h|_{\overline{U_+}}$ stetig per Annahme & $h|_{\overline{U_-}}$ stetig

& stimmen auf $\overline{U_+} \cap \overline{U_-}$ überein

(pasting lemma))

<u>h harmonisch:</u> Kann man lokal um $z \in U$ prüfen.

$z \in U_+ \rightsquigarrow h|_{U_+} = h_+$ ist harmonisch

$z \in U_- \rightsquigarrow h|_{U_-} = -h_+ \circ \kappa$ ist harmonisch

$$\Delta h|_{U_-} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} h|_{U_-} = -\left(\frac{\partial}{\partial y} h_+\right)(x,-y)(-1) \underset{\frac{\partial(-y)}{\partial y}}{\underbrace{=}} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} h|_{U_-} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} h_+ \underbrace{(-1)^2}_{=1}$$

$$h|_{U_-}(x,y) = -h_+(x,-y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h\Big|_{\mathcal{U}_-} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_+ \quad \Rightarrow \Delta h\Big|_{\mathcal{U}_-} = 0$$

Interessanter Fall $z \in \mathbb{R} \cap \mathcal{U}$.

$\rightsquigarrow \varepsilon > 0$, $\overline{D_\varepsilon(z)} \in \mathcal{U}$. $D := D_\varepsilon(z)$.

$\tilde{h} : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\tilde{h}\Big|_{\partial D} = \underbrace{h\Big|_{\partial D}}_{\text{stetig}}$$

Wollen zeigen: $\tilde{h} = h$.

Hierzu: $\underbrace{-\tilde{h} \circ \kappa}_{\text{harmonisch}} = \tilde{h}$

$\Big(f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $\operatorname{Re}(f) = \tilde{h}$

$\Rightarrow -\kappa \circ f \circ \kappa$ holomorph

$\Rightarrow \operatorname{Re}(-\kappa \circ f \circ \kappa) = -\operatorname{Re}(f \circ \kappa)$

$= -\tilde{h} \circ \kappa \Big)$

ist harmonisch

& $-\tilde{h} \circ \kappa$ löst auch das Dirichlet-Problem, da

$$(-\tilde{h} \circ \kappa)\Big|_{\partial D} \underset{\tilde{h}|_{\partial D} = h|_{\partial D}}{=} (-h \circ \kappa)\Big|_{\partial D} = h\Big|_{\partial D}$$

$\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Longrightarrow} -\tilde{h} \circ \kappa = \tilde{h}. \quad \Rightarrow \tilde{h}\Big|_{\overline{D} \cap \mathbb{R}} = 0$

$\Rightarrow \tilde{h}\Big|_{\overline{D \cap \mathcal{U}_+}}$ & $h\Big|_{\overline{D \cap \mathcal{U}_+}}$ lösen das

Dirichlet-Problem zu $h\Big|_{\partial(D \cap \mathcal{U}_+)}$.

Wegen Eindeutigkeit: $\tilde{h}\big|_{\overline{D\cap\mathcal{U}_+}} = h\big|_{\overline{D\cap\mathcal{U}_+}}$

$$\tilde{h}\big|_{\overline{D\cap\mathcal{U}_-}} = (-\tilde{h}\circ\kappa)\big|_{\overline{D\cap\mathcal{U}_-}} =$$

$$= -\tilde{h}\big|_{\overline{D\cap\mathcal{U}_+}} = -h\big|_{\overline{D\cap\mathcal{U}_+}} =$$

$$= h\big|_{\overline{D\cap\mathcal{U}_-}}.$$

$$\Longrightarrow h = \tilde{h} \text{ auf } \overline{D}.$$

$\uparrow$ harmonisch (in z)

(ii) *Spiegelungsprinzip für holomorphe Funktionen unter schwächeren Randbedingungen.* Seien U und U_+ wie in (i). Ist f_+ eine holomorphe Funktion auf U_+, deren *Imaginärteil* sich durch 0 stetig auf $U\cap\mathbb{R}$ fortsetzen läßt, so läßt sich f_+ zu einer holomorphen Funktion f auf U fortsetzen mit $f\circ\kappa = \kappa\circ f$.

(ii) Es genügt (wegen dem üblichen Spgl.prinzip) f_+ stetig auf $\mathcal{U}\cap\mathbb{R}$ fortzusetzen

(Die Randwerte sind automatisch reell

$$\operatorname{Im}\left(f_+\big|_{\mathcal{U}\cap\mathbb{R}}\right) \underset{\uparrow}{=} (\operatorname{Im} f_+)\big|_{\mathcal{U}\cap\mathbb{R}} = 0$$

stetige Fortsetz. sind eindeutig)

$h_+ := \operatorname{Im} f_+$ ist harmonisch, stetig fortsetzbar auf $\overline{\mathcal{U}_+}$ durch 0 auf $\mathcal{U}\cap\mathbb{R}$.

$\underset{(i)}{\Longrightarrow}$ $\exists$ harmonische Fortsetzung $h: \mathcal{U}\to\mathbb{R}$,

$h|_{\mathcal{U}_+} = h_+$, $h|_{\mathbb{R}\cap\mathcal{U}} = 0$

$z \in \mathcal{U} \cap \mathbb{R}$, wähle einfache zshgd Umg. $V \subseteq \mathcal{U}$,

$z \in V$,

$h = \mathrm{Im}(g)$ für $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph

& g stetig fortsetzbar auf $\overline{V}$.

(Schrumpfe V)

$\pm \,\mathrm{Im}\left(f_+|_V - g|_{\mathcal{U}_+ \cap V} \right)$ nimmt Maximum

auf Rand an

(Maximumsprinzip für harm. Fkt.)

$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}\left(f_+|_V\right) = \mathrm{Im}\left(g|_{\mathcal{U}_+ \cap V}\right).$

$\underset{\text{Blatt 1}}{\Longrightarrow} \quad f_+|_V = g|_{\mathcal{U}_+ \cap V}$ + konst

$\Rightarrow$ Das setzt f_+ stetig auf V fort.

$\rightsquigarrow$ Das liefert die gew. stetige Fortsetzung.

Aufgabe 1

(i) Sei $f: U\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ hol.

a wesentl. Sing,

V Umgebung von a.

Großer Satz von Picard $\Rightarrow \exists b \in \mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}\setminus\{b\} \subseteq \underbrace{f(U\cap V)}_{\text{offen}}$$

bzw. unendlich viele Pkt mehr

$$a \in V_1 \subsetneq V_2$$

b_1, b_2 : $\mathbb{C}\setminus\{b_1\} \subseteq f(U\cap V_1)$

Nehme $x \in V_2 \setminus V_1$ mit $f(x) \neq b_1$

$f(x) \in \mathbb{C}\setminus\{b_1\} \subseteq f(U\cap V_1)$

$\Rightarrow \exists y \in V_1$: $f(x) = f(y)$

& $x \neq y$

(ii) $f: \underset{\overline{\mathbb{C}}\setminus\{\infty\}}{\overset{\|}{\mathbb{C}}} \to \mathbb{C}$ ganz, injektiv

Singularität in ∞ hat den gleichen Typ wie die Singularität von $f\circ i : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ in 0.

- $f\circ i$ wesentliche Sing in 0

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $f\circ i$ nicht injektiv $\Rightarrow$ $\overset{f\circ i\circ i}{\overset{\|}{f}}$ nicht injektiv

$\Rightarrow$ ↯

$\Rightarrow$ • $f\circ i$ hat außerwesentliche Sing in 0

$\Rightarrow f$ —" ——— ∞

$\overset{(6.14)}{\Longrightarrow}$ f Polynom.

$\deg f \geq 2 \implies f$ ist nicht injektiv

(Fundamentalsatz der Algebra)

(iii) $f : \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}$ biholomorph

($\Rightarrow$ ganz & injektiv)

$\overset{(ii)}{\implies} f(z) = az + b \quad , \quad a, b \in \mathbb{C} \quad , \quad a \neq 0$

$\implies f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$

$\implies \mathcal{U} = \mathbb{C}$