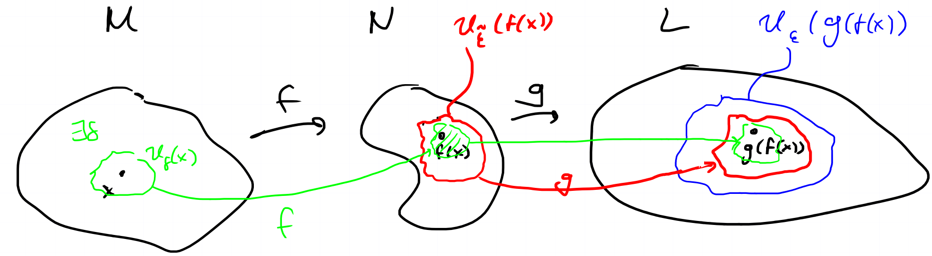
Analysis 1 Tutorium 7

18.12.2020

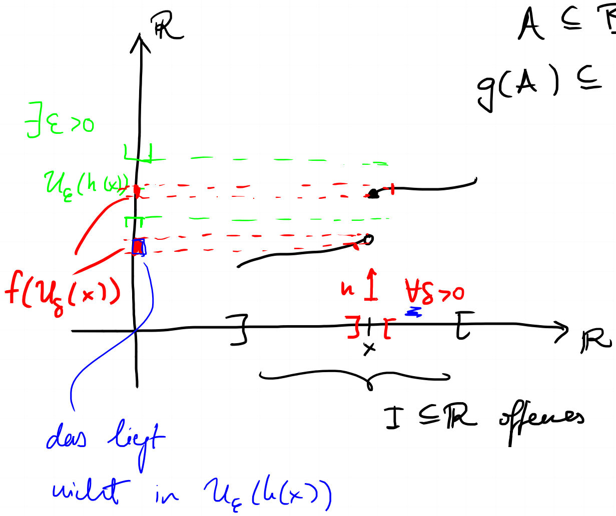
Aufgabe 1 (Komposition stetiger Funktionen)**.** Es seien $M, N, L \subseteq \mathbb{C}$ und $x \in M$. Angenommen, $f : M \to N$ ist stetig in x und $g : N \to L$ ist stetig in $f(x)$.

Zeige: $g \circ f : M \to L$ ist stetig in x. Verwende hierbei die ε-δ-Definition der Stetigkeit in einem Punkt.



$A \subseteq B$

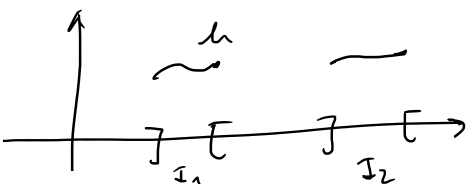
$g(A) \subseteq g(B)$



$I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall

$h : I \longrightarrow \mathbb{R}$

nicht stetig bei x



← ist stetig

$$f: M \xrightarrow{\subseteq \mathbb{C}} N$$
$$x \in M$$

f ist stetig in $x \in M$

$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in U_\delta(x) \cap M :$
$$f(y) \in U_\varepsilon(f(x))$$

g ist stetig in $f(x) \in N$

$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in U_\delta(f(x)) \cap N :$
$$g(y) \in U_\varepsilon(g(f(x)))$$

Wir wollen zeigen:

$g \circ f$ ist stetig in x:

$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in U_\delta(x) :$
$$g \circ f(y) \in U_\varepsilon(g \circ f(x)).$$

<u>Beweis:</u>

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen Stetigkeit von g bei $f(x)$ gibt es $\tilde{\varepsilon} > 0$ mit
$$g(U_{\tilde{\varepsilon}}(f(x)) \cap N) \subseteq U_\varepsilon(gf(x)).$$

Stetigkeit von f bei x

$\Longrightarrow$ Es gibt $\delta > 0$ mit
$$f(U_\delta(x) \cap M) \subseteq U_{\tilde{\varepsilon}}(f(x))$$

Dann folgt:
$$g(f(U_\delta(x) \cap M)) \subseteq g(U_{\tilde{\varepsilon}}(f(x)) \cap N)$$
$$\subseteq U_\varepsilon(g(f(x))). \qquad \square$$

Aufgabe 2 (Pasting lemma)**.** Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ offen. Setze $X := A \cup B$. Angenommen, $f : X \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion, sodass $f|_A : A \to \mathbb{R}$ und $f|_B : B \to \mathbb{R}$ stetig sind.
Zeige: f ist stetig.

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : f(\mathcal{U}_\delta(x) \cap X) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f(x)).$$

Sei $x \in X$ & $\varepsilon > 0$. Fallunterscheidung:

1. Fall: $x \in A$. (2. Fall: $x \in B$ geht analog)

Stetigkeit von $f|_A$

$\Rightarrow$ Es gibt $\delta_1 > 0$ mit $\underbrace{f|_A(\mathcal{U}_{\delta_1}(x) \cap A)}_{= f(\mathcal{U}_{\delta_1}(x) \cap A)} \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f(x))$

A ist offen $\underset{x \in A}{\Longrightarrow}$ Es gibt $\delta_2 > 0$ mit $\mathcal{U}_{\delta_2}(x) \subseteq A$.

Setze:
$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0.$

Dann:

$$\underbrace{f(\underbrace{\mathcal{U}_\delta(x)}_{\subseteq \mathcal{U}_{\delta_2}(x) \subseteq A} \cap X)}_{= \mathcal{U}_\delta(x) \cap A} = f(\underbrace{\mathcal{U}_\delta(x)}_{\subseteq A \cap \mathcal{U}_{\delta_1}(x)}) \subseteq f(\mathcal{U}_{\delta_1}(x) \cap A) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f(x)).$$

$\Rightarrow f$ ist stetig. $\square$

Alternativ: z.z.: Urbilder offener Mengen sind offen.

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen.

$$f^{-1}(\mathcal{U}) \underset{X = A \cup B}{\overset{\uparrow}{=}} (f^{-1}(\mathcal{U}) \cap A) \cup (f^{-1}(\mathcal{U}) \cap B)$$

$$= \underbrace{f|_A^{-1}(\mathcal{U})}_{\text{offen in } A} \cup \underbrace{f|_B^{-1}(\mathcal{U})}_{\text{offen in } B}$$

$$= (\mathcal{U}_A \cap A) \cup (\mathcal{U}_B \cap B)$$

$\mathcal{U}_M \subseteq \mathbb{R}$ offen : $f|_M^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_M \cap M$

$M \in \{A, B\}$

offen in $\mathbb{R}$ als endliches Schnitt von offenen Mengen in $\mathbb{R}$

& Vereinigung offener Mengen ist offen.

Aufgabe 3 (Pathologisches Beispiel). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q}, \text{ wobei } p \text{ und } q \text{ teilerfremd sind,} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

vollständig gekürzt

$p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

Zeige:

(1) f ist periodisch: $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{Z} : f(x+n) = f(x)$.

(2) f ist stetig in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, aber unstetig in allen $x \in \mathbb{Q}$.

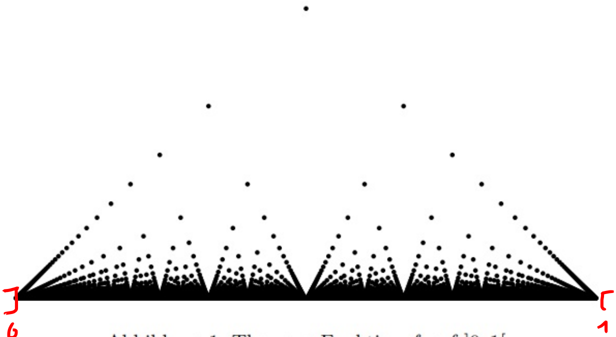


Abbildung 1: Thomaes Funktion f auf $]0,1[$

(1) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Longrightarrow x + n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$n \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Unterring

$\Rightarrow f(x+n) = 0 = f(x)$.

$x = 0$: $f(x) = 1 = \frac{1}{1} = f(1) = f(x+1)$.

$x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\underbrace{(p,q)}_{=\gcd(p,q)} = 1$

$$x + n = \frac{p}{q} + n = \frac{p+nq}{q}$$

Warum $(p+nq, q) = 1$

[Ganz allgemein:
$(b,a) = (a, b) = (a - sb, b) \quad \forall \underset{\hat{}\,\mathbb{Z}}{s}$.]

Angenommen, $\underset{\hat{}\,\mathbb{Z}}{d} \mid \underbrace{p+nq}_{p+nq \,=\, sd,\; s\in\mathbb{Z}}$ & $\underbrace{d \mid q}_{q = rd,\; r\in\mathbb{Z}}$

$$p = sd - nq = sd - nrd$$
$$= d(s - nr) \Rightarrow d \mid p$$
$$\Rightarrow d \mid (p,q) = 1 \Rightarrow d \in \{\pm 1\}.$$
$$\Rightarrow (p+nq, q) = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{p+nq}{q}\right) = \frac{1}{q} = f\left(\frac{p}{q}\right).$$

(2) Unstetigkeit in $x \in \mathbb{Q}$.

$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists y \in \mathbb{R}: \; |x - y| < \delta$
$\wedge \; |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$

$\varepsilon = f(\underset{\hat{}\,\frac{p}{q}}{x}) = \frac{1}{q} > 0.$ Sei $\delta > 0$.

[Behaupt (?): $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \delta > 0: \ \mathcal{U}_\delta(x) \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \neq \emptyset$]

Wir finden $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $y \in \mathcal{U}_\delta(x)$.

Dann: $|\underbrace{f(y)}_{=0} - f(x)| = |f(x)| \geq \varepsilon$.

Stetigkeit in $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $\quad \mathbb{Q} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$I_n \subseteq \mathbb{R} \qquad x_n \notin I_n$

$\varepsilon > 0, \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\mathcal{U}_\delta(x) \qquad \underbrace{\Longleftarrow\ n \leq q}$

$\forall \frac{p}{q} \in \mathcal{U}_\delta(x): \quad \frac{1}{q} \leq \frac{1}{n}$

(OBdA $x \in]0,1[$ (wegen Periodizität))

Sei $\varepsilon > 0$, Arch.-Axiom $\overset{\exists n \in \mathbb{N}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{n} < \varepsilon$

Setze $h_i := \lfloor ix \rfloor \qquad i = 1, \dots, n$

$\rightsquigarrow h_i \leq ix \leq h_i + 1$

$\Longleftrightarrow \frac{h_i}{i} \leq x \leq \frac{h_i + 1}{i}$

Setze $\delta := \min\left\{ \min\left\{ \left|x - \frac{h_i}{i}\right|, \left|x - \frac{h_i+1}{i}\right| \right\} \,\middle|\, i = 1, \dots, n \right\}$

$x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow \delta > 0.$

Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $y \in U_\delta(x)$.

Falls $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, so $|\underbrace{f(x)}_{=0} - \underbrace{f(y)}_{=0}| = 0 < \varepsilon$.

Sei also $y \in \mathbb{Q}$, schreibe $y = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$.

Dann: $|f(y) - \underbrace{f(x)}_{=0}| = |f(y)| = \frac{1}{q} \overset{!}{\le} \frac{1}{n} < \varepsilon$

Angenommen, $\frac{1}{q} > \frac{1}{n}$, d.h. $n > q$

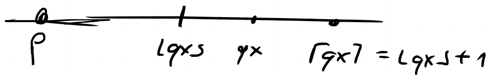
$$\rightsquigarrow \frac{k_q}{q} \le x \le \frac{k_q + 1}{q}$$

$$\min\left\{\left|x - \frac{k_q}{q}\right|, \left|x - \frac{k_q+1}{q}\right|\right\} \overset{!}{\le} |x - y| = \left|x - \frac{p}{q}\right|$$

$\rightarrow \ge \delta$

$$\Leftrightarrow$$

$$\min\{|qx - \lfloor qx \rfloor|, |qx - \lfloor qx \rfloor + 1|\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition} \\ \text{von } \lfloor \cdot \rfloor}}{\le} |qx - \underset{\in \mathbb{Z}}{p}|$$



$\Rightarrow y \notin U_\delta(x)$, Widerspruch,

also folgt $n \le q$, wie gewünscht.

Aufgabe 4 (Leibniz-Kriterium, Gegenbeispiel zur Umordnung von Reihen). (a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_0^+)^{\mathbb{N}}$ eine nichtnegative, monoton fallende Folge reeller Zahlen mit $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$.

$$\begin{gathered} \| \\ a_1 - a_2 + a_3 + \dots \end{gathered}$$

Beweis: Schreibe $S_m := \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n+1} a_n$.

(Partialsummen)

1. Schritt: $(S_{2m-1})_{m\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend

& $(S_{2m})_{m\in\mathbb{N}}$ ist — " — steigend.

Denn: $S_{2m+1} - S_{2m-1} = \sum_{n=1}^{2m+1} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n+1} a_n$

$$= \sum_{n=2m}^{2m+1} (-1)^{n+1} a_n = -a_{2m} + a_{2m+1}$$

$$\leq 0$$

$(a_n)_n$ monoton fallend: $a_{2m+1} \leq a_{2m}$

& analog für $(S_{2m})_{m\in\mathbb{N}}$.

2. Schritt: $(S_{2m-1})_m$ ist nach unten beschränkt

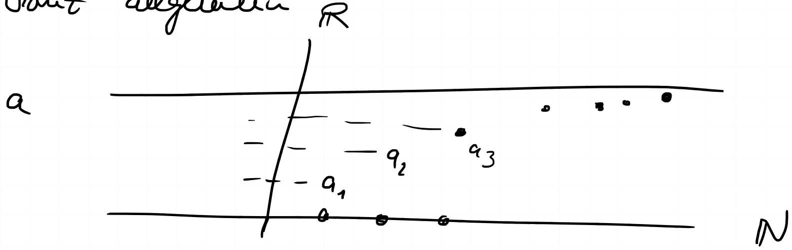
$(S_{2m})_m$ ist — " — oben — " —

$$-(S_{2m-1} + S_{2m}) = (-1)^{2m+1} a_{2m} - a_{2m} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad S_{2m-1} \geq S_{2m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotonie}}}{\geq} S_2$$

& analog für $(S_{2m})_m$.

Ganz allgemein



$(a_n)_n$ monoton & beschränkt $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ konvergiert

Also:
$$S_{2m} \xrightarrow{m \to \infty} S,$$
$$S_{2m-1} \xrightarrow{m \to \infty} \tilde{S}.$$

$$S - \tilde{S} = \lim_{m \to \infty} S_{2m} - \lim_{m \to \infty} S_{2m-1}$$

$$\overset{\text{GWS}}{=} \lim_m (S_{2m} - S_{2m-1})$$

$$= \lim_m \left((-1)^{2m+1} \underset{\substack{\uparrow \\ a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0}}{a_{2m}}\right) = 0.$$

Jetzt zeigen noch: $S_n \xrightarrow{n\to\infty} S = \tilde{S}$.

(Übungsaufgabe)