Analysis Tutorium 5
23.11.2022

Riemann- vs. Lebesgue-Integral im nichtnegativen Fall

(Für den integrierbaren Fall, siehe Übungsblatt 5 oder Forster §5)

Sei $f: [0,\infty[\to [0,\infty[$ messbar und Riemann-integrierbar auf $[0,n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

Lebesgue-Maß

Riemann-Integral

$$\int_{[0,\infty[} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\,dx$$

Vorlesung

monotone Konvergenz: $1_{[0,n]} f \xrightarrow[n\to\infty]{\nearrow} f$

$$= \lim_{n\to\infty} \int 1_{[0,n]} \cdot f \, d\lambda =$$

Aufgabe 1 (Vertauschen von Integral und Grenzwert). Entscheiden Sie jeweils mit Begründung, ob die folgenden Grenzwerte in $\overline{\mathbb{R}}$ existieren und falls ja, berechnen Sie sie.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^{3n}}}\,dx$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{x^n}{1+x^{n+1}} e^{-\frac{x}{n}}\,dx$.

a) $$\frac{x}{\sqrt[n]{1+x^{3n}}} \le \frac{x}{\sqrt[n]{x^{3n}}} = x^{1-\frac{3n}{n}} = x^{-2}$$

$$\& \int_{[1,\infty[} x^{-2}\,dx \underset{\text{s.o.}}{=} \int_1^\infty x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^\infty = 1$$

für $x \le 1$: $$\frac{x}{\sqrt[n]{1+x^{3n}}} \le 1 \quad \& \quad \int_{[0,1[} 1\,dx = 1$$

$\Rightarrow \quad x \mapsto 1_{[0,1[}(x) + x^{-2}\, 1_{[1,\infty[}(x)$ ist eine integrierbare Majorante.

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^{3n}}}\,dx \overset{\uparrow}{=} \int_{[0,\infty[} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^{3n}}}}\,dx$$

dominierte Konvergenz

dazu: für $x \leq 1$:

$$\sqrt[n]{1+x^{3n}} \leq \sqrt[n]{2} \xrightarrow{n} 1.$$

für $x \geq 1$:

$$\sqrt[n]{1+x^{3n}} \sim \sqrt[n]{x^{3n}} = x^3$$

s.o.

$$\frac{3}{2} = \underbrace{\int_0^1 x\,dx}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_1^\infty x^{-2}\,dx}_{=1}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{x^n}{1+x^{n+1}} e^{-\frac{x}{n}}\,dx.$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} \frac{x^n}{1+x^{n+1}} e^{-x/n}\,dx \geq \liminf_n \int_{[1,\infty[} \cdots\,dx$$

$$\overset{\uparrow}{\geq} \int_{[1,\infty[} \liminf_n \underbrace{\frac{x^n}{1+x^{n+1}}}\, \overbrace{e^{-\frac{x}{n}}}^{\xrightarrow{n\to\infty} 1}\,dx$$

Fatou-Lemma

$$= \frac{1}{\frac{1}{x^n}+x} \xrightarrow{n} \frac{1}{x}$$

$$= \int_{[1,\infty[} \frac{1}{x}\,dx \overset{\uparrow}{=} \infty$$

harmonische Reihe

Aufgabe 2 (Monotone Konvergenz für fallende Funktionenfolgen). Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer, $\mathfrak{A}$-messbarer Funktionen mit $f_j \searrow f$ f.ü.

(a) Zeigen Sie, dass die Aussage

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \, d\mu = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} f_j \, d\mu$$

im Allgemeinen falsch ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage in (a) wahr ist, wenn man zusätzlich $\int_\Omega f_1 \, d\mu < \infty$ annimmt.

a) $f_j := 1_{[j,\infty[} \underset{j\to\infty}{\searrow} 0$, aber

$$\lim_j \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_j \, d\lambda}_{=\infty} = \infty \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\lim_j f_j}_{=0} \, d\lambda$$

b) $g_j := f_1 - \underbrace{f_j}_{\searrow} \underset{j}{\nearrow} f_1 - f$

$\xRightarrow{\text{monotone Konvergenz}}$ $\displaystyle\lim_j \int_\Omega g_j \, d\mu = \int_\Omega (f_1 - f) \, d\mu = \underbrace{\int_\Omega f_1 \, d\mu}_{<\infty} - \int_\Omega f \, d\mu$

$$\lim_j \int_\Omega g_j \, d\mu = \underbrace{\int_\Omega f_1 \, d\mu}_{<\infty} - \lim_j \int f_j \, d\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_j \int f_j \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

Aufgabe 3 (Es gibt keine Variante des Lemmas von Fatou für limsup)**.** Finden Sie jeweils eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer, messbarer Funktionen mit

(a) $\int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} g_n \, d\lambda < \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda$,

(b) $\int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} g_n \, d\lambda > \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda$.

Hinweis: Vgl. Bsp. für $\liminf_n$ aus der Vorlesung

Hinweis: Betrachten Sie für die zweite Aussage $g_n := \mathbb{1}_{[0,1]}$, falls n gerade und $g_n := \mathbb{1}_{[1,2]}$, falls n ungerade.

a) $g_n := 1_{[n,n+1[} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ punktweise

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\limsup_n g_n}_{=0} \, d\lambda = 0 < 1 = \limsup_n \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda}_{= \lambda([n,n+1[) = 1}$$

b) $g_n := \begin{cases} 1_{[0,1]} & \text{f. } 2 \mid n \\ 1_{[1,2]} & \text{f. } 2 \nmid n \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \limsup_n g_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2]} \, d\lambda = 2$$

$$\vee$$

$$\limsup_n \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda}_{=1} = 1$$

Aufgabe 4 (Approximationseigenschaften des μ-Integrals)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und f eine nichtnegative, $\mathfrak{A}$-messbare Funktion mit $\int_\Omega f \, d\mu < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und

$$\int_A f \, d\mu > \int_\Omega f \, d\mu - \varepsilon.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $E_n := \{f < n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) \le \delta$ gilt $\int_A f \, d\mu \le \varepsilon$.

a) haben wir letztes Mal gemacht! :)

b) Sei $\varepsilon > 0$. Angenommen (Widerspruchsbeweis!) $\forall \delta > 0\ \exists A \in \mathcal{A}: \mu(A) \leq \delta$ & $\int_A f \, d\mu > \varepsilon$

Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $A_n \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) < \frac{1}{n}$, und $\int_{A_n} f \, d\mu > \varepsilon$. O.E. $A_{n+1} \subset A_n$ $\forall n$. (Sonst betrachte $\tilde{A}_n = \bigcap_{m \leq n} A_m$ stattdessen)

$$\Longrightarrow \quad \varepsilon < \lim_n \int_{A_n} f \, d\mu \underset{\substack{\text{z.B. Aufgabe 2b)} \\ \text{oder dom. Konv. mit} \\ \text{Majorante } f}}{=} \int_\Omega \lim_n 1_{A_n} f \, d\mu = \int_{\bigcap_{n=1}^\infty A_n} f \, d\mu \overset{\substack{\text{Integrale sehen} \\ \text{Nullmengen nicht}}}{=} 0$$

$$\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \underset{\sigma\text{-Stetigkeit}}{=} \lim_n \mu(A_n) \leq \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

$\lightning$

Bonusaufgaben

B1: Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Berechne

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^1 k \log\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{k^2}\right) dx \quad = 0$$

Hinweis: Zeige $\forall t \geq 0: \log(1+t) \leq 2\sqrt{t}$

$$\& \quad k \log\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{k^2}\right) = \frac{1}{k} \log\left(\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{k^2}\right)^{k^2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{k} \log\left(\exp |f(x)|^2\right)$$

$$= \frac{1}{k} |f(x)|^2 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

B2: Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeige:

a) $x \mapsto x^k f(x)$ ist integrierbar & $\lim_k \int_{[0,1]} x^k f(x) dx = 0$

b) Falls f stetig differenzierbar, so folgt:

$$\lim_{k \to \infty} k \int_{[0,1]} x^k f(x) \, dx = f(1)$$

zu a): Dominierte Konvergenz. $(x \leq 1)$

zu b): Partielle Integration:

$$k \int_0^1 x^k f(x)\,dx = \underbrace{\left[\frac{k}{k+1} x^{k+1} f(x) \right]_0^1}_{= \frac{k}{k+1} f(1) \xrightarrow[k]{} f(1)} - \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\xrightarrow{k} 1} \underbrace{\int_0^1 x^{k+1} f'(x)\,dx}_{\xrightarrow{k} 0,\ s.(a)}$$

$$\xrightarrow[k \to \infty]{} f(1)$$