Lineare Algebra 2, Tutorium 5

12.5.2021

Warm-Up

Richtig oder Falsch?

1. Ist $S \in Sym_n(\mathbb{R})$, so ist $\mu(S)$ der einzige Eigenwert von S. ✗
2. Ist $S \in Sym_n(\mathbb{R})$, so ist $\mu(S)$ der kleinste Eigenwert von S. ✓
3. Ist S symmetrisch und T eine orthogonale Matrix, so ist T^tST eine Diagonalmatrix. ✗
4. Es gibt keine symmetrische, orthogonale Matrix.
5. Sei $\Phi_{S,a,\alpha}$ eine Quadrik für eine symmetrische Matrix $S \in M_2(\mathbb{R})$ mit Normalform $\underbrace{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2}_{\geq 0} + \overset{\geq 0}{\beta} = 0$. Dann beschreibt $\Phi_{S,a,\alpha}$ entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel. ?

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = S$

3. $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht diagonal

$S = T^t S T$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\underset{1}{\lambda_1} > 0, \quad \underset{-1}{\lambda_2} < 0, \quad \beta = 0$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \beta = x_1^2 + x_2^2$$
$$= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_1 - x_2 = 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \right\}.$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cup \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aufgabe 1 $A \in M_n(\mathbb{R})$ positiv definit

d.h. $\forall x \in \mathbb{R}: x^T A x > 0$

zz: $Tr(A) > 0$.

Beweis: $\beta: (x, y) \longmapsto x^T A y$

β positiv definit $\quad \forall x: \beta(x,x) > 0$

A ist die Strukturmatrix von β bzgl. Std.basis:

$$\beta(e_i, e_j) = \boxed{e_i^T A e_j \stackrel{!}{=} A_{ij}} \qquad (0,\dots,1,\dots,0)\begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{nj} \end{pmatrix}$$

$$e_i^T (A e_j)_{r=1,\dots,n} = e_i^T \left(\sum_{k=1}^{n} A_{rk} \delta_{kj} \right)_r = e_i^T (A_{rj})_r$$

$$= A_{ij}$$

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{e_i^T A e_i}_{>0} > 0. \quad \square$$

$$\mathrm{Tr}(B^{-1} A B) = \mathrm{Tr}(A)$$

$$\mathrm{Tr}(B^T A B) \stackrel{?}{=} \mathrm{Tr}(A)$$

Aufgabe 2

Aufgabe 2

Sei A eine obere Dreiecksmatrix in $M_n(\mathbb{R})$. Zeige: Ist A orthogonal, so ist A eine Diagonalmatrix und die Diagonaleinträge von A haben Betrag 1.

Wir zeigen: $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ mit $|\alpha| = 1$.

(Und dann folgt: B ist orthogonal & obere Dreiecksmatrix $\stackrel{IV}{\Longrightarrow}$ B diagonal mit Einträgen vom Betrag 1)

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \ddots & \\ & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^2 = 1$$

$$A A^T = E_n \qquad A = (A_{ij})_{i,j}$$

obere Dreiecksmatrix $\rightsquigarrow \forall i > j: \; A_{ij} = 0$

$$\sum_{k=\max\{i,j\}}^{n} A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij}$$

$$i = j = n: \quad A_{nn}^2 = \delta_{nn} = 1$$

$$A^T A = E_n: \quad \sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij}$$

$i = j = n$: $\cancel{1} = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{A_{kn}^2}_{\geq 0} + \underbrace{A_{nn}^2}_{= \cancel{1}}$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{n-1,n} \end{matrix} \\ \hline 0 & A_{nn} \end{array} \right) \Rightarrow A_{ln} = 0$$

$$0 = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{A_{kn}^2}_{\geq 0} \Rightarrow A_{ln}^2 = 0$$

$a + b = 0$

$\& \; a \geq 0 \quad b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = 0$

Aufgabe 4

$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Seien V, W $\mathbb{R}$-Vektorräume mit innerem Produkt $(-,-)$.

1. Es sei $A : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $\|Av\|_W = \|v\|_V$ für alle $v \in V$. Zeige, dass A innere Produkte erhält, dass also $(Av, Av')_W = (v, v')_V$ für alle $v, v' \in V$ ist.
2. Es sei $f : V \to W$ eine Abbildung, die innere Produkte erhält, also $(f(v), f(v'))_W = (v, v')_V$ für alle $v, v' \in V$. Zeige, dass dann f linear ist.

$\cap \; \mathbb{R} \qquad \cap \; \mathbb{R}$

2. $(f(\lambda v), f(v')) = (\lambda v, v') = \lambda (v, v')$

$f(v+w) \qquad v+w \qquad (v, v') + (w, v')$

$= \lambda (f(v), f(v'))$

$(f(v), f(v')) + (f(w), f(v'))$

$= (f(v) + f(w), f(v'))$

$= (\lambda f(v), f(v'))$

$f(v+w) = f(v) + f(w)$

$\Rightarrow (f(\lambda v) - \lambda f(v), f(v')) = 0$

$x := f(v+w) - f(v) - f(w) \qquad \mathrm{Im}\, f$

$\underbrace{\underbrace{f(\lambda v)}_{\in \mathrm{Im} f} - \lambda \underbrace{f(v)}_{\mathrm{Im} f}}_{\in \langle \mathrm{Im} f \rangle} \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp = (\langle \mathrm{Im}\, f \rangle_{\mathbb{R}\text{-lineare Hülle}})^\perp$

$\langle \mathrm{Im}\, f \rangle$

x

$\Rightarrow f(\lambda v) - \lambda f(v) \in \langle \mathrm{Im}\, f \rangle \cap \langle \mathrm{Im}\, f \rangle^\perp = 0$

$\Rightarrow f(\lambda v) = \lambda f(v)$ da $(-,-)$ Skalarprodukt

$$\| f(\lambda v + w) - \lambda f(v) - f(w) \|^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\phi = (-,-) \quad , \quad q_\phi = \|-\|^2$$

$$q_\phi(x) = \phi(x,x)$$

$$\underbrace{\phi(x+y, x+y)}^{q_\phi(x+y)} = \phi(x,x) + 2\phi(x,y) + \phi(y,y)$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q_\phi(x+y) - q_\phi(x) - q_\phi(y) \right)$$

$$(x,y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right)$$

$$\|Ax\| = \|x\|$$

$$\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\|Ax + Ay\|^2}_{= \|\cancel{A}(x+y)\|^2} - \|\cancel{A}x\|^2 - \|\cancel{A}y\|^2 \Big) = (Ax, Ay) \overset{!}{=} (x,y)$$

$$= (x,y)$$

<u>Aufgabe 3</u> $V = \{ ax + b \mid a, b \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}[x]$ Polynomring

Skalarprodukt $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f, g \longmapsto (f,g) = \int_0^1 f(x) g(x) \, dx$$

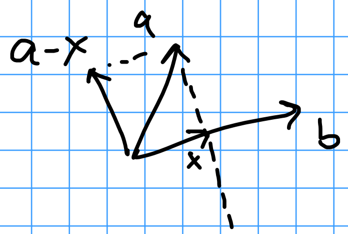
lineare Abbildung $\partial : V \longrightarrow V$

$$ax + b \longmapsto a$$

1. Orthonormalbasis bestimmen:

Allgemein: $v_1, \dots, v_n$ eine Basis für V

$$u_1 = v_1 \quad \rightsquigarrow \quad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$



$x =$ orth. Proj. von a auf $\langle b \rangle$

$$x = \frac{\langle a, b\rangle}{\langle b, b\rangle} b = \left\langle a, \frac{b}{\|b\|} \right\rangle \cdot \frac{b}{\|b\|}$$

$$a - x \perp b$$

$$\rightsquigarrow e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \Rightarrow u_2 \perp u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle u_2, v_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \frac{\langle u_1, v_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$\vdots$

$u_1, \dots, u_n$ orthogonal $\rightsquigarrow$ $e_1, \dots, e_n$ ONB.

$$V = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \langle 1, x \rangle_{\mathbb{R}\text{-span}}$$

Orthogonalisiere

- $1 = u_1$
- $u_2 = x - \frac{(1,x)}{(1,1)} \cdot 1$ $\qquad (1,x) = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$

$= x - \frac{1}{2}$ $\qquad (1,1) = \int_0^1 1 \cdot 1 \, dx = 1$

Normalisiere: $e_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{(1,1)}} = 1.$

$$\|u_2\|^2 = (u_2, u_2) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{12}$$

$\|u_2\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. $\qquad e_2 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right).$

Darstellende Matrix A von $\partial : V \longrightarrow V$

bzgl. e_1, e_2:

$$\partial(e_1) = \partial(1) = 0 = 0 \cdot e_1 + 0 e_2$$
$$\partial(e_2) = \partial\left(2\sqrt{3}\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\right) = 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot e_1 + 0 e_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{\partial} : V \longrightarrow V$ hat die darstellende Matrix

bzgl. e_1, e_2

$$\hat{A} = B^{-1} A^T B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Strukturmatrix von $(-,-)$

bzgl. e_1, e_2

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (da e_1, e_2 ONB)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht symm.

schiefsymm.

nicht orthogonal

$(\det A = 0)$

$A^T = -A$

Nachtrag zu symmetrischen / schiefsymm. / orthogonalen Homomorphismen:

Sei $\varphi: V \to V$ ein Endomorphismus auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt.
Dann kann man φ symmetrisch / ... nennen, wenn die darstellende Matrix von φ bezüglich irgendeiner ONB symmetrisch / ... ist.

Grund: Seien $v_1, \dots, v_n$ & $w_1, \dots, w_n$ zwei (verschiedene) Orthonormalbasen

$\Rightarrow$ Die Matrizen $A = \left(v_1, \dots, v_n\right)$ & $B = \left(w_1, \dots, w_n\right)$ sind orthogonale Matrizen.

$$(A^T A = id, \quad B^T B = id)$$

Die Basiswechselmatrix $v_1, \dots, v_n \rightsquigarrow w_1, \dots, w_n$ ist gegeben durch $S = B^{-1} A = B^T A$

Es habe φ die darstellende Matrix M bzgl. $v_1, \dots, v_n$.

Dann: M symmetrisch $\Rightarrow M^T = M$

$$\Rightarrow (\underbrace{S M S^{-1}}_{\text{darst. Matrix von } \varphi \text{ in Basis } w_1, \dots, w_n})^T = (S M S^T)^T = S^{T^T} M^T S^T = S M S^{-1}$$

$$\left[\begin{aligned} S^T S &= (B^T A)^T (B^T A) = A^T B^{T^T} B^T A = A^T B^T B A \\ &= A^T A = id \\ &\Rightarrow S^T = S^{-1} \end{aligned} \right]$$

$\Rightarrow S M S^{-1}$ ist auch symmetrisch!

Also ist "φ symmetrisch" wohldefiniert, lässt sich aber nur auf Orthonormalbasen nachprüfen!
(Das Gleiche gilt für schiefsymmetrisch, orthogonal, ...)