Analysis Tutorium 14

8.2.2023

Wiederholungs-Quiz

Gelten die folgenden Aussagen? Begründe deine Behauptung!

#	Aussage	Ja	Nein	Begründung
1	Sei $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt für Lebesgue fast alle $x\in[0,1]$: $f(x)\le \operatorname{ess\,sup}_{y\in[0,x]}\lvert f(y)\rvert$ — daher folgt es nicht sofort per Def.!	X		$\lvert f(x)\rvert = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{[x-\frac{1}{n},x]}\lvert f(y)\rvert\,dy$ (Variante von Lebesgue Differentiationssatz (f.ü. =)) $\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{[x-\frac{1}{n},x]}\operatorname{ess\,sup}_{y\in[0,x]}\lvert f(y)\rvert\,dy$. □
2	Für f wie eben ist die Abbildung $]0,1[\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto\int_{[0,x]}f(y)\,dy$ f.ü. differenzierbar	X		Ebenfalls nach Lebesgue: $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\int_0^{x+h}f(y)\,dy-\int_0^{x}f(y)\,dy\right)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(y)\,dy=f(x)$ f.ü. □
3	Die Menge der Lebesgue-messbaren Mengen im $\mathbb{R}^N$ ist eine σ-Algebra.	X		Es ist die Vervollständigung der Borelschen σ-Algebra.
4	Wenn $\lambda^*(N)=0$ für $N\subseteq\mathbb{R}^N$, dann ist N Lebesgue-messbar	X		Aus Vorlesung bekannt.
5	Eine nichtleere offene Menge im $\mathbb{R}^N$ hat positives Maß.	X		Das ist klar! (So eine Menge enthält Bälle)
6	Die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist Riemann-integrierbar.		X	Alle Ober- und Untersummen unterscheiden sich um 1.
7	Angenommen, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sind nicht integrierbar. Dann ist $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nicht integrierbar.		X	Nein, z.B. für $g=-f$ ist $f+g=0$ integrierbar.
8	Überabzählbare Mengen haben positives Maß.		X	Cantormenge.
13	Sei $E\subseteq\mathbb{R}$ Lebesgue messbar. Dann ist $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto\lvert[0,x]\cap E\rvert$ messbar.	X		Sogar stetig: Für $y\ge x$ ist $f(y)-f(x)=\lvert[x,y]\cap E\rvert\le\lvert[x,y]\rvert=y-x$. □
9	Die Menge der Maße auf einem messbaren Raum bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.		X	Klar.
10	Es gibt eine Lebesgue-messbare Menge $E\subseteq\mathbb{R}$ mit $\lvert E\rvert=\infty$, auf der die Funktionenfolge $(\mathbb{1}_{[n,n+1]})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.	X		Klar, z.B. $E=\mathbb{R}_{<0}$.

#		Ja	Nein	Begründung
11	Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ messbar. Für alle Kurven (d.h. 1-dimensionale Umfght) $C \subseteq \mathbb{R}^2$ sei $A \cap C$ abzählbar. Dann gilt: $\lvert A \rvert = 0$.	X		Sei $g_x = (x,0) + (0,1)\cdot\mathbb{R}$. Dann: $\lvert A\rvert = \int_{\mathbb{R}^2} 1\!\!1_A = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\lvert A \cap g_x \rvert}_{=0} dx = 0$. ↑ Cavalieri
12	Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge messbarer Funktionen. Dann gilt: $\{\omega \in \Omega \mid (f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\} \in \mathcal{A}$	X		Diese Menge kann man schreiben als $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq m} \bigcap_{l \geq m} \{\omega \mid \lvert f_k(\omega) - f_l(\omega)\rvert < \frac{1}{n}\}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k,l \geq m$ "$\frac{1}{n}$"
14	Seien $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ Borel- und $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ Lebesgue-messbare Funktionen. Dann ist $f \circ g$ Lebesgue-messbar. d.h. Urbilder von Borel-Mengen sind Lebesgue	X		$\forall$ Borel B: $(f \circ g)^{-1}(B) = \overbrace{g^{-1}\underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{Borel}}}^{\text{Lebesgue}}$
15	Im gleichen Setting ist $g \circ f$ Lebesgue-messbar.		X	$N = 1$, $\tilde{f} : [0,1] \xrightarrow{\cong} C \subseteq [0,1]$. $f = \tilde{f}\, 1\!\!1_{[0,1]}$. Sei $X \subseteq [0,1]$ nicht Lebesgue-messbar. $g = 1\!\!1_{f(X)}$. Dann f Borel-mb., g Leb.-m.b., da $\lvert f(X) \rvert = 0$. Aber $g \circ f = 1\!\!1_X$ ist nicht Lebesgue-m.b.
16	Auf jedem nichtleeren messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ existieren zwei verschiedene Maße.	X		Ja, $\mu, \mu' : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\mu(A) = \lvert A \rvert$, $\mu'(A) = 0$.
17	Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) = 1$, und seien $A_1, \dots, A_7 \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_i) \geq \frac{1}{2}$ $\forall i$. Dann gibt es $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 7$ mit $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \neq \emptyset$.	X		Klar! Die Fragestellung soll nur kompliziert aussehen.
18	$L^2(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$.		X	$\frac{1}{x} 1\!\!1_{[1,\infty[}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ $\notin L^1(\mathbb{R})$
19	Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt: $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$ existiert $\Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}: \int_{[-r,r]} f\, d\lambda$ existiert.		X	$f \equiv 1$.
20	Sei $A \subseteq [0,1]$ Lebesgue messbar mit $\mu(A) > 0$. Dann gibt es $x, y \in A$ mit $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.	X		Trick: $\forall y \in A: E_y := \{x \in A \mid xy \in \mathbb{Q}\}$ $\lvert E_y \rvert \leq \lvert \{qy \mid q \in \mathbb{Q}\} \rvert = 0$ ($\uparrow$ σ-Add.) Wäre $A = \bigcap_y E_y$, so gälte $\lvert A \rvert = 0$. $\Longrightarrow \exists x \in A: \exists y: \underbrace{x \notin E_y}_{\Leftrightarrow\, xy \notin \mathbb{Q}}$

Bonusfragen von ChatGPT

#		Ja	Nein	Begründung
21	Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt: $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.	X		Tonelli.
22	Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ stetig differenzierbar. Dann ist die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ differenzierbar.		X	Mit der Fourier-Umkehrformel: $\underbrace{f(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}}_{\text{stetig diffbar}}$ $\underbrace{\hat{f}(x) = e^{-\lvert x\rvert}}_{\text{nicht diffbar}}$
23	Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf Ω durch $A \sim B \iff \exists\, \mu$-Nullmenge N: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq N$. Dann gilt: $\lvert \Omega / \sim \rvert < \infty$.		X	Nein, nehme z.B. das Lebesgue-Maß auf $]0,1]$ und die Partition $]0,1] = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

	Von „Counterexamples in measure and integration"			
24	Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-additiv. Angenommen, es gibt $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$. Dann ist μ ein Maß.	X		Klar: $\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$ $\Longrightarrow \mu(\emptyset) = 0$ $\mu(A) \neq \infty$
25	Es gibt eine stetige Funktion $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, sodass $f([0,1])$ Lebesgue-messbar mit $\lvert f([0,1]) \rvert > 0$ ist	X		„space filling curves" 13.14 im Buch.