Analysis 1, Tutorium 8

8.1.2021

(b) Gleichmäßige Konvergenz als Konvergenz in der Supremumsnorm-Topologie:
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für eine beschränkte Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ setzen wir

$$\|f\|_\infty := \sup_{u\in U} |f(u)|.$$

Zeige: Die Folge beschränkter Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^U)^{\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen die beschränkte Funktion $f \in \mathbb{C}^U$, wenn $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

$f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$

Konvergenz von $f_n(x)$, $x \in \mathcal{U}$

$f_n \to f$ punktweise $\qquad f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{U} : f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

$\underbrace{\forall x \in \mathcal{U} \; \forall \varepsilon > 0}_{\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in \mathcal{U}} \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall m \geq n : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Tausch dieser Quantoren liefert Definition von gleichmäßiger Konvergenz (in $x \in \mathcal{U}$)

$f_n \xrightarrow[\text{gleichm.}]{n\to\infty} f \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{= \sup_{x\in\mathcal{U}} |f_n(x) - f(x)|} = 0$

Geg.

„$\Rightarrow$": $\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \geq m \; \forall x \in \mathcal{U} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

ZZ: $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\geq m: \underbrace{\left|\, \|f_n-f\|_\infty - 0\,\right|}_{\substack{=\left|\,\|f_n-f\|_\infty\,\right| \\ = \sup\limits_x \underbrace{|f_n(x)-f(x)|}_{\geq 0}}} < \varepsilon$$

$$\underbrace{}_{\geq 0}$$

$$= \|f_n-f\|_\infty$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\geq m\ \forall x\in\mathcal{U}: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad (*)$$

$$!\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\geq m: \sup_{x\in\mathcal{U}} |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$$= \sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in\mathcal{U}\}$$

Sei $\varepsilon>0$. Sei $m\in\mathbb{N}$ so, dass $\forall n\geq m\ \forall x\in\mathcal{U}$:

$$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon/2.$$

Dann folgt für alle $n\geq m$

$$\sup\{\underbrace{|f_n(x)-f(x)|}_{<\varepsilon/2} \quad x\in\mathcal{U}\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$": analog. $\left(\forall x\in\mathcal{U}: |f_n(x)-f(x)| \leq \sup\limits_{y\in\mathcal{U}} |f_n(y)-f(y)|\right)$

(c) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$f_n : [0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto x^n,$$

stetig!

konvergiert für $n \to \infty$ punktweise, aber nicht gleichmäßig.

$$f_n(x) = x^n \quad , x \in [0,1]$$

Warum konvergiert das punktweise?

$\iff$ Warum konvergiert $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in [0,1]$?

Falls $x = 1$: $(1^n)_n = (1)_n$ konstante Folge

$0 \leq x < 1$: $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. (Z.B. weil $\sum_{n=0}^{\infty} x^n < \infty$)

Wäre $f_n \xrightarrow[\text{gleichm.}]{n\to\infty} f$ für irgendein $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

so auch $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \quad \forall x \in [0,1]$

("gleichmäßige K. $\Rightarrow$ pktw. Konv.")

$$\Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Satz aus der Vorlesung:

$g_n : M \to \mathbb{C}$ stetige Fkt

$g_n \xrightarrow{n} g$ gleichmäßig auf M

$\Rightarrow$ g stetig auf M.

f ist nicht stetig bei 1 $\Longrightarrow$ $\cancel{f_n \xrightarrow[\text{glm}]{n} f}$

Konvergiert $\left(\begin{array}{ccc} [0,1[& \xrightarrow{f_n} & [0,1[\\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right)$

gleichmäßig gegen 0?

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall x \in [0,1[\; \forall n \geq m : \; x^n < \varepsilon$?

$\exists \varepsilon > 0 \; \forall m \in \mathbb{N} \; \exists x \in [0,1[\; \exists n \geq m : \; x^n \geq \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$. $n = m$

Finde x mit $x^m \geq \frac{1}{2}$

Skizzenhaft: Die Funktion $y \mapsto y^m$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, also gilt z.B. für $x_n := 1 - \frac{1}{n} \in [0,1[$, dass $x_n^m \xrightarrow{n \to \infty} 1$.

Also gibt es ein n mit $x_n^m \geq \frac{1}{2}$

Nehme $x = x_n$.

Aufgabe 2. Beweise ohne Verwendung der Differentialrechnung:

(a) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$, für $x \to 0$, $x \in \mathbb{C}$,

(c) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, für $x \to 0$, $x \in \mathbb{C}$,

(b) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, für $x \to 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Landau Notation "O" & "o"

$$f(x) = h(x) + O(g(x)) \text{ für } x \to x_0$$

$$\Updownarrow$$

$\exists C \geq 0$ $\exists$ Umgebung U von x_0

$\forall x \in U$: $|f(x) - h(x)| \leq C|g(x)|$

$$f(x) = h(x) + o(g(x)) \quad \text{für } x \to x_0$$

$$\Updownarrow$$

$g(x) \neq 0$ nahe x_0

& $\frac{f(x) - h(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to x_0} 0$

$f(x) = o(x)$

Beispiel 5: $\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = o(1)$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x - 1} = \frac{(1 + \frac{x}{2} + o(x)) - 1}{(1 + x + o(x)) - 1} = \frac{\frac{x}{2} + o(x)}{x + o(x)} = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{(\frac{1}{2} + o(1))(1 + o(1))}{1 + o(1)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)(1 + o(1))$$

$$= \frac{1}{2} + o(1) \quad \text{für } x \to 0$$

$$1 = 1 + o(1)$$

$$\left(\frac{1}{2}+o(1)\right) = \left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\left(1+o(1)\right)^2$$

$$\left(1+o(1)\right)^2 = 1 + \underbrace{o(1)+o(1)}_{=o(1)} + \underbrace{o(1)^2}_{=o(1)}$$

$$= 1 + o(1)$$

$$\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\left(1+o(1)\right) = \frac{1}{2} + o(1) + \frac{1}{2}o(1) + o(1)^2$$

$$= \frac{1}{2} + o(1)$$

$$f(x) \underset{\in}{=} o(1),\ x \to 0 \iff \frac{f(x)}{1} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}f(x) = o(1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \qquad x \to 0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 1 - x + x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (-x)^k$$

Noch zu prüfen: $\sum_{k=3}^{\infty} (-x)^k = O(x^3)$

$$\frac{\sum_{k=3}^{\infty} (-x)^k}{x^3} = \sum_{k=3}^{\infty} (-x)^{k-3}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}$$

Das soll beschränkt sein in einer Umgebung von 0.

$$U := U_{\frac{1}{2}}(0) = \left]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right[$$

$$\overset{\in}{x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k - (-x)^k}{k!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= x^1 + \frac{x^3}{6} + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\overset{?}{=} o(x^3)}$$

$$\frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{x^3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k+1-3}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+3)!}$$

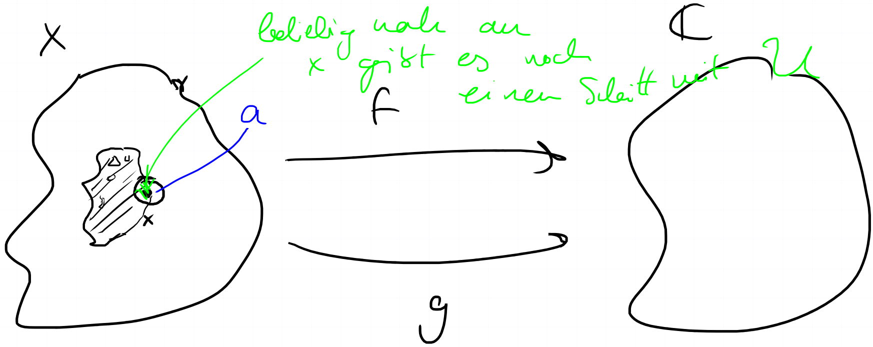
$$\overset{!}{\xrightarrow{x \to 0}} 0$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+3)!} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k+3)!}$$

$$= \frac{1}{|x|^3} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}}_{\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}}$$

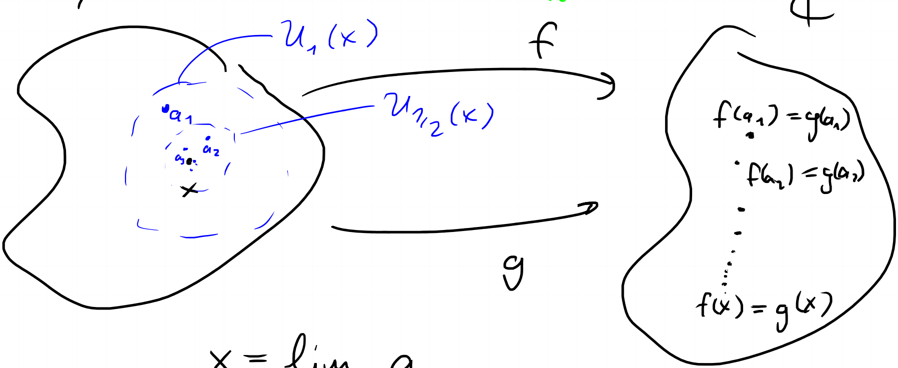
$$\leq \frac{\exp(|x|)}{|x|^3} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

Aufgabe 3. Seien $X \subseteq \mathbb{C}$ und $f, g : X \to \mathbb{C}$ stetig. Angenommen, f und g stimmen auf einer dichten Menge $U \subseteq X$ überein: $f|_U = g|_U$. Zeige: $f = g$.



„Nehme $a \in U \cap U_\varepsilon(x)$"

$a_n \in U \cap U_{1/n}(x)$



$$x = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Formal: $U \subseteq X$ dicht bedeutet:

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 : \quad U_\varepsilon(x) \cap U \neq \emptyset.$$

Sei $x \in X$. Wir zeigen $f(x) = g(x)$.

Für $n \in \mathbb{N}$, wähle $a_n \in U_{1/n}(x) \cap U$.

Jetzt gilt: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, da

$$|x - a_n| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} |x - a_n| = 0$,

und das ist <u>äquivalent</u> zu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

Da f & g stetig sind, sind sie insbesondere folgenstetig, also folgt:

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

$$\underset{a_n \in \mathcal{U} \;\&\; f|_{\mathcal{U}} = g|_{\mathcal{U}}}{=} \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = g(x).$$

$\square$

Oder kürzer: f, g stetig $\Rightarrow$ $f-g$ stetig.

$\{0\} \subseteq \mathbb{C}$ ist abgeschlossen.

$$\Rightarrow \underbrace{(f-g)^{-1}\{0\}}_{\substack{\shortparallel \\ \{x\in X \mid (f-g)(x) = 0\}}} \text{ abgeschlossen}$$

$(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

$\mathcal{U}$ dicht

$$\Rightarrow X \overset{\downarrow}{=} \overline{\mathcal{U}} \subseteq \overline{\{x\in X \mid f(x) = g(x)\}}$$

Abschluss nehmen erhält Inklusionen

& $f|_{\mathcal{U}} = g|_{\mathcal{U}}$

$\shortparallel$

abgeschlossene Menge

$$\{x\in X \mid f(x) = g(x)\}$$

$$\cap$$

$$X$$

$$\Rightarrow X = \{x\in X \mid f(x) = g(x)\}.$$