Funktionentheorie, Tutorium 14

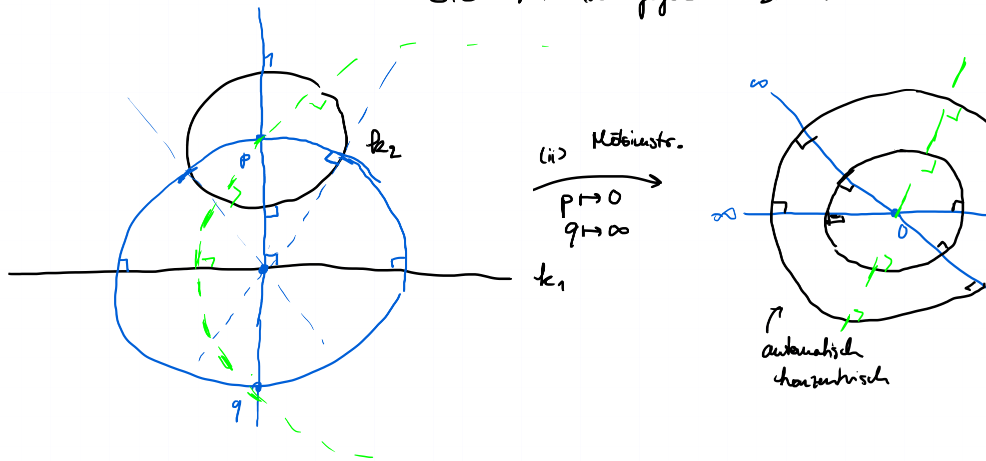
4. (i) Für je zwei disjunkte Kreise k_1 und k_2 in $\overline{\mathbb{C}}$ existieren zwei verschiedene Punkte p und q, so daß die Kreise durch p und q genau die Kreise sind, die k_1 und k_2 orthogonal schneiden. (Wir sehen hier Geraden als verallgemeinerte Kreise an.)

   (ii) Die Kreise k_1 und k_2 lassen sich durch eine Möbiustransformation in zwei (im euklidischen Sinne) konzentrische Kreise überführen.

   Hinweis: Verwenden Sie (i) und bewegen Sie p und q geeignet.

   (iii) Sind $D, D' \subset \mathbb{C}$ offene Scheiben, so daß $\overline{D}' \subset D$, so ist das Gebiet $D - \overline{D}'$ biholomorph zu einem Ringgebiet.

(i) & (ii) Skizze: Nach geeigneter Möbiustransformation sind wir in folgender Situation:

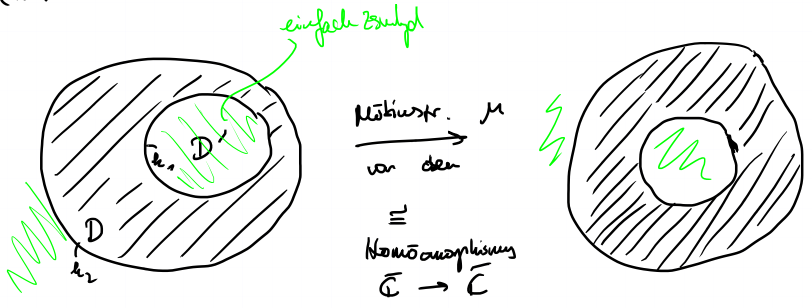


hyperbolische Kreisbüschel durch p & q

≀

elliptische Kreisbüschel um p & q

(iii)



Homöomorphismus $\quad \overline{\mathbb{C}} \setminus (k_1 \dot\cup k_2) \xrightarrow[\cong]{\mu|\ldots} \overline{\mathbb{C}} \setminus (\mu(k_1) \cup \mu(k_2))$

Zusammenhangskomponenten $\longmapsto$ Zusammenhangskomp.

einfach zshgd $\longmapsto$ einfach zshgd

$D \setminus \overline{D'} \longmapsto$ Ringgebiet

1. (i) Die holomorphe 1-Form dz auf $\mathbb{C}$ hat in ∞ einen zweifachen Pol.

   (ii) Für meromorphe 1-Formen auf $\overline{\mathbb{C}}$ übertrifft die Anzahl der Polstellen die Anzahl der Nullstellen, jeweils mit Vielfachheit gezählt, um 2.

(i) • Erinnerung: $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet,

$\mathcal{M}(G) := \{$ meromorphe $G \xrightarrow{f} \mathbb{C} \}$

Polstellenmenge $E \subseteq G$ abg. (in G) & diskret

$f : G \setminus E \to \mathbb{C}$ holomorph

• F = Riemannsche Fläche, d.h. $F = \bigcup_j \mathcal{U}_j$ offene Überdeckung

$\varphi_j : \mathcal{U}_j \xrightarrow[\text{Homöo.}]{\cong} \varphi_j(\mathcal{U}_j) \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{C}$

Kartenwechsel $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \Big|_{\varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)}$ (bi-) holomorph

Meromorphe Differentialform ω auf F

$\hat{=} \quad w = \{w_j\}_j, \quad w_j : \mathcal{U}_j \to \mathbb{C}$ meromorph

(Überdeckung $(\mathcal{U}_j)_j$ beliebig)

$w_j \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(\mathcal{U}_j) \to \mathbb{C}$, $\varphi_j(\mathcal{U}_j) \subseteq \mathbb{C}$

$$\omega_i \circ \varphi_i^{-1} \underset{\text{auf } \varphi_i(U_i \cap U_j)}{=} (\omega_j \circ \varphi_i^{-1}) \cdot \frac{d}{dz}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z))$$

(d.h. $\omega_j \varphi_j^{-1} \in \underbrace{\mathcal{M}}_{\text{meromorph}}(\varphi_j(U_j))$)

f meromorph auf F $\quad (f \in \mathcal{M}(F))$
($:\Longleftrightarrow$ $f|_{U_j}$ meromorph)

$$df := \left\{ \frac{d}{dz}(f \circ \varphi_j^{-1}) \circ \varphi_j \right\}_j$$

$\omega = \{\omega_j\}_j$ hat einen Pol / Nullstelle $u \in U_j$
falls $\omega_j \circ \varphi_j^{-1}$ einen Pol / Nst. in $\varphi_j(u)$

$\mathcal{E}(F) :=$ Vektorraum der meromorphen 1-Formen
($\mathcal{E}(F)$ ist $\mathcal{M}(F)$-eindimensional)

(Eigentlich sehen alle $\omega \in \mathcal{E}(F)$ aus wie

$$\underset{\in \mathcal{M}(F)}{f}\, dz$$)

[Lamotke, Riemannsche Flächen, pp. 134]

(i) Bei uns $F = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}}$

$\kappa_0 : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$[z:1] \longmapsto z$

$\kappa_1 : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad [1:z] \mapsto z$

$$dz = \left\{ \frac{d}{dz}(z)\circ \kappa_0 \,,\; \underbrace{\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)}_{= -\frac{1}{z^2}} \circ \kappa_1 \right\}$$

als meromorphe Fkt auf $\overline{\mathbb{C}}$

hat einen Pol bei $0 = \kappa_1(\infty)$

$$\kappa_1^* dz = d\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\, dz$$

Pol d. Ord. 2

(ii) Meromorphe 1-Formen

$$f\,dz \,,\quad f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$$

aus der Vorlesung:

f ist rational, $f = \frac{P}{Q}$, P, Q Polynome

$$\mathrm{ord}(f;\infty) \overset{(6.13)}{=} -\deg P + \deg Q =: -\deg f$$

$\#$Nullstellen $-$ $\#$Polstellen von $f|_{\mathbb{C}}$ =

$$= \deg P - \deg Q = \deg f$$

$$\kappa_1^*(f\,dz) = f\left(\frac{1}{z}\right) d\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{z^2}}_{\mathrm{ord} = -2} \underbrace{f\left(\frac{1}{z}\right)}_{\mathrm{ord} = -\deg f}$$

bei 0

$$(\#\mathrm{Nst} - \#\mathrm{Pst})(f\,dz) = \underbrace{\deg f}_{\text{aus } \mathbb{C}} + \underbrace{(-\deg f - 2)}_{\text{bei } \infty}$$

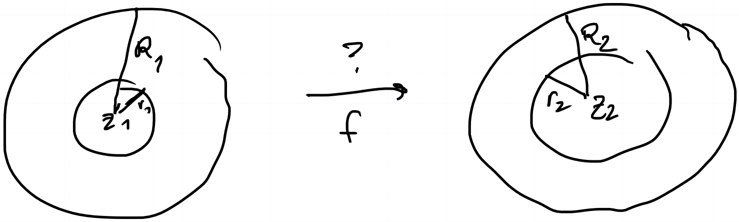
$$= -2$$

3. *Biholomorphe Klassifikation von Ringgebieten.* Zeigen Sie:

   (i) Zwei Ringgebiete $A_{r_1,R_1}(z_1)$ und $A_{r_2,R_2}(z_2)$ mit Radien $0 < r_j < R_j < +\infty$ sind genau dann biholomorph, wenn ihre Radienverhältnisse gleich sind, $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

   (ii) Jede biholomorphe Abbildung dieser Ringgebiete ist durch eine Möbiustransformation gegeben.

(i) „$\Leftarrow$“: $R_1/r_1 = R_2/r_2$



$$f(z) = \frac{R_2}{R_1}(z - z_1) + z_2$$

$$r_1 < |z - z_1| < R_1 \quad \Rightarrow \quad |f(z) - z_2| < R_2$$

$$|f(z) - z_2| = \frac{R_2}{R_1}|z - z_1|$$

$$r_2 = \frac{r_1}{R_1} R_2 <$$

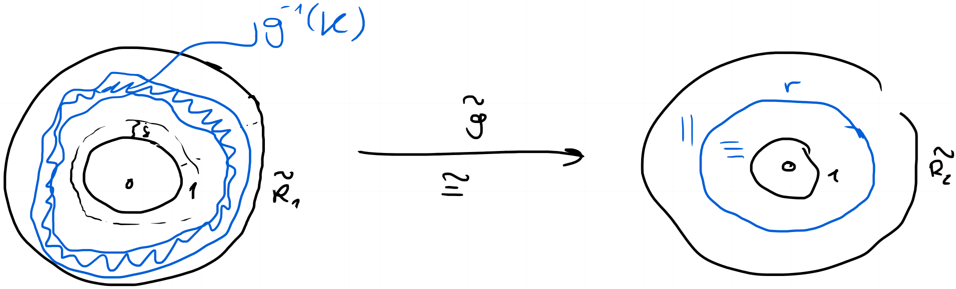
„$\Rightarrow$“: $g: A_{r_1,R_1}(z_1) \xrightarrow{\cong} A_{r_2,R_2}(z_2)$.

Wegen „$\Leftarrow$“ & „$R_i/r_i = \dfrac{R_i/r_i}{1}$“

$$\overset{!}{=:} \tilde{R}_i$$

$$\tilde g : A_{1,\tilde R_1}(0) \xrightarrow[(1)]{\cong} A_{r_1,R_1}(z_1) \xrightarrow{g} A_{r_2,R_2}(z_2) \xrightarrow[(1)]{\cong} A_{1,\tilde R_2}(0)$$

Möbiustraf.



$r := \sqrt{\tilde R_2}$

$1 < r < \tilde R_2$. $\quad K = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = r \}$

$\underbrace{\tilde g^{-1}}_{\text{stetige Fkt.}}(K) \subseteq A_{1,\tilde R_1}(0)$ ist kompakt

$$\delta := \operatorname{dist}\Big(\underbrace{\tilde g^{-1}(K)}_{\text{kompakt}}, \underbrace{\mathbb{C} \setminus A_{1,\tilde R_1}(0)}_{\text{abgeschlossen}} \Big) > 0$$

$$\Rightarrow A_{1,1+\delta}(0) \subseteq A_{1,\tilde R_1}(0) \setminus \tilde g^{-1}(K)$$

$$\underbrace{\tilde g(A_{1,1+\delta}(0))}_{\text{zshgd.}} \subseteq A_{1,\tilde R_2}(0) \setminus K = A_{1,r}(0) \sqcup A_{r,\tilde R_2}(0)$$

$\cong \qquad \cong$

Falls $\tilde g(A_{1,1+\delta}(0)) \subseteq A_{r,\tilde R_2}(0)$

$\rightsquigarrow$ ersetze $\tilde g$ durch $z \mapsto \tilde R_2 / \tilde g(z)$

o.E. $\tilde{g}(A_{1,1+\delta}(0)) \subseteq A_{1,r}(0)$.

Beh: $|\tilde{g}|$ hat stetige Fortsetzung auf $\overline{A_{1,\tilde{R}_1}(0)}$.

Begründung: $(z_k)_k \in (A_{1,1+\delta}(0))^{\mathbb{N}}$, konvergent $z_k \xrightarrow{k\to\infty} z$, $|z| = 1$

$(\tilde{g}(z_k))_k$ Häufungspunkt x im Kompakten $\overline{A_{1,r}(0)}$

$x \in A_{1,\tilde{R}_2}(0) \Rightarrow \tilde{g}^{-1}(x) \in A_{1,\tilde{R}_1}(0)$
"$\lim_k z_k \in S^1$".
$\Rightarrow$ ↯

$\Rightarrow |x| = 1$.

$\Rightarrow$ Der einzige H.p. von $(|\tilde{g}(z_k)|)_k$ ist 1.

$\Rightarrow |\tilde{g}(z_k)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$.

Analog zeigt man $|\tilde{g}(z_n)| \xrightarrow{k\to\infty} \tilde{R}_2$
falls $|z_k| \to \tilde{R}_1$

$\Rightarrow$ Beh.

$$|\tilde{g}|: \quad S^1 \ni z \mapsto 1$$
$$\tilde{R}_1 S^1 \ni z \mapsto \tilde{R}_2$$

setzt $|\tilde{g}|$ stetig fort.

$$h : z \mapsto \log|\tilde{g}(z)| - \frac{\log \tilde{R}_2}{\log \tilde{R}_1} \log|z|$$

lokal $\nearrow$ " $\operatorname{Re}\big(\operatorname{Log}(\tilde{g}(z))\big)$

$\uparrow$ kompl. Log

ist harmonisch auf $A_{1,\tilde{R}_1}(0)$,

$h(z) = 0$ auf $\partial A_{1,\tilde{R}_1}(0)$.

$\Longrightarrow h = 0$ (Eindeutigkeit der Lsg. des Dirichlet-Problems)

<u>lokal:</u>

$$0 = \left(\operatorname{Log}_1(\tilde{g}(z)) - \frac{\log \tilde{R}_2}{\log \tilde{R}_1} \operatorname{Log}_2(z)\right)'$$

(Blatt 1, da Re = 0) irgendwelche Logarithmen

$$\| $$

$$\frac{\tilde{g}'(z)}{\tilde{g}(z)} - \underbrace{\frac{\log \tilde{R}_2}{\log \tilde{R}_1}}_{\alpha} \frac{1}{z}$$

"Logarithmisches Differenzieren"

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda S^1} \frac{\alpha}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda S^1} \frac{\tilde{g}'(z)}{\tilde{g}(z)}\, dz$$

$1 < \lambda < \tilde{R}_1$

$$= \underbrace{\text{Umlaufzahl}\left(\tilde{g} \circ (t \mapsto \lambda e^{it}), 0\right)}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-\alpha} \tilde{g}(z)\right) = z^{-\alpha-1} \underbrace{\left(-\alpha\, \tilde{g}(z) + z\, \tilde{g}'(z)\right)}_{=0}$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{g}(z) = C z^{\alpha}, \quad C \in \mathbb{C}^{\times}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = 1 \qquad \Longrightarrow \tilde{R}_2 = \tilde{R}_1 .$$

$\tilde{g}$ injektiv

(sonst setze

α-te Wurzeln ein)

$\tilde{g}$ = Möbiustransf.

$\Longrightarrow$ g Möbiustr.

($\Rightarrow$ (ii))

$\square$

2. Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen der folgenden Funktionen auf den angegebenen Ringgebieten:

   (a) $f(z) = \frac{1}{(z-c)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{C}^*$ auf $A_{0,|c|}(0)$ und $A_{|c|,+\infty}(0)$

   (b) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ auf $A_{0,1}(0)$, $A_{1,2}(0)$ und $A_{2,+\infty}(0)$

   (c) $f(z) = \frac{4z-z^2}{(z^2-4)(z+1)}$ auf $A_{1,2}(0)$, $A_{2,+\infty}(0)$ und $A_{0,1}(-1)$

$$A_{0,1}(0) \xrightarrow{z \mapsto z-1} A_{0,1}(-1)$$

$f(z-1)$

(c) Partialbruchzerlegung:

$$f(z) = \frac{4z - z^2}{(z^2-4)(z+1)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z+1}$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -3, \quad C = \frac{5}{3}.$$

Auf $\underline{A_{1,2}(0)}$:
$$\frac{1}{z \pm 2} = \frac{\pm 1}{2} \frac{1}{1 - (\mp \frac{z}{2})} = $$

$$= \frac{\pm 1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mp \frac{1}{2}\right)^k z^k = \pm \sum_{k=0}^{\infty} (\mp 1)^k 2^{-k-1} z^k .$$

$$\frac{1}{z+1} = - \sum_{k=-\infty}^{-1} (-z)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^{k+1} z^k$$

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(- \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} z^k \right) - 3 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, 2^{-k-1} z^k$$

$$+ \frac{5}{3} \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^{k+1} z^k$$

$$= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{5}{3} (-1)^{k+1} z^k}_{f_{\text{außen}}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} z^k \underbrace{\left(\frac{-1}{3 \cdot 2^{k+1}} - \frac{3}{2^{k+1}} \right)}_{\frac{-5}{3\,2^k}}}_{f_{\text{innen}}}$$

Übungsaufgaben zu reellen Integralen mit Hilfe des Residuensatzes:

(Teil-Lösungen (oder Fragen) gerne per E-Mail an robin.mader@campus.lmu.de)

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} \, dx, \qquad 0 < \alpha < 1$$

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n} \, dx, \qquad a, b > 0, \; n \geq 1$$

(c) (i) $$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)\sqrt{x}}\,dx$$

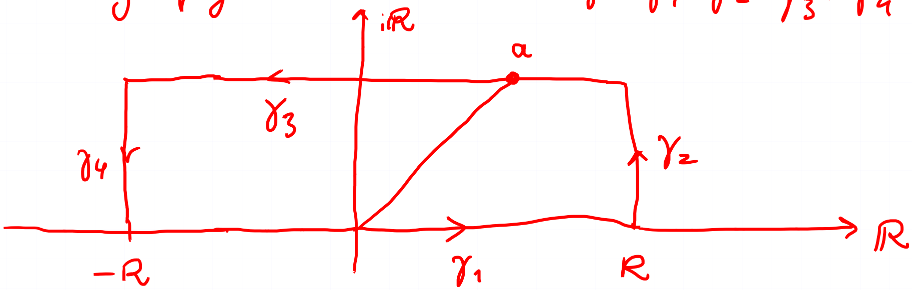
(ii) $$\int_0^\infty \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$$

Hinweis: Für den Hauptzweig Log & $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $\operatorname{Log}(i+x) + \operatorname{Log}(i-x) = \log(x^2+1) + i\pi$

(d) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$:)

Hinweis: Integriere $g(z) = \dfrac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}$, $a = \sqrt{\pi}\; e^{i\pi/4}$

entlang folgender Kontur: $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$



& nutze Periodizität von g.