Analysis 1 – Tutorium 1
robin.mader@campus.lmu.de
6.11.2020

Unten findet ihr ausgewählte Lösungen zu den Aufgaben. Lösungen zu den hier gelisteten Aktivierungselementen finden sich in Uni2Work.

Aufgabe 1 (Aussagenlogik, Wahrheitstabellen)**.** (a) Es seien A, B, C Aussagen. Zeige, dass es sich bei folgenden Formeln um Tautologien handelt:

(i) Beweis einer Disjunktion (Aktivierungselement 1.7):

$$((C \Rightarrow A) \vee (\neg C \Rightarrow B)) \Rightarrow A \vee B,$$

(ii) Formel von Peirce:

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A,$$

(iii) Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

(b) Aktivierungselement 1.8: Seien A, B Aussagen. Zeige: $\neg(A \Rightarrow B)$ und $A \wedge \neg B$ sind gleichwertig.
(c) Für Aussagen A, B, C sind die Formeln $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ und $A \wedge B \Rightarrow C$ gleichwertig.

Lösung. (a)(ii) Wir schreiben folgende Wahrheitstabelle:

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$	$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Da die letzte Spalte nur den Wahrheitswert "w" hat, ist die Formel von Peirce eine Tautologie.
(c) Wir schreiben wieder eine Wahrheitstabelle:

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$A \wedge B$	$A \wedge B \Rightarrow C$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	w	f
w	f	w	w	w	f	w
w	f	f	w	w	f	w
f	w	w	w	w	f	w
f	w	f	f	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w
f	f	f	w	w	f	w

Wir erkennen die Gleichwertigkeit der beiden Aussagen anhand ihrer übereinstimmenden Spalten in der Wahrheitstabelle. $\square$

Aufgabe 2 (Beispiele zu Mengenoperationen und Funktionen)**.**
(a) Aktivierungselement 1.11: Gegeben seien die Mengen $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{2, 3, 4\}$. Berechne $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$ und $M \triangle N$.
(b) Aktivierungselement 1.12: Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5, 6\}$ und eine Abbildung $f : A \to B$, definiert durch $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 5$.

1. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv?

2. Schreibe f als Teilmenge von $A \times B$.

3. Berechne das Bild $f[\{2, 3\}]$ und das Urbild $f^{-1}[\{5, 6\}]$.

Aufgabe 3 (Prädikatenlogik)**.** (a) Aktivierungselement 1.10: Betrachte den prädikatenlogischen Ausdruck

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Formuliere das Gegenteil dieses Ausdrucks.
(b) Es sei M eine Menge. Formuliere mit Hilfe der Existenz- und Allquantoren (und "$\in M$"), der Junktoren und "$=$" die folgenden Aussagen:

(i) Es gibt mindestens drei verschiedene Elemente in M.

(ii) Es gibt genau drei verschiedene Elemente in M.

Aufgabe 4.
(a) Rechtskürzbarkeit von Surjektionen: Es seien X, Y, Z Mengen, und $f : Y \to Z$, $g : Y \to Z$, $s : X \to Y$ Abbildungen. Angenommen, s ist surjektiv. Beweise die Implikation

$$f \circ s = g \circ s \implies f = g.$$

(b) Linkskürzbarkeit von Injektionen: Wieder seien X, Y, Z Mengen. Diesmal betrachten wir Abbildungen $f : X \to Y$, $g : X \to Y$, $i : Y \to Z$. Angenommen i ist injektiv. Zeige

$$i \circ f = i \circ g \implies f = g.$$

Lösung. (a) Um die Implikation $f \circ s = g \circ s \implies f = g$ zu beweisen, nehmen wir $f \circ s = g \circ s$ an, und zeigen $f = g$. Unsere Annahme ist äquivalent zu

$$\forall x \in X : f \circ s(x) = g \circ s(x). \tag{1}$$

Das Beweisziel "$f = g$" ist gleichbedeutend mit

$$\forall y \in Y : f(y) = g(y). \tag{2}$$

Um eine Aussage der Form $\forall y \in Y : \varphi(y)$ zu beweisen, müssen wir für ein beliebig vorgegebenes $y \in Y$ die Aussage $\varphi(y)$ zeigen. Bei uns soll $\varphi(y)$ genau die Aussage $f(y) = g(y)$ sein. Es sei nun also ein beliebiges $y \in Y$ gegeben. Unser Beweisziel ist jetzt nicht mehr (2), sondern $f(y) = g(y)$.

Um (1) anwenden zu können, wollen wir die Surjektivität von s nutzen. Wir erinnern uns: $s : X \to Y$ ist surjektiv genau dann, wenn

$$\forall y' \in Y \exists x' \in X : y' = s(x'). \tag{3}$$

Wir führen eine Allquantorentfernung durch, indem wir in (3) für y' unser gegebenes y substituieren, und folgern:

$$\exists x' \in X : y = s(x'). \tag{4}$$

Die Formel (4) liefert nun ein $x' \in X$ mit $y = s(x')$. Das erlaubt es uns, Formel (1) anzuwenden, denn nun können wir durch Substitution von x' für x den Allquantor in (1) entfernen, um $f \circ s(x') = g \circ s(x')$ zu erhalten. Erinnern wir uns an die Komposition von Funktionen, und folgern:

$$f(y) = f(s(x')) = f \circ s(x') = g \circ s(x') = g(s(x')) = g(y).$$

Diese Schreibweise bietet sich wegen der Transitivität von "=" an. Insgesamt folgt das Beweisziel $f(y) = g(y)$.

(b) Diesmal argumentieren wir etwas knapper. Angenommen, $i \circ f = i \circ g$. Es sei $x \in X$ gegeben. Wir zeigen $f(x) = g(x)$.

Zunächst bemerken wir $i(f(x)) = i(g(x))$. Injektivität von i ist gleichbedeutend mit

$$\forall y_1 \in Y \forall y_2 \in Y : i(y_1) = i(y_2) \implies y_1 = y_2. \tag{5}$$

Wir wenden dies auf $y_1 = f(x)$ und $y_2 = g(x)$ an, und folgern $f(x) = g(x)$.

Da $x \in X$ beliebig war, folgt $f = g$. □

Aufgabe 5 (Relationen, Quotienten).
(a) Aktivierungslement 1.14: Es sei $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, und die Relation $\sim \subseteq M \times M$ definiert durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad 3 \text{ teilt } x - y.$$

Wir nehmen ohne Beweis an: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

1. Schreibe $M/\sim$ als Menge in aufzählender Notation.

2. Es sei $f : M \to M/\sim$ die kanonische Abbildung. Schreibe $f(1)$ als Menge in aufzählender Notation.

(b*) Injektiv-machen mittels Faktorisieren durch den Quotienten: Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von Mengen X und Y. Definiere eine Relation $\sim \subseteq X \times X$ durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Zeige:

1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

*Die Bearbeitung einer mit * versehenen Aufgabe sollte erst nach dem Lösen der übrigen Aufgaben erfolgen.

2. Die Abbildung

$$\overline{f} : X/\sim \to Y, \quad [x]_\sim \mapsto f(x)$$

ist wohldefiniert, und injektiv.

Lösung. (b) 1. Zu prüfen ist Reflexivität, Symmetrie und Transitivität von $\sim$.

Reflexivität: Für $x \in X$ gilt offenbar $f(x) = f(x)$, also $x \sim x$.

Symmetrie: Seien $x \in X$ und $y \in X$ mit $x \sim y$ gegeben. Das bedeutet $f(x) = f(y)$. Da "=" symmetrisch ist, folgt $f(y) = f(x)$. Also auch $y \sim x$.

Transitivität: Es seien $x, y, z \in X$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$ gegeben. Zu zeigen ist $x \sim z$. Unsere Annahmen bedeuten $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$. Da "=" transitiv ist, folgt $f(x) = f(z)$, also $x \sim z$.

2. Wohldefiniertheit der Abbildung $\overline{f}$ bedeutet, dass

$$\overline{f} = \{([x]_\sim, f(x)) \in X/\sim \times Y \mid x \in X\}$$

nicht nur eine Relation, sondern sogar eine Funktion ist, d.h.

$$\forall x \in X \forall y \in X : [x]_\sim = [y]_\sim \implies f(x) = f(y).$$

Um das zu zeigen, seien also $x, y \in X$ mit $[x]_\sim = [y]_\sim$ gegeben. Wegen $x \sim x$ gilt $x \in [x]_\sim = [y]_\sim = \{z \in X \mid z \sim y\}$, also $x \sim y$. Das bedeutet $f(x) = f(y)$, also ist $\overline{f}$ wohldefiniert.

Um zu sehen, dass $\overline{f}$ injektiv ist, müssen wir

$$\forall \overline{x} \in X/\sim \ \forall \overline{y} \in X/\sim : \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{y}) \implies \overline{x} = \overline{y} \tag{6}$$

zeigen. Es seien also $\overline{x}, \overline{y} \in X/\sim$ mit $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{y})$ gegeben. Wegen $X/\sim = \{[z]_\sim \mid z \in X\}$ finden wir $x \in X$ und $y \in X$ mit $\overline{x} = [x]_\sim$ und $\overline{y} = [y]_\sim$. (Slogan: "Die kanonische Projektion $X \to X/\sim, z \mapsto [z]_\sim$ ist surjektiv.") Wir haben

$$f(x) = \overline{f}([x]_\sim) = \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{y}) = \overline{f}([y]_\sim) = f(y),$$

also $x \sim y$.

Wir zeigen, dass daraus bereits $[x]_\sim = [y]_\sim$ folgt. Um diese Gleichheit von Mengen zu zeigen, zeigen wir zunächst $[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$. Sei dazu $z \in [x]_\sim$. Das bedeutet $z \sim x$. Wegen $x \sim y$ und der Transitivität von $\sim$ folgt $z \sim y$, also $z \in [y]_\sim$. Da $z \in [x]_\sim$ beliebig war, folgt die Inklusion $[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$.

Um die umgekehrte Inklusion $[y]_\sim \subseteq [x]_\sim$ zu sehen, bemerken wir $y \sim x$ aus der Symmetrie von $\sim$. Nun folgt $[y]_\sim \subseteq [x]_\sim$ mit dem gleichen Argument wie eben, durch Vertauschung der Rollen von x und y.

Insgesamt folgt also $\overline{x} = [x]_\sim = [y]_\sim = \overline{y}$, und damit ist die Behauptung (6) bewiesen.

□