Elementarteilersatz

(Klassifikation von endlich erzeugten abelschen Gruppen)
$(R = \mathbb{Z})$

Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe M ist von der Form $M \cong \mathbb{Z}^n/_N$, wo n die Anzahl der gegebenen Erzeuger von M ist, und $N \le \mathbb{Z}^n$ ein endlich erzeugtes Untermodul. (Falls $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$, so $N := \ker\left(\mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow M,\ (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \underbrace{a_i m_i}_{= \underbrace{m_i + \dots + m_i}_{a_i \text{ mal}}}\right)$.)

Ziel: Schreibe $M \cong \underbrace{\mathbb{Z}^{rk(M)}}_{\text{freier Teil}} \times \underbrace{T(M)}_{\text{Torsion}}$

Wir können sogar $T(M) \cong \mathbb{Z}/_{\varepsilon_1} \times \mathbb{Z}/_{\varepsilon_2} \times \dots \times \mathbb{Z}/_{\varepsilon_m}$ mit $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \varepsilon_3 \mid \dots \mid \varepsilon_m$ schreiben!
Elementarteiler

Algorithmus: Schreibe $N := \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} \right\rangle \le \mathbb{Z}^n$, (Elemente $\in \mathbb{Z}^n$)

setze $A := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$. Nutze nun Zeilen- & Spaltenumformungen (wie über Körpern, aber Multiplikation einer Zeile oder Spalte nur mit Elementen aus $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$!) um A auf die Form

$$\left(\begin{array}{c|c} \beta & 0 \cdots 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right) \qquad A' = (\alpha'_{ij})_{i,j}$$

mit $\forall i,j: \beta \mid \alpha'_{ij}$. Wiederhole den Prozess mit A' statt A.

Algorithmus aus der Vorlesung

Erlaubte Abänderungen sind dabei:

1. Vertauschung zweier u oder v. Dies entspricht der Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten.
2. Ersetzung eines u_i durch $u_i - \lambda u_j, \lambda \in R, i \neq j$. Dies entspricht dies der Ersetzung der i -ten Zeile durch i -te Zeile minus λ mal j -te Zeile.
3. Ersetzung eines v_i durch $v_i - \lambda v_j, \lambda \in R, i \neq j$. Dies entspricht der Ersetzung der i -ten Spalte durch i -te Spalte minus λ mal j -te Spalte.
4. Multiplikation einer Zeile / Spalte mit Elementen aus $R^\times$.

Schritt 1:
Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten bringe man das Element ungleich Null von kleinster $\underbrace{\text{euklidischer Norm}}_{1\cdot 1\cdot \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_0^+}$ an die Stelle $(1,1)$.

Schritt 2:
Durch Subtraktion geeigneter Vielfacher der ersten Zeile, kann man erreichen, dass A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & * & \dots & * \\ \gamma_2 & & & \\ \vdots & & * & \\ \gamma_n & & & \end{pmatrix}$$

ist, wobei jedes γ_i entweder gleich Null ist oder $\varphi(\gamma_i) < \varphi(\alpha_{11})$ gilt. Falls alle γ_i gleich Null sind, so gehe zu Schritt 3. . Andernfalls gehe zu Schritt 1.

Schritt 3:
Durch Subtraktion geeigneter Vielfacher der ersten Spalte, kann man sodann erreichen, dass A von der Form

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_{11} & \gamma_1 & \dots & \gamma_k \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

ist, wobei jedes γ_i entweder gleich Null ist oder $\varphi(\gamma_i) < \varphi(\alpha_{11})$ gilt. Falls alle γ_i gleich Null sind, so gehe zu Schritt 4. Andernfalls gehe zu Schritt 1.

Schritt 4:
Falls $A' = 0$ oder wir sind rechts unten in der Matrix so beende den Algorithmus.

Schritt 5:
Falls alle Einträge von A' durch α_{11} teilbar sind, so gehe mit A' in Schritt 1.

Schritt 6:
Sei α_{ik} ein Koeffizient in A', der nicht durch α_{11} teilbar ist. Teile mit Rest,

$\alpha_{ik} = \alpha_{11}\beta + \gamma, \gamma \neq 0, \varphi(\gamma) < \varphi(\alpha_{11})$
Addiere nun die erste Zeile zur i -ten Zeile und subtrahiere dann β mal 1. Spalte von der k -ten Spalte. Dann kommt an der Stelle (i,k) gerade γ zu stehen. Gehe mit A in Schritt 1.

Bsp: $M = \mathbb{Z}^3 / \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \right\rangle$

$R = \mathbb{Z}, \quad \varphi = |\cdot|$ Betrag.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \circlearrowleft \text{Schritt 1}$$

$$\xrightarrow{\substack{II - 2\cdot I \\ III - 3\cdot I}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Schritt 3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}, \quad A' = \boxed{\begin{matrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{matrix}}$$

$$\xrightarrow{\text{Schritt 5}} \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Schritt 2}} \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Schritt 3}} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \cong \underbrace{\mathbb{Z}/0\cdot\mathbb{Z}}_{\cong \mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/3\cdot\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}/1\cdot\mathbb{Z}}_{\cong 0}$$

$$\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Zusatzaufg: • $M := \mathbb{F}_p[x] / \left\langle \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2+1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \end{pmatrix} \right\rangle$

Wie viele Elemente hat M? (Antwort: p)

32

• Wie viele abelsche Gruppen von Ordnung 40 gibt es?

Tutorium 10, Lineare Algebra 2

16.6. 2021

Aufgabe 1

Bestimme die Elementarteiler der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln

1. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $\longleftarrow$ $A = (3) \rightsquigarrow$ Elementarteiler $= 3$
2. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $\longleftarrow$ $A = (4) \rightsquigarrow$ — " — 4
3. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$

erzeugt von $[1] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$M = \mathbb{Z}, \quad N = 3\mathbb{Z} = \langle 3 \rangle$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist als Gruppe (oder $\mathbb{Z}$-Modul) erzeugt von $(\bar{1}, 0)$, $(0, \bar{1})$

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$(1,0) \longmapsto (\bar{1}, 0)$$
$$(0,1) \longmapsto (0, \bar{1})$$

$$(x,y) \in \ker \varphi \iff x \in 2\mathbb{Z},\ y \in 3\mathbb{Z}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\ker \varphi}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2 \Big/ \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Schritte 1,2,3,4,5

Schritt 6

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\big\}$ Schritt 1

$$\begin{pmatrix}1&-2\\2&2\end{pmatrix} \overset{II-2\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&-2\\0&6\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&6\end{pmatrix}$$

$$\checkmark\quad 1 \mid 6$$

$\rightsquigarrow$ Elementarteiler $= \{6\}$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \underset{\text{CRS.}}{\cong} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

---

4. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$

Elementarteiler 2, 12, 180

$$\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}^3} \Big/ \left\langle \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\20\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\36\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}6&&\\&20&\\&&36\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}6&&\\6&20&\\&&36\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}6&-18&0\\6&2&0\\0&0&36\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&36&0\\0&0&60\end{pmatrix} \leftsquigarrow \begin{pmatrix}2&6&0\\0&60&0\\0&0&36\end{pmatrix} \leftsquigarrow \begin{pmatrix}2&6&0\\-18&6&0\\0&0&36\end{pmatrix}$$

$\big\}$ $60 \nmid 36$

$$\begin{pmatrix}2&&\\&36&\\&36&60\end{pmatrix} \overset{III-II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&&\\&36&-36\\&36&24\end{pmatrix} \overset{II-III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&&\\&72&-36\\&12&24\end{pmatrix}$$

teilt das

$$\begin{pmatrix}2&&\\&12&\\&&180\end{pmatrix} \leftsquigarrow \begin{pmatrix}2&&\\&12&24\\&0&-180\end{pmatrix} \overset{III-6II}{\leftsquigarrow} \begin{pmatrix}2&&\\&12&24\\&72&-36\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Elementarteiler $= \{2, 12, 180\}$.

Aufgabe 2

Entscheide, ob die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}^3/L_1$ und $\mathbb{Z}^3/L_2$ isomorph sind. Hierbei ist $L_1 = \left\langle \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\15\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}13\\17\\3\end{pmatrix} \right\rangle, L_2 = \left\langle \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\10\\2\end{pmatrix} \right\rangle$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 13 \\ 2 & 15 & 17 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 2 & 15 & 17 \\ 0 & -20 & -21 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$II - 7 \cdot I$ Spalte, $III - 8 \cdot I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -21 & -20 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -20 & -21 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$II + 7 \cdot III$ Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III Z - 3 \cdot I Z} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} \end{pmatrix}$$

$1 \mid 1 \mid 6$ alles ok

Elementarteiler

Alternativ:

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C.R.S.} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Z}^3/L^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A \xrightarrow{IIS - IS} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 10 \\ 0 & \boxed{2} & 10 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \leftarrow$$

$2 \mid 10$

Elementarteiler $= (2,2)_3$

Also: $\mathbb{Z}^3/L_1 \cong \mathbb{Z}/6 \not\cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}^3/L_2$.

Wie viele abelsche Gruppen G von Ordnung 40? d.h. $|G| = 40$

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}^{rk(G)}}_{\substack{=0 \\ \text{da } |G|<\infty}} \times \underbrace{T(G)}_{\cong \left\{\begin{array}{l} \mathbb{Z}/40\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \\ \vdots \end{array}\right.}$$

wie viele?

$$T(G) \cong \mathbb{Z}/\varepsilon_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/\varepsilon_m$$

$\varepsilon_i \neq 1$ & $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$ & $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m = |G| = 40$

1. $\varepsilon_1 = 40$
2. $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 20$
3. $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_3 = 10$

Man kann nur Primfaktoren rausziehen, die mit Vielfachheit ≥ 1 vorkommen.

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Alle Möglichkeiten}}$ $\Rightarrow$ Es gibt genau 3 abelsche Gruppen von Ordnung 40 bis auf Isomorphie.

(32 $\rightsquigarrow$ 7 Gruppen)