Tutorium 14 - Lineare Algebra 2

14.7.2021

G

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt: Alle abelschen Gruppen der Ordnung n sind isomorph?

$n = 4.$ $4, \quad (2,2)$

$n = 42.$ $\varepsilon_1 \quad \varepsilon_1\ \varepsilon_2$

$n = 60.$ $= 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \cdots \mid \varepsilon_r \qquad \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r = n$

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}/\varepsilon_1}_{|\cdot| = \varepsilon_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{\mathbb{Z}/\varepsilon_r}_{|\cdot| = \varepsilon_r}$$

$$|G| = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r$$

Aufgabe 1 (10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 Punkte). Entscheide für folgende Aussagen ob sie wahr sind. Eine Begründung ist nicht nötig.

Aussage	wahr	falsch
Ein Körper positiver Charakteristik ist endlich.	☐	☒
Für $A \in M_n(K)$ ist die Summe der Grade der Elementarteiler der charakteristischen Matrix $M_A(x)$ genau n.	☒	☐
Jeder Vektorraum V ist kanonisch isomorph zu seinem Bidualraum V^{**}.	☐	☒
Für jeden kommutativen Ring R ist der Polynomring $R[x]$ ein Hauptidealring. z.B. $R = k[y] \leadsto R[x] \cong k[x,y]$ ist kein HIR	☐	☒
Jedes irreduzible Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ erfüllt $\deg f \in \{1,2\}$. Dasselbe gilt für jedes irreduzible Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$. ← wir sogar $\deg f \in \{1\} \subseteq \{1,2\}$	☒	☐
Seien $f, g : V \to V$ Endomorphismen auf dem K-Vektorraum V. Dann gilt für die dualen Abbildungen: $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$. richtig wäre: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$	☐	☒
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\beta : V \times V \to K$ eine K-Bilinearform. Dann ist β genau dann im ersten Argument ausgeartet, wenn β im zweiten Argument ausgeartet ist.	☒	☐
Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit $A^t A = A A^t$; dann ist A diagonalisierbar.	☐	☒
Hauptidealringe sind faktoriell. es genügt: R Integritätsbereich	☒	☐
Seien R faktoriell und M ein R-Modul. Dann ist der Torsionsmodul $T(M)$ ein Untermodul von M.	☒	☐

Körper der rationalen Fkt

$$K(t) = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in K[t],\ g \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{F}_p(t)$ hat Charakteristik p. & ist unendlich

$R[x]$ ist HIR

$\Updownarrow \qquad \Uparrow$ "Euklid. Alg."

R ein Körper

→ mögliches Ggbsp: $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$f \in \mathbb{R}[x] \quad f = \prod_i (x - \alpha_i)$

$$f = \overline{f} = \prod_i (x - \overline{\alpha_i})$$

$$\leadsto f = \prod_j \underbrace{(x - \alpha_j)(x - \overline{\alpha_j})}_{\in \mathbb{R}[x]} \cdot \prod_j (x - \alpha_j)$$

$\alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\cdot \prod_j \underbrace{(x - \alpha_j)}_{\in \mathbb{R}[x]}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}$$

f irred. $\iff$ f prim

$\overset{f \neq 0}{\iff}$ (f) Primideal

$\iff$ $R/(f)$ ist Integritätsbereich

Über $\mathbb{C}$: Jede Matrix besitzt eine eindeutige Jordansche Normalform (bis auf Anordnung des Kästchen)

Wenn die JNF nicht diagonal ist, ist die Matrix nicht diagonalisierbar. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(x-1)^2$

Aufgabe 3 (10 Punkte). Es bezeichne $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^*\}$ die unitäre Gruppe. Beweise:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\, \forall A \in U(n)\, \exists B \in U(n) : B^m = A.$$

$AA^* = E$

Spektralsatz: $\exists \mathcal{U} \in \mathcal{U}(n)$: $A = \mathcal{U}^* D \mathcal{U}$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A \in \mathcal{U}(n) \implies D \underset{\mathcal{U}^*\mathcal{U} = id}{\overset{\uparrow}{=}} \mathcal{U} A \mathcal{U}^*$ ist unitär.

Wir wählen m-te Wurzel von λ_i, (Allgemein: $t^m - \lambda_i$ hat eine Nullst.)

D unitär $\implies \lambda_i \overline{\lambda_i} = 1$

α_i mit $\alpha_i^m = \lambda_i$

$F := \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$, $F^m = D$.

F unitär $\iff \alpha_i \overline{\alpha_i} = 1$

Es gilt: $(\alpha_i \overline{\alpha_i})^m = \lambda_i \overline{\lambda_i} = 1$

$\implies \alpha_i \overline{\alpha_i} = 1$

$\alpha_i \overline{\alpha_i} \in \mathbb{R}$

$\alpha_i \overline{\alpha_i} = |\alpha_i|^2 \geq 0$

$B := \mathcal{U}^* F \mathcal{U}$ (unitär) ist unitär.

$\implies B^m = (\mathcal{U}^* F \mathcal{U})^m = \mathcal{U}^* F^m \mathcal{U} = \mathcal{U}^* D \mathcal{U}$

$= A.$ $\square$

Aufgabe 4 (20 = 5+5+5+5 Punkte). (a) Bestimme den Torsionsmodul des $\mathbb{Z}$-Moduls

$$M = \mathbb{Z}^3 \Big/ \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} \right\rangle .$$

$R = \mathbb{Z}$ euklidische Norm $= |\cdot|$

Verwende den Elementarteilersatz:

$$\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\3&4\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}S+\text{I}S} \begin{pmatrix}1&0\\2&3\\3&7\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}Z-3\text{I}Z]{\text{II}Z-2\cdot\text{I}Z} \begin{pmatrix}1&0\\0&3\\0&7\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-2\cdot\text{II}} \begin{pmatrix}1&0\\0&3\\0&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M \cong \mathbb{Z} \times \underbrace{\mathbb{Z}/1}_{=0} \times \underbrace{\mathbb{Z}/1}_{=0}$$

$\cong \mathbb{Z}$ ist torsionsfrei ($T(M) = 0$.)

(d) Bestimme die Weierstraßsche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

$R = \mathbb{Q}[x]$ euklidische Norm $= \deg(\cdot)$

$$-M_A(x) = \begin{pmatrix} -3-x & -5 & 0 & -4 \\ 2 & 3-x & 0 & 2 \\ 0 & 1/3 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1-x & 0 \\ 2 & 3-x & 0 & 2 \\ -3-x & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1-x & 0 \\ 3-x & 2 & 0 & 2 \\ -5 & -3-x & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}Z+15\cdot\text{I}Z]{\text{II}Z+3(x-3)\text{I}Z} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 2 & 3(x-1)(3-x) & 2 \\ 0 & -3-x & 15(1-x) & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3(1-x)(x-3) & 2 \\ -3-x & 15(1-x) & -4 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}Z+\frac{1}{2}(3+x)\text{I}Z} \begin{pmatrix} 2 & 3(x-1)(3-x) & 2 \\ 0 & (1-x)\left(15+\frac{3}{2}(x^2-9)\right) & x-1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)(\dots) & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{array} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)(\dots) & x-1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{array}$$

$$\text{Elementarteiler} = x-1, \quad (x-1)\Big(\underbrace{15+\tfrac{3}{2}(x^2-9)}\Big)$$

$$\sim \tfrac{2}{3}\cdot\left(15+\tfrac{3}{2}(x^2-9)\right)$$

Normiere!

$$= 10 + x^2 - 9 = x^2+1$$

$$\Rightarrow \text{Invariantenteiler} = x-1, \quad x-1, \quad x^2+1$$

$0x$

$$\Rightarrow \text{WNF} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

(b) Betrachte die beiden Geraden $g, h \subset \mathbb{R}^4$, definiert als

$$g = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_1} + \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \qquad h = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_2} + \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimme den Abstand von g und h.

1.) $p := x_1 - x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$U = U_1 + U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2.) Bestimme eine ONB von U. ($\rightsquigarrow$ später $\pi_U(p)$)

z.B. $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y}$

3.) Berechne $\underline{\pi_u(p) = \underset{\uparrow}{(x,p)}\, x + (y,p)\, y}$

Skalarprodukt

$$= \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \alpha-1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \alpha-1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\alpha-1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

4.) Berechne $\|p\|^2 = (\alpha-1)^2+1$, $\|\pi_u(p)\|^2 = 3\left(\frac{\alpha-1}{3}\right)^2 + 1$, $\underbrace{\|p\|^2 - \|\pi_u(p)\|^2}_{= \underbrace{\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{2/3}(\alpha-1)^2}$

& dann $d(g,h) = \sqrt{\|p\|^2 - \|\pi_u(p)\|^2}$

$$\Rightarrow \quad d(g,h) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\alpha-1|$$