Analysis 1 – Tutorium 10
robin.mader@campus.lmu.de
22.1.2021

Aufgabe 1 (Rechentraining zu Taylorapproximationen)**.** Später beweisen wir für n-fach in 0 differenzierbare Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Umgebung von 0, die Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad \text{für } x \to 0.$$

(a) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n + \sqrt[3]{n^2}} - \sqrt[3]{n} \right)$ unter Verwendung der Taylorapproximation der Funktion $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ nahe 0.

(b) Finde die Taylorentwicklung von $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^{-2}$ nahe 0.

(c) Finde $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{\cos(x)} = a + bx + cx^2 + o(x^3)$ für $x \to 0$.

Aufgabe 2. Zeige: Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist differenzierbar in allen $x \in \mathbb{R}$ und berechne f'. Ist f' stetig?

Aufgabe 3 (Riemannsummen zu $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$)**.** (a) Berechne $\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ unter Verwendung der komplexen Exponentialfunktion und der geometrischen Summe.
(b) Folgere:

$$\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Aufgabe 4 (Machinsche Formel)**.** (a) Beweise die Funktionalgleichung des Arcus-Tangens: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

(b) Folgere die "Machinsche Formel": $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$.

Aufgabe 5 (Mittelwertsatz)**.** Seien $f, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und differenzierbar auf dem Inneren $]a,b[$, $a < b$. Betrachte

$$D\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix}.$$

Zeige: D ist differenzierbar auf $]a,b[$, und es gibt $c \in]a,b[$ mit $D'(c) = 0$.
Bemerkung: Für die konstante Funktion $h = 1$ folgt hieraus der verallgemeinerte Mittelwertsatz 4.21. Für $h = 1$, $g = \mathrm{id}$, folgt der Mittelwertsatz 4.18.