Analysis Tutorium 9

21. 12. 2022

Aufgabe 1 (Faltung einer integrierbaren und einer f.ü. beschränkten Funktion).
Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ und $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (siehe Übungsblatt 5). Zeigen Sie: Die Faltung $f * g$ ist eine beschränkte und gleichmäßig stetige Funktion auf $\mathbb{R}^N$ mit

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}.$$

Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass $\lim_{|x|\to\infty}(f * g)(x) = 0$ i.A. *nicht* gilt.

Erinnerung: $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, g(y)\, dy$ wann immer das Integral existiert.

Vgl.: Ausmultiplizieren: $f = \sum_k f_k x^k$, $g = \sum_\ell g_\ell x^\ell$ Polynome

$$\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k,\ell} f_k g_\ell x^{k+\ell} = \sum_n \underbrace{\Big(\sum_m f_{n-m} g_m\Big)}_{\text{so kann man Faltung für Fkt. } \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} \text{ definieren}} x^n$$

$$= \sum_n f*g(n)\, x^n.$$

In der Aufgabe: (sehr analog zu einem Lemma aus der Vorlesung)

$$|f*g(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ugl.} \\ \text{für das} \\ \text{Lebesgue-Int.}}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| \cdot \underbrace{|g(y)|}_{\leq \sup_z |g(z)| = \|g\|_\infty < \infty} dy$$

$$\leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, dy = \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|\, dy$$

$$= \|g\|_\infty \|f\|_1 < \infty$$

Das zeigt, dass $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ integrierbar ist (für alle x), und dass $f*g$ beschränkt ist.

Es bleibt: gleichmäßige Stetigkeit:

Erinnerung: $p: \underset{\underset{\mathbb{R}^N}{\cap}}{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig

$$\Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \sup_{\substack{x\in\mathcal{U}: \\ x-h\in\mathcal{U}}} |\underbrace{p(x-h)}_{=: (\tau_h p)(x)} - p(x)| = 0.$$

Nun:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\underbrace{\tau_h(f*g)(x)}_{=(\tau_h f)*g} - f*g(x)| \overset{\int \text{ ist linear}}{=} \sup_x |(\tau_h f - f)*g| \underset{\text{s.o.}}{\leq} \|g\|_\infty \overbrace{\|\tau_h f - f\|_1}^{\xrightarrow{h\to 0} 0}$$

Aufgabe 2 (Die Deltafunktion existiert nicht).
Zeigen Sie, dass es keine Funktion $\delta \in L^1(\mathbb{R}^N)$ gibt mit $\delta * f \overset{\lambda\text{-f.ü.}}{=} f$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Bemerkung: Eine solche Funktion kann jedoch beliebig gut approximiert werden, siehe Übungsblatt 9, Aufgabe 3.

B2: Für Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ existiert die Deltafunktion $\delta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$,

$$\delta * f = f$$

Lsg zu A1: Durch Widerspruch. Nehme $f = \mathbb{1}_{B_r(0)}$, $r \geq 0$.

$\Rightarrow$ Für λ-fast alle $x \in B_r(0)$ gilt:

$$1 = \mathbb{1}_{B_r(0)}(x) = \delta * \mathbb{1}_{B_r(0)}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \delta(x-y)\, \mathbb{1}_{B_r(0)}(y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \delta(y)\, \underbrace{\mathbb{1}_{B_r(0)}(x-y)}_{\mathbb{1}_{B_r(x)}(y)}\, dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\delta(y)|\, \mathbb{1}_{B_r(x)}(y)\, dy \leq \underbrace{\|\delta\|_1}_{\text{Majorante}} < \infty$$

$\downarrow r \to 0$ dom. Konv.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\delta(y)| \underbrace{\lim_{r\to 0} \mathbb{1}_{B_r(x)}(y)}_{= \mathbb{1}_{\{x\}}(y)}\, dy = 0. \quad ↯$$

$\lambda(\{x\}) = 0$

□

Alternativ: $f := \delta * \mathbb{1}_{B_1(0)}$ ist stetig nach Aufgabe 1,

& $f = \mathbb{1}_{B_1(0)}$ f.ü., sagen wir $\{x \mid f(x) \neq \mathbb{1}_{B_1(0)}(x)\} \subseteq N$, $\lambda(N) = 0$.

$$\lambda(f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0,1\})) \overset{\lambda(N)=0}{=} \lambda(f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0,1\}) \cap N^c) = \lambda(\mathbb{1}_{B_1(0)}^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0,1\}) \cap N^c)$$

$$= \lambda(\emptyset) = 0.$$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0,1\})$ ist offen vom Maß $= 0$ $\quad \Rightarrow B_1(0)^c \subseteq N$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0,1\}) = \emptyset \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f \equiv 0$ oder $f \equiv 1 \Longrightarrow$ ↯. □

$\Rightarrow B_1(0) \subseteq N$

Aufgabe 3 (Wärmeleitungsgleichung)**.** Für $t > 0$ bezeichnen wir die Funktion

$$K_t\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

als N-dimensionalen *Wärmeleitungskern.* Zeigen Sie:

(a) Für alle $t > 0$ ist $\|K_t\|_{L^1} = 1$.

a) $\|K_t\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\det \varphi|}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|\varphi(z)|^2}{4t}} dz$

$\varphi : \mathbb{R}^N \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^N$

$z \mapsto 2\sqrt{t}\, z = x$

$D\varphi(z) = \varphi$ (lineare Transformation)

$|\det \varphi| = (2\sqrt{t})^N$

$= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\pi^{N/2}} e^{-|z|^2} dz \underset{\uparrow}{=} 1$

Gauß-Integral

(b) Für gegebenes $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ist die Funktion

$$u\colon \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad u(x,t) := (g * K_t)(x)$$

beliebig oft differenzierbar und erfüllt die Gleichung

$$\Delta_x u = \frac{\partial}{\partial t} u. \tag{1}$$

Gleichung (1) heißt *Wärmeleitungsgleichung*; $u(x,t)$ kann man interpretieren als die Temperatur im Punkt x zum Zeitpunkt t.

$g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $K_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ und $\partial^\alpha K_t$ beschränkt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

$(e^{-|x|^2} \gg p(x)$, p Polynom, für $x \to \infty)$

Prop. aus der Vorlesung $\Longrightarrow$ $u(\cdot, t) = g * K_t$ ist $\mathcal{C}^\infty$ und $\partial^\alpha (g * K_t) = g * \partial^\alpha K_t$

Linearität + ↓

$\Longrightarrow \Delta_x (g * K_t) = g * \Delta_x K_t$

<u>Noch zz:</u> $u(x,\cdot)$ ist $\mathcal{C}^\infty$. Es genügt, für alle $b > a > 0$ zz: $u(x,\cdot)\big|_{]a,b[}$ ist $\mathcal{C}^\infty$.

wichtiger Trick!

Wir wollen die Übungsaufgabe zu Vertauschung von Integral und Ableitung anwenden.

hängt von a & b ab

$\int |\partial_t g(x-y) K_t(y)| dy = \int |g(x-y)| \frac{|y|^2}{4t^2} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy \underset{(*)}{\leq} \int |g(x-y)|\, C = C \|g\|_1 < \infty$

In (*) wollen wir folgendes zeigen:

$\exists C>0$: Die Funktion $a: (y,t) \mapsto \frac{|y|^2}{4t^2} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$ ist auf $\mathbb{R}^N \times [a,b]$ beschränkt durch C.

Es gilt $\frac{R^2}{4a^2} e^{-\frac{R^2}{4b}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$. Also: $a(y,t) = \frac{|y|^2}{4t^2} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \leq \frac{|y|^2}{4a^2} e^{-\frac{|y|^2}{4b}} < 1$.

$\frac{1}{t} < \frac{1}{a}$, $-\frac{1}{t} < -\frac{1}{b}$

für $|y| > R > 0$ genügend groß.

Also gilt für alle $(y,t) \in \mathbb{R}^N \times [a,b]$: $a(y,t) < \max\left\{1, \max_{(y,t) \in \underbrace{\overline{B_R(0)} \times [a,b]}_{\text{kompakt}}} \overbrace{a(y,t)}^{\text{stetig}}\right\} =: C$.

Das zeigt (*), und wir dürfen Integral und Ableitung vertauschen.

Also: $\partial_t (g * K_t) = g * \partial_t K_t$

Analog für höhere Ableitungen! $P(\frac{1}{t}) e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \xrightarrow{t\to\infty} 0$ für alle Polynome P mit $P(0)=0$.

Jetzt müssen wir nur noch $\Delta_x K_t = \partial_t K_t$ zeigen! (und dann $g*$ − anwenden)

$$K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$\partial_{x_i} K_t = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \left(\frac{-x_i}{2t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$\partial_{x_i}^2 K_t = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \left(\frac{x_i^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$\Longrightarrow \Delta_x K_t = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{N}{2t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} =$$

$$\& \quad \partial_t K_t = \left(\frac{-\frac{N}{2} \cdot 4\pi}{(4\pi t)^{N/2+1}} + \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \frac{|x|^2}{4t^2}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{N}{2t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

wie gewünscht.

5

(c) Für $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ mit $1 \leq p < \infty$ gilt $\lim_{t\to 0}\|u(\cdot,t) - g\|_{L^p} = 0$. Falls g stetig und beschränkt ist, gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, dass

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0).$$

In diesem Sinne gibt die Funktion g also das Wärmeprofil zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

c) $\|u(\cdot,t) - g\|_p = \|g * K_t - g\|_p \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ nach Vorlesung:

$$\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N),\ \|\varphi\|_1 = 1,\ \varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\ f \in L^p(\mathbb{R}^N)$$
$$\Longrightarrow \varphi_\varepsilon * f \to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_p.$$

(Bei uns: $\varepsilon = \sqrt{4t}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\pi^{N/2}} e^{-|x|^2}$, $f = g$.)

Ferner (auch aus Vorlesung): g stetig & beschränkt $\Rightarrow$ $g * K_t \xrightarrow{t\to 0} g$ gleichmäßig auf Kompakta.

Jetzt so: $\varepsilon > 0 \underset{g \text{ stetig}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0: \forall x \in B_\delta(x_0): |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2$

$$u(\cdot,t) = g * K_t \xrightarrow{t\to 0} g \text{ gleichmäßig auf } \overline{B_{\delta/2}(x_0)} \subset B_\delta(x_0)$$
$$\Rightarrow \exists \gamma > 0: \forall t \in]0,\gamma[: \sup_{x \in \overline{B_{\delta/2}(x_0)}} |u(x,t) - g(x)| < \varepsilon/2$$
$$\Rightarrow \forall (x,t) \in B_{\delta/2}(x_0) \times]0,\gamma[: |u(x,t) - g(x_0)| \overset{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} |u(x,t) - g(x)| + |g(x) - g(x_0)|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \square$$