Analysis 1 – Tutorium 3
robin.mader@campus.lmu.de
20.11.2020

Aufgabe 1 (Suprema)**.** (a) Aktivierungselement 1.25: Gegeben $a \in \mathbb{R}$, zeige

$$\sup\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = a.$$

(b) Bestimme $\sup\{\frac{n^2}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(c) Übung 3.2a: Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ setze $A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$. Zeige:

$$\sup A + \sup B = \sup(A + B).$$

(d) Aktivierungselement 1.28: 1. Zeige:

$$\forall a > 1 \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}_0 : \frac{1}{a^n} < \varepsilon.$$

2. Folgere $\forall a > 1 : \inf\{\frac{1}{a^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = 0$.

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen)**.** (a) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Skizziere folgende Mengen komplexer Zahlen:
1. Kreisringe: $K = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$, wobei $r, R \in \mathbb{R}$, $r < R$.
2. Winkelräume: $W = \{z \in \mathbb{Z} \mid \alpha_1 < \arg(z - z_0) < \alpha_2\}$, wobei $-\pi < \alpha_1 \leq 0 \leq \alpha_2 \leq \pi$. Für $z \in \mathbb{C}$ ist dabei $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$ eindeutig bestimmt durch $z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$.
(b) Bestimme die Lösungen der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ in $\mathbb{C}$ in kartesischen Koordinaten, und in Polarkoordinaten.
(c) Aktivierungselement 1.32: Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass es genau zwei Lösungen der Gleichung $w^2 = z$ gibt, und bestimme Real- und Imaginärteil dieser "komplexen Quadratwurzeln" von z mittels reeller arithmetischer Operationen und reeller Quadratwurzelbildung in Abhängigkeit von a und b.

Aufgabe 3 (Stereographische Projektion)**.** (a) Aktivierungselement 1.35: Bestimme die Abbildungsvorschrift der inversen stereographischen Projektion

$$f : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{(0,0,1)\}, \quad a + bi \mapsto \begin{array}{l} \text{von } N := (0,0,1) \text{ verschiedener Schnittpunkt} \\ \text{der Geraden durch } N \text{ und } (a,b,0) \\ \text{mit } S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \end{array}$$

(b) Zeige, dass

$$g : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}, \quad g(x,y,z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$$

zu f invers ist.