Analysis 1 – Kurztest

Es besteht kein Zusammenhang zur Prüfungsrelevanz des hier präsentierten Stoffes. Die Bearbeitungszeit dieses Kurztests beträgt 20 Minuten.

Aufgabe 1. Beweise: $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 4 \implies n! > 2^n$.

Lösung. Beweis durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$.
Induktionsanfang: Offenbar gilt $4! = 24 > 16 = 2^4$.
Induktionsvoraussetzung: Gegeben $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ gelte $n! > 2^n$.
Induktionsschritt: Dann gilt auch $(n+1)! = (n+1)n! \overset{I.V.}{>} (n+1)2^n \overset{n+1>2}{>} 2^{n+1}$. □

Aufgabe 2. Stelle folgende komplexe Zahlen in kartesischen Koordinaten dar:

$$z_1 = (4-3i)(-2i+8), \quad z_2 = (1+2i)^{-1}, \quad z_3 = |3-4i|.$$

Lösung. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} z_1 &= (4-3i)(-2i+8) = (4 \cdot 8 - 3 \cdot 2) + i(-3 \cdot 8 - 2 \cdot 4) = 26 - 32i, \\ z_2 &= \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{|1+2i|^2} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, \\ z_3 &= |3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Es seien $z \in \mathbb{C}$ und $U \subseteq \mathbb{C}$. Definiere folgende Aussage mithilfe eines prädikatenlogischen Ausdrucks: "U ist eine offene Umgebung von z."

Lösung. Die zu formulierende Aussage ist gleichbedeutend mit "z liegt in U und U ist offen". "U ist offen" bedeutet, dass jedes $x \in U$ noch eine ε-Umgebung hat, die ganz in U enthalten ist. Formal ist die zu formulierende Aussage also:

$$z \in U \ \wedge \ \forall x \in U \, \exists \varepsilon > 0 \, \forall y \in \mathbb{C} : [|x-y| < \varepsilon \Rightarrow y \in U].$$

□

Aufgabe 4. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Definiere folgende Aussage mithilfe eines prädikatenlogischen Ausdrucks: "$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{C}$."

Lösung. Der gesuchte prädikatenlogische Ausdruck lautet

$$\exists z \in \mathbb{C} \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N} \, \forall m > n : |z_m - z| < \varepsilon.$$

□

Aufgabe 5. Bestimme, im Falle der Existenz, das Supremum, Infimum, Minimum und Maximum der Menge $M = [0,1] \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, n[\right)$.

Lösung. Offenbar $M =]0,1]$. M besitzt also kein Minimum, aber

$$\inf M = 0, \quad \text{und} \quad \sup M = \max M = 1.$$

□

Aufgabe 6.

(a) Zeige: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergiert.

(b) Berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

(c) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Lösung. (a) Wegen $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^2}$ und der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ nach dem Majorantenkriterium.

(b) Man bemerke $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Damit ergeben die Partialsummen als Teleskopsummen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1.$$

(c) Zum Beispiel so: Bekanntlich gilt $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, also

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sin(h) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \sin'(0) = 1.$$

□

Aufgabe 7. Zeige, dass die komplexe Konjugation $\overline{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung ist.

Lösung. Stetigkeit von $\overline{\cdot}$ bedeutet per Defintion:

$$\forall x \in \mathbb{C}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in \mathbb{C} : [|x - y| < \varepsilon \Rightarrow |\overline{x} - \overline{y}| < \varepsilon].$$

Das prüfen wir nach: Sei also $x \in \mathbb{C}$ und sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \varepsilon > 0$. Sei noch $y \in \mathbb{C}$ mit $|x - y| < \delta$. Dann folgt direkt:

$$|\overline{x} - \overline{y}| = |\overline{x - y}| = |x - y| < \delta = \varepsilon,$$

da $\overline{\cdot}$ ein Körperautomorphismus ist, dessen Wirkung auf $\mathbb{C}$ den Betrag invariant lässt. □

Aufgabe 8. Berechne schnell:

(a)

$$\frac{d}{dx} \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right), \quad x > 0,$$

(b)

$$\frac{d}{dx} \exp\left(-x^{3/2}\right), \quad x > 0.$$

Lösung. Wir berechnen schnell: (a)

$$\frac{d}{dx} \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \frac{1 + \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-1/2} \cdot 2x}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

und (b)

$$\frac{d}{dx} \exp\left(-x^{3/2}\right) = -\frac{3}{2} \sqrt{x} \exp\left(-x^{3/2}\right).$$

□