Analysis 1, Tutorium 9

Kurztest (zur Selbsteinschätzung?): 8:20 – 8:40

rtmades.github.io/ana1/ana1kt.pdf

(Link im Chat!)

Aufgabe 6.

(a) Zeige: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergiert. Aus HA: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

(b) Berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

(c) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

(a) Es gilt: $\forall n \in \mathbb{N}: n^3 \geq n^2$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

Majorantenkriterium: $\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^3}}_{= \zeta(3)} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < \infty$

existiert.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)}} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}_{= 1 - \frac{1}{k+1}} = 1$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{n}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\forall z \in \mathbb{R}: \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{n}\right)^{2k}}{(2k+1)!} \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} (\cdots) = 1.$$

Dominierte Konvergenz: $\left| \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{n}\right)^{2k}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{1}{(2k+1)!} \leq \frac{1}{k!}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e < \infty$

ist Majorante

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin(0)}{1/n} = \sin'(0)$$

$$= \cos(0) = 1.$$

Aufgabe 5. Bestimme, im Falle der Existenz, das Supremum, Infimum, Minimum und Maximum der Menge $M = [0,1] \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, n[\right)$.

$$\underbrace{[0,1] \cap \underbrace{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\tfrac{1}{n}, n[\right)}_{=]0,\infty[}}_{=]0,1] = M}$$

$\inf M = 0 \notin M \rightsquigarrow$ kein Minimum.

$\sup M = 1 \in M$

$= \max M$

Aufgabe 7. Zeige, dass die komplexe Konjugation $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung ist.

$\forall x \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{C}: |x-y| < \delta \Rightarrow |\bar{x} - \bar{y}| < \varepsilon.$

Sei $x \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle y mit

$|x-y| < \delta$: $\quad |\bar{x} - \bar{y}| = |\overline{x-y}| = |x-y| < \delta = \varepsilon.$ $\square$

Aufgabe 1 (Rechentraining zum Finden von Stammfunktionen). Bestimme Funktionen f, definiert auf geeigneten nichtleeren offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die die folgenden Ableitungen f' besitzen:

(a) $f'(x) = \frac{1}{1-2x}$

(b) $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

(c) $f'(x) = \tan(x)$

(d) $f'(x) = xe^{\alpha x^2}$, wobei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine gegebene Zahl sei.

(b) $f(x) = \log(1 + \exp(x))$

(c) $f(x) = -\log(\cos(x))$

$$f'(x) = -\frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x))$$

$$= \frac{\sin}{\cos}(x)$$

$$= \tan(x).$$

$$\log'(z) = \frac{1}{z}$$

(a) $f\colon x \mapsto -\frac{1}{2}\log(1-2x)$

$$]\infty, \tfrac{1}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-2x}\,\underbrace{(1-2x)'}_{-2}$$

(d) $f(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x^2}$, $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}.$

Ableitung komponentenweise $(\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f))$

Aufgabe 2. Es seien $a > 0$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$.

(a) Zeige: g ist überall differenzierbar und berechne g'.

(b) Folgere: $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a$. *Tipp:* Verwende $g'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(1/n)-g(0)}{1/n}$.

(a) $a^x \overset{?}{=} \exp(x \log a)$

$$\left(= \exp(\log(a^x)) \right)$$

Differenzierbarkeit bei $x \in \mathbb{R}$ folgt aus der Kettenregel:

$$g'(x) = (a^x)' = (\exp(x \log a))'$$

$$= \exp(x \log a)(\log a)$$

$$= (\log a)\, g(x)$$

$$g'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(\frac{1}{n}) - g(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n} - 1}{1/n}$$

$$\| $$

$$\log a$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$$

Aufgabe 5. Es seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ *gleichmäßig differenzierbar** auf U, d.h. f ist differenzierbar auf ganz U und es gilt

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in U : |x - y| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

Zeige: f' ist stetig.

---

*Abseits dieser Aufgabe unübliche Sprechweise.

f' stetig $\iff$ $\forall x \in \mathcal{U} \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in \mathcal{U}$:

$$y \in \mathcal{U}_\delta(x) \implies f'(y) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f'(x))$$

Sei $x \in \mathcal{U}$ und $\varepsilon > 0$. Sei $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon/2$.

Wende $(*)$ auf $\tilde{\varepsilon}$ an $\rightsquigarrow$ das liefert $\delta > 0$.

Sei $y \in \mathcal{U}_\delta(x)$.

$$|f'(x) - f'(y)| = \left| f'(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} + \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(y) \right|$$

$$\underset{\Delta\text{-}\neq}{\leq} \underbrace{\left| f'(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|}_{< \tilde{\varepsilon}} + \underbrace{\left| \overbrace{\frac{f(x) - f(y)}{x - y}}^{= \frac{f(y) - f(x)}{y - x}} - f'(y) \right|}_{< \tilde{\varepsilon}}$$

$$< 2\tilde{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Aufgabe 3 (Zusammenhang)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *zusammenhängend*, falls gilt:

$$\forall A, B \in \mathcal{T} : [(X = A \cup B) \wedge (A \cap B = \emptyset) \implies (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)] .$$

X wird disjunkt zerlegt

Beweise:

(a) X ist zusammenhängend genau dann, wenn die einzigen "abgeschloffenen" Mengen in X der ganze Raum X und die leere Menge $\emptyset$ sind.

(b) Sind $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$, und X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$, versehen mit der Unterraumtopologie, zusammenhängend.

(c) $[0, 1]$ ist zusammenhängend.

Folgere den Zwischenwertsatz: Angenommen, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig. Dann gilt $f([0, 1]) \supseteq [f(0), f(1)]$.

$\mathcal{T}$ Topologie auf X ← Menge

$\subseteq$

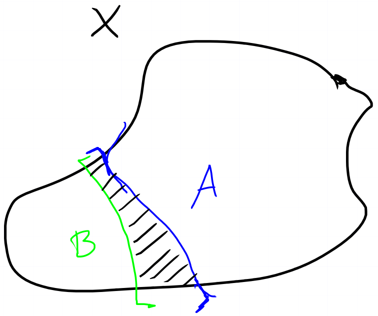
$\mathcal{P}(X)$

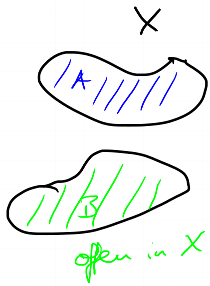
$\iff$ 1. $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

2. $\forall (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I$:

$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

3. $\forall A, B \in \mathcal{T}$: $A \cap B \in \mathcal{T}$.





$\mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

$f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ stetig.

(d.h. Urbilder offener Mengen sind offen)

$\forall U \in \mathcal{S} : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

X zusammenhängend $\implies (f(X), \mathcal{S}_{f(X)})$ zusammenhgd.

zz: $\forall A, B \in \mathcal{J}_{f(X)} : \quad f(X) = A \cup B \ \wedge \ A \cap B = \emptyset$

$$\Rightarrow \ (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$$

$A, B \in \mathcal{J}_{f(X)} \rightsquigarrow \ \exists \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{J} : \quad \tilde{A} \cap f(X) = A$

$$\tilde{B} \cap f(X) = B$$

$f(X) = A \cup B, \qquad A \cap B = \emptyset$

$$\begin{aligned} X = f^{-1}(f(X)) &= f^{-1}(A \cup B) \\ &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ &= f^{-1}(\tilde{A} \cap f(X)) \ \cup \ f^{-1}(\tilde{B} \cap f(X)) \\ &= f^{-1}(\tilde{A}) \cup f^{-1}(\tilde{B}) \end{aligned}$$

$\in$ ← Stetigkeit → $\in$

$\tau \qquad \tau$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\tilde{A}) \cap f^{-1}(\tilde{B}) &= f^{-1}(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \\ &= f^{-1}(\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap f(X)) \\ &= f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \underset{\underset{f^{-1}(A)}{\|}}{f^{-1}(\tilde{A})} = \emptyset$ oder $\underbrace{f^{-1}(\tilde{B}) = \emptyset}$ $\Rightarrow B = \emptyset$

$\underset{A \subseteq f(X)}{\Longrightarrow} \ \emptyset = A$

(c) Wieso ist $[0,1]$ zusammenhängend?

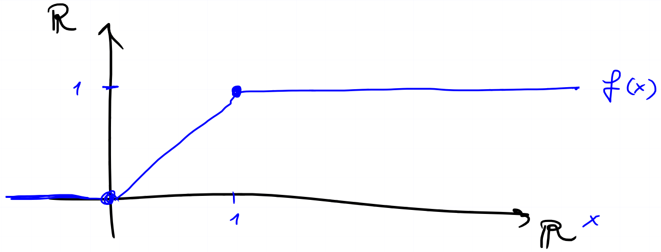
HA: $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

$|\sin|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig

$\Rightarrow |\sin|(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend

$\quad = [0,1]$

Komposition von stetigen Abbildungen.



Stetigkeit von f nach Pasting Lemma.