Analysis 1 Tutorium 4

27.11.2020

1. **Rechnungen mit komplexen Zahlen.** Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

"8-te Einheitswurzel"

$$z_1 = \frac{1}{i}, \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8, \quad z_3 = \frac{1+i}{1-i}, \quad \text{und} \quad z_4 = \sum_{n=1}^{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$$

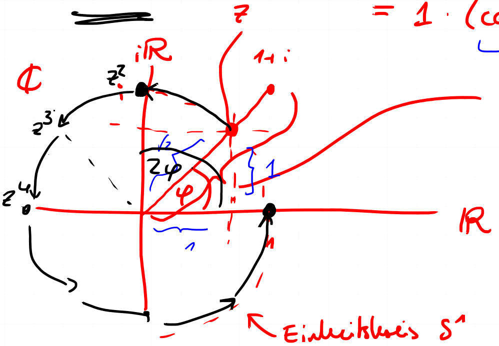
   (a) direkt in der Darstellung mit Real- und Imaginärteil,
   (b) unter Verwendung der Polardarstellung.

   Veranschaulichen Sie sich die Rechnungen auch graphisch in der komplexen Ebene.

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1.$$

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = 1 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= 1 \cdot \Big(\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big) = e^{i\frac{\pi}{4}}$$



$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$$

$$\left|\frac{1}{|z|}\cdot z\right| = \frac{1}{|z|}\,|z|$$

reelle Zahl

"Homogenität"

$z = 1+i$

$|z| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = 1.$$

$z = a+bi, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$

Beh.: $|\alpha z| = \alpha\,|z|$

$\alpha = \frac{1}{|z|}$

$$= |\alpha a + \alpha b i| = \sqrt{\alpha^2(a^2+b^2)} = \alpha\sqrt{a^2+b^2}$$

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

- — — —

$$z_2 = z^8 = 1^8\cdot\left(\overbrace{\cos\left(\overbrace{8\cdot\frac{\pi}{4}}^{=2\pi}\right)}^{=1} + \overbrace{i\sin\left(\overbrace{8\cdot\frac{\pi}{4}}^{=2\pi}\right)}^{=0}\right) = 1$$

$$\uparrow$$

$$z = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

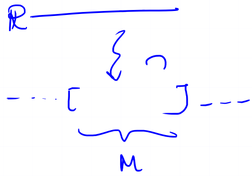
Aufgabe 1 (Kompaktheit). *Erinnerung:* Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt kompakt, falls es für $\forall$ jede Familie $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$ von offenen Mengen in X mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine $\exists$ endliche Indexmenge $E \subset I$ gibt, sodass noch $X = \bigcup_{i\in E} U_i$ gilt.

1. Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}_\mathbb{R}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. Es seien $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $\mathcal{T}_M = \{V \cap M \mid V \in \mathcal{T}_\mathbb{R}\}$ die Relativtopologie. Zeige:

M ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ (im Sinne der Definition 2.26)

$$\Longleftrightarrow \quad \text{"}\Rightarrow\text{"}$$

$(M, \mathcal{T}_M)$ ist ein kompakter topologischer Raum.



$M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt $\Longleftrightarrow \forall (U_i)_{i\in I}$ offene Mengen $\subseteq \mathbb{R}$:

$[M \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i] \Rightarrow [\exists E \subseteq I:$ E endlich $\&$ $M \subseteq \bigcup_{i\in E} U_i]$

Menge von offenen Mengen

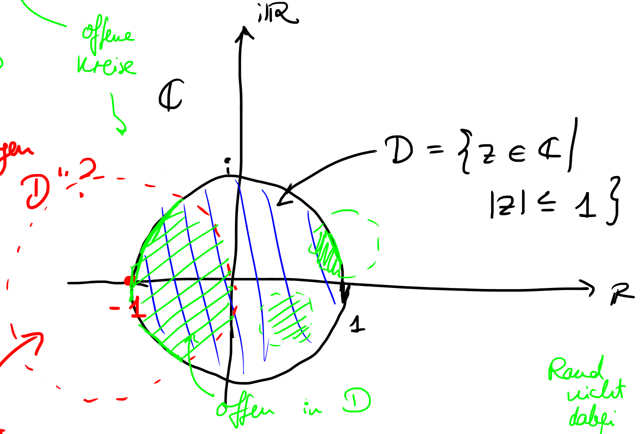
$(M, \mathcal{T}_M)$ soll kompakt sein

$\mathcal{T}_M = \{V \cap M \mid V \subseteq \mathbb{R} \text{ offen}\}$

M=D

offene Kreise

"offene Mengen in D"?



offene Kreis um -1 $= U_1(-1)$

in ℂ

$= \{z \in \mathbb{C} \mid |-1-z| < 1\}$

Abstand von -1 zu z

Angenommen, $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ ist eine Familie von offenen Mengen in der Relativtopologie von M, sodass $M = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$.

$\underline{\underline{\text{ZZ}}}$: Es existiert $E \subseteq I$, $|E| < \infty$, sodass noch immer $M = \bigcup_{i\in E} \mathcal{U}_i$.

$\mathcal{U}_i$ ist offen $\underline{\underline{\text{in } M}}$ $\iff$ $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}_M$

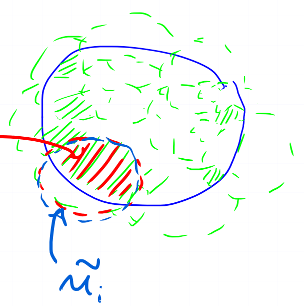
$\iff$ $\mathcal{U}_i = \tilde{\mathcal{U}}_i \cap M$ für ein $\underbrace{\tilde{\mathcal{U}}_i \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}}_{\tilde{\mathcal{U}}_i \text{ offen in } \mathbb{R}}$

Bemerke, dass

$$M = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i = \bigcup_{i\in I} (\tilde{\mathcal{U}}_i \cap M) = \Big(\underbrace{\bigcup_{i\in I} \tilde{\mathcal{U}}_i}_{\substack{\text{offene Überdeck. von } M \\ \text{mit offenen Mengen in } \mathbb{R}}}\Big) \cap M \subseteq \bigcup_{i\in I} \tilde{\mathcal{U}}_i.$$

in $\mathbb{R}$

M ist kompakt $\underline{\underline{\text{in } \mathbb{R}}}$, also hat die offene Überdeckung $(\tilde{\mathcal{U}}_i)_{i\in I}$ eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt $E \subseteq I$ endlich, mit $M \subseteq \bigcup_{i\in E} \tilde{\mathcal{U}}_i$.



Daraus folgt: $M = M \cap \left(\bigcup_{i\in E} \tilde{\mathcal{U}}_i\right) = \bigcup_{i\in E} (M \cap \tilde{\mathcal{U}}_i)$

$$= \bigcup_{i \in E} \mathcal{U}_i .$$

offene Mengen in M

In $\mathbb{R}$: $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt

$$\Longleftrightarrow \underbrace{M \text{ beschränkt}}_{\exists r \in \mathbb{R}:\ \forall m \in M:\ |m| \leq r.} \wedge M \text{ abgeschl.}$$

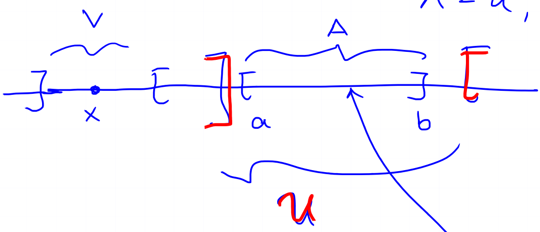
wichtiger Satz zur Kompaktheit

Beispiel eines topologischen Raumes, der kompakt ist ($\not\subseteq$ nicht $\subseteq \mathbb{R}$) : $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Trennung von Punkten: $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus A$

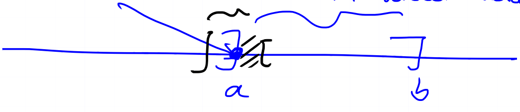
Frage: Gibt es offene Mengen $\mathcal{U}, V \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathcal{U}$, $x \in V$, $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$?



kompakt (abgeschlossenes Intervall.)

$x = a$?

A nicht kompakt



Satz 2.23 (Satz von Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

wichtig!

Beweis: Mit Hilfe der Beschränktheit der gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen wir ein $M \geq 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq M$. Betrachten wir die Menge

$$\begin{aligned} K &= \{x \in \mathbb{R} \mid \text{für alle genügend großen } n \text{ gilt: } a_n \geq x\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m :\ a_n \geq x\}. \end{aligned}$$

← „Zeitpunkt m"

Es gilt $-M \in K$, weil für alle n (und damit erst recht für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$) gilt: $a_n \geq -M$. Also ist $K \neq \emptyset$.
Weiter ist M eine obere Schranke von K. (*Beweis hierzu:* Es sei $x \in K$ gegeben; zu zeigen ist nun $x \leq M$. Weil für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geq x$, finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq x$, so dass $x \leq a_n \leq |a_n| \leq M$ und damit die Behauptung $x \leq M$ folgt.)

Transitivität von „≤"

$\exists n$ $x \in K$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert das Supremum $s := \sup K \in \mathbb{R}$ der nichtleeren, nach oben beschränkten Menge K.
Wir zeigen nun: s ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Hierzu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu zeigen ist nun, dass unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $U_\epsilon(s)$ liegen. Weil s eine obere Schranke von K ist und $s + \varepsilon > s$ gilt, folgt $s + \varepsilon \notin K$. Nach der Definition von K bedeutet das:

$$\neg\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m :\ a_n \geq s + \varepsilon,$$

anders gesagt:

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n > m :\ a_n < s + \varepsilon,$$

$\mathbb{N} \hookrightarrow \{a_m \mid m \in \mathbb{N},\ a_m < s+\varepsilon\}$

d.h. es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n < s + \varepsilon$. Die Zahl s ist obere Schranke von K, die Zahl $s - \varepsilon$ jedoch nicht, da $s - \epsilon$ kleiner als die *kleinste* obere Schranke $s = \sup K$ von K ist. Wir finden also ein $x \in K$ mit $s - \varepsilon < x \leq s$, d.h. für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geq x > s - \varepsilon$, anders gesagt

$x \in K$

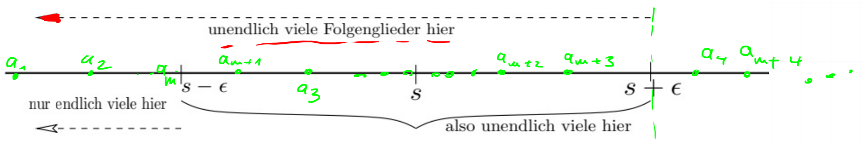
$$\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n > m :\ a_n \geq x > s - \varepsilon.$$

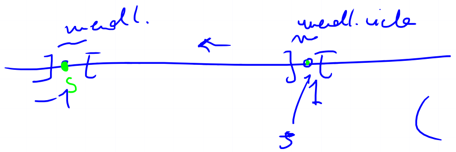
s ist kleinste ob. Schranke

Wir schließen: Unendlich viele der Folgenglieder müssen zwischen $s - \varepsilon$ und $s + \varepsilon$ liegen, d. h. die ε-Umgebung $U_\varepsilon(s) =]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$ von s enthält unendlich viele Folgenglieder. Das war zu zeigen.

□

Illustration zum Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß:





$$\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

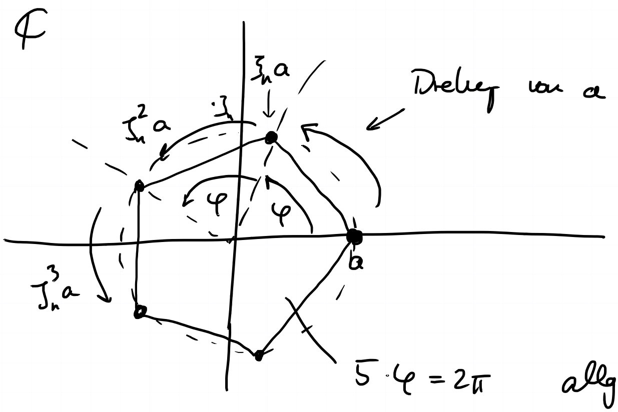
beschränkt durch 1

(da $|(-1)^n| = |-1|^n = 1$) ≤ 1

Aufgabe 2. Es sei $P \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit Zentrum $0 \in \mathbb{C}$, wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Wir nehmen an, dass ein Eckpunkt auf der reellen Achse liegt, sagen wir $a \in \mathbb{R} \cap P$. $\mathbb{N} \setminus \{1\}$

(a) Schreibe P als Menge in aufzählender Notation. Stelle hierbei die Elemente aus P in Polarkoordinaten dar.

(b) Zeige: $\sum_{z \in P} z = 0$.



Drehung von a um $\frac{2\pi}{n}$.

$\varphi = \frac{2\pi}{n}$

$\Updownarrow$

$5 \cdot \varphi = 2\pi$ allg. $n \cdot \varphi = 2\pi$

Ganz allgemein: Drehung $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ um den Winkel φ ist immer gegeben durch $f(z) = (\cos\varphi + i \sin\varphi) \cdot z$

Bei uns: $\zeta_n := \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$

$\rightsquigarrow$ $\zeta_n^n = 1$. $*$

$$P = \{a, \zeta_n a, \zeta_n^2 a, \dots, \zeta_n^{n-1} a\}$$

$*$ bedeutet: ζ_n ist Nullstelle von $x^n - 1$

geometrische Summe

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + \dots + x^{n-1})$$

$\Rightarrow \quad \zeta_n$ auch Nullstelle

von $\quad 1 + \zeta_n + \dots + \zeta_n^{n-1}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{p \in P} p = \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \zeta_n^i a}_{= a \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \zeta_n^i}_{= \underbrace{-1+1}_{=0} + \underbrace{\zeta_n + \zeta_n^2 + \dots + \zeta_n^{n-1}}_{=0}} \right) = -a} \Big) + a = -a + a = 0.$$