Lineare Algebra 2, Tutorium 6

19.5.2021

Warm-Up

Richtig oder Falsch?

$A^*A = AA^*$

https://rtmader.github.io/LA2

1. Seien A, B hermitesch. Dann ist auch $A+B$ hermitesch. ✓
2. Die Menge der hermiteschen $n \times n$-Matrizen ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. ✗
3. Unitäre Matrizen sind normal. ✓ $A^*A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
4. Hermitesche Matrix sind normal. ✓
5. Antihermitesche Matrizen sind normal. ✓

wesentlicher Unterschied zw. unitären VR ($\mathbb{C}$) & euklidischen VR ($\mathbb{R}$)

Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$-VR V, $\langle -,- \rangle : V \to \mathbb{C}$

$\lambda \in \mathbb{C}$, $v, w \in V$, $\langle v, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle$

komplexe Konjugation

Antihermitesch: $A^* = (+)-A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\in \mathbb{C}}{a_{ij}} = x_{ij} + i y_{ij}$$

$$\overline{a_{ij}} = x_{ij} - i y_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3 & 5+2i \end{pmatrix}$$

$$A^* = \overline{A^T} = \overline{\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 2 & 5+2i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{1+i} & \overline{3} \\ \overline{2} & \overline{5+2i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-i & 3 \\ 2 & 5-2i \end{pmatrix}$$

- A, B hermitesch $\overset{?}{\Longrightarrow}$ ✓ $A+B$ hermitesch

$A^* = A$, $B^* = B$ $\Bigg\} \Longrightarrow (A+B)^* = \overline{A+B}^T = (\bar{A}+\bar{B})^T$

$$= \bar{A}^T + \bar{B}^T = A^* + B^* = A+B$$

- Kein $\mathbb{C}$-VR: $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^* = \bar{\lambda} A \cancel{\overset{?}{=}} \lambda A$

A hermitesch: $A^* = A$ $\qquad \lambda = i$, $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Aber $\mathbb{R}$ – VR!

- $A^*A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} =: E_n$

  Linksinverse = Rechtsinverse

  $\Rightarrow AA^* = E_n = A^*A$.

- Ja: $A^* = A$

  $\Rightarrow AA^* = A \cdot A = A^* \cdot A$.

- $A^* = -A \Rightarrow AA^* = A^*A$.

Aufgabe 1

Sei $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ hermitesch. Zeigen Sie, dass auch A^{-1} hermitesch ist.

$$(A^{-1})^* = \overline{(A^{-1})^T} = \overline{(A^T)^{-1}} \underset{\uparrow}{=} (\overline{A^T})^{-1} = (A^*)^{-1} = A^{-1}$$

$$BB^{-1} = E_n$$

$$\overline{B}^{-1} = \overline{B^{-1}} \Leftarrow \overline{B}\,\overline{B^{-1}} = \overline{E_n} = E_n$$

Allgemein: $(AB)^* = B^*A^*$.

Aufgabe 2

Seien $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ hermitesche Matrizen. Zeigen Sie: $AB = BA$ genau dann, wenn AB hermitesch ist.

„$\Leftarrow$": AB hermitesch

$$AB = (AB)^* = \overline{AB}^T = (\overline{A}\,\overline{B})^T = \overline{B}^T \overline{A}^T$$

$$= B^* A^* = B \cdot A$$

Antihomom.

B, A hermitesch

„$\Rightarrow$": $AB = BA = \dots = (AB)^*$.

Aufgabe 3

Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ und A hermitesch. Zeigen Sie, dass auch $f(A)$ hermitesch ist.

$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, X Variable.

$n \in \mathbb{N}$

A^n ist auch hermitesch: $(A^n)^* = \overline{A^n}^T = (\overline{A}^n)^T$

$= (\overline{A}^T)^n = (A^*)^n = A^n$

($-^T$ tauscht Reihenfolge)

& hermitesche Matrizen bilden $\underline{\mathbb{R}\text{-Vektorraum}}$:

$\underbrace{f(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{A^i}_{\text{alle hermitesch}}}_{\text{reelle Linearkombination von hermit. Mat.}}$ $\Rightarrow$ $f(A)$ herm.

↑ reeller Skalar

Aufgabe 4

Geben Sie eine normale 2×2 Matrix an, die weder unitär, hermitesch oder antihermitesch ist.

$$A^* A = E_n = id = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

das kann man am Ende kaputt machen

$$A \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a, b \neq 0$$

Normal: klar: $A^* A = \begin{pmatrix} (a-ib)(a+ib) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A A^*$

$$A^* = \begin{pmatrix} a-ib & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A$$

$a \neq 0 \quad \neq -A \qquad b \neq 0$

$\boxed{\text{Aufgabe 6}} \Rightarrow M_n(\mathbb{C}) = \{\text{hermitesche Matrizen}\} \oplus \{\text{antiherm. Matrizen}\}$

als $\mathbb{R}$-VR

$$A = \underset{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{A_1} + \underset{\begin{pmatrix} ib & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{A_2}$$

Normalität $\overset{?}{\Longleftrightarrow} A_1 A_2 = A_2 A_1$

Aufgabe 5

$A^*A = AA^*$

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ Matrizen mit $AB = BA$ und A normal. Zeigen Sie: $A^*B = BA^*$.

A normal $\underset{\text{Spektralsatz}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, U$ unitär : $U A \underbrace{U^*}_{= U^{-1}} = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\uparrow$ Eigenwerte von A

$B' = U B U^*$

$(UAU^*)(UBU^*) = \boxed{DB' = B'D}$

$AB = BA \Longleftrightarrow U A \underbrace{U^*U}_{= id} B U^* = U B A U^*$

?

$A^*B = BA^* \Longleftrightarrow U^* D^* U (U^* B' U) = (U^* B' U)(U^* D^* U)$

$A^* = (U^* D U)^* = U^* D^* U$

$\Updownarrow$

$\boxed{D^* B' = B' D^*}$

$B' = (b'_{ij})_{i,j}$

$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_i \delta_{ij})_{i,j}$

Geg: $B'D = DB'$

$\forall i,j : \sum_k b'_{ik} \lambda_k \delta_{kj} = \sum_k \lambda_i \delta_{ik} b'_{kj}$

$\qquad\quad\; b'_{ij} \lambda_j \qquad\qquad\qquad \lambda_i b'_{ij}$

$\Rightarrow b_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = 0 \quad \forall i,j$

$\Rightarrow b_{ij} = 0$ oder $\lambda_i = \lambda_j$

Wollen: $B'D^* = D^*B'$ $\qquad D^* = \operatorname{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$

$\Longleftrightarrow \forall i,j : \sum_k b'_{ik} \overline{\lambda_k} \delta_{kj} = \sum_k \overline{\lambda_i} \delta_{ik} b'_{kj}$

$\Longleftrightarrow \forall i,j : b_{ij} = 0$ oder $\underbrace{\overline{\lambda_i} = \overline{\lambda_j}}_{\Longleftrightarrow\, \lambda_i = \lambda_j}$.

Aufgabe 6

normal

1. Zeige: Jede quadratische Matrix über $\mathbb{C}$ ist Summe einer hermiteschen und einer antihermiteschen Matrix.
2. Zeige oder widerlege: Die Summe zweier normaler Matrizen ist wieder normal. × Es genügt, eine nicht normale Matrix A zu finden!

($A = B + C$, herm $\Rightarrow$ normal, antiherm $\Rightarrow$ normal)

1. $$M_n(\mathbb{C}) = \{\text{herm.}\} \underset{\mathbb{R}}{\oplus} \{\text{antiherm.}\}$$

$\subseteq$

$A \in M_n(\mathbb{C})$: $$B_{ij} = \frac{A_{ij} + \overline{A_{ji}}}{2}$$

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad C = \frac{1}{2}(A - A^*)$$

$B + C = A$ (klar)

$$B^* = \frac{1}{2}(A + A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* + A^{**}) = \frac{1}{2}(A^* + A) = B$$

herm.

$$C^* = \frac{1}{2}(A - A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* - A) = -C.$$

antiherm.

2. Eine nicht normale Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Projektionen: $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

$f^2 = f$ $\qquad \boxed{\cong M_2(\mathbb{R})}$

Orthogonale Projektion: $+ \quad \hat{f} = f$

$\left(\Longleftrightarrow_{\text{Tut 3 oder 4}} \quad \ker f \perp \operatorname{im} f \right)$

Wie kann die darstellende Matrix bzgl. der Standardbasis aussehen?

Ansatz: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\quad \underset{\text{darstellende Matrix von } \hat{f}}{\hat{A}} = A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} A = A^T \\ A^2 = A \end{array} \right\} \underset{\text{Rechnerei}}{\Longrightarrow} A = \begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{a(1-a)} \\ \pm\sqrt{a(1+a)} & 1-a \end{pmatrix}$$