Lineare Algebra 2, Tutorium 12

30.6.2021

Warm-Up

Richtig oder Falsch?

1. Jede Matrix $A \in M_n(K)$ definiert eine $K[X]$-Modulstruktur auf K^n. ✓
2. Es ist $A \approx B$ genau dann, wenn $M_A(X) = M_B(X)$. ← charakteristische Matrix $M_A(x) = xE - A$, $E = id_{K^n}$
3. Es ist $A \approx B$ genau dann, wenn die Frobenius-Normalform von A ähnlich zur Frobenius-Normalform von B ist. ✓
4. Es ist $A \approx B$ genau dann, wenn die Frobenius-Normalform von A identisch mit der Frobenius-Normalform von B ist. ✓
5. Es ist $A \approx B$ genau dann, wenn $V_A \cong V_B$ als K-Vektorräume. ✗

(Frobenius-NF sind ähnlich zueinander $\Longleftrightarrow$ F-NF sind gleich.)

$\dim V_A = \dim V_B$ gilt immer

1. $A \in M_n(K)$ $\rightsquigarrow$

$$K[X] \times K^n \longrightarrow K^n$$
$$\Big(f = \sum_{i=1}^m a_i X^i,\ v\Big) \longmapsto f \cdot v = f(A)\cdot v = \sum_{i=1}^m a_i (A^i v)$$

Man schreibt dann $V_A = K^n$ als $K[X]$-Modul.

2. Nein! Satz: $A \approx B \overset{\text{Satz}}{\Longleftrightarrow} M_A(x) \overset{\text{äquivalent}}{\sim} M_B(x)$

ähnlich

$$:\Longleftrightarrow \exists S \in GL_n(K): A = S^{-1} B S$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists P, Q \in GL_n(K): M_A(x) = P^{-1} M_B(x) Q$$

$$\not\Leftarrow \quad M_A(x) = M_B(x)$$

3. Frobenius-Normalform ← Elementarteiler zur Matrix $M_A(x)$

$\forall A \in M_n(K)\ \exists!\ g_1, \dots, g_r \in K[X]_1$, normiert, $\deg g_i \geq 1$,

$g_1 | \cdots | g_r : A \approx B_{g_1, \dots, g_r}$ ← Frobenius-Normalform

$$B_{g_1,\dots,g_r} = \begin{pmatrix} \boxed{B_{g_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{B_{g_r}} \end{pmatrix}$$

$$B_g = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & -a_{m-2} \\ & & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$g = x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$$

Insbesondere:

$$\sum_{i=1}^r \deg g_i = n.$$

$$\chi_A = \prod_{i=1}^r g_i$$

$$\boxed{\mu_A = gr}$$

Aufgabe 1

1. Berechne die Elementarteiler der Relationmatrix $\underset{\overset{\shortparallel}{M_A(x)}}{xE - A}$ zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$.
2. Entscheide, ob die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ ähnlich zueinander sind.

$$M_A(x) = xE - A = \underset{\in M_2(\mathbb{Q}[x])}{\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -5 & x-13 \end{pmatrix}} \overset{}{\underset{2\,\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2x-2 & -2 \\ -10 & x-13 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow\ \mathrm{I}\,\mathrm{S}\cdot + (x-1)\,\mathrm{II}\,\mathrm{S}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \in \mathbb{Q}[x]^\times \\ f & 0 \end{pmatrix} \leftsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \underbrace{(x-1)(x-13)-10}_{=:f} & x-13 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der Elementarteiler ist f

= das Minimalpolynom von A.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat das char. Polynom $(x-1)(x-2)$

$f \nmid (x-1)(x-2)$

(1 ist keine Nullstelle von f)

Das Mipo | char. Polynom $\lightning$ $A \approx B \Rightarrow \mu_A = \mu_B$

also $A \not\approx B$.

Aufgabe 2

Seien $A, B \in M_n(K)$, $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, sodass $B = S^{-1}AS$ und sei $g : V_A \longrightarrow V_B, v \longmapsto S^{-1}v$, wobei V_A bzw. V_B die Menge K^n mit der durch A bzw. B definierten $K[X]$-Modulstruktur bezeichne. Zeige, dass g ein Homomorphismus von $K[X]$-Moduln ist.

- g additiv ist klar, weil g Multiplikation mit Matrix S^{-1}.

- g ist $K[x]$-homogen: zz: $g(fv) = f\,g(v)$ $\forall f \in K[x]$ $\forall v \in V_A = K^n$.

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i X^i,$$

$$\underbrace{f\,g(v)}_{\in V_B} = \sum_{i=1}^{m} a_i B^i \underbrace{g(v)}_{= S^{-1}v} \overset{B = S^{-1}AS}{=} \sum_{i=1}^{m} a_i \underbrace{(S^{-1}AS)^i}_{= S^{-1}A\underbrace{SS^{-1}}_{id}AS \cdots S^{-1}AS} S^{-1}v$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i S^{-1}A^i \underbrace{SS^{-1}}_{= id} v = S^{-1}\sum_{i=1}^{m} a_i A^i v$$

$$= S^{-1} \underset{\text{in } V_A}{f \cdot v} = g(fv).$$

$\square$

g ist sogar ein Isomorphismus von $K[x]$-Moduln.

Aufgabe 3

Für $A, B \in M_3(K)$ gelte $\underbrace{A^3 = B^3 = 0}$. Zeige: $A \approx B \Longleftrightarrow \mu_A(X) = \mu_B(X)$.

$\Rightarrow \mu_A, \mu_B \mid x^3$

$\in K[x]$

hat die gleichen Linearfaktoren $= x$ wie χ_A $\Big\} \Rightarrow \chi_A = \chi_B = x^3$

<u>Satz:</u> Für $n \leq 3$: $\forall A, B \in M_n(K)$:

$A \approx B \Longleftrightarrow \mu_A = \mu_B \;\&\; \chi_A = \chi_B$.

Für $n = 4$ ist das falsch:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\&\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ haben das

gleiche char. Polynom $(= x^4)$

& Minimalpolynom $(= x^2)$.

Was sind die möglichen Elementarteiler?

1. Es gibt maximal 3 Elementarteiler $\left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\deg g_i}_{\geq 1} = 3\right)$
2. $\mu_A = g_r \mid \chi_A = \prod_{i=1}^{r} g_i$

<u>3 Möglichkeiten:</u>

$\mathbb{Q}[x]^\times$

<u>1. Fall:</u> $\mu_A = x \Rightarrow \underset{\underset{\deg \geq 1}{\sim}}{\overset{\not\in}{g_1}} \mid g_2 \mid \mu_A = x \Rightarrow g_1 = g_2 = x$

<u>2. Fall:</u> $\mu_A = x^2 \Rightarrow$ Aus Gradgründen gibt es nur 2 Elementar-

teiler: $g_1 \mid \mu_A \Rightarrow g_1 = x$

3. Fall: $\mu_A = x^3 \implies$ Es gibt nur den Elementarteiler μ_A.

$\implies$ Die Elementarteiler sind in jedem Fall eindeutig durch μ_A bestimmt.

Daher: $\mu_A = \mu_B \iff A$ & B haben die gleichen Elementarteiler $\iff A \approx B$.

Aufgabe 4

Bestimme die Elementarteiler der charakteristischen Matrix zu $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Was ist die Frobenius-Normalform von D?

$$-M_D(x) = D - xE = \begin{matrix} 2-x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3-x & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 4-x \end{matrix}$$

$\mathrm{I}_S \curvearrowright \mathrm{II}$

$$\begin{matrix} 1 & 2-x & 0 & 1 \\ 3-x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3-x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4-x \end{matrix} \xrightarrow{\substack{\mathrm{II}S - (2-x)\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}S - \mathrm{I}}} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3-x & f & 0 & x-3 \\ 1 & x-3 & 3-x & 0 \\ 1 & x-3 & 0 & 3-x \end{matrix}$$

$\mathbb{Q}[x]^\times$

$$f := -(2-x)(3-x) = (2-x)(x-3)$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \ldots & \\ 0 & & & \end{matrix}$$

$$\ldots = \begin{matrix} f & 0 & x-3 \\ x-3 & 3-x & 0 \\ x-3 & 0 & 3-x \end{matrix}$$

$\mathrm{I}Z \curvearrowright \mathrm{II}Z$

$\mathrm{I}S \curvearrowright \mathrm{II}S$

$$\begin{matrix} 3-x & x-3 & 0 \\ 0 & f & x-3 \\ 0 & x-3 & 3-x \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & f & x-3 \\ 0 & x-3 & 3-x \end{matrix}$$

$3-x \mid$ alle Einträge

$\mathrm{I}Z + \mathrm{II}Z$

$$\begin{matrix} (3-x)(x-3) & 0 \\ x-3 & 3-x \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} (3-x)(x-3) & 0 \\ 0 & 3-x \end{matrix}$$

$$f + (x-3) = (3-x)(x-3)$$

$\Rightarrow$ Die Elementarteiler sind

$x-3,\ x-3,\ (x-3)^2$

$$\rightsquigarrow \quad D \approx B_{x-3,\ x-3,\ \underbrace{(x-3)^2}_{=x^2-6x+9}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{3} & & & \\ & \boxed{3} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -9 \\ 1 & 6 \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x-3 & \quad x-3 & \quad (x-3)^2 \end{matrix} \end{array}$$

Zusatzaufgaben

Z1: Zeige mithilfe der Frobenius-Normalform:

$\forall A \in M_n(K)$:

A ist nilpotent $\iff$ Alle Eigenwerte von A sind 0.

(d.h. $\exists \tilde{n} \in \mathbb{N} : A^{\tilde{n}} = 0$)

Z2: Was ist die Frobenius-Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;?$$

$$\sum_{i=1}^{r} \deg g_i = 3$$

$$\chi_A \overset{?}{=} \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^3$$

$$\prod_{i=1}^{r} g_i = \chi_A$$

$$g_r = \mu_A$$

$\mu_A = (x-1)^2 \rightsquigarrow$ Die Elementarteiler sind $x-1$, $(x-1)^2 = x^2-2x+1$

$$(A-E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0 \qquad 1 + 2 = 3$$

$$\rightsquigarrow A \approx \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Z1: "$\Leftarrow$": Alle EW $= 0$

$\Rightarrow$ char Poly $= X^n$

$$\Rightarrow A \approx \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\ddots} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad B_{g_i}^{r_i} = 0$$

alle $g_i \mid X^n$

$X^{r_i} = g_i$

$$B_{g_i} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^{\max_i r_i} = 0$

"$\Rightarrow$": $A^m = 0 \Rightarrow \mu_A \mid X^m \Rightarrow \chi_A = X^n$. $\square$

μ_A & χ_A die gleichen Linearfaktoren