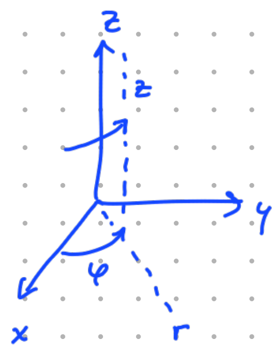
Tutorium 8, 14.12.2022

Aufgabe 2 (Rechnen mit Polarkoordinaten). Berechnen Sie das Integral

$$I := \int_A \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, d(x,y,z),$$

wobei $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, y \geq 0\}$.



Mit Zylinderkoordinaten:

$$\Phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times]0,2\pi] \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{"}\cong\text{"}} \mathbb{R}^3 \quad \text{"lokal"}$$

$$(r,\varphi,z) \longmapsto (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)$$

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $\Phi\colon \Omega \to \Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus. Dann ist die Funktion f auf $\Phi(\Omega)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $x \mapsto f(\Phi(x)) \cdot |\det(D\Phi(x))|$ auf Ω integrierbar ist. In diesem Fall gilt:

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega f(\Phi(x)) \cdot |\det(D\Phi(x))|\,\mathrm{d}x\,.$$

Dabei ist $D\Phi(x)$ die Jacobi-Matrix und $\det(D\Phi(x))$ die Funktionaldeterminante von Φ.

$$D\Phi(r,\varphi,z) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \partial_r & \quad\partial_\varphi & \quad\partial_z \end{matrix} \end{array}$$

hat die Determinante $= \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

$= r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$

$= r$

Zuletzt: $\Phi^{-1}(A) = \{(r,\varphi,z) \mid r^2+z^2 \leq 1,\ \underbrace{\sin\varphi \geq 0}\}$ $\iff \varphi \in [0,\pi]$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\Phi^{-1}(A)} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+z^2}}\, r\, d(r,\varphi,z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\pi \underbrace{\frac{r^3}{\sqrt{r^2+z^2}} \mathbb{1}_{\{r^2+z^2\leq 1\}}}_{\text{hängt nicht mehr von } \varphi \text{ ab}} d\varphi\, dz\, dr = \pi \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{r^3}{\sqrt{r^2+z^2}}\, dr\, dz$$

Fubini:

$$\boxed{\left|\frac{r^3}{\sqrt{r^2+z^2}}\right| \leq \frac{r^3}{\sqrt{r^2}} = r^2 \underset{\text{auf } \Phi^{-1}(A)}{\leq} 1 \quad \& \quad |\Phi^{-1}(A)| < \infty \text{ (beschränkte Menge!)}}$$

oder einfach Tonelli 🙃

$$= \pi \int_{-1}^1 \int_{|z|}^1 (y^2-z^2)\, dy\, dz$$

$$\boxed{y = \sqrt{r^2+z^2} \iff r = \sqrt{y^2-z^2} \qquad dy = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\, dr}$$

$$\underset{\text{Symmetrie in } z}{=} 2\pi \int_0^1 \int_z^1 (y^2-z^2)\, dy\, dz = 2\pi \int_0^1 \left[\tfrac{1}{3}y^3 - yz^2\right]_z^1 dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\tfrac{1}{3} - z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 + z^3\right) dz = 2\pi \left[\tfrac{z}{3} - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{12}z^4 + \tfrac{1}{4}z^4\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{4}\right) = \pi/3.$$

Alternativ mit Kugelkoordinaten:

Lösung. Der Integrand ist messbar als Komposition messbarer Funktionen und A ist messbar als Urbild stetiger Funktionen von Intervallen. Hier bieten sich Polarkoordinaten in drei Dimensionen an (in zwei Dimensionen würde sicher auch gehen). Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_A \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} d(x,y,z) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^2\sin^2(\theta)}{r} \mathbb{1}_{\{r^2\le 1, r\sin\theta\sin\varphi\ge 0\}} r^2 sin(\theta) d\theta d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi r^3 \sin^3(\theta) d\theta d\varphi dr \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Man bemerke im zweiten Schritt, dass $r\sin\theta\sin\varphi \ge 0$ gdw. $\sin\varphi\ge 0$ gdw. $\varphi\in[0,\pi]$ (modulo $r=0$ und $\sin\theta = 0$, was Nullmengen sind). Am Ende verwendet man $\int_0^\pi \sin^3(\theta)d\theta = \frac{4}{3}$, was man über die Substitution $\cos\theta = x$ erhält.

Aufgabe 1 (Integrabilität von $|x|^{-\alpha}$). Sei $\alpha\in\mathbb{R}$ und $0<\rho<R<\infty$. Berechnen Sie

$$\int_{\rho<|x|<R} |x|^{-\alpha} dx.$$

Entscheiden Sie, für welche α die Funktion $|x|^{-\alpha}$ über $\{x\in\mathbb{R}^N : |x|\le 1\}$ integrierbar ist. Entscheiden Sie weiter, für welche α die Funktion $|x|^{-\alpha}$ über $\{x\in\mathbb{R}^N : |x|\ge 1\}$ integrierbar ist. Gibt es α, für die $|x|^{-\alpha}$ über $\mathbb{R}^N$ integrierbar ist?

Das berechnen wir mit verallgemeinerten Polarkoordinaten:

$$P_N :]0,\infty[\times]0,\pi[^{N-2} \times]-\pi,\pi[\xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^N \setminus \left( ]-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}^{N-2}\right)$$

$$(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{N-2}, \varphi) \longmapsto (\underbrace{\sin\vartheta_{N-2} P_{N-1}(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{N-3},\varphi)}_{\in\mathbb{R}^{N-1}}, r\cos\vartheta_{N-2})$$

Aus der Vorlesung bekannt: $\det DP_N(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{N-2},\varphi) = r^{N-1}\sin^{N-2}\vartheta_{N-2}\cdots\sin\vartheta_1$

Ferner: Für $g: [0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto g(|x|)$ genau dann integrierbar, wenn $[0,\infty[\to \mathbb{R}$, $r\mapsto r^{N-1}g(r)$ integrierbar ist, und dann:

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(|x|)dx = N\tau_N \int_0^\infty g(r) r^{N-1} dr \quad \text{mit } \tau_N = |B_1(0)|.$$

$$\boxed{\Rightarrow \int_{\rho<|x|<R} |x|^{-\alpha}dx = N\tau_N \int_\rho^R r^{N-1-\alpha}dr = N\tau_N \begin{cases}\frac{1}{N-\alpha}(R^{N-\alpha}-\rho^{N-\alpha}) & \text{f. } \alpha\ne N \\ \log(R/\rho) & \text{f. } \alpha = N\end{cases}}$$

Monotone Konvergenz $\Rightarrow \int_{0\le|x|\le 1} |x|^{-\alpha}dx = \begin{cases}\frac{1}{N-\alpha}(1-\lim_{\rho\to 0}\rho^{N-\alpha}) \\ \infty\end{cases} = \begin{cases} <\infty & \text{f. } N>\alpha \\ \infty & \text{f. } N\le\alpha\end{cases}$

$\hookrightarrow \int_{1\le|x|} |x|^{-\alpha}dx = \begin{cases}\frac{1}{N-\alpha}(\lim_{R\to\infty} R^{N-\alpha} - 1) \\ \infty\end{cases} = \begin{cases} <\infty & \text{f. } N<\alpha \\ \infty & \text{f. } N\ge\alpha\end{cases}$

Aufgabe 3 (Übung zur Integration mit Hyperbolischen Funktionen)**.** Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k > n$ das Integral

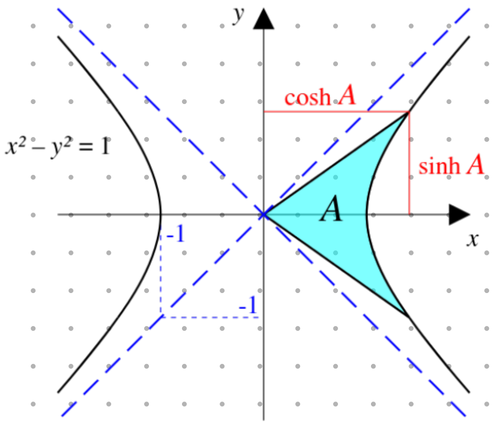
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\sinh(x)|^n}{\cosh^k(x)} dx.$$

$\sinh(-x) = -\sinh(x)$ & $\forall x \geq 0: \sinh(x) \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\sinh(x)|^n}{\cosh^k(x)} dx = 2\int_0^\infty \frac{\sinh^n(x)}{\cosh^k(x)} dx = 2\int_0^\infty \frac{(\cosh^2(x)-1)^{n/2}}{\cosh^k(x)} dx =$$

$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

(d.h. $z \mapsto \begin{pmatrix}\cosh(z)\\ \sinh(z)\end{pmatrix}$ parametrisiert die Einheitshyperbel)



$$\left[\begin{array}{l} y = \cosh(x) \\ \& \ dy = \sinh(x)\,dx = (\cosh^2(x)-1)^{1/2} dx \\ \& \ \cosh(\infty) = \infty \\ \quad \cosh(1) = 0 \end{array}\right]$$

$$= 2\int_1^\infty \frac{(y^2-1)^{\frac{n-1}{2}}}{y^k} dy$$

$$= 2\int_1^\infty y^{\overset{-3+2}{-k+n-1}} (1-y^{-2})^{\frac{n-1}{2}} dy$$

$$= \int_0^1 z^{\frac{k-n}{2}-1} (1-z)^{\frac{n-1}{2}} dz$$

Sub.: $z = y^{-2}$

$dz = -2y^{-3} dy$

$y^2 = z^{-1}$

[die Integralgrenzen schlucken das Vorzeichen]

Beta-Fkt.

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} = B\left(\frac{k-n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

seltsame Identität

Bonusaufgabe vom letzten Mal:

B1: Berechne $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\log x} dx$, $a \geq 0$. Hinweis: Berechne $\displaystyle\int_0^a x^y dy$.

$= \log(a+1)$

„Integration unter dem Integral" (aber eigentlich leitet man den Integranden ab)