Tutorium 7, Lineare Algebra 2

26.5.2021

Warm-Up

Richtig oder Falsch?

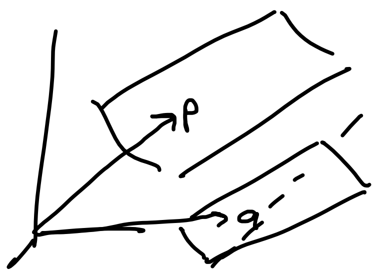
$\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = id\}$

$M = p + \mathcal{U}$, $H = q + W$

$M \parallel H \Leftrightarrow \mathcal{U} \subseteq W$ oder $W \subseteq \mathcal{U}$

1. Seien M, H zwei affine Unterräume der Dimension m. Dann sind entweder M und H parallel oder $\dim(M \cap H) = m - 1$. ✗
2. Jede Matrix $T \in O(n)$ ist ein Produkt von höchstens n Spiegelungen. ✓
3. In einem Körper (mit unendlich vielen Elementen) gibt es nur endlich viele Ideale. ✓
4. In einem beliebigen Ring gibt es nur endlich viele Ideale. ✗
5. Seien I und J Ideale im Ring R. Dann gilt $I \cdot J = I \cap J$. ✗

$= \{\sum_i x_i y_i \mid x_i \in I,\ y_i \in J\}$



1. Windschiefe Geraden

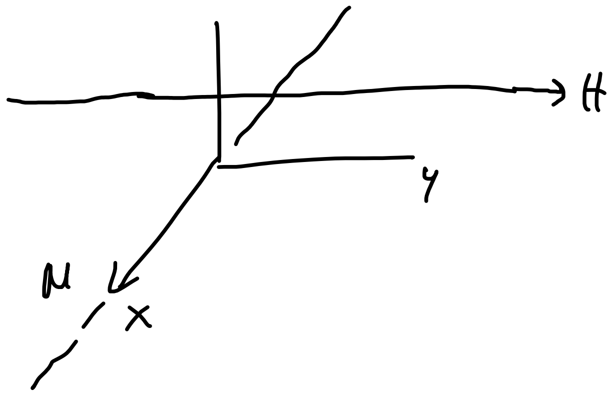
$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}$

$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R} \not\subseteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}$, $\not\supseteq$

$M \cap H = \emptyset$.

$\dim M = \dim H = 1$



3. R Ring, $I \subseteq R$ ist ein Ideal $:\Leftrightarrow$

0): $I \neq \emptyset$

1): $\underbrace{I + I}_{= \{x+y \mid x, y \in I\}} \subseteq I$

2): $\underbrace{R \cdot I}_{\{rx \mid r \in R,\ x \in I\}} \subseteq I$

"I ein R-Unterraum von R"

Untermodul

Wenn $R = K$ Körper, $I \subseteq K$ Ideal $\Rightarrow I \leq K$ UVR

$\Rightarrow I \in \{0, K\}$.

4. In $\mathbb{Z}$ gibt es unendlich viele Ideale:

$p \neq q \in \mathbb{Z}$ prim $\quad p\mathbb{Z} \neq q\mathbb{Z}$

$$p \in \{px \mid x \in \mathbb{Z}\} \qquad \{qx \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

aber $q \nmid p$.

Allgemein gilt:

$$m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} \iff n \mid m$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$m \in n\mathbb{Z} \iff m = n \cdot s \quad \text{für ein } s$$

5. $I = 2\mathbb{Z}$, $J = 2\mathbb{Z}$

$$I \cdot J = \Big\{ \sum_i \underbrace{x_i}_{=2\cdot s_i} \underbrace{y_i}_{=2\cdot r_i} \;\Big|\; x_i \in 2\mathbb{Z} \ni y_i \Big\}$$

$$= \Big\{ 4 \sum_i s_i r_i \;\Big|\; s_i, r_i \in \mathbb{Z} \Big\} = 4\mathbb{Z}$$

$$I \cap J = 2\mathbb{Z} \ni 2 \quad \notin$$

$p \neq q$ Primzahlen $\quad (p\mathbb{Z}) \cdot (q\mathbb{Z}) \overset{?}{=} (p\mathbb{Z}) \cap (q\mathbb{Z})$.

$$\underbrace{(p\mathbb{Z}) \cdot (q\mathbb{Z})}_{=(pq)\mathbb{Z}} \subseteq (p\mathbb{Z}) \cap (q\mathbb{Z}) \quad \leftarrow \text{gilt eh immer}$$

"$\supseteq$": $s \in (p\mathbb{Z}) \cap (q\mathbb{Z}) \Rightarrow p \mid s \;\&\; q \mid s$

$$\Rightarrow (pq) \mid s \Rightarrow s \in pq\mathbb{Z}.$$

↑ p & q verschiedene Primzahlen

Aufgabe 1

Sei V ein unitärer Vektorraum, $p \in V$ und $H_{c,\alpha}$ eine Hyperebene. Zeige:

$d(p, H_{c,\alpha}) = |\langle p, c\rangle - \alpha|$.

$c \in V$, $\|c\| = 1$

$\alpha \in \mathbb{K}$ Skalar.

$$H = \{x \in V \mid \langle x, c\rangle = \alpha\}$$

$$q + \mathcal{U} = \{x_1 - x_2 \mid \underbrace{x_1, x_2 \in H}_{\Leftrightarrow \langle x_i, c\rangle = \alpha}\} = \Delta H$$

$$= \{y \in V \mid \langle y, c\rangle = 0\} = \mathcal{U} = c^\perp = (c \cdot \mathbb{K})^\perp$$

$\mathcal{U}^\perp = c \cdot \mathbb{K}$

$$H = q + \{y \in V \mid \langle y, c\rangle = 0\}.$$

Satz aus der VL: $M_1 = p_1 + \mathcal{U}_1$, $M_2 = p_2 + \mathcal{U}_2$ affine Räume (p, 0, H, $q + \mathcal{U}$)

$$d(M_1, M_2) = d(p_1 - p_2, \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2)$$

(p, H, $p - q$, $\mathcal{U}$)

& $\forall p \in V \ \forall \mathcal{U} \leq V$ UVR:

$$d(p, \mathcal{U}) = \sqrt{\|p\|^2 - \|\Pi_{\mathcal{U}}(p)\|^2} = \|v_2\|$$

Pythagoras

$\|p\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

$\Pi_{\mathcal{U}}(p) = v_1$ wobei: $p = v_1 + v_2$ ($p - q$)

$\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp = V$

Bei uns: Finde v_2? $p - q = \dots + v_2$ $\in \mathcal{U}^\perp$

Wir wollen $p - q$ auf $\mathcal{U}^\perp = (c^\perp)^\perp = \mathbb{K} \cdot c$ projizieren.

Allgemein: $e_1, \dots, e_n$ eine ONB von V

$$\Rightarrow \forall v \in V: v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i$$

$\|c\| = 1$, $\Rightarrow$ $\forall v \in V: v = \underbrace{\dots}_{\in \mathcal{U}} + \overbrace{\underbrace{\langle v, c\rangle \cdot c}_{\in \mathcal{U}^\perp}}^{= v_2}$

ergänze c zu einer ONB $c, e_2, \dots, e_n$

$$d(p,H) = \|v_2\| = \|\langle p-q, c\rangle \cdot c\| = |\langle p-q, c\rangle| \underbrace{\|c\|}_{=1}$$

$$= |\langle p, c\rangle - \underbrace{\langle q, c\rangle}_{=\alpha}| . \quad \square$$

Aufgabe 2

Beweise oder widerlege, ob die folgenden Ringe Integritätsbereiche (d.h. nullteilerfreie kommutative Ringe) sind:

1. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. ✓
2. Der Polynomring $\mathbb{Z}[x]$. ✓
3. Der Ring $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. ✗
4. Der Ring $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. ✓ Das ist ein Körper!
5. Der Ring der 2×2-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. ✗

$R \qquad \forall x,y \in R: xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{oder} \\ y = 0 \end{cases}$

$M_2(\mathbb{Z})$ ist nicht kommutativ! $\left(\& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \right)$

1. $\forall x,y \in \mathbb{Z}: xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ oder } y = 0)$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ Unterring & $\mathbb{R}$ Körper

(K Körper $\Rightarrow$ Integritätsbe.)

2. Vergleiche höchste Koeffizienten:

$$\mathbb{Z}[x] \ni f \neq 0,\ g \neq 0 \overset{?}{\Longrightarrow} fg \neq 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Uparrow$$

$$(\deg f \geq 0,\ \deg g \geq 0) \Rightarrow \deg(fg) = \deg f + \deg g \geq 0$$

$$\deg(fg) = \underbrace{\deg f}_{\geq 0} + \underbrace{\deg g}_{\geq 0}$$

$(\deg 0 = -\infty)$

3. $\bar{2} \cdot \bar{5} = \overline{10} = \bar{0}$.

$\bar{2} \neq \bar{0}$, $\bar{5} \neq \bar{0}$, $\bar{2} = (2 + 10\mathbb{Z})$

$$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \cong \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}$$

chinesischer Restklassensatz

direkte Produkte sind nie Integritätsbereich (außer $R \times 0 \cong R$)

$((0,1) \cdot (1,0) = (0,0))$, $(0,1) \neq 0$, $(1,0) \neq 0$, $(0,0) = 0$

$$\bar{m} \longmapsto (\bar{m}, \bar{m})$$

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist ein Körper $\Longleftrightarrow$ m eine Primzahl

(Lemma von Bezout)

$R/\mathfrak{p}$ — " — $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{p}$ ein Primideal

Algebra 2

Aufgabe 3

Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in einem kommutativen Ring R. Zeige, dass $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ sowie $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ Ideale in R sind. Ist $\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}$ ein ebenfalls ein Ideal in R?

I Ideal $\Longleftrightarrow$ (1) $I+I \subseteq I$

$I \neq \emptyset$ (2) $R\cdot I \subseteq I$

$\underline{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$: $\underset{\substack{0\,\in\\ \cap}}{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b} \neq \emptyset \Rightarrow 0 \in \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$.

(1) $\forall x_1, y_1 \in \mathfrak{a}$: $x_1+y_1 \in \mathfrak{a}$

$\forall x_2, y_2 \in \mathfrak{b}$: $x_2+y_2 \in \mathfrak{b}$

$\Rightarrow (x_1+y_1) + (x_2+y_2) \in \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$

$$\| $$

$$\underbrace{(x_1+x_2)}_{} + \underbrace{(y_1+y_2)}_{}$$

das sind beliebige Elemente aus $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$

(2) $r \in R$. $r\cdot(\underset{\in\mathfrak{a}}{x_1} + \underset{\in\mathfrak{b}}{x_2}) = \underset{\in\mathfrak{a}}{rx_1} + \underset{\in\mathfrak{b}}{rx_2}$

$\underline{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}$: $0 \in \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \neq \emptyset$.

$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ ist das kleinste Ideal, das $\{a\cdot b \mid a\in\mathfrak{a}, b\in\mathfrak{b}\}$ enthält.

(1) $x, y \in \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$. $\Rightarrow x = \sum_i a_i b_i$, $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathfrak{b}$

$y = \sum_j c_j d_j$, $c_j \in \mathfrak{a}$, $d_j \in \mathfrak{b}$

$\Rightarrow x+y = \sum_i \underset{\in\mathfrak{a}}{a_i}\underset{\in\mathfrak{b}}{b_i} + \sum_j \underset{\in\mathfrak{a}}{c_j}\underset{\in\mathfrak{b}}{d_j} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$.

(2) analog.

$2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$

$\ni$ 2 $\quad$ $\ni$ 3

Wäre $(2\mathbb{Z}) \cup (3\mathbb{Z})$ ein Ideal, so $2+3 \in (2\mathbb{Z}) \cup (3\mathbb{Z})$

$\overset{\shortparallel}{5} \notin 2\mathbb{Z}$, $\notin 3\mathbb{Z}$ $\lightning$.

↑ kein Ideal

Aber: Das kleinste Ideal, das $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ enthält ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Aufgabe 4

Sei R ein kommutativer Ring und $A \subset R$. Zeige, dass $\mathrm{Ann}(A) = \{r \in R \mid ra = 0 \text{ für alle } a \in A\}$ ein Ideal in R ist.

$r \cdot A = 0$

(0) $0 \in \mathrm{Ann}(A)$, da $0 \cdot a = 0$, $\forall a \in A$

(1) $r_1, r_2 \in \mathrm{Ann}(A)$, d.h. $\forall a \in A$: $r_1 a = 0$, $r_2 a = 0$

$\Rightarrow (r_1 + r_2) \cdot a = \underbrace{r_1 a}_{0} + \underbrace{r_2 a}_{0} = 0 + 0 = 0 \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow r_1 + r_2 \in \mathrm{Ann}(A)$.

(2) $\lambda \in R$, $r_1 \in \mathrm{Ann}(A)$, $a \in A$:

$(\lambda r_1) a = \lambda (r_1 a) = \lambda \cdot 0 = 0$. $\Rightarrow \lambda r_1 \in \mathrm{Ann}(A)$