Tutorium 13, Lineare Algebra 2

7.7.2021

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

NR: $(x-4)(1+x)+4 = x^2-3x$

1.)

$$-M_A(x) = \begin{matrix} 4-x & 4 & 1 \\ -1 & -1-x & -1 \\ -3 & -2 & -x \end{matrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{matrix} 1 & 1+x & 1 \\ 4-x & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -x \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{III + 3I \\ II + (x-4)I}} \begin{matrix} 1 & 1+x & 1 \\ 0 & x^2-3x & x-3 \\ 0 & 3x+1 & -x+3 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-3x & x-3 \\ 0 & 3x+1 & -x+3 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{II + III} \begin{matrix} x^2-3x & x-3 \\ x^2+1 & 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 0 & x-3 \\ x^2+1 & 0 \end{matrix}$$

$x-3 \mid x^2-3x$

$\xrightarrow{CRS}$ funktioniert nicht unbedingt über $\mathbb{F}_5$

$x-3 \mid x^2+1$

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^2+1)(x-3) \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Elementarteiler $= (x^2+1)(x-3) = x^3-3x^2+x-3$

Invariantenteiler $= x-3,\ x^2+1$

$$\text{Frobenius-Normalform} = \begin{pmatrix} & & 3 \\ 1 & & -1 \\ & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Weierstraß-NF} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jordansche NF existiert nicht, da x^2+1 /$\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

2. $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_5)$.

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

4. $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

B sieht aus wie A, über $\mathbb{F}_5$ statt $\mathbb{R}$

$x^2+1 = (x-2)(x-3)$

in $\mathbb{F}_5[x]$

$(2^2+1 = 5 = 0$
$3^2+1 = 10 = 0)$

1 $\quad x-3 \quad x^2+1$

Also: $B \rightsquigarrow$ wie für A

x^2+0x+1

Elementarteiler $= (x-3,\ x^2+1)$

Invariantenteiler $= (x-3,\ x-3,\ x-2)$

$$\text{FNF} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & & 0 \\ 0 & \begin{array}{|c|c|} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

$x-3 \qquad x^2+1$

$$\text{WNF} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & & \\ & \boxed{3} & \\ & & \boxed{2} \end{pmatrix} = \text{JNF}$$

x^3-x^2-x+1

Für C: Elementarteiler $= (x+1,\ (x+1)(x-1)^2)$ $\quad x^2-2x+1$

Invariantenteiler $= (x+1,\ x+1,\ (x-1)^2)$

$$\text{FNF} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & \begin{array}{|cc|c|} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \end{pmatrix} \qquad \text{WNF} = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & & \\ & \boxed{-1} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\text{JNF} = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & & \\ & \boxed{-1} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$ 2×2

Für D: Siehe letztes Tutoriumsblatt.

Z1: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $A \in M_6(\mathbb{R})$ mit
$$\chi_A = (x-\alpha)(x-\beta)^5,$$
$$\mu_A = (x-\alpha)(x-\beta)^3.$$
Welche Jordanschen Normalformen sind möglich?

χ_A zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow$ JNF existiert

wird festgelegt durch Invarianteteiler.

Seien $h_1, \dots, h_r$ die Invarianteteiler von $\chi_A(x)$.

μ_A ist Elementarteiler
$\Rightarrow h_1 = x-\alpha, \quad h_2 = (x-\beta)^3.$

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r} h_i$$

2 Fälle:

1. Fall: $h_3 = (x-\beta)^2$ $\rightsquigarrow$ Invarianteteiler $= x-\alpha, (x-\beta)^3, (x-\beta)^2$

$$\text{JNF} = \begin{pmatrix} \alpha & & & & & \\ & \beta & 0 & 0 & & \\ & 1 & \beta & 0 & & \\ & & 1 & \beta & & \\ & & & & \beta & 0 \\ & & & & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

2. Fall: $h_3 = x-\beta, \quad h_4 = x-\beta$

$$\rightsquigarrow \text{JNF} = \begin{pmatrix} \alpha & & & & & \\ & \beta & & & & \\ & 1 & \beta & & & \\ & 0 & 1 & \beta & & \\ & & & & \beta & \\ & & & & & \beta \end{pmatrix}$$

22: Sei $A \in M_n(\overset{K}{\mathbb{R}})$ mit $A^3 = A$. char $K \neq 2$
Zeige: A ist diagonalisierbar.

$$(x^3 - x)(A) = 0 \implies \mu_A \mid (x^3 - x) = x(x^2-1)$$
$$= x(x-1)(x+1)$$

$\Rightarrow$ Alle Invariantenteiler haben Grad 1

$\Rightarrow$ Alle Jordankästchen (Weierstraßkästchen) sind 1×1

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.

$FNF(A) = B_g \iff g$ ist der einzige Elementarteiler von A.

Begleitmatrix zu g