Funktionentheorie, Tutorium 10

4. (i) Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\overline{D}_r(a) \subset U$. Falls $|f(z)| > |f(a)|$ für alle $z \in \partial D_r(a)$, so hat f eine Nullstelle in $D_r(a)$.

   (ii) Verwenden Sie (i), um einen anderen Beweis für Gebietstreue zu geben.

(i) $|f|$ (stetig) nimmt auf $\overline{D_r(a)}$ ein Minimum an.

Dieses liegt nicht in $\partial D_r(a)$, da $\forall z \in \partial D_r(a) : |f(z)| > |f(a)|$

$\Rightarrow$ $f|_{D_r(a)}$ hat ein lokales Minimum.

nichtkonstant, da sonst f konstant wäre (Identitätssatz) (f nichtkonstant)

$\overset{\text{Minimumsprinzip}}{\Longrightarrow}$ $f|_{D_r(a)}$ hat eine Nullstelle.

(ii) Zz: $f(\mathcal{U})$ ist offen

- Nehme $a \in \mathcal{U}$, suchen offene Umgebung $\subseteq f(\mathcal{U})$ von $f(a)$.
- Wir finden $r > 0$ mit $\overline{D_r(a)} \subseteq \mathcal{U}$ &

$$\forall \underset{\neq a}{z} \in \overline{D_r(a)} : f(z) \neq f(a)$$

(Identitätssatz)

- Setze $\delta := \inf \{ |f(z) - f(a)| \mid \underbrace{z \in \partial D_r(a)}_{\text{kompakt}} \} > 0$

- Bh: $D_{\delta/2}(f(a)) \subseteq f(\mathcal{U})$.

$\Leftrightarrow$ $g_w : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) - w$ hat eine Nullstelle, für alle $w \in D_{\delta/2}(f(a))$

Hierzu: Auf $z \in \partial D_r(a)$ gilt:

$$|g_w(z)| = |f(z) - w| \geq \underbrace{|f(z) - f(a)|}_{\geq \delta} - \underbrace{|f(a) - w|}_{< \delta/2}$$

$$> \frac{\delta}{2} > |f(a) - w| = |g_w(a)|$$

(i) auf g_w $\Longrightarrow$ g_w hat eine Nullstelle in $D_r(a) \subseteq U$.

$\square$

2. Bestimmen Sie die maximale offene Scheibe mit Mittelpunkt im Ursprung, welche von der holomorphen Funktion

(i) $z^2 + z$

(ii) e^z

biholomorph auf ein Gebiet in $\mathbb{C}$ abgebildet wird.

offen nach dem Offenheitssatz

Sei $r > 0$ der maximale Radius mit $f: D_r(0) \xrightarrow{\cong} f(D_r(0))$

holomorph, nichtkonst.

Es genügt zu prüfen: $f: D_r(0) \longleftrightarrow f(D_r(0))$ ist injektiv und die Umkehrfkt ist holomorph $\Leftrightarrow$ $f' \neq 0$ pktweise

(i) $f: z \mapsto z^2 + z$. $f'(z) = 2z + 1$ hat Nullstelle bei $-\frac{1}{2}$.

$\Longrightarrow$ f besitzt um $f(-\frac{1}{2})$ keine holomorphe Umkehrung. $\Longrightarrow$ $r \leq \frac{1}{2}$.

Beh: $r = \frac{1}{2}$.

$z, w \in D_{1/2}(0)$

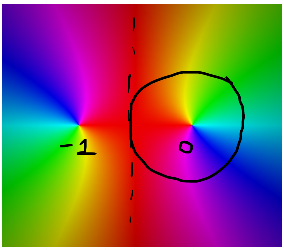
$0 = f(z) - f(w) = z^2 + z - w^2 - w =$

$= (z-w)(z+w) + z - w = (z-w)(z+w+1)$

$0 \neq z + w + 1$, da sonst $z + w \in \partial D_1(0)$, Widerspruch.

$(\; |z+w| \leq |z| + |w| < 1 \;)$

$\Longrightarrow$ $z = w$.



$\Longrightarrow$ $r = \frac{1}{2}$.

(ii) $f = e^z$, $\quad f' = f \neq 0$ überall

Wegen $f(\pi i) = -1 = f(-\pi i)$ folgt $r \leq \pi$

Beh.: $r = \pi$.

$z, w \in D_\pi(0)$

$$f(z) = f(w) \implies e^{\mathrm{Re}(z)} = |f(z)| = |f(w)| = e^{\mathrm{Re}(w)}$$

$$\implies \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \quad \text{aus der Injektivität von } \exp|_{\mathbb{R}}$$

$$\implies e^{i\,\mathrm{Im}(z)} = e^{i\,\mathrm{Im}(w)} \implies \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w) + 2\pi k$$

$$\cap \qquad \cap \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$D_\pi(0)$$

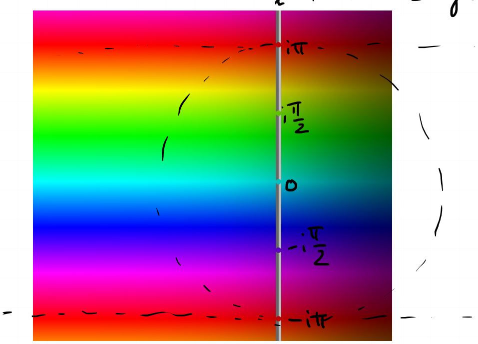
$$\implies 2\pi k = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(w) \in D_{2\pi}(0)$$

$$\implies k = 0$$

$$\implies z = w.$$

$\implies r = \pi$. $\square$

Hier wird S^1 getroffen



3. (i) Für jede ganze Funktion f mit $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ gilt $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Hinweis: Spiegelungsprinzip und Identitätssatz.

(ii) Für jede ganze Funktion f mit $f(S^1) \subset S^1$ gilt $\underline{f(\overline{z}^{-1}) \overset{\forall z \in \mathbb{C}^\times}{=} \overline{f(z)}^{-1}}$.

(iii) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit $f(S^1) \subset S^1$.

(i) $f|_{H = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}} : H \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph

& stetig fortsetzbar auf $\overline{H}$ (durch f) mit Randwerten $\subseteq \mathbb{R}$ ($f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$)

$\underset{\text{Spiegelungsprinzip}}{\Longrightarrow}$ $\exists \tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph,

$\tilde{f}|_H = f|_H$

& $\forall z \in \mathbb{C} : \tilde{f}(\overline{z}) = \overline{\tilde{f}(z)}$.

$\overset{\text{Identitätssatz}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{f} = f$ $\Longrightarrow$ $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

(ii) Erste Idee: $\mathbb{C}^\times \setminus S^1 = \underbrace{D_1(0)}_{U_+} \overset{\text{disjunkte Vereinigung}}{\sqcup} \overbrace{(\mathbb{C}^\times \setminus \overline{D_1(0)})}^{U_-}$ ← punktiert

& $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto \overline{z}^{-1}$ ist eine Involution, antihol.

mit $\{\text{Fixpkt}\} = S^1$ und sie vertauscht U_+ & U_-.

Noch zu prüfen: $\mathrm{Bild}(f|_{U_+}) \underset{?}{\subseteq} \mathbb{C}^\times$

Alternativ: Cooler Trick: Betrachte

$$g : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$z \longmapsto \underbrace{\overline{f(\overline{z}^{-1})}}_{\substack{\text{holomorph,} \\ \text{als Komposition} \\ \text{von ,,antihol + hol + hol + antihol"} \\ \overline{\cdot} \quad f \quad (\cdot)^{-1} \quad \overline{\cdot}}} \underbrace{f(z)}_{\text{holomorph}}$$

Ferner: Auf $z \in S^1$ gilt:

$$g(z) = \overline{f(\underbrace{\overline{z}^{-1}}_{\substack{= z \\ \uparrow \\ z\overline{z} = 1}})} f(z) = \overline{f(z)} f(z) \underset{\substack{\uparrow \\ f(z) \in S^1 \\ (f(S^1) \subseteq S^1)}}{=} 1$$

$\Rightarrow$ $g = 1$ auf ganz $\mathbb{C}^\times$ (Identitätssatz: Es gibt konvergente Folgen $\in (S^1)^{\mathbb{N}}$)

$$\Rightarrow \quad \forall z \in \mathbb{C}^\times : \overline{f(\overline{z}^{-1})} = f(z)^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(\overline{z}^{-1}) = \overline{f(z)}^{-1}$$

(insbesondere $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^\times$)

(iii)

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hol, $f(S^1) \subseteq S^1$; $(\Rightarrow f \neq 0)$

Wir wissen $f(\mathbb{C}^\times) \subseteq \mathbb{C}^\times$.

Sei m die Ordnung der Nullstelle von f um 0,
$\mathbb{N}_0$ ($m \neq \infty$ da $f \not\equiv 0$)

d.h. $f = z^m h$ mit einem holomorphen $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$h(0) \neq 0$

WTS: $h =$ konst.

$f(S^1) \subseteq S^1 \underset{(S^1)^m \subseteq S^1}{\Longrightarrow} h(S^1) \subseteq S^1 \underset{(ii)}{\Longrightarrow} \forall z \in \mathbb{C}^\times: h(\bar{z}^{-1}) = \overline{h(z)}^{-1}$

$|h|$ nimmt auf $\overline{D_1(0)}$

ein Minimum an, sagen wir bei x.

Falls $x = 0 \Rightarrow |h|$ hat lokales Minimum $\neq 0$
$\uparrow$
$h(0) \neq 0$

$\overset{\text{Min.-prinzip}}{\Longrightarrow}$ h konstant

$x \neq 0 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_1(0)}$:

$$|h(y)| = |h(\underbrace{\bar{y}^{-1}}_{\in D_1(0)})^{-1}| \leq |h(x)^{-1}|$$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}: |h(z)| \leq \underbrace{\left\{ \max_{y \in \overline{D_1(0)}} |h(y)|, |h(x)^{-1}| \right\}}_{< \infty}$$

$\Rightarrow h$ beschränkt $\underset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow}$ h konstant.

$$\Longrightarrow \quad \{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ holomorph}, \ f(S^1) \subseteq S^1 \}$$
$$= \{ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto a z^m \mid m \in \mathbb{N}_0, \ a \in S^1 \}$$

5. (i) Nichtkonstante Polynomabbildungen $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind eigentlich.

(ii) Die Bilder eigentlicher Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind abgeschlossen.

Erläuterung: Eine stetige Abbildung heißt *eigentlich*, wenn die Urbilder von Kompakta kompakt sind.

(iii) Folgern Sie den *Fundamentalsatz der Algebra* aus

(a) Teil (i) und dem Minimumprinzip.

(b) Teil (i+ii) und Gebietstreue.

(i) In $\mathbb{C}$: kompakt = abgeschlossen & beschränkt

D.h.: Zz: Urbilder beschränkter Mengen sind beschränkt

Das folgt aus: $M \subseteq \mathbb{C}$ unbeschränkt $\Rightarrow P(M) \subseteq \mathbb{C}$ unbeschränkt

Für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$, $|x_n| \xrightarrow{n \to \infty} \infty$, dann

$$|P(x_n)| \xrightarrow{n \to \infty} \infty \qquad \text{(Analysis 1 ?)}$$

hier dominiert der Leitterm
($P \not\equiv$ konstant)

(ii) Eigentliche Abbildungen sind abgeschlossen:

$X \subseteq \mathbb{C}$, $f: X \to \mathbb{C}$ eigentlich,

$A \subseteq X$ abgeschlossen $\overset{!}{\Longrightarrow}$ $f(A)$ abgeschlossen

bzgl. Unterraum-topologie

Es genügt $f(X)$ = abgeschlossen, da $f|_A$ eine eigentliche Abbildung ist ($K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt

$$\Rightarrow f|_A^{-1}(K) = \underbrace{\underbrace{f^{-1}(K)}_{\text{kompakt}} \cap \underbrace{A}_{\text{abg.}}}_{\text{kompakt}})$$

Zu $\overline{f(X)} = f(X)$: $y \in \overline{f(X)}$, d.h. es gibt $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f(X)^{\mathbb{N}}$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$.

$y_n = f(x_n)$, $x_n \in X$.

Wir finden $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt & $N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$: $y_n \in K$.

$f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt (f eigentlich)

$\Rightarrow$ $(x_n)_{n\geq N} \in (f^{-1}(K))^{\mathbb{N}_{\geq N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x \in f^{-1}(K)$.

$$\Rightarrow y = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x) \in f(X)$$

$$\Rightarrow f(X) = \overline{f(X)}.$$

(Hier: $X = \mathbb{C}$)

(i) Sei $c := |P(0)|$

P Polynomfunktion

$P^{-1}(\overline{D_c(0)})$ ist kompakt (nach (i))

$\Rightarrow \exists M \geq 0: \quad P^{-1}(\overline{D_c(0)}) \subseteq D_M(0)$

$|P|$ nimmt auf $\overline{D_M(0)}$ ein Minimum an,

bei x.

Für $z \in \partial D_M(0)$: $|P(z)| > c = |P(0)|$

$\Rightarrow x \in D_M(0)$.

$\Rightarrow P$ konstant oder $P(x) = 0$.

$|P|$ hat lokales Minimum

& Minimumsprinzip

(ii) $P(\mathbb{C})$ ist offen (falls $P \neq$ konstant)

$P(\mathbb{C})$ ist abgeschlossen ((i) + (ii))

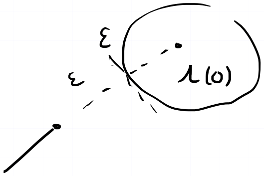
$\mathbb{C}$ ist zusammenhängend $\Rightarrow P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

$\Rightarrow P^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$.

1. Sei f eine nahe 0 definierte holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$ und $f'(0) \neq 0$. Dann existiert für $n \in \mathbb{N}$ eine nahe 0 definierte holomorphe Funktion g mit $f(z^n) = g(z)^n$. Für sie gilt $g(\omega z) = \omega g(z)$ nahe 0 mit $\omega = e^{2\pi i/n}$.

$f(0)=0$ & $f'(0)=0$ $\Longrightarrow$ $f(z) = z\, h(z)$ mit
Nahe $z=0$
h holomorph nahe 0
& $h(0) \neq 0$

$\varepsilon := \frac{|h(0)|}{2}$ ist $D_\varepsilon(h(0)) \subseteq \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}(-h(0))$



hier gibt es eine n-te Wurzel $w : D_\varepsilon(h(0)) \to \mathbb{C}$,
$w(z)^n = z$

$$g : U := (h \circ (z \mapsto z^n))^{-1}(D_\varepsilon(h(0))) \cap D \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$g(z) = z\, w(h(z^n))$$

Kreisscheibe um 0 $\subseteq$ Def. bereich von f

U ist eine offene Umg. von 0.
OE: U = Kreisscheibe um 0.

$$(1) \quad g(e^{2\pi i/n} z) = e^{2\pi i/n} z\, w(h(z^n)) = e^{2\pi i/n} g(z)$$

$$(2) \quad f(z^n) = z^n h(z^n) = z^n (w(h(z^n)))^n = g(z)^n.$$