Beispiel zur Berechnung von Torsionsmoduln.

Wichtig: Zeilenumformungen protokollieren! Wir markieren sie in unserem Beispiel mit Z.

$\mathbb{Z}$-Modul $\quad N = \mathbb{Z}^4 \Big/ \left\langle \begin{pmatrix} 0\\9\\3\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\12\\0\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12\\33\\15\\15 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\quad$ Was ist $T(N) \subseteq N$?

Üblicher Algorithmus:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 12 \\ 9 & 12 & 33 \\ 3 & 0 & 15 \\ 3 & 6 & 15 \end{matrix} \quad \underset{\substack{\mathrm{II}-3\mathrm{III} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{III}}}{\overset{Z}{\rightsquigarrow}} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & -12 \\ 3 & 0 & 15 \\ 0 & 6 & 0 \end{matrix} \quad \overset{S}{\rightsquigarrow} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & -12 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{matrix} \quad \underset{\mathrm{II}-2\mathrm{IV}}{\overset{Z}{\rightsquigarrow}} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -12 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{matrix} \quad \underset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\overset{Z}{\rightsquigarrow}} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{matrix}$$

Sei A die Matrix, die durch Anwendung der Zeilenformungen auf die Einheitsmatrix entsteht. Dann $N \xrightarrow[\cdot A]{\cong} \mathbb{Z}^4 \Big/ \left\langle \begin{pmatrix} 0\\0\\3\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Wir suchen also A^{-1}: Wende die umgekehrten Zeilenumformungen in umgekehrter Reihenfolge an:

$$\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{matrix} \quad \overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{matrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{matrix} \quad \overset{\mathrm{II}+2\mathrm{IV}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{matrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{matrix} \quad \overset{\substack{\mathrm{II}+3\mathrm{III} \\ \mathrm{IV}+\mathrm{III}}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{matrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ & & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 \end{matrix}$$

Wir erhalten $\quad T(N) = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\3\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \Big/ \left\langle \begin{pmatrix} 0\\0\\3\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle$.