Analysis 1 – Tutorium 5
robin.mader@campus.lmu.de
4.12.2020

Aufgabe 1. *Teilaufgaben aus der GOP des Wintersemesters 2016/2017:*

(a) Formuliere die Formel für die geometrische Summe. Gemeint ist die *endliche* geometrische Summe, nicht die geometrische Reihe. Quantifiziere auch alle dabei vorkommenden Variablen.

(b) Es bezeichnet i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$, und $\omega_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$. Beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - a\omega_n^k} = \frac{1}{1 - a^n}.$$

Aufgabe 2 (Sandwichsatz)**.** Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit gemeinsamem Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine weitere Folge. Angenommen,

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Zeige: $c_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Aufgabe 3. *Aus der GOP des Wintersemesters 2012/2013:*

(a) Definiere für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ und $b \in \mathbb{C}$ die Aussage

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} b.$$

(b) Sei nun

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - i}{\sqrt{n} + i}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $b = 1$. Beweise hierfür die Aussage $a_n \xrightarrow{n\to\infty} b$ direkt mit der Definition aus (a).

Aufgabe 4. (a) Zeige, dass die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(b) Untersuche das Konvergenzverhalten von $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (Aktivierungselemente)**.** 3.6: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ konvergent, und $b \in \mathbb{R}$ so, dass $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq b$. Beweise:

$$|\lim_{n\to\infty} a_n| \leq b.$$

2.30 (Intervallschachtelungen): Seien $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ...$ eine aufsteigende Folge und $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq ...$ eine absteigende Folge reeller Zahlen, sodass

$$x := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}_0} b_n, \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \leq b_n.$$

Zeige: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} [a_n, b_n] = \{x\}$.