

Aufgabe 1 (Gleichmäßige Konvergenz). (a) Aktivierungselement 3.62: Gegeben seien $(a_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}$, $(a_{n,\infty})_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, $(a_{\infty,m})_{m \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, und es gelte

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_{n,\infty}, \quad \text{und} \quad (1)$$

$$(a_{n,m})_{m \in \mathbb{N}_0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{gleichmäßig}} (a_{\infty,m})_{m \in \mathbb{N}_0}. \quad (2)$$

Zeige:

1. Es existiert $a_{\infty,\infty} \in \mathbb{C}$, sodass

$$(a_{\infty,m})_{m \in \mathbb{N}_0} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_{\infty,\infty} \quad \text{und} \quad ((a_{n,m})_{m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}})_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{gleichmäßig}} (a_{\infty,m})_{m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}}.$$

2. Es gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,m} = a_{\infty,\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m}$ und, etwas schärfer:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \exists m_0 \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \forall m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} : \\ (n > n_0 \wedge m > m_0 \Rightarrow |a_{n,m} - a_{\infty,\infty}| < \varepsilon).$$

(b) Gleichmäßige Konvergenz als Konvergenz in der Supremumsnorm-Topologie:

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für eine beschränkte Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ setzen wir

$$\|f\|_\infty := \sup_{u \in U} |f(u)|.$$

Zeige: Die Folge beschränkter Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^U)^\mathbb{N}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen die beschränkte Funktion $f \in \mathbb{C}^U$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

(c) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gegeben durch

$$f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto x^n,$$

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ punktweise, aber nicht gleichmäßig.

Aufgabe 2. Beweise ohne Verwendung der Differentialrechnung:

(a) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$, für $x \rightarrow 0$, $x \in \mathbb{C}$,

(c) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, für $x \rightarrow 0$, $x \in \mathbb{C}$,

(b) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, für $x \rightarrow 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (a) Seien X, Y topologische Räume (z.B. $X, Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) und $f, g : X \rightarrow Y$ stetig. Angenommen, f und g stimmen auf einer dichten Menge $U \subseteq X$ überein: $f|_U = g|_U$. Zeige: $f = g$.

(b) Zeige mithilfe von (a) für alle $x, y \in \mathbb{R} : \exp(xy) = \exp(x)^y$. Dabei verwenden wir für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $b \in \mathbb{R}$ die Notation $a^b = \exp(b \log(a))$.

Aufgabe 4. Betrachte die Funktion

$$f : ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup (]2, 3[\setminus \mathbb{Q}) \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ x - 2 & \text{falls } x \in]2, 3[\setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeige: f ist bijektiv und stetig, aber f^{-1} ist nirgendwo stetig.