Funktionentheorie, Tutorium 6

3. Zeigen Sie, dass die folgenden Gebiete in $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend sind:

   (i) sternförmige Gebiete

   (ii) $\mathbb{C} - \operatorname{graph}(f)$, wobei $f : \mathbb{R}_0^+ \to i\mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

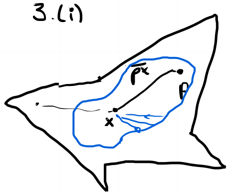
   Hinweis: Man kann nutzen, daß einfacher Zusammenhang als topologische Eigenschaft eine Homöomorphie-Invariante ist, und so auf den Fall $f \equiv 0$ reduzieren.

   (iii) Die Vereinigung $U \cup V$ zweier einfach zusammenhängender Gebiete U und V mit zusammenhängendem Durchschnitt $U \cap V$.

   Hinweis: Man kann Wege in $U \cup V$ so unterteilen, daß die Teilstücke in einem der Gebiete U oder V liegen.

   (iv) Das geschlitzte Ringgebiet $\{r < |z| < R\} - \mathbb{R}^+ e^{i\alpha}$ für $0 < r < R$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.(i)



$\mathcal{U}$ sternförmig, $x \in \mathcal{U}$ Zentrum,

d.h. $\forall p \in \mathcal{U}$: $\overline{px} \subseteq \mathcal{U}$

$$\overline{px} = \operatorname{im}\left([0,1] \xrightarrow[px]{} \mathcal{U},\ t \mapsto (1-t)p + tx\right)$$

Weg-Zusammenhang: $p, q \in \mathcal{U}$, dann ist $(px)(qx)^{-1}$ ein Weg von p nach q.

Einfacher Zusammenhang: $c : [0,1] \to \mathcal{U}$ Schleife ($c(0) = c(1)$) ist nullhomotop:

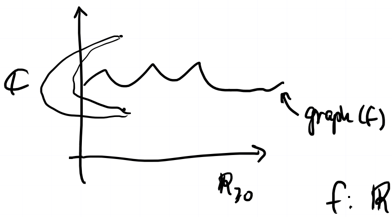
$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}$$

$$(t,s) \longmapsto \underbrace{(1-s)c(t) + sx}_{\in \mathcal{U},\ \text{da } \mathcal{U} \text{ sternf.}}$$

$H(\cdot, 0) = c$, $H(\cdot, 1) = (t \mapsto x)$

ist die gewünschte Homotopie

(ii)



$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$x + iy \mapsto x + i(y - f(|x|))$

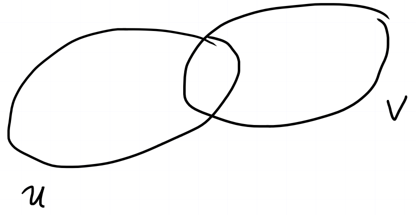
stetig mit stetiger Inverser $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to i\mathbb{R}$ $\quad x + iy \mapsto x + i(y + f(|x|))$

$$G(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \{x + i f(x) \mid x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} = \operatorname{graph} f$$

$$\Rightarrow \quad F\big|_{\mathbb{C}\setminus \mathrm{graph}(F)} : \mathbb{C}\setminus \mathrm{graph} \xrightarrow{\cong} \underbrace{\mathbb{C}\setminus \mathbb{R}_{\geq 0}}_{\text{ist sternförmig}}$$

(iii) $c : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U} \cup V$, $\quad c(0) = c(1) = p \in \mathcal{U} \cap V$



Angenommen, $\exists t, s \in [0,1]$:

$c(t) \in \mathcal{U}$

$c(s) \in V$

$t \leq s$

$$\underbrace{c([t,s])}_{\text{zsmhgd}} \subseteq \mathcal{U} \cup V \text{ ist zsmhgd}$$

$$\subseteq \underbrace{\mathcal{U} \cup V \setminus \mathcal{U} \cap V}_{\text{nicht zsmhgd}}$$

$$= \underbrace{(V \setminus \mathcal{U} \cap V)}_{\text{abg. in } \mathcal{U} \cup V} \cup (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U} \cap V)$$

$$[0,1] = c^{-1}(\mathcal{U} \cup V) = \underbrace{c^{-1}(\mathcal{U})}_{\text{offen}} \cup c^{-1}(V)$$

$$= \bigcup_{x \in c^{-1}(\mathcal{U})} I_x \cup \bigcup_{y \in c^{-1}(V)} I_y$$

mit I_x, I_y offene Intervalle um x bzw. y mit $I_x \subseteq c^{-1}(\mathcal{U})$, $I_y \subseteq c^{-1}(V)$

Kompaktheit von $[0,1] \Rightarrow \quad [0,1] = \bigcup_{i=0}^{r} I_{x_i}$,

mit $c(I_{x_i}) \subseteq \mathcal{U}$ oder $\subseteq V$.

$\not{}\quad 0 < x_0 < \cdots < x_r \leq 1$.

Falls $c(I_{x_i}), c(I_{x_{i+1}}) \subseteq \mathcal{U}$ (oder V) ersetze

I_{x_i} durch $I_{x_i} \cup I_{x_{i+1}}$.

$\rightsquigarrow$ Ohne Einschränkung $c(I_{x_i}) \subseteq \mathcal{U} \Leftrightarrow c(I_{x_{i+1}}) \subseteq V$

Finde rekursiv $0 =: t_0 < t_1 < \dots < t_s =: 1$

s.d. $\operatorname{im}(c|_{[t_j, t_{j+1}]}) \subseteq \mathcal{U}$ oder $\subseteq V$ $\forall j$.

Angenommen $t_0, \dots, t_m$ bereits konstruiert

$\operatorname{im}(c|_{[t_{m-1}, t_m]}) \subseteq \mathcal{U}$

$t_m \in I_{x_i}$, jetzt wähle $t_{m+1} \in \underbrace{I_{x_{i+1}} \cap I_{x_i}}_{\text{nichtleer?}}$

$$[0,1] = \bigcup_{j=0}^{i} I_{x_j} \cup \bigcup_{j=i+1} I_{x_j}$$

$$\left(I_{x_i} \cap I_{x_{i+j}} \overset{?}{=} \varnothing \quad \forall j \geq 2 \right)$$

$[t_m, t_{m+1}] \subseteq I_{x_i}$, $c([t_m, t_{m+1}]) \subseteq c(I_{x_i}) \subseteq \mathcal{U}$

Wegen $c[t_{m-1}, t_m] \subseteq \mathcal{U}$ (oder V)

& $c[t_m, t_{m+1}] \subseteq V$ (oder $\mathcal{U}$)

gilt $c(t_m) \in \mathcal{U} \cap V$ $\forall m$.

Dann mit dem Wegzshg von $\mathcal{U} \cap V$ $\exists$ Weg $k_m : [0,1] \to \mathcal{U} \cap V$,

$k_m(1) = c(t_{m+1})$; $k_m(0) = c(t_m)$

$$c|_{[t_m, t_{m+1}]} \underset{\substack{\text{homotop} \\ \text{rel } \{t_m, t_{m+1}\}}}{\simeq} k_m \text{ (Reparametrisierung)}$$

$$c = \underbrace{\prod_i c|_{[t_i, t_{i+1}]}}_{\text{Verkettung von Wegen}} \underset{\text{rel. } \{0,1\}}{\simeq} \prod_i k_i \leftarrow \text{Pfad in } \mathcal{U} \cap V \subseteq \mathcal{U}$$

einfach zshgd

$\Rightarrow \prod k_i$ nullhomotop.

(iv) $\{r < |z| < R\} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}\, e^{i\alpha}$

$$\exp \uparrow \cong \downarrow \qquad \log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}\, e^{i\alpha} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z = |z|\, e^{i\varphi} \longmapsto \log_{/\mathbb{R}} |z| + i\varphi$$

$$\varphi \in \left]\alpha, \alpha + 2\pi\right[$$

$\{ z \in \mathbb{C} \mid \log_{/\mathbb{R}}(r) < \operatorname{Re}(z) < \log_{/\mathbb{R}}(R)$

$\quad \& \ \alpha < \operatorname{Im}(z) < \alpha + 2\pi \}$

1. Berechnen Sie $\int_c \frac{dz}{z}$ für die folgenden geschlossenen Wege in $\mathbb{C}^*$:

   (i) c durchläuft den Rand eines spitzwinkligen Dreiecks mit Ecken auf dem Einheitskreis in positiver Richtung.

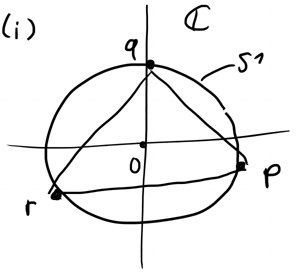
   (ii) $c(t) = 2 + 3e^{it}$ für $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,

   (iii) $c(t) = 3 + 2e^{it}$ für $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,

   (iv) $c(t) = (\frac{11}{10} + \cos 3t)e^{4it}$ für $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

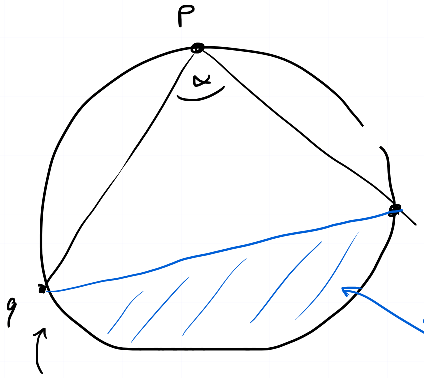
$\int_c \frac{dz}{z} = 8\pi$:

(i)



$\Delta = \Delta pqr$ spitzwinklig, $p, q, r \in S^1$.

Beh.: $0 \in \Delta$.



$\alpha < \frac{\pi}{2}$

$\Downarrow$

$\angle(C_\alpha) < \pi$

$\not\ni 0$, da

$C_\alpha : [0,1] \to S^1$ Kreisbogen

$c(0) = q$
$c(1) = r$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx + i\,dy}{x + iy} = \frac{(x - iy)(dx + i\,dy)}{x^2 + y^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{x^2+y^2}(x\,dx + y\,dy)}_{= d \log_{\mathbb{R}} \sqrt{x^2+y^2} \, = \, d \log_{\mathbb{R}} |z|} + \frac{i}{x^2+y^2}(x\,dy - y\,dx)$$

$z \neq 0$

$\Longrightarrow \frac{dz}{z}$ hat auf $\mathbb{C}^\times$ exakten Realteil

$$\Longrightarrow \int_c \frac{dz}{z} \underset{\substack{\uparrow \\ c \text{ Schleife}}}{=} i \operatorname{Im} \int_c \frac{dz}{z}.$$

Angenommen, $\operatorname{im}(c) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0, 2\pi[$

(dies c nicht notwendigerweise Schleife) $\rightarrow$

$$\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} e^{i\alpha} \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$z = re^{i\varphi} \longrightarrow \log_{\mathbb{R}} r + i\varphi$$

$r > 0,\ \varphi \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$

$$= \log_{\mathbb{R}} |z| + i \arg(z)$$

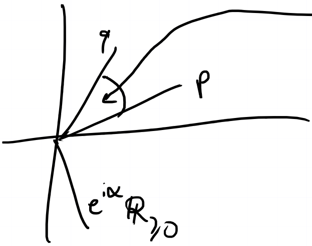
$\frac{dz}{z}$ ist exakt auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} e^{i\alpha}$

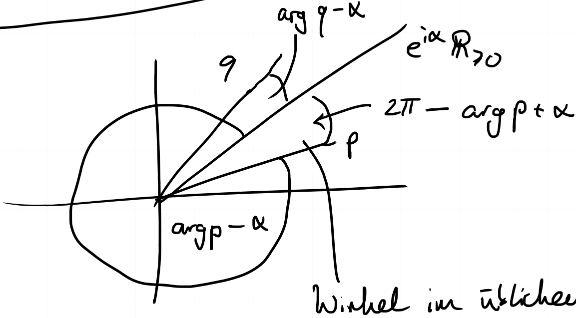
$$\frac{dz}{z} = d(\log z) \Longrightarrow \operatorname{Im}\left(\int_c \frac{dz}{z}\right) = \arg(\overbrace{c(1)}^{q}) - \arg(\overbrace{c(0)}^{p})$$

$$\uparrow \; c : [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} e^{i\alpha}$$

$$= \sphericalangle(p, q)$$

Vorsicht:

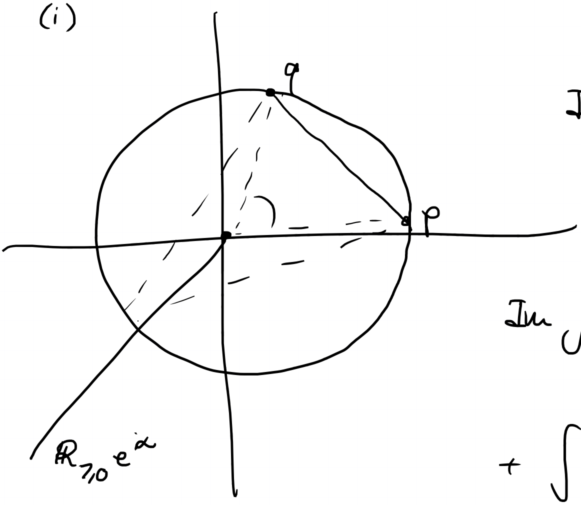




Winkel im üblichen Sinn $= 2\pi + \arg q - \arg p$

$$= 2\pi + \underbrace{\operatorname{Im} \int_c \frac{dz}{z}}_{<0}$$

(i)



$$\operatorname{Im} \int_{\overline{pq}} \frac{dz}{z} = \measuredangle(p,q)$$

$$\operatorname{Im} \int_{\partial\Delta} \frac{dz}{z} = \int_{\overline{pq}} \frac{dz}{z} + \int_{\overline{qr}} \frac{dz}{z} + \int_{\overline{rp}} \frac{dz}{z}$$

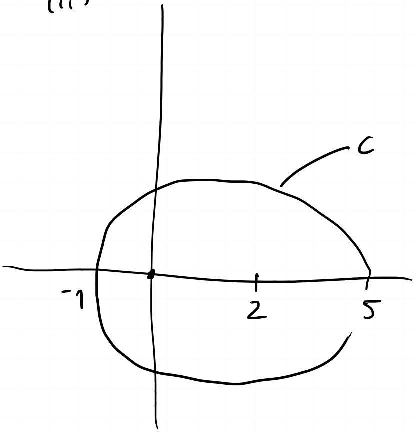
$$= \measuredangle(p,q) + \measuredangle(q,r) + \measuredangle(r,p)$$

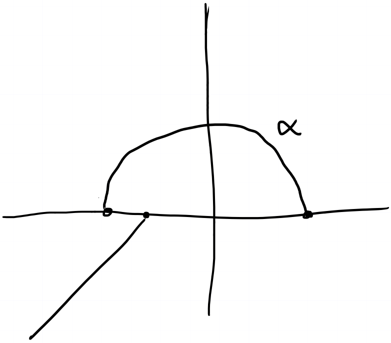
$$= 2\pi$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\partial\Delta} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

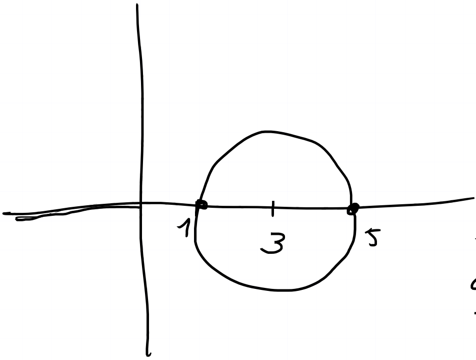
(ii)

$c = \alpha\beta$





$$\operatorname{Im}\int_C \frac{dz}{z} = \operatorname{Im}\int_\alpha \frac{dz}{z} + \operatorname{Im}\int_\beta \frac{dz}{z} = \pi + \pi = 2\pi$$



Mit dem gleichen Argument

& $\measuredangle(1,5) = 0$

$\frac{dz}{z}$ ist exakt auf

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}\, e^{i\pi}$

$$\Rightarrow \int_C \frac{dz}{z} = 0$$

2. Wir betrachten stetige Wege in einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

via $H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$

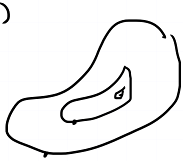
(a) Sind zwei Wege $c_1, c_2 : [a,b] \to U$ homotop rel Endpunkten und ist $\phi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a,b]$ stetig mit $\phi(\tilde{a}) = a$ und $\phi(\tilde{b}) = b$, so sind auch die Wege $c_1 \circ \phi$ und $c_2 \circ \phi$ homotop rel Endpunkten. $\tilde{H} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \times [0,1] \longrightarrow U$, $\tilde{H}(t,s) = H(\phi(t), s)$

(b) *Homotopien längs Wegen.* Ist $\phi : [a,b] \to [a,b]$ stetig mit $\phi(a) = a$ und $\phi(b) = b$, so ist jeder Weg $c : [a,b] \to U$ homotop rel Endpunkten zum Weg $c \circ \phi$.

(c) Die Verknüpfung eines Weges c mit einem konstanten Weg (von links oder von rechts) ist bis auf Reparametrisierung homotop zu c rel Endpunkten.

(x) Ist ein geschlossener Weg $c : [a,b] \to U$ nullhomotop, so ist er auch homotop zu einem konstanten Weg *relativ Endpunkten.*

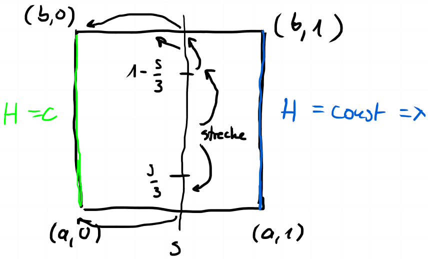
(x)



O.E. $a = 0$, $b = 1$. $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$

$H(\cdot, 0) = c$, $H(\cdot, 1) = \text{const} = x \in U$

$H(a, \cdot) = H(b, \cdot)$ (Schleife)



Wir wollen $H(a, \cdot) = c(a)$, $H(b, \cdot) = c(b)$

$$G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$$

$$(t,s) \longmapsto \begin{cases} (0, 3t), & 0 \le t \le \frac{s}{3} \\ \left(\alpha(s)\left(t - \frac{s}{3}\right), s\right), & \frac{s}{3} \le t \le 1 - \frac{s}{3} \\ (1, 3(1-t)), & 1 - \frac{s}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\left(1 - \frac{2s}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{3 - 2s} =: \alpha(s)$$

$\rightsquigarrow$ $\underset{\tilde{H}}{\overset{}{}}$ $\tilde{H} := H \circ G$ ist eine Homotopie

$$\tilde{H}(\cdot, 1) = H(G(\cdot, 1))$$

$$G(t,1) = \begin{cases} (0, 3t) & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ (3t-1, 1) & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ (1, 3(1-t)) \end{cases}$$

$$\left(t \mapsto H(0, 3t) = H(1, 3t)\right)^{-1}$$

$$= t \mapsto H(1, 3(1-t))$$

$$H(3t-1, 1) = x$$

$$\tilde{H}(\cdot, 1) = \overbrace{\left(t \mapsto H(1, 3(1-t)\right)}^{c}{}^{-1} (t \mapsto x)$$
$$(t \mapsto H(1, 3(1-t)))$$

$$\simeq c^{-1} c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rel Endpt}}}{\simeq} \text{konst} = c(1)$$