Lineare Algebra 2
Tutorium 3, 28.4.2021

Warm-Up

Richtig oder Falsch?

1. Eine Bilinearform $\beta : V \times V \to K$ ist genau dann symmetrisch, wenn die zugehörige Strukturmatrix B symmetrisch ist. ✓
2. Ist β sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch, so ist $\beta = 0$. Nur falls char $K \neq 2$
3. Ist β nicht-ausgeartet, so kann β nicht schiefsymmetrisch sein. ✗ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
4. Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, so ist $\dim_K(U^\perp) = \dim_K(U)$. ✗ $\dim V = \dim U^\perp + \dim U$, β nicht-ausgeartet
5. Es ist $U^{\perp\perp} = U$. ✗ nur im endlichdim.

2.

$$\beta(v,w) \overset{\text{symm.}}{=} \beta(w,v) \qquad \forall v, w \in V$$

$$\beta(v,w) \underset{\text{schief.}}{=} -\beta(w,v)$$

$$\Rightarrow \quad 2\,\beta(w,v) = 0$$

Falls K die Charakteristik $\neq 2$ hat, so folgt $\beta(w,v) = 0$. (also $\beta = 0$)

In char $K = 2$: $-1 = +1$
(also schiefsymm. $\Leftrightarrow$ symmetrisch)

Charakteristik: K Körper, Multiplikativ-neutrales Element $1_K \in K$

Es gibt immer einen eindeutigen Ringhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow K$$
$$1 \longmapsto 1_K$$
$$\underbrace{m}_{>0} \longmapsto \underbrace{1_K + \dots + 1_K}_{m \text{ mal}} =: m \in K$$

$\ker \varphi = ?$ Man kann zeigen: In $\mathbb{Z}$ hat jeder solche Kern die Form $p\mathbb{Z}$

$$p\mathbb{Z} = \{ p \cdot z \mid z \in \mathbb{Z} \}$$

p Primzahl, oder $p = 0$

Also: $\underbrace{\overset{\varphi(p)}{\overset{\shortparallel}{1_K + \cdots + 1_K}}}_{p>0} = 0$ & p ist die kleinste solche Zahl

Typischerweise: $\underbrace{K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}}_{\text{charakteristik}}, \ldots$ $= 0$

$$1 \longmapsto 1$$
$$\mathbb{Z} \hookrightarrow K$$

kein Kern

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(p) = \mathbb{Z}/p$$

K hat Charakt. $= p$

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow K$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\ker \varphi \xhookrightarrow{\bar{\varphi}} K$$

injektiv

$$\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$$

β nicht-ausgeartet: $V \xrightarrow{\phi} \operatorname{Hom}(V, K) = V^*$

$$v \longmapsto (\beta(v, -) : x \mapsto \beta(v, x))$$

ist injektiv

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto] & (u \mapsto \beta(v,u)) \\ V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & U^* \\ & V^* \cong U^* \oplus W^* \arrow[u] \end{tikzcd}$$

V endlich-dim

Man kann jede Linearform $U \to K$ fortsetzen nach $V \to K$

$\cong$: Basisergänzung

$$\ker \varphi = \{ v \in V \mid \forall u \in U : \beta(v,u) = 0 \}$$
$$= U^{\perp}$$

Rangsatz: $\dim V = \dim \underbrace{\ker \varphi}_{U^\perp} + \underbrace{\dim \underbrace{\operatorname{im} \varphi}_{U^*}}_{= \dim U}$

5.

$U \subseteq U^{\perp\perp}$ ✓ (Gegenbeispiel gibt es auf Blatt 2, Aufg. 3b)

$\beta : V \times W \longrightarrow K$ Bilin

$h \in \operatorname{End}_K(V)$ $\rightsquigarrow$ $\hat{h} : W \longrightarrow W$

$V \longrightarrow V$ Adjungierte

$v_1, \ldots, v_n$ Basis von V $w_1, \ldots, w_n$ von W Satz (1.2.11)

A die darstellende Matrix von h $\hat{A}$ — " — $\hat{h}$

Es soll gelten: $\forall v \in V$ $\forall w \in W$ $\beta(h(v), w) = \beta(v, \hat{h}(w))$

Auf Basiselementen:

$$\beta(h(v_i), w_j) = \beta\left(\sum_k A_{ki} v_k , w_j\right)$$

$$= \sum_k A_{ki} \underbrace{\beta(v_k, w_j)}_{B_{kj}} = (A^T B)_{ij}$$

$$\beta(v_i, h^\wedge(w_j)) = \dots = (B\hat{A})_{ij}$$

$$\Longrightarrow \quad A^T B = B\hat{A} \quad \Longrightarrow$$

$$\hat{A} = B^{-1} A^T B$$

(b) $$B = \begin{pmatrix} \beta(v_1,v_1) & \beta(v_1,v_2) \\ \beta(v_2,v_1) & \beta(v_2,v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\beta(v_1,v_1) = \beta\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\beta(v_1,v_2) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = 11$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 25 & -11 \\ -11 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = B^{-1} A^T B = \dots = \begin{pmatrix} -141 & -324 \\ 64 & 147 \end{pmatrix}$$

Alternativ: Wechsel auf Std basis:

Darstellende Matrix von g in (v_1, v_2)

$$= A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

— " ——— g in Stdbasis

$$= \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$v_1 \quad v_2$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 18 & -9 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ die darstellende Matrix von $\hat{h}$ in Stdbasis ist

die Transponierte: $\tilde{A}^T =: \hat{\tilde{A}}$

$\rightsquigarrow$ — " — $\hat{h}$ in (v_1, v_2)

$$= \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \hat{\tilde{A}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -141 & -324 \\ 64 & 147 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = n < \infty$ und β eine symmetrische Bilinearform. Seien weiter U_1, U_2 lineare Unterräume von V. Zeige:

1. $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.
2. $U_1^\perp + U_2^\perp \subseteq (U_1 \cap U_2)^\perp$.

1. $v \in \underbrace{(U_1 + U_2)}_{\substack{\text{beliebiges} \\ \text{Element hier} \\ = u_1 + u_2, \\ u_1 \in U_1, \\ u_2 \in U_2}}^\perp \iff \forall u_1 \in U_1 \ \forall u_2 \in U_2 : \beta(v, u_1 + u_2) = 0$

$\Downarrow$ setze $u_1 = 0$ oder $u_2 = 0$

$\forall u_1 \in U_1 : \beta(v, u_1) = 0$

$v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp \iff \forall u_2 \in U_2 : \beta(v, u_2) = 0$

$$* \quad \beta(v, u_1 + u_2) = \beta(v, u_1) + \beta(v, u_2) = 0 + 0 = 0$$

2.

$$\underset{\substack{\Psi \\ v_1}}{\mathcal{U}_1^\perp} + \underset{\substack{\Psi \\ v_2}}{\mathcal{U}_2^\perp} \subseteq (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)^\perp$$

ZZ: $\beta(v_1 + v_2, u) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

$$\Downarrow \begin{smallmatrix} u \in \mathcal{U}_1, \\ v_1 \in \mathcal{U}_1^\perp \end{smallmatrix} \qquad \Downarrow$$

$$\beta(v_1, u) = 0 \qquad \beta(v_2, u) = 0$$

$$\beta(v_1+v_2, u) = \beta(v_1, u) + \beta(v_2, u) = 0 + 0 = 0.$$

https://rtmader.github.io