Analysis 3, Tutorium 4
16.11.2022

Aufgabe 1 (Integral bezüglich des Dirac-Maßes)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum, $a \in \Omega$, und δ_a das Dirac-Maß in a. Zeigen Sie: Für jede δ_a-integrierbare Funktion f gilt

$$\int_\Omega f \, d\delta_a = f(a).$$

- z.B. mit <u>maßtheoretischer Induktion</u>

  ↳ <u>Wiederholung dazu:</u>

  - Approximation messbarer Fkt. durch Treppenfunktionen (= einfache Funktionen):

<u>Idee:</u> Für alle $f: \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ <u>messbar</u> gibt es Treppenfunktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\underbrace{f_n \nearrow_n f}$.

$\Leftrightarrow \sup_n f_n(x) = f(x)$ & $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ $\forall x \in \Omega$

Sei $M \subseteq \{\text{Funktionen } f: \Omega \to [0, +\infty]\}$ sodass gilt:

(*)

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{1}: \ \forall f, g \in M \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+: \\ \qquad f+g \in M, \ \alpha f \in M. \\ \underline{2}.: \ \forall A \in \mathcal{A}: \ 1_A \in M \\ \underline{3}.: \ \forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}} \ \forall f: \Omega \to [0, \infty]: \\ \qquad f_n \nearrow_n f \ \Rightarrow \ f \in M \end{array}}$$

⇒ Dann folgt:

$$\{f: \Omega \to [0, +\infty] \text{ messbar}\} \subseteq M$$

- In unserer Aufgabe:

$$M = \left\{ f: \Omega \to [0, +\infty] \ \middle| \ \int_\Omega f \, d\delta_a = f(a) \right\}$$

- Letzter Schritt: Für $f:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ messbar,

  schreibe $f = f_+ - f_-$ mit $f_\pm:\Omega\to[0,+\infty]$

  messbar. Dann folgt schon:

$$\int f\,d\delta_a = \int f_+\,d\delta_a + \int f_-\,d\delta_a \overset{f_\pm\in M}{\downarrow =} f_+(a) + f_-(a)$$

$$= f(a).$$

- Also, lasst uns (*) nachprüfen:

  1.: Folgt aus Linearität des Integrals.

  2.: $A\in\mathcal{A} \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega 1_A\,d\delta_a \underset{\text{Def}}{=} \delta_a(A) = \begin{cases}1 & a\in A\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

  $$= 1_A(a).$$

  3.: $f_n \underset{n}{\nearrow} f$, $\displaystyle\int_\Omega f_n\,d\delta_a = f_n(a)\quad \forall n\in\mathbb{N}.$

$$\Rightarrow \int_\Omega f\,d\delta_a = \int_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\delta_a =$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{monotone}\\ \text{Konvergenz}}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\delta_a = \lim_{n\to\infty} f_n(a)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ f_n \underset{n}{\to} f \text{ punktweise}}}{=} f(a)$$

Aufgabe 2 (Integrierbarkeit unter Multiplikation mit beschränkten Funktionen)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion. Zeigen Sie: Für jede beschränkte messbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$, die

$$\{|f| = +\infty\} \cap \{g = 0\} = \emptyset$$

erfüllt, ist das Produkt fg wieder μ-integrierbar.

← Das kommt durch die Konvention "$+\infty \cdot 0$ = undefiniert" zustande.
(Oft setzt man in der Maßtheorie $\pm\infty \cdot 0 = 0$; sogar "undefiniert $\cdot\, 0 = 0$".)

f, g messbar $\underset{\text{(Vorlesung)}}{\Longrightarrow}$ $f \cdot g$ messbar

g beschränkt: $\exists M \in \mathbb{R}^+$: $|g| \underset{\text{punktweise}}{\leq} \overset{\text{konstante Fkt.}}{M}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\int_\Omega (fg)_\pm \, d\mu}_{\text{Integral nichtnegativer messbarer Funktionen ist immer definiert}} \underset{\text{Monotonie des Integrals}}{\leq} \int_\Omega |fg| \, d\mu \underset{\text{Linearität des Integrals \& Monotonie}}{\leq} M \int |f| \, d\mu \underset{f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}}{<} \infty$$

Also: $\int_\Omega (fg)_\pm < \infty$

$\Longrightarrow$ fg ist integrierbar.

Aufgabe 3 (Niveaumenge bei Unendlich)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie: Wenn $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion ist, so ist $\underbrace{\{x \in \Omega : f(x) = \pm\infty\}}_{=:S}$ eine Nullmenge.

$$\mu(S) = \int_\Omega 1_S \, d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{naiv: wir basteln } f \text{ rein}}}{\overset{\frac{1}{k}|f|\,|_S = \infty \atop \downarrow}{\leq}} \int_\Omega \frac{1}{k}|f| \, d\mu =: M_k < \infty$$

Wir wollen M_k mit $M_k \xrightarrow[k]{} 0$.

$\rightsquigarrow$ betrachte $\frac{|f|}{k}$ statt $|f|$.

$$\Rightarrow \mu(S) \leq M_k \xrightarrow{k \to \infty} 0. \Rightarrow S \text{ ist eine Nullmenge.}$$

Aufgabe 4 (Monotonie und Messbarkeit)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie: f ist $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-messbar.

Ohne Einschränkung ist f monoton steigend.
(Sonst betrachte $-f$)

<u>zz:</u> $\{f > a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

$$\{f>a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > a\} = f^{-1}(]a, \infty[)$$

$$= \underbrace{\left]\inf_{x : f(x) > a} x, \infty\right[}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\left[\inf_{x : f(x) > a} x, \infty\right[}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}.$$

<u>Grund:</u> „$\subseteq$": Für $z < \inf_{f(x)>a} x$, so $z \notin \{x \mid f(x) > a\}$.

„$\supseteq$": Für $z > \inf_{f(x)>a} x$ gibt es $y < z$ mit $f(y) > a$

$\Rightarrow f(z) \geq f(y) > a$.

Bonusaufgaben:

B1: Sei $f: \Omega \to [0,\infty]$ μ-messbar mit $\int_\Omega f \, d\mu < \infty$.

Zeige: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E \in \mathcal{A}: \mu(E) < \infty$

und $\int_E f \, d\mu > \int_\Omega f \, d\mu - \varepsilon$

Lsg:

$E_n := \{x \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$, $f_n = f \cdot 1_{E_n}$

$\Rightarrow f_n \nearrow_n f \underset{\text{monotone Konvergenz}}{\Rightarrow} \int f \, d\mu \nwarrow_n \int f_n \, d\mu$

$\Rightarrow$ Es gibt n mit $\underbrace{\int f_n \, d\mu}_{= \int_{E_n} f \, d\mu} > \int f \, d\mu - \varepsilon$

Noch z.z.: $\mu(E_n) < \infty$.

$\mu(E_n) = \int 1_{E_n} \, d\mu \underset{f|_{E_n} > \frac{1}{n}}{<} n \int f 1_{E_n} \, d\mu \overset{f 1_{E_n} < f}{\leq} n \int_\Omega f \, d\mu < \infty$