Funktionentheorie, Tutorium 7

2. (i) Betrachten Sie die Schleife $c : [-3\pi, 3\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$c(t) := \begin{cases} t + i\sin t & \text{für } -3\pi \leqslant t \leqslant 0, \\ -t + i\sin t & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant 3\pi. \end{cases}$$

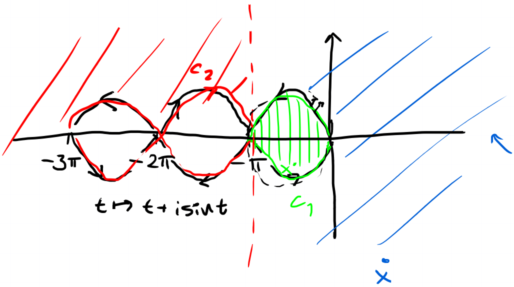
Skizzieren Sie c und bestimmen Sie ihre Umlaufzahlen $\nu(c; a)$ um alle Punkte $a \in \mathbb{C}$, die sie nicht durchläuft. Für welche dieser Punkte a ist c in der punktierten Ebene $\mathbb{C} - \{a\}$ nicht nullhomotop?

(ii) Es bezeichne $\zeta := e^{2\pi i/5}$. Betrachten Sie eine polygonale Schleife c mit Ecken $1, \zeta^2, \zeta^4, \zeta, \zeta^3$ und 1. Sie durchläuft einmal das Pentagramm mit Ecken in den fünften Einheitswurzeln. Bestimmen Sie die Umlaufzahlen $\nu(c; a)$ für alle Punkte $a \in \mathbb{C}$ nicht auf dem Pentagramm. Für welche dieser Punkte a ist c in der punktierten Ebene $\mathbb{C} - \{a\}$ nicht nullhomotop?

2i) $c = (t \mapsto t + i\sin t) * \underbrace{\left(\begin{matrix} [0,3\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto -t + i\sin t\end{matrix}\right)}_{= \left(\begin{matrix} [-3\pi,0] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto t - i\sin t\end{matrix}\right)^{-1}}$

$=$ Graphen von $t \mapsto \sin t$

$t \mapsto -\sin t$



unbeschränkte Zusammenhangskomponente U von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(c) = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(c)$

$\mathrm{im}(c)$ kompakt $\Rightarrow \exists M > 0 : \mathrm{im}(c) \subseteq \overline{U_M(0)}$

$\exists y \in U \setminus \overline{U_M(0)}$

Umlaufzahl $\nu(c; x) = \nu(c; y)$ (lokal konstant)

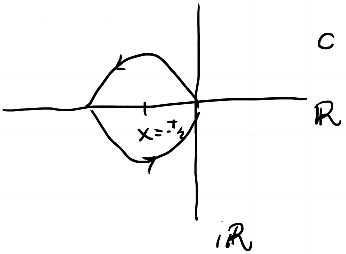
c nullhomotop in $\overline{U_M(0)} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{y\}$

konvex, einfach zshgd.

$\Rightarrow \nu(c; y) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z - y} = 0$

nullhomotop in $\{\mathrm{Re}(z) \leq -\pi\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{x\}$

$c = c_1 c_2 \simeq c_1 \qquad \nu(c_1, x) = 1$



$$c : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} t + i\sin t & t \leq 0 \\ t - i\sin t & t > 0 \end{cases}$$

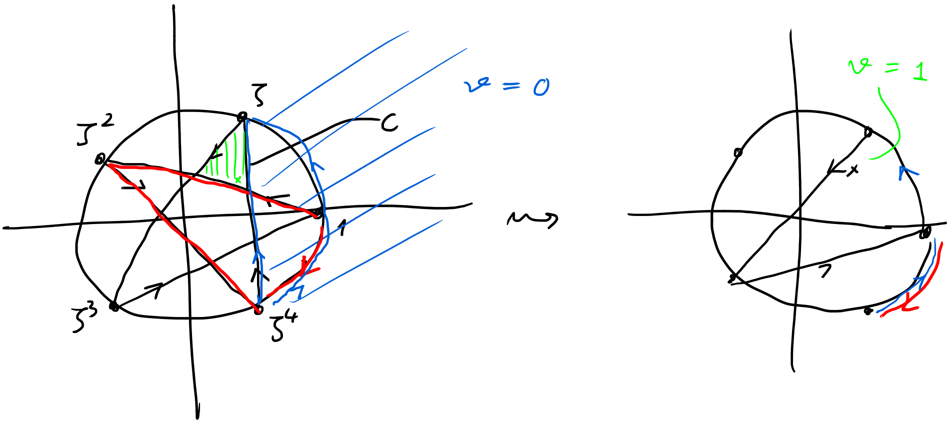
$$H : [-\pi,\pi] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{-\tfrac{\pi}{2}\}, \quad H(t,s) = \frac{c(t) + \frac{\pi}{2}}{s\,\frac{2}{\pi}\left\|c(t) + \frac{\pi}{2}\right\| + (1-s)} - \frac{\pi}{2}$$

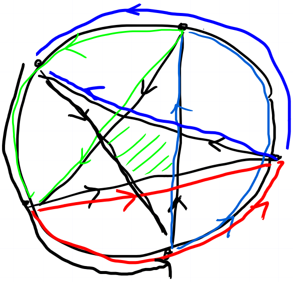
$$H(\cdot, 1) = \left(e^{it} - \frac{\pi}{2}\right) \circ \phi$$

$\phi : [0,1] \xrightarrow{\cong} [0,1]$,
$\phi(0) = 0$,
$\phi(1) = 1$

$\forall (s,t) \in [-\pi,\pi] \times [0,1]$
$H(s,t) \neq -\frac{\pi}{2}$.

$$H(s,t) = -\frac{\pi}{2} \implies c(t) + \frac{\pi}{2} = 0 \implies \lightning$$





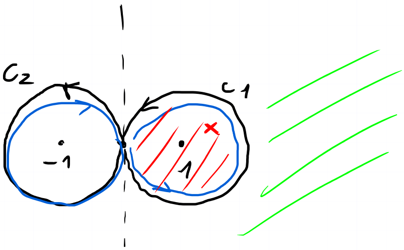
$\vartheta = 2$

(iii) Die Schleifen $c_1, c_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ seien definiert durch

$$c_1(t) = -c_2(t) = 1 - e^{it}$$

für $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Skizzieren Sie die zusammengesetzte Schleife $c_1 \cdot c_2$ und bestimmen Sie ihre Umlaufzahlen um alle Punkte in $\mathbb{C}$, die sie nicht durchläuft.

Dieselbe Frage für die („Kommutator"-)Schleife $c_1 \cdot c_2 \cdot c_1^{-1} \cdot c_2^{-1}$. In welchen punktierten Ebenen $\mathbb{C} - \{a\}$ für Punkte $a \in \mathbb{C}$, die sie nicht durchläuft, ist sie nullhomotop?



$\vartheta = 0$

c_2 & c_2^{-1} nullhomotop in $\{Re(z) \leq 0\}$
$\subseteq \mathbb{C} \setminus \{x\}$

$\Rightarrow \quad c_1 c_2 c_1^{-1} c_2^{-1} \simeq c_1 c_1^{-1} \simeq$ konst $= 0$

$\Rightarrow \nu(c, x) = 0$

$c_1 c_2 \simeq c_1$

$\Rightarrow \nu(c_1 c_2, x) = 1$

3. (i) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Zeigen Sie: Jede harmonische Funktion $u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ist der Realteil einer holomorphen Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ und diese ist eindeutig bis auf additive (imaginäre) Konstante.

Zur Erinnerung: Eine zweimal differenzierbare Funktion auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ heißt *harmonisch*, falls sie im Kern des Laplace-Operators $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ liegt. $\Delta u = 0$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4 von Blatt 2 für die Eindeutigkeit. Betrachten Sie dann die 1-Form

$$\alpha := -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Eindeutigkeit: Angenommen $f, \tilde{f} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\tilde{f}) = u$

$\Rightarrow$ $i(f - \tilde{f}) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ holomorph, also konstant

$\Rightarrow$ $f - \tilde{f} = i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Existenz:

$$\alpha = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

α ist geschlossen: $d\alpha = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy \wedge dx +$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \wedge dy =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}_{\Delta u = 0} dx \wedge dy = 0$$

α geschlossen $\overset{4.20 \sim 4.2x \dots}{\Longrightarrow}$ α lokal exakt

$\underset{\mathcal{U} \text{ einfach zshgd.}}{\Longrightarrow}$ α exakt

$\Big\}$ Poincaré-Lemma

$$\Rightarrow \quad \exists v : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{mit} \quad \alpha = dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$\alpha = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ $f = u + iv : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig reell diff'bar & erfüllt die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$\Rightarrow$ f holomorph, $\mathrm{Re}(f) = u$.

(ii) Zeigen Sie: Die Funktion $u : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \log_{\mathbb{R}} |z|$ ist harmonisch, aber *nicht* der Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}^*$.

Hinweis: $\log |z|$ ist lokal der Realteil eines Zweiges des komplexen Logarithmus.

u harmonisch:
$$u(x+iy) := \log \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \log (x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2} 2x = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Delta u = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \left(-x^2+y^2+x^2-y^2 \right) = 0.$$

Angenommen, $f : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph

mit $\mathrm{Re}(f) = u$

Betrachte $\log : \underbrace{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}}_{}$ $\longrightarrow \mathbb{C}$ Hauptzweig, $\mathcal{U} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$

$$\mathrm{Re}(\log(z)) = \log_{\mathbb{R}} |z|$$

$\Longrightarrow$ $f|_{\mathcal{U}}$ & $\log$ erfüllen beide die Bedingungen aus (i)

für $u : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$,

$z \longmapsto \log |z|$

$$\overset{(i)}{\Longrightarrow} \quad \log = f|_{\mathcal{U}} + i\lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

stetig fortsetzbar auf $\mathbb{C}^\times$ (durch $f + i\lambda$)

$\Longrightarrow$ $\lightning$.

4. Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, daß die Kommutator-Schleife $c_1 \cdot c_2 \cdot c_1^{-1} \cdot c_2^{-1}$ aus Aufgabe 2(iii) in der zweifach punktierten Ebene $\mathbb{C} - \{-1, 1\}$ *nicht nullhomotop* ist.

(i) *Logarithmisches Anheben von Wegen.* Für jeden Weg $c : [0,T] \to \mathbb{C}^*$ mit $c(0) = 1$ existiert ein eindeutiger nach $\mathbb{C}$ „angehobener" Weg $\tilde{c} : [0,T] \to \mathbb{C}$ mit

$\exp : \underset{\tilde{c}}{\mathbb{C}} \to \underset{c}{\mathbb{C}^\times}$

$$e^{\tilde{c}} = c$$

und $\tilde{c}(0) = 0$, nämlich der Weg definiert durch

$$\tilde{c}(t) = \int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z}.$$

(ii) *Logarithmisches Anheben von Homotopien.* Sind zwei Wege $c_1, c_2 : [0,T] \to \mathbb{C}^*$ mit Anfangspunkt 1 und gleichem Endpunkt $c_1(T) = c_2(T)$ homotop durch eine Homotopie $H : [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$, so haben die angehobenen Wege $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 : [0,T] \to \mathbb{C}$ mit Anfangspunkt 0 auch gleiche Endpunkte und sind homotop durch eine Homotopie $\tilde{H} : [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ mit rel Endpt

$$e^{\tilde{H}} = H.$$

(i) $F_c : [0,T] \to \mathbb{C}^\times$ Potential längs c,

(d.h. $\forall t \in [0,T]$ $\exists \varepsilon > 0$ $\exists$ offene Umgebung V von $c(]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\cap [0,T])$

& F_V von $\alpha = \frac{dz}{z}$ auf V

& $F_c = F_V \circ c$)

eindeutig bis auf additive Konstante; $\tilde{c}(0) = 0$

$$\tilde{c}(t) = \int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z} = F_c \Big|_0^t$$

$$= F_c(t) - \underbrace{F_c(0)}_{\substack{=0 \\ \text{o.E.}}}$$

stetig (da Stetigkeit lokale Eigenschaft)

ein Zweig auf V

$$F_c = \log|_V \circ c$$

$$e^{\tilde{c}(t)} = e^{\log|_V \circ c(t)} = c(t)$$

Eindeutigkeit: $\tilde{\tilde{c}}$, $\tilde{c}$ wie oben

$$\exp(\tilde{\tilde{c}}) = \exp(\tilde{c})$$

$$\Rightarrow \forall t: \tilde{\tilde{c}} = \tilde{c} + 2\pi i \underbrace{k(t)}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$\underset{\text{Stetigkeit}}{\Rightarrow} k(t) = \text{konst},$$

$$\tilde{\tilde{c}}(0) = \tilde{c}(0)$$

$$\Rightarrow k(t) = 0.$$

(ii) $$\tilde{H}(t,s) = \int_{H(\cdot,s)|_{[0,t]}} \frac{dz}{z}$$

$\tilde{H}(\cdot,s)$ ist die eindeutige Anhebung $H(\cdot,s)$.

$e^{\tilde{H}} = H$

$$\tilde{H}(T,s) = \int_{H(\cdot,s)} \frac{dz}{z} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Homotopie-} \\ \text{invarianz}}}{=} \int_{H(\cdot,0)} \frac{dz}{z} = \tilde{H}(T,0)$$

$\tilde{H}(0,s) = 0$ $\rightsquigarrow$ $\tilde{H}$ ist rel $\{0,T\}$

(insbesondere $\tilde{c}_1(T) = \tilde{c}_2(T)$)

Stetigkeit von $\tilde{H}$: (?)

Sei $(t,s) \in [0,T] \times [0,1]$.

$\exists\, \varepsilon_{s,t} > 0$ $V_{s,t}$ offen mit

$$\tilde{H}(\cdot,s)\Big|_{]t-\varepsilon,t+\varepsilon[} = F_V \cdot H(\cdot,s)\Big| \ldots$$

H stetig $\Rightarrow$ $H^{-1}(V)$ offene Umgebung von (t,s)

F_V ist ein Potential auf

$$V \supseteq H(\underbrace{H^{-1}(V) \cap]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\times [0,1]}_{U_{s,t} \text{ Umgebung von } (s,t)})$$

$$\bigcup_{s,t} U_{s,t} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kompakt}}}{[0,T]} \times [0,1]$$

$\Rightarrow$ im H wird von endlich vielen $V_{s,t}$ überdeckt

$\rightsquigarrow$ wähle Potentiale $F_{V_{s,t}}$ kompatibel

$$\tilde{H}\big|_{U_{s,t}} = \underbrace{F_{V_{s,t}} H\big|_{U_{s,t}}}_{\text{ist stetig.}}$$

$$F_{V_{s,t}} H\big|_{U_{s,t} \cap U_{s',t'}} = F_{V_{s',t'}} H\big|_{U_{s,t} \cap U_{s',t}}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{H}$ stetig.