Funktionentheorie, Tutorium 12

3. (i) Wir setzen die Abbildung $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ zu einer Selbstabbildung $\iota : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ der Riemannschen Zahlenkugel fort, indem wir die Werte $\iota(0) := \infty$ und $\iota(\infty) := 0$ zuweisen. Zeigen Sie, daß ι biholomorph ist.

(ii) Für eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ ist die *gebrochen lineare Transformation*

$$m_A : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} = \left[\frac{az+b}{cz+d} : 1\right] = [az+b : cz+d] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$$

auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme höchstens eines Punktes definiert und holomorph. Zeigen Sie, daß sie sich eindeutig zu einer biholomorphen Selbstabbildung $\mu_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ der Riemannschen Zahlenkugel fortsetzt.

(ii') Es gilt

$$\mu_{AB} = \mu_A \circ \mu_B$$

für $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, und die Umkehrungen sind explizit gegeben durch $\mu_A^{-1} = \mu_{A^{-1}}$.

(i) folgt aus (ii) mit $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$.

(ii) Riemannsche Fläche F, $F = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ offene Überdeckung

$$\mathcal{U}_i \xrightarrow[\cong]{\varphi_i} \varphi_i(\mathcal{U}_i) \subseteq \mathbb{C}$$

(Homöomorphismus) offen

$$\nexists \quad \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \underset{\mathbb{C}}{\overset{\cap}{\varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)}} \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \xrightarrow{\varphi_j} \underset{\mathbb{C}}{\overset{\cap}{\varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)}}$$

biholomorph

Bei uns:

$$F = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P = \mathbb{P}(\mathbb{C}) = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$= \frac{(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \{(0,0)\}}{\sim} \qquad (x,y) \sim (x',y')$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^\times : \lambda(x,y) = (x',y')$$

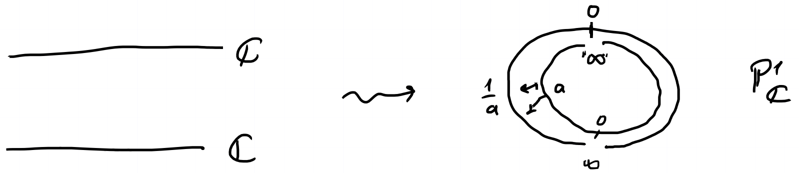
$$[(x,y)]_\sim =: [x:y] \overset{y \neq 0}{=} \left[\frac{x}{y} : 1\right] \mathrel{\hat{=}} \frac{x}{y} \in \mathbb{C}$$

$$= [\lambda x : \lambda y]$$

$$\{\lambda(x,y) \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times\} \mathrel{\hat{=}} \text{Gerade durch } 0$$

$$[x:y] \underset{y=0}{=} [x:0] \overset{x \neq 0}{=} [1:0] = \infty$$

"Proj-construction"



$$\mathcal{U}_0 = \{ [z : 1] \mid z \in \mathbb{C} \}$$
$$= \{ [z_0 : z_1] \mid z_1 \neq 0 \} \xrightarrow[\cong]{\kappa_0} \mathbb{C}$$
$$[z_0 : z_1] \longmapsto \frac{z_0}{z_1}$$

$$\mathcal{U}_1 = \{ [1 : z] \mid z \in \mathbb{C} \}$$
$$= \{ [z_0 : z_1] \mid z_0 \neq 0 \} \xrightarrow{\kappa_1} \mathbb{C}$$
$$[z_0 : z_1] \longmapsto \frac{z_1}{z_0}$$

$F \xrightarrow{f} F$ holomorph in $x \in F$

$\iff \exists \underset{\substack{\cup \\ x}}{\mathcal{U}_i}, \mathcal{U}_j, \underset{\substack{\cup \\ x}}{\mathcal{U}} \underset{\text{offen}}{\subseteq} F : \quad f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}_j,$

$\varphi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} \Big|_{\varphi_i(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i)}$ holomorph.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mu_A : \underset{\mathbb{P}^1}{\overline{\mathbb{C}}} \longrightarrow \underset{\mathbb{P}^1}{\overline{\mathbb{C}}}$

$$[z_0 : z_1] \longmapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} =$$
$$= [a z_0 + b z_1 : c z_0 + d z_1].$$

homogene Polynome

Das ist holomorph:

$\mathcal{U} := \mathbb{P}^1 \setminus \{ [-d : c], \underbrace{[1 : 0]}_{\infty} \} \subseteq \mathcal{U}_0$

hier noch zu prüfen: Es werden nicht beide Koordinaten gleichzeitig 0. (hier $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$)

$$\kappa_0 \circ \mu_A \circ \kappa_0^{-1} \Big|_{\kappa_0(\mathcal{U})} = m_A$$

$$\kappa_0(\mathcal{U}) = \mathbb{C} \setminus \{ -\tfrac{d}{c} \} \to \mathbb{C}$$

$$z \quad m_A : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\kappa_0 \circ \mu_A \circ \kappa_0^{-1}(z) = \kappa_0(\mu_A([z:1])) =$$

$$\kappa_0 : [z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1}$$

$$[z:1] \leftarrow z$$

$$= \kappa_0([az+b : cz+d]) = \frac{az+b}{cz+d} = \mu_A(z)$$

ist holomorph

$$V = \mathbb{P}^1 \setminus \{[0:1], [-b:a]\}$$

$$\mu_A|_V : [z_0 : z_1] \mapsto \left[1 : \frac{cz_0 + dz_1}{az_0 + bz_1}\right]$$

$$\kappa_1 \circ \mu_A \circ \kappa_1^{-1}\Big|_{\kappa_1(V)}(z) =$$

$$= \kappa_1(\mu_A([1:z])) = \frac{c+dz}{a+bz}$$

holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-a}{b}\}$.

$\mathbb{P}^1 \overset{?}{=} U \cup V$,

falls $d \neq 0$, oder $a \neq 0$, so

$$\{[-d:c], [1:0]\} \cap \{[-b:a], [0:1]\} = \emptyset$$

$\rightsquigarrow$ dann fertig

$\underline{d = 0 \ \& \ a = 0}$: $\quad z \mapsto \frac{b}{cz}$

$$\mathcal{U}_1 = W := \mathbb{P}^1 \setminus \{[0:1]\}$$

$$\kappa_0 \, \mu_A \, \kappa_1^{-1} = (z \mapsto \tfrac{b}{c} z)$$

holomorph

$$\text{auf } \mathcal{U}_0 = X := \mathbb{P}^1 \setminus \{[1:0]\}$$

$$\kappa_1 \, \mu_A \, \kappa_0^{-1} = (z \mapsto \tfrac{c}{b} z)$$

holomorph

(Eindeutigkeit: Eindeutigkeit auf $\mathcal{U} \cap V$

(bzw. $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$)

$\Leftarrow$ Identitätssatz)

Biholomorphie folgt aus (ii'): $\mu_{AB} = \mu_A \circ \mu_B$

$\&$ $\mu_{id} = id_{\mathbb{P}^1}$

$(\Rightarrow \mu_A^{-1} = \mu_{A^{-1}})$

$\nwarrow$ holomorph

$$\mu_A \, \mu_B \, [z_0 : z_1] = \mu_A \left[B \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \right]_\sim$$
$$= \left[AB \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \right]_\sim = \mu_{AB} [z_0 : z_1].$$

4. *Die obere Halbebene und ihre holomorphen Symmetrien.* Sei $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

(i) Die gebrochen linearen Transformationen $\mu_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ für die Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ definieren biholomorphe Selbstabbildungen von H.

(ii) Die so definierte Operation $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightharpoondown H$ ist transitiv. Ihr Kern ist $\{\pm E\}$.

Hinweis: Weisen Sie nach, daß die Orbiten offen sind.

(iii) Der Stabilisator des Punktes i ist die orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(2)$.

(iv) Die Abbildungen in (i) sind alle biholomorphen Selbstabbildungen von H und es besteht ein natürlicher Gruppen-Isomorphismus $\mathrm{Aut}(H) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \dfrac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}{\{\pm E\}}$

(i) $z \in H \overset{!}{\Longrightarrow} \mu_A(z) \in H$

$$z \in H \;\Downarrow\; cz + d \neq 0 \quad \& \quad \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) =$$

$\uparrow$ $z \notin \mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{|cz+d|^2} \operatorname{Im}\Big(\overbrace{ac|z|^2 + bd}^{\in \mathbb{R}} + bc\bar{z} + adz\Big)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{|cz+d|^2}}_{>0} \underbrace{(-bc + ad)}_{=1} \underbrace{\operatorname{Im}(z)}_{>0} > 0 \quad \Longrightarrow \;!$$

$$SL(2,\mathbb{R}) \leq GL(2,\mathbb{C})$$

$$\Longrightarrow \mu_{A^{-1}} : H \to H$$

$$\& \quad \mu_{A^{-1}} \circ \mu_A \underset{\substack{3\,(ii') \\ \&\ \text{Anwendung} \\ \text{von } k_0}}{\overset{\uparrow}{=}} \mu_{id} = id_H \quad \rightsquigarrow \mu_A \text{ biholomorph}$$

$\mu_{AB} = \mu_A \mu_B \rightsquigarrow$ Homomorphismus

$$\mu : SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \{\text{Bihol. } H \overset{\cong}{\to} H\} =: \operatorname{Aut}(H)$$

$$A \longmapsto \mu_A$$

$\rightsquigarrow$ Gruppenwirkung $SL(2,\mathbb{R}) \circlearrowright H$

(ii) $\ker \mu = \{\pm \underset{\text{„}E = \text{Einheitsmatrix}}{id}\}$

"2": $\mu_{\pm id} = \left(z \mapsto \frac{\pm z}{\pm 1} = z\right) = id$

"⊆": $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mu_A = id$

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \quad \forall z \in H$$

↯

$$\Updownarrow$$

$$az+b = z(cz+d)$$

$$\iff \underbrace{cz^2 + (d-a)z - b}_{= \text{Nullpolynom}} = 0$$

$c=0$, $b=0$, $d=a$, $A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$1 = \det A = a^2$$

$$\Rightarrow a = \pm 1$$

$$\Rightarrow A = \pm id$$

Transitivität:

$z \in H$, Bahn (syn: Orbit) von z

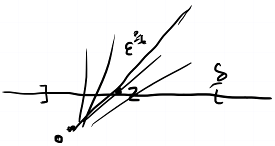
$$:= SL(2,\mathbb{R})(z) = \{\underbrace{\mu_A(z)}_{\in H} \mid A \in SL(2,\mathbb{R})\}$$

transitiv $\iff$ $\exists z \in H$: $SL(2,\mathbb{R})(z) = H$.

<u>Hinweis:</u> $SL(2,\mathbb{R})(z)$ offen?

$$\mu\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^{-1}\delta \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}(z) = \frac{\varepsilon z + \varepsilon^{-1}\delta}{\varepsilon^{-1}} = \varepsilon^2 z + \delta$$

$\forall \varepsilon, \delta > 0$



$\overset{?}{\Rightarrow}$ $SL(2,\mathbb{R})(z)$ offen

$$H = \underset{[z] \in H/SL(2,\mathbb{R})}{\bigsqcup} SL(2,\mathbb{R})(z)$$

← disjunkt

Zsmhgd ↗

↖ offen

$\uparrow$

$[z] = [z']$

$\Longleftrightarrow z = \mu_A(z')$

$\Rightarrow SL(2,\mathbb{R})(z) = H$ für ein z.

$z \in H, \quad z = x + iy$

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$$

$$\mu_A(i) = \frac{\sqrt{y}\, i + \frac{x}{\sqrt{y}}}{1/\sqrt{y}} = yi + x = z$$

$\Rightarrow z \in SL(2,\mathbb{R})(i)$

$H = SL(2,\mathbb{R})(i)$

(iii) $\operatorname{Stab}(i) = SL(2,\mathbb{R})_i$

$= \{ A \in SL(2,\mathbb{R}) \mid \mu_A(i) = i \}$

$\overset{!}{=} SO(2,\mathbb{R})$.

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \frac{ai+b}{ci+d} = i$

$\Leftrightarrow ai + b = -c + di$

Real- & imag.-teil $\Leftrightarrow a = d, \quad c = -b$

$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$\cap$

$SO(2,\mathbb{R})$

sowas fixiert i

„Fehlt noch": $SO(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R} \\ a^2+b^2 = 1 \end{matrix} \right\}$

existiert da $\ker \mu \supseteq \{\pm E\}$ „$=$"

injektiv, da

Isomorphiesatz

(iv)

$$\begin{tikzcd}
\frac{SL(2,\mathbb{R})}{\{\pm E\}} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & & \\
PSL(2,\mathbb{R}) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) & \\
& SL(2,\mathbb{R}) \arrow[ul] \arrow[u, "\mu"] \arrow[u, phantom, "G"'] & A \arrow[r, mapsto] & \mu_A
\end{tikzcd}$$

surjektiv,

zz: falls μ surjektiv

Sei $F: \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}$ biholomorph.

Wegen $SL(2,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}$ transitiv finden wir
$A \in SL(2,\mathbb{R})$ mit $\mu_A(F(i)) = i$

Es genügt $\underbrace{\mu_A \circ F}_{f :=} = \mu_B$ zu zeigen

Cayley-Transformationen: $\mathbb{H} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{D}$, $z \mapsto \frac{i-z}{i+z}$,
$\mathbb{D} \xrightarrow[\varphi^{-1}]{} \mathbb{H}$, $z \mapsto i\,\frac{1-z}{1+z}$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\varphi f \varphi^{-1}}_{\mathbb{D} \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}}$ fixiert die 0

$\overset{5.48}{\Rightarrow}$ $\varphi f \varphi^{-1} = c \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$, $|c| = 1$

Prüfe: $f(z) = \dfrac{z(i+ci) + c - 1}{z(1-c) + i + ci} = \mu_B(z)$. $\in SL(2,\mathbb{R})$

noch zz: $\begin{pmatrix} i+ci & c-1 \\ 1-c & i+ci \end{pmatrix} = \underset{\in \mathbb{C}}{\lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}_{=B}$

rtmader.github.io/FT/