Analysis 1 – Tutorium 4
robin.mader@campus.lmu.de
27.11.2020

Aufgabe 1 (Kompaktheit)**.** *Erinnerung:* Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt kompakt, falls es für jede Familie $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$ von offenen Mengen in X mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine endliche Indexmenge $E \subset I$ gibt, sodass noch $X = \bigcup_{i\in E} U_i$ gilt.

1. Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}_\mathbb{R}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. Es seien $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $\mathcal{T}_M = \{V \cap M \mid V \in \mathcal{T}_\mathbb{R}\}$ die Relativtopologie. Zeige:

M ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ (im Sinne der Definition 2.26)

$$\iff$$

$(M, \mathcal{T}_M)$ ist ein kompakter topologischer Raum.

2. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Menge. Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Zeige: Es gibt offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U$, $A \subseteq V$.

Gehe dazu wie folgt vor:
(a) Gegeben $a \in A$, konstruiere offene Mengen $U_a, V_a \subseteq \mathbb{R}$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$ und $x \in U_a$, $a \in V_a$.
(b) Verwende die Kompaktheit von A, um U und V aus den Familien $(U_a)_{a\in A}$, $(V_a)_{a\in A}$ zu konstruieren.
Hinweis: Nutze, dass endliche Schnitte und Vereinigungen offener Mengen offen sind.

3. Zeige, dass $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit der in Abschnitt 2.2 definierten Topologie kompakt ist.

Lösung. 2. (a) Da $a \in A$ und $x \notin A$, muss $x - a \neq 0$, also $\varepsilon = |x - a| > 0$ gelten. Setze $U_a = U_{\varepsilon/3}(x)$ und $V_a = U_{\varepsilon/3}(a)$. Offenbar gilt $U_a \cap V_a = \emptyset$, denn andernfalls finden wir $z \in V_a \cap U_a$, und schließen mit der Dreiecksungleichung

$$\varepsilon = |x - a| = |x - z + z - a| \leq |x - z| + |z - a| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3,$$

Widerspruch. U_a und V_a sind per Definition offen.

(b) Wir bemerken $A \subseteq \bigcup_{a\in A} V_a$, denn $a \in V_a$ für alle $a \in A$. Mit der Kompaktheit von A gibt es also eine endliche Indexmenge $E \subseteq A$ mit $A \subseteq \bigcup_{a\in E} V_a$. Setze nun $U := \bigcap_{a\in E} U_a$ und $V := \bigcup_{a\in A} V_a$. Da endliche Schnitte und Vereinigungen offener Mengen offen sind, sind U und V offen. $x \in U$ und $A \subseteq V$ ist klar. Zu zeigen ist noch $U \cap V = \emptyset$. Das folgt so: Angenommen $z \in U \cap V$. Dann gilt $z \in V_a$ für ein $a \in E$, und $z \in U_b$ für alle $b \in E$. Also auch insbesondere $z \in U_a$. Aber das liefert $z \in U_a \cap V_a = \emptyset$, einen Widerspruch.

3. Es sei $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \bigcup_{i\in I} U_i$ für offene Mengen $U_i \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, mit der in 2.2 definierten Topologie, und eine Indexmenge I. Wir finden $k, l \in I$ mit $+\infty \in U_k$ und $-\infty \in U_l$. Nach Definition der Topologie auf $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sind ist $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}) \setminus U_k$ nach oben beschränkt, und $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}) \setminus U_l$ nach unten beschränkt, also ist deren Schnitt $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}) \setminus (U_k \cup U_l)$ beschränkt in $\mathbb{R}$. Da $U_k \cap \mathbb{R}$ und $U_l \cap \mathbb{R}$ offen sind, ist $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}) \setminus (U_k \cup U_l)$ folglich abgeschlossen (in $\mathbb{R}$) und beschränkt, also kompakt in $(\mathbb{R})$.

Da $(\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})\setminus(U_k\cup U_l)\subseteq\bigcup_{i\in I}(U_i\cap\mathbb{R})$, und $U_i\cap\mathbb{R}$ offen ist, gibt es eine endliche Teilmenge $E\subseteq I$ mit $(\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})\setminus(U_k\cup U_l)\subseteq\bigcup_{i\in E}(U_i\cap\mathbb{R})$. Setze nun $E':=E\cup\{k,l\}$, und erhalte den ganzen Raum als endliche Überdeckung:

$$\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}=\bigcup_{i\in E'}U_i.$$

$\square$

Aufgabe 2. Es sei $P\subseteq\mathbb{C}$ die Menge der Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit Zentrum $0\in\mathbb{C}$, wobei $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$. Wir nehmen an, dass ein Eckpunkt auf der reellen Achse liegt, sagen wir $a\in\mathbb{R}\cap P$.
(a) Schreibe P als Menge in aufzählender Notation. Stelle hierbei die Elemente aus P in Polarkoordinaten dar.
(b) Zeige: $\sum_{z\in P}z=0$.

Aufgabe 3 (Häufungspunkte)**.** Bestimme (ohne Beweis) die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ in folgenden Fällen: Für $n\in\mathbb{N}$ sei:

(a) $a_n=(-1)^n$

(b) $a_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$

(c) $a_n=\begin{cases} n & \text{falls } n\in 2\mathbb{N},\\ \frac{1}{n} & \text{falls } n\in 2\mathbb{N}_0+1\end{cases}$

(d) $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$

Antworten.

Teilaufgabe	Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
(a)	$-1,1$
(b)	$-1,1$
(c)	0
(d)	$-1,1$

$\square$