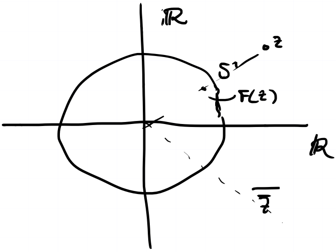
# Funktionentheorie, Tutorium 2

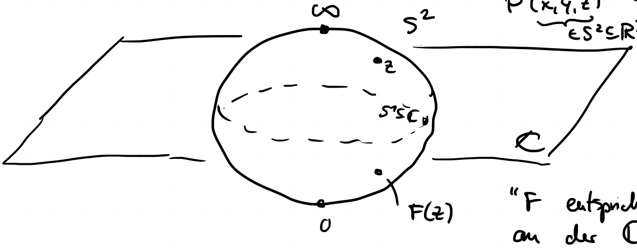
1.5.2020

**Inversionsgeometrie:** $F : \underset{\mathbb{C}\setminus\{0\}}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{C}^\times}} \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z}{|z|^2}$




Stereographische Projektion:

$$P(\underbrace{x,y,z}_{\in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3}) = \frac{x+iy}{1-z}$$

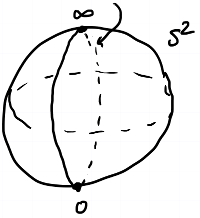


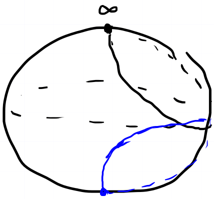

"F entspricht Spiegelung an der $\mathbb{C}$-Ebene
"xy-Ebene""

$$F(P(x,y,z)) = \frac{1}{\overline{\left(\frac{x+iy}{1-z}\right)}} = \frac{1-z}{x-iy} = \frac{(1-z)(x+iy)}{x^2+y^2} \overset{x^2+y^2+z^2=1}{=} \frac{(1-z)(x+iy)}{1-z^2} = \frac{x+iy}{1+z}$$

$$= P(x,y,-z)$$

z.B. "Geraden durch 0 als Mengen erhalten"




"Gerade nicht durch 0 $\rightsquigarrow$ Kreis durch 0"

# Polynome (ÜB 1.4)

Körper $K$. $\rightsquigarrow$ Polynomring $K[z]$

**Def:** $K^{(\mathbb{N}_0)} := \{ (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in K^{\mathbb{N}_0} \mid \text{fast alle } a_i = 0 \}$

Komponentenweise Addition: $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} =$

$= (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$

macht $(K^{(\mathbb{N}_0)}, +)$ zur direkten Summe

$\bigoplus_{\mathbb{N}_0} K$ der Gruppe $(K,+)$ $\mathbb{N}_0$-mal.

(Skalarmultiplikation $\underset{\overset{\uparrow}{K}}{\lambda} \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = (\lambda a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$

$\rightsquigarrow$ direkte Summe von $K$-Vektorräumen)

Multiplikation auf $K^{\mathbb{N}_0}$:

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} := \Big( \sum_{\substack{k+j=i \\ 0\le k,j\le i}} a_j b_k \Big)_{i\in\mathbb{N}_0}$$

**Beh:** Das macht $(K^{(\mathbb{N}_0)}, +, \cdot)$ zu einem Ring ($K$-Algebra).

**Assoziativität:** $((a_i)_i \cdot (b_i)_i) \cdot (c_i)_i =$

$$= \Big( \sum_{k+j=i} a_k b_j \Big)_i (c_i)_i =$$

$$= \Big( \sum_{k'+j'=i} \sum_{k+j=k'} a_k b_j c_{j'} \Big)_i =$$

$$= \Big( \sum_{k+j+j'=i} a_k b_j c_{j'} \Big)_i$$

$$= \Big( \sum_{k+k'=i} a_k \sum_{j+j'=k'} b_j c_{j'} \Big)_i$$

$$= (a_i)_i \Big( \sum_{j+j'=i} b_j c_{j'} \Big)_i$$

$$= (a_i)_i \big( (b_i)_i (c_i)_i \big)$$

Kommutativität, (Links-) Distributivität geht ähnlich,

1-Element: $(\delta_{0i})_{i\in\mathbb{N}_0}$

$\uparrow$ Kronecker-Delta

$\rightsquigarrow$ $(K^{(\mathbb{N}_0)}, +, \cdot)$ ein komm. ass. Ring mit 1.

<u>Schreibweise:</u> $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = \sum_{i\geq 0} a_i z^i$

$z = (0,1,0,\dots) = (\delta_{1i})_{i\in\mathbb{N}_0}$

Man lässt Koeffizienten $=0$ einfach weg, z.B.

$(0,1,2,0,\dots) = 0\cdot z^0 + 1\cdot z^1 + 2z^2 + 0z^3 + \dots$

$= z + 2z$

$K[z] := K^{(\mathbb{N}_0)}$.

Faltungsformel $\hat{=}$ gewöhnliches Ausmultiplizieren

Grad von einem Polynom $\overset{0}{\underset{\#}{}}f = \sum_{i\geq 0} a_i z^i$

$= \max\{i\geq 0 \mid a_i \neq 0\}$

$= \deg(f)$ "$\deg(0) = -\infty$"

Es gilt:

$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$

$\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$

Wichtigste Eigenschaft des Polynomrings: Einsetzung

Sei $A$ eine $K$-Algebra (d.h. $K$-Vektorraum & komm. ass. Ring mit 1 und diese Strukturen sind kompatibel, d.h. $\exists$ Ringhomomorphismus $\varphi: K \to A$ (oft $\varphi = $ "$\subseteq$") & $\forall \lambda\in K\ \forall x\in A$: $\lambda\cdot x = \varphi(\lambda)\cdot x$.)

( Bsp: $A = K[z]$, $\varphi : K \xrightarrow{\subseteq} K[z]$

$a \longmapsto (a, 0, \dots)$

$= a \cdot 1 + 0 z^1 + \dots$ )

Sei $a \in A$. Dann gibt es einen eindeutigen $K$-Algebrahomomorphismus (d.h. "$K$-linear + Ringhom.")

$\Phi : K[z] \longrightarrow A$, $\Phi(z) = a$, $\Phi(\sum c_i z^i) = \sum c_i a^i$

Schreibweise: $f \in K[z]$, $\Phi(f) = f(a)$

Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\subseteq"'] & A \\ & K[z] \arrow[u, dashed, "\exists!\, \Phi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \\ z \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Bsp: • Polynomfunktion: $A = K$, $\varphi = \mathrm{id}$, $a \in K$

$f(z) = \sum_i a_i z^i \overset{\Phi}{\longmapsto} \sum a_i a^i = f(a)$

• $A = K[z]$, $\varphi : K \subseteq K[z]$, $a = z \in K[z]$

$\Rightarrow \Phi = \mathrm{id}$

$f(z) = \sum_i a_i z^i = f$

"$f(z)$ ( "

---

[Nachtrag:]
Literatur für Beweise aus Aufgabe 4:

| Aufg. | [Fischer, Lineare Algebra] | [Bosch, Algebra] |
|---|---|---|
| (ii') & (ii) | 1.3.7 Satz | 2.1 Satz 4 |
| (iii) | 1.3.8 Lemma | |
| (iv) | 1.3.8 Korollar 1 | |
| (v) | 4.5.5 Satz | 2.4 Satz 2 & Kor. 3 |
| (viii) | | 2.4 Satz 7 & Lemma 9 |

5. *Einheitswurzeln.* (iii) ($\alpha$) Berechnen Sie die dritten Einheitswurzeln.

($\beta$) *Napoleonische Dreiecke.* Es sei $ABC$ ein nichtentartetes Dreieck in der euklidischen Ebene, die Ecken $A, B, C$ im positiven Umlaufsinn angeordnet. Auf jeder Seite des Dreiecks ABC werde nach außen (innen) ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Dann sind die Schwerpunkte dieser Dreiecke selbst die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.

(v) ($\alpha$) Berechnen Sie die fünften Einheitswurzeln und geben Sie die entsprechenden speziellen Werte von Kosinus und Sinus an. (Die Ergebnisse sollen algebraische Zahlen sein, genauer, Ausdrücke, die nur ganze Zahlen, Körperoperationen und Quadratwurzeln involvieren.)

($\beta$) Beweisen Sie, daß das Längenverhältnis von Diagonale zu Seite im ebenen regulären Fünfeck durch den goldenen Schnitt gegeben ist.

(vii) Für ein reguläres Siebeneck $ABCDEFG$ in der euklidischen Ebene gilt

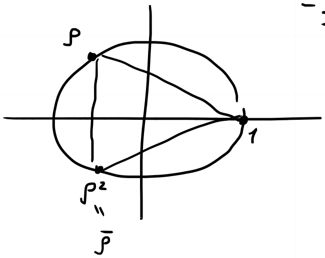
$$\frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|}.$$

Geben Sie dafür einen Beweis mit komplexen Zahlen sowie einen „reellen“ Beweis mit Trigonometrie.

5. (iii) ($\alpha$)

$$x^3 - 1 = (x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}$$

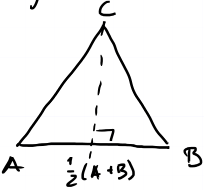
$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$




$$\rho = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\rho^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

($\beta$) Mittelpunkte von gleichseitigen Dreiecken:




Pythagoras: $d(C, \frac{1}{2}(A+B))^2$

$$= d(C,B)^2 - \left(\tfrac{1}{2} d(A,B)\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}\, d(A,B)^2$$

$$\Rightarrow d(C, \tfrac{1}{2}(A+B)) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, d(A,B)$$

$$C = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\,(B-A)$$

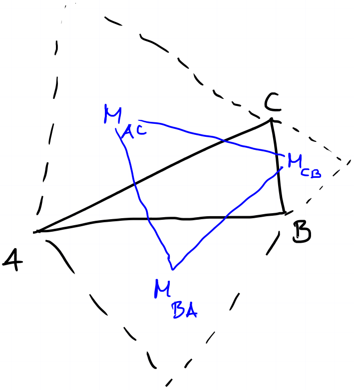
$$= \frac{1-\sqrt{3}i}{2} A + \frac{1+\sqrt{3}i}{2} B = -\rho A - \rho^2 B$$

$$\Leftrightarrow \quad C + \rho A + \rho^2 B = 0$$

Mittelpunkt:

$$\frac{1}{3}(A+B+C) = \frac{1}{3}\left(A\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right) + B\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)\right)$$

$$= M_{AB}$$




Nachzurechnen: $$M_{CB} + \rho M_{AC} + \rho^2 M_{BA} \overset{!}{=} 0$$

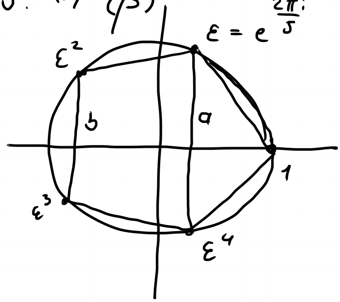
$$\frac{1}{3}\left( C \left( \underbrace{\frac{3-\sqrt{3}i}{2}}_{=1-\rho} \right) + B \left( \frac{3+\sqrt{3}i}{2} \right) \right)$$

$$\frac{1}{3}\Big( C(1-\rho) + B(1-\rho^2) + \rho\big(A(1-\rho) + C(1-\rho^2)\big) + \rho^2\big(B(1-\rho) + A(1-\rho^2)\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{3}\Big( A\big(\underbrace{\rho-\rho^2+\rho^2-\underset{=\rho}{\rho^4}}_{=0}\big) + B\big(\underbrace{1-\rho^2+\rho^2-\rho^3}_{=0}\big) + C\big(\underbrace{1-\rho+\rho-\rho^3}_{=0}\big)\Big) = 0$$

passt.

5. (v) ($\beta$)




$$x^4+x^3+x^2+x+1$$
$$= (x^2+\varphi x+1)\cdot$$
$$\cdot\left(x^2-\frac{1}{\varphi}x+1\right)$$

mit $\varphi^2=\varphi+1$

(goldenes Schnitt)

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

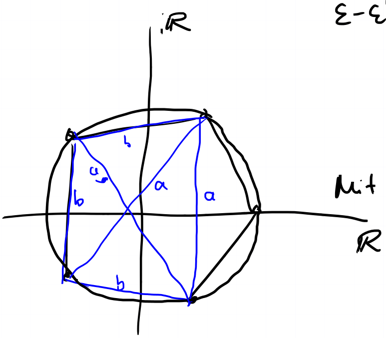
$$(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3) = x^2+\varphi x+1$$

$$\Longrightarrow \quad \varepsilon^2+\varepsilon^3 = -\varphi$$

$$\frac{a}{b} = \frac{|\varepsilon-\varepsilon^4|}{|\varepsilon^2-\varepsilon^3|} \underset{\uparrow}{=} \frac{-i}{-i}\,\frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\varepsilon^2-\varepsilon^3} = \frac{(\varepsilon-\varepsilon^4)(\varepsilon^2+\varepsilon^3)}{\varepsilon^4-\varepsilon}$$

$\varepsilon-\varepsilon^4,\ \varepsilon^2-\varepsilon^3 \in i\mathbb{R}_{>0}$

$$\| $$
$$-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)$$
$$= \varphi$$




Mit Ptolemäus

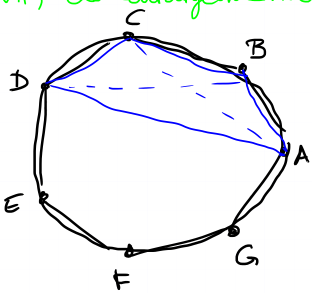
"Produkt der Diagonalen = Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten"

$$a^2 = ab + b^2 \qquad \Big| :b^2$$

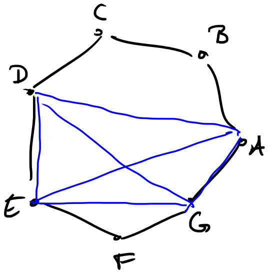
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{b} = \varphi.$$

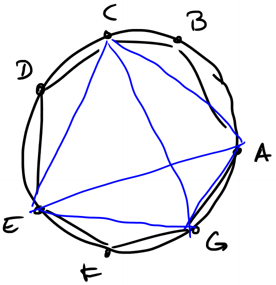
(vii) elementargeometrisch mit dem Satz von Ptolemäus



Ptolemäus $\Longrightarrow$ $|AC|^2 = |AD|\,|AB| + |AB|^2$



$\Longrightarrow$ $|AD|^2 = |AB|^2 + |AD|\,|AC|$ (II)



$\Longrightarrow$ $|AD|^2 = |AC|^2 + |AC|\,|AB|$ (III)

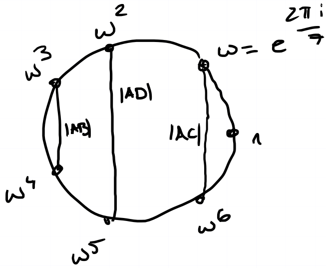
(II) & (III) $\Longrightarrow$ $|AC|^2 + |AC|\,|AB| = |AB|^2 + |AD|\,|AC|$

(I) $\qquad = |AB|^2 + |AB|\,|AD| + |AC|\,|AB|$

$\Longrightarrow$ $|AD|\,|AC| = |AB|\,|AD| + |AC|\,|AB|$

$: |AB|\,|AC|\,|AD|$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{1}{|AB|} = \dfrac{1}{|AC|} + \dfrac{1}{|AD|}$

Mit komplexen Zahlen:




ZZ: $$\frac{1}{|w^3 - w^4|} = \frac{1}{|w - w^6|} + \frac{1}{|w^2 - w^5|}$$

$\Uparrow$

$$\frac{1}{w^3 - w^4} = \frac{1}{w - w^6} + \frac{1}{w^2 - w^5}$$

Nachrechnen $\Rightarrow$ $\square$.