Analysis 1 – Tutorium 7
robin.mader@campus.lmu.de
18.12.2020

Aufgabe 1 (Topologischer Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen, Fürstenberg 1955)**.** Für natürliche Zahlen $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$ sei $S(a,b) = a\mathbb{Z} + b = \{an + b \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Setze

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{(a,b)\in I} S(a,b) \;\middle|\; I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \right\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}).$$

Zeige:

(1) $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum.

(2) Endliche offene Mengen sind leer.

(3) Für alle $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$ ist $S(a,b)$ offen und abgeschlossen.

(4) Folgere die Unendlichkeit der Primzahlen aus

$$\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \text{ Primzahl}} S(p, 0).$$

Beweis.

(1) Es ist $\emptyset = \bigcup \emptyset = \bigcup_{(a,b)\in\emptyset} S(a,b) \in \mathcal{T}$, und $\mathbb{Z} = S(1,0) \in \mathcal{T}$. Beliebige Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{T}$ sind offenbar in $\mathcal{T}$. Noch zu prüfen ist, dass Schnitte endlich vieler Mengen aus $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$ enthalten sind.

Hierzu seien zunächst $a, b, x, y \in \mathbb{N}_0$, $a, x \neq 0$. Wir zeigen $S(a,b) \cap S(x,y) \in \mathcal{T}$. Es sei weiter $m \in S(a,b) \cap S(x,y)$. Wir behaupten $S(ax, m) \subseteq S(a,b) \cap S(x,y)$. Hierbei lassen wir die Notation $S(ax,m) = ax\mathbb{Z} + m$ auch für negative m zu. Man bemerke, dass dann $axk + m \in \mathbb{N}_0$ für irgendein $k \in \mathbb{Z}$, und daher $S(ax,m) = S(ax, axk+m) \in \mathcal{T}$. Schreibe nun einerseits $m = af + b$ und andererseits $m = xg + y$ mit $f, g \in \mathbb{Z}$. Für beliebiges $h \in \mathbb{Z}$ folgt dann $axh + m = a(xh+f) + b \in S(a,b)$ und $axh + m = x(ah+g) + y \in S(x,y)$, also bereits $S(ax,m) \subseteq S(a,b) \cap S(x,y)$. Wegen $m \in S(ax,m)$ liefert unsere Argumentation

$$S(a,b) \cap S(x,y) = \bigcup_{m \in S(a,b)\cap S(x,y)} S(ax,m) \in \mathcal{T},$$

als Vereinigung von Mengen in $\mathcal{T}$.

Seien nun $A, B \in \mathcal{T}$. Schreibe $A = \bigcup_{(a,b)\in I} S(a,b)$ und $B = \bigcup_{(a,b)\in J} S(a,b)$ mit Teilmengen $I, J \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$A \cap B = \Big(\bigcup_{(a,b)\in I} S(a,b) \Big) \cap \Big(\bigcup_{(a,b)\in J} S(a,b) \Big) = \bigcup_{((a,b),(x,y))\in I\times J} S(a,b) \cap S(x,y) \in \mathcal{T},$$

als Vereinigung von Mengen in $\mathcal{T}$.

Insgesamt ist gezeigt, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist. (Zur Definition einer Topologie, siehe Tutorium 3 oder Definition 2.17 im Skript.)

(2) Eine nichtleere offene Menge (d.h., ein Element der Topologie $\mathcal{T}$) beinhaltet eine Menge der Form $S(a,b)$, $a,b \in \mathbb{N}_0, a \neq 0$, und $|S(a,b)| = |\mathbb{Z}| = \infty$.

(3) Gegeben $a,b \in \mathbb{N}_0, a \neq 0$ ist zu zeigen, dass $\mathbb{Z} \setminus S(a,b) \in \mathcal{T}$. Wir zeigen

$$\mathbb{Z} \setminus S(a,b) = \bigcup_{y \in \mathbb{Z} \setminus S(a,b)} S(a,y) \in \mathcal{T}.$$

"$\subseteq$": Sei $z \in \mathbb{Z} \setminus S(a,b)$. Dann ist $z \in S(a,z) \subseteq \bigcup_{y \in \mathbb{N}_0 \setminus S(a,b)} S(a,y)$.

"$\supseteq$": Sei umgekehrt $z \in S(a,b) \cap S(a,y)$ für ein $y \in \mathbb{Z}$. Dann folgt $af + b = z = ag + y$ für irgendwelche $f, g \in \mathbb{Z}$, also insbesondere $y = a(f-g) + b \in S(a,b)$. Da das Komplement von $S(a,b)$ also offen (d.h. in $\mathcal{T}$) ist, folgt, dass $S(a,b)$ abgeschlossen ist.

(4) $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \text{ Primzahl}} S(p,0)$ folgt, da jede Zahl $z \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$ einen Primfaktor besitzt. Die rechte Seite der Mengengleichung ist offen, als Vereinigung offener Mengen. Wäre die Menge der Primzahlen endlich, so handelte es sich um eine endliche Vereinigung, welche abgeschlossen wäre, da alle $S(p,0)$, p prim, abgeschlossen sind. Aber dann wäre $\{\pm 1\}$ offen, nichtleer und endlich, im Widerspruch zu (2).

$\square$