Analysis 1 – Tutorium 2
robin.mader@campus.lmu.de
13.11.2020

Aufgabe 1. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeige:

$$
\begin{aligned}
&f(f^{-1}(X)) \subseteq X && \text{für } X \subseteq B, && (1)\\
&f^{-1}(f(X)) \supseteq X && \text{für } X \subseteq A, && (2)\\
&f(X \setminus Y) \supseteq f(X) \setminus f(Y) && \text{für } X, Y \subseteq A, && (3)\\
&f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y) && \text{für } X, Y \subseteq B. && (4)
\end{aligned}
$$

Warum gilt in (1)–(3) im Allgemeinen keine Gleichheit? Gib jeweils ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 2. Seien E eine Menge und $\mathcal{P}(E)$ die Potenzmenge von E. Zeige: Es gibt keine Bijektion

$$f : E \to \mathcal{P}(E).$$

Aufgabe 3 (Vollständige Induktion)**.** 1. Aus der GOP des Wintersemesters 2012/2013 (Übung 2.5):
(a) Formuliere eine Version des Induktionsprinzips, die zur Lösung der folgenden Teilaufgabe (b) nützlich ist.
(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv wie folgt definiert:

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 2, \quad a_{n+1} := 4(a_n - a_{n-1}) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Beweise mit Hilfe des Induktionsprinzips aus Teilaufgabe (a):

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = n2^n.$$

2. Aus der Nachklausur des Wintersemesters 2012/2013:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ werde rekursiv wie folgt definiert:

$$a_n := 1 + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k a_k}{k^k} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0 \; .$$

(In dieser Formel ist der Rekursionsanfang enthalten.) Beweise mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = n^n.$$

Aufgabe 4 (Fibonacci-Zahlen, Aktivierungselement 1.18)**.** Die Folge der Fibonacci-Zahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$ wird rekursiv wie folgt definiert:

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

Setze nun

$$\omega_+ := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \quad \omega_- = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

Das sind genau die beiden Nullstellen des Polynoms $x^2 - x - 1$. Zeige mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\omega_+^n - \omega_-^n).$$

Aufgabe 5 (Wohlordnung der natürlichen Zahlen, Übung 2.6)**.** Beweise, dass jede nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ein minimales Element bestitzt, d.h.

$$\forall M \subseteq \mathbb{N} : (M \neq \emptyset \Rightarrow \exists n \in M \forall m \in \mathbb{N} : (m < n \Rightarrow m \notin M)).$$

Hinweis: Nutze Kontraposition, d.h. die Gleichwertigkeit der Implikationen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$, für Aussagen A und B. Verwende, dass für alle $M \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

$$M = \emptyset \iff \forall n \in \mathbb{N} : n \notin M.$$