Funktionentheorie, Tutorium 1

24.4.2020

Wiederholung zu komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Algebraische Sicht: $x^2+1=0$ nicht lösbar $/\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ "Definiere x als Lösung", d.h.

formal: Betrachte $\underbrace{\mathbb{R}[x]}_{\text{Polynomring}} / \underbrace{(x^2+1)}_{\text{Hauptideal in } \mathbb{R}[x]} =: \mathbb{C}$, dann

ergibt sich:

Schreibe $i := \bar{x}$, $\quad i^2 = \bar{x}^2 = \bar{x}^2 + 1 - 1$
$= \underbrace{\overline{x^2+1}}_{=0} - 1 = -1$,

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \deg(x^2+1) = 2$, mit Basis $1, i$.

Jede komplexe Zahl z hat die Form $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Multiplikation:

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + i(bc+da)$$

Addition komponentenweise.

komplexe Konjugation: $\overline{a+bi} = a - bi$

Ringhomomorphismus $\varphi: \mathbb{R} \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{R}[x] \xrightarrow[\text{projektion}]{} \mathbb{R}[x]/(x^2+1) = \mathbb{C}$

$$a \longmapsto a \cdot 1 + 0 \cdot i = a$$

φ ist injektiv, $\mathbb{R} \overset{\subseteq}{\underset{\varphi}{\hookrightarrow}} \mathbb{C}$ Unterkörper.

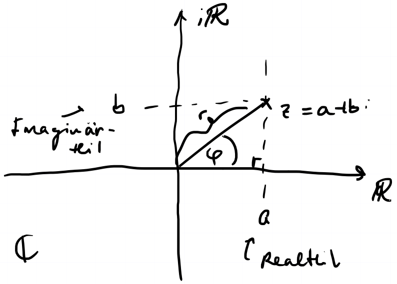
Ausblick: Mit funktionentheoretischen Methoden lässt sich zeigen, dass jede polynomielle Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

eine Lösung in $\mathbb{C}$ hat. $\quad (a_i \in \mathbb{C})$

Geometrische Sicht: $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

$$\rightsquigarrow \quad \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$$
$$1 \longmapsto (1,0)$$
$$i \longmapsto (0,1)$$



Pythagoras

$$r = \sqrt{a^2+b^2} =: |z|$$

$$\varphi = \arg(z)$$

Polarkoordinaten:

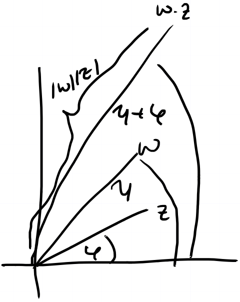
$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$= |z|\exp(i\varphi)$$

Multiplikation geometrisch:

[Funktionalgleichung von exp: $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$]

$w = |w|e^{i\psi}$, $z = |z|e^{i\varphi}$,

$$w \cdot z = \underbrace{|w||z|}_{\text{Beträge multiplizieren}} \; e^{i\overbrace{(\psi+\varphi)}^{}}\ \text{Winkel addieren}$$



z.B. $\quad i = \overset{|i|}{\overset{\shortparallel}{1}} \cdot \Big(\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{=1}\Big) = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\rightsquigarrow$ Multiplikation mit i: Drehung um $\pi/2$.

Multiplikation & $\mathbb{C} \hookrightarrow M_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-Monomorphismus

$$\Psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong M_2(\mathbb{R})$$

$$a+bi = z \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ w \longmapsto z \cdot w \end{pmatrix} = A_z$$

$\mathbb{R}$-linear.

$$A_z(1) = z = a+bi \,, \quad A_z(i) = z \cdot i = -b + ai$$

$$\Rightarrow A_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Ψ ist injektiv:

$$z \in \ker \Psi \Rightarrow z = A_z(1) = \Psi(z)(1) = 0 .$$

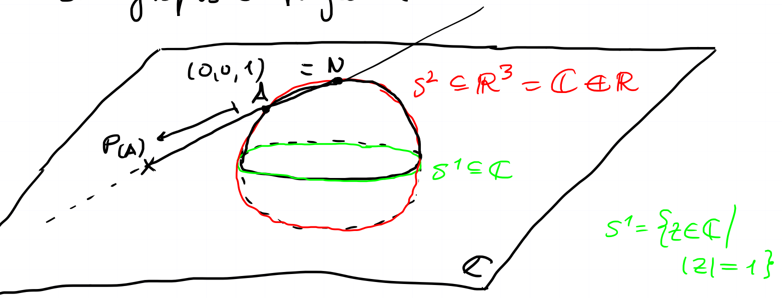
Rotationen entsprechen Rotationsmatrizen:

Rotation um $\varphi \in \mathbb{R}$ = Multiplikation mit $e^{i\varphi}$

$$= A_{e^{i\varphi}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Stereographische Projektion

Stereographische Projektion P



Explizite Formeln: $A=(x,y,z) \in S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

$$P: A \mapsto \frac{x+iy}{1-z}.$$

$$\overline{NA} = \{(tx, ty, tz + (1-t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\overline{NA} \cap \mathbb{C} = \dots = \left\{\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)\right\}$$

$S^2 \setminus N \underset{P}{\cong} \mathbb{C}$ Homöomorphismus

Identifiziere N mit einem unendlich fernen Punkt "∞" $\rightsquigarrow$ "Riemannsche Zahlenkugel"

$$\overline{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$$

2. *Euklidische und Ähnlichkeitsgeometrie.* (i) Für $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| = 1$ ist die Spiegelung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an der Geraden durch 0 und b gegeben durch die Transformation

$$z \mapsto b^2\overline{z}.$$

Spiegelung an $b\mathbb{R}$ = $\mathbb{R}$-lineare Abb.

mit Eigenraum $b\mathbb{R}$ zum Eigenwert 1

— " — $(b\mathbb{R})^\perp = (ib)\mathbb{R}$ — " — -1

$F: z \mapsto b^2\overline{z}$.

$F(b) = b^2\overline{b} = b\underbrace{|b|^2}_{b\overline{b}} = b$

$F(ib) = b^2\,\overline{ib} = -ib\underbrace{b\overline{b}}_{=1} = -ib$

(ii) Die affin-linearen Transformationen

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto cz + a$$

mit $c \neq 0$ sind genau die orientierungserhaltenden euklidischen Ähnlichkeiten, und die konjugiert-linearen Transformationen

$$z \mapsto c\overline{z} + a$$

mit $c \neq 0$ die orientierungsumkehrenden. Der Streckfaktor beträgt jeweils $|c|$.

2ii) Ohne Einschränkung betrachte Ähnlichkeit

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$, d.h.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times : \forall x, y \in \mathbb{C} : \quad |f(x) - f(y)| = \lambda\, |x - y|.$$

Behauptung: f ist $\mathbb{R}$-linear. (Dieser Beweis funktioniert in beliebigen euklidischen Vektorräumen)

Beweis: $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{C}$. $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2\right)$$

reelles Skalarprodukt $x_1 y_1 + x_2 y_2$

(Polarisationsformel)

Insbesondere: $\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |f(y)|^2 + \right.$

$\left. - |f(x) - f(y)|^2\right) =$

$f(0) = f$

$$\overset{\downarrow}{=} \frac{1}{2}\left(\lambda^2 \left(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2\right)\right) = \lambda^2 \langle x, y \rangle.$$

Es folgt:

$$|f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y)|^2 =$$

$$= \langle f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y),\ f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y) \rangle =$$

$$= |f(\alpha x + y)|^2 + \alpha^2 |f(x)|^2 + |f(y)|^2 +$$

$\mathbb{R}$-Bilinearität & Symmetrie

$$- 2\alpha \langle f(\alpha x + y), f(x) \rangle +$$

$$+ 2\alpha \langle f(x), f(y) \rangle - 2 \langle f(\alpha x + y), f(y) \rangle$$

$$= \lambda^2 \left(|\alpha x + y|^2 + \alpha^2 |x|^2 + |y|^2 + \right.$$

$$- 2\alpha \langle \alpha x + y, x \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle +$$

$$\left. - 2 \langle \alpha x + y, y \rangle \right)$$

$$= \lambda^2 |\alpha x + y - \alpha x - y|^2 = 0$$

$\Longrightarrow$ Beh.

Lemma: $\forall x,y \in \mathbb{C}: \quad \underset{\Updownarrow}{\overset{\langle x,y\rangle = 0}{x \perp y}} \quad \& \quad |x| = |y| \iff x = \pm i y$

(ohne Beweis)

Wir wissen: $\underbrace{|f(1)|}_{=:c} = \lambda\, |1| = \lambda,$

$|f(i)| = \lambda\, |i|$

$$\langle f(1), f(i)\rangle = \langle 1, i\rangle \underset{\uparrow}{=} \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 0.$$

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \\ 1 \mapsto (1,0) \\ i \mapsto (0,1) \end{array}\right\}$ Erhält Norm & Skalarprodukt

$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \quad f(i) = \pm f(1)\, i$

$1, i$ sind $\mathbb{R}$-Basis, f ist $\mathbb{R}$-linear

1. Fall: $f(i) = f(1)\, i$

$\Rightarrow f$ stimmt auf $\mathbb{R}$-Basis mit $z \mapsto f(1) \cdot z$ überein

$\Longrightarrow \quad f(z) = f(1) \cdot z$

2. Fall: $f(i) = -f(1)\, i \quad \Rightarrow \quad f(z) = f(1)\, \overline{z}$.

f heißt orientierungserhaltend falls $\det_{\mathbb{R}}(f) > 0$

orientierungsumkehrend $\det_{\mathbb{R}}(f) < 0$

1. Fall: $f(z) = f(1) \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow f \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(f(1)) & -\mathrm{Im}(f(1)) \\ \mathrm{Im}(f(1)) & \mathrm{Re}(f(1)) \end{pmatrix} \Rightarrow \det(f) = |f(1)|^2 > 0$$

" $\mathbb{C} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ oben"

$\Rightarrow$ orientierungserhaltend

2. Fall:

$$f = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(f(1)) & \mathrm{Im}(f(1)) \\ \mathrm{Im}(f(1)) & -\mathrm{Re}(f(1)) \end{pmatrix} \Rightarrow \det(f) = -|f(1)|^2 < 0$$

$\Rightarrow$ orientierungsumkehrend.