Analysis 1 – Tutorium 3

20. 11. 2020

Topologie auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

(Körperstruktur erstmal nicht relevant)

1-dim. offene Bälle

$] \quad [$

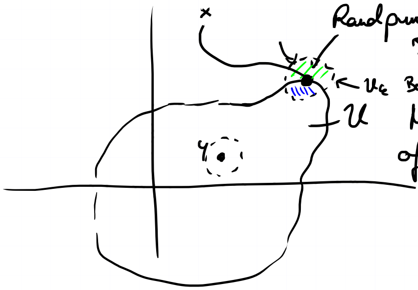
$\mathbb{R}^2$ = reelle Ebene

$\mathbb{R} \quad \overset{?}{\sim} \quad$ offene Intervalle

$]a,b[$

$\{a < x < b\}$

Randpunkte a, b sind nicht enthalten in $]a,b[$



Randpunkt

$\Downarrow$ *

$\leftarrow U_\varepsilon$ Ball mit Radius ε.

U Menge offen

$\Updownarrow$

Sie enthält keine Randpunkte

$\Updownarrow$

nur innere Punkte

* x heißt Randpunkt von U, falls für beliebig kleine Bälle U_ε $(\varepsilon > 0)$ um x die Schnitte

$U \cap U_\varepsilon \neq \emptyset$ und $(\mathbb{R}^2 \setminus U) \cap U_\varepsilon \neq \emptyset$

(nichtleer sind)

$\exists \tilde{y} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{y} \notin U \wedge |x - \tilde{y}| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 : \underbrace{(U \cap U_\varepsilon \neq \emptyset)}_{\exists y \in U : |x-y| < \varepsilon} \wedge (\mathbb{R}^2 \setminus U) \cap U_\varepsilon \neq \emptyset$$

$U_\varepsilon := U_\varepsilon(x)$

$= \{$ Punkte vom Abstand $< \varepsilon$ von $x \}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = (y_1, y_2)$

$|x - y| = \left| \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

Betrag auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$= \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < \varepsilon \}$

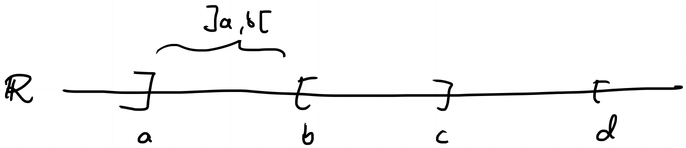
y innerer Punkt von $\mathcal{U}$

$$\iff \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(y) \subseteq \mathcal{U}$$

$$\iff \exists \varepsilon > 0 : \forall z \in \mathcal{U}_\varepsilon(y) : z \in \mathcal{U}$$

$$\iff \exists \varepsilon > 0 \ \forall z \in \mathbb{R}^2 : |y - z| < \varepsilon \Rightarrow z \in \mathcal{U}$$

Für uns am wichtigsten: reelle 1-dim. Situation



z.B. $\mathcal{U} := \,]a,b[\, \cup \,]c,d[$ ist offen.

Satz 2.14 (fundamentale Eigenschaften offener Mengen in $\mathbb{R}$)

1. *Die leere Menge $\emptyset$ und der ganze Raum $\mathbb{R}$ sind offen (in $\mathbb{R}$).*
2. *Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann ist $A \cap B$ offen.*
3. *Es seien $(A_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie offener Mengen $A_i \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist die Menge*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

ebenfalls offen.

Analoges gilt für offene Mengen in $\mathbb{C}$ und für relativ zu einem Universum M offene Mengen.

wird später verallgemeinert (in Ana 2)

$A \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen $\iff$ alle Berührpunkte sind in A enthalten

$\iff \mathbb{R} \setminus A$ ist offen

$\emptyset$, $\mathbb{R}$ sind offen

$\emptyset = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \emptyset$ ist auch abg.

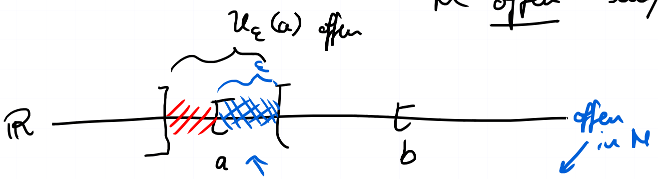
Bsp: Die leere Menge $\emptyset$ hat keine Berührpunkte.

Ang. $z \in \mathbb{R}$ ist ein Berührpunkt.

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 : \underbrace{U_\varepsilon(z) \cap \emptyset}_{= \emptyset} \neq \emptyset}_{\text{widersprüchlich}}$$

Relativtopologie: Gegeben Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$.

"Wann soll eine Menge in M <u>offen</u> heißen?"



$U_\varepsilon(a) \cap M = [a, a+\varepsilon[$

$M = [a,b[$

M ist als Teilmenge von $\mathbb{R}$ weder offen (da $a \in M$ Randpkt) noch abgeschlossen (da $b \notin M$ Randpkt)

Aber: die Aussagen aus 2.14 sollen "relativ M" gelten.

Insb.: M soll offen in sich sein.

Schnitte offener Mengen mit M sollen offen in M sein

$\rightsquigarrow$ Offene Mengen <u>in</u> M $= \{ V \cap M \mid V \subseteq \mathbb{R}$ offen <u>in $\mathbb{R}$</u> $\}$

($\rightsquigarrow$ später: Stetigkeit: $f : [a,b[\to \mathbb{R}$?)

Definition 2.17 (Abstraktion des Satzes 2.14) Es sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilmengen von M. $\mathcal{T}$ heißt eine *Topologie* auf M, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $M \in \mathcal{T}$ ← "leere Menge & ganzes Raum sind immer offen"
2. $\forall A, B \in \mathcal{T}: \; A \cap B \in \mathcal{T}$
3. Für alle Familien $(A_i)_{i \in I}$ von Mengen in $\mathcal{T}$ gilt: $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M)$$

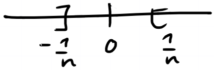
Ein Paar $(M, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum*, wenn $\mathcal{T}$ eine Topologie auf M ist. Die Elemente von $\mathcal{T}$ werden auch *offene Mengen* in M (bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$) genannt.

Beispiel: Die Menge der offenen Mengen von $\mathbb{R}$ bilden eine Topologie.

"endliche Schnitte offener Mengen sind offen"

"beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen"

z.B. $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{1/n}(0) = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ offen



Aber: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\supseteq \{0\}$ offensichtlich

"$\subseteq$" archimedisches Axiom:

Sei $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. ZZ: $x = 0$.

Angenommen, $x \neq 0$. Dann folgt $|x| \neq 0$.

Archimedisches Axiom – Variante

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}: \; \frac{1}{n} < \varepsilon$$

In Worten:

Zu jeder positiven reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es einen kleineren Stammbruch $1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

(Allquantorentfernung durch Substitution $\varepsilon = |x| > 0$.)

Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < |x|$.

Gleichzeitig gilt $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\subseteq \left]-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right[$,

also $-\frac{1}{m} < x < \frac{1}{m}$, also auch $|x| < \frac{1}{m}$.

$\Rightarrow \frac{1}{m} < |x| < \frac{1}{m}$, Widerspruch

$\Rightarrow$ Annahme falsch, d.h. $x = 0$.

geteilt: $\underset{n\in\mathbb{N}}{\bigcap} \underbrace{]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}[}_{\text{offen}} = \{0\}$ ← nicht offen. (aber abgeschlossen)

Beispiele: $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} := \{\text{offene Mengen in } \mathbb{R}\}$

$= \{\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathcal{U}: x = \text{innerer Pkt}\}$

$= \{\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathcal{U}: \exists \varepsilon > 0: \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{U}\}$

Satz 2.14: $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$, im Sinne von 2.17

$\rightsquigarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ ist ein topologischer Raum.

Anderes Beispiel: $M \subseteq \mathbb{R}$.

Relativtopologie $\rightarrow \mathcal{T}_M = \{V \cap M \mid V \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}\}$

<u>Beh.</u>: $(M, \mathcal{T}_M)$ ist ein topologischer Raum

$\iff \mathcal{T}_M$ ist eine Topologie auf M.

1. $\emptyset = \underset{\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}}{\emptyset} \cap M \in \mathcal{T}_M$. $\quad M = \underset{\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}} \cap M \in \mathcal{T}_M$.

2. Endliche Schnitte: Gegeben $\tilde{A} \in \mathcal{T}_M$, $\tilde{B} \in \mathcal{T}_M$,

zu zeigen: $\tilde{A} \cap \tilde{B} \in \mathcal{T}_M$.

Also: Es gibt $A \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ mit $\tilde{A} = A \cap M$, $\tilde{B} = B \cap M$.

Dann gilt: $\tilde{A} \cap \hat{B} = (A \cap M) \cap (B \cap M)$

$$= \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}} \cap M \quad \in \mathcal{T}_M$$

da $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ eine Topologie ist

3. Geg. $(\tilde{A}_i)_{i \in I} \in (\mathcal{T}_M)^I$.

$$\Rightarrow \tilde{A}_i = M \cap A_i \quad \text{mit } A_i \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}, \quad i \in I.$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} \tilde{A}_i = \bigcup_{i \in I} (M \cap A_i)$$

$$= M \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)}_{\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{T}_M.$$

$\overset{1,2,3}{\Longrightarrow}$ $(M, \mathcal{T}_M)$ ist ein top. Raum.

Notation: $x \in \mathbb{R}$. Additives Inverses: "$-x$"

Multiplikatives — " — : "x^{-1}"

K Körper $\rightsquigarrow$ $\left(\begin{array}{l} (K, \overset{K \times K \to K}{+}) \text{ abelsche Grp.} \\ (K^\times, \cdot) \text{ abelsche Grp.} \end{array} \right.$

$K^\times = K \setminus \{0\}$ & Distributivgesetze

Gruppe G, Dann schreibt man oft x^{-1} für die Inverse x.