Funktionentheorie, Tutorium 4

15.5.2020

3. (i) Für $2 \leqslant k \in \mathbb{N}$ existiert keine auf $\mathbb{C}^*$ global definierte k-te Wurzel, dh es gibt keine holomorphe Funktion $w : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ mit $w^k(z) = z$.

   (ii) Es existiert kein auf $\mathbb{C}^*$ global definierter komplexer Logarithmus, dh es gibt keine holomorphe Funktion $l : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ mit $e^{l(z)} = z$.

   Hinweis: Argumentieren Sie jeweils, daß es auf den geschlitzten Ebenen $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+e^{i\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ Zweige gibt, die durch ihren Wert in einem Punkt festgelegt sind, und daß man die Zweige auf zwei verschiedenen geschlitzten Ebenen nicht miteinander kompatibel wählen kann.

(i) Angenommen, $w: \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe mit

$$\forall z \in \mathbb{C}^\times : \ w(z)^k = z.$$

- w ist injektiv $\left(w(x) = w(y) \Longrightarrow x = w(x)^k = w(y)^k = y \right)$
- $w(S^1) \subseteq S^1$ $\left(z \in S^1 \Rightarrow |w(z)| = 1 \Longleftarrow \underbrace{|w(z)|^k}_{=|z|} = 1 \right) \Rightarrow w(z) \in S^1$

  z, $|z|=1$

Betrachte die stetige (Ko-)restriktion

$$w|_{S^1} : S^1 \hookrightarrow S^1 :$$

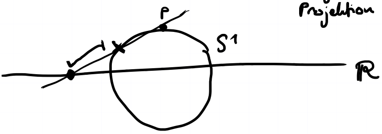
Beh: $w|_{S^1}$ ist nicht surjektiv. Sei $\zeta_k \in S^1$ eine k-te Einheitswurzel (EHW), dann: $w(z) = \zeta_k$

$$\Rightarrow \underbrace{w(z)^k}_{=z} = \zeta_k^k = 1$$

$\rightarrow$ $w|_{S^1}$ trifft nur die k-te EHW $w(1)$.

$\rightsquigarrow$ $\exists p \in S^1 : \ w|_{S^1} : S^1 \hookrightarrow S^1 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}$

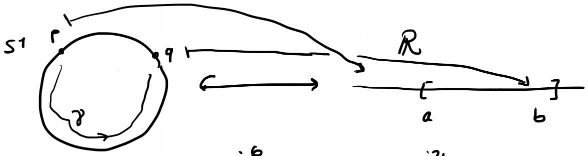
stereografische Projektion



$w|_{S^1}(S^1) \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt & zusammenhängend

$$\Longrightarrow w|_{S^1}(S^1) = [a,b], \quad a,b \in \mathbb{R}$$

Nehme $p, q \in S^1$: $\ w(p) = a, \quad w(q) = b$



$$p = e^{i\varphi}, \qquad q = e^{i\psi}$$

Pfad: $\gamma : [0,1] \longrightarrow S^1, \quad t \mapsto e^{i(t\psi + (1-t)\varphi)}$

von p nach q (Kreisbogen) stetig

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, hook, "\gamma"'] \arrow[rr, bend right, "\delta"'] & S^1 \arrow[r, "\cong", "\text{Homöomorphismus}"'] & {[a,b]}
\end{tikzcd}$$

δ ist surjektiv: $\delta(0) = a, \quad \delta(1) = b$ & Zwischenwertsatz

$\Longrightarrow$ γ surjektiv

$\Longrightarrow$ Widerspruch, z.B. $-e^{i\left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right)} \notin \operatorname{im} \gamma$.

(ii) $\ell : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ holomorph $e^{\ell(z)} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}^\times$

ℓ injektiv (klar), $\ell(S^1) \overset{!}{\subseteq} i\mathbb{R}$

$\underset{e^{i\varphi}}{\overset{\omega}{}} \rightsquigarrow e^{i\varphi} = e^{\ell(e^{i\varphi})}$

$\Longleftrightarrow \underbrace{i\varphi + 2\pi i k}_{k \in \mathbb{Z}} \overset{\in i\mathbb{R}}{} = \ell(e^{i\varphi})$,

$\rightsquigarrow \quad S^1 \overset{\ell}{\hookrightarrow} i\mathbb{R} \underset{\text{Homöo.}}{\cong} \mathbb{R}$,

gleicher Widerspruch.

Alternativ: $\ell: \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$, $\ell(S^1) \subseteq i\mathbb{R}$
$\ell(1) = i\psi$, $\psi \in \mathbb{R}$

Betrachte den Logarithmus

$$\log: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$
$$re^{i\varphi} \longmapsto \log(r) + i\varphi$$
$$r \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \varphi \in]\psi - \pi, \psi + \pi[$$

(holomorph nach Aufgabe 2)

$$\left.\begin{array}{l} \log(1) = i\varphi, \quad \varphi \in]\psi-\pi, \psi+\pi[\\ \log(1) = i\psi + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \varphi = \psi$$

$\Rightarrow \log(1) = \ell(1)$.

Die Menge $V = \{ x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \mid \log(x) = \ell(x) \}$ "(vanishing locus"
ist "abgeschloffen" (d.h. offen & abgeschlossen) Stetigkeit
& nichtleer $(1 \in V)$. (2ii) "lokale Umkehrungen von exp stimmen lokal überein"

$$\left.\begin{array}{l} V \underset{\text{abgeschloffen}}{\subseteq} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \\ \text{zshgd} \end{array}\right\} \Rightarrow V = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$$

$\rightsquigarrow$ ℓ setzt $\log$ stetig auf $\mathbb{C}^\times$ fort

$$\Rightarrow \lightning, \text{ da: } \lim_{\varphi \to \psi - \pi} \log(e^{i\varphi}) = i(\psi - \pi)$$

$$\lim_{\varphi \to \psi+\pi} \log(e^{i\varphi}) = \ell(e^{i(\psi+\pi)}) = \ell(e^{i(\psi-\pi)})$$
$$\lim_{\varphi \to \psi+\pi} \log(e^{i\varphi}) = i(\psi+\pi)$$

$\Rightarrow 2\pi = 0 \ \lightning$

4. *Formale komplexe Potenzreihen.* (i) Eine formale Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ besitzt genau dann ein multiplikatives Inverses, wenn $a_0 \neq 0$.

Hinweis: Die Koeffizienten erfüllen eine Rekursion und diese ist eindeutig lösbar.

(ii) Der Kern I des Homomorphismus („Evaluation in 0")

$$\Phi: \mathbb{C}[[z]] \to \mathbb{C}, \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto a_0 =: P(0)$$

ist das eindeutige (echte) *maximale Ideal* des Potenzreihenrings $\mathbb{C}[[z]]$. Jedes Ideal $J \neq (0)$ von $\mathbb{C}[[z]]$ wird von einer Potenz z^d mit $d \in \mathbb{N}_0$ erzeugt.

Bemerkung: Nach (i) sind die *Einheiten* von $\mathbb{C}[[z]]$ genau die Elemente $P \notin I$.

(i) „$\Rightarrow$": $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = P_n^{-1}$ neutrales Element $= 1 \cdot z^0 + 0 z^1 + \dots$

$$P \cdot Q = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n, \quad P \cdot Q = 1$$

Koeff. vergleichen $\Rightarrow 1 = a_0 b_0$
$\Rightarrow a_0 \neq 0$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

„$\Leftarrow$": Definiere rekursiv $b_0 = a_0^{-1}$ & b_n !!

Dann: lese „$\Rightarrow$" von unten nach oben.

(ii) $\ker \Phi \trianglelefteq \mathbb{C}[[z]]$ Ideal

(i) $\Rightarrow$ $\mathbb{C}[[z]] \setminus \ker \Phi = \mathbb{C}[[z]]^\times$

$\Rightarrow$ $\ker \Phi$ ist maximal

$\left(\ker \Phi \subsetneq I = \mathbb{C}[[z]] \right.$
$\left. \check{a} \rightsquigarrow a \in \mathbb{C}[[z]]^\times \right)$

$I \trianglelefteq \mathbb{C}[[z]] \Rightarrow \forall a \in I: a \notin \mathbb{C}[[z]]^\times$
$\Rightarrow \forall a \in I: a \in \ker \Phi$
$\Rightarrow I \subseteq \ker \Phi$
$\Rightarrow \ker \Phi$ ist das eindeutige max. Ideal.

$J \trianglelefteq \mathbb{C}[[z]]$ Ideal,

$$d := \min \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \exists P \in J: P = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i, \; a_n \neq 0 \right\}$$

Beh: $J = (z^d)$.

„$\supseteq$": $P = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, $a_d \neq 0$ & $\forall i<d: a_i = 0$

$$= (z^d) \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+d} z^i}_{\in \mathbb{C}[[z]]^\times} \Rightarrow (z^d) \subseteq J.$$

$a_{0+d} \neq 0$

„$\subseteq$": $P = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \in J \rightsquigarrow (z^d) \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+d} z^i = P$

$\Uparrow$
(z^d)

$$\Rightarrow J \subseteq (z^d)$$

<u>Bem:</u> „z ist der Uniformisierer der z-adischen Bewertung $\nu: \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$P \longmapsto n \text{ mit } (P) = (z^n)$$

"

(iii) Die *formale Ableitung* ist der Operator $D : \mathbb{C}[[z]] \to \mathbb{C}[[z]], P(z) \mapsto P'(z)$ gegeben durch die gliedweise Ableitung, also

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Zeigen Sie, daß er eine $\mathbb{C}$-lineare *Derivation* ist, dh die Produktregel

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

für $P, Q \in \mathbb{C}[[z]]$ erfüllt.

$$(PQ)' \equiv P'Q + PQ' \mod z^k \mathbb{C}[[z]] \quad \forall k$$

repräsentiert durch Polynome (und hier kann man das auf der $\mathbb{C}$-Basis $1, z, z^2, \dots$ prüfen)

(durch Differenz-bildung)

Noch zz: $P \equiv 0 \mod z^k \mathbb{C}[[z]] \quad \forall k$

$$\overset{!}{\Longrightarrow} P = 0$$

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \equiv \sum_{i=0}^{k-1} a_i z^i \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ (z^k))$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{k-1} a_i z^i \in (z^k)$$

$$\Rightarrow a_i = 0 \quad \forall 0 \leq i \leq k-1$$

k bel.

$$\Longrightarrow \forall i : a_i = 0.$$

Also ist die Aussage nur auf Monomen $z^i = P$, $z^j = Q$ zu prüfen.

$$\underset{\overset{\shortparallel}{(z^i z^j)' = (PQ)'}}{(z^{i+j})'} = (i+j) z^{i+j-1} = \underset{\overset{\shortparallel}{P'Q + Q'P}}{(i z^{i-1}) z^j + (j z^{j-1}) z^i}$$

(iv) *Einsetzen.* Ist $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ eine weitere Potenzreihe und gilt $b_0 = 0$, so können wir sie in $P(z)$ *einsetzen*, dh die Summe

$$(P \circ Q)(z) := P(Q(z)) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n Q(z)^n}_{?}$$

ist als formale Potenzreihe wohldefiniert. Warum? Geben Sie ihre Koeffizienten an.

(iv) $Q(z)^n \overset{?}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)^n =$

$Q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{k_1+\dots+k_n=k} b_{k_1} \cdots b_{k_n} \Big) z^k$$

$$\rightsquigarrow \text{“} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q(z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{k_1+\dots+k_n=k} b_{k_1} \cdots b_{k_n}\Big) z^k \text{”}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=k} b_{k_1} \cdots b_{k_n} \Big)}_{\sum_{n=0}^{k} a_n \sum_{k_1+\dots+k_n=k} b_{k_1} \cdots b_{k_n} \in \mathbb{C}} z^k}_{\in \mathbb{C}[[z]]}$$

(v) *Umkehrsatz.* Zu $P \in \mathbb{C}[[z]]$ mit $P(0) = 0$ existiert genau dann $Q \in \mathbb{C}[[z]]$ mit $Q(0) = 0$ und

$$(Q \circ P)(z) = Q(P(z)) = z,$$

wenn $P'(0) \neq 0$. Diese *Umkehrung* Q von P ist dann *eindeutig*. Es gilt auch $Q'(0) \neq 0$ und $P'(0) \cdot Q'(0) = 1$, und P ist auch die Umkehrung von Q, also $(P \circ Q)(z) = z$.

(v) $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $\quad Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $\quad a_0 = b_0 = 0$

„$\Rightarrow$“: $z = (Q \circ P)(z) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{k} b_n \sum_{k_1+\dots+k_n=k} a_{k_1} \cdots a_{k_n} \Big) z^k$$

$\overset{\text{Koeff.vergleich}}{\Longrightarrow}$ $1 = b_1 \sum_{k_1=1} a_{k_1} = b_1 a_1 \Rightarrow \underset{P'(0)}{\underset{\shortparallel}{a_1}} \neq 0$

$$0 = \sum_{n=0}^{k} b_n \sum_{k_1+\dots+k_n=k} a_{k_1} \cdots a_{k_n}$$

$$= b_k \underbrace{\sum_{k_1+\dots+k_k=k} a_{k_1} \cdots a_{k_n}}_{a_1^k} + \sum_{n=0}^{k-1} b_n \sum_{\sum k_i = k} a_{k_1} \cdots a_{k_n}$$

$$b_k = -a_1^{-k} \sum_{n=0}^{k-1} b_n \sum_{\sum k_i = k} a_{k_1} \cdots a_{k_n}$$

"Eindeutigkeit" $\not\exists$ „$\Leftarrow$" $\leftarrow$ Annahme hier: $a_1 \neq 0$

Nach oben: $\exists! \tilde{P} \in \mathbb{C}[[z]]$: $\hat{P} \circ Q(z) = z$

dann: $\tilde{P}(z) = \tilde{P}(Q \circ P(z)) \underset{\underset{\text{Assoziativität}}{\uparrow}}{=} (\tilde{P} \circ Q)(P(z))$

$= z(P(z)) = P(z)$