Analysis 1, Tutorium 6

11.12.2020

Aufgabe 2 (Limes inferior). Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zeige: $\underline{\underline{\sup\{\inf_{n>m} a_n \mid m\in\mathbb{N}\}}}$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \overset{?}{=} \sup_{m\in\mathbb{N}_0} \underbrace{\inf_{n>m}}_{=\{a_n \mid n>m\}} a_n.$$

der kleinste Häufungspkt von $(a_n)_n$ $\longleftarrow$ $\liminf_{n\to\infty} a_n$

<u>Bem:</u> $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Folge reeller Zahlen

$\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ ist kompakter top. Raum

$\underset{\text{Bolzano-Weierstraß}}{\overset{\uparrow}{\Rightarrow}}$ $(a_n)_n$ hat einen Häufungspkt in $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

<u>1. Fall</u>: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$.

Sei a der kleinste.

$(a = \liminf_{n\to\infty} a_n)$

a Hp. von $(a_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ In jeder offenen Umgebung von a gibt es unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_n$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}_0\ \exists n>N:$ $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$ $\quad (*)$

„$\geq$": Zz: $a \geq \sup_{m\in\mathbb{N}_0} \inf_{n>m} a_n$

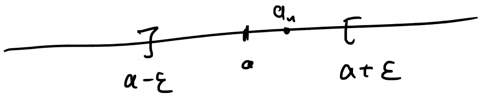
$\Leftrightarrow$ a ist eine obere Schranke von $\{\inf_{n>m} a_n \mid m\in\mathbb{N}_0\}$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $m \in \mathbb{N}_0$.

$$\Big[\underset{x,y \in \mathbb{R}}{} \big[\forall \varepsilon > 0 : x \leq y + \varepsilon\big] \Rightarrow x \leq y \Big]$$

Wende (*) auf $N = m$ an: D.h. $\exists n > m$ mit $a_n \in U_\varepsilon(a)$.

$$\Rightarrow \inf_{k>m} a_k \leq a_n \leq a + \varepsilon$$



ε beliebig

$$\rightsquigarrow \inf_{k>m} a_k \leq a \Rightarrow \underbrace{\sup_m \inf_{k>m} a_k}_{=:x} \leq a.$$

Zz: $x \overset{!}{\geq} a$.

Angenommen, $x < a$. $\varepsilon := \frac{a-x}{2} > 0$

$$J = \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq x + \varepsilon \}.$$

Fallunterscheidung:

1.1. Fall: $|J| < \infty$. Definiere $N := \max J$.

Dann $\forall n > N$: $a_n > x + \varepsilon$

$$\Rightarrow \inf_{n>N} a_n \geq x + \varepsilon$$

$$\Rightarrow x = \sup_m \inf_{n>m} a_n \geq x + \varepsilon \Rightarrow \lightning$$

1.2. Fall: $|J| = \infty$. Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to J$, $k \mapsto n_k$

eine monoton steigende Funktion,

und betrachte die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Bolzano-Weierstraß: $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hat einen H.p. in $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

[y = H.p. von Teilfolge

$\Rightarrow$ y H.p. von der ursprünglichen Folge]

Sei s dieser Häufungspunkt.

Bem: $s \le x + \varepsilon = x + \frac{a-x}{2} = \frac{a+x}{2}$

a ist der kleinste H.p. von $(a_n)_n$

$\Rightarrow$ $a \le s \le \frac{a+x}{2}$ $\Rightarrow$ $a \le x < a$

$\Rightarrow$ Wf.

---

2. Fall: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen H.p. in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1 (Dichtheit). Erinnerung: Eine Menge $M \subseteq U$ einer Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt *dicht* in U, falls $U \subseteq \overline{M}$. Anders gesagt: Alle Punkte in U sind Berührpunkte von M.

1. Zeige: Seien $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen. Angenommen, $A \subseteq B$ ist dicht in B und $B \subseteq C$ ist dicht in C. Zeige: A ist dicht in C.
2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig*, d.h.

f ist stetig in x

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \overbrace{\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in \mathbb{R} : \underbrace{y \in U_\delta(x) \implies f(y) \in U_\varepsilon(f(x))}_{f(\mathcal{U}_\delta(x)) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(f(x))}}$$

[$|x-y| < \delta$ $\Rightarrow$ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$]

Angenommen, f ist surjektiv. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ dicht in $\mathbb{R}$. Zeige, dass auch $f(M)$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

$(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

$$\boxed{M \subseteq X \text{ ist dicht, falls } \overline{M} = X.}$$

$U \subseteq \mathbb{R}$, $M \subseteq U$. Auf U gibt es die Relativtopologie $\mathcal{T}_U$

$$\mathcal{T}_U = \{V \cap U \mid V \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}\}$$

M ist dicht in U

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{M}^{\mathcal{T}_U} = U$$

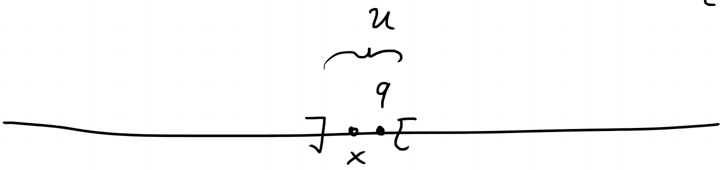
$$\overline{M}^{\mathcal{T}_U} = \overline{M} \cap U \quad \Longleftrightarrow \quad U \subseteq \overline{M}.$$

Abschluss in $\mathbb{R}$

die kleinste (bzgl. $\subseteq$) abgeschlossene Menge in U

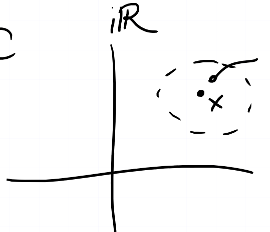
<u>Beispiel:</u> $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ dicht

(Also: $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$



egal wie klein, es gibt immer $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in U$.

$\mathbb{C}$



$q + ip$, $p, q \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ ist dicht.

(d.h. $\overline{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} = \mathbb{C}$)

$A \underset{\text{dicht}}{\subseteq} B \underset{\text{dicht}}{\subseteq} C \subseteq \mathbb{R}$

Beh.: $A \subseteq C$ dicht

$A \subseteq B$ dicht $\iff B \subseteq \overline{A}$

$B \subseteq C$ dicht $\iff C \subseteq \overline{B}$

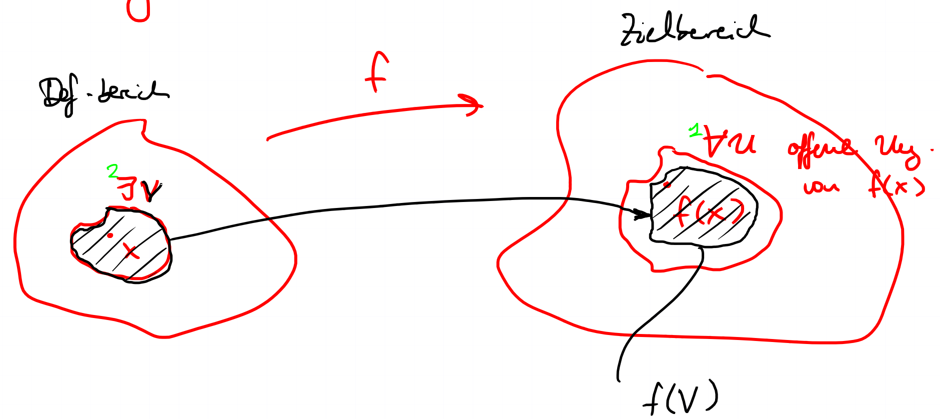
zz: $A \subseteq C$ dicht, also $C \subseteq \overline{A}$.

Das folgt sofort: $C \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

[1. Lemma: $\forall X, Y \subseteq \mathbb{R}: X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$]

[2. Lemma: $\forall X \subseteq \mathbb{R}: \overline{\overline{X}} = \overline{X}$]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x \in \mathbb{R}$.



Gegeben: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, surjektiv

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ M & \to & f(M) \end{array}$$

dicht

zz: dicht

$\overline{M} = \mathbb{R}$, zz: $\overline{f(M)} = \mathbb{R}$

"x im Zielbereich"

zz: "$\supseteq$"

Sei $x \in \mathbb{R}$. zz: $\forall \varepsilon > 0$: $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap f(M) \neq \emptyset$.

Sei $\varepsilon > 0$.

(f stetig in $\tilde{x}$

$\iff \forall \tilde{\varepsilon} > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \tilde{y} \in \mathbb{R}: |\tilde{x} - \tilde{y}| < \delta$

$\Rightarrow |f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| < \tilde{\varepsilon}$)

Surjektivität von f $\Rightarrow$ Es gibt $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $f(\tilde{x}) = x$.

Stetigkeit von f $\Rightarrow$ Es gibt $\delta > 0$:

$$f(\mathcal{U}_\delta(\tilde{x})) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f(\tilde{x})) = \mathcal{U}_\varepsilon(x)$$

Dichtheit von M in $\mathbb{R}$

$\iff \forall z \in \mathbb{R} \; \forall \tilde{\delta} > 0: \mathcal{U}_{\tilde{\delta}}(z) \cap M \neq \emptyset$.

Wende das an auf $z = \tilde{x}$ & $\tilde{\delta} = \delta$, um

$$m \in M \cap \mathcal{U}_{\tilde{\delta}}(z) = M \cap \mathcal{U}_\delta(\tilde{x})$$

zu finden.

Dann: $f(m) \in f(M)$. & $f(m) \in f(\mathcal{U}_\delta(\tilde{x})) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(x)$

$\Longrightarrow \quad f(m) \in f(M) \cap U_\varepsilon(x)$

$\Longrightarrow \quad f(M) \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset.$

$\Longrightarrow \quad f(M)$ dicht in $\mathbb{R}$.

ε, x beliebig $\qquad (\overline{f(M)} = \mathbb{R})$.

$\square$

Aufgabe 3. Später zeigen wir:

$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(\lim_{n\to\infty} x_n)$ Stetigkeit

1. Die Exponentialfunktion ist folgenstetig:

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \forall x \in \mathbb{R} : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \implies \exp(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \exp(x).$$

2. Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz:

$$\forall a \in \mathbb{C} \forall k \in \mathbb{N}_0 : |a| < 1 \implies n^k a^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Hausaufgabe

Nun zu einer Aufgabe aus der Probeklausur zur Analysis einer Variablen des Wintersemesters 2012/2013:

(a) Formuliere den Satz der dominierten Konvergenz für Reihen.

(b) Zeige die Existenz von

$$x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n + \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}}\right),$$

& berechne x.

Hinweis: Verwende 1. und 2.

$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$(a_n^{(i)})_{(n,i)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}$

Satz 3.34 (Satz von der dominierten Konvergenz für Reihen)
Es sei $(a_n^{(i)})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ eine Doppelfolge, d.h. eine Folge von Folgen in $\mathbb{C}$. Wir nehmen an:

1. *Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ existiere $\lim_{n\to\infty} a_n^{(i)}$ in $\mathbb{C}$.* $\quad$ i fest, $n \to \infty$ $\quad \exists$

2. *Es existieren $b^{(i)} \geq 0$, $i \in \mathbb{N}_0$, mit $\sum_{i=0}^{\infty} b^{(i)} < +\infty$, so daß für alle $n, i \in \mathbb{N}_0$ gilt: $|a_n^{(i)}| \leq b^{(i)}$.* $\quad \exists$

Dann existiert $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_n^{(i)}$ in $\mathbb{C}$, und es gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_n^{(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_n^{(i)}.}$$

beschränkte absolut

$(b^{(i)})_{i\in\mathbb{N}_0}$ ist eine "integrierbare" Majorante ("summierbar")

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \exp\Big(-i + \underbrace{\tfrac{n}{i} e^{-\frac{n}{i}}}_{\overset{!}{\leq} 1}\Big)$$

[*Lemma:* Monotonie von exp.

$\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \Rightarrow \exp(a) \leq \exp(b)$]

$$\exp\left(-i + \frac{n}{i} e^{-\frac{n}{i}}\right) \leq \exp(-i+1)$$

hängt nur noch von i ab.

[$e^{x+y} = e^x e^y$] Funktionalgleichung

$$\exp(z)^n = \exp(nz) \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \exp(-i+1)}_{\text{integrierbare Majorante}} = e \sum_{i=1}^{\infty} \big(\underbrace{\tfrac{1}{e}}_{<1}\big)^i =$$

$\left(\frac{1}{e}\right)^i = \sim$

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-i} = \frac{1}{1-1/e}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}\right)$$

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \exp\left(-i + \frac{n}{i} e^{-\frac{n}{i}}\right)$$

$$\underset{\text{dom. Konv.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \exp\left(-i + \frac{n}{i} e^{-\frac{n}{i}}\right)}$$

$$\underset{\text{Stetigkeit}}{=} \exp\Big(\lim_{n\to\infty} -i + \overbrace{\tfrac{n}{i} e^{-\frac{n}{i}}}^{\xrightarrow{n\to\infty} 0}\Big)$$

$$= \exp(-i) = e^{-i}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i}} = \frac{1}{1-1/e} - 1 = \frac{1/e}{1-1/e} =$$

$$= \frac{1}{e-1}$$

$$\frac{n}{i} e^{-\frac{n}{i}} \overset{!}{\leq} 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}_0^+$

Es gilt sogar: $x e^{-x} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq e^x$$

Fktgl. & $e^0 = 1$

$$e^x = \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$= 1 + x + \underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!}}_{\geq 0}$$

$$\geq x + 1 \geq x$$

Monotonie von exp:

Sei $a \leq b$. Bemerke $e^a \leq e^b \overset{\text{Fkt.gleichung}}{\Longleftrightarrow} e^{b-a} \geq e^0 = 1$

$\not\leq$ aber haben wir

$$e^{b-a} \geq 1 + \underbrace{b-a}_{\geq 0}$$

gezeigt.

Ende des Tutoriums

Frage: Ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$?

$\Updownarrow$

$\mathbb{R} \supseteq \overline{\mathbb{Q}} \supseteq \mathbb{R} \iff \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

Das gilt nicht.

$x \in \overline{M} \iff x$ ist Berührpunkt von M

$\iff$ "Ich kann x nicht von M isolieren"

$\iff \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$

Es gilt: $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$