Funktionentheorie, Tutorium 11

1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.
   (i) Ist f injektiv, so ist f eine biholomorphe Abbildung auf eine offene Teilmenge.
   (ii) Ist f eigentlich (und U nichtleer), so ist f surjektiv.

(i) $f(U)$ offen, da holomorphe Abb. offen sind.

$\Rightarrow$ $f : U \to f(U)$ ist bijektiv "Korestriktion"

g (Umkehrung)

Forderung: g holomorph. g ist holomorph in $f(z) \Leftrightarrow f'(z) \neq 0$ zu prüfen

$f'(z) = 0$, $z \in U$ $\Rightarrow$ z ist eine $(k \geq 2)$-fache $f(z)$-Stelle

$\Rightarrow$ $\exists V \subseteq U$ offen, $z \in V$ $\exists W \subseteq \mathbb{C}$, $f(z) \in W$:

Lokales Abbildungsverhalten

$f|_{V \setminus \{z\}} : V \setminus \{z\} \to W \setminus \{f(z)\}$ ist "$k:1$"

(nicht injektiv!)

(ii) $f(U)$ offen (Offenheitssatz)

Zz: $f(U)$ abgeschlossen. (Dann $f(U) = \mathbb{C}$)

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in f(U)^{\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge

$f(U)$ offen $\Rightarrow$ $\forall n$ $\exists \varepsilon_n > 0 : \overline{D_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq f(U)$

$X := \{x_n \mid n\} \cup \{\lim_{n\to\infty} x_n =: x\}$ ist kompakt

Es genügen endlich viele $\overline{D_{\varepsilon_i}(x_i)}$, um X zu überdecken, $i = 1, \dots, N$ (nach Umnummerierung)

$K := \bigcup_i \overline{D_{\varepsilon_i}(x_i)}$ ist kompakt.

f eigentlich $\Rightarrow$ $f^{-1}(K)$ kompakt

$x_n = f(y_n)$ für irgendwelche $y_n \in f^{-1}(K)$.

$(y_n)_n$ hat eine konvergente Teilfolge $(y_{n_k})_k$.

(Folgenkompaktheit)

$$y_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y, \qquad \underset{\substack{\| \\ x_{n_k}}}{f(y_{n_k})} \xrightarrow{k} \underset{\substack{\| \\ x}}{f(y)}$$

$\Rightarrow x \in f(\mathcal{U})$

$\Rightarrow \overline{f(\mathcal{U})} = f(\mathcal{U})$.

2. (i) Auf (nichtleeren) beschränkten Gebieten $U \subset \mathbb{C}$ gibt es keine eigentlichen holomorphen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$.

   (ii*) Jede eigentliche holomorphe Abbildung $f : D \to D'$ zwischen Scheiben $D, D' \subset \mathbb{C}$ ist durch eine rationale Funktion gegeben.

(i) $f^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{kompakt}}) \subseteq \mathcal{U}$ kompakt

Wäre $|f^{-1}(\{0\})| = \infty$, so fänden wir eine nichtkonstante konvergente Folge in $f^{-1}(\{0\})$ (Folgenkompaktheit)

$\Rightarrow f = 0$ (Identitätssatz) $\Rightarrow$ Wf

(sonst $f^{-1}(\{0\}) = \mathcal{U}$ nicht kompakt)

Für $a \in f^{-1}(\{0\})$ bezeichne m_a die Vielfachheit der Nullstelle a von f.

$$g(z) := \frac{f(z)}{\underbrace{\prod_{a \in f^{-1}(\{0\})} (z-a)^{m_a}}_{p :=}}$$

definiert eine holomorph fortsetzbare Funktion auf $\mathcal{U}$, ohne Nullstellen.

__Beh:__ $g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ist eigentlich.

$\mathcal{U}$ beschränkt $\Rightarrow$ $p(\mathcal{U})$ beschränkt, $C := \max_{z \in \overline{\mathcal{U}}} |p(z)|$

$\subseteq p(\overline{\mathcal{U}}) \leftarrow$ kompakt

$f^{-1}(D_r(0)) \subseteq D_{R(r)}(0)$, $\forall r>0$

"Urbilder beschränkter Mengen = beschränkt"

$$g^{-1}(D_r(0)) \subseteq f^{-1}(D_{Cr}(0)) \subseteq D_{R(Cr)}(0)$$

$$\underset{z}{\ni} \Rightarrow |g(z)| \le r$$

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{p(z)}\right| \Rightarrow |f(z)| \le Cr$$

$\Rightarrow$ g ist eigentlich

$\Rightarrow$ g ist surjektiv $(\twoheadrightarrow \mathbb{C})$, aber

g hat keine Nullstellen, $\lightning$.

(ii) $f: D \to D'$ holomorph & eigentlich

$\overset{!}{\Longrightarrow}$ f ist rational

(Erinnerung: $D_{r_1}(z_1) \xrightarrow{\cong} D_{r_2}(z_2)$, $z \mapsto \frac{r_2}{r_1}(z-z_1)+z_2$

affin-linear, insbesondere eigentlich)

$\rightsquigarrow$ o.E. $D = D' = D_1(0)$.

$|f^{-1}(\{0\})| < \infty$, m_a Vielfachheiten.

$$q(z) := \prod_{a \in f^{-1}(\{0\})} \phi_{-a}^{m_a} = \prod_a \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)^{m_a}$$

"Blaschke-Faktoren"

$\phi_{-a}(a) = 0$ mit Multiplizität $= 1$.

$\phi_{-a}: D \xrightarrow{\cong} D$

$g := \frac{f}{\varphi} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph (fortsetzbar) ohne Nullstellen.

Für $|z| \to 1$ gilt $|\phi_{-a}(z)| \longrightarrow 1$,

& "f eigentlich $\Longrightarrow |f(z)| \longrightarrow 1$ für $|z| \to 1$"

Begründung: $(z_k)_k \in D^{\mathbb{N}}$, $z_k \xrightarrow{k\to\infty} z \in \partial D$

$(f(z_k))_k$ hat eine konvergente Teilfolge $\subseteq \overline{D}$, sagen wir $(f(z_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$.

$f(z_{k_n}) \xrightarrow{n} x \in \overline{D}$.

$z_{k_n} \xrightarrow{n} z$. Wäre $x \in D$, so fänden wir eine kompakte Umgebung $K \subseteq D$ von x, sodass ein Endstück von $f(z_{k_n})_n$ in K liegt.

$\Longrightarrow$ ein Endstück von z_{k_n} liegt im Kompaktum $f^{-1}(K) \subseteq D$

$\operatorname{dist}(f^{-1}(K), \mathbb{C} \setminus D) > 0 \Longrightarrow$ Widerspruch zu $z \in \partial D$.

$\Longrightarrow x \in \partial D$.

$\Longrightarrow$ $|f|$ hat eine stetige Fortsetzung auf $\overline{D}$ mit Randwerten $|f|\big|_{\partial D} \equiv 1$.

$\Longrightarrow$ Das gleiche gilt für $|g|$

$\Longrightarrow$ $\min_{z\in\overline{D}} |g|$ oder $\max_{z\in\overline{D}} |g|$ wird im Inneren angenommen.

Da g keine Nullstellen hat folgt, dass g konstant ist.
(Min- / Maximumsprinzip)

$\Longrightarrow$ f ist ein konstantes Vielfaches der rationalen Fkt q.

3. (i) Eine holomorphe Selbstabbildung einer offenen Scheibe in $\mathbb{C}$ mit mindestens zwei Fixpunkten ist die Identität.

(ii*) Sei f eine holomorphe Selbstabbildung der offenen Einheitsscheibe $D \subset \mathbb{C}$ mit Nullstellen der Ordnungen m_j in paarweise verschiedenen Punkten $z_j \in D$ für $1 \leqslant j \leqslant k$. Dann gilt die Abschätzung

$$|f(z)| \leqslant \Big|\underbrace{\frac{z-z_1}{1-z\overline{z}_1}}_{= \phi_{-z_1}}\Big|^{m_1} \cdot \ldots \cdot \Big|\frac{z-z_k}{1-z\overline{z}_k}\Big|^{m_k}.$$

(i) O.E. $f : D \longrightarrow D$, $D = D_1(0)$.

$z_1, z_2 :$ $f(z_i) = z_i$, $i = 1,2$

Betrachte $h := \phi_{-z_1} f \phi_{z_1} : D \longrightarrow D$

$h(0) = \phi_{-z_1} f \phi_{z_1}(0) = \phi_{-z_1} f(z_1) = \phi_{-z_1}(z_1) = 0.$

$h(\phi_{-z_1}(z_2)) = \phi_{-z_1}(z_2) =: \tilde{z}_2$

Schwarzsches Lemma auf h $(h(0) = 0)$

& Zusatz $|h(\tilde{z}_2)| = |\tilde{z}_2|$

$\Rightarrow h = c \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, $c \in \mathbb{C}$

$\tilde{z}_2 = h(\tilde{z}_2) = c\, \tilde{z}_2$

$\Rightarrow c = 1$ $\Rightarrow h = \mathrm{id}_D$

$\Rightarrow f = \mathrm{id}_D.$

(ii) Mit Induktion über # Nullstellen

- keine Nullstellen $\Rightarrow$ leeres Produkt, alles klar.
- Gelte die Aussage für $k-1$.

$f : D \to D = D_1(0)$ habe die Nullstellen $z_1, \ldots, z_k$,

mit Vielf. $m_1, \ldots, m_k$

Betrachte $\tilde{f} := f \circ \phi_{z_k}$, $\tilde{f}$ hat Nullstellen

$\phi_{-z_k}(z_1), \dots, \phi_{-z_k}(z_{k-1}), 0$

mit Vielfachheiten $m_1, \dots, m_k$.

$h(z) := \dfrac{\tilde{f}(z)}{z^{m_k}}$ holomorph, $k-1$ Nullstellen.

Auf $\partial D_r(0)$, $r<1$: $|h(z)| < \dfrac{1}{r^{m_k}}$.

$\underset{\text{Maximumsprinzip}}{\Longrightarrow}$ $|h| < \dfrac{1}{r^{m_k}}$ auf $D_r(0)$

$\underset{r \nearrow 1}{\Longrightarrow}$ $|h| \leq 1$ auf D.

1. Fall: h konstant $\Longrightarrow$ $\tilde{f} = \lambda \cdot z^{m_k}$, $\lambda \in D$

passiert nur falls $k = 1$

$|f| \leq |\tilde{f}\, \phi_{-z_k}| = |\lambda|\, |\phi_{-z_k}|^{m_k}$

$\leq |\phi_{-z_k}|^{m_k}$

2. Fall: h nicht konstant $\Longrightarrow$ $h(D)$ offen

$\Longrightarrow$ $|h| < 1$ auf D.

$\rightsquigarrow$ $h: D \to D$

Wende Induktionsvoraussetzung auf $\underbrace{h \circ \phi_{-z_k}}_{\text{hat Nullstellen } z_1, \dots, z_{k-1} \text{ mit passenden Vielfachheiten}}$

$$\underbrace{|h \circ \phi_{-z_k}|}_{= \frac{|f|}{|\phi_{-z_k}|^{m_k}}} \leq |\phi_{-z_1}|^{m_1} \cdots |\phi_{-z_{k-1}}|^{m_{k-1}}$$

$\Longrightarrow$ $\square$

4. Beweisen Sie für *harmonische* Funktionen auf Gebieten in $\mathbb{C}$:

(i) *Identitätssatz.* Stimmen zwei auf einem Gebiet definierte harmonische Funktionen auf einer nichtleeren offenen Teilmenge überein, so sind sie gleich.

(ii) *Maximumprinzip.* Eine reellwertige harmonische Funktion auf einem Gebiet ist konstant, falls sie im Inneren des Gebiets ein lokales Maximum annimmt.

(iii) *Dirichlet-Problem für die Scheibe.* Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Scheibe und $\phi : \partial D \to \mathbb{R}$ stetig. Als *Lösung des Dirichlet-Problems auf D mit Randwerten ϕ* bezeichnet man eine stetige Funktion $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ mit $h|_{\partial D} = \phi$, so daß $h|_D$ harmonisch ist.

(a) Eine Lösung des Dirichlet-Problems ist eindeutig.

(b*) Eine Lösung des Dirichlet-Problems existiert. (Poisson - Formel)

(i) Ohne Einschränkung zeigen wir $h = 0$ für eine harmonische Fkt $h : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$h|_V = 0$, $V \subseteq \mathcal{U}$ offen.

Betrachte $h^{-1}(\{0\}) = \{z \in \mathcal{U} \mid h(z) = 0\} =: M$, abgeschlossen, da h stetig.

Wir zeigen M ist offen. (Denn $V \subseteq M \Rightarrow M = \mathcal{U}$
$\mathcal{U}$ zshgd.)

M nicht offen $\Rightarrow$ M hat einen Randpkt. $a \in \mathcal{U}$

$D_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{U}$

offen? $\longrightarrow$ $D_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$

sagen wir, ja

$$\left.\begin{aligned} &D_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset \\ &D_\varepsilon(a) \cap \underbrace{(\mathcal{U} \setminus M)}_{=\{h \neq 0\} \text{ offen}} \neq \emptyset \end{aligned}\right\} (*)$$

offen

$h|_{D_\varepsilon(a)} = \mathrm{Re}(f)$, $f : D_\varepsilon(a) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph

$f|_{D_\varepsilon(a) \cap M} = iv$, $v : D_\varepsilon(a) \cap M \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ konstant

$\Rightarrow$ f konstant auf $D_\varepsilon(a)$

(Identitätssatz)

$\Rightarrow$ $h = 0$ auf $D_\varepsilon(a)$ $\Rightarrow$ Wid zu $(*)$ $\square$

$M := \{ z \in \mathcal{U} \mid \exists W \subseteq \mathcal{U}$ einfach zusglgd. Umgebung von z,

$W \cap V \neq \emptyset \}$

ist abgeschloffen (also ganz $\mathcal{U}$)

(Weshalb abgeschlossen?)

(ii) $h : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, lokales Maximum bei $a \in \mathcal{U}$

$D_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{U}$, $\quad h|_{D_\varepsilon(a)} = Re(f)$,

$f : D_\varepsilon(a) \longrightarrow \mathbb{C}$

holomorph

Realteil von f nimmt lokales Maximum an

$\underset{\text{Version des Maximumsprinzips}}{\Longrightarrow}$ $f =$ konst. $\qquad c := Re(f) : D_\varepsilon(a) \to \mathbb{R}$

h & c stimmen auf $D_\varepsilon(a)$ überein

c: harmonisch fortsetzbar auf $\mathcal{U}$ (konstant)

$\underset{\text{(i) Identitätssatz}}{\Longrightarrow}$ $h \equiv c$ auf $\mathcal{U}$.