Lineare Algebra 2

Tutorium 4 5.5.2021

Warm-Up

Richtig oder Falsch?

1. Sei $V = \mathbb{R}^{2n}$. Dann gibt es für alle $r \in \{0, \ldots, 2n\}$ genau eine schiefsymmetrische Bilinearform auf V sodass die zugehörige Strukturmatrix Rang r hat. ✗
2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(-,-)$. Dann gibt es eine Norm $||-||$ auf V mit $||x||^2 = (x,x)$. ✓ $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$
3. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Norm $||-||$. Dann gibt es ein Skalarprodukt $(-,-)$ auf V mit $||x||^2 = (x,x)$. ✗
4. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(-,-)$. Seien $u, v \in V$ mit $||u|| = 1 = ||v||$ und $(u,v) = 1$. Dann gilt $u = v$. ✓
5. Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b),(c,d) \mapsto |ac| + |bd|$ ist ein Skalarprodukt. ✗
6. Jeder endlich-dimensionale Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis. ✓

$\mathbb{R}'$ Skalarprodukt

$$(u-v, u-v) = \underbrace{(u,u)}_{=1} - 2\underbrace{(u,v)}_{=1} + \underbrace{(v,v)}_{=1} = 0$$

1. $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ schiefsymmetrisch vom Rang r

$\beta(v,w) = -\beta(w,v)$

die Strukturmatrix B (bzgl. einer Basis) den Rang r hat

$A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ mit vollem Rang

$\tilde{\beta} : (v,w) \longmapsto \beta(Av, Aw)$

$$\beta(v,w) = v^T B w$$

$$\tilde{\beta}(v,w) = \beta(Av, Aw) = (Av)^T B A w = v^T \underbrace{A^T B A}_{\text{hat Rang } r} w$$

3. $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ eine Norm,

dann gibt es genau dann ein Skalarprodukt $(-,-) : V \times V \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in V: \ \|x\|^2 = (x,x)$$

wenn gilt:

$$\forall x,y \in V: \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

(Parallelogrammgleichung)

Aufgabe 5

$U_1^\perp + U_2^\perp \subseteq (U_1 \cap U_2)^\perp$ $= \dim V - \dim(U_1 \cap U_2)$

$U_1^\perp \cap U_2^\perp = (U_1 + U_2)^\perp$

für Gleichheit, zeige Gleichheit der Dimensionen.

$V = U_i \oplus U_i^\perp$ $\quad i = 1, 2$

$\uparrow$ Skalarprodukt

$\dim V = \dim U_i + \dim U_i^\perp$

$\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) = \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - \dim U_1^\perp \cap U_2^\perp.$

$= \cancel{2} \dim V - \dim U_1 - \dim U_2$

$- \underbrace{\dim (U_1 + U_2)^\perp}_{= \cancel{\dim} V - \dim(U_1+U_2)}$

$\dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

$= \underbrace{\dim(U_1 + U_2) - \dim U_1 - \dim U_2}_{= -\dim(U_1 \cap U_2)} + \dim V$

$= \dim V - \dim(U_1 \cap U_2)$

$u + w \longmapsto 0 + w = w \longmapsto w$

$U \oplus W \xrightarrow{f} W \xrightarrow{f} W$

Projektor

$\boxed{f^2 = f}$

Aufgabe 4

$f = \hat{f}$

$\Updownarrow$

f selbstadjungiert $\iff \ker f \perp \operatorname{im} f$

$\Updownarrow$

$\forall u, v \in V: \ (f(u), v) = (u, f(v))$

$\Downarrow$

$\forall u, v \in V: \ (f(u), f(v)) = (u, f^2(v))$

Rollentausch $u \leftrightarrow v$ $\longrightarrow$ $\overset{\shortparallel}{(f(u), v)} \overset{(f^2(u), v)}{=} (u, f(v))$ $\quad$ $f^2 = f$

$\forall u \in V, \ v \in \ker f: \quad (f(u), v) = (u, f(v)) = (u, 0) = 0$

beliebiges Element aus $\operatorname{Im} f$ $\quad \Rightarrow \ker f \perp \operatorname{Im} f$

"$\Leftarrow$": Zeige zuerst: $V = \underbrace{\operatorname{Im} f}_{f(z)} \underset{+}{\oplus} \underbrace{\ker f}_{x}$ $\qquad \xrightarrow{f} f^2(z) + f(x)$, $\underbrace{f^2(z)}_{=f(z)} + \underbrace{f(x)}_{=0}$

$\xrightarrow{f} \operatorname{Im} f = f(z)$

$\supseteq$ ok

Wenn $U, W \leq V$, $U \perp W$

$\Rightarrow U \cap W = 0$

$u \in \ \Rightarrow (u,u) = 0$

$\Rightarrow u = 0$

Alternativ: $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$: $\quad x = f(z),\ z \in V$, $x \in \operatorname{Im} f$

$x = f(z) \underset{f^2 = f}{=} f^2(z) = f(x) = 0$ $\quad x \in \ker f$ $\quad \Rightarrow 0$

$f^2(z) = f(f(z))$

"$\leq$": $\dim V \overset{!}{=} \dim(\ker f \oplus \operatorname{im} f)$

$= \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$

Rangsatz

$\left(V/\ker f \cong \operatorname{im} f \right)$

~~$\dim V = \dim \ker g + \dim \operatorname{Im} g \Leftrightarrow V/\ker g \cong \operatorname{Im} g$~~ $\quad V \xrightarrow{g} W$

$= \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

$x, y \in V$. $\quad x = x_1 + f(x_2)$ $\quad x_1 \in \ker f$

$y = y_1 + f(y_2)$ $\quad y_1 \in \ker f$

$f(y) = \underbrace{f(y_1)}_{=0} + \underbrace{f^2(y_2)}_{=f(y_2)}$

$\ker f \perp \operatorname{im} f$

$(x, f(y)) = (x_1 + f(x_2), f(y)) \overset{= (x_1, f(y)) + (f(x_2), f(y))}{=} (f(x_2), f(y))$

$= (f(x_2), f(y_1 + f(y_2)))$

$= (f(x_2), f(y_2))$

$(f(x), y)$

f selbstadjungiert $\Leftarrow$

Analog: $(y, f(x)) = (f(y_2), f(x_2))$

$\square$

Übungsaufgaben zu Charakteristik

- Betrachte $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7$; $p := X^4 + 4X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_7[X]$ ← Polynom

  $q := X + 5$

  Berechne $\frac{p}{q} \in \mathbb{F}_7[X]$ (Polynomdivision)

- $\mathbb{F}_4 = \{ a + jb \mid a \in \mathbb{F}_2 \ni b \}$, $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2$

  $\not\exists\ j^2 = j + 1$

  ($\mathbb{F}_4$ = Körper ?)

  Berechne $\dfrac{X^3 + jX + j}{X + j}$

3. $q_\phi : v \mapsto \phi(v,v)$ $\qquad \phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\underbrace{q_\phi = q_{\phi'}}_{\text{quadratische Form}} \Rightarrow \phi(v,v) = \phi'(v,v) \quad , \forall v \in V$$

$$\stackrel{?}{\Longrightarrow} \phi = \phi'$$

$$\phi(x,y) \stackrel{?}{=} \phi'(x,y)$$

$$\begin{aligned} q_\phi(x+y) = \phi(x+y, x+y) &= \phi(x+y, x) + \phi(x+y, y) \\ &= \underbrace{\phi(x,x)}_{q_\phi(x)} + 2\phi(x,y) + \underbrace{\phi(y,y)}_{q_\phi(y)} \end{aligned}$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q_\phi(x+y) - q_\phi(x) - q_\phi(y)\right)$$

$$\phi'(x,y) = \frac{1}{2}\left(q_{\phi'}(x+y) - q_{\phi'}(x) - q_{\phi'}(y)\right)$$