Funktionentheorie, Tutorium 3

8.5.2020

Analysis IV: Funktionentheorie

Übungsblatt 2

Bitte bearbeiten bis Montag 4.5.

1. *Reell- versus komplex-lineare Abbildungen.* Seien V, W $\mathbb{C}$-Vektorräume und $A : V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

   (i) Die durch $v \mapsto A(v) - iA(iv)$ definierte Abbildung $V \to W$ ist $\mathbb{C}$-linear.

   (i') Die durch $v \mapsto A(v) + iA(iv)$ definierte Abbildung $V \to W$ ist $\mathbb{C}$-antilinear.

   (ii) Die Abbildung A ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn die Gleichung $A(iv) = iA(v)$ für die Vektoren v einer $\mathbb{C}$-Basis von V erfüllt ist.

   (iii) Eine $\mathbb{R}$-Linearform $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn ihre Matrix relativ zur Standard-$\mathbb{R}$-Basis $\{1, i\}$ von $\mathbb{C}$ die Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (1)$$

   mit $a, b \in \mathbb{R}$ hat.

$A: V \to W$ $\mathbb{R}$-linear

$$A(zv) = A((z_1 + iz_2)v) = A(z_1 v + z_2 iv)$$

$z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}$, $v \in V$ $\qquad = z_1 A(v) + z_2 A(iv)$

$$0 \overset{!}{=} A(zv) - zA(v) = \underbrace{z_1 A(v) - z_1 A(v)}_{=0} + \underbrace{z_2 A(iv) - iz_2 A(v)}_{\overset{!}{=}0} \Leftrightarrow A(iv) = iA(v)$$

$\rightsquigarrow$ A ist $\mathbb{C}$-linear, falls $\forall v \in V: A(iv) = iA(v)$

Analog auch: A ist $\mathbb{C}$-antilinear, falls $\forall v \in V: A(iv) = -iA(v)$

(i) $B: v \mapsto A(v) - iA(iv)$ ist $\mathbb{R}$-linear,

$$B(iv) = A(iv) - i\underbrace{A(i^2 v)}_{\in\mathbb{R}} = A(iv) + iA(v) =$$

$v \in V$ beliebig

$$= i\left(A(v) - iA(iv)\right) = iB(v)$$

$i^{-1} = -i$

$\Rightarrow$ B ist $\mathbb{C}$-linear.

(i') $C: v \mapsto A(v) + iA(iv)$ $\mathbb{R}$-linear

$$C(iv) = A(iv) + iA(i^2 v) = A(iv) - iA(v) =$$

$$= -i\left(A(v) + iA(iv)\right) = -iC(v)$$

Bew:

(ii) Es genügt $A(iv) = i\,A(v)$ für alle $v \in B$

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\mathbb{C}$-Basis von V

$-i\,A(iv) = A(v)$

nachzuprüfen.

$\Updownarrow$

$C : v \mapsto A(v) + i\,A(iv)$ ist die

Nullabbildung

(Es genügt, $C(v) = 0$ auf einer Basis zu prüfen, da C $\mathbb{C}$-antilinear ist.)

(iii) $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear

$$\Rightarrow \quad \alpha = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \alpha(1)\,z \end{array} \right)$$

$\alpha(1) = a + ib$, $\quad \alpha(i) = i\,\alpha(1) = -b + ia$

α entspricht:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Umgekehrt: Sei $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ bzgl. $1, i$.

$$\alpha(1) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + ib$$

$$\alpha(i) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -b + ia$$

$$= i(a + ib) = i\alpha(1)$$

1 ist $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}$ & (ii) $\Rightarrow \square$

4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, dh offen und zusammenhängend, und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine *reell-wertige* holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

(i) Die Ableitung von f verschwindet.

(ii) f ist konstant.

(iii) Beweisen Sie dies allgemeiner für holomorphe Funktionen, deren Werte in einer 1-dim differenzierbaren Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}$ liegen (zB in einem Kreis).

(i) $f = u + iv$, $u, v : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} Df(z) = f'(z)\, \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \\ \quad \| \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(z) = 0$$

(ii) $\mathcal{U}$ zsmhgd $\overset{\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{U}$ wegzsmhgd

$z_0 \in \mathcal{U}$, $z \in \mathcal{U}$ $\quad \gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$ stückweise C^1

$\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$

o.E. ist γ C^1

$$\int_\gamma \underbrace{f'(z)}_{=0} dz = \int_{\gamma : [0,1] \to \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2} \Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y}}_{=0} \Big) \, d(x,y)$$

$$f'(z) = f'(z)\, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$\int_0^1 \underbrace{f'(\gamma(x))\, \gamma'(x)}_{= (f \circ \gamma)'} dx$$

$$\overset{\text{HDI}}{=} f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(z) - f(z_0)$$

$\Rightarrow$ $f : z \mapsto f(z_0)$ ist konstant

(iii) $f : \mathcal{U} \longrightarrow M \subseteq \mathbb{C}$ holomorph

$\uparrow$ 1-dim. reelle differenzierbare Mfgkt.

Für jede Karte $\phi_i : \underset{\underset{M}{\cap\text{ offen}}}{V_i} \xrightarrow{\cong} \underset{\text{offen}}{W_i} \subseteq \mathbb{R}$ Homöomorphismus

$M = \bigcup_i V_i$ $\forall$ Kartenwechsel

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \underset{\overset{\mathbb{R}}{\cup\text{ offen}}}{\phi_j(V_i \cap V_j)} \longrightarrow \underset{\overset{\mathbb{R}}{\cup}}{\phi_i(V_i \cap V_j)}$$

$\mathbb{R}$- differenzierbar

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}$-diff'bare Funktion von Mfgkeiten

$$f : \underset{\underset{\mathbb{R}^2}{\cap}}{\mathcal{U}} \longrightarrow M$$

$$\begin{array}{ccc} z \in \mathcal{U} & & \\ \rightsquigarrow \; df_z : T_z\mathcal{U} & \xrightarrow{d\tilde{f}_z} & T_{\tilde{f}(z)} M \cong \mathbb{R} \\ \| \wr & & \\ \mathbb{R}^2 & & \Big\downarrow di_{\tilde{f}(z)} \\ \| \wr & & \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{df_z} & \mathbb{C} \end{array}$$

$\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im}(df_z)) \leq 1 \implies f'(z) = 0$.

$df_z = f'(z)\, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$

$$f : \mathcal{U} \xrightarrow{\tilde{f}} M \xrightarrow{i} \mathbb{C} \qquad i = \text{"}\subseteq\text{"}$$

$$df_z = d(i \circ \tilde{f})_z = di_{\tilde{f}(z)} \circ d\tilde{f}_z$$

$\underset{\in \{0,2\}}{\operatorname{rg}_{\mathbb{R}} df_z} \leq \operatorname{rg} d\tilde{f}_z \leq 1$

3. *Komplexe Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion.* Wir wissen (aus Analysis I), daß die Exponentialreihe

$$e^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert und so auf ganz $\mathbb{C}$ die *komplexe Exponentialfunktion* definiert. Wir wissen auch, daß die Funktionalgleichung

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie:

(i) Die auf $\mathbb{C} - \{0\}$ definierte Funktion

$$h \mapsto \frac{e^h - 1 - h}{h^2}$$

ist durch eine auf ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergente Potenzreihe um 0 darstellbar und auf jeder punktierten Scheibe $\dot{D}_r(0) = \{h \,|\, 0 < |h| < r\}$, $r > 0$, beschränkt.

(ii) Es gilt

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{\exp'(0)} = 1. \quad = e^0$$

(iii) Allgemein gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$\exp'(z) \;\widehat{=}\; \lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z.$$

(i) $$F(h) := \frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1 - h}{h^2} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n}{n!}}{h^2} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(n+2)!}$$

absolut konvergente Reihe auf $\mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|h|^n}{(n+2)!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|h|^n}{n!} = \exp|h| < \infty$$

Für $h \in \dot{D}_r(0)$ gilt:

$$|F(h)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(n+2)!} \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|h|^n}{(n+2)!}$$

$$\le \exp \underbrace{|h|}_{<r}$$

$$< \exp(r) \in \mathbb{R}$$

exp monoton $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad =: C$

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} - 1 \right) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1 - h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h F(h) = \lim_{h\to 0} hC = 0$$

"h klein genug"

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^z.$$

2. *Rechenregeln für die komplexe Differentiation.* Seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $z_0 \in U$ ein Punkt und $f, g : U \to \mathbb{C}$ Funktionen, die in z_0 komplex differenzierbar sind. Zeigen Sie:

(i) $f + g$ ist komplex differenzierbar in z_0 mit Ableitung $f'(z_0) + g'(z_0)$. Für jede Konstante $c \in \mathbb{C}$ ist cf komplex differenzierbar in z_0 mit Ableitung $cf'(z_0)$.

(ii) fg ist komplex differenzierbar in z_0 mit Ableitung $f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

(iii) Falls $g(z_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ komplex differenzierbar in z_0 mit Ableitung

$$\frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

(iv) Ist $V \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $f(z_0)$ und $h : V \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $f(z_0)$, so ist $h \circ f$ komplex differenzierbar in z_0 mit Ableitung $h'(f(z_0))f'(z_0)$.

(v) Gilt außerdem $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ nahe z_0, so $f'(z_0) \neq 0$ und $h'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

(i) $\forall h \in \mathbb{C} : z_0 + h \in \mathcal{U}$

$$\Rightarrow \exists f'(z_0) \in \mathbb{C} : \quad \underbrace{f(z_0+h) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0) \cdot h}} + \underbrace{o(|h|)}_{''}$$

"f ist affin linear approximierbar."

$\tilde{g} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$

$\left| \frac{\tilde{g}(h)}{h} \right| \xrightarrow{h \to 0} 0$

$$g(z_0+h) = g(z_0) + g'(z_0)h + o(h)$$

$$\rightsquigarrow (f+g)(z_0+h) = f(z_0+h) + g(z_0+h) =$$

$$= f(z_0) + g(z_0) + (f'(z_0) + g'(z_0))h + o(h)$$

$\Rightarrow$ $f+g$ diff'bar in z_0 mit $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

(ii)
$$\lim_{h \to 0} \frac{(fg)(z_0+h) - (fg)(z_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(fg)(z_0+h) - g(z_0) f(z_0+h) + g(z_0) f(z_0+h) - (fg)(z_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\underbrace{f(z_0+h)}_{\xrightarrow{h \to 0} f(z_0)} \underbrace{\frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h}}_{\xrightarrow{h \to 0} g'(z_0)} + g(z_0) \underbrace{\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}}_{\xrightarrow{h \to 0} f'(z_0)} \right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Grenzwertsätze}}}{=} f(z_0) g'(z_0) + g(z_0) f'(z_0)$$

(iv) $f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)\cdot h + o(h)$

$h(f(z_0)+k) = h(f(z_0)) + h'(f(z_0))\cdot k + o(k)$

$$h\circ f(z_0+h) = h\Big(f(z_0) + \overbrace{f'(z_0)\cdot h + o(h)}^{\text{"}=k\text{"}}\Big) =$$

$$= h(f(z_0)) + h'(f(z_0))\big(f'(z_0)h + o(h)\big) + o(h)$$

$$= h(f(z_0)) + h'(f(z_0))\, f'(z_0)\, h + o(h)$$

$$\Rightarrow (h\circ f)'(z_0) = h'(f(z_0))\, f'(z_0)$$

$g \in o(h)$ $\quad$ $\tilde{g} \in o(k)$ $\quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\tilde{g}\big(f'(z_0)\cdot h + g(h)\big)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$

$$\frac{\dfrac{\tilde{g}\big(f'(z_0)\cdot h + g(h)\big)}{f'(z_0)\cdot h + g(h)}}{\dfrac{h}{f'(z_0)\cdot h + g(h)}} \qquad \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{"}k\to 0\text{"}]{h\to 0} 0 \\ \xrightarrow{h\to 0} \dfrac{1}{f'(z_0)} \end{array}$$

$$\frac{h}{f'(z_0)\cdot h + g(h)} = \frac{1}{f'(z_0) + \frac{g(h)}{h}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$