## $\begin{array}{l} \textbf{Analysis 1-Tutorium 5} \\ \textbf{robin.mader@campus.lmu.de} \\ \textbf{4.12.2020} \end{array}$

Aufgabe 1. Teilaufgaben aus der GOP des Wintersemesters 2016/2017:

- (a) Formuliere die Formel für die geometrische Summe. Gemeint ist die endliche geometrische Summe, nicht die geometrische Reihe. Quantifiziere auch alle dabei vorkommenden Variablen.
- (b) Es bezeichnet i die imaginäre Einheit in  $\mathbb{C}$ , und  $\omega_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$ . Beweise für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{C}$  mit |a| < 1:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - a\omega_n^k} = \frac{1}{1 - a^n}.$$

**Aufgabe 2** (Sandwichsatz). Es seien  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  konvergente Folgen mit gemeinsamem Grenzwert  $x:=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ . Sei  $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  eine weitere Folge. Angenommen,

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \le c_n \le b_n.$$

Zeige:  $c_n \xrightarrow{n \to \infty} x$ .

Aufgabe 3. Aus der GOP des Wintersemesters 2012/2013:

(a) Definiere für  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  und  $b\in\mathbb{C}$  die Aussage

$$a_n \xrightarrow{n \to \infty} b.$$

(b) Sei nun

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - i}{\sqrt{n} + i}$$

für  $n \in \mathbb{N}$  und b = 1. Beweise hierfür die Aussage  $a_n \xrightarrow{n \to \infty} b$  direkt mit der Definition aus (a).

**Aufgabe 4.** (a) Zeige, dass die Folge  $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$  divergiert.

(b) Untersuche das Konvergenzverhalten von  $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ , wobei  $x\in\mathbb{R}$ .

**Aufgabe 5** (Aktivierungselemente). 3.6: Sei  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  konvergent, und  $b\in\mathbb{R}$  so, dass  $\forall n\in\mathbb{N}|a_n|\leq b$ . Beweise:

$$\left|\lim_{n\to\infty}a_n\right|\le b.$$

2.30 (Intervallschachtelungen): Seien  $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots$  eine aufsteigende Folge und  $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \dots$  eine absteigende Folge reeller Zahlen, sodass

$$x := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}_0} b_n$$
, und  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \le b_n$ .

Zeige:  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} [a_n, b_n] = \{x\}.$