Satz: $\forall n \leq 3\ \forall A, B \in M_n(K)$:

$$A \approx B \iff \mu_A = \mu_B \ \&\ \chi_A = \chi_B.$$

Beweis: im Fall $n=3$. „$\Rightarrow$" bekannt.

„$\Leftarrow$": Seien $g_1, \dots, g_r$ die Elementarteiler zu $M_A(x)$,

$g_1 | \cdots | g_r$, $A \approx B_{g_1, \dots, g_r}$, $1 \leq r \leq 3$.

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung.)

Es gilt: $\mu_A = g_r$, $\chi_A = \prod_{i=1}^r g_i$, $\sum_{i=1}^r \deg g_i = 3$.

Fallunterscheidung:

1. Fall: $\deg \mu_A = 3$. $\mathcal{E}_A :=$ Folge des Elementarteiler (bis auf Einheiten) $= (\mu_A)$.

2. Fall: $\deg \mu_A = 2$. $\underset{\text{Gradgründe}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{E}_A = (g_1, \mu_A)$, und

$\chi_A = \prod_i g_i = g_1 \mu_A \Rightarrow g_1 = \frac{\chi_A}{\mu_A}. \Rightarrow \mathcal{E}_A = \left(\frac{\chi_A}{\mu_A}, \mu_A\right)$, eindeutig durch μ_A & χ_A bestimmt.

3. Fall: $\deg \mu_A = 1$. $\Longrightarrow$ $\mathcal{E}_A = (\mu_A, \mu_A, \mu_A)$

$$\left.\begin{array}{l} \deg g_i \geq 1 \\ \&\ g_i | \mu_A \end{array}\right\} \Rightarrow g_i \sim \mu_A$$

In jedem der drei möglichen Fälle wird $\mathcal{E}_A$ eindeutig durch μ_A & χ_A bestimmt!

Also: $\left.\begin{array}{l} \mu_A = \mu_B \\ \chi_A = \chi_B \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B \overset{\text{Frobenius}}{\Longrightarrow} A \approx B$

bekannt.