Analysis 1, Tutorium 5

4.12.2020

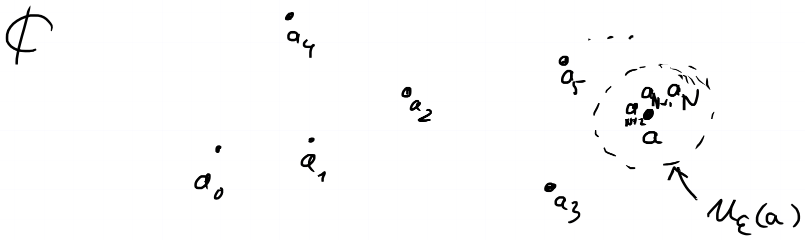
Konvergent

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ Folge komplexer Zahlen heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$

$:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}_0 \ \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$$

in Symbolen: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.



(= offener Kreis vom Radius ε um a)

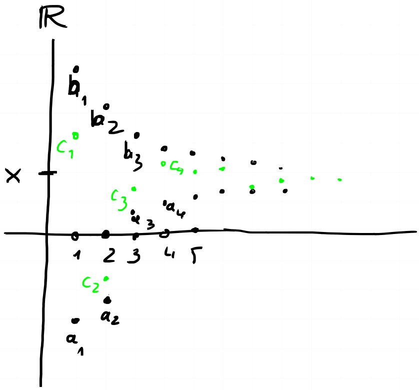
Egal wie klein ε gewählt,
fast alle $\{a_n\}$ liegen in $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ $\quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \varepsilon\}$
(alle bis auf endlich viele)

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}_0 \ \exists n > N : \underbrace{a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)}_{|a_n - a| < \varepsilon}$$

Aufgabe 2 (Sandwichsatz). Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit gemeinsamem Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine weitere Folge. Angenommen,

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N} : a_n \le c_n \le b_n.}$$

Zeige: $c_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.



$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Funktion $\quad n \longmapsto a_n$

Gegeben: $\quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} x \quad , \quad b_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

$\iff$

$$\forall \hat{\varepsilon} > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N : \ |a_n - x| < \tilde{\varepsilon} \qquad (*)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N : \ |b_n - x| < \varepsilon \qquad (**)$$

Z.z.:

$$\cancel{\forall \varepsilon > 0} \ \exists \cancel{N \in \mathbb{N}} \ \forall n > N : \ |c_n - x| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wende $(*)$ auf $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$, um ein $N_* \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N_* : |a_n - x| < \varepsilon/2$ zu finden.

Wende $(***)$ auf $\varepsilon/2$ an, um $N_{***} \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N_{***} : \ |b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sei $N := \max\{N_*, N_{**}\}$.

NR: $|c_n - x|$

$= |c_n - a_n + a_n - x|$

$\le \underbrace{|c_n - a_n|}_{= c_n - a_n \le b_n - a_n} + \underbrace{|a_n - x|}_{< \varepsilon/2}$

Δ-Ugl

$c_n \le b_n \qquad b_n - a_n = |b_n - a_n|$

Es gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} x \overset{\text{Mini-Lemma}}{\Longrightarrow} -a_n \xrightarrow{n\to\infty} -x$

Grenzwertsatz für Produkte $\rightarrow$ $\Downarrow$ $\leftarrow$ die konstante Folge $(-1)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gg -1

$z_n y_n \xrightarrow{n\to\infty} zy$

$\Uparrow$

$z_n \xrightarrow[n]{} z$

$y_n \to y$

$(-1)a_n$

$\downarrow n$

$-1 \cdot \lim_n a_n$

$= -x$

Grenzwertsatz für Summen:

$-a_n \xrightarrow{n\to\infty} -x \qquad b_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

$\Longrightarrow \quad b_n - a_n \xrightarrow{n\to\infty} x - x = 0$

Anders gesagt:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}_0 \ \forall n > N: \quad \underbrace{|(b_n - a_n) - 0|}_{|b_n - a_n|} < \varepsilon$

(***)

Gegeben: $N = \max\{N_*, N_{***}\}$,

$\forall n > N_*: \ |a_n - x| < \varepsilon/2$

$\forall n > N_{***}: \ |b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

Noch zu zeigen:

$\forall n > N: \ |c_n - x| < \varepsilon.$

Sei $n > N$. Dann gilt:

$$|c_n - x| = |(c_n - a_n) + (a_n - x)|$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \Delta-\neq}}{\leq} |c_n - a_n| + |a_n - x|$$
$$\leq \underbrace{|b_n - a_n|}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ \uparrow \\ n > N \geq N_{***}}} + \underbrace{|a_n - x|}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ \uparrow \\ n > N \geq N_{*}}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Mengen A, B.

Notation: $A^B := \{ f : B \to A \text{ Funktion} \}$

$A^2 \overset{?}{=} A \times A$ $\qquad 2 = \{0, 1\}$

$\{\text{Funktionen } \{0,1\} \to A\}$ $\qquad f$

$\updownarrow$ 1:1 $\qquad \downarrow$

$\{(a,b) \in A \times A\} = A \times A$ $\qquad (f(0), f(1))$

Siehe auch: allgemeines kartesisches Produkt

$$\prod_{i \in I} A_i \qquad A_i = A_j, \ \forall i,j \quad \rightsquigarrow \quad A^I$$

$$\| $$

$$\left\{ \text{Funktionen } f : I \to \coprod_{i \in I} A_i, \quad f(i) \in A_i \right\}$$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\text{Funktionen } \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$$

$$= \{\text{Folgen } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit Werten } a_n \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 3. *Aus der GOP des Wintersemesters 2012/2013:*

(a) Definiere für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ und $b \in \mathbb{C}$ die Aussage

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} b.$$

(b) Sei nun

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - i}{\sqrt{n} + i}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $b = 1$. Beweise hierfür die Aussage $a_n \xrightarrow{n\to\infty} b$ direkt mit der Definition aus (a).

(a) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : \; |a_n - b| < \varepsilon$

(b)

NR: $|a_n - b| = \left| \frac{\sqrt{n} - i}{\sqrt{n} + i} - 1 \right| =$

$= \left| \frac{\sqrt{n} - i - (\sqrt{n} + i)}{\sqrt{n} + i} \right| = \left| \frac{-2i}{\sqrt{n} + i} \right| = \frac{2}{|\sqrt{n} + i|}$

$\forall M > 0$

$|\sqrt{n} + i| > M$

$\quad = \sqrt{\sqrt{n}^2 + 1^2} = \sqrt{n+1} > \sqrt{n}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \; a > b \iff a^2 > b^2$

Beh.: $(*)$ $\forall M > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : \; |\sqrt{n} + i| > M$

Beweis von (∗): Sei $M > 0$. Setze (z.B.)

$$N := \lfloor M^2 \rfloor + 1 > M^2.$$

Sei $n > N$. Dann gilt:

$$|\sqrt{n} + i| \underset{\text{NR}}{\geq} \sqrt{n} > \sqrt{N} \underset{\substack{\text{Monotonie}\\ \text{der } \sqrt{\cdot}\text{-Fkt.}}}{>} \sqrt{M^2} = M. \quad \square_{(*)}$$

Bel:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N : |a_n - b| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$. Setze $M := \frac{2}{\varepsilon} > 0$,

$$\frac{2}{M} = \varepsilon \iff M = \frac{2}{\varepsilon} > 0$$

und wende (∗) an,

um ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n > N : |\sqrt{n} + i| > M = \frac{2}{\varepsilon}$$

zu finden.

Sei nun $n > N$. Dann gilt:

$$|a_n - b| = \frac{2}{|\sqrt{n} + i|} \underset{|\sqrt{n}+i| > M}{<} \frac{2}{M} = \frac{2}{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} = \varepsilon. \quad \square$$

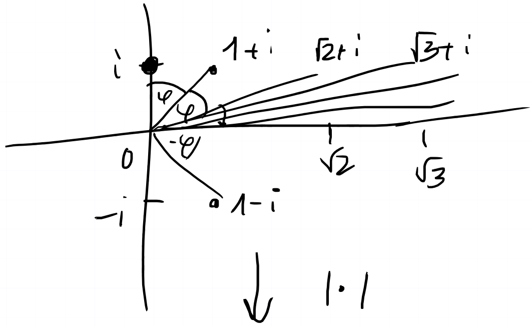
---

klar:

$$\left| \frac{\sqrt{n} + i}{\sqrt{n} - i} \right| \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

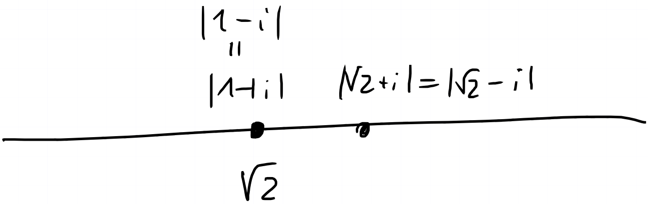
$$\| \\ 1$$

$\mathbb{C}$



$\downarrow \; |\cdot|$

$\mathbb{R}$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad\qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge $\rightsquigarrow$ Teilfolge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$k \mapsto a_{n_k}$$

$$(n_k)_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\left[\; (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \circ (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \; \right]$$

Verknüpfung von Fkt

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k}_{a_n}$$

Teilfolge von $\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\right)_{m\in\mathbb{N}}$

wäre z.B.

$$\Big(\underset{m=1}{1},\ \underset{m=2}{1+\frac{1}{2}},\ \underset{m=4}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}},\ \dots\Big)$$

$m=3$ ausgelassen

Aufgabe 4. (a) Zeige, dass die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. mittels der Definition von Konvergenz

(b) Untersuche das Konvergenzverhalten von $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x \in \mathbb{R}$.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ konvergiert

$\iff \exists a\in\mathbb{R}\ \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N: |a_n-a|<\varepsilon$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert $\iff \forall a\in\mathbb{R}: \neg\big(\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N: |a_n-a|<\varepsilon\big)$

Sei $a\in\mathbb{R}$. Angenommen $(-1)^n \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Setze $\varepsilon=1$ und wähle $N\in\mathbb{N}$ sodass $\forall n>N$:

$|(-1)^n - a| < \varepsilon = 1$.

Sei $n>N$. Dann:

$2 = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |((-1)^n - a) + (a-(-1)^{n+1})|$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ugl.}}}{\leq} \underbrace{|(-1)^n - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a - (-1)^{n+1}|}_{\substack{<\varepsilon \\ \uparrow \\ n+1>n>N}}$$

$$< 2\varepsilon = 2,$$

das ist ein Widerspruch. $(2<2 \Rightarrow \text{↯})$

(b) Fallunterscheidung

Fälle: $x=-1$, $\boxed{|x|>1, \quad |x|<1,}$ $x=1$

siehe (a)

$x^n = 1^n = 1$ konstante Folge

Lemma: $\forall b>1 \ \forall M \in \mathbb{R}: \exists n \in \mathbb{N}: \ b^n > M$

Beweis: Sei $b>1$, $M \in \mathbb{R}$. Mit arch. Axiom finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $(*)$. Dann gilt:

$$b^n = (1 + \underbrace{b-1}_{>0})^n \geq 1 + n(b-1) \overset{!}{>} M.$$

$$\Updownarrow$$

$$n > \frac{M-1}{b-1} \quad (*) \qquad \square$$

Übungsaufgabe: Konvergente Folgen sind beschränkt.

Lemma $\Rightarrow$ $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt $\Rightarrow (x^n)_n$ div.