Funktionentheorie, Tutorium 8

$\frac{f'}{f}$

1. Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchy-Integralformel:

   (i) $\int_{\partial D_2(0)} \frac{dz}{z^2-1}$ und $\int_{\partial D_2(0)} \frac{dz}{z^2+1}$ und $\int_{\partial D_2(0)} \frac{z\,dz}{z^2+1}$ $= \frac{1}{2}\int_{\partial D_2(0)} \frac{(z^2+1)'}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}\, 2\pi i \,\#$ Nullstellen von z^2+1 $= 2\pi i$

   später i.d. VL

   (ii) $\int_{\partial D_1(0)} \frac{e^z}{z}\,dz$ und $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_1(-i)} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz$

   (iii*) $\int_{\partial D_1(3/2)} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\,dz$ und $\int_{\partial D_{3/2}(1)} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\,dz$

   (iv*) Zeigen Sie für $a, b > 0$, daß $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$

   Hinweis: Stellen Sie eine Verbindung her zum Integral der Form $\frac{dz}{z}$ über eine geeignete Ellipse in $\mathbb{C}^*$.

$f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathcal{U}$,
$c : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}\setminus\{a\}$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \nu(c;a)\, f(a)$$

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(a)$$

$$\int_{\partial D_2(0)} \frac{dz}{z^2+1}$$

$$\frac{1}{z^2+1} \overset{!}{=} \frac{f}{z-i} + \frac{g}{z+i}$$

$$\Updownarrow$$

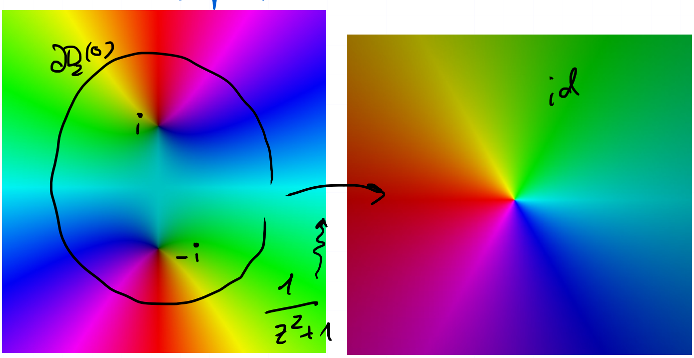
$$1 = (z+i)f + (z-i)g$$
$$= z\underbrace{(f+g)} + \underbrace{if - ig}$$
$$\Rightarrow f = -g \Rightarrow \quad = i2f \overset{!}{=} 1$$
$$f = \frac{-i}{2}$$
$$g = \frac{i}{2}$$

$$\|$$

$$\int_{\partial D_2(0)} \frac{-i/2}{z-i}\,dz + \int_{\partial D_2(0)} \frac{i/2}{z+i}\,dz$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{i}{2} + \frac{i}{2}\right) = 0$$

Cauchy-Integralformel



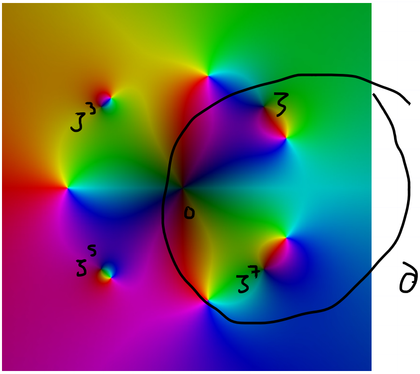
(iii*)

$$\int_{\partial D_1(3/2)} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\,dz \quad , \qquad \int_{\partial D_{3/2}(1)} \cdots$$

Nullstellen von $z^2(z^4+1)$ sind $= 0$ (doppelt)

$$\zeta = e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\underset{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)}{\zeta^3}, \quad \underset{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)}{\zeta^5}, \quad \underset{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)}{\zeta^7}$$



$\partial D_{3/2}(1)$

$$0 \notin D_1\left(\tfrac{3}{2}\right), \quad \left|\zeta^{2k+1} - \tfrac{3}{2}\right|^2 = \underbrace{\left(\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{3}{2}\right)^2}_{\geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-1\right)\right)^2} + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-1\right)}_{>\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\Rightarrow \underset{f(z)}{\frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}}$ ist holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $D_{1+\varepsilon}\left(\frac{3}{2}\right)$, besitzt also eine Stammfunktion

$$\Rightarrow \int_{\partial D_1(3/2)} f(z)\,dz = 0$$

$0 \in D_{\frac{3}{2}}(1) \ni \zeta, \zeta^7$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i) - 1\right| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

$$\Uparrow \quad 2 < \frac{9}{4}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \pm i) - 1\right| = \sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2}}_{> \frac{1}{4}}} > \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)} = \frac{\alpha_1}{z^2} + \frac{\alpha_2}{z} + \frac{\alpha_3}{z-\zeta} + \frac{\alpha_4}{z-\zeta^3} + \frac{\alpha_5}{z-\zeta^5} + \frac{\alpha_6}{z-\zeta^7}$$

nicht intersessant

$\alpha_3(\zeta)$

$\alpha_6(\zeta^7)$

$$\alpha_1(0) = (z^7+1)(0) = 1$$

$$\alpha_2(0) = \left(\frac{z^7+1-\alpha_1}{z}\right)(0) = -\left(\frac{\alpha_1 - 1}{z}\right)(0) = -\alpha_1'(0)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int \frac{\alpha_1(z)}{z^2}\,dz + \int \frac{\alpha_2(z)}{z}\,dz\right)$$

$$= \alpha_1'(0) + \alpha_2(0) = 0$$

$$\alpha_3(\zeta) = \left(\frac{z^7+1}{z^2 \dfrac{z^4+1}{z-\zeta}}\right)(\zeta),$$

wobei $\dfrac{z^4+1}{z-\zeta} = (z-\zeta^3)(z-\zeta^5)(z-\zeta^7)$

& analog für $\alpha_6(\zeta^7)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{3/2}(1)} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left(\int \frac{\alpha_3}{z-\zeta}\,dz + \int \frac{\alpha_6}{z-\zeta^7}\,dz\right)$$

$$= \alpha_3(\zeta) + \alpha_6(\zeta^7) =$$

$$= \frac{\zeta^7+1}{\zeta^2(\zeta-\zeta^3)(\zeta-\zeta^5)(\zeta-\zeta^7)} +$$

$$+ \frac{\zeta^{49}+1}{\zeta^{14}(\zeta^7-\zeta)(\zeta^7-\zeta^3)(\zeta^7-\zeta^5)}$$

$$= \frac{\zeta^5+\zeta^6+\zeta^{49-8}+1}{(\zeta-\zeta^3)(\zeta-\zeta^5)(\zeta-\zeta^7)}$$

$$= \frac{\zeta^5+\zeta^6+\zeta+1}{\underbrace{(\zeta-\zeta^3)}_{\sqrt{2}}\underbrace{(\zeta-\zeta^5)}_{\sqrt{2}(1+i)}\underbrace{(\zeta-\zeta^7)}_{\sqrt{2}i}} = \frac{1-i}{2\sqrt{2}(1+i)i}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\zeta^6+1 = 1-i$$

$$\zeta+\zeta^5 = 0$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D_{3/2}(1)} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\,dz = -\frac{2\pi i}{2\sqrt{2}} = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$$

3. *Fundamentalsatz der Algebra (topologisches Argument mit der Umlaufzahl).* Es sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geqslant 1$.

(i) Es existiert $r_0 > 0$, so daß alle Nullstellen von P in der Scheibe $D_{r_0}(0)$ liegen.

(ii*) Die Schleifen $c_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ gegeben durch $c_r(t) = P(re^{it})$ für $r \geqslant r_0$ haben Umlaufzahl $\nu(c_r; 0) = n$.

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{c_r}{r^n}$ für $r \to \infty$.

(iii) $P(z)$ hat eine Nullstelle.

Hinweis: Sonst wären die Schleifen c_r in $\mathbb{C}^*$ nullhomotop.

(i) Wähle $r_0 > \max \underbrace{\{ |x| \mid P(x) = 0, \; x \in \mathbb{C} \}}_{\text{endliche Menge}}$.

(ii*) Suche Homotopie $H : [0,2\pi] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^\times$

$$H(\cdot, 0) = c_r,$$
$$H(\cdot, 1) = r^n e^{int}$$

z.B. $H(t,s) = (1-s)^n \underbrace{P\left(\frac{r}{1-s} e^{it}\right)}_{c_{r/1-s}}$

$$= r^n e^{int} + a_{n-1}(1-s) r^{n-1} e^{i(n-1)t} + \ldots + a_0 (1-s)^n$$

ist stetig.

Bild $(H) \subseteq \mathbb{C}^\times$:

$$(1-s)^n P\left(\tfrac{r}{1-s} e^{it}\right) = H(t,s) = 0 \underset{s \neq 1}{\Longrightarrow} P\left(\frac{r}{1-s} e^{it}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{r}{1-s} e^{it} \right| < r_0$$

$$\parallel$$

$$\frac{r}{1-s} > r \quad ↯$$

$$\nu(c_r; 0) = \nu(H(\cdot, 0); 0) = \nu(H(\cdot, 1), 0)$$
$$= \nu(t \mapsto r^n e^{int}, 0) = n$$

(iii) $t \mapsto re^{it}$ ist nullhomotop in $\mathbb{C}$

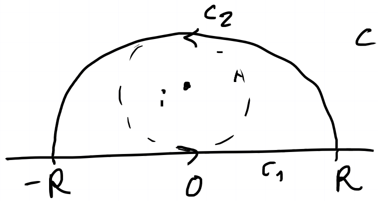
$\Rightarrow \quad c_r = P \circ (t \mapsto re^{it})$ nullhomotop in $P(\mathbb{C})$

Falls $P(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^\times$, so $0 = \nu(c_r ; 0) = n$. ↯

↑ P hat keine Nullstelle

□

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2}$$



$c = c_1 c_2$

$$\int_c \frac{dz}{1+z^2} = \int_c \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}\,dz = 2\pi i \, \frac{1}{2i} = \pi$$

Blatt 5? Aufgabe 4

$$\left|\int_{c_2} \frac{dz}{1+z^2}\right| \le \frac{1}{R^2-1} \overbrace{L(c_2)}^{\pi R} = \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

↖ Länge

$$\left|\frac{1}{1+z^2}\right| \le \frac{1}{R^2-1}$$

$$|1+z^2| \geq R^2 - 1$$

$$\int_c \frac{dz}{1+z^2} = \pi$$

$$\| $$

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{c_2} \frac{dz}{1+z^2} \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

4. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat *polynomielles Wachstum* vom Grad $\leqslant n$, falls

$$|f(z)| \leqslant C(1 + |z|^n)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit einer Konstante $C > 0$. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Satzes von *Liouville*:

Ganze Funktionen mit polynomiellem Wachstum sind Polynome.

Hinweis: Wenden Sie die Cauchy-Abschätzungen für die Ableitungen holomorpher Funktionen auf eine hinreichend hohe Ableitung der Funktion an.

Cauchy-Abschätzungen: $f : U \to \mathbb{C}$ hol.

$\overline{D_r(z_0)} \subseteq U$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max |f|_{\partial D_r(z_0)}|$

Hier $U = \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ beliebig.

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leq \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \max_{z \in \partial D_r(z_0)} |f(z)|$$

$$\leq \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \max_{z \in \partial D_r(z_0)} C(1 + |z|^n) \leq (n+1)!\, C \underbrace{\frac{1 + (r + |z_0|)^n}{r^{n+1}}}_{\xrightarrow[r \to \infty]{} 0}$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(z_0) = 0 \overset{z_0 \text{ bel.}}{\Rightarrow} f^{(n+1)} = 0$$

$\Rightarrow f$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$. $\square$

2. *Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.* Ist $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{D_r(0)} \subset U$ und $u : U \to \mathbb{R}$ harmonisch, so gilt

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it})dt.$$

Hinweis: Zurückführen auf die Mittelwerteigenschaft für holomorphe Funktionen.

$\delta := \operatorname{dist}(\underbrace{\overline{D_r(0)}}_{\text{kompakt}}, \underbrace{\mathbb{C}\setminus U}_{\text{abg}}) > 0$

disjunkt

$\| \inf \{|x-y| \mid x \in \overline{D_r(0)}, y \in \mathbb{C}\setminus U\}$

$\Rightarrow \tilde{U} := D_{r+\frac{\delta}{2}}(0) \subseteq U$ einfach zshgd.

$\xRightarrow{\text{alte Übungsaufg.}} f : \tilde{U} \to \mathbb{C}$ hol., $Re(f) = u$

$\xRightarrow{\text{Mittelwerteigenschaft}} f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})dt$

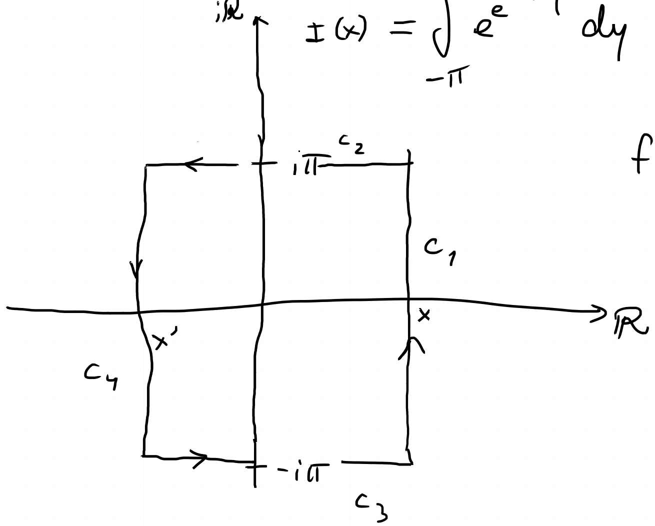
$\Rightarrow u(0) = Re(f(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re(f(re^{it}))dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it})dt.$

$\square$

$$I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{x+iy}}\, dy \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$f(z) = e^{e^z}$$



$$\int_{c_2} f(z)\,dz = \int_x^{x'} e^{e^{t+\pi i}}\, dt = \int_x^{x'} e^{e^{t-\pi i}}\, dt$$

$t \mapsto t+\pi i$

$d(t+\pi i) = dt$

$$= -\int_{x'}^{x} e^{e^{t-\pi i}}\, dt = -\int_{c_3} f\,dz$$

$$0 = \int_c f\,dz = \left(\int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + \int_{c_4}\right) f\,dz$$

$\uparrow$ f holomorph & $\mathbb{C}$ einfach zshgd

$$= \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_4} f(z)\,dz$$

$$= i\,I(x) - i\,I(x')$$

$y \mapsto x+iy$

$d(x+iy) = i\,dy$

$$\Longrightarrow \quad I(x) = I(x') \underset{x'=0}{=} I(0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{iy}}\, dy$$

$$\|$$

$$2\pi \underset{\uparrow}{=} -i \int_{\partial D_1(0)} \frac{e^z}{z}\, dz$$

Cauchy-Integralsatz

$$i f(e^{iy})\, dy$$

$$\|$$

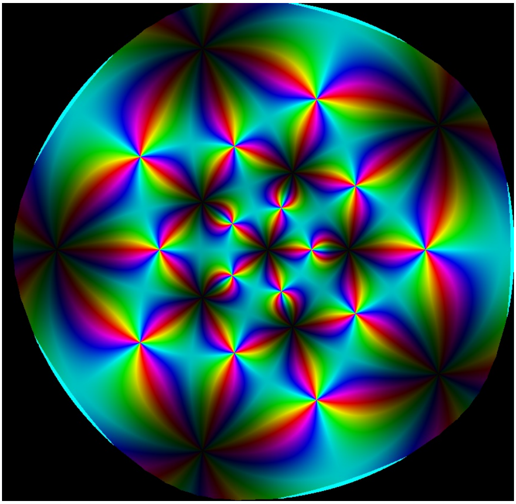
$$(y \mapsto e^{iy})^* \left(\frac{f\, dz}{z} \right)$$

$$[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$$

[Zusätzliche Anmerkung (nach dem Tutorium)

Komplexe Funktionen skizzieren:

z.B. people.ucsc.edu/~wbolden/complex/#z



(Klein's Ikosaedesquotient:

$$z \mapsto \frac{\left(-(z^{20}+1)+228(z^{15}-z^{5})-494z^{10}\right)^{3}}{\left(1728\, z\,(z^{10}+11z^{5}-1)\right)^{5}}$$

Polstellen = schwarz = 12 Ecken des Ikosaeders (eine Polstelle bei ∞)

Nullstellen = weiß = 20 Mittelpunkte der Kanten des Ikosaeders)]