Analysis 1 – Tutorium 11
robin.mader@campus.lmu.de
5.2.2021

Aufgabe 1 (Gegenbeispiel zur Vertauschung von uneigentlichem Integral und Grenzwert bei gleichmäßiger Konvergenz)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$f_n \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}.$$

Zeige: $f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n\to\infty} 0$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = 1$.

Aufgabe 2. Gegeben $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$, berechne

$$\sum_{n=1}^\infty n^2 x^n, \quad \sum_{n=1}^\infty n^3 x^n, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}.$$

Aufgabe 3. (a) Zeige mit partieller Integration für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} & \text{falls } n = 2k \\ \frac{4^k}{2k+1}\binom{2k}{k}^{-1} & \text{falls } n = 2k+1 \end{cases}$$

(b) Berechne

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

auf zwei verschiedene Weisen:

1. mittels der Substitution $u = \arcsin x$,
2. mit der Reihenentwicklung

   $$\arcsin x = \sum_{k=0}^\infty \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

   und (a).

Folgere durch einen Vergleich der Ergebnisse aus 1. und 2. die Lösung des *Basler Problems*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 4 (Landau-Ungleichung)**.** Es seien $K_0, K_2 \in [0, \infty[$ und $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbar, sodass

$$\forall x \in [0, \infty[\colon |f(x)| \le K_0 \wedge |f''(x)| \le K_2.$$

Folgere aus der Integraldarstellung des Restgliedes in der Taylorformel für f, dass dann gilt:

$$|f'(x)| \le 2\sqrt{K_0 K_2}.$$

Aufgabe 5. Berechne die Ableitung der Riemannschen Zeta-Funktion

$$\zeta\colon \,]1,\infty[\to \mathbb{R}, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$