Analysis 1 – Übungsaufgaben zur Euler-Substitution
robin.mader@campus.lmu.de
2.2.2021

Die folgenden Aufgaben sind zur Einübung von Euler-Substitutionen (in Verbindung mit anderen Integrationsmethoden) gedacht. Es wird nicht garantiert, dass die hier gewählten Methoden optimal zur Berechnung der angegebenen Integrale sind. Verwende zur Überprüfung der Ergebnisse ein Computeralgebrasystem, z.B. `www.wolframalpha.com`.

Aufgabe 1. Berechne die Integrale

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} \quad \text{und} \quad \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x}}dx.$$

Hinweis: Gehe zum Beispiel wie folgt vor:
Betrachte die Kurve $C\colon y^2 = x(x-1)$, $C \subset \mathbb{R}^2$, und die Gerade $g = (1,0) + \mathbb{R}(0,1)$. Gegeben $P = (x, \sqrt{x(x-1)}) \in C$, $x > 1$, bestimme die Koordinaten des Punktes $Q = (s,t)$ mit $\{Q\} = (\mathbb{R}P) \cap g$. Verwende nun die Substitution $x \rightsquigarrow t$.

Aufgabe 2. Berechne

$$\int_0^1 \frac{2dx}{x + \sqrt{4-3x^2}}.$$

Hinweis: Betrachte zum Beispiel die Kurve $K\colon y^2 - xy + x^2 - 1 = 0$. Setzt man für y das multiplikative Inverse des Integranden ein, so wird (x,y) ein Punkt auf K. Betrachte die Gerade $l = \mathbb{R}(1,0)$, d.h. die reelle x-Achse, und setze $P_0 = (0,-1) \in K$. Gegeben $P = (x,y) \in K$, $y > 0$, sei $t \in \mathbb{R}$ so, dass $Q = (t,0)$ der Schnittpunkt der Geraden durch P und P_0 mit l wird. Verwende nun die Substitution $x \rightsquigarrow t$.
Führe alternativ eine zur Kurve $k : y^2 = 4 - 3x^2$ gehörige Euler-Substitution durch.