Analysis 3 – Quiz zur Vorlesungswiederholung
robin.mader@campus.lmu.de
8.2.2023

Gelten die folgenden Aussagen? Begründe deine Behauptungen.

#	Aussage	Ja	Nein	Begründung
1	Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt für Lebesgue-fast alle $x \in [0,1]$: $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{y\in[0,x]} \lvert f(y)\rvert$.	☐	☐	
2	Für f wie eben ist die Funktion $]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{[0,x]} f(y)dy$, fast überall differenzierbar.	☐	☐	
3	Die Menge der Lebesgue-messbaren Mengen in $\mathbb{R}^N$ ist eine σ-Algebra.	☐	☐	
4	Wenn $\lambda^*(E) = 0$ für $E \subset \mathbb{R}^N$, dann ist E Lebesgue-messbar.	☐	☐	
5	Eine nichtleere offene Menge im $\mathbb{R}^N$ hat positives Lebesgue-Maß.	☐	☐	
6	Die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist Riemann-integrierbar.	☐	☐	
7	Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht integrierbar. Dann ist $f+g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht integrierbar.	☐	☐	
8	Überabzählbare Lebesgue-Mengen haben positives Lebesgue-Maß.	☐	☐	
9	Die Menge der Maße auf einem messbaren Raum bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.	☐	☐	
10	Es gibt eine Lebesgue-messbare Menge $E \subset \mathbb{R}$ mit $\lvert E\rvert = \infty$, auf der die Funktionenfolge $(\mathbb{1}_{[n,n+1]})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.	☐	☐	
11	Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ messbar. Für alle Kurven (d.h., 1-dim. Untermannigfaltigkeiten) $C \subset \mathbb{R}^2$ sei $A \cap C$ abzählbar. Dann gilt: $\lvert A\rvert = 0$.	☐	☐	
12	Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge messbarer Funktionen. Dann gilt: $\{\omega \in \Omega \mid (f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\} \in \mathcal{A}$.	☐	☐	

#	Aussage	Ja	Nein	Begründung
13	Sei $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar. Dann ist $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|[0,x] \cap E\|$, messbar.	☐	☐	
14	Seien $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ Borel- und $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ Lebesgue-messbare Funktionen. Dann ist $f \circ g$ Lebesgue-messbar.	☐	☐	
15	Für f und g wie eben ist $g \circ f$ Lebesgue-messbar.	☐	☐	
16	Auf jedem nichtleeren messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ existieren zwei verschiedene Maße.	☐	☐	
17	Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) = 1$, und seien $A_1, A_2, \ldots, A_7 \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_i) \geq \frac{1}{2}$ für alle $1 \leq i \leq 7$. Dann gibt es $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 7$ mit $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \neq \emptyset$.	☐	☐	
18	$L^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.	☐	☐	
19	Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt: $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ existiert $\Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}\colon \int_{[-r,r]} f d\lambda$ existiert.	☐	☐	
20	Sei $A \subset [0,1]$ Lebesgue-messbar mit $\|A\| > 0$. Dann gibt es $x, y \in A$ mit $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.	☐	☐	

Folgende Aufgaben stammen von der künstlichen Intelligenz „ChatGPT“.

#	Aussage	Ja	Nein	Begründung
21	Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Dann: $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.	☐	☐	
22	Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ stetig differenzierbar. Dann ist die Fouriertransformierte $\hat{f}$ differenzierbar.	☐	☐	
23	Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. Definiere eine Äquivalenzrelation auf Ω durch $A \sim B :\Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{A}\colon\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset N$, $\mu(N) = 0$. Dann gilt: $\|\Omega/\sim\| < \infty$.	☐	☐	

Folgende Aufgaben stammen aus dem Buch „Counterexamples in Measure and Integration“.

#	Aussage	Ja	Nein	Begründung
24	Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-additiv. Angenommen, es gibt $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$. Dann ist μ ein Maß.	☐	☐	
25	Es gibt eine stetiges $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, sodass das Bild $f([0,1])$ Lebesgue-messbar mit $\|f([0,1])\| > 0$ ist.	☐	☐	