Analysis 1 – Tutorium 1
robin.mader@campus.lmu.de
6.11.2020

Aufgabe 1 (Aussagenlogik, Wahrheitstabellen)**.** (a) Es seien A, B, C Aussagen. Zeige, dass es sich bei folgenden Formeln um Tautologien handelt:

(i) Beweis einer Disjunktion (Aktivierungselement 1.7):

$$((C \Rightarrow A) \vee (\neg C \Rightarrow B)) \Rightarrow A \vee B,$$

(ii) Formel von Peirce:

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A,$$

(iii) Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

(b) Aktivierungselement 1.8: Seien A, B Aussagen. Zeige: $\neg(A \Rightarrow B)$ und $A \wedge \neg B$ sind gleichwertig.
(c) Für Aussagen A, B, C sind die Formeln $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ und $A \wedge B \Rightarrow C$ gleichwertig.

Aufgabe 2 (Beispiele zu Mengenoperationen und Funktionen)**.**
(a) Aktivierungselement 1.11: Gegeben seien die Mengen $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{2, 3, 4\}$. Berechne $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$ und $M \triangle N$.
(b) Aktivierungselement 1.12: Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5, 6\}$ und eine Abbildung $f : A \to B$, definiert durch $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 5$.

1. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv?

2. Schreibe f als Teilmenge von $A \times B$.

3. Berechne das Bild $f[\{2, 3\}]$ und das Urbild $f^{-1}[\{5, 6\}]$.

Aufgabe 3 (Prädikatenlogik)**.** (a) Aktivierungselement 1.10: Betrachte den prädikatenlogischen Ausdruck

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Formuliere das Gegenteil dieses Ausdrucks.
(b) Es sei M eine Menge. Formuliere mit Hilfe der Existenz- und Allquantoren (und "$\in M$"), der Junktoren und "$=$" die folgenden Aussagen:

(i) Es gibt mindestens drei verschiedene Elemente in M.

(ii) Es gibt genau drei verschiedene Elemente in M.

Aufgabe 4.

(a) Rechtskürzbarkeit von Surjektionen: Es seien X, Y, Z Mengen, und $f : Y \to Z$, $g : Y \to Z$, $s : X \to Y$ Abbildungen. Angenommen, s ist surjektiv. Beweise die Implikation

$$f \circ s = g \circ s \implies f = g.$$

(b) Linkskürzbarkeit von Injektionen: Wieder seien X, Y, Z Mengen. Diesmal betrachten wir Abbildungen $f : X \to Y$, $g : X \to Y$, $i : Y \to Z$. Angenommen i ist injektiv. Zeige

$$i \circ f = i \circ g \implies f = g.$$

Aufgabe 5 (Relationen, Quotienten)**.**

(a) Aktivierungslement 1.14: Es sei $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, und die Relation $\sim \subseteq M \times M$ definiert durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad 3 \text{ teilt } x - y.$$

Wir nehmen ohne Beweis an: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

1. Schreibe $M/\sim$ als Menge in aufzählender Notation.
2. Es sei $f : M \to M/\sim$ die kanonische Abbildung. Schreibe $f(1)$ als Menge in aufzählender Notation.

(b*) Injektiv-machen mittels Faktorisieren durch den Quotienten: Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von Mengen X und Y. Definiere eine Relation $\sim \subseteq X \times X$ durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Zeige:

1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
2. Die Abbildung
$$\overline{f} : X/\sim \to Y, \quad [x]_\sim \mapsto f(x)$$
ist wohldefiniert, und injektiv.

*Die Bearbeitung einer mit * versehenen Aufgabe sollte erst nach dem Lösen der übrigen Aufgaben erfolgen.