Analysis Tutorium 10

Aufgabe 1 (Allgemeine Fakten zu σ-Algebren). (a) Zeigen Sie: Jede σ-Algebra hat entweder endlich oder überabzählbar unendlich viele Elemente.

(b) Sei $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine strikt monoton wachsende Folge von σ-Algebren auf einer Menge Ω. Zeigen Sie, dass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n$$

im Allgemeinen keine σ-Algebra ist.

(a) Das war eine Bonusaufgabe bei uns! (Glaube ich) Blatt 3!

Angenommen, $\mathcal{A}$ abzählbar (endlich oder unendlich)

$$\Longrightarrow \forall x\in\Omega: \quad B(x) = \bigcap_{\substack{B\in\mathcal{A}:\\ x\in B}} B \in \mathcal{A}$$

und das induziert eine Äquivalenzrelation auf Ω:

$$x \sim y \iff B(x) = B(y).$$

wie im endlichen Fall (Blatt 3, Aufgabe 2) $\Longrightarrow$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{1:1} 2^{\Omega/\sim}$$

Das ist entweder endlich oder überabzählbar!

$$A \longmapsto \{[x]_\sim \mid x\in A\}$$

$$\bigcup_{x:[x]_\sim\in I} B(x) \longleftarrow I$$

(b) $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \langle 2^{\{1,\dots,n\}}\rangle^\sigma = 2^{\{1,\dots,n\}} \sqcup \{\mathbb{N}\setminus A \mid A\in 2^{\{1,\dots,n\}}\}$

$\cong 2\times 2^{\{1,\dots,n\}}$ eine endliche Menge

Aber: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ ist abzählbar unendlich $(\mathcal{A}_n \subsetneq \mathcal{A}_{n+1})$,

daher nach (a) keine σ-Algebra.

Aufgabe 2 (Messbare Funktionen sind nahezu stetig). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar. Zeigen Sie: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \subset [a,b]$, so dass $\lambda(K^c) < \varepsilon$ und $f|_K$ stetig ist. Sie können wie folgt vorgehen:

(a) Reduzieren Sie mit $[a,b] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{|f| \le n\}$ und der Stetigkeit des Maßes die Aussage auf den Fall, dass f integrierbar ist.

(b) Approximieren Sie f punktweise durch eine Folge stetiger Funktionen $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und verwenden Sie den Satz von Egoroff (Übungsblatt 4, Aufgabe 4).

2

1.: $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f| \le n\}$ ist klar $(f(x) \neq \infty \ \forall x \in [a,b])$

2.: $\lambda(\{|f| > N\}) = \underbrace{\lambda([a,b])}_{\neq \infty} - \underbrace{\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{N} \{|f| \le n\}\right)}_{\xrightarrow[\sigma\text{-Stetigkeit von unten}]{N\to\infty} \lambda([a,b])} \xrightarrow{N\to\infty} 0$

Also: Sei $\varepsilon > 0$, und $N \in \mathbb{N}$ mit $\lambda(\{|f| > N\}) < \varepsilon/3$.

3.: Schneide zu große $|f|$-Werte ab: $g := f \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \le N\}}$

4.: g ist integrierbar!

$$\int_{[a,b]} |g| \, d\lambda \le \int_{[a,b]} N \, d\lambda = N(a-b)$$

5.: Approximation in L^1 durch Stetige:

Proposition 2.23. *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $1 \le p < \infty$, $f \in \mathcal{L}^p(U)$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $g \in C_c(U)$ mit $\|g - f\|_{L^p} \le \epsilon$.*

} im Skript kurz vor Fubini

$\Rightarrow \exists (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a,b])$: $\|g_n - g\|_{L^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

6.: Approximation fast überall:

Satz 2.19. *(Vollständigkeit von L^p) Sei (f_j) eine L^p-Cauchy-Folge. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{L}^p$, so dass $f_j \to f$ in L^p.*
Außerdem gibt es eine Teilfolge (f_{j_k}) mit $f_{j_k} \to f$ f.ü.

$g_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} g$ fast überall.

7.: Satz von Egoroff (Eropob)

$\exists A \subseteq [a,b]$ messbar mit

$g_{n_j} \mathbb{1}_A \xrightarrow[j\to\infty]{} g \mathbb{1}_A$ gleichmäßig,

und $\lambda([a,b] \setminus A) < \varepsilon/3$.

Aufgabe 4 (Punktweise Konvergenz von Funktionen ist fast gleichmäßig).
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Ein Maßraum wird *endlich* genannt, wenn $\mu(\Omega) < \infty$. Weiter seien $f_n : \Omega \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, und f $\mathfrak{A}$-messbare Funktionen, sodass $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$ mit $N \in \mathfrak{A}$ und $\mu(N) = 0$. $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ $f_n \to f$ f.ü.

(a) Zeigen Sie, dass $\Omega_{k,l} := \{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ für alle $n \ge l\}$ mit $k, l \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{A}$-messbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ ein $l_\varepsilon(k) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $l \ge l_\varepsilon(k)$ gilt

$$\mu(\Omega_{k,l}^c) < 2^{-k}\varepsilon.$$

(c) Zeigen Sie: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Menge $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A_\varepsilon^c) < \varepsilon$, sodass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A_ε gleichmäßig gegen f konvergiert.

3

8.: Insbesondere: $g_{n_j} \mathbb{1}_{A \cap \{|f| \le N\}} \xrightarrow{j \to \infty} g \mathbb{1}_{A \cap \{|f| \le N\}} = f \mathbb{1}_{A \cap \{|f| \le N\}}$

9.: $\exists K \subseteq A \cap \{|f| \le N\}$ kompakt mit $|A \cap \{|f| \le N\}| \le |K| + \varepsilon/3$

$$(\lambda(E) = \sup \{ |K| \mid K \subseteq E \text{ kompakt} \})$$

10: Fertig: $g_{n_j} \mathbb{1}_K \xrightarrow[j]{} f \mathbb{1}_K$ gleichmäßig $\Rightarrow$ $f \mathbb{1}_K$ stetig,

in $[a,b]$

und: $|K^c| = b-a-|K| \le b-a-|A \cap \{|f| \le N\}| + \varepsilon/3$

$$\le \underbrace{(b-a-|A|)}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{(b-a-\{|f| \le N\})}_{<\varepsilon/3} + \varepsilon/3 < \varepsilon.$$

$$\boxed{\begin{aligned}&[a,b] \setminus (A \cap \{|f| \le N\}) \\ &= ([a,b] \setminus A) \cup ([a,b] \setminus \{|f| \le N\})\end{aligned}}$$

Aufgabe 3 (Lebesgue-messbare Funktionen sind fast Borel-messbar).
Sei $f\colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-messbare Funktion. Zeigen Sie: es existiert eine Borel-messbare Funktion $g\colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f = g$ fast überall.

4

Mit maßtheoretischer (Lebesgue-) Induktion:

1.: Sei A Lebesgue-messbar. Zz: $\exists g$ Borel-m.b.: $\mathbb{1}_A = g$ f.ü.

Nach Vorlesg $\exists$ $\underbrace{F_\sigma\text{-Menge } B \subseteq A}_{\text{Borel-messbar!}}$ mit $|A \setminus B| = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbb{1}_B$ ist Borel-m.b.

& $\{\mathbb{1}_A \neq \mathbb{1}_B\} = A \setminus B$ hat Maß $= 0$.

$\Rightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \; (=: g)$ f.ü.

2.: Abgeschlossenheit unter Skalaren: f Leb.-m.b., g Borel-m.b., $f = g$ f.ü.

$\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: $\alpha f = \alpha g$ f.ü. & αg ist Borel-m.b.

— " —————— Summen: f_i Leb., g_i Borel, $f_i = g_i$ f.ü., $i = 1,2$

$\Rightarrow f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ f.ü. (klar)

1.+2. $\Rightarrow$ die Aussage gilt für einfache Fkt.

3.: Abgeschlossenheit unter aufsteigenden Limiten:

$f_n \nearrow f$, g_n Borel. m.b., $f_n = g_n$ f.ü.

(f_n, f: Lebesgue-m.b.)

$g := \limsup\limits_{n \to \infty} g_n$ ist Borel-m.b.

$$M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{f_n \neq g_n\}}_{\subseteq N_n \text{ Nullmenge}} \subseteq \overbrace{\bigcup_n N_n}^{\text{abz. Vereinigg}} =: N \text{ Nullmenge}$$

& auf $M^c = \bigcap_n \{f_n = g_n\}$ gilt:

$$g = \limsup_n g_n = \limsup_n f_n = \lim_n f_n = f.$$

4. Positiv und Negativteil: f Leb.-m.b.. Für $f_\pm$ $\exists g_\pm$ -Borel. m.b., $f_\pm = g_\pm$ f.ü.

$$\Rightarrow f = f_+ - f_- = \underbrace{g_+ - g_-}_{\text{Borel-m.b.}} \text{ f.ü.}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 4 (Beispiel eines winkelabhängigen Integranden). Zeigen Sie per Induktion, dass

$$I_{m,n} := \int_0^\pi \cos^{2m}(x)\sin^n(x)dx = \frac{(2m-1)!!(n-1)!!}{(n+2m)!!}(2\mathbb{1}_{n\in 2\mathbb{N}-1} + \pi\mathbb{1}_{n\in 2\mathbb{N}}) \tag{2}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Hierbei ist die Doppelfakultät $k!!$, $k \in \mathbb{N}$, eine Notation für alle ganzen Zahlen zwischen 1 und k, die die gleiche Parität wie k haben. Zum Beispiel $7!! = 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$ oder $10!! = 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$. Weiter sind $0!! = (-1)!! = 1$ definiert. Zeigen Sie mit Hilfe dieses Integrals und Polarkoordinaten, dass

$$\int_{\mathbb{R}^N\cap\{|x|\le 1\}} \left(\frac{x_N}{|x|}\right)^{2m} dx = \tau_N \frac{(2m-1)!!(N-2)!!}{(N+2m-2)!!}.$$

Erinnerung: $x_N = r\cos\theta_{N-2}$ in Polarkoordinaten.

Zuerst $I_{m,n} = \int_0^\pi \cos^{2m}x \sin^n x\, dx = \underbrace{\left[\cos^{2m-1}x \sin^n x \sin x\right]_{x=0}^{\pi}}_{0} +$

$$- \int_0^\pi \sin x \Big((2m-1)\cos^{2m-2}x\,(-\sin x)\sin^n x + n\sin^{n-1}x\,(\cos x)\cos^{2m-1}x \Big) dx$$

$$= (2m-1)\int_0^\pi \cos^{2m-2}x \sin^{n+2}x\, dx - n\int_0^\pi \sin^n x \cos^{2m}x\, dx$$

$$= (2m-1) I_{m-1,n+2} - n I_{m,n} \iff I_{m,n} = \frac{2m-1}{n+1} I_{m-1,n+2}$$

$$\Rightarrow I_{m,n} = \frac{2m-1}{n+1} I_{m-1,n+2} = \frac{2m-1}{n+1}\,\frac{2m-3}{n+3} I_{m-2,n+4} =$$

$$= \dots = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots(2(m-m+1)-1)}{(n+1)(n+3)\cdots(n+2m-1)} I_{0,n+2m}$$

$$= \frac{(2m-1)!!\,(n-1)!!}{(n+2m-1)!!} I_{0,n+2m}.$$

Es bleibt also noch $I_{0,k} = \int_0^\pi \sin^k x\, dx = \overbrace{\left[-\cos x \sin^{k-1}x\right]_0^\pi}^{=0} +$

$$+ \int_0^\pi \underbrace{\cos^2 x}_{=(1-\sin^2 x)} (k-1)\sin^{k-2}x\, dx =$$

$$= (k-1)\left(I_{0,k-2} - I_{0,k}\right)$$

$$\iff I_{0,k} = \frac{k-1}{k} I_{0,k-2} = \frac{k-1}{k}\,\frac{k-3}{k-2} I_{0,k-4} = \dots$$

$$= \frac{(k-1)!!}{k!!}\begin{cases} I_{0,0} = \pi & \text{falls } k \text{ gerade} \\ I_{0,1} = [-\cos x]_0^\pi = 2 & \text{falls } k \text{ ungerade}\end{cases}$$

$$= \frac{(k-1)!!}{k!!}\left(\pi \mathbb{1}_{\{2|k\}} + 2\mathbb{1}_{\{2\nmid k\}}\right)$$

6

Also insgesamt: $I_{m,n} = \frac{(2m-1)!!\ (n-1)!!}{(n+2m-1)!!} I_{0,n+2m} =$

$$= \frac{(2m-1)!!\ (n-1)!!}{(n+2m-1)!!} \frac{(n+2m-1)!!}{(n+2m)!!} \left(\pi \mathbb{1}_{\{2|n\}} + 2\mathbb{1}_{\{2\nmid n\}}\right)$$

$$= \frac{(2m-1)!!\ (n-1)!!}{(n+2m)!!} \left(\pi \mathbb{1}_{\{2|n\}} + 2\mathbb{1}_{\{2\nmid n\}}\right),$$

wie gewünscht.

$$\int_{\mathbb{R}^N \cap \{|x|\le 1\}} \left(\frac{x_N}{|x|}\right)^{2m} dx = \tau_N \frac{(2m-1)!!(N-2)!!}{(N+2m-2)!!}.$$

Erinnerung: $x_N = r\cos\theta_{N-2}$ in Polarkoordinaten.

Offenbar $\int_{\{|x|\le 1\}} \left(\frac{x_N}{|x|}\right)^{2m} dx = \frac{2\pi}{N} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \cos^{2m}\theta_{N-2} \prod_{i=1}^{N-2} \sin^i(\theta_i)\, d\theta_i$

$$\int_0^1 r^{N-1}\, dr = \left[\frac{1}{N} r^N\right]_0^1 = \frac{1}{N}, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$= \tau_N \frac{\int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \cos^{2m}\theta_{N-2} \prod_{i=1}^{N-2} \sin^i(\theta_i)\, d\theta_i}{\int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \prod_{i=1}^{N-2} \sin^i(\theta_i)\, d\theta_i}$$

$$= \tau_N \frac{\int_0^\pi \cos^{2m}\theta_{N-2} \sin^{N-2}\theta_{N-2}\, d\theta_{N-2}}{\int_0^\pi \sin^{N-2}\theta_{N-2}\, d\theta_{N-2}}$$

$$= \tau_N \frac{I_{m,N-2}}{I_{0,N-2}} = \tau_N \frac{\frac{(2m-1)!!\ (N-3)!!}{(N+2m-2)!!}}{\frac{(N-3)!!}{(N-2)!!}}$$

$$= \tau_N \frac{(2m-1)!!\ (N-2)!!}{(N+2m-2)!!}$$

7

Aufgabe 5 (Poisson-Kern)**.** Es sei $N \geq 2$. Im Folgenden betrachten wir

$$\mathbb{R}^N_+ := \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}, \quad \partial\mathbb{R}^N_+ := \mathbb{R}^{N-1}.$$

Die Funktion

$$K\colon \mathbb{R}^N_+ \times \partial\mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}, \quad K(x,y) := \frac{2x_N}{N\tau_N} \frac{1}{|x-(y,0)|^N}$$

heißt *Poisson-Kern*. Hierbei ist $(y,0) := (y_1, \dots, y_{N-1}, 0) \in \mathbb{R}^N$ und $\tau_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$ das Volumen der N-dimensionalen Einheitskugel. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^N$ gilt:

$$\int_{\partial\mathbb{R}^N_+} K(x,y)\,dy = 1.$$

Hinweis: Sie können die Identität

$$\int_0^\infty \frac{r^{N-2}}{(r^2+1)^{N/2}}\,dr = \frac{\Gamma(\frac{N-1}{2})\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{N}{2})}$$

mit Induktion beweisen und verwenden.

$$\int_{\partial\mathbb{R}^N_+} K(x,y)\,dy \underset{\uparrow}{=} \frac{2x_N}{N\tau_N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{|(z_1,\dots,z_{N-1},-x_N)|^N}\,dz =$$

$y = z + (x_1,\dots,x_{N-1})$

$|Dy(z)| = |id| = 1$

$$= \frac{2x_N}{N\tau_N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{(|z|^2+x_N^2)^{N/2}}\,dz$$

$$= \frac{2}{N\tau_N x_N^{N-1}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{(|\frac{z}{x_N}|^2+1)^{N/2}}\,dz \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{N\tau_N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{(|w|^2+1)^{N/2}}\,dw$$

$z = x_N w$

$$|Dz(w)| = \left|\begin{pmatrix} x_N & & \\ & \ddots & \\ & & x_N\end{pmatrix}\right| = x_N^{N-1}$$

$$\underset{\uparrow}{=} 2\frac{(N-1)\tau_{N-1}}{N\tau_N}\int_0^\infty \frac{r^{N-2}}{(r^2+1)^{N/2}}\,dr \underset{\uparrow}{=} \frac{\Gamma(\frac{N-1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{N}{2})}\cdot\frac{N-1}{N}\cdot\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}\,\Gamma(\frac{N}{2}+1)}{\pi^{N/2}\,\Gamma(\frac{N-1}{2}+1)}$$

Polarkoordinaten

Integral aus dem Hinweis

& $\tau_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$

$$= \frac{\Gamma(\frac{N-1}{2})\,\Gamma(\frac{N}{2})\,\cancel{N}/2}{\Gamma(\frac{N}{2})\,\Gamma(\frac{N-1}{2})\,\frac{\cancel{N-1}}{2}}\;\frac{\cancel{N-1}}{\cancel{N}} = 1.$$

Es bleibt noch $\int_0^\infty \frac{r^{N-2}}{(r^2+1)^{N/2}}\,dr = \frac{\Gamma(\frac{N-1}{2})\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{N}{2})}$ zu zeigen. $(N \geq 2)$

$$\int_0^\infty \frac{r^{N-2}}{(r^2+1)^{N/2}}\,dr \underset{\text{PI}}{=} \underbrace{\left[r^{N-3} \cdot \frac{-1/(N-2)}{(r^2+1)^{N/2-1}} \right]_0^\infty}_{\sim \frac{r^{N-3}}{r^{N-2}} \text{ f. } r\to\infty \; = 0} + \frac{N-3}{N-2} \underbrace{\int_0^\infty \frac{r^{N-4}\,dr}{(r^2+1)^{\frac{N-2}{2}}}}_{= \frac{\Gamma(\frac{N-3}{2})\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{N-2}{2})}}$$

(falls $N \geq 3$)

mit Induktion im 2-er Schritt!

$$= \frac{N-3}{N-2} \frac{\Gamma(\frac{N-3}{2})}{\Gamma(\frac{N-2}{2})} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\Gamma(\frac{N-1}{2})}{\Gamma(\frac{N}{2})} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Induktionsanfang: $N=2$: $\int_0^\infty \frac{1}{r^2+1}\,dr = \frac{\pi}{2} = \frac{\Gamma(1/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(2/2)\,2}$

beide nötig!

bekannt!

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(1) = 1$

$N=3$: $\int_0^\infty \frac{r}{(r^2+1)^{3/2}}\,dr = \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+1}} \right]_0^\infty$

$$= 1 = \frac{\Gamma(\frac{3-1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(3/2)\,2}.$$

$\Gamma(3/2) = 1/2\,\Gamma(1/2) = 1/2\sqrt{\pi}$

$\Gamma(\frac{3-1}{2}) = 1$

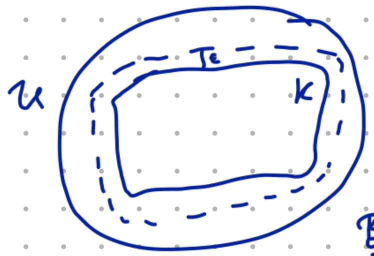
Endlich die letzte Aufgabe:

Aufgabe 6 (Urysohns Lemma).
Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $K \subset U$ kompakt. Zeigen Sie, dass es ein $\beta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ gibt mit $\beta|_K = 1$ und $\beta|_{U^c} = 0$.

1.: Vergrößere K, aber noch in $\mathcal{U}$: Für $\varepsilon > 0$, setze

$$K_\varepsilon := \{ x \in \mathbb{R}^N \mid \exists y \in K : |x-y| \leq \varepsilon \}$$

(kompakte Umgebung von K)



Beh: $\exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon \subseteq \mathcal{U}$.

So: $\forall x \in K \ \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq \mathcal{U}$

$$\Rightarrow \quad K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\varepsilon_x}{2}}(x)$$

$$\underset{\substack{K \text{ kompakt} \\ \text{(endliche Teilüberdeckung genügt)}}}{\Rightarrow} \quad K \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i) \quad \text{für irgendwelche } x_1, \dots, x_s \in K$$

Für $\varepsilon = \min_{i=1,\dots,s} \varepsilon_{x_i}/2 > 0$ gilt: $x \in K_\varepsilon \Rightarrow \exists i, \ y \in B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i)$: $|x-y| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x - x_i| \leq |x-y| + |y - x_i| < \varepsilon_{x_i}/2 + \varepsilon_{x_i}/2 = \varepsilon_{x_i}$$

$$\Rightarrow x \in B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \subseteq \mathcal{U}.$$

Also: $K_\varepsilon \subseteq \mathcal{U}$.

2.: Setze $\delta := \varepsilon/3$, und

$$\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{d(x, K_{2\delta}^c)}{d(x, K_\delta) + d(x, K_{2\delta}^c)}$$

3.: $x \mapsto d(x, A)$ ist Lipschitz, also ist φ stetig:

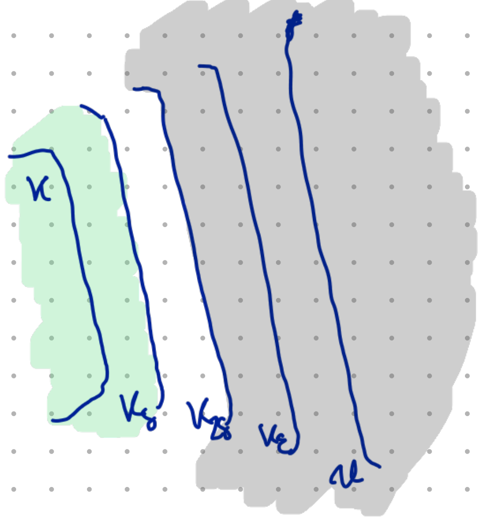
$$\forall z \in A \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N : d(x, A) \leq |x - z| \leq |x-y| + |y-z|$$

$$\Rightarrow d(x, A) \leq |x-y| + \inf_{z \in A} |y - z| = |x-y| + d(y, A)$$

$$\Rightarrow d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|$$

$$\underset{\substack{\text{Rollentausch} \\ x \leftrightarrow y}}{\Rightarrow} \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x-y|$$

<u>4:</u> $\varphi|_{K_\delta} = 1$, $\varphi|_{K_{2\delta}^c} = 0$:



<u>5:</u> Glätte φ:

$\exists \psi: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt mit

Träger in $\overline{B_1(0)}$ & $\int_{\mathbb{R}^N} \psi \, d\lambda = 1$.

(so ein ψ gibt es nach Vorlesung.)

Setze $\psi_\delta : x \mapsto \delta^{-N} \psi\left(\frac{x}{\delta}\right)$ und $\beta = \psi_\delta * \varphi$.

β ist glatt: $\partial^\alpha \beta = (\partial^\alpha \psi_\delta) * \varphi$ (Proposition aus der Vorlesung; verifiziere die Voraussetzungen!)

<u>6.:</u> $\beta|_K = 1$, $\beta|_{\mathcal{U}^c} = 0$: (Analog zur Vorlesung?)

$$x \in K \Rightarrow \beta(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{\psi_\delta(y)}_{=0 \text{ falls } \frac{y}{\delta} \notin \overline{B_1(0)} \iff y \notin \overline{B_\delta(0)}} \varphi(x-y)\, dy = \int_{\overline{B_\delta(0)}} \delta^{-N} \psi\left(\frac{y}{\delta}\right) \overbrace{\varphi(\underbrace{x-y}_{\in K_\delta})}^{\equiv 1} dy$$

$$= \int_{\overline{B_\delta(0)}} \delta^{-N} \psi\left(\frac{y}{\delta}\right) dy = \int_{\overline{B_1(0)}} \psi(y)\, dy = 1$$

nach Wahl von ψ.

$$x \in \mathcal{U}^c \Rightarrow x \in K_\varepsilon^c = K_{3\delta}^c \Rightarrow \beta(x) = \int_{B_\delta(0)} \delta^{-N} \psi\left(\frac{y}{\delta}\right) \underbrace{\varphi(\overset{\in K_{3\delta}^c + B_\delta(0) \subseteq K_{2\delta}^c}{x-y})}_{=0} dy = 0$$