Lineare Algebra 2
Tutorium 1, 14.4.2021

Warm-Up

Richtig oder Falsch?

1. Sei G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe und definiere

$$a \equiv b \mod H \quad \Longleftrightarrow \quad ab^{-1} \in H.$$

   Dann ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf G. ✓
2. Seien G, H und $\equiv$ wie eben, dann ist G/H eine Gruppe. ✗
3. Sei V ein Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum und definiere

$$v \equiv w \mod U \quad \Longleftrightarrow \quad v - w \in U.$$

   Dann ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf V. ✓
4. Seien V, U und $\equiv$ wie eben, dann ist V/U eine abelsche Gruppe. Falls ja, wie sieht die Verknüpfung aus? ✓
5. Seien V, U und $\equiv$ wie eben, dann ist V/U ein Vektorraum. Falls ja, wie sieht die Skalarmultiplikation aus? ✓
6. Seien V, W Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ ein Homomorphismus. Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann gibt es eine Projektionsabbildung $\pi : V \longrightarrow V/U$ und einen eindeutigen Homomorphismus $\overline{f} : V/U \longrightarrow W$, sodass $f = \overline{f} \circ \pi$ gilt. ✗

$\{v+u \mid u \in U\}$

$v \mapsto [v]_\equiv = v + U$

1. Reflexivität, Symmetrie, Transitivität

$\forall a \in G: \ a \equiv a \mod H \iff \underbrace{aa^{-1}}_{\text{"}1_G\text{"}} \in H$

$a \equiv b \mod H \iff ab^{-1} \in H \Rightarrow (ab^{-1})^{-1} \in H$

$(ab^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} a^{-1} = ba^{-1}$

$\text{inv}: G \to G, \ g \mapsto g^{-1}$

$\text{inv}(H) \subseteq H$

$\Rightarrow b \equiv a \mod H$

Transitivität auch ok.

2. $G/H = \{Ha \mid a \in G\}$ Menge der Rechtsnebenklassen

$Ha = \{ha \mid h \in H\} = [a]_\equiv$

$a \equiv ha \iff a(ha)^{-1} \in H$

$a(ha)^{-1} = (aa^{-1})h = h$

$\Rightarrow \{ha \mid h \in H\} \subseteq [a]_\equiv$

„$\supseteq$"

Die kanonische Gruppenstruktur auf G/H wäre

$$G/H \times G/H \longrightarrow G/H$$

$$((Ha), (Hb)) \longmapsto H(ab)$$

Oder äquivalent gesagt: $G \xrightarrow{\text{surj.}} G/H$, $a \longmapsto Ha$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Wohldefiniertheit: $Ha = Ha'$, $Hb = Hb'$

$$\overset{!}{\Longrightarrow} \quad H(ab) \overset{!}{=} H(a'b') \qquad \forall a, a', b, b' \in G$$

zum Beispiel: $b \in H \Rightarrow b(1_G)^{-1} \in H \Rightarrow b \equiv 1$

$b' = 1$

$$ab(a'b')^{-1} \in H$$

$$\shortparallel$$

$$abb'^{-1}a'^{-1} \in H \qquad a' = a$$

$$\shortparallel$$

$$aba^{-1} \in H$$

$\forall a \in G \; \forall b \in H: \; aba^{-1} \in H$

$:\Longleftrightarrow \; H \triangleleft G$ ist eine normale Untergruppe

Bem: $(G, +) = (G, \cdot)$ abelsche Gruppe

$$\Rightarrow \forall a \in G \; \forall b \in H: \; \underbrace{a + b - a}_{= a - a + b = b} \in H$$

$\Rightarrow$ Alle $H \leq G$ sind normal, falls G abelsch.

5. $U \le V$ k-Vektorräume, k Körper.

$(V,+,\cdot)$ mit $(V,+)$ abelsche Gruppe

& $\cdot : K \times V \longrightarrow V$

$(\lambda, v) \longmapsto \lambda v$

K nicht linear:

$\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w \quad \forall \lambda \in K \quad \forall v,w \in V$

$1_K \cdot v = v \quad \forall v \in V$

$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu(v)) \quad \forall \lambda,\mu \in K$

$(U,+) \le (V,+)$ ist eine Untergruppe $\rightsquigarrow$ $(V/U, +)$ abelsche Gruppe

$\uparrow = +|_{U \times U} : U \times U \longrightarrow U$

Skalarmultiplikation

$$K \times V/U \longrightarrow V/U$$

$$(\lambda, v+U) \longmapsto (\lambda v) + U$$

Wohldefiniert:

$$v + U = w + U \overset{?}{\Longrightarrow} (\lambda v) + U = (\lambda w) + U$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$v - w \in U \qquad\qquad \lambda v - \lambda w \in U$$

$$\Longrightarrow \qquad\qquad //$$

$$\underbrace{\lambda(\underbrace{v-w}_{\in U})}_{\in U}$$

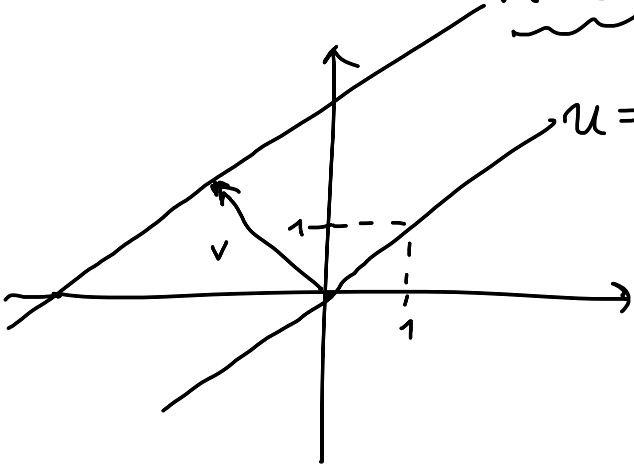
$\uparrow$

U ist abgeschlossen bzgl. Skalarmultiplikation.

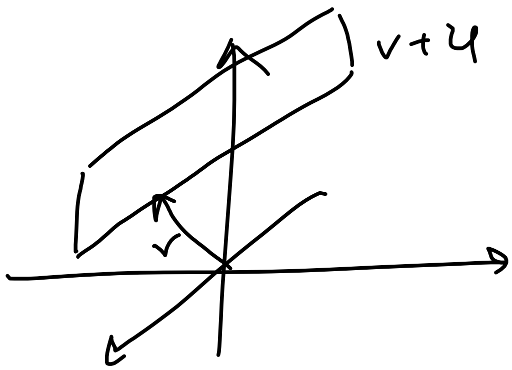
Noch zu prüfen:

$V = \mathbb{R}^2$

$v + \mathcal{U} \rightsquigarrow$ "affin-linearer Unterraum von V"



$\mathcal{U} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}\text{-linearer Spann}} = \mathrm{Lin}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$



$V/\mathcal{U}$ = Menge des affin-linearen Unterräume

---

6. $f : V \longrightarrow W$ Homomorphismus von k-Vekt.

k - VR

$\mathcal{U} \leq V \rightsquigarrow \pi : V \longrightarrow V/\mathcal{U}, \; v \longmapsto v + \mathcal{U}$

gibt es immer

Gibt es (eindeutiges) $\overline{f} : V/\mathcal{U} \longrightarrow W$ mit

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \\ V/\mathcal{U} \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \overline{f}"'] & \end{tikzcd} \quad ? \qquad (\overline{f} \circ \pi) = f$$

Es müsste gelten: $\forall v \in V$: $\overline{f}(v + \mathcal{U}) = \overline{f}(\pi(v))$

$$= f(v) \quad \Rightarrow \text{ Eindeutigkeit}$$

Also insbesondere $v + U = w + U \overset{!}{\Longrightarrow} f(v) = f(w)$

$$v - w \in U \Leftrightarrow v + U = w + U \qquad f(v) = f(w) \Leftrightarrow f(v-w) = 0 \Leftrightarrow v - w \in \ker f$$

$(!) \Longleftrightarrow U \subseteq \ker f.$

Homomorphiesatz (syn. Isomorphiesatz)

$f: V \longrightarrow W$ Homomorphismus von k-VR.

Surjektiv-machen: $f: V \xrightarrow{\text{surjektiv}} \mathrm{Im}(f) \leq W$

$$\mathrm{Im}(f) = f(V), \quad \mathrm{Im}(f) \leq W \text{ ist UVR}$$

Injektiv-machen: ?

Definiere Äq.relation auf V:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \underbrace{f(x) = f(y)}_{\substack{f(x-y) = 0 \\ \Leftrightarrow\ x - y \in \ker f}}$$

$$V \supseteq \ker f$$

per Konstruktion injektiv:

$$V/\!\sim \ \xrightarrow{\text{surjektiv}} \ \mathrm{Im}(f)$$

$$[v]_\sim \longmapsto f(v)$$

$\Rightarrow$ Bijektion: $V/\!\sim \ \xrightarrow{\bar{f}} \ \mathrm{Im}(f)$

$$V/\!\sim \ = \ V/\ker f$$

$\Longrightarrow$ **Homomorphiesatz:**

$$\begin{tikzcd} v \arrow[d, mapsto] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & W \\ {[v]_\sim} & V/\ker f \arrow[r, "\bar{f}", "\cong"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u, hook] \\ & v + \ker f \arrow[r, mapsto] & f(v) \end{tikzcd}$$

Aufgabe 1

Wir betrachten den Unterraum $D := Lin(\{(1,1)\})$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Zeige $\mathbb{R}^2/D \simeq \mathbb{R}^1$ mithilfe des Homomorphiesatzes.

$$\underbrace{Lin(\{(1,1)\})}_{} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}$-linearer Spann

$$= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V/\ker f \cong \operatorname{Im} f$$

$$f : V \longrightarrow W \quad ?$$

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x - y \\ & & \shortparallel \\ & & (1, -1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker f \iff \underset{\shortparallel}{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} x - y = 0 \iff x = y$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D.$$

$\Rightarrow D = \ker f.$

Noch zz: $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}.$ ($\Leftrightarrow$ f ist surjektiv)

Sei $x \in \mathbb{R}.$ $f\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x - 0 = x$

$\Rightarrow$ f surjektiv.

$\overset{\text{Hom.satz}}{\Rightarrow}$ $\mathbb{R}^2 / D \cong \mathbb{R}.$

Aufgabe 4

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum sowie U ein Unterraum von V.
Zeigen Sie: $V \xrightarrow{f} K$ $\qquad \mathrm{Hom}_K(V,K) = V^*$

1. Ist $0 \neq f \in \mathbf{Hom}_K(V,K)$, so gilt $\dim_K(V/\ker(f)) = 1$.
2. Ist $\dim_K(V/U) = 1$, so gibt es ein $0 \neq f \in \mathbf{Hom}_K(V,K)$ mit $U = \ker(f)$.

$\underline{1.}$ $\quad 0 \neq f \in V^* \implies \dim(\underbrace{V/\ker f}_{\cong \, \mathrm{Im} f \, \leq \, K}) = 1.$

$f: V \to K$

$\implies \exists x \in V: f(x) \neq 0.$

$K \uparrow$ hat Dimension 1

$\iff \mathrm{Im} f = K$

Sei $\lambda \in K$.

$$f((\lambda (f(x))^{-1}) \cdot x) = \lambda f(x)^{-1} f(x) = \lambda.$$

$\underline{2.}$ $\quad \dim_K(V/U) = 1 \overset{LA1}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Isom. $V/U \xrightarrow[\cong]{\varphi} K.$

Setze $f: V \xrightarrow[\text{surjektiv}]{\pi} V/U \xrightarrow[\cong]{\varphi \text{ surjektiv}} K$ $\quad$ surjektiv

$v \longmapsto v + U$ $\qquad \implies f \neq 0.$

$\ker \pi = U.$

$\cong \ker(\varphi \circ \pi) = \ker(f).$

Isomorphismus