# Überlegungen zu Projektionen

**Setup:** $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, $\underbrace{\underset{\text{(Projektion)}}{f^2 = f}\ , \ + \ \underset{\text{(selbstadjungiert)}}{\hat{f} = f}}_{\text{orthogonale Projektion}}$

**Frage:** Wie kann die darstellende Matrix $A$ von $f$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ aussehen?

**Ansatz 1:** Schreibe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $\hat{f} = f \Rightarrow A^T = A \Rightarrow c = b$.

$f^2 = f \Rightarrow A^2 = A$. Wir haben

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bd \\ ab+bd & b^2+d^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

also folgt $a + d = 1$ und daher

$$1 - a = d = b^2 + d^2 = b^2 + (1-a)^2 = b^2 + 1 - 2a + a^2,$$

also $b^2 = a - a^2 = a(1-a)$, und damit $a \in [0,1]$ (denn $b^2 \geq 0$).

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{a(1-a)} \\ \pm\sqrt{a(1-a)} & 1-a \end{pmatrix}.$$

**2. Ansatz:** (Dem ersten Vorschlag aus dem Tutorium folgend? :) )

Wir haben bereits gesehen, dass $\ker f \perp \operatorname{im} f$, und

$$f : \ker f \oplus \operatorname{Im} f \longrightarrow \operatorname{Im} f$$
$$\underset{v}{\overset{\in}{}} + \underset{w}{\overset{\in}{}} \longmapsto w = f(w).$$

Falls $\ker f = 0$, so $f$ bijektiv (& $f^2 = f$) $\Rightarrow f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Falls $\operatorname{Im} f = 0$, so $f = 0$.

Lasst uns diese trivialen Fälle ausschließen. Seien also $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \ker f$ normierte Basisvektoren des $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ ist eine Orthogonalmatrix ($\ker f \perp \operatorname{im} f$).

Sie beschreibt den Basiswechsel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bezüglich $\binom{x}{y}, \binom{u}{v}$ hat $f$ die darstellende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\text{Denn: } \begin{aligned} f\binom{x}{y} &= 1 \cdot \binom{x}{y} + 0 \cdot \binom{u}{v}, \\ f\binom{u}{v} &= 0 \cdot \binom{x}{y} + 0 \cdot \binom{u}{v} \end{aligned}\right)$$

Also:

$$A = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{pmatrix}.$$

Da $\binom{x}{y}$ normiert ist, folgt $1 = x^2 + y^2$. Schreiben wir $a = x^2$, so $y = \pm\sqrt{1-a}$.

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{a(1-a)} \\ \pm\sqrt{a(1-a)} & 1-a \end{pmatrix},$$

wie oben! :)