Funktionentheorie, Tutorium 5

22.5. 2020

4. (i) *Potenzreihenentwicklung des Logarithmus.* Die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

definiert auf der Scheibe $D_1(1) \subset \mathbb{C}$ den Hauptzweig des komplexen Logarithmus.

Hinweis: Betrachten Sie die formale Ableitung der Potenzreihe und die von ihr dargestellte holomorphe Funktion.

(ii) *Potenzreihenentwicklung der Wurzeln und allgemeinen Potenzen.* (a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n} \qquad \binom{\alpha}{n} := \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha+1-j}{j}$$

(Vandemonde-Identität)

Erläuterung: Die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{n}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sind durch die übliche Formel definiert.

Hinweis: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ durch kombinatorische Deutung. Daraus den allgemeinen Fall folgern unter Beachtung, daß beide Seiten Polynome in α, β sind.

(i) $P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ Konvergenzradius ≥ 1

$$P' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1-z)^n$$
$$\underset{z \in D_1(1)}{=} \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}$$

$P(1) = 0 \implies P(1) = \log(1)$
& $P'(z) = \log'(z)$
& $D_1(1)$ zusammenhängend

$\implies P = \log|_{D_1(1)}$

(ii)

(a) α weiße Kugeln, β schwarze Kugeln

$\alpha+\beta$ Kugeln

n Kugeln aus $\alpha+\beta$ auswählen: Möglichkeiten $= \binom{\alpha+\beta}{n}$

Oder: k weiße & $n-k$ schwarze, k beliebig

Möglichkeiten $\binom{\alpha}{k}$ $\binom{\beta}{n-k}$

Alle Möglichkeiten: $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}$

Oder ohne kombinatorische Überlegung:

$\mathbb{Z}[x]$

$$(1+x)^{\alpha+\beta} = \sum_{n=0}^{\alpha+\beta} \binom{\alpha+\beta}{n} x^n$$

$$(1+x)^\alpha (1+x)^\beta = \left(\sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\beta} \binom{\beta}{n} x^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\alpha+\beta}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{n-k}\right) x^n$$

Koeffizientenvergleich $\Rightarrow$ fertig.

(Noch alternativ: $\forall P \in \mathbb{C}[z]$: $\quad n = \deg P$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(i)\right)\binom{z}{k}$$

"dann $P = \binom{z+\beta}{n}$")

Betrachte für $\beta \in \mathbb{N}_0$ die Polynome

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{z}{k}\binom{\beta}{n-k} \quad \& \quad \binom{z+\beta}{n}$$

Diese stimmen an ∞ vielen α $(\in \mathbb{N}_0)$ überein

$$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{C}: \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

Jetzt halte $\alpha \in \mathbb{C}$ fest und betrachte die Polynome

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{z}{n-k} \quad \& \quad \binom{\alpha+z}{n}.$$

sind gleich bei allen $\beta \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$ Aussage $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$P_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

für $\alpha \in \mathbb{C}$ haben Konvergenzradius $\geqslant 1$ und erfüllen $P_1(z) = 1 + z$ und

$$P_\alpha \cdot P_\beta = P_{\alpha+\beta}.$$

(c) Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/k}{n} (z-1)^n$$

definiert auf der Scheibe $D_1(1) \subset \mathbb{C}$ den Hauptzweig der komplexen k-ten Wurzel.

(d) Für $|z| < 1$ gilt

$$\sqrt{1+z} \underset{(c)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} z^n \overset{?}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} z^n.$$

(b) Erinnerung: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-x)^i$ hat den Konvergenzradius

$$= \frac{1}{\limsup_i \sqrt[i]{|a_i|}}$$

oder, falls der Limes $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ "existiert". ($a_{n+1} \neq 0$ für $n \gg 0$)

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \left| \frac{\prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha+1-j}{j}}{\prod_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha+1-j}{j}} \right| = \left| \frac{n+1}{\alpha - n} \right| \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Falls $\alpha \in \mathbb{N}$ so ist $\binom{\alpha}{n} = 0$ für $n > \alpha$, d.h. P_α ist ein Polynom.

$$P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1}{n} z^n = \binom{1}{0} z^0 + \binom{1}{1} z^1$$
$$= 1 + z$$

$$P_\alpha \cdot P_\beta = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} z^k \right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\sum_{n=0}^{k} \binom{\alpha}{n} \binom{\beta}{k-n}}_{= \binom{\alpha+\beta}{k}} \Bigg) z^k \; \Bigg\} = P_{\alpha+\beta}(z)$$

$$P_{1/k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/k}{n} z^n$$

Hauptzweig $\rho : D_1(1) \to \mathbb{C}$ der k-ten Wurzel:

$$re^{i\varphi} \mapsto r^{1/k} e^{i\varphi/k}$$
$$r>0,\ \varphi \in]-\pi, \pi[$$

$\rho(1) = 1$, $\quad W := P_{\frac{1}{k}}(z-1)$

$$W(1) = P_{1/k}(0) = \binom{1/k}{0} = 1.$$

& W ist eine Umkehrfunktion von $z \mapsto z^k$:

$$\underset{z}{\overset{!}{\underset{\|}{W(z)^k}}} = \left(P_{1/k}(z-1)\right)^k \underset{(b)}{=} P_{\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k}}(z-1) =$$

$$= P_1(z-1) = 1 + z - 1 = z$$

$V = \{ z \in D_1(1) \mid W(z) = \rho(z) \}$ ist offen

(da W & ρ lokal $z \mapsto z^k$ invertieren)

& abgeschlossen (W & ρ stetig)

& $D_1(1)$ zsmhgd $\quad \Rightarrow V = D_1(1)$

$1 \in V \neq \emptyset$

(d) $$\binom{1/2}{n} = (-1)^{n-1} \frac{1}{4^n} \underbrace{\binom{2n}{n}}_{= \frac{(2n)!}{n!\,n!}} \frac{1}{2n-1}$$

$$\| $$

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\frac{1}{2} + 1 - j}{j} = \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^{n} (3 - 2j) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{j=1}^{n} (2j - 3) \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{j}{j} \right) \left(\frac{2^n}{2^n} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} \prod_{j=1}^{n} (2j - 3) \prod_{j=1}^{n} (2j) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{4^n (n!)^2} \prod_{j=1}^{n} (2j-1) \prod_{j=1}^{n} (2j) \frac{1}{2n-1}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{4^n (n!)^2} \underbrace{\prod_{j=1}^{2n} j}_{(2n)!} \frac{1}{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n (2n-1)} \binom{2n}{n}$$

3. (i) Entwickeln Sie die Funktion $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^*$ als Potenzreihe um den Punkt $a \in \mathbb{C}^*$. Was ist der Konvergenzradius?

(ii) Seien $P(z)$ und $Q(z)$ teilerfremde komplexe Polynome. Zeigen Sie, daß man die rationale Funktion $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ um jeden Punkt ihres Definitionsgebiets als Potenzreihe entwickeln kann. Wie groß ist der Konvergenzradius (in Termen der Geometrie der Nullstellenmenge des Nenners $Q(z)$)?

(i) $$\frac{1}{z+a} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{-z}{a}} \underset{|z|<|a|}{=} \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{a}\right)^k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{a^k} z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{a^{k+1}} z^k =: f_a$$

$$f_0(z) = f_a(z-a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{a^{k+1}} (z-a)^k$$

konvergiert absolut für $|z-a| < |a|$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $\geq |a|$

Angenommen Konvergenzradius $r > |a|$ $\rightsquigarrow$ dann absolute Konvergenz bei $z = 2a \in D_r(a)$: $\infty > \sum_{k=0}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{a^{k+1}} a^k\right|$

$$= \frac{1}{|a|} \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$$

Warum gibt es keine andere Reihe mit Konvergenzradius $> |a|$, die f_0 darstellt?

$\rightsquigarrow$ Die Funktion $f_0 : z \mapsto \frac{1}{z}$ hat keine stetige Fortsetzung durch $0 \in \mathbb{C}$, aber eine Reihe um a mit Radius $> |a|$ ist stetig in 0.

(ii) OBdA Leitkoeffizient von $Q = 1$, $\deg Q = n$

Fundamentalsatz der Algebra:

$$Q = (z-\xi_1)\cdots(z-\xi_n)$$

$$f = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{z-\xi_1}\,\frac{1}{z-\xi_2}\cdots\frac{1}{z-\xi_n} =$$

OBdA $Q(0) \neq 0$, sonst betrachte $f(z+a)\cdots$

Konvergenzradius ∞

$$= P(z)(-1)^n \frac{1}{\prod_{i=1}^n \xi_i}\prod_{i=1}^n \frac{1}{1-\frac{z}{\xi_i}} \underset{|z| < \min\{|\xi_i| \mid i\in\{1,\dots,n\}\}}{=} P(z)(-1)^n \frac{1}{\prod_{i=1}^n \xi_i}\prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\xi_i}\right)^k$$

$\underset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \dots$ konvergiert absolut für

$$|z| < \min\left\{\text{Konvergenzradius } \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\xi_i}\right)^k\right\} = \min\{|\xi_i| \mid i\}$$

(Cauchy-Produkt hat mindestens den Konvergenzradius der Faktoren)

Konvergenzradius $= \min\{|\xi_i| \mid i\}$, da

f nicht stetig fortsetzbar durch $x \in \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

2. Der Hauptzweig des komplexen Logarithmus ist die eindeutige holomorphe Funktion $L(z)$ auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$ mit Ableitung $L'(z) = \frac{1}{z}$ und $L(1) = 0$.

Bekannt: $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$re^{i\varphi} \longmapsto \log_{\mathbb{R}} r + i\varphi$$

$r > 0$, $\varphi \in]-\pi, \pi[$

holomorph. & $\log(1) = \log(1\, e^{i0}) = \log_{\mathbb{R}} 1 + 0 = 0$.

$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, $z = e^x$, $x \in \mathbb{C}$

$$\log'(z) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{z}.$$

Formel für die Ableitung der Umkehrfkt

« $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dx}}$ »

Angenommen, L wie oben.

$f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$,

$z \mapsto \log(z) - L(z)$

hat Ableitung 0

$\Longrightarrow$ f konstant, & $f(1) = 0$

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ wegzusammenhängend.

$\Longrightarrow \log(z) = L(z)$.

1. (i) Zerlegen Sie e^{e^z} für $z \in \mathbb{C}$ in Real- und Imaginärteil.

(ii) Bestimmen Sie die komplexen Logarithmen der Zahlen $-1, i, -1-i, 3+4i$.

(iii) Bestimmen Sie alle Werte von 2^i und i^i.

Erläuterung: Die allgemeine komplexe Potenz wird mit Hilfe des komplexen Logarithmus definiert als $a^b := e^{b \log a}$ für $a \in \mathbb{C}^*$ und $b \in \mathbb{C}$.

(i) $$\mathrm{Re}\left(e^{e^z}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{Re}(e^z) + i\,\mathrm{Im}(e^z)}\right) =$$

$$= e^{\mathrm{Re}(e^z)}\,\mathrm{Re}\left(e^{i\,\mathrm{Im}(e^z)}\right) = e^{\mathrm{Re}(e^z)} \cos\left(\mathrm{Im}(e^z)\right)$$

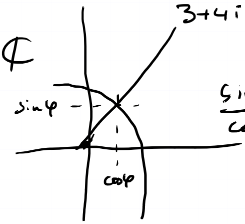
$$= e^{\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)}\right)} \cos\left(\mathrm{Im}(e^z)\right)$$

$$= e^{e^{\mathrm{Re}(z)} \cos(\mathrm{Im}(z))} \cos\left(e^{\mathrm{Re}(z)} \sin(\mathrm{Im}(z))\right)$$

$$\mathrm{Im}\left(e^{e^z}\right) = e^{e^{\mathrm{Re}(z)} \cos(\mathrm{Im}(z))} \sin\left(e^{\mathrm{Re}(z)} \sin(\mathrm{Im}(z))\right)$$

(ii) $-1 = e^{i\pi} \rightsquigarrow \log(-1) = i\pi + 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$

$i = e^{i\pi/2} \rightsquigarrow \log(i) = i\frac{\pi}{2} + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}$



$3+4i = 5\,e^{i\varphi} \rightsquigarrow \log(3+4i) = \log 5 + i\varphi + 2\pi i k$

$$\underbrace{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}_{=\tan\varphi} = \frac{4}{3} \rightsquigarrow \varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

(iii) $$2^i = \exp(i \log 2)$$

$$= \exp\left(i\left(\log_{\mathbb{R}} 2 + 2\pi i k\right)\right)$$

$$= e^{i \log_{\mathbb{R}} 2}\, \underbrace{e^{-2\pi k}}_{\in \mathbb{R}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2k+1} \qquad z \in D_1(0)$$

Zeige: $$f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) = (1+z^2)\, f(z)$$

Bemerke: $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2k+1} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} =$$

$$= \frac{1}{z} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-z)^k \right)$$

$$= \frac{1}{2z} \left(\log(1+z) - \log(1-z) \right)$$

$$= \frac{1}{2z} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad = f(z)$$

$\uparrow$

"Vorsicht"

Jetzt nachrechnen.

rtmader.github.io / FT