Lineare Algebra 2, Tutorium 9

9.6.2021

Definition: Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Dann ist der *Torsionsmodul* von M definiert als

$$T(M) := \{m \in M \mid r \cdot m = 0 \text{ für einen Nicht-Nullteiler } r \in R\}.$$

$$\forall s \in R: \ rs = 0 \Rightarrow s = 0$$

- Falls $R = K$ ein Körper, dann M ein R-Modul $\Leftrightarrow$ M ist ein K-VR

Körper ist nullteilerfrei

$$T(M) = \{m \in M \mid \exists r \in K^\times : \underbrace{r \cdot m = 0}\} \qquad \Rightarrow \underbrace{r^{-1} r m}_{= m} = 0$$
$$= \{0\} = 0.$$

- Typische Situation: $R = \mathbb{Z}$

M ein $\mathbb{Z}$-Modul $\qquad \{\mathbb{Z}\text{-Moduln}\} = \{\text{Abelsche Gruppen}\}$

M endlich erzeugt

$\Downarrow$ Klassifikation f. abelsche Gruppen

$$M \cong \underbrace{\mathbb{Z}^r}_{\underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{r\text{-Mal}}} \times \underbrace{\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z}}_{= T(M)}$$

- $\mathbb{C}^\times$ ist nicht endlich erzeugt als abelsche Gruppe

Als $\mathbb{Z}$-Modul: $\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{z}} \cdot \underset{\mathbb{C}^\times}{\underset{\cap}{\lambda}} = \underbrace{\lambda \cdots \lambda}_{z\text{-Mal}} = \lambda^z$

$$T(\mathbb{C}^\times) = \{m \in \mathbb{C}^\times \mid \exists r \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} : \underset{m^r}{\underset{\parallel}{r \cdot m}} = \underset{1}{\underset{\parallel}{0_{\mathbb{C}^\times}}}\}$$

neutrales Element der abelschen Gruppe $\mathbb{C}^\times$

$$= \{\text{Einheitswurzeln}\}$$

Warm-Up

Richtig oder Falsch?

R ist ein Körper $\Rightarrow \forall M: T(M) = 0$

$(d.h.\ T(M) = M \Rightarrow M = 0)$

1. Sei R ein Integritätsbereich und M ein R-Modul. Dann ist der Torsionsmodul von M im allgemeinen kein Untermodul. ✗
2. Sei $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Dann gibt es genau zwei R-Moduln M mit $T(M) = M$. ✗
3. Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ ein Teilring. Ist M ein R-Modul, so erlaubt M auch eine kanonische S-Modulstruktur. ✓

R Integritätsbereich (d.h. nullteilerfrei)

$T(M) = \{m \in M \mid \exists r \in R \setminus \{0\} : r \cdot m = 0\}$

$x, y \in T(M) \rightsquigarrow \exists r, s \neq 0: rx = 0, sy = 0$

$sr(x+y) = srx + rsy = 0 + 0 = 0$

$sr \neq 0$

$\Rightarrow x+y \in T(M)$

& analog $\forall \lambda \in R: \lambda x \in T(M)$.

$\Rightarrow T(M) \subseteq M$ Untermodul.

3. Allgemein: $\varphi: S \longrightarrow R$ beliebiger Ringhomomorphismus (z.B. $\varphi =$ "$\subseteq$")

M ein R-Modul

$\rightsquigarrow$ dann ist M auch ein S-Modul, mittels $s \cdot m := \varphi(s) \cdot m$

Aufgabe 1

Sei R ein kommutativer Ring. Seien $N \subseteq M$ R-Moduln. Zeige:

1. Ist M endlich erzeugt, so auch M/N.
2. Sind M/N und N endlich erzeugt, so auch M.

1. Es gibt endlich viele Elemente $a_1, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in R \right\} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$$

$$a_i + N = [a_i]$$

$$M/N = \{ m + N \mid m \in M \} = \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \right] \mid \lambda_i \in R \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_i] \mid \lambda_i \in R \right\} = \langle [a_1], \dots, [a_n] \rangle$$

2. $M/N = \langle [a_1], \dots, [a_n] \rangle$ & $N = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$, $N \subseteq M$

Sei $m \in M$. $[m] = \sum_i \lambda_i [a_i]$.

$$\Rightarrow m - \sum_i \lambda_i a_i \in N$$

$$\Rightarrow m - \sum_i \lambda_i a_i = \sum_j \mu_j x_j$$

$$\Rightarrow m = \sum_i \lambda_i a_i + \sum_j \mu_j x_j.$$

$$\Rightarrow M = \langle a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m \rangle. \quad \square$$

Aufgabe 4

Sei R ein kommutativer Ring. Setze $N = \{r \in R | \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } r^n = 0\}$ $= \{$nilpotente Elemente $r\}$ heißt Nilradikal von R

1. Zeige, dass die Menge N in jedem Primideal von R enthalten ist.
2. Sei $r \in R$ ein Element mit $r^n \neq 0$ für $\forall n \geq 1$ und definiere eine Menge S von Idealen in R durch $I \in S \Leftrightarrow \{r^n | n \geq 1\} \cap I = \emptyset$.

   Zeige, dass S ein maximales Element P enthält und dass P ein Primideal ist.

1. Erinnerung: $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ heißt Primideal

$\Leftrightarrow \forall x, y \in R: [xy \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}]$

(z.B. $(p) = \mathfrak{p}$, $p \in R$ $\quad \underbrace{(xy) \in \mathfrak{p} = (p)}$ $\Leftrightarrow p | xy \Rightarrow p | x$ oder $p | y$)

$N \overset{?}{\subseteq} \mathfrak{p}$. $\quad r \in N \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \underset{r \cdot (r^{n-1})}{r^n} = 0 \in \mathfrak{p}$

$\Rightarrow r \in \mathfrak{p}$ oder $\underbrace{r^{n-1} \in \mathfrak{p}}$ $\Rightarrow r \in \mathfrak{p}$ mit Induktion

Mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

$\forall n \in \mathbb{N}: [r^n \in \mathfrak{p} \Rightarrow r \in \mathfrak{p}.]$

Maximales Ideal $m \ntrianglelefteq R$

$\Leftrightarrow \forall I \trianglelefteq R: m \subseteq I$

$\Rightarrow m = I$ oder $I = R$.

Allgemein gilt: m maximal $\Rightarrow m$ prim.

$\nLeftarrow$ z.B. bei Hauptidealringen ($\mathbb{Z}$, $K[x]$)

gilt: maximal $\Leftrightarrow$ prim.

$S = \{ I \trianglelefteq R \text{ Ideale} \mid \{r^n \mid n \geq 1\} \cap I = \emptyset \}$

$\nwarrow$ partiell geordnet (mit Inklusion "$\subseteq$" von Mengen)

<u>Zorns Lemma:</u> $(S, \subseteq)$ ist eine partiell geordnete Menge. Angenommen:

1. $S \neq \emptyset$
2. Für alle Ketten $T \subseteq S$ gilt: Es gibt $M \in S$

$\uparrow$ hier gilt: $\forall t_1, t_2 \in T$: $t_1 \leq t_2$ oder $t_2 \leq t_1$

mit $\forall t \in T$: $t \leq M$.

Dann: Es existiert ein Element $P \in S$, maximal bezüglich $\leq$.

<u>Bei uns:</u> $(0) \in S$. $\Rightarrow$ 1.

2.: Sei $T \subseteq S$ eine Kette.

Setze: $J := \bigcup T = \bigcup_{I \in T} I$.

J <u>ist ein Ideal</u>:

$x, y \in J$ $\Rightarrow$ $\exists I_1, I_2 \in T$: $x \in I_1$ & $y \in I_2$ $\rightsquigarrow$ $\Rightarrow r \cdot x \in I_1 \subseteq J$.

$r \in R$ $\qquad$ T Kette $\Rightarrow$ $I_1 \subseteq I_2$ oder $I_2 \subseteq I_1$

Falls $I_1 \subseteq I_2$: $x \in I_2 \Rightarrow x + y \in I_2 \subseteq J$

$I_2 \subseteq I_1$: $y \in I_1 \Rightarrow x + y \in I_1 \subseteq J$.

Offensichtlich: $\forall I \in T$: $I \subseteq J$.

<u>$J \in S$</u>: z.z.: $J \cap \{r^n \mid n \geq 1\} = \emptyset$.

$$J \cap \{r^n \mid n \geq 1\} = \Big(\bigcup_{I \in T} I\Big) \cap \{r^n \mid n \geq 1\}$$

$$= \bigcup_{\substack{I \in T \\ \cap S}} \big(\underbrace{I \cap \{ r^n \mid n \geq 1 \}}_{= \emptyset} \big) = \emptyset.$$

$\Rightarrow$ 2.

$\underset{\text{Zorns Lemma}}{\Rightarrow}$ Es existiert ein max. Element $P \in S$.

<u>2.</u> P ist ein Primideal.

$$xy \in P \overset{?}{\Rightarrow} x \in P \text{ oder } y \in P$$

Ang.: $\underbrace{x \notin P}$ & $y \notin P$.

$$\Rightarrow \underbrace{P + (x)}_{\notin S} \supsetneq P$$

$\Leftarrow$ maximal in S

(Allg.: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq R$. Falls $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$.)

$$\Rightarrow (P + (x)) \cap \{ r^n \mid n \geq 1 \} \neq \emptyset$$

& analog $(P + (y)) \cap \{ r^n \mid n \geq 1 \} \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists n, m: \quad r^n = p + ax, \quad p \in P, \quad a \in R$$
$$r^m = q + by, \quad q \in P, \quad b \in R.$$

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{r^n r^m}} = (p + ax)(q + by) = \underbrace{\overset{\in P}{\widetilde{pq}} + \overset{\in P}{\widetilde{axq}} + \overset{\in P}{\widetilde{pby}} + \overset{\in P}{\widetilde{abxy}}}_{\underline{\underline{\in P}}}$$

Widerspruch.

$A \in M_n(K)$ Matrix

K^n ist K-Vektorraum.

wir wollen eine $K[X]$-Modulstruktur

$$\underbrace{K[X]}_{\ni f} \qquad f = \sum_i \underbrace{a_i}_{\in K} x^i$$

$$K^n \ni v$$

$$f \cdot v = ?$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad a_i A^i \cdot v = a_i \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}}_{A^i} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \cdots$$

$$:= \sum_i a_i (\underbrace{A \cdots A}_{i \text{ Mal}} \cdot v)$$

$$= f(A) \cdot v$$