Analysis 1, Tutorium 1
6. 11. 2020

"Webseite": rtmader.github.io/ana1

E-Mail: robin.mader@campus.lmu.de

<u>Aussagenlogik</u>

$$[(A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \Rightarrow B) \wedge (A_2 \Rightarrow B)] \Rightarrow B$$

Zum Beispiel: $x \in \mathbb{R}$.

$A_1 :\Leftrightarrow$ "$x \geq 2$"

$A_2 :\Leftrightarrow$ "$x < 2$"

$B :\Leftrightarrow$ "x reell"

Definition von Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

φ sei die Formel $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$	$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow B$	φ
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	w	w	w
w	f	w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Prädikatenlogik

$\forall x : \varphi(x)$ $\xrightarrow{\text{bedeutet}}$ "Für alle x gilt $\varphi(x)$"

$\forall x \in M : \varphi(x)$ $\leftarrow$ "Für alle Elemente x der Menge M $(x \in M)$ gilt $\varphi(x)$"

Menge

quantifiziere über Menge

z.B. $\forall x \in \{3, 4\} : x \geq 2.$

(z.B. $\varphi(x) :\Leftrightarrow x \geq 2$)

per Definition bedeutet das: $\forall x : (x \in M \Rightarrow \varphi(x))$

$M := \{ x \in N \mid \varphi(x) \}$

$\forall y : \underbrace{y \in M}_{\text{hier steht immer noch eine Aussage}}$

"$\varphi : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$"

$N := \{ x \in \mathbb{N}_0 \mid \varphi(x) \}$

"$N \neq \emptyset \implies \exists y \in \mathbb{N}_0 : \varphi(y)$"

"$N = \mathbb{N}_0 \implies \forall y \in \mathbb{N}_0 : \varphi(y)$"

$\exists x : \varphi(x) \quad \leftrightsquigarrow \quad$ "Es existiert x, für das $\varphi(x)$ gilt"

$R = \{ x \mid \overbrace{x \notin x}^{\varphi(x)} \}$

$R \in R \implies \varphi(R)$

$\Updownarrow$

$\bot \Leftarrow (R \in R \Rightarrow \bot) \iff R \notin R$

$R \notin R \iff \varphi(R)$

$\Downarrow$

$R \in R$

$\Rightarrow \bot$

Sei M eine Menge.

Formalisiere:

"Es gibt mindestens 3 verschiedene Elemente in M."

$\exists x \in M \, \exists y \in M \, \exists z \in M : (x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x)$

"Es gibt genau 3 verschiedene Elemente"

$$\Big(\exists x \in M \, \exists y \in M \, \exists z \in M : (x \neq y \land y \neq z \land z \neq x)\Big) \land$$

$$\Big($$

"es gibt ein eindeutiges"

Idee:

$$\Big(\exists! x \in M \, \exists y \in M \, \exists z \in M : (x \neq y \land y \neq z \land z \neq x)\Big)$$

$$\exists! x \in M : \varphi(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\exists x \in M : [\varphi(x)}_{\text{Existenz}} \land \overbrace{[\forall y \in M : \varphi(y) \Rightarrow y = x]]}^{\text{Eindeutigkeit}}$$

$$\neg(\exists! x \in M : \varphi(x))$$

$$\Updownarrow$$

$$\neg\Big(\exists x \in M : [\varphi(x) \land [\forall y \in M : \varphi(y) \Rightarrow y = x]]\Big)$$

$\Updownarrow$ Quantor umdrehen & innere Aussage negieren

$$\forall x \in M : \neg[\varphi(x) \land [\forall y \in M : \varphi(y) \Rightarrow y = x]]$$

$\Updownarrow$ De-Morgan: $\neg(A \land B) \Leftrightarrow (\neg A) \lor (\neg B)$

$$\forall x \in M : (\neg\varphi(x)) \lor (\neg[\forall y \in M : (\varphi(y) \Rightarrow y = x)])$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x\in M: (\neg\varphi(x)) \vee [\exists y\in M: \neg(\varphi(y) \Rightarrow y=x)]$$

$\Updownarrow$ $\qquad \neg(A\Rightarrow B)$ bedeutet $A\wedge(\neg B)$

$$\forall x\in M: [\underbrace{(\neg\varphi(x))}_{\substack{\varphi(x)\\ \text{gilt nicht}}} \vee [\underbrace{\exists y\in M: \varphi(y)\wedge y\neq x}_{\varphi(x)\text{ gilt nicht eindeutig}}]]$$

"M hat genau 3 verschiedene Elemente"

Vorschlag:

$$\left(\forall a\in M\left[\exists x\in M\ \exists y\in M\ \exists z\in M: [(x\neq y \wedge y\neq z \wedge z\neq x) \wedge (a=x \vee a=y \vee a=z)]\right]\right)$$

$$\wedge\ (M\neq\emptyset)$$

Problem: $\forall a\in\emptyset\ \overbrace{\exists x\in\emptyset: \varphi(x)}^{\varphi}$ ist wahr.

$\Downarrow$

$$\forall a: \underbrace{(\underbrace{a\in\emptyset}_{\text{das ist falsch}} \Rightarrow \varphi)}_{\text{wahr}} \Leftrightarrow \forall a: T$$

$\exists x \in M\ \exists y \in M\ \exists z \in M\ \forall a \in M:$

$$(*) \quad (x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x) \wedge (a = x \vee a = y \vee a = z)$$

Argument wie man hieraus $|M| = 3$ sieht

Mächtigkeit

$(*)$ bedeutet, wir finden $x, y, z \in M$ sodass

$(**)$ $\forall a \in M: (x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x) \wedge (a = x \vee a = y \vee a = z)$

Wir zeigen zuerst $|M| \geq 3$: Wende $(**)$ auf $a = x$ an (das entfernt den Allquantor)

hier geht es nicht um die Wahl von a, sondern nur darum, dass es überhaupt so ein a gibt.

Dann folgt $(x \neq y) \wedge (y \neq z) \wedge (z \neq x)$.

$$\Rightarrow |M| \geq 3.$$

Wir zeigen noch $|M| \leq 3$: $(***)$ Angenommen, $\tilde{a} \in M \setminus \{x, y, z\}$

Mächtigkeit $= 3$

$$\Rightarrow \tilde{a} \neq x \wedge \tilde{a} \neq y \wedge \tilde{a} \neq z$$

$$\Rightarrow \neg (\tilde{a} = x \vee \tilde{a} = y \vee \tilde{a} = z)$$

De-Morgan

Wende $(**)$ auf $a = \tilde{a}$: $\tilde{a} = x \vee \tilde{a} = y \vee \tilde{a} = z$

$\perp$ (Widerspruch!)

$\Rightarrow$ Annahme (***) falsch

$\Rightarrow$ $M = \{x, y, z\}$.