

Aufgabe 1 (Partialbruchzerlegung). Finde Stammfunktionen von

$$f:]-1, 3[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{(t-3)(t+1)},$$
$$g:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x-3}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}.$$

Aufgabe 2 (Euler-Substitution). Berechne das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}.$$

Aufgabe 3. *Aus der GOP-Nachklausur des Sommersemesters 2013:*

- (a) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Stelle die Aussage “ f ist *nicht* gleichmäßig stetig” mit einer prädikatenlogischen Formel dar, bei der die Liste der Quantoren zu Beginn steht.
- (b) Formuliere eine Version des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.
- (c) Nun sei

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cosh \sqrt{1+x^2}.$$

Beweise, dass f *nicht* gleichmäßig stetig ist.

Hinweis: Die Teilaufgaben (a) und (b) sollen hier helfen.

Aufgabe 4 (Ausgewählte Aktivierungselemente). **4.24**, Tschebyscheff-Polynome:
Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, 1]$ setze

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x).$$

Zeige, dass es sich bei T_n um ein Polynom vom Grad n handelt, durch Beweisen der folgenden Rekursionsgleichungen:

$$T_0(x) = 1,$$
$$T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

4.33: Berechne den Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\tanh x - x}$$

auf zwei verschiedene Weisen:

1. mit der Regel von l'Hôpital,
2. mittels geeigneten Anfangsstücken der Reihen für $\tan x$ und $\tanh x$ für $x \rightarrow 0$.

5.10, Integralversion der Dreiecksungleichung: Für Riemann-integrierbare $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, ist auch $|f|$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

5.21, Übungen zur Substitutionsregel: Finde eine Stammfunktion F für f in den folgenden Fällen:

1. $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$,
2. $f(x) = \frac{\log x}{x}$, $x > 0$,
3. $f(x) = \frac{\exp \arctan x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$,
4. $f(x) = xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$,
5. $f(x) = \frac{\log \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$,
6. $f(x) = \cot x$, $0 < x < \pi$,
7. $f(x) = \sinh 2x$, $x \in \mathbb{R}$.