Analysis Tutorium 7

Aufgabe 1 (Berechnung eines Integrals in $\mathbb{R}^2$). Wir betrachten die Menge

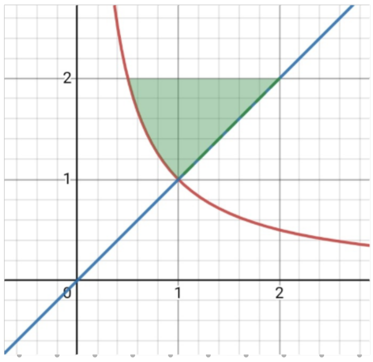
$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y,\ 1/x < y < 2,\ x>0\}$$

und die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \frac{y^2}{x^2}\mathbb{1}_A.$$

(sonst konvergiert das Integral nicht)

Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d(x,y)$.



f ist nichtnegativ messbar, daher ist Fubini anwendbar:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d(x,y) \overset{\uparrow}{=} \int_{1/2}^{1}\int_{1/x}^{2} \frac{y^2}{x^2}\,dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{x}^{2}\frac{y^2}{x^2}\,dy\,dx =$$

$$\left.\begin{matrix} 0<x<2 \\ 0<\frac{1}{x}<2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<2$$

$$= \int_{1/2}^{1}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{1/x}^{2}\frac{1}{x^2}\,dx + \int_{1}^{2}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{x}^{2}\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int_{1/2}^{1}\left(\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^5}\right)dx + \int_{1}^{2}\left(\frac{8}{x^2}-x\right)dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(8\left[-\frac{1}{x}\right]_{1/2}^{2} + \left[\frac{1}{4}\frac{1}{x^4}\right]_{1/2}^{1} - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(8\left(-\frac{1}{2}+2\right) + \frac{1}{4}(1-16) - \frac{1}{2}(4-1)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(12 - \frac{15}{4} - \frac{3}{2}\right) = 4 - \frac{5+2}{4} = \frac{16-7}{4} = \frac{9}{4}$$

Aufgabe 2 (Anwendung des Satzes von Fubini)**.** Sei $s > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \frac{e^{-sx}\sin^2(x)}{x}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(1+4s^{-2}\right).$$

Hinweis: Berechnen Sie $\int_{[0,\infty)\times[0,1]} e^{-sx}\sin(2xy)\,d(x,y)$ auf zwei verschiedene Weisen mit dem Satz von Fubini.

Fubini für integrierbare Funktionen!

$$\int_{[0,\infty[\times[0,1]} \left|\frac{\sin(2xy)}{e^{sx}}\right| d(x,y) \underset{(s\in\mathbb{R})}{\leq} \int_{[0,\infty[\times[0,1]} \frac{1}{e^{sx}}\,d(x,y)$$

$$\underset{\substack{\text{Fubini für}\\ \text{nichtnegative}\\ \text{Funktionen}}}{=} \int_0^1\int_0^\infty e^{-sx}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_0^\infty dy = \int_0^1 \frac{1}{s}\,dy = \frac{1}{s}.$$

Also: $f: \underbrace{[0,\infty[\times[0,1]}_{=:E} \to \mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto \dfrac{\sin(2xy)}{e^{sx}}$ ist integrierbar.

Fubini 1:

$$\int_E f\,d\lambda^2 = \int_0^\infty\int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{e^{sx}}\,dy\,dx = \int_0^\infty \left[\frac{-\cos(2xy)}{2x\,e^{sx}}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1-\cos(2x)}{2x\,e^{sx}}\,dx \underset{\substack{\cos(2x)=\cos^2x-\sin^2x\\ =1-2\sin^2x}}{=} \int_0^\infty \frac{\sin^2x}{x\,e^{sx}}\,dx$$

Fubini 2:

$$\int_E f\,d\lambda^2 = \int_0^1 \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin(2xy)}{e^{sx}}\,dx}\,dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2i}\left(e^{2ixy-sx}-e^{-2ixy-sx}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\left[\frac{1}{\underbrace{2iy-s}_{\neq 0 \text{ da } s\in\mathbb{R}}}e^{2ixy-sx}\right]_0^\infty - \left[\frac{1}{-2iy-s}e^{-2ixy-sx}\right]_0^\infty\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{2iy-s}-\frac{1}{2iy+s}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{2iy+s+2iy-s}{s^2+4y^2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2y}{s^2+4y^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{2y}{s^2+4y^2}\,dy =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\log(s^2+4y^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log(s^2+4)-\log(s^2)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\log\left(1+\frac{4}{s^2}\right),$$ wie gewünscht.

Aufgabe 3 (Matrixnormen)**.** Seien $N, M \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^N$ (bzw. $\mathbb{R}^M$). Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ definieren wir die *induzierte Matrixnorm* durch

$$\|A\| := \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^N\\ \|x\|\le 1}} \|Ax\|.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gelten die Gleichheiten

$$\|A\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^N\\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^N\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

(b) $\|A\|$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^{M\times N}$.

(c) Für alle $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ und $x \in \mathbb{R}^N$ gilt $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

(d) Für alle $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ und $B \in \mathbb{R}^{N\times K}$ gilt $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

(e) Ist $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, so gilt für jeden Eigenwert λ von A, dass $|\lambda| \le \|A\|$.

(f) Wählen wir als Norm auf $\mathbb{R}^N$ speziell $\|x\| := |x|' := \max_{1\le n\le N}|x_n|$, so gilt für die induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{M\times N}$, dass

$$\|A\|' = \max_{1\le i\le M} \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}|.$$

(a) – (c): klar.

(d): $\|AB\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|}$

$= \max_{x:\, Bx\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|}$

[für $B=0$ ist nichts zu zeigen]

$\max_{x:\, Bx\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$

$\le \max_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \max_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$

$= \|A\| \cdot \|B\|.$

e) $0 \neq v \in \ker(A - \lambda \cdot \mathrm{id})$

$$\Longrightarrow \|A\| \underset{\text{Def.}}{\geq} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \frac{\|\lambda v\|}{\|v\|} = \lambda.$$

f) „$\le$": Für x mit $\|x\| \le 1$ folgt:

$$\|Ax\| = \max_i \left|\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j\right)\right| \underset{\Delta\text{-}\neq}{\le} \max_i \sum_j |A_{ij}| \underbrace{|x_j|}_{\le \max_n |x_n| = \|x\| \le 1} \le \max_i \sum_j |A_{ij}|.$$

„$\ge$": Sei $\max_i \sum_j |A_{ij}| = \sum_j |A_{kj}|$. Betrachte

$$x = \left(1_{\{A_{kj}\ge 0\}} - 1_{\{A_{kj}<0\}}\right)_{j=1}^{N} \in \mathbb{R}^N.$$

Offenbar $\|x\| \le 1$, aber

$$\|A\| \ge \|Ax\| = \max_i \left|\sum_j A_{ij} x_j\right| \ge \left|\sum_j A_{kj} x_j\right| \overset{\text{Def. von } x}{=} \sum_j |A_{kj}|,$$

wie gewünscht.

Bonusaufgaben

B1: Berechne $\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\log x}\,dx$, $a \geq 0$. Hinweis: Berechne $\int_0^a x^y\,dy$.

$= \log(a+1)$

„Integration unter dem Integral" (aber eigentlich leitet man den Integranden ab)

B2: Zeige: $f:]0,1[^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{y-x}{(2-x-y)^3}$ ist nicht integrierbar.

z.B. so: $\int_0^1 \int_0^1 f\,dx\,dy = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = \int_0^1 \int_0^1 f\,dy\,dx$