Analysis 1, Tutorium 12

5.2.2021

Aufgabe 1 (Gegenbeispiel zur Vertauschung von uneigentlichem Integral und Grenzwert bei gleichmäßiger Konvergenz). Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$f_n\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \underbrace{\frac{x}{n^2}}_{\geq 0} \underbrace{e^{-\frac{x}{n}}}_{\geq 0}.$$

Zeige: $f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n\to\infty} 0$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = 1$.

Satz 5.41 (Vertauschbarkeit von Integral und gleichmäßigem Limes) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Sind alle f_n Riemann-integrierbar und gilt $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *gleichmäßig*, so ist auch f Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx.$$

$f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f :

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{R/n} t\, e^{-t} = \lim_{R\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^{R/n} = 1$$

$\frac{x}{n} = t$, $\quad dx = \frac{\partial}{\partial t}(nt)\,dt = n\,dt$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1.$$

$$f_n \xrightarrow{\text{glm.}} \underset{0}{f} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in \overset{\text{domain}}{\operatorname{dom}(f_n)}:$$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$f_n(x) \overset{\text{"}}{=} |f_n(x)|$$

$\Uparrow$

$$\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_0^+)^{\mathbb{N}} : \forall x \in \mathbb{R}^+ : \ |f_n(x)| \leq a_n \ \wedge \ a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Tutorium 6: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^+ : \ x e^{-x} \leq 1.$

Insbesondere: $\quad f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Alternativ: Berechne $\max_{x \in \mathbb{R}^+} f_n(x)$.

Es gilt: $f_n'(x) = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} + \frac{x}{n^2}\left(-\frac{1}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$.

$= \underbrace{e^{-\frac{x}{n}} \frac{1}{n^2}}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{x}{n}\right)}_{\substack{<0 \text{ für } x>n \\ >0 \quad x<n \\ =0 \quad x=n}}$

<0 für $x>n$ $\Rightarrow$ f_n fällt auf $]n,\infty[$

>0 $x<n$ $\Rightarrow$ -- steigt $]0,n[$

$=0$ $x=n$

$\Rightarrow$ f_n nimmt bei $x=n$ das globale Maximum an.

$\forall x \in \mathbb{R}^+: \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}}}{f_n(x)} \leq f_n(n) = \frac{1}{n} e^{-1}$

Aufgabe 2. Gegeben $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$, berechne

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Satz 6.8 (Gliedweise Differentiation von Potenzreihen) *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe und

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

die gliedweise abgeleitete Reihe.
Dann haben f und g den gleichen Konvergenzradius R, und es gilt für $|x| < R$:

$$\frac{d}{dx} f(x) = g(x).$$

$\frac{d}{dx} \sum_n a_n x^n = \sum_n \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum_n n a_n x^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n x^{n-1}}_{= \frac{d}{dx} x^n} = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x\,(x+1)}{(1-x)^3}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x\,(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}.$$

Otto Forster, Ana 1, §21

Behauptung: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n = \frac{x}{(1-x)^{k+1}} \, A_k(x)$

"Euler-Polynom"

Euler-Zahlen

Majoranten-kriterium

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) + C$$

$$0 = -\underbrace{\log(1-0)}_{=0} + C = C$$

Aufgabe 3. (a) Zeige mit partieller Integration für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} & \text{falls } n = 2k \\ \frac{4^k}{2k+1}\binom{2k}{k}^{-1} & \text{falls } n = 2k+1 \end{cases}$$

(b) Berechne

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

auf zwei verschiedene Weisen:

1. mittels der Substitution $u = \arcsin x$,
2. mit der Reihenentwicklung

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

und (a).

$$f^n = f \circ \cdots \circ f$$

$$\underbrace{f^n = f \cdots f}_{\text{pktweise}}$$

$$\sin^{-1} = \arcsin$$

$$\sin^2 = \underbrace{\sin \cdot \sin}_{\text{pkt. mult.}}$$

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\|$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} 1_{[a,b]}\,dx\right)$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = 1.$$

Tut. 10

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\sin^{n-1}(x)\,dx = \mathcal{L}(I_0, I_1, \ldots, I_{n-1})$$

$$u = \sin(x), \quad v = \sin^{n-1}(x)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \leadsto \quad (uv)' - uv' = u'v$$

$$\Downarrow$$

$$\int u'v\,dx = \underbrace{\int (uv)'\,dx}_{=[(uv)]} + {}$$

$$- \int (uv')dx$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \; \sin^{n-1} x \; dx$$

Stammfkt / bleibt stehen

$$= \left[-\cos x \; \sin^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} \cancel{-} \int_0^{\pi/2} (\cancel{-}\cos x)\,(n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x \; dx$$

Ableitung

$\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(0) = 0$

$$= 0 + \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\,\sin^{n-2} x\,(n-1)\,dx$$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)$$

Linearität des Integrals

$x^2 + y^2 = 1$
wird von $(\sin x, \cos x)$ parametrisiert

$$\Rightarrow I_n = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)$$

$$\Leftrightarrow n I_n = (n-1) I_{n-2} \Leftrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

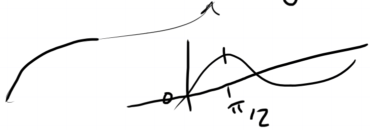
$\underline{n = 2k}$: $$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2(k-1)} = \frac{2k-1}{2k}\,\frac{2k-3}{2k-2}\, I_{2(k-2)}$$

$$= \dots = \underbrace{\frac{2k}{2k}}\,\frac{2k-1}{2k}\;\underbrace{\frac{2k-2}{2k-2}\;\frac{2k-3}{2k-2}}\;\frac{2k-4}{\dots}\cdots J_0$$

$$= \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\, I_0 = \frac{\pi}{2}\binom{2k}{k}\frac{1}{4^k}.$$

$\underline{n = 2k+1}$ $$I_{2k+1} = \frac{4^k}{2k+1}\binom{2k}{k}^{-1}.$$

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} u\,du = \left[\tfrac{1}{2}u^2\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}.$$



$u = \arcsin x \qquad x = \sin u$

$$dx = d(\sin u) = \cos u\,du = \sqrt{1-\sin^2 u}\,du = \sqrt{1-x^2}\,du$$

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arcsin(x) \qquad |x| < 1$$

$$= \lim_{R\nearrow 1} \underbrace{\int_0^R \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}}_{\text{konvergiert gleichmäßig auf } [0,R]} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{beschränkt auf } [0,R]}}_{\text{konv. gleichm. auf } [0,R]}\,dx$$

$$= \lim_{R\nearrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \underbrace{\int_0^R \underbrace{\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\geq 0}\,dx}_{\xrightarrow{R\nearrow 1} \int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{monotone}\\ \text{Konvergenz}\\ \text{für Reihen}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \cdots \underbrace{\int_0^1 x^{2k+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}_{x = \sin u}$$

$$= \sum_k \cdots \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1}(u)\, du$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ (a)}}{=} \sum_k \frac{1}{(2k+1)^2} .$$

1. & 2. $\Rightarrow \quad \sum_k \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$\Rightarrow \sum_k k^{-2} = \sum_k (2k)^{-2} + \sum_k (2k+1)^{-2}$$

$$= \frac{1}{4} \sum k^{-2} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel\\ \zeta(2)}}{\sum_k k^{-2}} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} . \quad \square$$