Analysis Tutorium 6 1

30.11.2022

Aufgabe 1 (Volumen von Rotationskörpern)**.** Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion und

$$R := \{(r,x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq f(r)^2\}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri das Volumen von R.

Satz 3.1. *(Cavalierisches Prinzip) Sei $E \subset \mathbb{R}^{K+L}$ Lebesgue-messbar. Dann ist für* fast alle *$y \in \mathbb{R}^L$ E_y Lebesgue-messbar und die Funktion $y \mapsto |E_y|$ ($|\cdot|$ ist hier das K-dimensionales Maß) ist Lebesgue-messbar mit*

$$\int_{\mathbb{R}^L} |E_y| \, \mathrm{d}y = |E| \, .$$

Ist E Borel-messbar, dann ist für alle $y \in \mathbb{R}^L$ E_y Borel-messbar und die Funktion $y \mapsto |E_y|$ ist Borel-messbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^L} |E_y| \, \mathrm{d}y = |E| \, .$$

hier: $E_y = \{ x \in \mathbb{R}^K \mid (x,y) \in E \}$

Zur Aufgabe: Wende den Satz auf $E = R$,

$E_r = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (r,x,y) \in R$, d.h. $x^2+y^2 \leq f(r)^2 \}$ an.

- R ist messbar, denn f ist stetig

$$\Rightarrow \; [a,b] \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$(r,x,y) \longmapsto x^2+y^2-f(r)^2$$

ist stetig und $R = g^{-1}(]-\infty, 0])$

ist abgeschlossen.

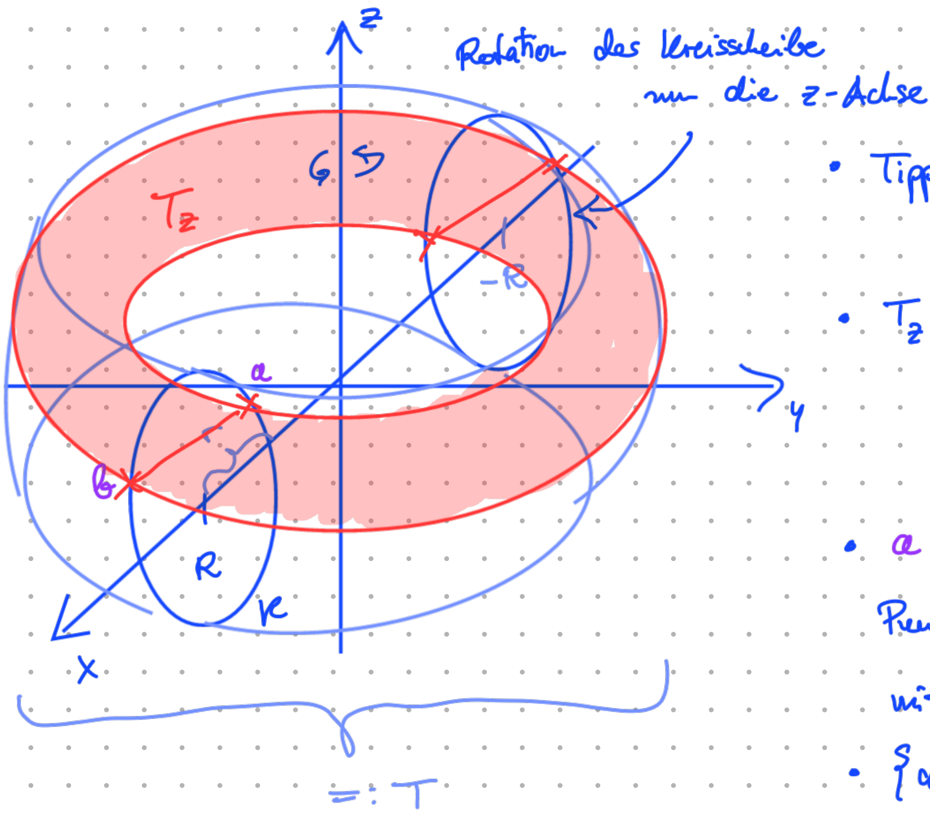
- $\xrightarrow{\text{Cavalieri-Prinzip}}$ $|R| = \int_{[a,b]} \underbrace{|E_r|}_{\substack{\text{2-dim. Ball} \\ \text{vom Radius} \\ f(r)}} dr = \int_{[a,b]} \pi f(r)^2 \, dr \underset{\substack{\text{stetig} \\ \Rightarrow \text{Riemann-} \\ \text{integrierbar}}}{=} \pi \int_a^b f(r)^2 \, dr$

$\square$

Aufgabe 2 (Volumen eines Torus). Sei $0 < r < R < \infty$ und $T \subset \mathbb{R}^3$ der Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, (x-R)^2 + z^2 \le r^2\}$$

um die z-Achse entsteht. Berechnen Sie mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri das Volumen von T.



- Tipp: Halte z-Koordinate fest, berechne T_z.
- $T_z = \{(x,y,z) \mid \|pr_{x\text{-}y\text{-Ebene}}(a)\|^2 \le x^2+y^2 \le \|pr_{x\text{-}y\text{-Ebene}}(b)\|^2\}$
- a & b sind die eindeutigen Punkte auf dem Kreisring ∂K mit Koordinate z.
- $\{a, b\} = \underbrace{\{(x,0,z) \mid (x-R)^2 + z^2 = r^2\}}$

$\iff (x-R)^2 = r^2 - z^2$

$\iff x - R = \pm\sqrt{r^2 - z^2}$

$\iff x = \pm\sqrt{r^2-z^2} + R$

$= \{(\pm\sqrt{r^2-z^2} + R, 0, z)\}$

für $r^2 \ge z^2$, d.h. $-r \le z \le r$.

- Ferner: $\|pr_{x\text{-}y\text{-E.}}(\pm\sqrt{r^2-z^2}+R, 0, z)\|^2 = (\pm\sqrt{r^2-z^2}+R)^2$
- Es folgt: $|T_z| = |\text{Kreis mit Radius } \sqrt{r^2-z^2}+R|$

$- |\text{Kreis mit Radius } -\sqrt{r^2-z^2}+R|$

$= \left((\sqrt{r^2-z^2}+R)^2 - (-\sqrt{r^2-z^2}+R)^2\right)\pi$

$= (\sqrt{r^2-z^2}+R + (-\sqrt{r^2-z^2}+R)) \cdot$

$\cdot (\sqrt{r^2-z^2}+R - (-\sqrt{r^2-z^2}+R)) \cdot \pi$

$= 4R\sqrt{r^2-z^2}\,\pi$

- Also zuletzt: $|T| = \int_{-r}^{r} |T_z| \, dz = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - z^2} \, dz =$

$$= 4\pi R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 x} \; r \cos x \, dx =$$

subst.: $z = r \sin x$

$dz = r \cos x \, dx$

$$= 4\pi R r^2 \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx}_{=: I} = 2\pi^2 R r^2$$

$$I \overset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{\Big[\sin x \cos x \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{= 0} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \pi - I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{2}$$

$\square$

Aufgabe 3 (Verallgemeinerung des HDI). Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, differenzierbar. Das heißt, dass F differenzierbar auf (a,b), linksseitig differenzierbar in a,

$$F'(a) := \lim_{h \searrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h},$$

sowie rechtsseitig differenzierbar in b ist,

$$F'(b) := \lim_{h \nearrow 0} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}.$$

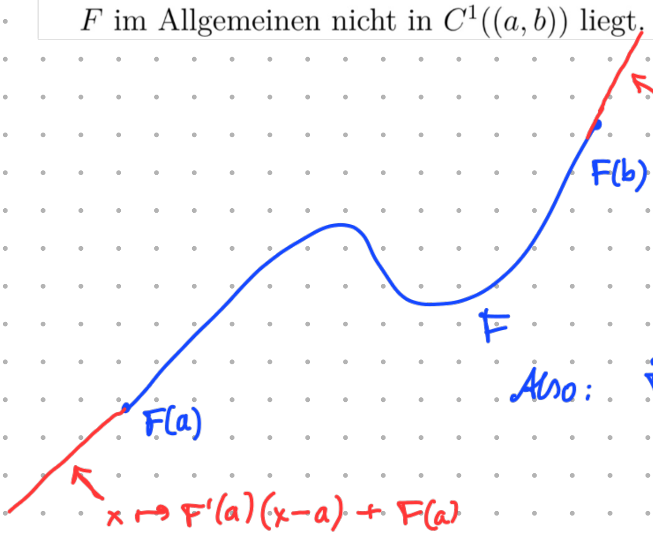
Weiter sei F' beschränkt. Zeigen Sie: F' ist Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$F(b) - F(a) = \int_{(a,b)} F' d\lambda.$$

Hinweis: Setzen Sie F linear fort. Verwenden Sie den Mittelwertsatz. Beachten Sie, dass F im Allgemeinen nicht in $C^1((a,b))$ liegt.

$$x \mapsto F'(b)(\underbrace{x-b}_{x=b}) + \underbrace{F(b)}_{y=F(b)}$$

soll der Aufpunkt sein



Also: $\tilde{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{F}(x) = \begin{cases} F'(b)(x-b) + F(b) & \text{f. } x > b \\ F(x) & \text{f. } a \le x \le b \\ F'(a)(x-a) + F(a) & \text{f. } x < a \end{cases}$

eine Lipschitz-stetige, differenzierbare Fortsetzung von F:

$$L := \sup_{x \in [a,b]} |F'(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } F' \text{ beschränkt ist}}}{<} \infty$$

$\Rightarrow$ Für $x, y \in \mathbb{R}$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in]x,y[$ mit

$$|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(y)| = |\underbrace{\tilde{F}'(\xi)}| \, |x-y| \le L|x-y| \qquad (*)$$

$$= \begin{cases} F'(b) & \text{für } \xi > b \\ F'(\xi) & \text{für } a \le \xi \le b \\ F'(a) & \text{für } \xi < a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\tilde{F}(x+h) - \tilde{F}(x)}{h}}_{|\cdot| \le L \ (*)} dx \underset{\text{majorisierte Konvergenz}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_a^b (\tilde{F}(x+h) - \tilde{F}(x))dx$$

$y = x+h$

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{a+h}^{b+h} \tilde{F}(y)\,dy - \int_a^b \tilde{F}(x)\,dx \right) \overset{\text{für } h \searrow 0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_b^{b+h} \tilde{F}(x)\,dx - \int_a^{a+h} \tilde{F}(x)\,dx \right) =$$

$= F(b) - F(a).$ (analog für $h \nearrow 0$)

<u>Bem.</u>: Hier wurde verwendet, dass $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} g(x)\,dx = g(z)$ für stetige g.

z.B. so:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_z^{z+h} \inf_{y\in[z,z+h]} g(y)\,dx \le \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_z^{z+h} g(x)\,dx \le \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_z^{z+h} \sup_{y\in[z,z+h]} g(y)\,dx$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\lim_{h\to 0} \inf_{y\in[z,z+h]} g(y) = g(z) = \lim_{h\to 0} \sup_{y\in[z,z+h]} g(y)$$

Stetigkeit von g.

<u>Bonusaufgaben von letzter Woche:</u>

<u>B1</u>: Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

Berechne

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 k \log\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{k^2}\right) dx = 0$$

<u>Hinweis</u>: Zeige $\forall t \geq 0$: $\log(1+t) \le 2\sqrt{t}$

$$\& \quad k \log\left(1+\frac{|f(x)|^2}{k^2}\right) = \frac{1}{k}\log\left(\left(1+\frac{|f(x)|^2}{k^2}\right)^{k^2}\right)$$

$$\le \frac{1}{k}\log\left(\exp |f(x)|^2\right)$$

$$= \frac{1}{k}|f(x)|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

<u>B2</u>: Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeige:

a) $x \mapsto x^k f(x)$ ist integrierbar & $\lim_k \int_{[0,1]} x^k f(x)\,dx = 0$

b) Falls f stetig differenzierbar, so folgt:

$$\lim_{k\to\infty} k \int_{[0,1]} x^k f(x)\,dx = f(1)$$

zu a): Dominierte Konvergenz. $(x \leq 1)$

zu b): Partielle Integration:

$$k\int_0^1 x^k f(x)\,dx = \underbrace{\left[\frac{k}{k+1}x^{k+1}f(x)\right]_0^1}_{=\frac{k}{k+1}f(1)\xrightarrow[k]{} f(1)} - \overbrace{\frac{k}{k+1}}^{\xrightarrow{k}1}\overbrace{\int_0^1 x^{k+1}f'(x)\,dx}^{\xrightarrow{k} 0,\ s.(a)} \xrightarrow[k\to\infty]{} f(1)$$