Analysis 1, Tutorium 2
13. 11. 2020

rtmader.github.io/ana1

Für Gruppenarbeit ("Breakout-Session" in Zoom),
nutze Zoom-Whiteboard, oder Bildschirmübertragung + Schreibprogramm (OneNote, ...)

oder: Online-Whiteboards, z.B. awwapp.com

Relation: Mengen M, N

R zw. Elementen aus M & N

$$\hat{=} \quad R \subseteq M \times N = \{(x,y) \mid x \in M, y \in N\}$$

$x \in M$ steht in Relation R zu $y \in N$

$$\iff (x,y) \in R \quad :\iff \quad x R y.$$

z.B. $<$-Relation auf $\mathbb{N}_0$

Also: $< \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

z.B.: $1 < 2 \iff (1,2) \in <$

Funktion f von M nach N

(Schreibweise: $f: M \to N$)

$\hat{=}$ Zuordnung von einem Element $f(m) \in N$ zu jedem Element $m \in M$

Das kann man als Paar $(m, f(m)) \in M \times N$ auffassen.

$\leadsto$ Also: $f \subseteq M \times N$ ist eine Relation, mit eindeutiger Zuordnung:

$\forall m \in M [\exists n \in N : (m,n) \in f \wedge$
$\forall n_1 \in N \; \forall n_2 \in N : (m,n_1) \in f \wedge (m,n_2) \in f \Rightarrow n_1 = n_2 .]$

oder: $\forall m \in M \; \exists! n \in N : (m,n) \in f$.

Abbildung (f, M, N)

↳ Das ist eine Funktion $f \subseteq M \times N$

Unterschied Abbildung ↘ Fkt.

"Sei $f : M \to N$ eine Abbildung"

$\Updownarrow$

"Seien M, N Mengen, und $f \subseteq M \times N$ eine Funktion"

Induktionsschema: Für jede Aussage $\varphi(n)$ über natürliche Zahlen n gilt:

Wenn $\varphi(0)$ gilt, und wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ aus $\varphi(n)$ die Aussage $\varphi(N(n))$ folgt, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $\varphi(n)$.

In Formeln: Das ist bei einem Induktionsbeweis zu zeigen

$$[\varphi(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 : (\varphi(n) \overset{!}{\Rightarrow} \varphi(N(n)))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : \varphi(n).$$

$\varphi(0)$ $\leadsto$ die Aussage gilt für $0 \in \mathbb{N}_0$ (Induktionsanfang)

Für jede natürliche Zahl n folgt die Aussage $\varphi(n+1)$ aus der Aussage $\varphi(n)$ (Induktionsschritt)

Induktionsvoraussetzung

! Induktionsschluss

Induktionsschema – Variante:

$$[\forall n : ((\underbrace{\forall m < n : \varphi(m))}_{\text{Im Induktionsschritt steht hier mehr zur Verfügung als in der oberen Variante}} \Rightarrow \varphi(n))] \Rightarrow \forall n : \varphi(n)$$

Unterschied im Induktionsschritt:

Oben: $\underbrace{\text{Gegeben } \varphi(n)}_{IV}$ ZZ: $\varphi(n+1)$

Unten: Gegeben $\varphi(0), \varphi(1), \ldots \varphi(n)$ ZZ: $\varphi(n+1)$

Insbesondere ist bei Verwendung des unteren Induktionsschemas auch $(\underbrace{\forall m < 0 : \varphi(m)}_{\text{hier steht noch nichts zur Verfügung}}) \Rightarrow \varphi(0)$ zu zeigen.

2. Aus der Nachklausur des Wintersemesters 2012/2013:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ werde rekursiv wie folgt definiert:

$$a_n := 1 + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k a_k}{k^k} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

"leere Summe"

a_0

(In dieser Formel ist der Rekursionsanfang enthalten.) Beweise mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = n^n. \qquad \varphi(n) \mathrel{\hat{=}} a_n = n^n$$

Das kann man bspw. mit der Variante des Induktionsschemas zeigen.

IA: Zz: $\varphi(0)$. $\quad 0^0 := 1$

$$a_0 = 1 + \underbrace{(0-1)\underbrace{\sum_{k=0}^{-1} \frac{n^k a_k}{k^k}}_{\text{leere Summe}}}_{=0}$$

$$= 1 = 0^0.$$

Induktionsvoraussetzung

IV: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $\underbrace{\forall m < n : \varphi(m)}$.

Zz: $\varphi(n)$.

$$\Updownarrow$$

$$\forall m < n : a_m = m^m$$

$$a_n \overset{!}{=} n^n$$

Es gilt: $\quad a_n = 1 + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k a_k}{k^k}$

$$= 1 + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{n^k k^k}{k^k}}_{=n^k}$$

$$\boxed{\forall k \in \{0,\dots,n-1\} : a_k = k^k}$$

$$= 1 + n\sum_{k=0}^{n-1} n^k - 1 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} n^k$$

Distributivgesetz

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} n^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} n^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} n^k - \sum_{k=0}^{n-1} n^k$$

Anschauliches:
$$\sum_{k=0}^{n-1} n^{k+1} = n^{0+1} + n^{1+1} + \dots + n^{n-1+1}$$
$$= n^1 + n^2 + \dots + n^n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} n^k$$

"Indexshift"

$$= \cancel{1} + \underbrace{\cancel{\sum_{k=1}^{n-1} n^k}} + n^n - \Big(\underbrace{\cancel{n^0}}_{=1} + \underbrace{\cancel{\sum_{k=1}^{n-1} n^k}} \Big)$$

$$= n^n$$

also gezeigt: $a_n = n^n$. Das beendet den Induktionsschritt.

[Beginn der Breakout-Sessions]