Analysis 1 - Tutorium 10

22. 1. 2021

Aufgabe 1 (Rechentraining zu Taylorapproximationen). Später beweisen wir für n-fach in 0 differenzierbare Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Umgebung von 0, die Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad \text{für } x \to 0.$$

$\varphi \in o(x^n)$

$\iff \quad \frac{\varphi(x)}{x^n} \xrightarrow{x \to 0} 0$

(a) Berechne $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n + \sqrt[3]{n^2}} - \sqrt[3]{n} \right)$ unter Verwendung der Taylorapproximation der Funktion $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ nahe 0.

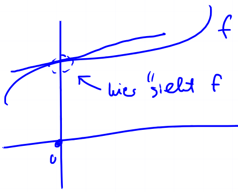
(b) Finde die Taylorentwicklung von $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^{-2}$ nahe 0.

(c) Finde $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{\cos(x)} = a + bx + cx^2 + o(x^3)$ für $x \to 0$.

$$\frac{d^k}{dx^k} f \Big|_{x=0} = f^{(k)}(0) = f^{\overbrace{''\cdots''}^{k\text{-mal}}}(0)$$

$$\sqrt[3]{1+x} = \exp\left(\tfrac{1}{3} \log(1+x)\right) \qquad f^{(0)} = f, \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x), \quad x \to 0$$



wie sieht f aus wie die Tangente $f(0) + f'(0)x$

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}, \qquad f'(x) \overset{?}{=} \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x), \quad x \to 0$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x + o(x), \quad x \to 0$$

$$\sqrt[3]{1+x} = f(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \varphi(x), \qquad \boxed{\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow{x \to 0} 0.}$$

$\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

Umgebung von 0 $\qquad (\mathcal{U} =]-\varepsilon, \varepsilon[, \ \varepsilon > 0)$

$$\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n^2}} - \sqrt[3]{n} \xrightarrow{n\to\infty} ? \quad \tfrac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{n^2} = n^{2/3} = n \cdot n^{-1/3}$$

$$\| $$

$$\sqrt[3]{n}\left(\underbrace{\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}_{} - 1\right) = \frac{1}{3} + \underbrace{\sqrt[3]{n}\,\varphi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}_{n\to\infty\ ?}$$

$$= f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = 1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

für n genügend groß : $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \in \mathcal{U} = \operatorname{dom}\varphi$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\,\varphi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\varphi(x) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n (n+1)!\,(1+x)^{-2-n}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

$$a_k \stackrel{?}{=} (-1)^k (k+1)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{1+x} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k\right)^2 =$$

Produktformel

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n+m=k} (-1)^n(-1)^m\right)}_{(-1)^k \sum_{n+m=k} 1 \;=\; (-1)^k(k+1)} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1) + o(x^n)$$

Aufgabe 2. Zeige: Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist differenzierbar in allen $x \in \mathbb{R}$ und berechne f'. Ist f' stetig?

<u>Bemerke:</u> "Differenzierbarkeit ist eine lokale Eigenschaft."

Stetigkeit
Glattheit

$\Longleftrightarrow$ [$f: \underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap \text{ offen}}}{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar (stetig, glatt)

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathcal{U} \; \exists V \subseteq \mathcal{U}$ offene Umgebung von x:

$f|_V : V \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar. (stetig, glatt)]

$0 \neq x \in \mathbb{R}$, Sei $\mathcal{U} \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{U}$, $0 \notin \mathcal{U}$

$$f|_{\mathcal{U}} : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = (f|_{\mathcal{U}})'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(0) \overset{?}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} h \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{-1 \leq \cdot \leq 1} = 0$$

$$0 = \lim_{h \to 0} -h \leq \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \leq \lim_{h \to 0} h = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \underbrace{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \underbrace{- \cos\left(\frac{1}{x}\right)}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

sieht um 0 aus wie 0

ist das stetig?

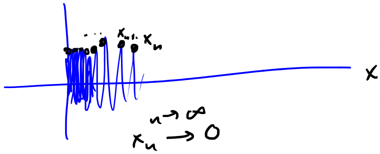
Nein, denn f' ist nicht folgenstetig:

Setze $x_n := \frac{1}{2\pi n}$.

" $f'(x)$ sieht aus wie $-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ nahe 0"

Dann: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

$$f'(x_n) = 2x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) + - \cos\left(\frac{1}{x_n}\right)$$



$x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$= 0 - \cos(2\pi n)$$

$$= -1 \quad \cancel{\xrightarrow{n\to\infty}} \quad f'(0) = 0$$

$\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$

$\cos(2\pi n) = 1$

$\Rightarrow$ f' nicht folgenstetig $\Leftrightarrow$ f' nicht stetig.

Aufgabe 3 (Riemannsummen zu $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$). (a) Berechne $\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ unter Verwendung der komplexen Exponentialfunktion und der geometrischen Summe.
(b) Folgere:

$$\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

(a) $$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{ix})$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\operatorname{Im}(\underbrace{a+bi}_{=z}) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

stetig

$$\overline{e^{ix}} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}} = \lim_{m\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{m} \frac{(ix)^k}{k!}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{(\overline{ix})^k}{k!}$$

$$-ix = \overline{ix}$$

$$= \exp(\overline{ix}) = e^{-ix}.$$

$$y = e^{i\frac{\pi}{2n}} \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{\pi k}{2n}} = (**)$$

$\ker \exp : (\mathbb{C},+) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot) = \{2\pi k i \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\cancel{\ }\; i\frac{\pi}{2n}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} y^k = \frac{1-y^n}{1-y}, \quad y \neq 1$$

$$\left(\underline{\left(\sum_{k=0}^{n-1} y^k\right)(1-y) = \sum_{k=0}^{n-1} y^k - \sum_{k=1}^{n} y^k} = \underline{1-y^n} \right)$$

gilt auch für $y \in \mathbb{C}$

$$(**) = \frac{1-\left(e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)^n}{1-e^{i\pi/2n}}$$

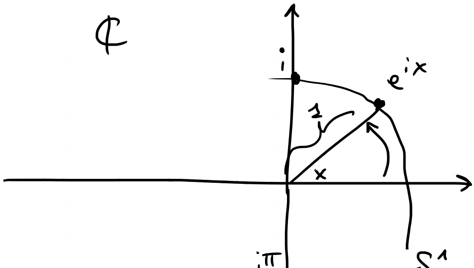
$$= \frac{1-i}{1-e^{i\pi/2n}}$$

$$y = \left(e^{i\frac{\pi}{2n}}\right) \overset{?}{=} \Big(\underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i}\Big)^{1/n}$$

wie definiert?

$$y^n = i \qquad \neq$$

$$(y')^n = i \qquad y' = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}\right)}$$



$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$$

$$\| $$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1-i}{1-e^{i\pi/2n}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\left(1-e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right)(1-i)}{\left|1-e^{i\pi/2n}\right|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{|1-e^{i\pi/2n}|^2} \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) - 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right)$$

$$\frac{\pi}{2n} \sum_{k} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) = \frac{\pi}{2n} \frac{1}{|1-e^{i\pi/2n}|^2} \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) - 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right)$$

... siehe Lösung ...?