Lineare Algebra 2
Tutorium 2, 21.4.2021

Warm-Up

Richtig oder Falsch?

$e_j \mapsto e_j^*$

$V \hookrightarrow V^*$

$V^* \hookrightarrow V^{**}$ injektiv

1. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann ist $V^* \cong V$. ✗
2. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann ist $V^{**} \cong V$. ✗
3. Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Dann ist $V^{**} \cong V$.
4. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ist M eine Teilmenge von V, so ist M^0 ein Unterraum von V.
5. Die Abbildung $V^* \times V \to K, (f, v) \mapsto f(v)$ ist eine nicht-ausgeartete Bilinearform. ✓
6. Die begleitende Matrix einer Bilinearform ist unabhängig von der Wahl einer Basis. ✗

1. $V = K[x] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} K$ ← Abzählbar falls K abzählbar (z.B. $K = \mathbb{Q}$)

$$x^j \mapsfrom (\delta_{ji})_{i \in \mathbb{N}_0} = e_j$$

$$V^* = \mathrm{Hom}_K\Big(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} K, K\Big) \cong \prod_{i \in \mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}_K(K, K) = \prod_{i \in \mathbb{N}_0} K$$

$\{$lineare Abbildungen von $V \to W\} = \mathrm{Hom}_K(V, W)$

$\prod_{i \in \mathbb{N}_0} \mathbb{Q}$ enthält beliebige Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$

$\prod_{i \in \mathbb{N}_0} \mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{R}$, $\quad (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$

$$\bigoplus_{i \in I} \underbrace{V_i}_{\text{VR}} = \Big\{ (v_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \underbrace{\prod_{i \in \mathbb{N}_0} V_i}_{\text{Kartesisches Produkt}} \;\Big|\; \text{Alle bis auf endlich viele } v_i = 0 \Big\}$$

3. $$V \longrightarrow V^{**} = \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$$
$$= \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K)$$

$$v \longmapsto \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_K(V,K) & \longrightarrow & K \\ \rotatebox{90}{$\in$}\; f & \longmapsto & f(v) \\ V \to K & & \end{array} \right)$$

ist ein Isomorphismus falls $|\dim_K V| < \infty$.

5. $$V^* \times V \longrightarrow K$$
$$\underline{(f, v) \longmapsto f(v)} = \langle f, v \rangle$$

nicht-ausgeartete Bilinearform

$$b : U \times W \longrightarrow K$$ Bilinearform (linear in jedem Arg.)

b heißt nicht-ausgeartet, falls
$\forall v \in V \setminus \{0\}\ \exists w \in W : b(v,w) \neq 0$

$\iff$ $\forall v \in V\setminus\{0\}$: Die Funktion $w \mapsto b(v,w)$ ist nicht die Nullfunktion

$$\iff \ker \left(\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(W,K) \\ v & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & K \\ w & \longmapsto & b(v,w) \end{array} \right) \end{array} \right) = 0$$

$V = U$, $W = V^*$

$$V \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V^*, K) = V^{**}$$

4. $M^\circ = \{ \alpha \in V^* \mid \langle \alpha, m \rangle = 0 \quad \forall m \in M \}$

$\subseteq V^{*}$

$$\Phi_X : X \longrightarrow X^{**}$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} X^* \longrightarrow K \\ f \longmapsto f(x) \end{pmatrix}$$

$F : V \longrightarrow W$

Zeige, dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_V"'] & W \arrow[d, "\Phi_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "(F^*)^*"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

$$\Phi_W F = F^{**} \Phi_V .$$

$(\mathbb{R}^5)^*$ hat $e_1^*, e_2^*, \dots, e_5^*$

$\phi_1 = e_1^* + e_2^* + e_3^* + e_4^* + e_5^*$

$\rightsquigarrow$ Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = w_1$

$\phi_3 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\phi_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\phi_4 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$(\mathbb{R}^5)^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^5$$

$$\phi_i \longmapsto w_i$$

$\phi_4 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$