现代控制理论

李 韬

tli@math.ecnu.edu.cn；sixumuzi@163.com

个人主页：http://faculty.ecnu.edu.cn/s/3601/main.jspy

华东师范大学数学科学学院

2019年4月-2019年6月

第三章
控制系统的性质分析
3.2 控制系统的能控性和能观测性

连续时间定常线性系统的能控性

定义：设x_0是连续时间定常线性系统在0时刻的初始状态

$$\left\{\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)\right.$$

如果存在一个有限时刻$t_1 > 0$和控制输入$u(t)(t_0 \le t \le t_1)$，使得在$u(t)$的作用下有$x(t_1) = 0$，则称状态x_0是能控的状态。

如果任意的$x \in \mathbb{R}^n$都是该系统能控的状态，则称该系统完全能控。

能控性判据

n维连续时间定常线性系统完全能控的

充要条件是 如下相互等价的条件

(i)能控性矩阵$U=[B\ AB\ A^2B\ \ldots A^{n-1}B]$的秩为$n$。

(ii)对任给的$t_1>0$, $e^{-At}B$的所有行在$[0,t_1]$上线性无关。

(iii)对任给的$t_1>0$,能控性克莱姆矩阵

$W(0,t_1)=\int_0^{t_1} e^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}d\tau$非奇异。

连续时间定常线性系统的能达性

定义：设线性定常系统

$$\left\{\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)\right.$$

的初始状态$x(0) = 0$。

对任给的状态$x_1 \in \mathbb{R}^n$，如果存在一个有限时刻 $t_1 > 0$和控制输入$u(t)(t_0 \le t \le t_1)$,使得在$u(t)$ 的作用下,有$x(t_1) = x_1$,则称状态x_1是能达的状态。

如果任意的$x \in \mathbb{R}^n$都是该系统能达的状态，则称该系统完全能达。

连续时间线性定常系统
能达性判据

连续时间定常线性系统

完全能控与完全能达是等价的。

离散时间定常线性系统的能控性

定义：设x_0是离散时间定常线性系统

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$$

在$k=0$时刻的初始状态为x_0，如果存在一个正整数$k_1>0$和控制序列

$$\{u(0),\ u(1),\dots,u(k_1-1)\},$$

使得在该控制序列的作用下有$x(k_1)=0$，则称状态x_0是系统能控的状态。

如果任意的$x\in\mathbb{R}^n$都是该系统能控的状态，则称该系统完全能控。

离散时间系统能控性判据

离散时间定常线性系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

完全能控的

充要条件是 对某个正整数k

$$Span[B\ AB\ A^2B\ \ldots A^{k-1}B] \supseteq Span[A^k]$$

离散时间定常线性系统的能达性

定义：设离散时间线性定常系统

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

的初始状态$x(0) = 0$。

对任给的状态$x_1 \in \mathbb{R}^n$，如果存在一个有限时刻

$k_1 > 0$和控制输入序列$u(0), u(1), \dots, u(k_1 -1)$, 使得在

该控制序列的作用下, 有$x(k_1) = x_1$,

则称状态x_1是能达的状态。

如果任意的$x \in \mathbb{R}^n$都是该系统能达的状态，

则称该系统完全能达。

离散时间系统能达性判据

离散时间定常线性系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

完全能达的充要条件是

能达性矩阵

$$U = [B\ AB\ A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$$

的秩为n

作业1

假设连续时间线性定常系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

完全能控，其采样周期为T的

采样化的离散时间模型

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k),$$

其中$F = e^{AT}, G = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B$

在什么条件下仍然完全能控？

作业2

假设连续时间线性定常系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

完全能控，试证明对任意给定的$t_1 > t_0$,

及任意的两个状态x_0, x_1,都存在控制矢量

$u(t)(t_0 \le t \le t_1)$,使得在$u(t)$的作用下，

系统的状态由$x(t_0) = x_0$转移到$x(t_1) = x_1$

考虑一个位于地球上方250海里的赤道圆轨道上的卫星。

卫星在轨道平面上运动的归一化状态方程为

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2\omega & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}u_r+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u_t$$

其中状态向量x表示偏离赤道圆轨道的归一化摄动，

u_r表示从径向轨控发动机获得的径向输入，

u_t表示从切向轨控发动机获得的切向输入，

轨道角速度$\omega=0.0011rad/s$(绕地球一圈约需90分钟）

在没有干扰的情况下，卫星将保持在标准的赤道圆轨道上。但由于存在气动力等各种干扰信号，因此卫星可能会偏离标准轨道。需要设计合适的控制器，驱动卫星轨控发动机动作，从而将实际轨道保持在标准轨道附近。

当切向轨控发动机关闭或失效，即$u_t(t) \equiv 0$,

此时只有径向轨控发动机投入工作，

此时系统不是完全能控的。

当径向轨控发动机关闭或失效，即$u_r(t) \equiv 0$,

此时只有切向轨控发动机投入工作，

此时系统仍然是完全能控的。

连续时间定常线性系统的能观测性

定义：设x_0是连续时间定常线性系统在0时刻的初始状态

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

如果在控制输入$u(t) \equiv 0$的情况下，输出$y(t) \equiv 0$，则称状态x_0是不能观测的状态。

如果除零状态外，状态空间$\mathbb{R}^n$中不存在不能观测的状态，则称该系统完全能观测。

能观测性判据

n维连续时间定常线性系统完全能观测的充要条件是 如下相互等价的条件

(i)能观测性矩阵$V=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$的秩为$n$。

(ii)对任给的$t_1>0$, $\mathrm{C}\,e^{At}$的所有列在$[0,t_1]$上线性无关。

(iii)对任给的$t_1>0$,能观测性克莱姆矩阵

$$W(0,t_1)=\int_0^{t_1} e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}d\tau$$非奇异。

离散时间系统能观测性判据

离散时间定常线性系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

完全能观测的充要条件是

能观测性矩阵 $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

的秩为 n

作业

已知连续时间线性定常系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

完全能控，试证明对任意的连续函数$f(t)$,

系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + f(t)$$

也完全能控。

能控性和能观测性的对偶性

定理：一个单输入单输出系统和它的对偶系统具有相同的传递函数。