

# 现代控制理论


李 韬

tli@math.ecnu.edu.cn; sixumuzi@163.com

个人主页: <http://faculty.ecnu.edu.cn/s/3601/main.jsp>

华东师范大学数学科学学院

2019年4月-2019年6月



## 第三章

# 控制系统的性质分析

## 3.3 控制系统的性能

# 阶跃响应的时域性能指标

$$c(t) = c_t(t) + c_{ss}(t)$$

= 暂态响应 + 稳态响应

## 1. 暂态性能指标

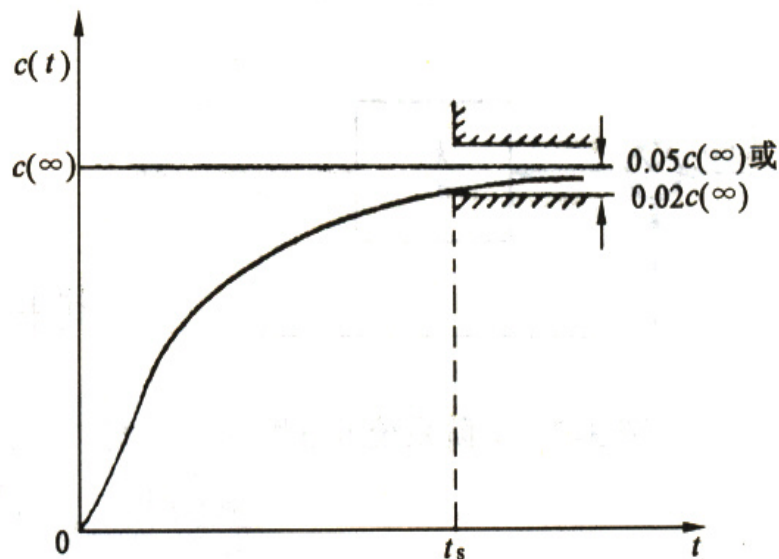
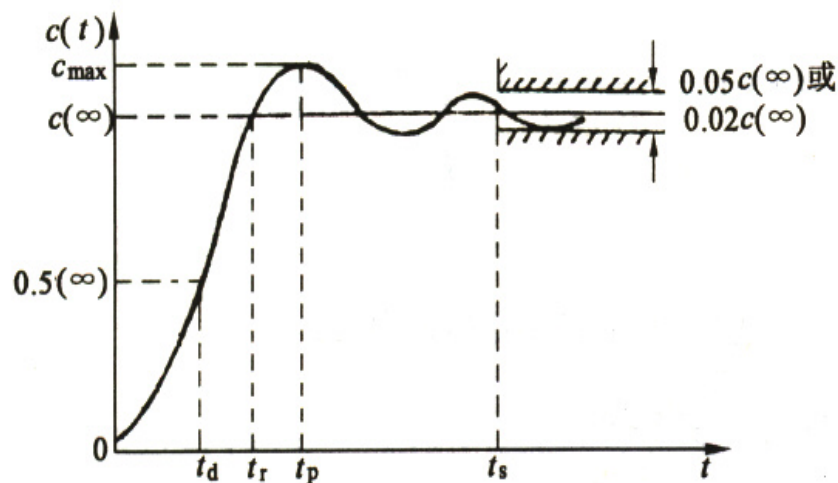


图3-2

(1) 延迟时间 $t_d$ :  $c(t)$ 从0到 $0.5c(\infty)$ 的时间。

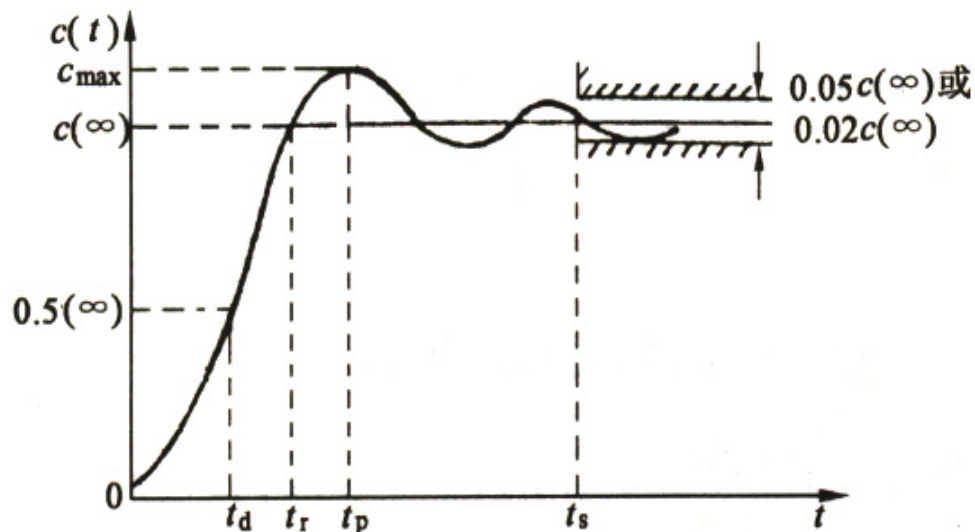
(2) 上升时间 $t_r$ :  $c(t)$ 第一次达到 $c(\infty)$ 的时间。无超调时,  $c(t)$ 从 $0.1 c(\infty)$ 到 $0.9 c(\infty)$ 的时间。

(3) 峰值时间 $t_p$ :  $c(t)$ 到达第一个峰值的时间

(4) 调节时间 $t_s$ :  $c(t)$ 衰减到与稳态值之差不超过 $\pm 2\%$ 或 $\pm 5\%$ 所需的时间。通常该偏差范围称作误差带,用符号 $\Delta$ 表示,  
即  $\Delta = 2\%$ 或  $\Delta = 5\%$

(5) 超调量 $\sigma\%$ :  $c(t)$  最大峰值偏离稳态值的部分, 常用百分数表示, 描述的系统的平稳性。

$$M_p \% = \left| \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \right| \times 100\%$$



## 2. 稳态性能指标

稳态误差 $e_{ss}$ : 稳定系统误差的终值。即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

## 3.2 一阶系统的时域分析

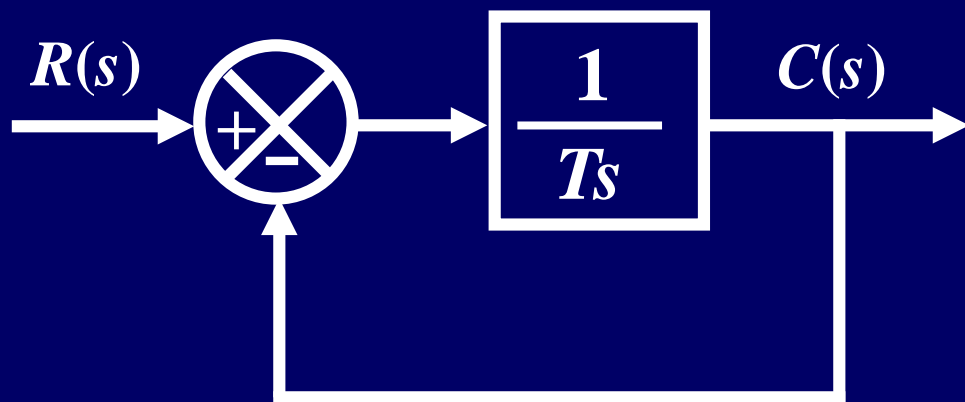
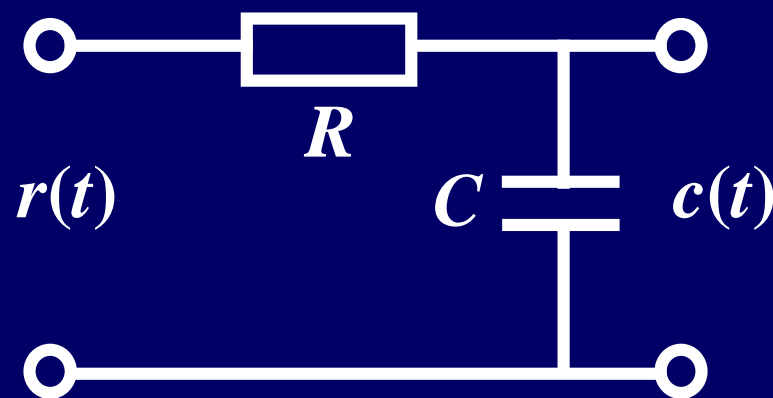
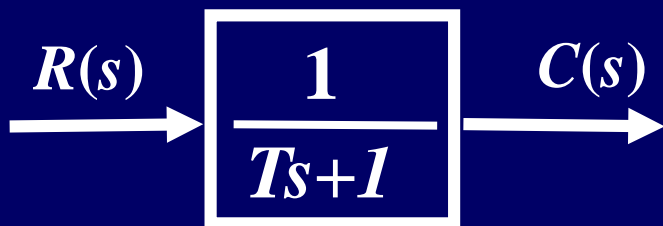
凡是可用一阶微分方程描述的系统，称为一阶系统。

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

$T=RC$ ，时间常数。

其典型传递函数及结构图为：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

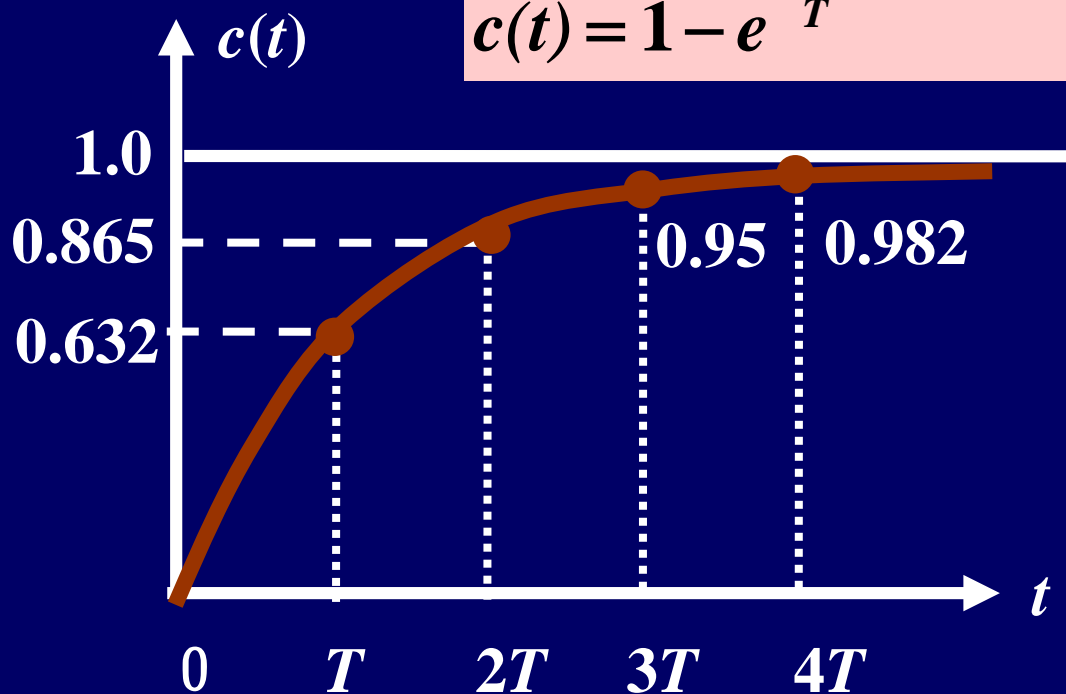


## 单位阶跃响应

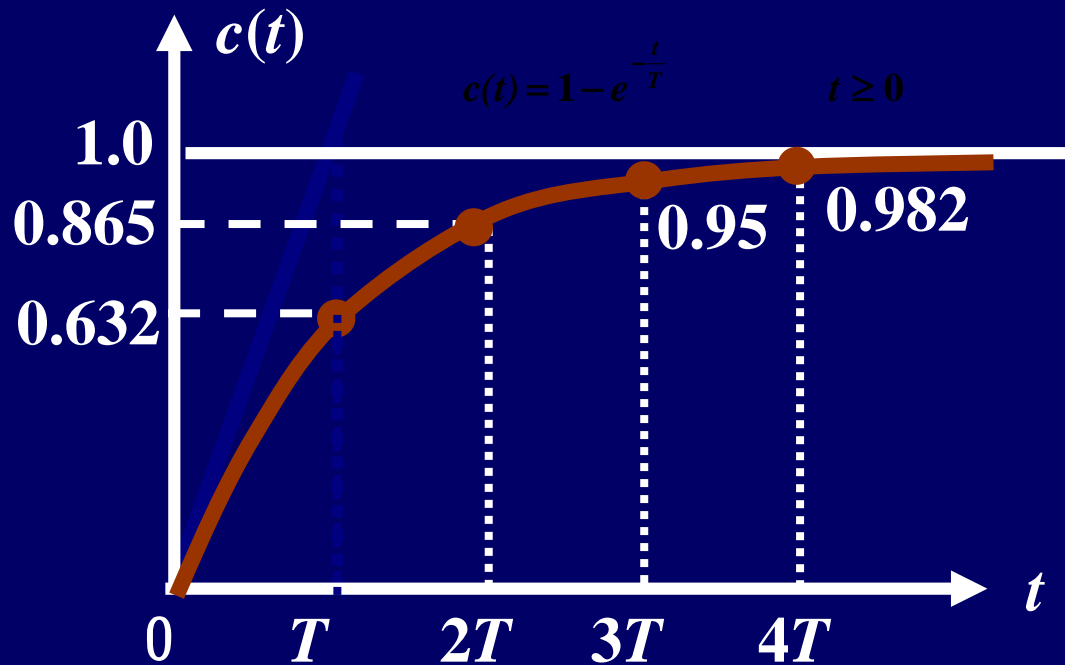
当输入信号 $r(t)=1(t)$ 时，系统的响应 $c(t)$ 称作其单位阶跃响应。

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad t \geq 0$$



响应曲线在 $[0, \infty)$ 的时间区间中始终不会超过其稳态值，把这样的响应称为**非周期响应**。无振荡



一阶系统响应具备两个重要的特点：

- ① 可以用时间常数  $T$  去度量系统输出量的数值。
- ② 响应曲线的初始斜率等于  $1/T$ 。

一阶系统的瞬态响应指标调整时间  $t_s$

定义：  $|c(t_s) - 1| = \Delta$  ( $\Delta$  取 5% 或 2%)

$$\Delta = e^{-\frac{t_s}{T}} \quad \begin{cases} t_s \approx 3T (\Delta = 5\%) \\ t_s \approx 4T (\Delta = 2\%) \end{cases}$$

$T$  反映了系统的惯性。

$T$  越小惯性越小，响应快！

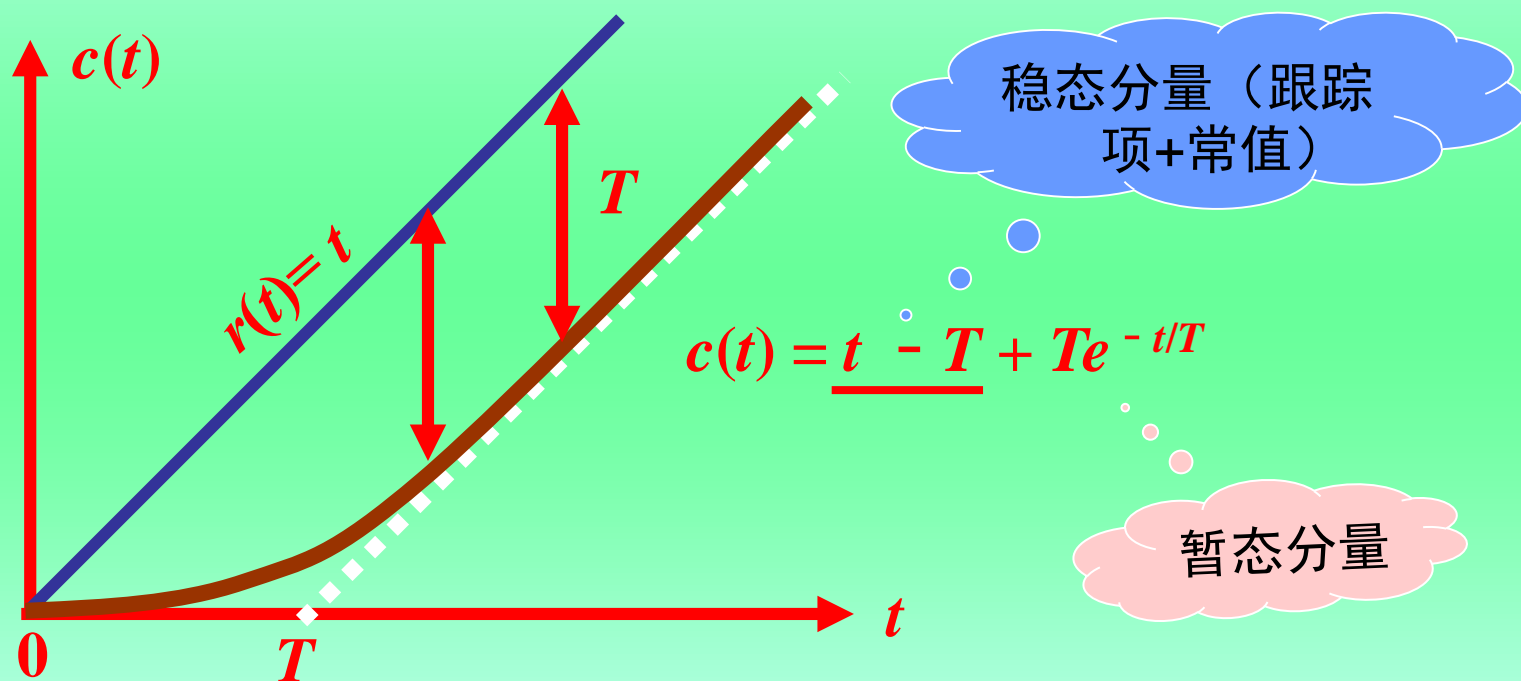
$T$  越大，惯性越大，响应慢。



# 单位斜坡响应 $[r(t) = t]$

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + 1/T}$$

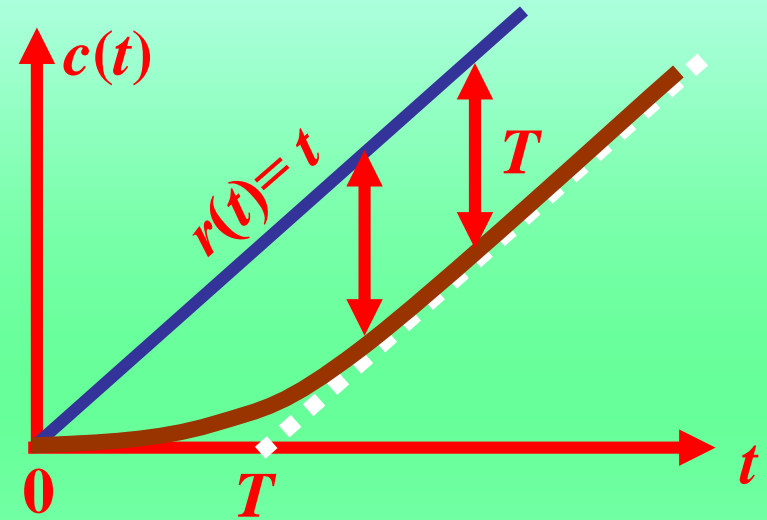
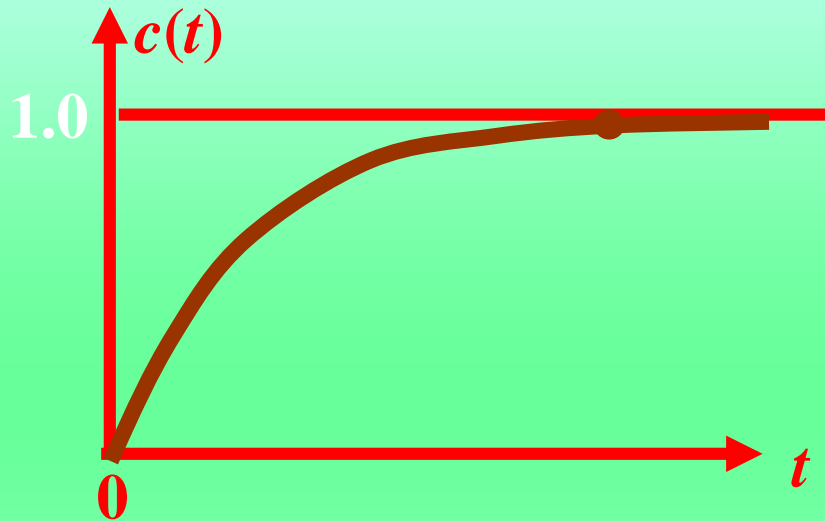
$$c(t) = t - T + Te^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$



稳态响应是一个与输入斜坡函数斜率相同但在时间上迟后了一个时间常数  $T$  的斜坡函数。  $c(\infty) = t - T$

表明过渡过程结束后，其稳态输出与单位斜坡输入之间，在位置上仍有误差，一般叫做跟踪误差。

### 比较阶跃响应曲线和斜坡响应曲线：



在阶跃响应中，输出量与输入量之间的位置误差随时间而减小，最终趋于0，而在初始状态下，位置误差最大，响应曲线的斜率也最大：无差跟踪

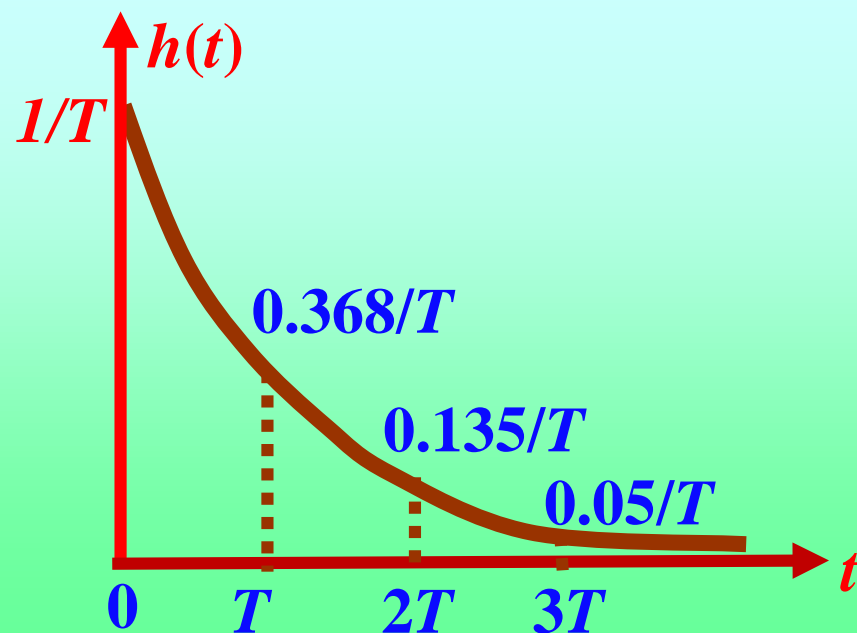
在斜坡响应中，输出量与输入量之间的位置误差随时间而增大，最终趋于常值  $T$ ，在初始状态下，位置误差和响应曲线的斜率均等于0：有差跟踪

# 单位脉冲响应 $[R(s)=1]$

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

它恰是系统的闭环传递函数，这时输出称为脉冲（冲激）响应函数，以 $h(t)$ 标志。

$$h(t) = C_{\text{脉冲}}(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$



求系统闭环传函提供了实验方法，以单位脉冲输入信号作用于系统，测定出系统的单位脉冲响应，可以得到闭环传函。

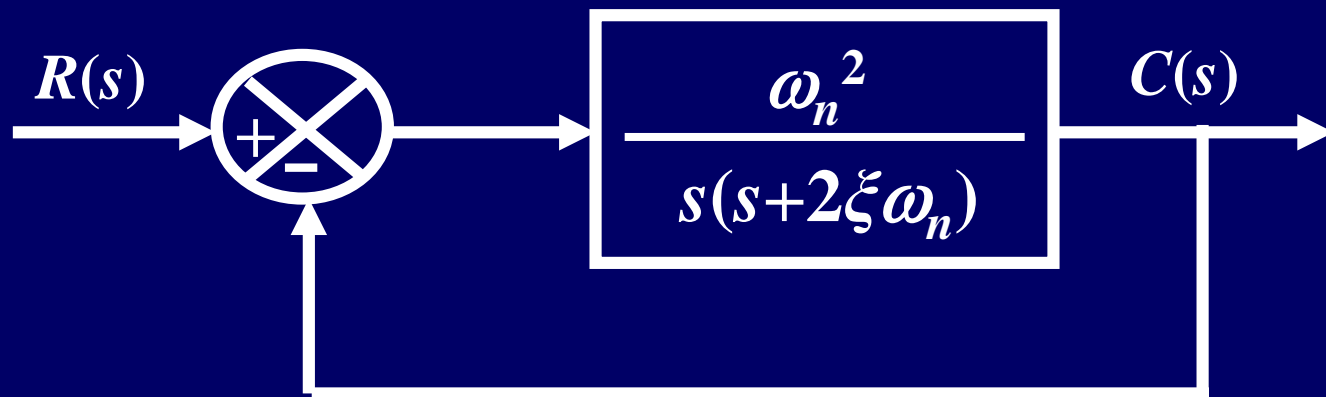
$$C_{\text{阶跃}}(t) = \frac{d}{dt} C_{\text{斜坡}}(t) \quad C_{\text{脉冲}}(t) = \frac{d}{dt} C_{\text{阶跃}}(t)$$

对应  $r_{\text{阶跃}}(t) = \frac{d}{dt} r_{\text{斜坡}}(t) \quad r_{\text{脉冲}}(t) = \frac{d}{dt} r_{\text{阶跃}}(t)$

# 二阶系统的时域分析

## 二阶系统的数学模型

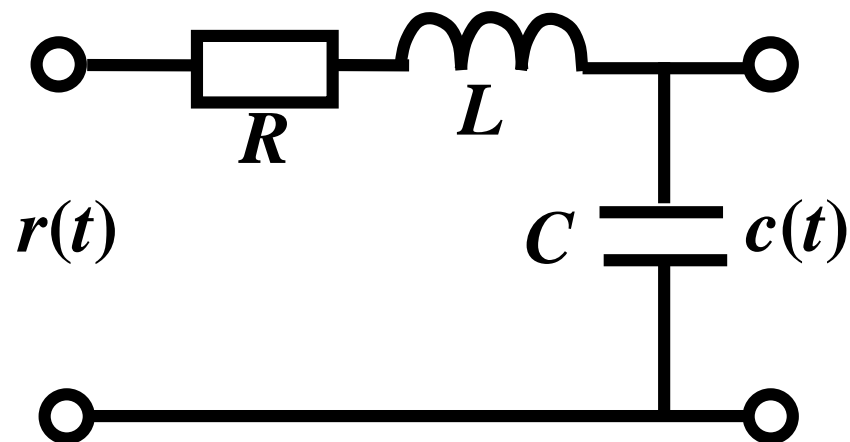
标准化二阶系统的结构图为：



闭环传递函数为 
$$\Phi(s) = \frac{\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}}{1 + \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

二阶系统有两个结构参数  $\xi$  (阻尼比) 和  $\omega_n$  (无阻尼振荡频率)  
二阶系统的性能分析和描述，都是用这两个参数表示的。

例如： $RLC$ 电路



微分方程式为:

$$LC \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + RC \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

$$\Phi(s) = \left. \frac{C(s)}{R(s)} \right|_{\text{零初条件}} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$T = \sqrt{LC} \quad \omega_n = 1/T \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

对于不同的二阶系统，阻尼比和无阻尼振荡频率的物理含义是不同的。

### 3.3.2 二阶系统的闭环极点

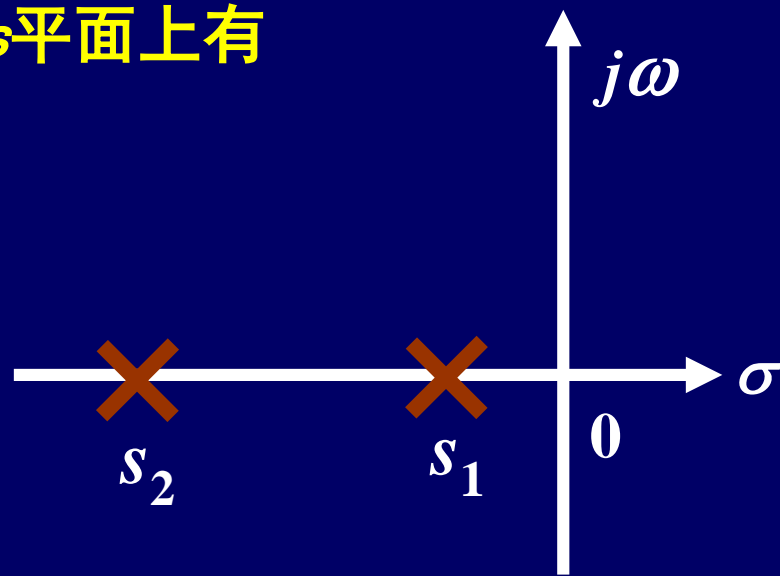
二阶系统的闭环特征方程，即

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

其两个特征根为： $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

上述二阶系统的特征根表达式中，随着阻尼比  $\xi$  的不同取值，特征根有不同类型的值，或者说在  $s$  平面上有不同的分布规律。分述如下：

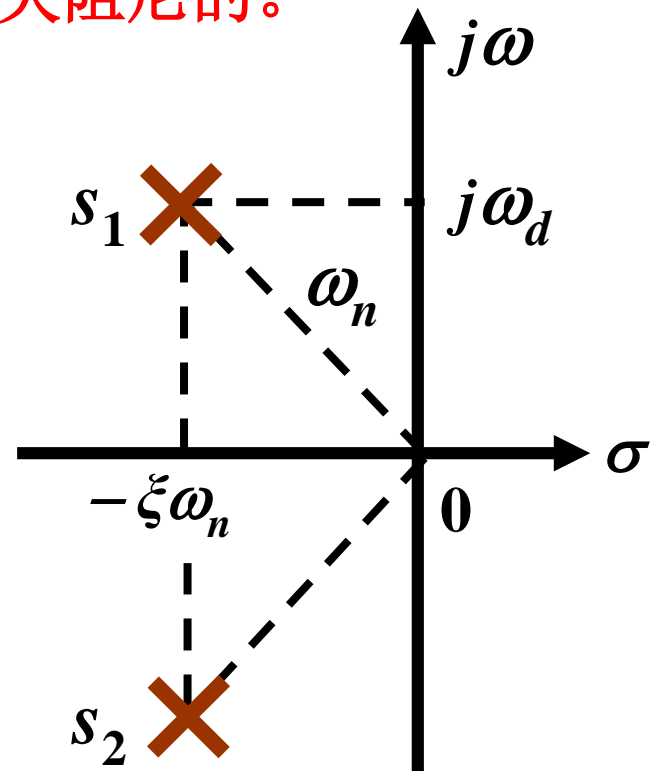
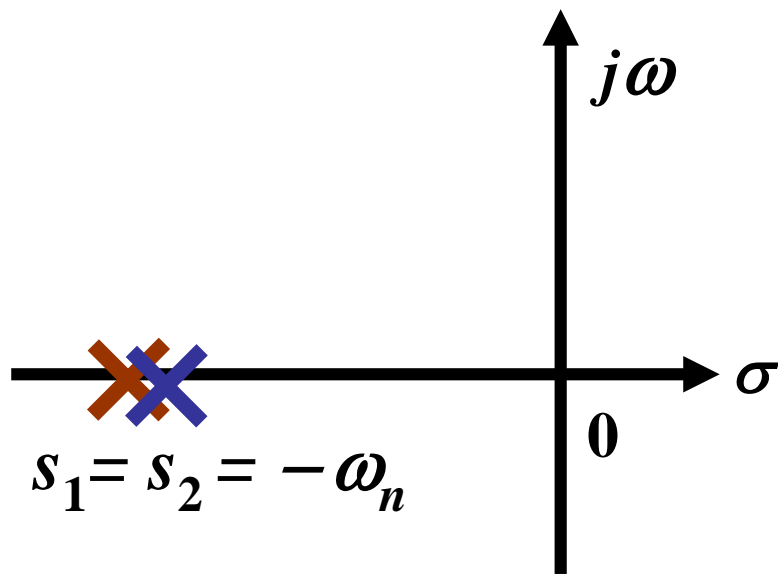
(1)  $\xi > 1$  时，特征根为一对不等值的负实根，位于  $s$  平面的负实轴上，此时系统的响应称为**过阻尼**的。



$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

(2)  $\xi=1$ 时，特征根为一对等值的负实根，位于 $s$ 平面的负实轴上，此时系统的响应称为临界阻尼的。

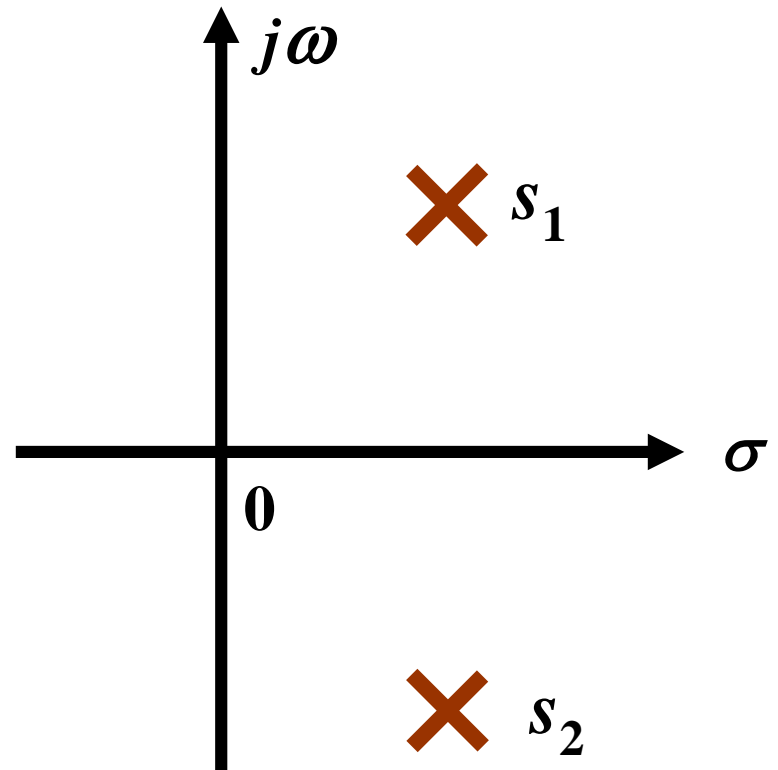
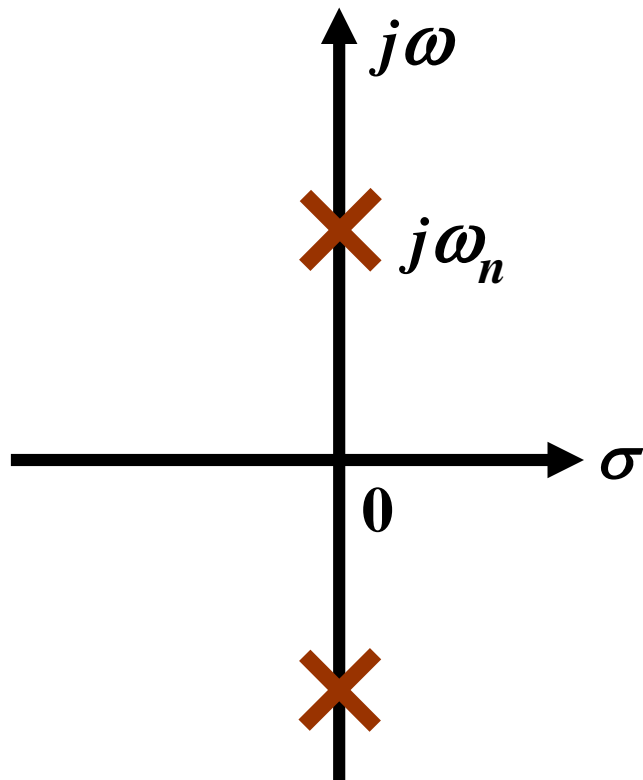
(3)  $0 < \xi < 1$  时，特征根为一对具有负实部的共轭复根，位于 $s$ 平面的左半平面上，此时系统的响应称为欠阻尼的。



$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

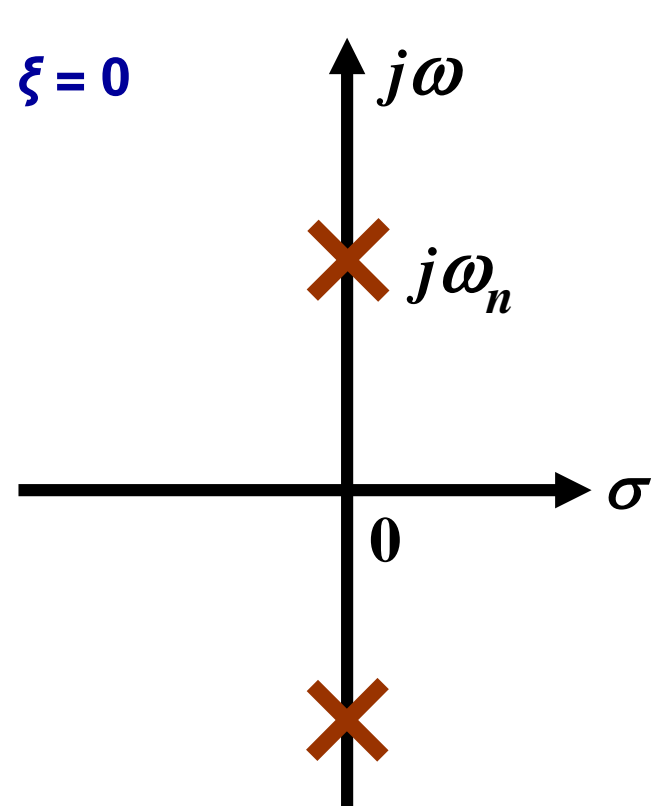
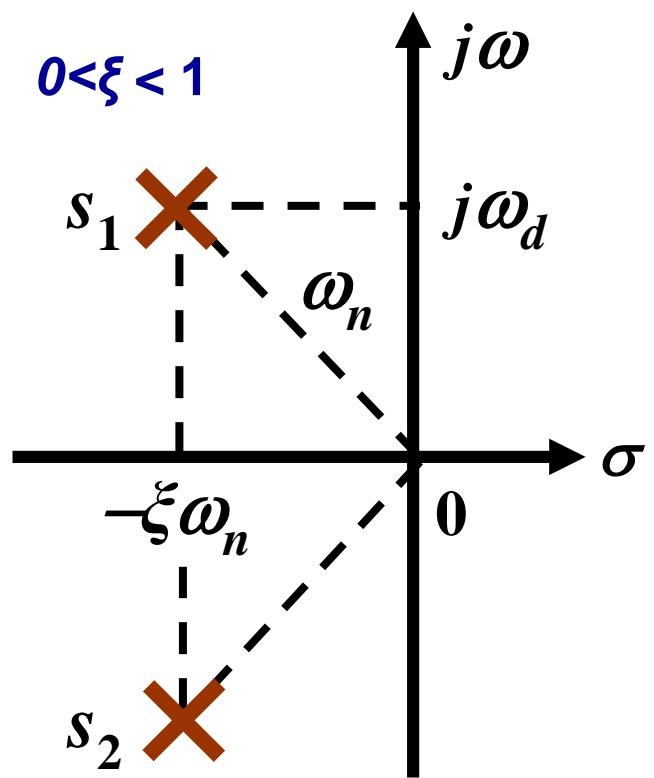
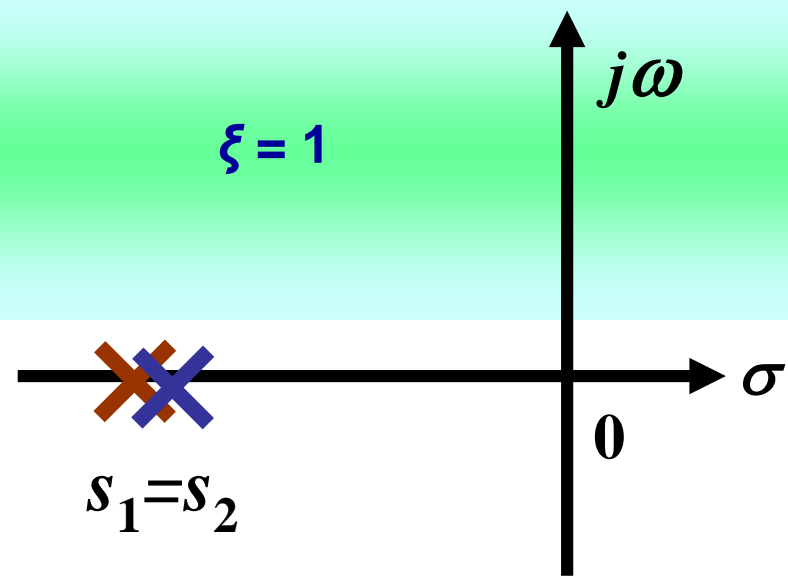
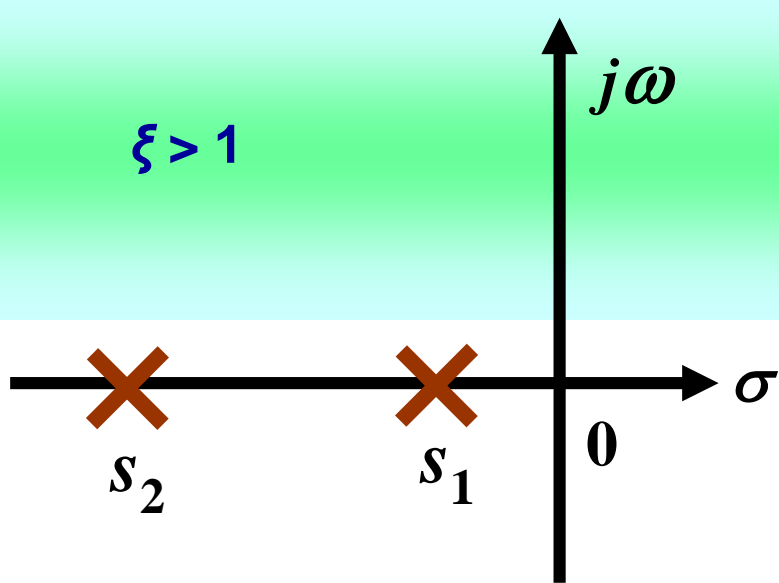
(4)  $\xi=0$  时，特征根为一对幅值相等的虚根，位于  $s$  平面的虚轴上系统的响应表现为**无阻尼的等幅振荡**过程。

(5)  $\xi < 0$  时，特征根位于  $s$  平面的右半平面，此时系统的响应表现为幅值随时间增加而**发散**。





阻尼比取不同值时，二阶系统根的分布



## 单位阶跃响应

由式  $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ ，其输出的拉氏变换为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s - s_1)(s - s_2)}$$

式中 $s_1, s_2$ 是系统的两个闭环特征根。

对上式两端取拉氏反变换，可以求出系统的单位阶跃响应表达式。阻尼比在不同的范围内取值时，二阶系统的特征根在 $s$ 平面上的位置不同，二阶系统的时间响应对应有不同的运动规律。下面分别加以讨论。

# (1) 欠阻尼情况 $0 < \xi < 1$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$$

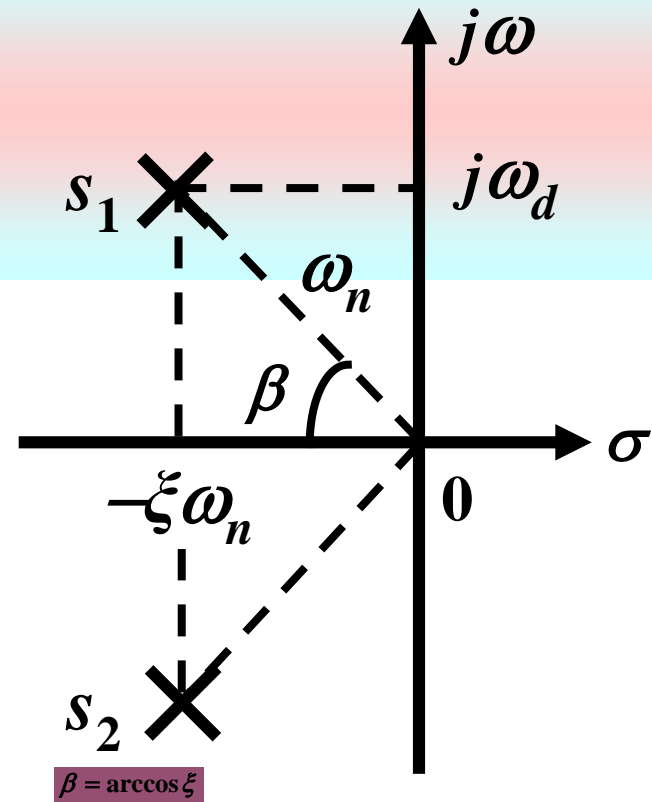
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + j\omega_d)(s + \xi\omega_n - j\omega_d)} \times \frac{1}{s}$$

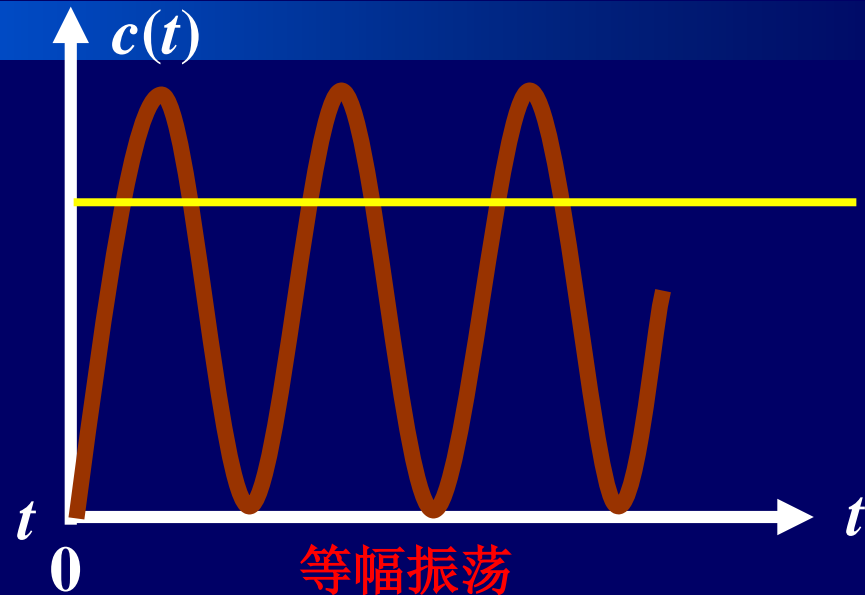
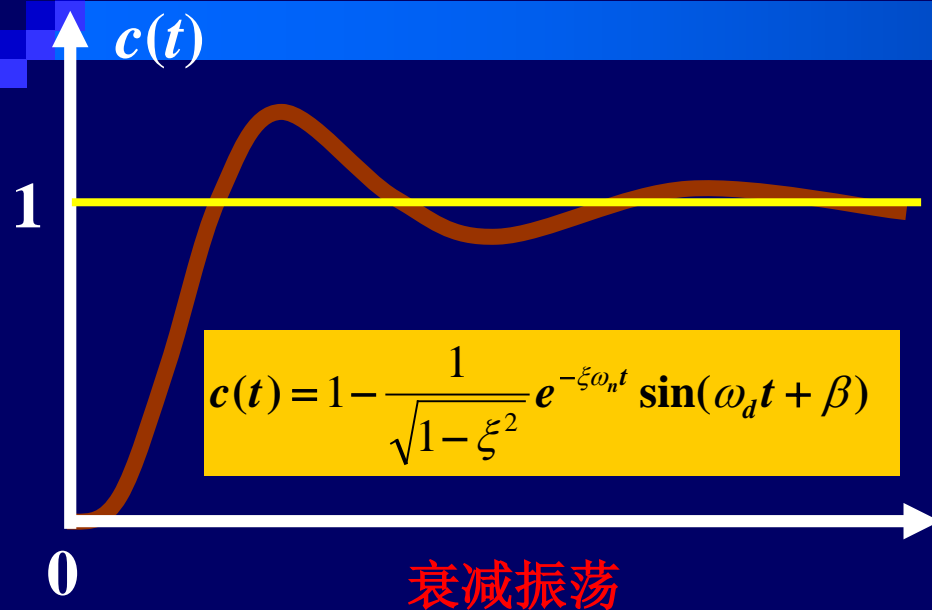
$$= \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \times \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \quad (t \geq 0)$$





欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应由两部分组成：**稳态分量**为1，表明系统在1(t)作用下不存在稳态位置误差；瞬态响应是阻尼正弦项，其振荡频率为**阻尼振荡频率** $\omega_d$ ，而其幅值则按指数曲线衰减，两者均由参数 $\xi$ 和 $\omega_n$ 决定。

## (2) 无阻尼情况 $\xi=0$

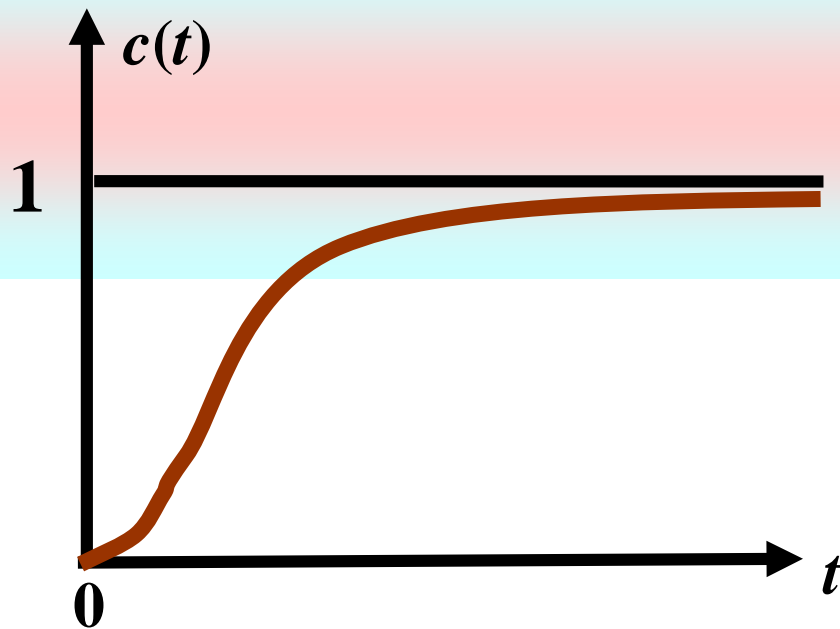
$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right) = 1 - \cos \omega_d t$$

### (3) 临界阻尼情况 $\xi=1$

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \times \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n}$$



$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0)$$

此时响应是稳态值为1的非周期上升过程，其变化率  
 $t=0$ ，变化率为0； $t>0$ 变化率为正， $c(t)$ 单调上升；  
 $t \rightarrow \infty$ ，变化率趋于0。整个过程不出现振荡，无超调，  
稳态误差=0。

#### (4) 过阻尼情况 $\xi > 1$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

引入等效时间常数

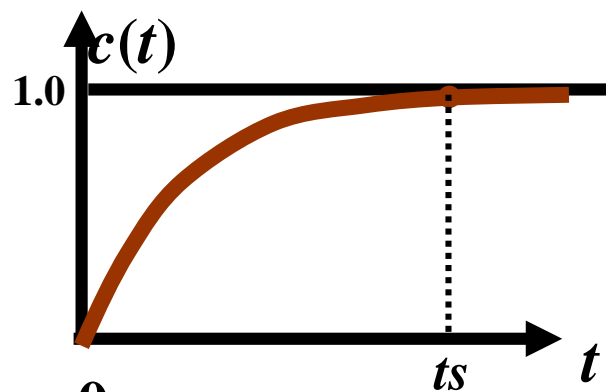
$$T_1 = \frac{1}{\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + 1/T_1)(s + 1/T_2)} \times \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{(T_2/T_1 - 1)(s + 1/T_1)} + \frac{1}{(T_1/T_2 - 1)(s + 1/T_2)}$$

$$c(t) = 1 + \frac{e^{-t/T_1}}{T_2/T_1 - 1} + \frac{e^{-t/T_2}}{T_1/T_2 - 1}$$



响应特性包含**两个单调衰减的指数项**,

且它们的代数和不会超过1, 因而响应是**非振荡**的。**调节速度慢**。  
(不同于一阶系统)

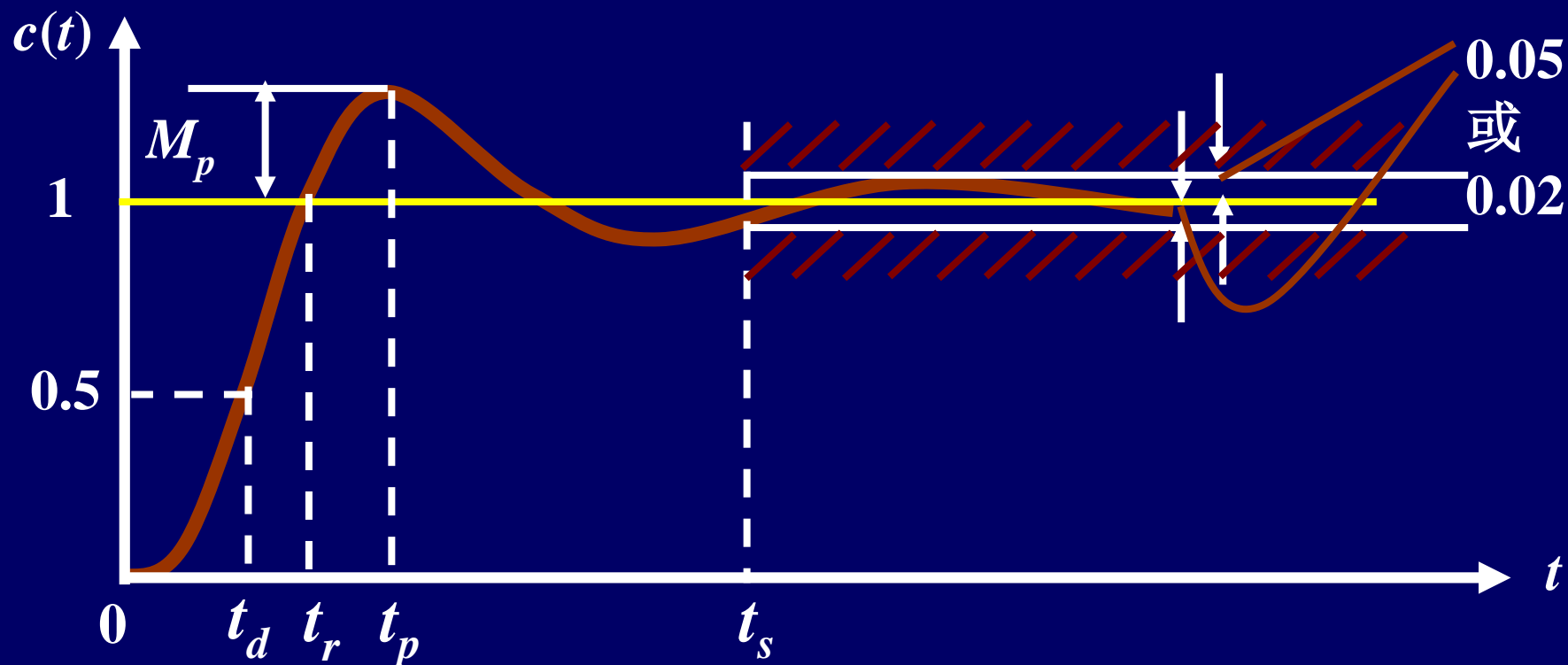
## (5) 不稳定系统 $\xi < 0$

总结:

- 1)  $\xi < 0$ 时, 响应发散, 系统不稳定;
- 2)  $\xi \geq 1$ 时, 响应与一阶系统相似, 无超调, 但调节速度慢;
- 3)  $\xi = 0$ 时, 无过渡过程, 直接进入稳态, 响应等幅振荡;
- 4)  $0 < \xi < 1$ 时, 响应有超调, 但上升速度快, 调节时间短, 合理 $\xi$ 选择可使既快又平稳, 工程上把 $\xi = 0.707$ 的二阶系统称为二阶最优系统;

### 3.3.4 二阶系统的动态性能指标

#### 1. 欠阻尼



用 $t_r$ ,  $t_p$ ,  $M_p$ ,  $t_s$ 四个性能指标来衡量瞬态响应的好坏。



(1) 上升时间 $t_r$ ：从零上升至**第一次**到达稳态值所需的时间，是系统响应速度的一种度量。 $t_r$ 越小，响应越快。

$$c(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \Big|_{t=t_r} = 1$$

$$\sin(\omega_d t + \beta) \Big|_{t=t_r} = 0$$

$$\omega_d t_r + \beta = k\pi \quad (k=1)$$

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

(2) 峰值时间 $t_p$ ：响应超过稳态值，到达第一个峰值所需的时间。

$$\frac{dc(t)}{dt} \Big|_{t=t_p} = 0$$

$$\frac{\xi\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) - \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \cos(\omega_d t_p + \beta) = 0$$

$$\frac{\omega_n e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t_p = 0 \Rightarrow \sin \omega_d t_p = 0 \Rightarrow \omega_d t_p = k\pi$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

(3) **超调量 $M_p$** : 响应曲线偏离阶跃曲线最大值, 用百分比表示。

$$M_p = \left| \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \right| \times 100\%$$

$$= \left| -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) \right| \times 100\%$$

$$\text{代入 } t_p \rightarrow M_p \% = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} \times 100\%$$


$M_p$ 只是 $\xi$ 的函数，其大小与自然频率 $\omega_n$ 无关。 $\xi \downarrow \rightarrow M_p \uparrow$

(4) 调节时间 $t_s$ ：响应曲线衰减到与稳态值之差不超过5%所需要的时间。

$$|c(t) - c(\infty)| \leq \Delta \times c(\infty) \quad (t \geq t_s)$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \right| \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

$$|\sin(\omega_d t + \beta)| \leq 1$$


$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

工程上，当 $0.1 < \xi < 0.9$  时，通常用下列二式近似计算调节时间。

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

$$\Delta = 5\% c(\infty)$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

$$\Delta = 2\% c(\infty)$$

## 总结:

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p \% = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \pi} \times 100\%$$

$$t_s = \frac{3}{\xi \omega_n}$$

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$$

(1)  $\omega_n$  一定, 使  $t_r \ t_p \downarrow \xrightarrow{\text{必须}} \xi \downarrow$

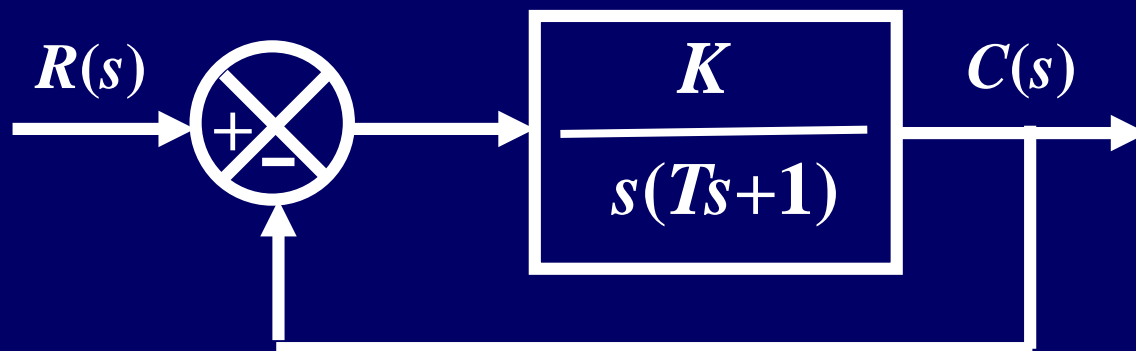
使  $t_s \downarrow \xrightarrow{\text{必须}} \xi \uparrow$  ( $\xi$  一定范围)

(2)  $\xi$  一定, 使  $t_r \ t_p \ t_s \downarrow \xrightarrow{\text{必须}} \omega_n \uparrow$

(3)  $\xi \downarrow \xrightarrow{\text{必有}} M_p \uparrow$  只由  $\xi$  决定

**各性能指标之间是有矛盾的。**

### 例3-1 单位负反馈随动系统如图所示



- (1) 确定系统特征参数与实际参数的关系。
- (2) 若 $K = 16(\text{rad/s})$ 、 $T = 0.25(\text{s})$ ，试计算系统的动态性能指标。

解：(1) 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K}{Ts^2 + s + K} = \frac{K/T}{s^2 + s/T + K/T}$$

与典型二阶系统比较可得：  $K/T = \omega_n^2$      $1/T = 2\xi\omega_n$

(2)  $K = 16$ ,  $T = 0.25$ 时

$$K/T = \omega_n^2 \quad 1/T = 2\xi\omega_n$$

$$\omega_n = \sqrt{K/T} = 8(\text{rad/s}) \quad \xi = \frac{1}{2\sqrt{KT}} = 0.25$$

$$M_p = e^{-\frac{0.25}{\sqrt{1-0.25^2}}\pi} \times 100\% = 47\%$$

$$t_r = \frac{\pi - \arccos 0.25}{8\sqrt{1-0.25^2}} = 0.24(\text{s})$$

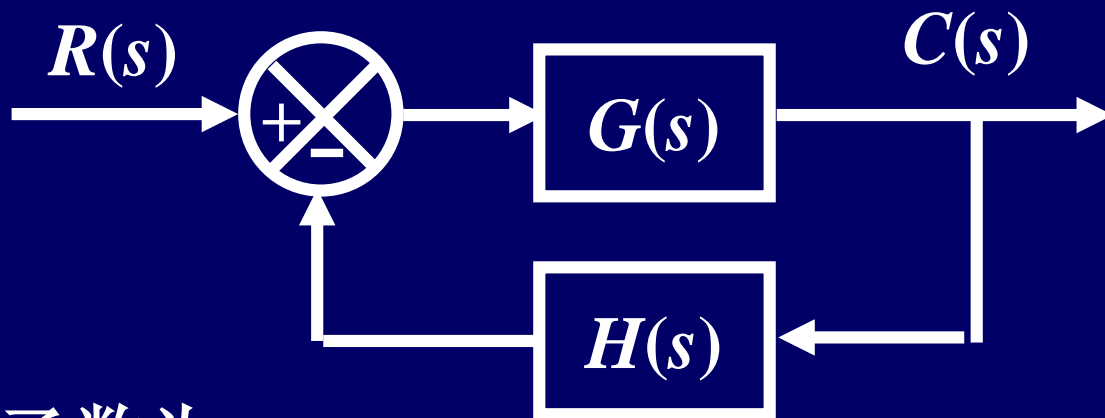
$$t_p = \frac{\pi}{8\sqrt{1-0.25^2}} = 0.41(\text{s})$$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{8 \times 0.25} = 1.5(\text{s}) \quad (\Delta=0.05)$$

# 高阶系统的时域分析

## 高阶系统的阶跃响应

控制系统的基本结构如图所示。



其闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$G(s)$ ,  $H(s)$  一般是复变量  $s$  的多项式之比, 故上式可记为



$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

根据能量的有限性，分子多项式的阶次 $m$ 不高于分母多项式的阶次 $n$ 。对上式进行因式分解，可以表示为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{a_0} \times \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2)}$$

式中 $0 < \xi_k < 1$ 。即系统有 $q$ 个实极点和 $r$ 对共轭复数极点。称为系统闭环特征根，或闭环极点。

于是，系统单位阶跃响应的拉氏变换：

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{b_0}{a_0} \times \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2)} \cdot \frac{1}{s}$$

取拉氏反变换，并设全部初始条件为零，得到系统单位阶跃响应的时间表达式：

$$c(t) = A_0 + \sum_{i=1}^q A_i e^{-p_i t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\xi_k \omega_k t} \sin(\omega_{dk} t + \beta_k)$$

式中  $\omega_{dk} = \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$ ； $\beta_k = \arccos \xi_k$ ； $A_k$ 、 $B_k$ 是与 $C(s)$ 在对应闭环极点上的留数有关的常数。

$$c(t) = A_0 + \sum_{i=1}^q A_i e^{-p_i t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\xi_k \omega_k t} \sin(\omega_{dk} t + \beta_k)$$

上式表明，如果系统的所有闭环极点都具有负实部，系统时间响应的各暂态分量都将随时间的增长而趋近于零，这时称高阶系统是稳定的。

## 闭环主导极点

- 1) 高阶系统瞬态响应各分量的衰减快慢由  $-p_i$ ,  $-\xi_k \omega_n$  决定，也即闭环极点负实部的绝对值越大，相应的分量衰减越快。
- 2) 各分量所对应的系数由系统的零极点分布决定。
- 3) 系统的零极点共同决定了系统瞬态响应曲线的形状。

4) 对系统瞬态响应起主导作用的极点，称为**闭环主导极点**。

条件：

**1 距离 $s$ 平面虚轴较近，且周围没有其它的闭环极点和零点；**

**对应的暂态分量衰减缓慢，起主要作用。**

**不会构成闭环偶极子，产生零极点相消现象。**

**2 其实部的绝对值比其它极点小5倍以上。**

应用闭环主导极点的概念，可以把一些高阶系统近似为一阶或二阶系统，以实现高阶系统动态性能的近似评估。

一般情况，高阶系统具有振荡性，所以**主导极点常常是一对共轭复数极点**。找到了一对共轭复数极点，高阶系统的动态性能就可以应用二阶系统的性能指标来近似估计。

# 线性系统的稳态误差分析

## 3.6.1 误差的基本概念

### 1. 误差的定义

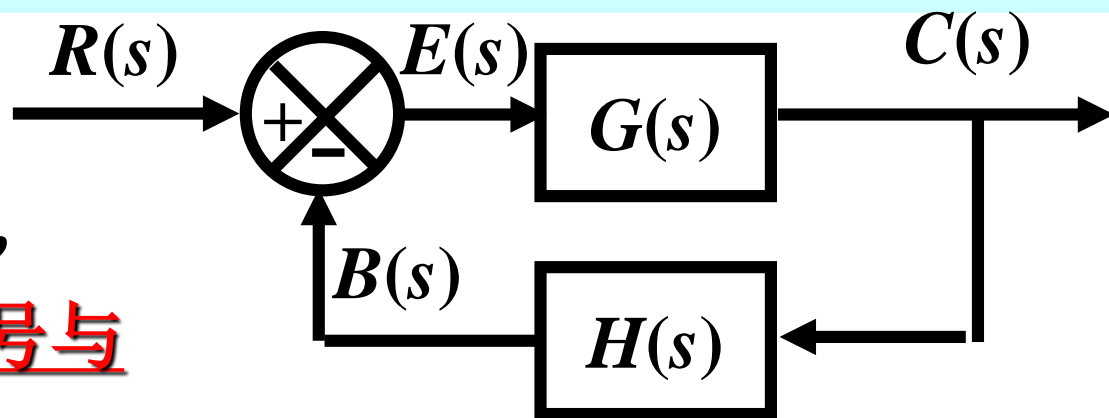
误差的定义有两种：

① 从系统输入端定义，

它等于系统的输入信号与反馈信号之差，即

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

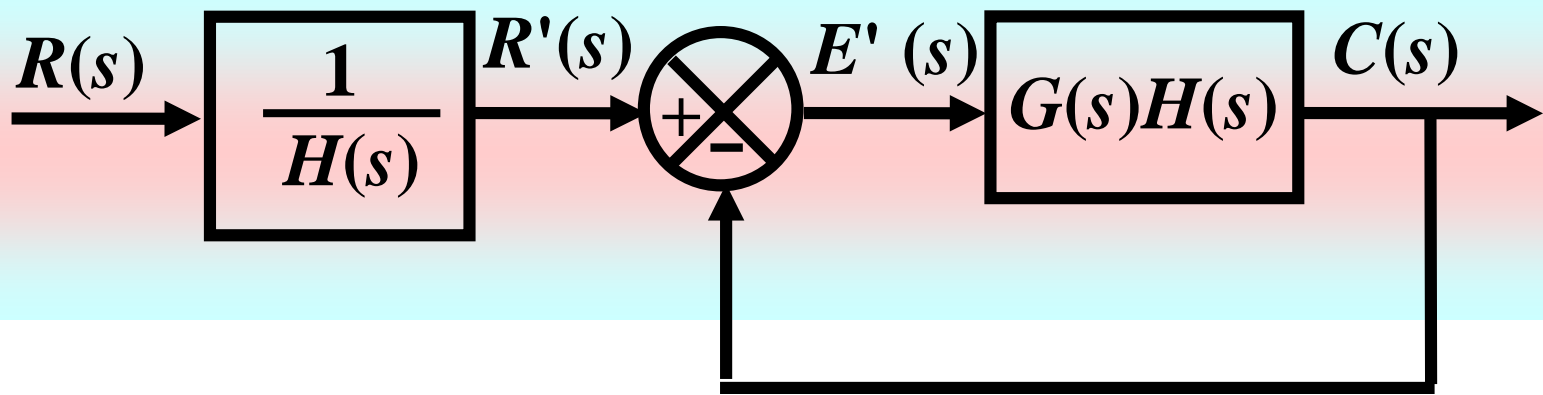
误差传递函数  $\Phi_E(s) = ?$



② 从系统输出端定义，它定义为系统输出量的期望值与实际值之差。  $E_o(s) = R(s) - C(s)$

对于单位反馈系统，两种定义是一致的。

### 2. 两种定义的关系



由图可知， $R'(s)$ 表示等效单位反馈系统的输入信号，也就是输出的期望值。因而， $E'(s)$ 是从输出端定义的非单位反馈控制系统的误差。

$$\begin{aligned}
 E(s) &= R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s) \\
 E'(s) &= R'(s) - C(s) = \frac{1}{H(s)} R(s) - C(s) \\
 &= \frac{1}{H(s)} [R(s) - H(s)C(s)] = \frac{1}{H(s)} \cdot E(s)
 \end{aligned}$$

由此可见，从系统输入端定义的稳态误差，可以直接或间接地表示从系统输出端定义的稳态误差。

### 3. 稳态误差 $e_{ss}$

定义:  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$

终值定理的条件:  
除原点外, 在虚轴及s平面的右半平面无极点。

**例3-8** 设单位反馈控制系统的开环传函为:  $G(s) = \frac{1}{Ts}$   
试求当输入信号分别为  $r(t) = t^2/2$ ,  $r(t) = 1(t)$ ,  $r(t) = t$ ,  $r(t) = \sin\omega t$  时, 控制系统的稳态误差。

$$\text{解: } \frac{E(s)}{R(s)} = \Phi_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+1/Ts} = \frac{s}{s+1/T}$$

(1) 当  $r(t) = t^2/2$   $R(s) = 1/s^3$

解法一:

$$E(s) = \frac{s}{s+1/T} \cdot \frac{1}{s^3}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1/T} \cdot \frac{1}{s} = \infty$$

解法二: 
$$E(s) = \frac{s}{s + 1/T} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{T}{s^2} - \frac{T^2}{s} + \frac{T^2}{s + 1/T}$$

$$e(t) = T(t - T) + T^2 e^{-t/T}$$

$$e_{ss} = e_{ss}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ss}(t) = \infty$$

(2) 当  $r(t) = 1(t)$   $R(s) = 1/s$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) = \frac{s}{s + 1/T} \cdot \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$$

(3) 当  $r(t) = t$   $R(s) = 1/s^2$

$$E(s) = \frac{s}{s + 1/T} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + 1/T} \cdot \frac{1}{s} = T$$



(4) 当  $r(t) = \sin \omega t$      $R(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$

$$E(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{T}} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

终值定理的条件：  
除原点外，在虚轴及s平面的右半平面无极点。

终值定理的条件不成立！

$$\therefore = -\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}} + \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} + c \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$e(t) = -\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} \cos \omega t + \frac{T^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} \sin \omega t$$

$$e_{ss}(t) = \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} (\cos \omega t + T\omega \sin \omega t)$$

$$= \frac{\omega T}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\omega T} \quad e_{ss}(\infty) \neq 0$$

## 给定作用下的稳态误差计算

在一般情况下，系统误差的拉氏变换为：

$$E(s) = \Phi_e(s)R(s) = \frac{1}{1+G_k(s)}R(s)$$

不失一般性，开环传递函数可写为：

$$G_k(s) = G(s)H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K}{s^v} \frac{\prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)} = \frac{K}{s^v} G_0(s)$$

$v = 0$  称为 0 型系统；

$v = 1$  称为 I 型系统；

$v = 2$  称为 II 型系统。等等

## 1. 阶跃输入作用下的稳态误差

$$r(t) = A1(t) \quad e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{A}{s} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)}$$

令  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$  称为系统的静态位置误差系数

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$$

$$G_k(s) = G(s)H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K}{s^v} \frac{\prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)} = \frac{K}{s^v} G_0(s)$$

0 型系统:  $K_p = K$   $e_{ss} = A / (1 + K)$

I 型及 I 型以上系统:  $K_p = \infty$   $e_{ss} = 0$

## 2. 单位斜坡输入作用下的稳态误差

$$r(t) = Btl(t)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \frac{B}{s^2} = \frac{B}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)}$$

$$\text{令 } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-1}}$$

静态速度误差系数

$$e_{ss} = \frac{B}{K_v}$$

$$G_k(s) = G(s)H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K}{s^{\nu}} \frac{\prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = \frac{K}{s^{\nu}} G_0(s)$$

0 型系统:  $K_v = 0$   $e_{ss} = \infty$ , 0型系统无法跟踪斜坡输入

I型系统:  $K_v = K$   $e_{ss} = B/K$ , 有差跟踪

II型及 II型以上系统:  $K_v = \infty$   $e_{ss} = 0$ , 无差跟踪

### 3. 加速度输入作用下的稳态误差

$$r(t) = Ct^2 l(t) / 2$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{C}{s^3} = \frac{C}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)}$$

令  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-2}}$

静态加速度误差系数

$$e_{ss} = \frac{C}{K_a}$$

$$G_k(s) = G(s)H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K}{s^\nu} \frac{\prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = \frac{K}{s^\nu} G_0(s)$$

0 型系统:  $K_a = 0$      $e_{ss} = \infty$

I型系统:  $K_a = 0$      $e_{ss} = \infty$

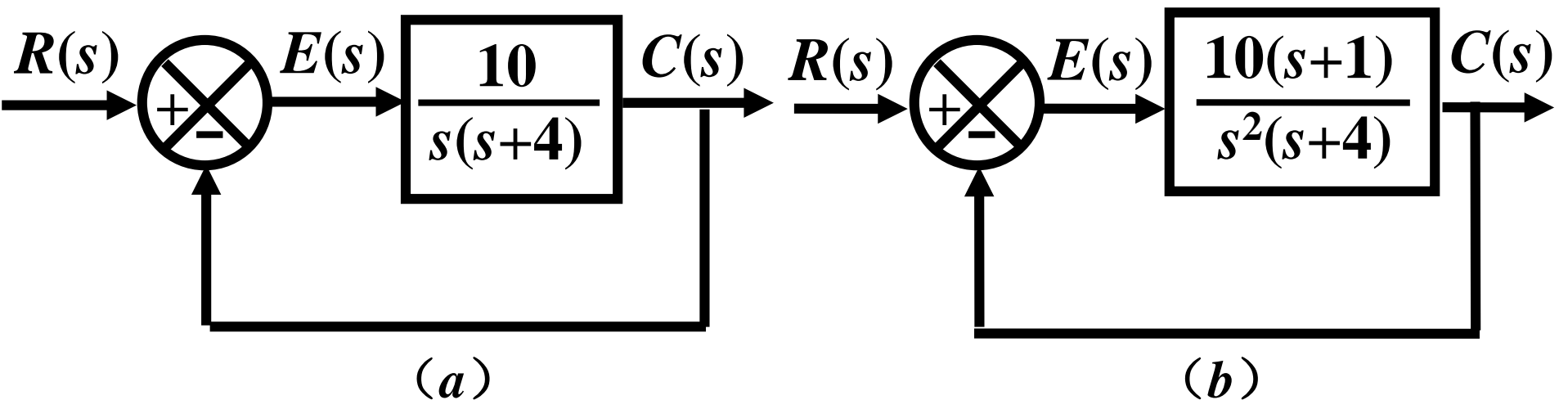
II 型系统:  $K_a = K$      $e_{ss} = C / K$

III型及III型以上系统:  $K_a = \infty$      $e_{ss} = 0$

## 阶跃、斜坡、加速度输入作用下的稳态误差

系统 型别	静态误差系数			$r(t)=A \cdot 1(t)$	$r(t)=Bt$	$r(t)=Ct^2/2$
$\nu$	$K_p$	$K_v$	$K_a$	$e_{ss}=A/(1+K_p)$	$e_{ss}=B/K_v$	$e_{ss}=C/K_a$
0	$K$	0	0	$A/(1+K)$	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	$K$	0	0	$B/K$	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	$K$	0	0	$C/K$

**例3-9** 已知两个系统如图所示，当参考输入  $r(t) = 4 + 6t + 3t^2$ ，试分别求出两个系统的稳态误差。



解：图 (a)，I型系统

$$K_p = \infty, \quad K_v = 10/4, \quad K_a = 0$$

$$e_{ss1} = \frac{4}{1 + K_p} + \frac{6}{K_v} + \frac{6}{K_a} = \infty$$

图 (b)，II型系统

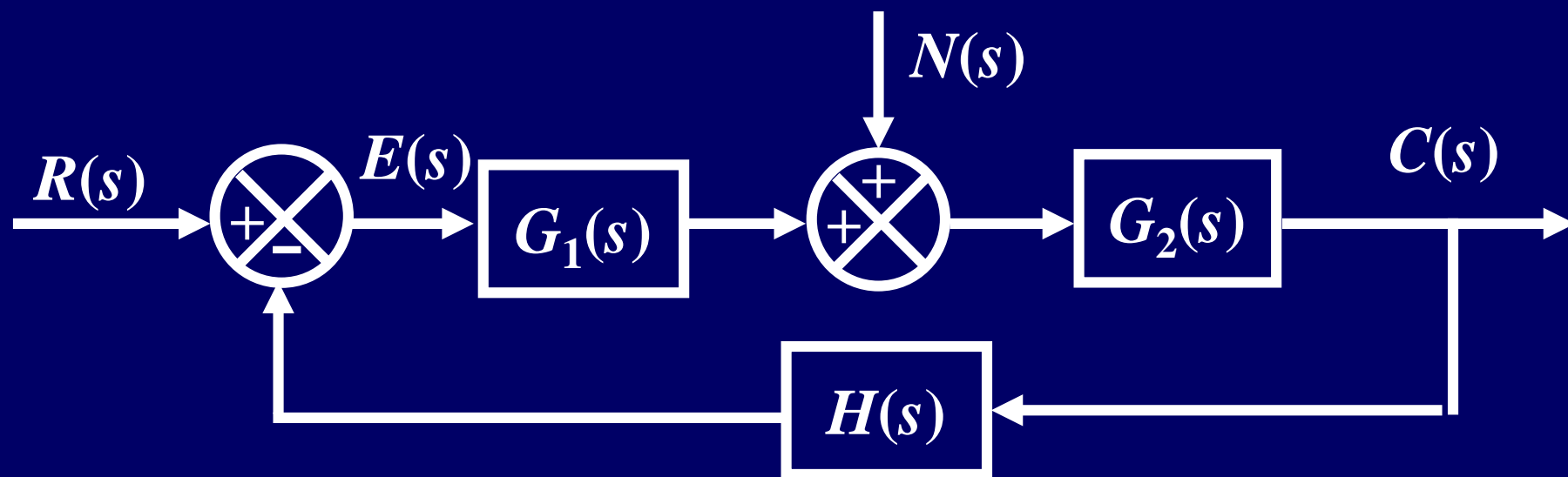
$$K_p = \infty, \quad K_v = \infty, \quad K_a = 10/4$$

$$e_{ss2} = \frac{4}{1 + \infty} + \frac{6}{\infty} + \frac{6}{10/4} = 2.4$$

# 扰动作用下的稳态误差

所有的控制系统除承受输入信号作用外，还经常处于各种扰动作用之下。因此，系统在扰动作用下的稳态误差数值，反映了系统的抗干扰能力。

计算系统在扰动作用下的稳态误差，同样可以采用拉氏变换终值定理。





$$H(s)=1, \quad G_1(s)=K_1, \quad G_2(s)=K_2/s(Ts+1)$$

试求系统在单位阶跃给定和单位阶跃扰动共同作用下的稳态误差。

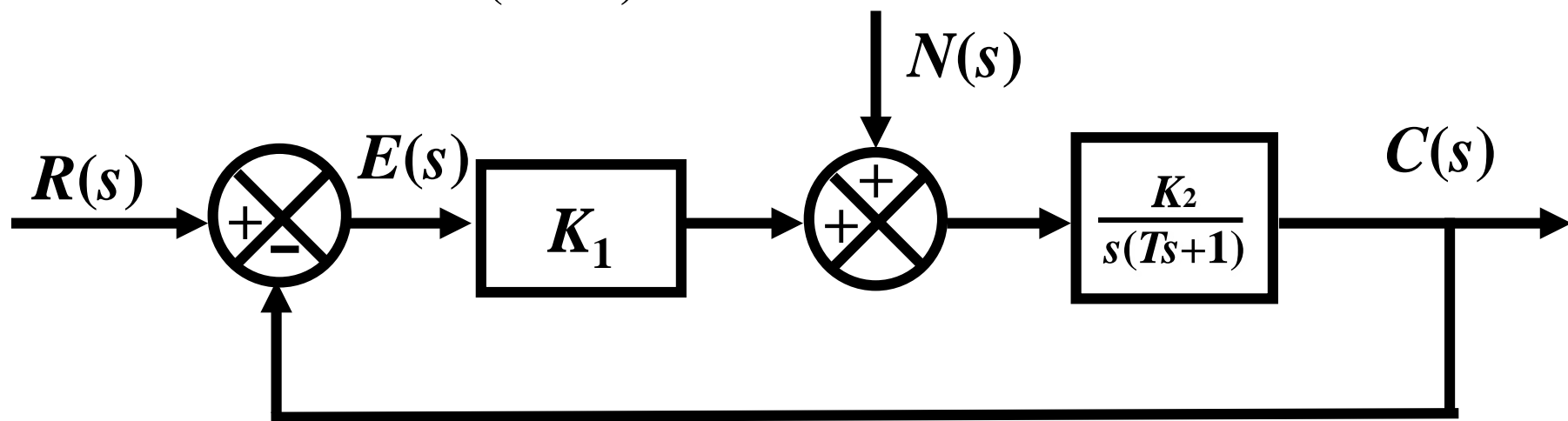
解：（1）单位阶跃给定作用下的稳态误差：


系统是 I 型系统：  $K_p = \infty \quad e_{ss} = 0$

（2）单位阶跃扰动作用下的稳态误差。

系统误差的拉氏变换为

$$E_n(s) = -\frac{\frac{K_2}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K_1 K_2}{s(Ts+1)}} N(s) = -\frac{K_2}{Ts^2 + s + K_1 K_2} \times \frac{1}{s}$$




$$E_n(s) = -\frac{\frac{K_2}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K_1 K_2}{s(Ts+1)}} N(s) = -\frac{K_2}{Ts^2 + s + K_1 K_2} \times \frac{1}{s}$$

系统结构稳定，且满足终值定理的使用条件。扰动单独作用时稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_n(s) = -1 / K_1$$

(3) 根据线性系统的叠加原理，系统在单位阶跃给定和单位阶跃扰动共同作用下的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = -1 / K_1$$

# 提高系统控制精度的措施

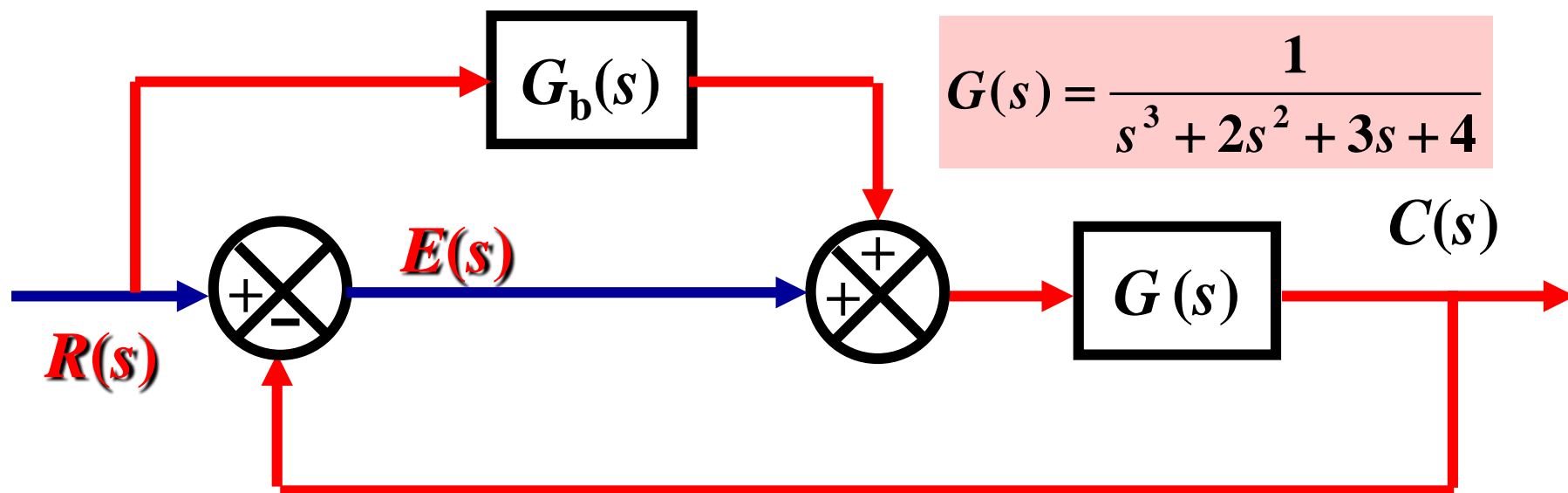
上面的分析和例题可知：

通过调整系统的结构和参数，可以提高系统精度，比如：增加积分环节的个数或增大开环放大倍数；但积分环节个数一般不能超过2个， $K$ 也不能任意扩大，否则会造成动态品质变差，甚至造成系统不稳定。

解决的办法是引入与给定或扰动作用有关的附加控制作用，构成复合控制系统。

例3-8 控制系统结构图如图所示。图中  $G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$

试确定补偿通道的传递函数，使系统在单位斜坡给定作用下无稳态误差。



解：系统误差的拉氏变换为(根据梅逊公式)

$$E(s) = \frac{1 - G(s)G_b(s)}{1 + G(s)} R(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4 - G_b(s)}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} \times \frac{1}{s^2}$$

若  $G_b(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4$ , 全补偿, 不好实现

只要  $G_b(s) = 3s + 4$ , 即可符合要求。

$$sE(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$$

# 频率特性法

- 频率特性的概念
- 典型环节频率特性
- 绘制频率特性图
- 奈氏稳定判据
- 相对稳定性
- 频率响应分析

# 频率特性的概念

## ❖ 数学本质

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

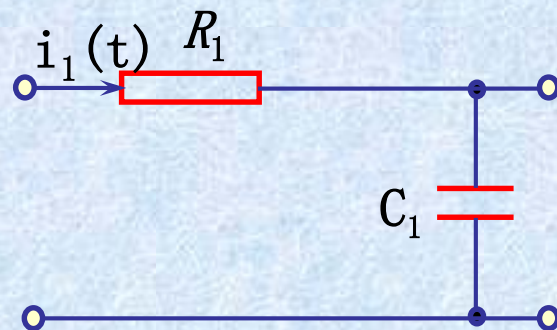
设  $u_r = A \sin \omega t$ , 则  $U_r(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$

$$U_c(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$u_c(t) = \frac{A\omega}{1 + \omega^2 T^2} e^{-t/T} + \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctg \omega T)$$

稳态分量  $\frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctg \omega T)$

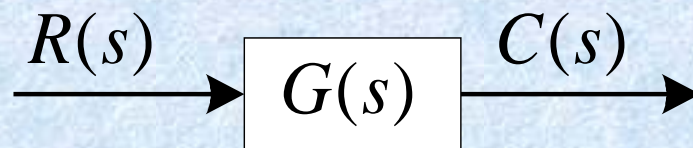
定义网络系统的幅频特性  $A(\omega) = 1/\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$ ,  
相频特性  $\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$



频率特性:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{-j\arctg \omega T} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + Ts} \Big|_{s=j\omega} \end{aligned}$$

## 扩展为一般系统



其中  $R(t) = A \sin \omega t$   $R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}$$

$$\text{则 } C(s) = G(s)R(s) = \frac{b}{s + j\omega} + \frac{\bar{b}}{s - j\omega} + \frac{a_1}{s - s_1} + \cdots + \frac{a_n}{s - s_n}$$

反拉氏变换得

$$c(t) = be^{-j\omega t} + \bar{b}e^{j\omega t} + a_1e^{s_1t} + \cdots + a_ne^{s_nt}$$

系统输出的稳态分量为  $c(t)_w = be^{-j\omega t} + \bar{b}e^{j\omega t}$



其中 
$$b = G(s) \frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} (s+j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{G(-j\omega)A}{2j}$$

$$\bar{b} = G(s) \frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} (s-j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{G(j\omega)A}{2j}$$

$G(j\omega)$  和  $G(-j\omega)$  为复数，可用复数的模和相角的形式表示为

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad \text{其中} \quad \phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)}$$

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\phi(\omega)} = |G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$$

$$\begin{aligned} c(t)_w &= -|G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)} \frac{Ae^{-j\omega t}}{2j} + |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \frac{Ae^{j\omega t}}{2j} \\ &= |G(j\omega)| A \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} = |G(j\omega)| A \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$



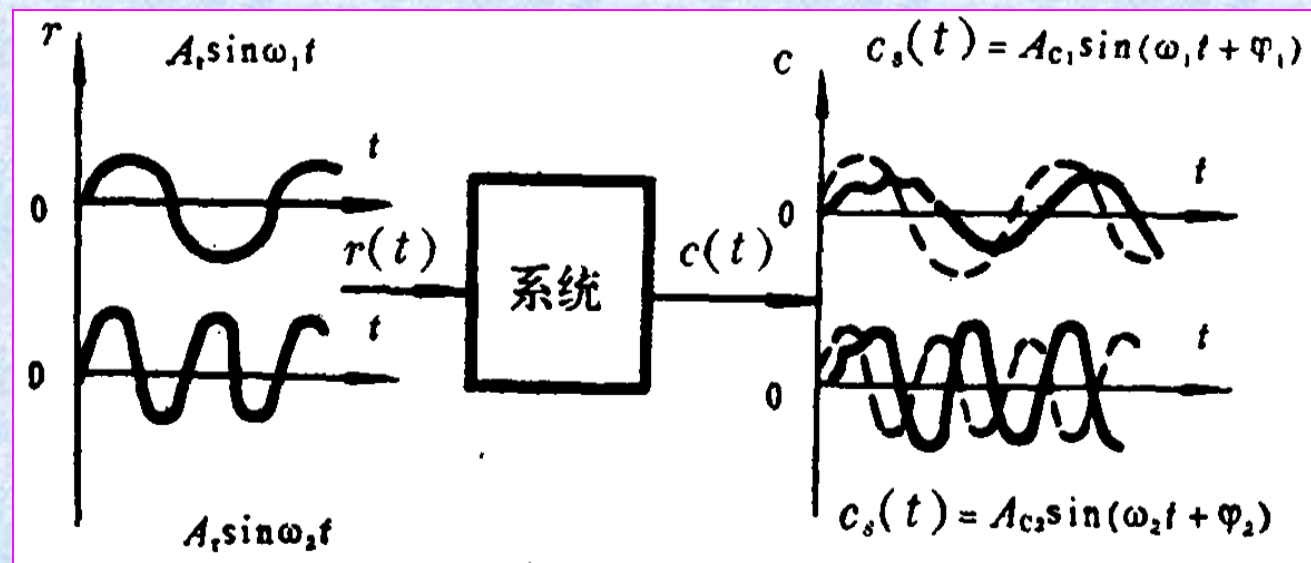
$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$$

$$\left. \begin{array}{l} |G(j\omega)| \text{ 称为幅频特性} \\ \angle G(j\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)} \text{ 称为相频特性} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{通称为系统的频率特性} \\ \text{它们都是 } \omega \text{ 的函数} \end{array}$$

✦ 注意：

- $|G(j\omega)|$  反映了系统在不同频率的正弦输入信号作用下，**稳态**输出的幅值和输入信号幅值之比。
- $\angle G(j\omega)$  反映了系统在不同频率的正弦输入信号作用下，输出信号相对于输入信号的相位位移。

## 物理意义



## ✦系统的频率特性的获取

➤由传递函数（或微分方程）可以得到系统的频率特性：

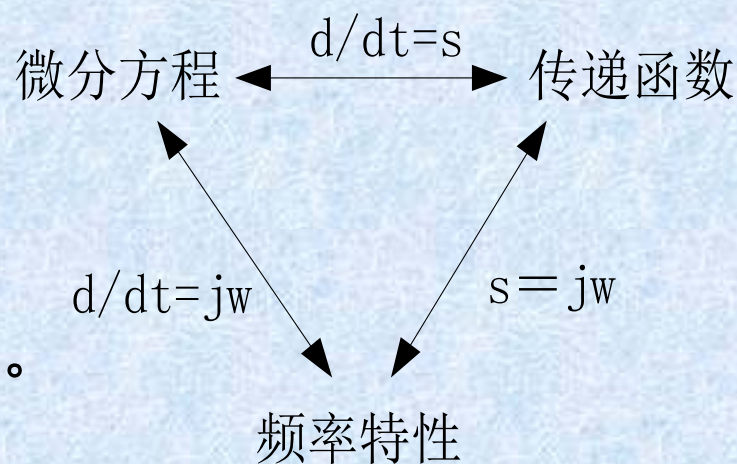
$$\text{设 } G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0}$$

$$\text{那么 } G(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \cdots b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \cdots a_1 (j\omega) + a_0}$$

比较系统的频率特性和传递函数、微分方程可知，它们之间存在右述关系

➤ 由实验方法获得

根据稳态输出的幅值比和相位差得到。  
不能针对不稳定系统，因为会存在振荡和发散



# 信号的正交分解 Hilbert空间理论

用正交函数集来表示一个信号，组成信号的分量就是相互正交的。

即：正交函数分量： $f(t) \xrightarrow{\text{分解为}} f(t)$ 由正交函数集表示

其中正交函数集各分量相互正交

如矩形脉冲  $\xrightarrow{\text{分解}}$  各次谐波的正弦与余弦表示  
傅里叶逆变换：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

- **基本思想**

- 将控制系统的各个变量看成一些信号，而这些信号又是由不同频率的正弦信号合成的；各个变量的运动就是系统对各个不同频率的信号的响应的总和。

- **特点**

- 物理意义鲜明，有很大的实际意义。
- 计算量小。它与过渡过程的性能指标有对应关系，不必解出特征根。
- 由于采用作图，使用这种做法有很强的直观性。
- 应用对象广泛。不仅适用于二阶系统，也适用于高阶系统；不仅适用于线性定常系统，也可推广应用于某些非线性系统。尤其系统在某些频率范围存在严重的噪声时，应用频率特性法可以比较满意地抑制噪声。



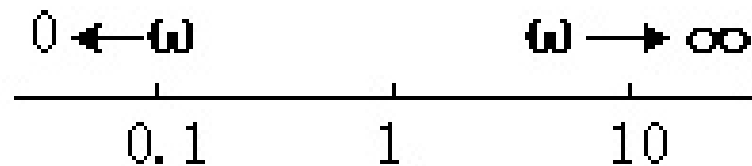
# 典型环节频率特性

## 常用于描述频率特性的几种曲线

- 幅相频率特性曲线简称幅相曲线，又称极坐标图。在复平面上，以角频率 $\omega$ 为自变量，把频率特性的幅频特性——模和相频特性——相角同时在复平面上表示出来的图就是幅相曲线。
- 开环对数频率特性图(对数坐标图或Bode图)  
包括 开环对数幅频曲线 和 开环对数相频曲线

横坐标为 $\omega$ ，以对数分度，

十倍频程，单位是rad/s



频率 $\omega$ 每扩大10倍，横轴上变化一个单位长度。因此，对于 $\omega$ 坐标分度不均匀，对于 $\lg \omega$ 则是均匀的。

- 幅频特性是 $\omega$ 的偶函数
- 相频特性是 $\omega$ 的奇函数

$\omega: 0 \rightarrow \infty$ 的曲线和 $\omega: -\infty \rightarrow 0$ 的曲线关于实轴对称

- 性能分析（尤其是稳定性）时不需要绘制精确的幅相特性曲线，只需绘制大致形状即可

伯德（Bode）图又叫**对数频率特性曲线**，它是将幅频特性和相频特性分别绘制在两个不同的坐标平面上，前者叫**对数幅频特性**，后者叫**对数相频特性**。两个坐标平面横轴（ $\omega$  轴）用对数分度，对数幅频特性的纵轴用线性分度，它表示幅值的分贝数，即  $L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)|(dB)$ ；对数相频特性的纵轴也是线性分度，它表示相角的度数，即  $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)(度)$ 。通常将这两个图形上下放置（幅频特性在上，相频特性在下），且将纵轴对齐，便于求出同一频率的幅值和相角的大小，同时为求取系统相角裕度带来方便。



对数分度:

$$\lg 2 = 0.301$$

$$\lg 5 = 0.699$$

$$\lg 8 = 3\lg 2 = 0.903$$

$$\lg 3 = 0.4771$$

$$\lg 6 = \lg 3 + \lg 2 = 0.778$$

$$\lg 9 = 2\lg 3 = 0.954$$

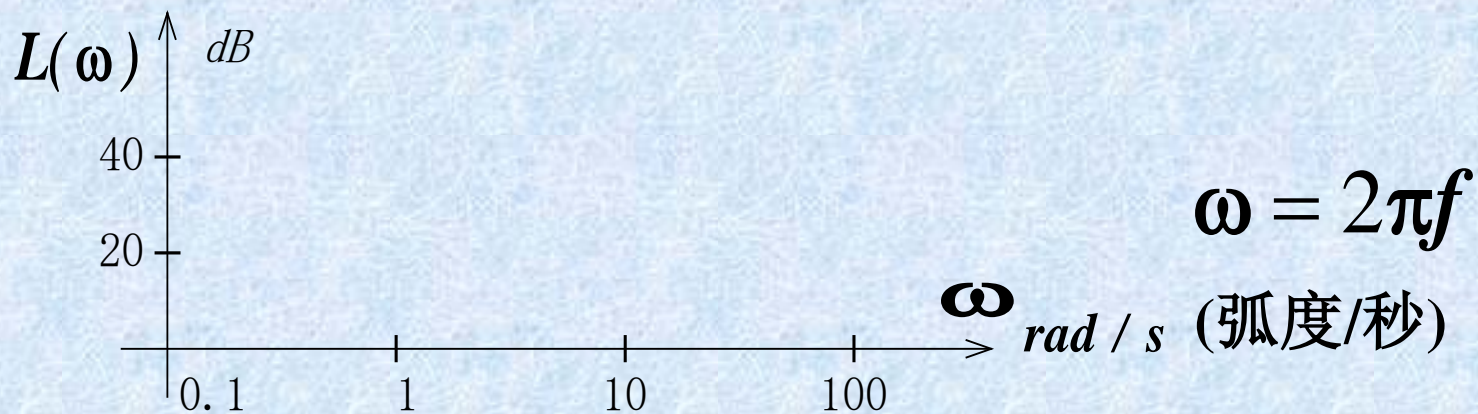
$$\lg 4 = 0.602$$

$$\lg 7 = 0.845$$

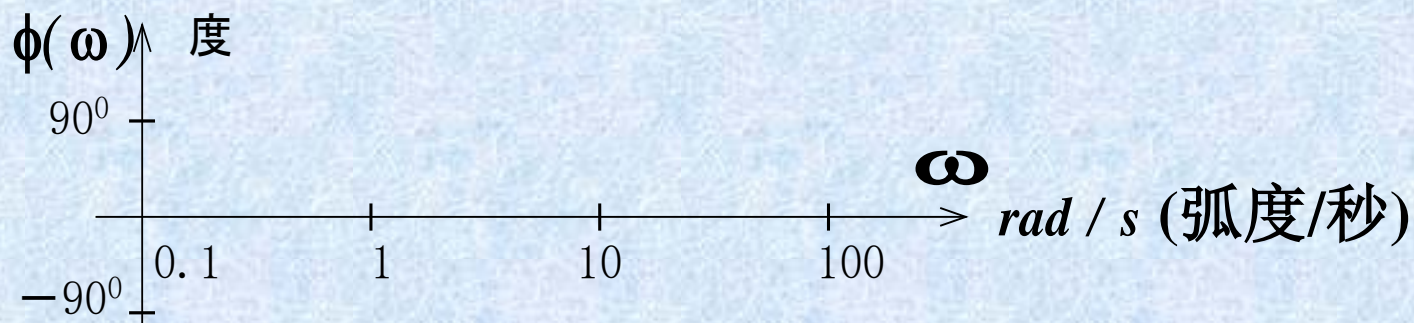
对数幅频特性的纵坐标为对数幅频特性的函数值, 采用线性分度, 单位是dB。表示为  $L(\omega) = 20\lg |G(j\omega)|$

对数相频特性的纵坐标为对数相频特性的函数值, 单位是度。表示为  $\varphi(\omega)$

线性分度



线性分度



## ➤ 对数频率特性优点

- 展宽频率范围
- 对于不含不稳定环节的系统，可由对数频率特性得到系统的传函。
- 典型环节可用直线或折线近似表示

## ➤ 几个频率特性相乘，对数幅、相曲线相加

$$G_1(j\omega)G_2(j\omega) = |G_1(j\omega)|e^{j\phi_1(\omega)} \cdot |G_2(j\omega)|e^{j\phi_2(\omega)} = |G_1||G_2|e^{j[\phi_1+\phi_2]}$$

$$20\lg|G_1G_2| = 20\lg|G_1| + 20\lg|G_2| \quad \angle G_1G_2 = \phi_1 + \phi_2$$

## ➤ 两个频率特性互为倒数，幅、相特性反号，关于轴对称

$$G_1 = \frac{1}{G_2} \quad |G_1| = \frac{1}{|G_2|} \quad 20\lg|G_1| = -20\lg|G_2| \quad \phi_1 = -\phi_2$$

# 典型环节的频率特性

- 比例环节
- 积分环节
- 惯性环节
- 振荡环节
- 一阶微分环节
- 二阶微分环节
- 延时环节
- 不稳定环节

## ❖ 比例环节

传递函数  $G(s) = k$

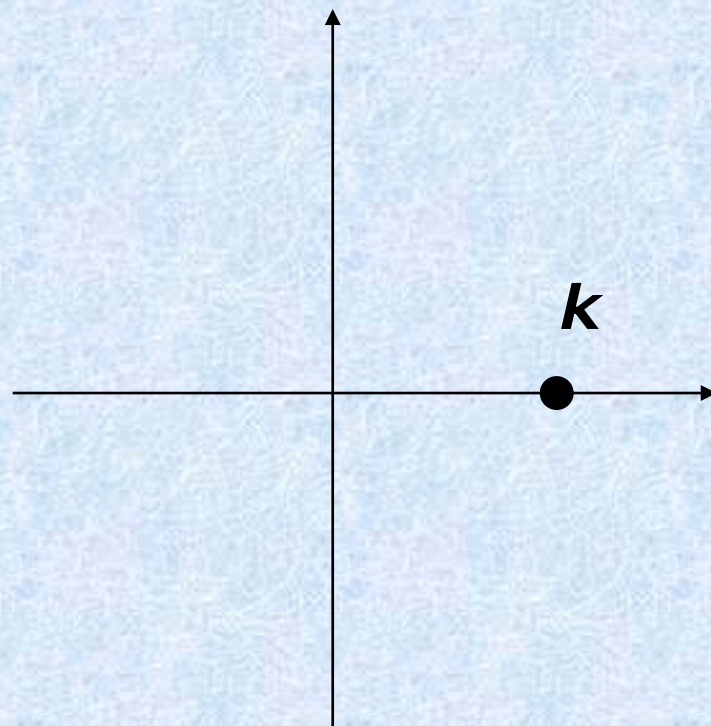
频率特性  $G(j\omega) = k$

### 1) 幅相曲线

幅频特性  $|G(j\omega)| = k$

相频特性  $\angle G(j\omega) = 0^\circ$

幅相曲线如右图所示

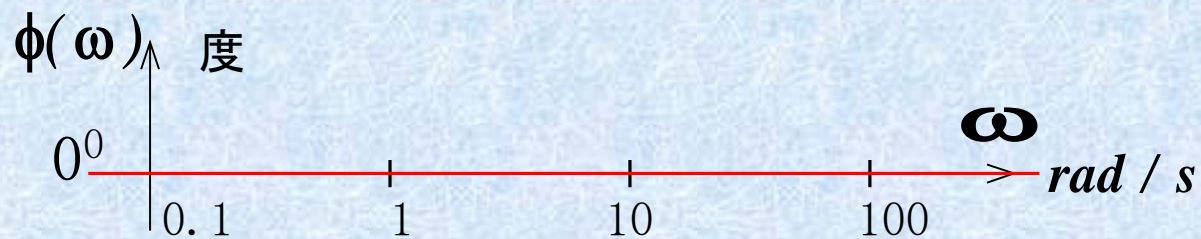
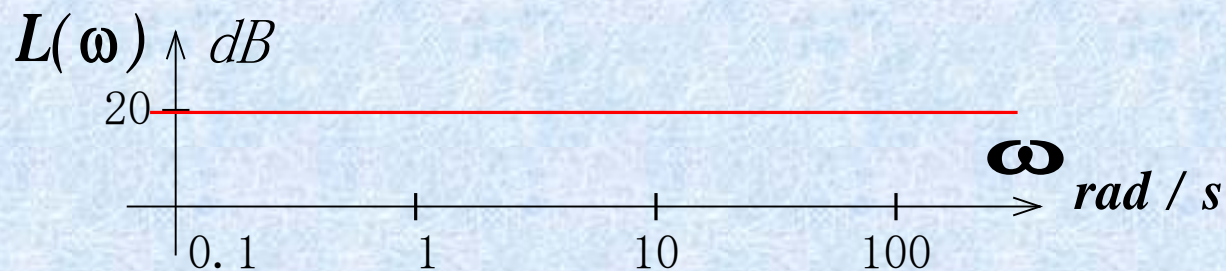




由图可看出比例环节的幅频特性为常数 $K$ ，相频特性等于零度，它们都与频率无关。理想的比例环节能够无失真和无滞后地复现输入信号。

2) 对数频率特性曲线  $L(\omega) = 20\lg k$   $\Phi(\omega) = 0^\circ$

若  $k = 10$   $L(\omega) = 20\lg 10 = 20\text{dB}$   $\Phi(\omega) = 0^\circ$



比例环节的对数幅频特性如图所示，它是一条与角频率 $\omega$ 无关且平行于横轴的直线，其纵坐标为 $20\lg k$ 。

当有 $n$ 个比例环节串联时，即

$$G(j\omega) = K_1 \cdot K_2 \cdots K_n$$

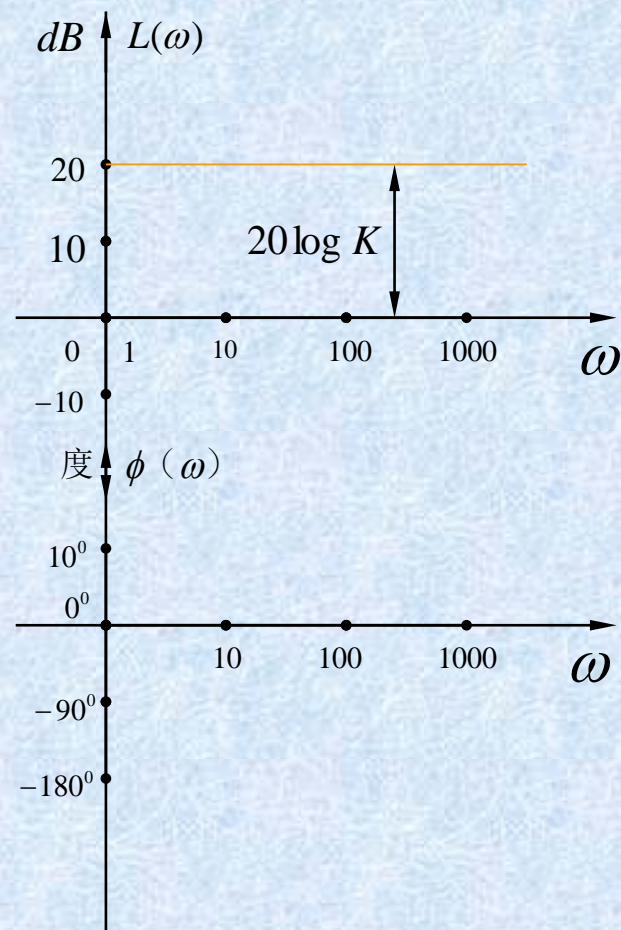
幅值的总分贝数为

$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg K_1 + 20\lg K_2 + \cdots + 20\lg K_n$$

比例环节的相频特性是

$$\angle G(j\omega) = 0^\circ$$

如图所示，它是一条与角频率 $\omega$ 无关且与 $\omega$ 轴重合的直线。



比例环节的Bode图



## ❖ 积分环节

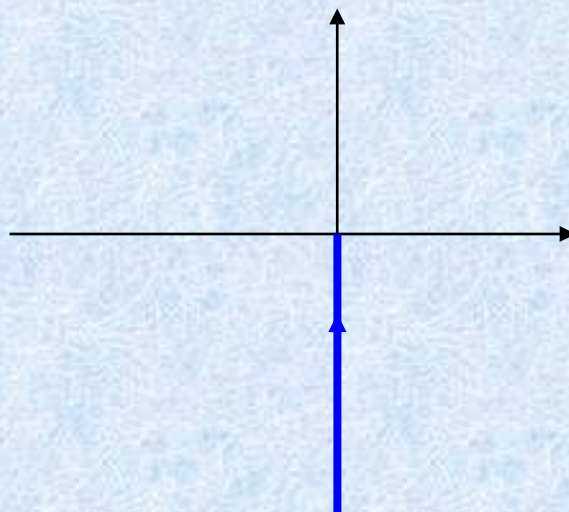
$$G(s) = \frac{1}{s} \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{-j}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-90^\circ}$$

### 1) 幅相曲线

幅频特性  $|G(j\omega)| = 1/\omega$   $\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$  时,  $|G(j\omega)|$  由  $\infty \rightarrow 0$

相频特性  $\angle G(j\omega) = -90^\circ$

幅相曲线如右图所示



## ❖ 积分环节

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{-j}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-90^\circ}$$

### 2) 对数频率特性

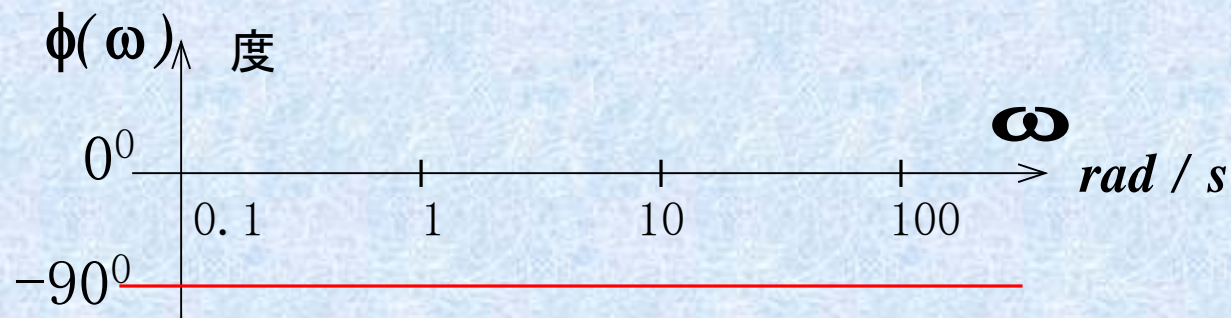
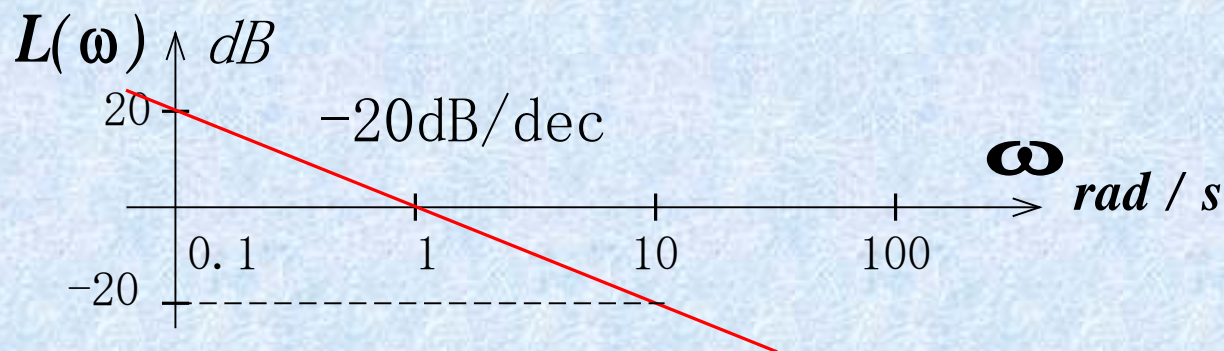
$$L(\omega) = 20\lg \frac{1}{\omega} = -20\lg \omega$$

这是一条在 $\omega=1$ 处穿过横轴的直线，其斜率为

$$20\lg \frac{1}{10\omega} - 20\lg \frac{1}{\omega} = -20\lg 10\omega + 20\lg \omega = -20\text{dB}$$

即频率变化10倍，对数幅值下降-20dB

$$\Phi(\omega) = -90^\circ$$



思考题：  
如果有n个  
积分环节，  
那么它们  
的频率特  
性如何？

当有n个积分环节串联时，即

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n}$$

其对数幅频特性为

$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg \frac{1}{\omega^n}$$

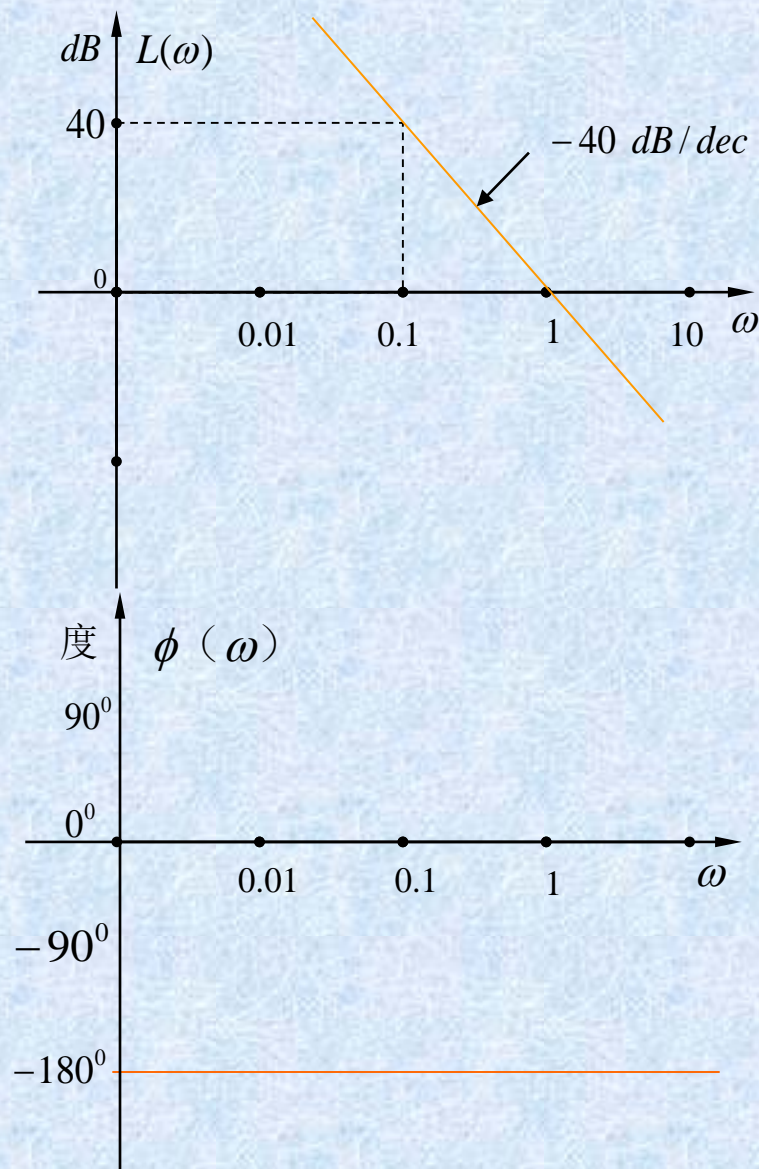
$$= -n \times 20\lg \omega$$

$$\angle G(j\omega) = -n \times 90^\circ$$

是一条斜率为 $-n \times 20$ ，且在 $\omega=1$

（弧度/秒）处过零分贝线（ $\omega$ 轴）的直线。相频特性是一条与 $\omega$ 无关，值为 $-n \times 90^\circ$ 且与 $\omega$ 轴平行的直线。

两个积分环节串联的Bode图如图所示。



两个积分环节串联的Bode图

## ❖ 惯性环节

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}}, \quad \angle G(j\omega) = -\arctg \omega T$$



$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad \angle G(j\omega) = -\arctg \omega T$$

当  $\omega = 0$  时,  $|G(j0)| = 1 \quad \angle G(j0) = 0^\circ$

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时,  $\left|G(j\frac{1}{T})\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \quad \angle G(j\frac{1}{T}) = -45^\circ$

当  $\omega = \infty$  时,  $|G(j\infty)| = 0 \quad \angle G(j\infty) = -90^\circ$

当  $\omega$  由零至无穷大变化时, 惯性环节的频率特性在  $[G(j\omega)]$  平面上是正实轴下方的半个圆周, 证明如下:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

令

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} = u(\omega)$$

## ❖ 惯性环节

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}}, \quad \angle G(j\omega) = -\arctg \omega T$$

$$\text{Im}[G(j\omega)] = -\frac{T\omega}{1+T^2\omega^2} = v(\omega)$$

则有

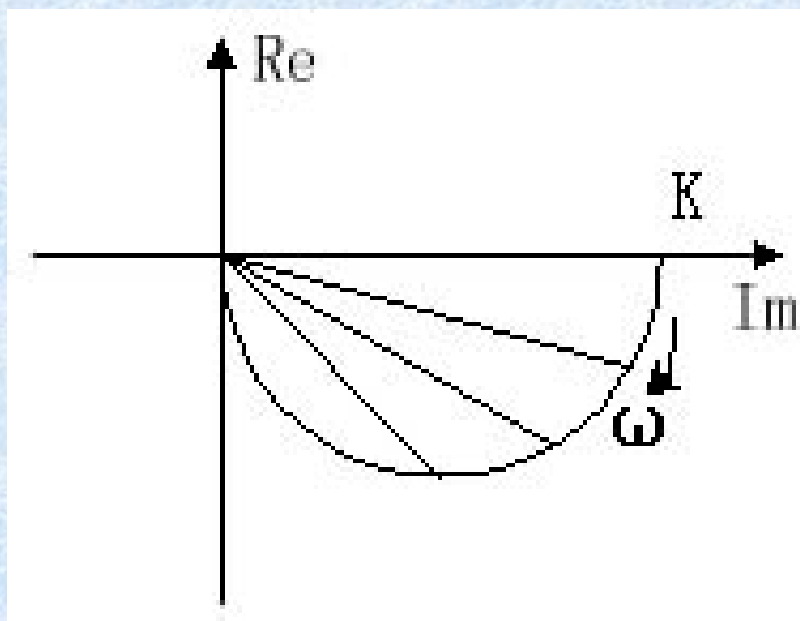
$$\left[u(\omega) - \frac{1}{2}\right]^2 + [v(\omega)]^2 = \left(\frac{1}{1+T^2\omega^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-T\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

这是一个标准圆方程，其圆心坐标是  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ，半径为  $\frac{1}{2}$ 。且当  $\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$  时， $\angle G(j\omega)$  由  $0^\circ \rightarrow -90^\circ$ ，说明惯性环节的频率特性在  $[G(j\omega)]$  平面上是实轴下方半个圆周，如图所示。惯性环节是一个**低通滤波环节**和**相位滞后环节**。在低频范围内，对输入信号的幅值衰减较小，滞后相移也小，在高频范围内，幅值衰减较大，滞后相角也大，最大滞后相角为  $90^\circ$ 。



1) 幅相曲线如图。

惯性环节为相位滞后环节，  
最大的滞后相角为90度。



## (2) 对数频率特性曲线

惯性环节的频率特性是

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1}$$

其对数幅频特性是

$$\begin{aligned} 20 \lg |G(j\omega)| &= 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \\ &= -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \end{aligned}$$

$$\text{当 } \omega \ll \frac{1}{T} \text{ 时, } 20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx 0(\text{dB})$$

$$\text{当 } \omega \gg \frac{1}{T} \text{ 时, } 20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx -20 \lg \omega T (\text{dB})$$

用两条直线近似描述惯性环节的对数幅频特性。

讨论:  $\omega \ll \frac{1}{T}$  ( $\omega T \ll 1$ )  $L(\omega) \approx 0dB$   $\Phi(\omega) = 0^\circ$

$\omega = \frac{1}{T}$  ( $\omega T = 1$ )  $L(\omega) = -3dB$   $\Phi(\omega) = -45^\circ$

$\omega \gg \frac{1}{T}$  ( $\omega T \gg 1$ )  $L(\omega) \approx -20\lg \omega T$   $\Phi(\omega) = -90^\circ$

$L(\omega)$  用渐近线表示: 
$$\begin{cases} \omega < \frac{1}{T} & L(\omega) = 0dB \\ \omega > \frac{1}{T} & L(\omega) = -20\lg \omega T \end{cases}$$

惯性环节的相频特性为

$$\angle G(j\omega) = -\arctg \omega T$$

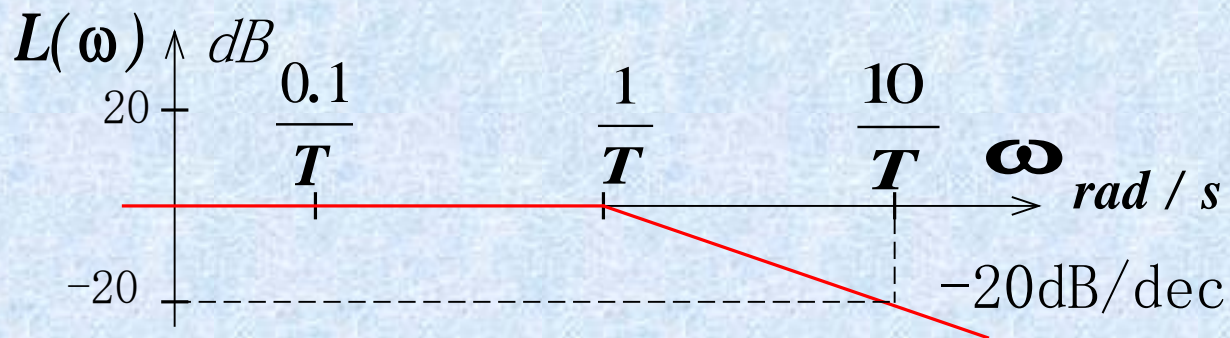
当  $\omega = 0$  时,  $\angle G(j0) = 0^0$

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时,  $\angle G(j\frac{1}{T}) = -45^0$

当  $\omega = \infty$  时,  $\angle G(j\infty) = -90^0$

对应的相频特性曲线如下图所示。它是一条由  $0^0$ 至 $-90^0$ 范围内变化的反正切函数曲线,

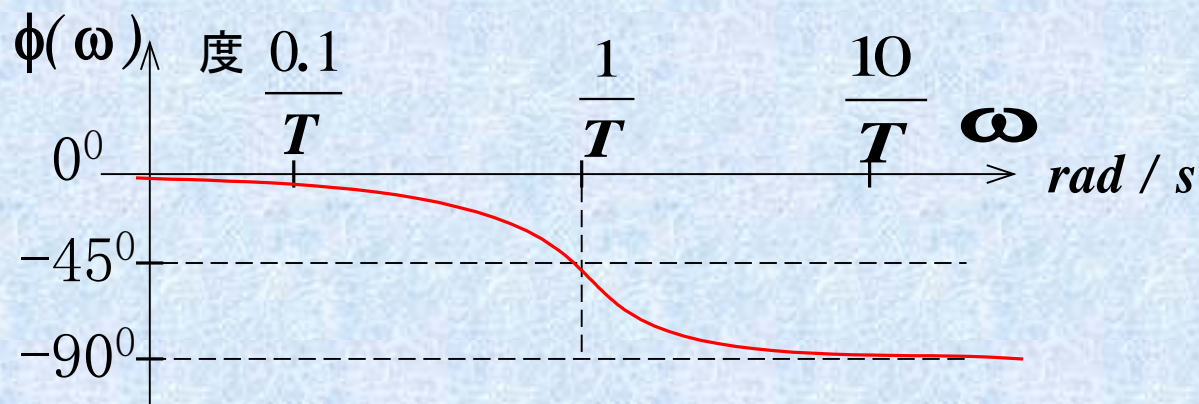
且以  $\omega = \frac{1}{T}$  和  $\angle G(j\omega) = -45^0$  的交点为斜对称。



$$\omega T = 0.1$$

$$L(\omega) = -0.04dB$$

$$\Phi(\omega) = -5.7^\circ$$



$$\omega T = 10$$

$$L(\omega) = -20.04dB$$

$$\Phi(\omega) = -84.3^\circ$$



## ❖ 振荡环节

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \omega_n = 1/T = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 - \omega^2 T^2) + j2\zeta\omega T}$$

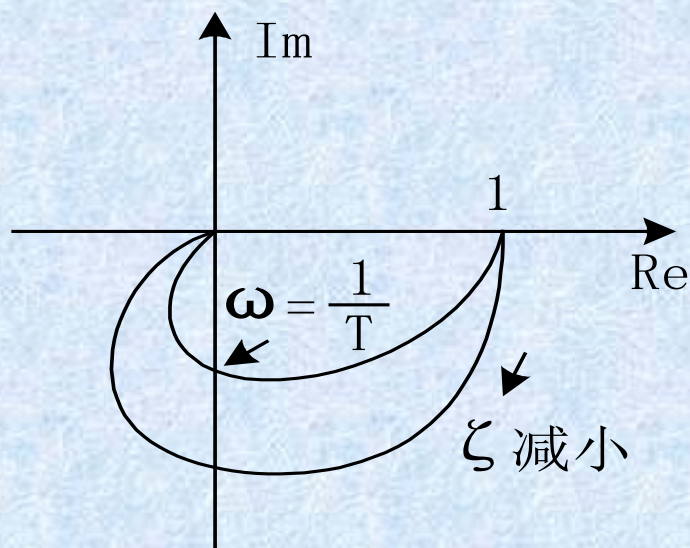
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}} \quad \angle G(j\omega) = -\arctg \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$

### 1) 幅相曲线

$$\omega = 0, \quad || = 1, \quad \angle = 0^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{T}, \quad || = \frac{1}{2\zeta}, \quad \angle = -90^\circ$$

$$\omega = \infty, \quad || = 0, \quad \angle = -180^\circ$$



$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctg \frac{2\xi T \omega}{1-T^2 \omega^2}$$

$$\text{当 } \omega = 0 \text{ 时, } |G(j\omega)| = 1, \quad \angle G(j\omega) = 0^\circ$$

$$\text{当 } \omega = \frac{1}{T} \text{ 时, } |G(j\omega)| = \frac{1}{2\xi}, \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

$$\text{当 } \omega = \infty \text{ 时, } |G(j\omega)| = 0, \quad \angle G(j\omega) = -180^\circ$$

振荡环节的幅频特性和相频特性均与阻尼比  $\xi$  有关，不同阻尼比的频率特性曲线[如图所示](#)。

当阻尼比较小时，会产生[谐振](#)，谐振峰值  $M_r (M_r > 1)$  和谐振频率  $\omega_r$  由幅频特性的极值方程解出，[谐振时幅值大于1](#)

$$\frac{d}{d\omega} |G(j\omega)| = \frac{d}{d\omega} \left[ (1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2 \right] = 0$$

$$\omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1-2\xi^2} = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \quad (0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}})$$

其中  $\omega_n = \frac{1}{T}$  称为振荡环节的无阻尼自然振荡频率，它是振荡环节频率特性曲线与虚轴的交点处的频率。

将  $\omega_r$  代入  $|G(j\omega)|$  得到谐振峰值  $M_r$  为

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}})$$

将  $\omega_r$  代入  $\angle G(j\omega)$  得到谐振相移  $\phi_r$  为

$$\phi_r = \angle G(j\omega_r) = -\arctg \frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi}$$

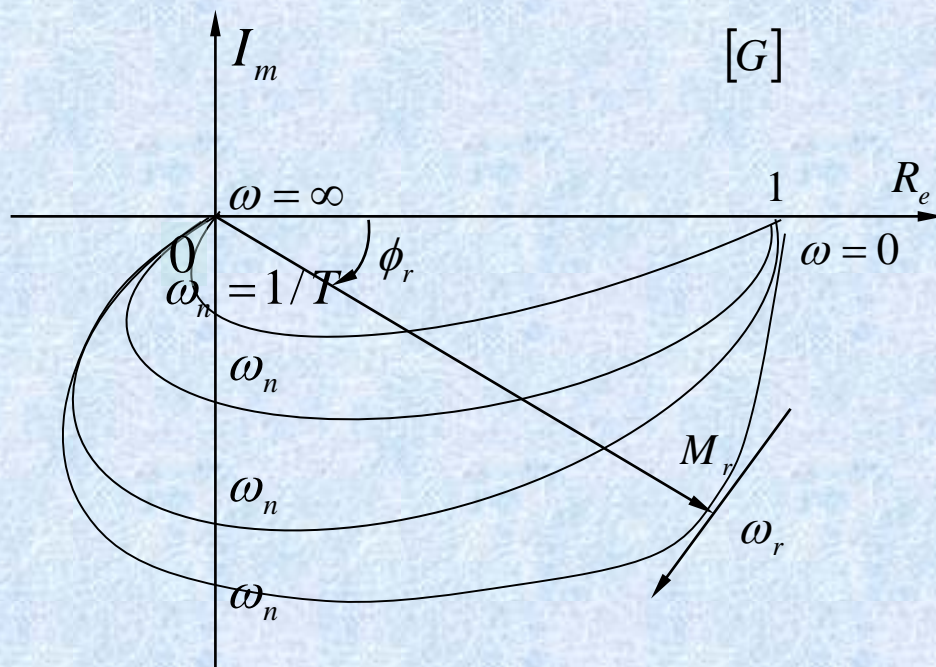


图 振荡环节的频率响应

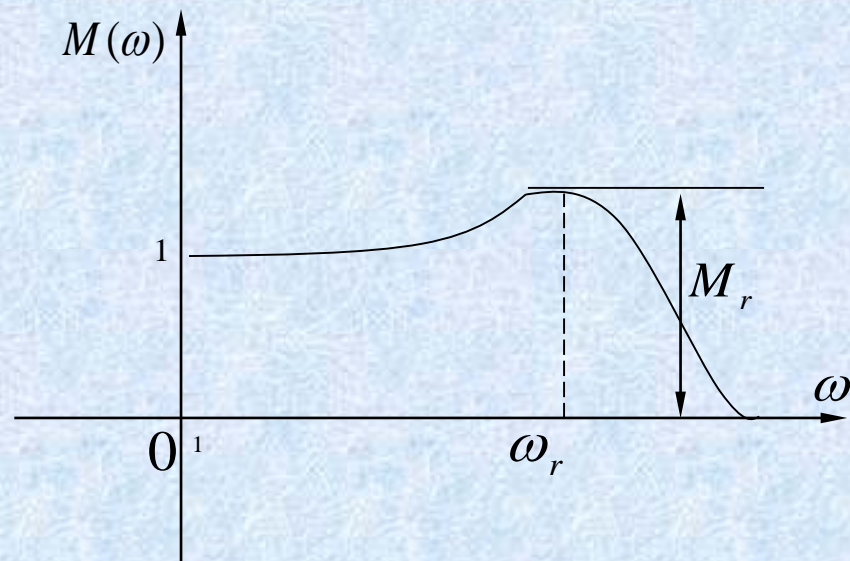


振荡环节的幅值特性曲线如图所示。在  $0 < \omega < \omega_r$  的范围内，随着  $\omega$  的增加， $M(\omega)$  缓慢增大；当  $\omega = \omega_r$  时， $M(\omega)$  达到最大值  $M_r$ ；当  $\omega > \omega_r$  时，输出幅值衰减很快。

当阻尼比  $\xi > 1$  时，此时振荡环节可等效成两个不同时间常数的惯性环节的串联，即

$$G(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (\xi > 1)$$

$T_1, T_2$  为一大一小两个不同的时间常数，**小时间常数**对应的负实极点离虚轴较远，对瞬态响应的影响**较小**。



振荡环节的频率响应

振荡环节为相位滞后环节，最大的滞后相角为180度。

## 2) 对数频率特性

平方项

$$L(\omega) = -20 \lg \left[ (1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Phi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2} \quad \omega_n = \frac{1}{T} \text{ 转折频率}$$

4次方项

(1)  $\omega \ll \omega_n \quad \omega T \ll 1, \quad L(\omega) \approx -20 \lg 1 = 0 \text{ dB}, \quad \Phi(\omega) \approx 0^\circ$

$$\text{误差 } \Delta L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2} - 0$$

(2)  $\omega = \omega_n \quad \omega T = 1,$

$$L(\omega) = -20 \lg 2\zeta, \quad \Phi(\omega) \approx -90^\circ$$

(3)  $\omega \gg \omega_n \quad \omega T \gg 1,$

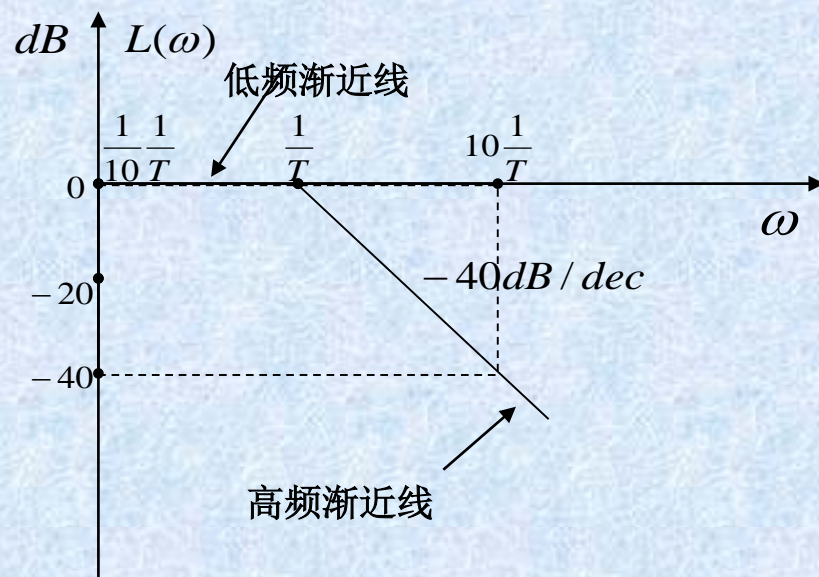
$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2} \approx -40 \lg \omega T, \quad \Phi(\omega) \approx -180^\circ$$

$$\Delta L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2} - (-40 \lg \omega T)$$

当  $\omega \ll \frac{1}{T}$  时,  $-20\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} \approx 0(dB)$

当  $\omega \gg \frac{1}{T}$  时,  $-20\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} \approx -40\lg T\omega(dB)$

渐近线的第一段折线与零分贝线 ( $\omega$  轴) 重合, 对应的频率范围是0至  $\frac{1}{T}$ ; 第二段折线的起点在  $\frac{1}{T}$  处, 是一条斜率为-40 (dB/dec) 的直线, 对应的频率范围是  $\frac{1}{T}$  至  $\infty$ 。两段折线构成振荡环节对数幅频特性的**渐近线**, 它们的转折频率为  $\frac{1}{T}$ 。对数幅频特性曲线的渐近线如图所示。





渐近线与精确对数幅频特性曲线的误差分析如下：

$$\omega = \frac{1}{T} \Rightarrow -20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} \Big|_{\omega = \frac{1}{T}} = -20 \lg 2\xi$$

它是阻尼比  $\xi$  的函数；当  $\xi = 1$  时为  $-6$  (dB)，当  $\xi = 0.5$  时为  $0$  (dB)，当  $\xi = 0.25$  时为  $+6$  (dB)；误差曲线如图4-18所示。

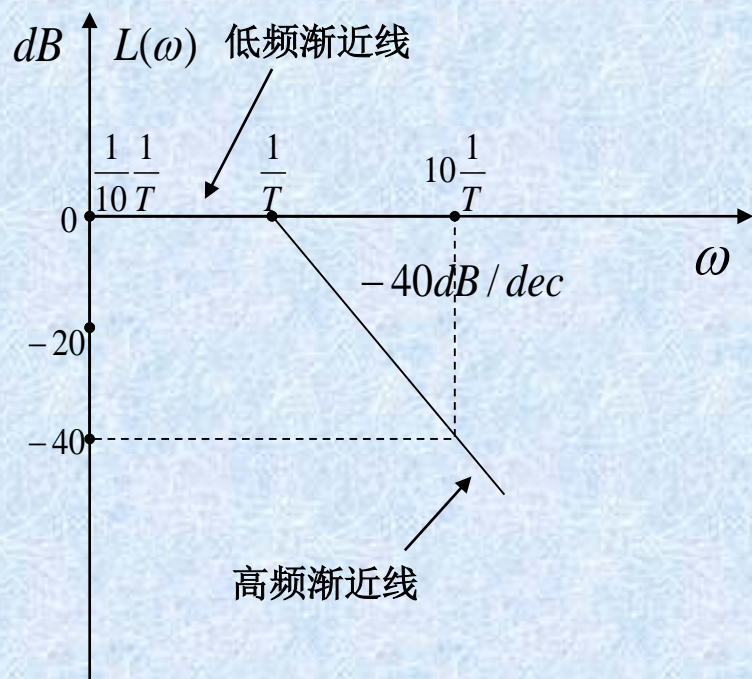


图4-17 振荡环节渐进线对数幅频特性

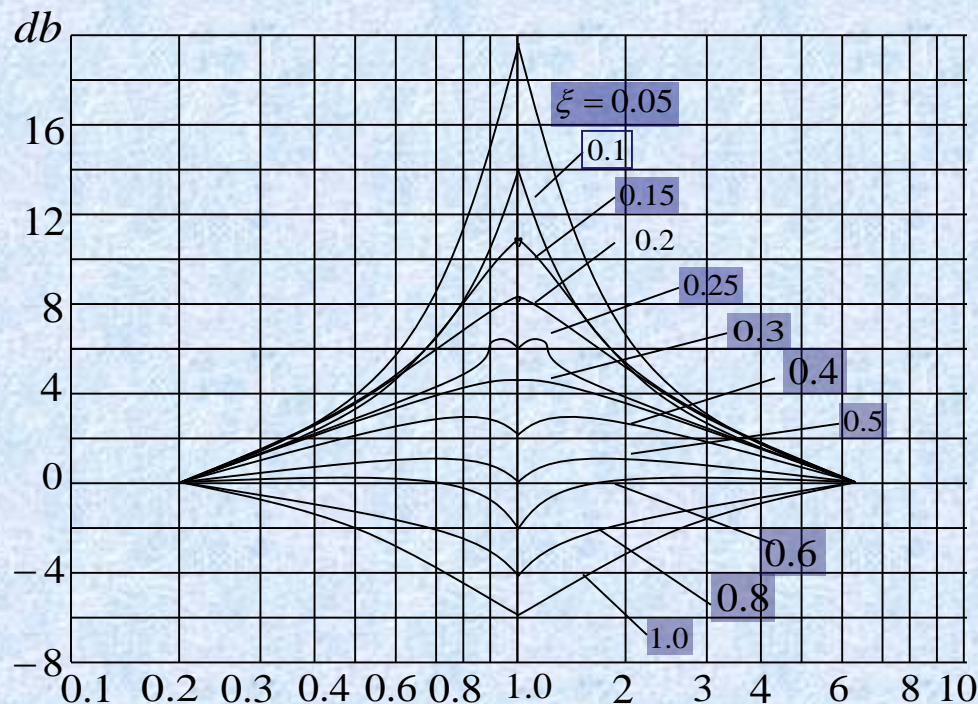


图4-18 振荡环节对数幅频特性误差修正曲线

由图知，振荡环节的**误差可正可负**，它们是阻尼比  $\xi$  的函数，且以  $\omega = \frac{1}{T}$  的转折频率为对称，距离转折频率愈远误差愈小。通常大于（或小于）十倍转折频率时，误差可忽略不计。经过修正后的对数幅频特性曲线如图所示。

由图可看出，振荡环节的对数幅频特性在转折频率  $\frac{1}{T}$  附近产生谐振峰，这是该环节固有振荡性能在频率特性上的反映。前面已经分析过，谐振频率  $\omega_r$  和谐振峰  $M_r$  分别为

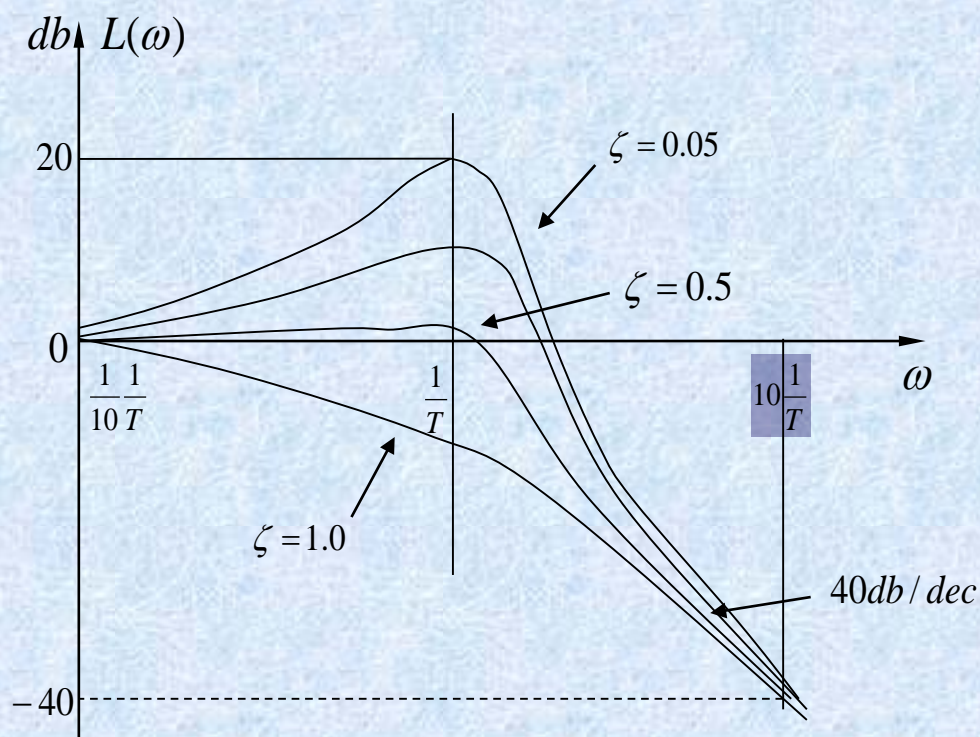


图 振荡环节对数幅频率特性图

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

其中  $\omega_n = \frac{1}{T}$  称为振荡环节的无阻尼（ $\xi = 0$ ）自然振荡频率，它也是渐近线的转折频率。由式可知，当阻尼比  $\xi$  愈小谐振频率  $\omega_r$  愈接近无阻尼自然振荡频率  $\omega_n$ ，当  $\xi = 0$  时， $\omega_r = \omega_n$

振荡环节的相频特性是

$$\angle G(j\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}$$

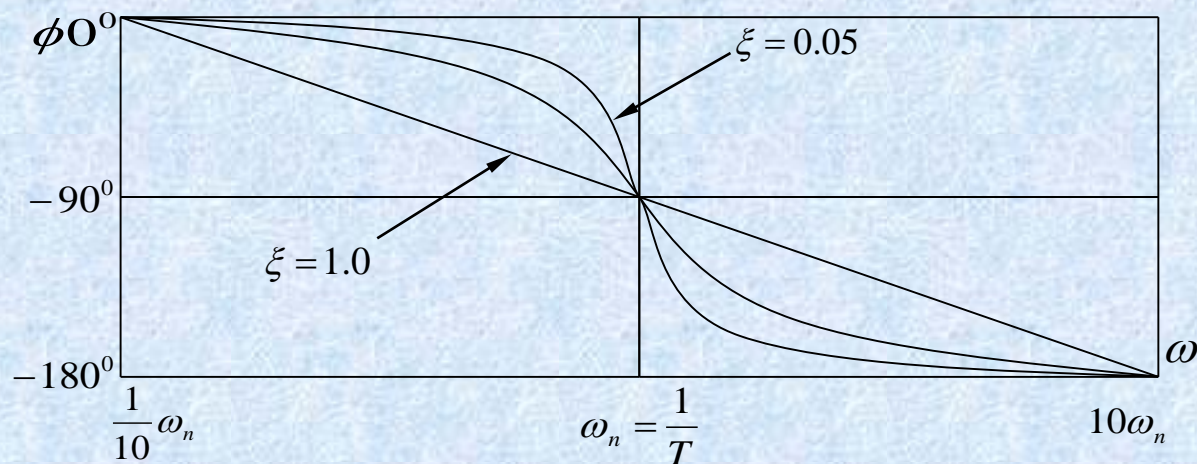


当  $\omega = 0$  时,  $\angle G(j0) = 0^\circ$

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时,  $\angle G(j\frac{1}{T}) = -90^\circ$

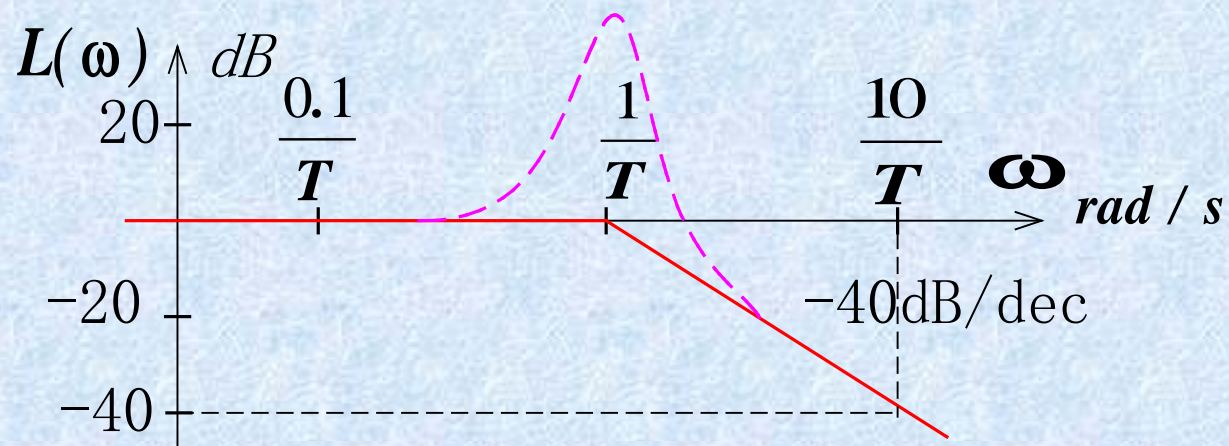
当  $\omega = \infty$  时,  $\angle G(j\infty) = -180^\circ$

除上面三种特殊情况外, 振荡环节相频特性还是阻尼比  $\xi$  的函数, 随阻尼比  $\xi$  变化, 相频特性在转折频率  $\frac{1}{T}$  附近的变化速率也发生变化, **阻尼比  $\xi$  越小, 变化速率越大**, 反之愈小。但这种变化不影响整个相频特性的大致形状。不同阻尼比  $\xi$  的相频特性如图 所示。

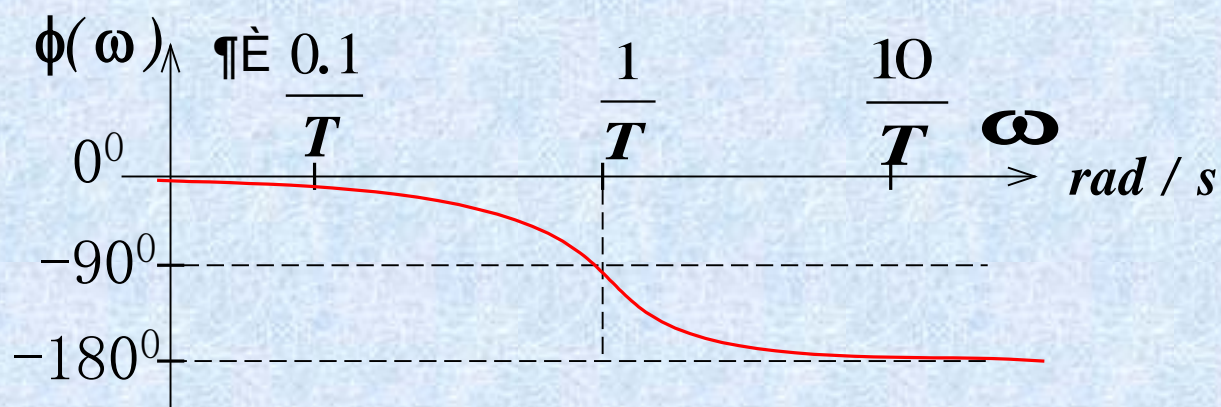


图

振荡环节对数相频特性图



精确值和近似值之间存在的误差  $\Delta L(\omega)$  和  $\zeta$  相关；并且  $\zeta$  越小，误差越大。



相频特性也是关于  $\omega, \zeta$  的函数，关于  $-90$  度斜对称。



## ❖ 一阶微分环节

$$G(s) = sT + 1 \quad G(j\omega) = j\omega T + 1$$

幅频特性  $|G(j\omega)| = \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$

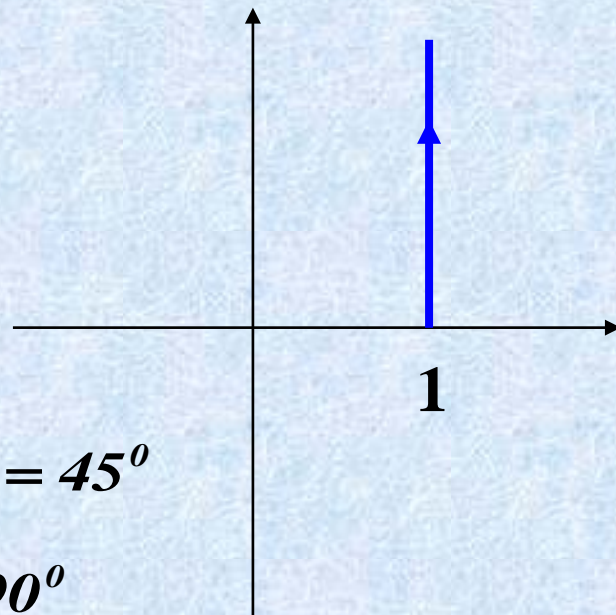
相频特性  $\angle G(j\omega) = \arctan \omega T$

### 1) 幅相曲线

当  $\omega=0$  时,  $|G(j0)| = 1$ ,  $\angle G(j0) = 0^\circ$

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时,  $|G(j\frac{1}{T})| = \sqrt{2}$ ,  $\angle G(j\frac{1}{T}) = 45^\circ$

当  $\omega = \infty$  时,  $|G(j\infty)| = \infty$ ,  $\angle G(j\infty) = 90^\circ$



➤ 两个频率特性互为倒数, 幅、相特性反号, 关于轴对称

$$G_1 = \frac{1}{G_2} \quad |G_1| = \frac{1}{|G_2|} \quad 20\lg|G_1| = -20\lg|G_2| \quad \phi_1 = -\phi_2$$

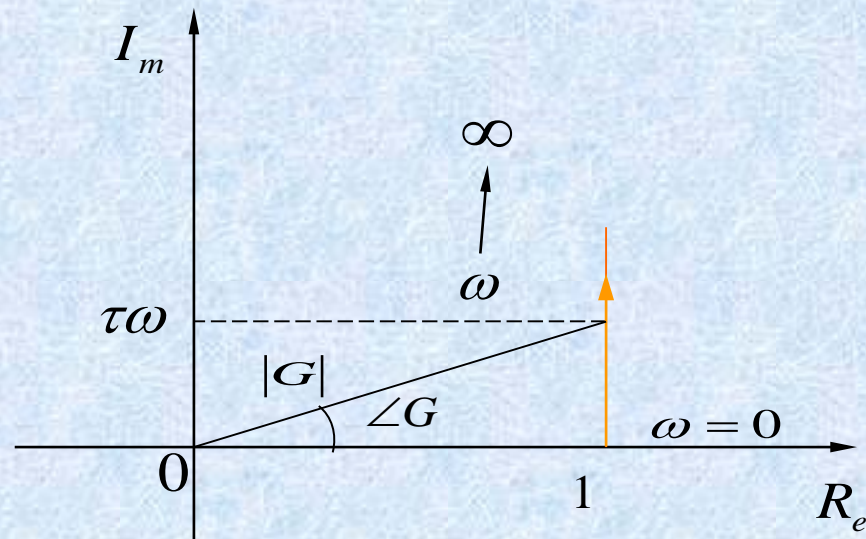


图 一阶微分环节的频率响应

频率特性[如图](#)所示。它是一条过点  $(1, j0)$  与实轴垂直相交且位于实轴上方的直线。纯微分环节的频率特性与正虚轴重合。

## 2) 对数频率特性

$$G(j\omega) = j\omega T + 1$$

其对数幅频特性是

$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

当  $\omega \ll \frac{1}{T}$  时,  $20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1} \approx 0(dB)$

当  $\omega \gg \frac{1}{T}$  时,  $20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1} \approx 20\lg T\omega(dB)$

一阶微分环节的对数幅频特性如图所示, 渐近线的转折频率为  $1/T$ , 转折频率处渐近特性与精确特性的误差为  $20\lg\sqrt{2} = 3dB$ , 其误差均为正分贝数, 误差范围与惯性环节类似。

相频特性是  $\angle G(j\omega) = \arctg T\omega$

当  $\omega = 0$  时,  $\angle G(j0) = 0^0$  ;

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时,  $\angle G(j\frac{1}{T}) = 45^\circ$ ;

当  $\omega = \infty$  时,  $\angle G(j\infty) = 90^\circ$ 。

一阶微分环节的相频特性如图所示, 相

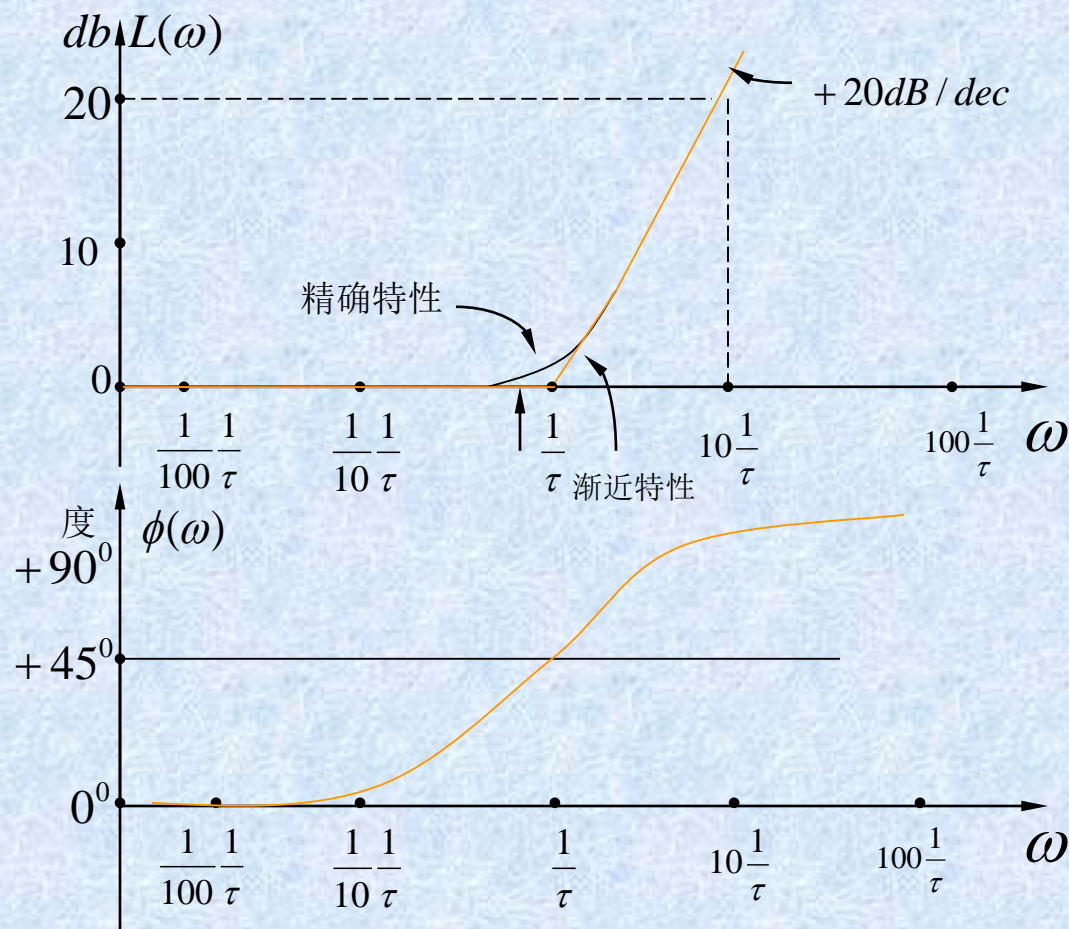
角变化范是  $0^\circ$  至  $90^\circ$ ,  
转折频率  $\frac{1}{T}$  处的相角

为  $45^\circ$ 。比较 可知, 一

阶微分环节与惯性环节的

对数幅频特性和相频特性是以**横轴 ( $\omega$  轴)**

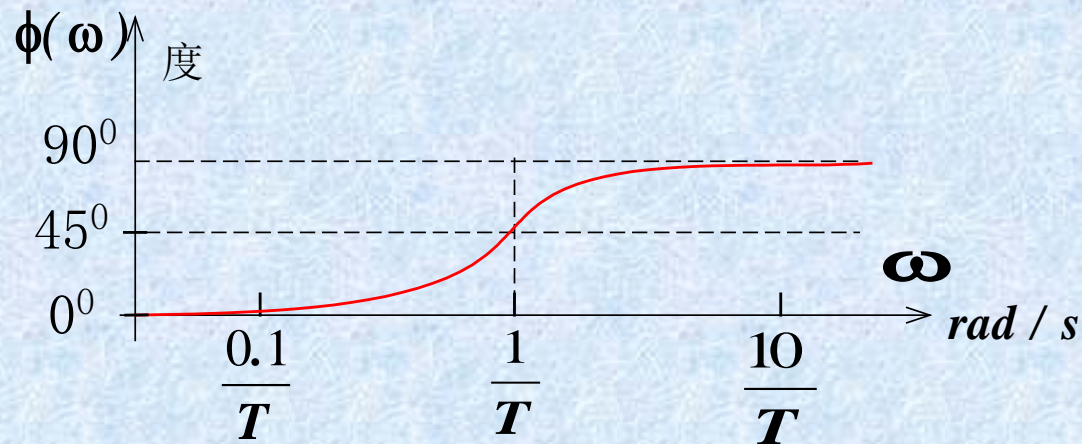
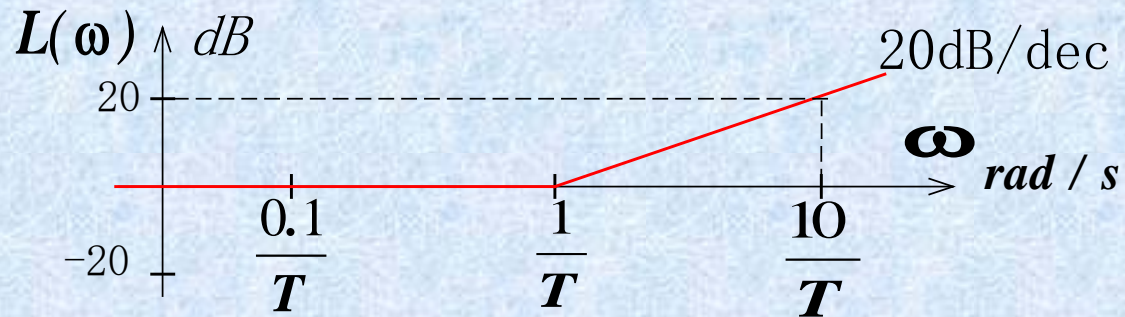
为对称的。



一阶微分环节的Bode图



$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \Phi(\omega) = \arctan \omega T$$



## ❖ 二阶微分环节

$$G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad G(j\omega) = (1 - \omega^2 T^2) + j2\zeta\omega T$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}$$

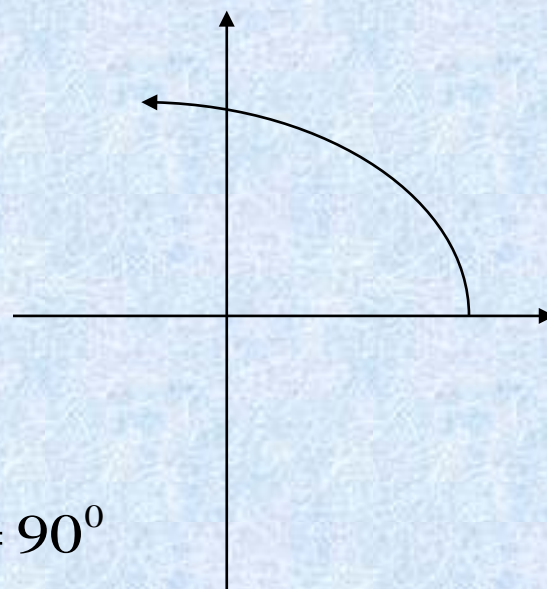
$$\angle G(j\omega) = \arctg \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$

### 1) 幅相曲线

当  $\omega=0$  时,  $|G(j0)| = 1$ ,  $\angle G(j0) = 0^\circ$

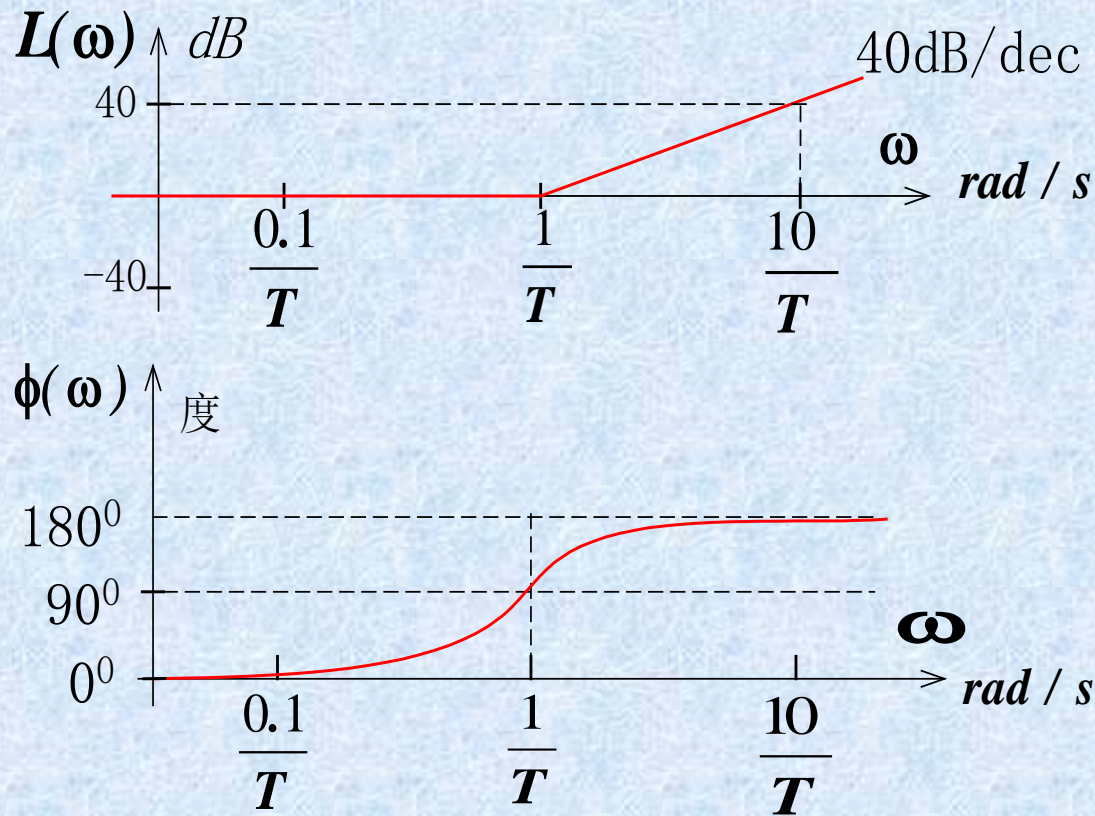
当  $\omega = \frac{1}{T}$  时,  $\left|G(j\frac{1}{T})\right| = 2\zeta$ ,  $\angle G(j\frac{1}{T}) = 90^\circ$

当  $\omega = \infty$  时,  $|G(j\infty)| = \infty$ ,  $\angle G(j\infty) = 180^\circ$

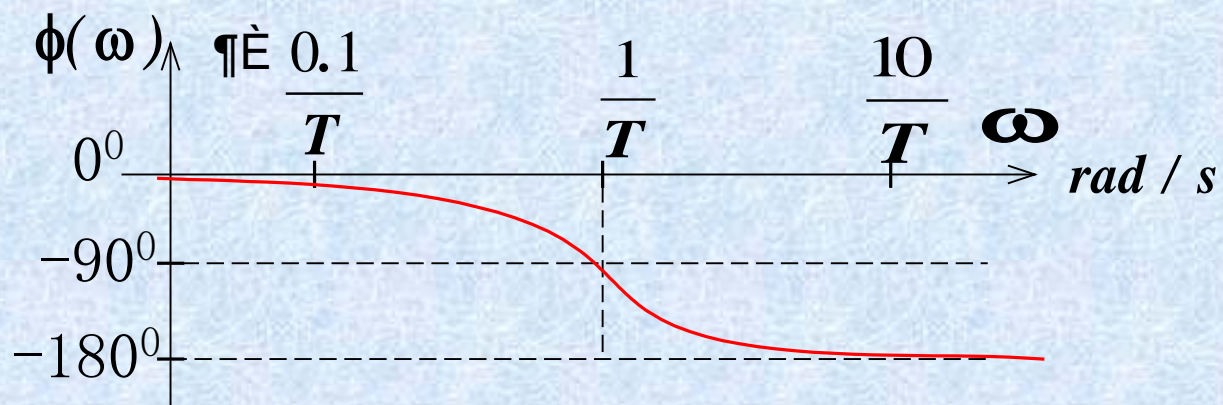
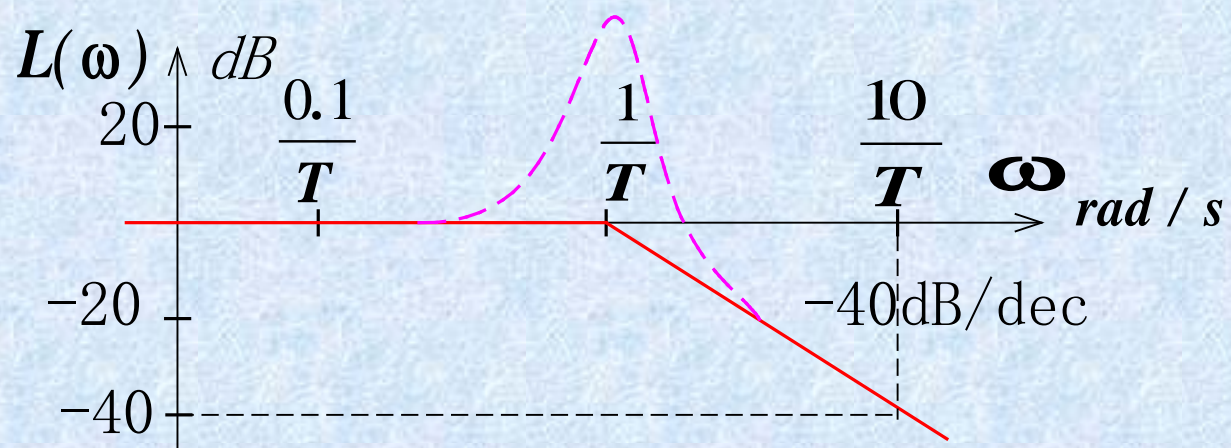


2) 对数频率特性  $L(\omega) = -20 \lg \left[ (1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

$$\Phi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$



由上可见，二阶微分环节和振荡环节的对数频率特性互为镜像。



振荡环节的bode图

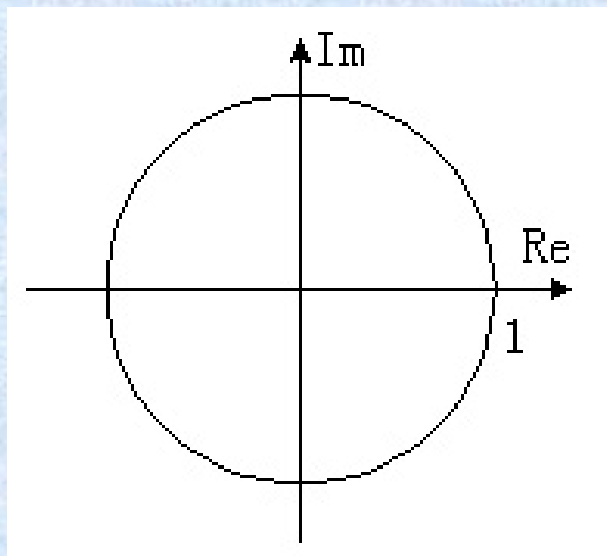


## ❖ 延时环节

$$G(s) = e^{-\tau s} \quad G(j\omega) = e^{-\tau j\omega} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau$$

$$|G| = 1 \quad \angle G(j\omega) = -\tau \omega \text{ (弧度)} = -57.3 \tau \omega \text{ (度)}$$

幅相曲线和对数频率特性曲线分别是



其对数幅频特性和相频特性分别为

$$G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg 1 = 0(\text{dB})$$

$$\angle G(j\omega) = -\tau\omega \text{ (弧度)} = -57.3\tau\omega \text{ (度)}$$

延时环节伯德图如图所示。  
其对数幅频特性与 $\omega$ 无关，  
是一条与 $\omega$ 轴重合的零分贝  
线。滞后相角分别与滞后时  
间常数 $\tau$ 和角频率 $\omega$ 成正比。

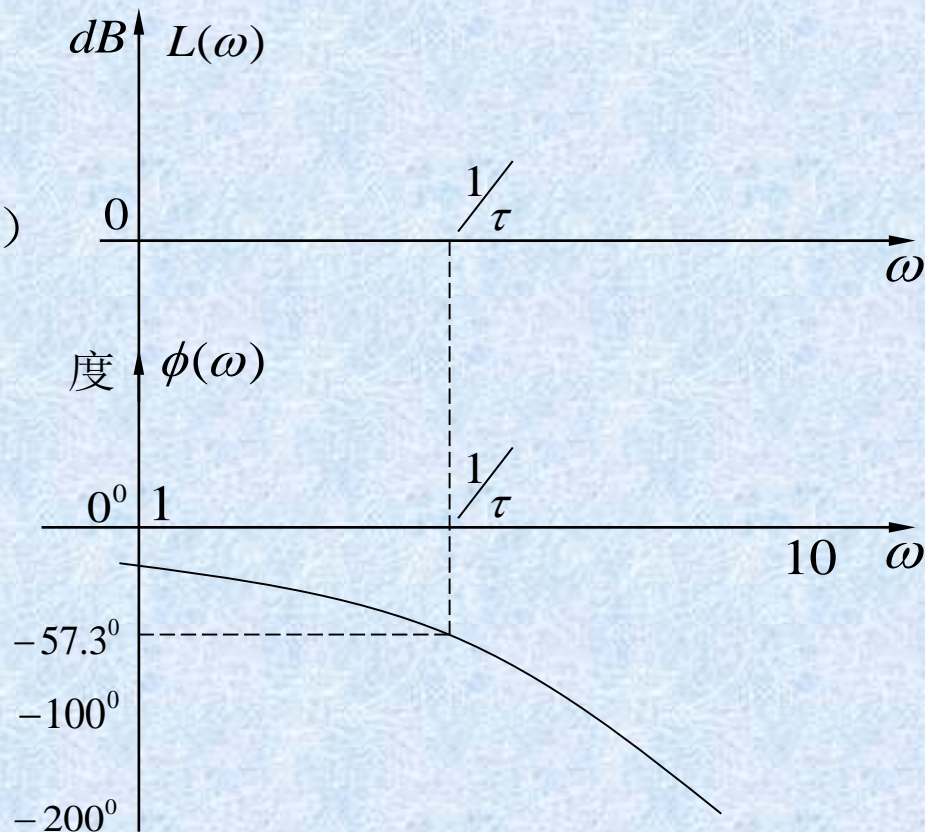


图 延时环节的Bode图

## ❖ 不稳定环节

不稳定环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{Ts - 1}$$

不稳定环节有一个正实极点，对应的频率特性是

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega - 1}$$

幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{T\omega}{-1} = -180^\circ + \operatorname{arctg} T\omega$$

$$\text{当 } \omega = 0 \text{ 时, } |G(j0)| = 1, \quad \angle G(j0) = -180^\circ$$

$$\text{当 } \omega = \frac{1}{T} \text{ 时, } |G(j\frac{1}{T})| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \angle G(j\frac{1}{T}) = -135^\circ$$

$$\text{当 } \omega = \infty \text{ 时, } |G(j\infty)| = 0, \quad \angle G(j\infty) = -90^\circ$$

不稳定环节的频率特性  
如右图。比较图可知，  
它与**惯性环节**的频率特性  
相比，是以平面的虚轴为  
对称的。

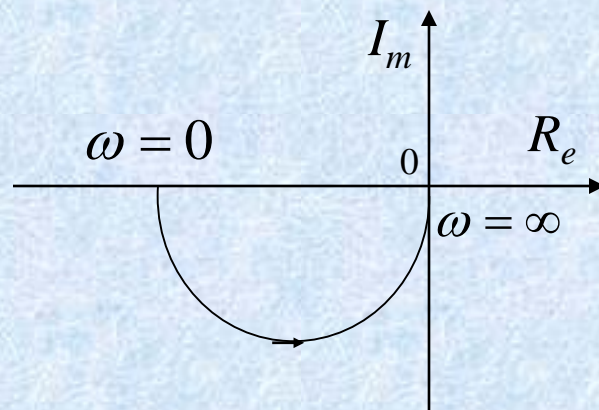


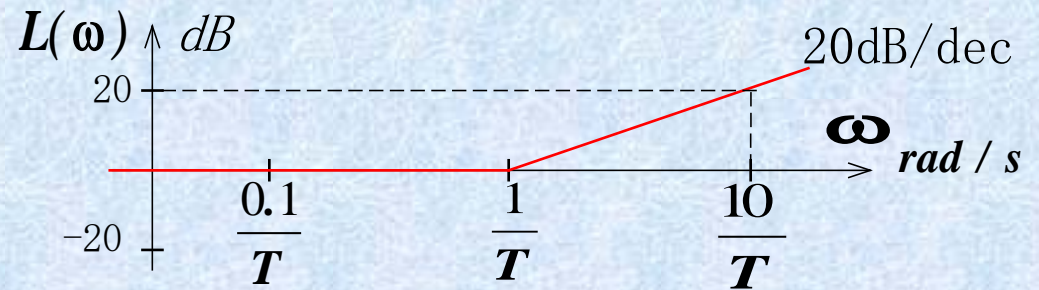
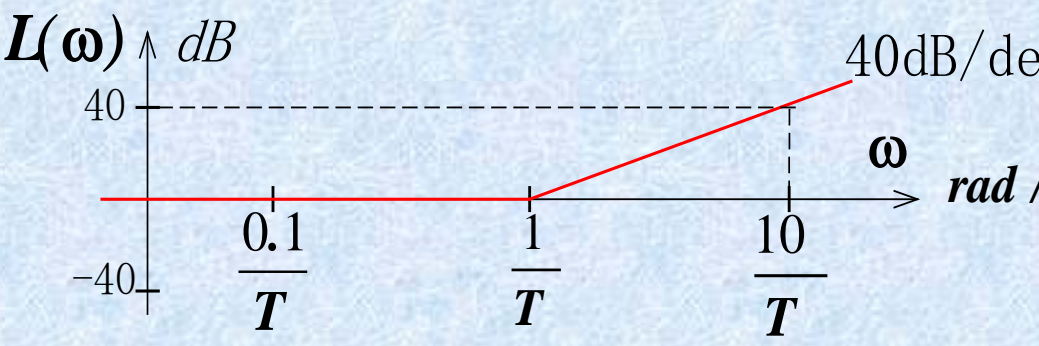
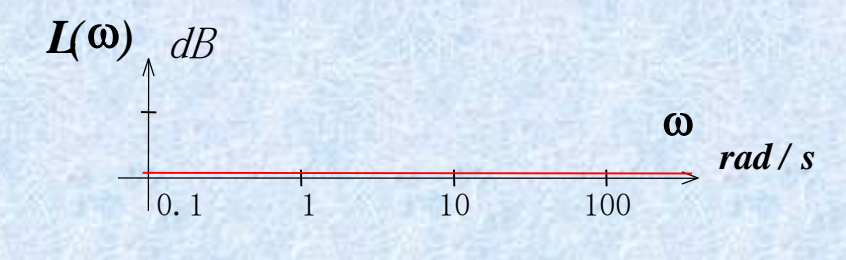
图 不稳定惯性环节的频率特性

# 典型环节的对数幅频特性图

比例环节	
积分环节	
惯性环节	
震荡环节	



# 典型环节的对数幅频特性图

一阶微分环节	 <p> <math>L(\omega)</math> dB  <math>\omega</math> rad/s  <math>20\text{dB/dec}</math>  <math>0.1/T</math> <math>1/T</math> <math>10/T</math>  <math>-20</math> <math>20</math> </p>
二阶微分环节	 <p> <math>L(\omega)</math> dB  <math>\omega</math> rad/s  <math>40\text{dB/dec}</math>  <math>0.1/T</math> <math>1/T</math> <math>10/T</math>  <math>-40</math> <math>40</math> </p>
延时环节	 <p> <math>L(\omega)</math> dB  <math>\omega</math> rad/s  <math>0.1</math> <math>1</math> <math>10</math> <math>100</math> </p>

# 绘制频率特性图

## • 绘制幅相曲线

- ◆ 由典型环节的幅相曲线得到一般系统的幅相曲线
- ◆ 一般用于分析稳定性
- ◆ 由 $\omega$ 从  $0 \rightarrow \infty$  ，首先计算起点和终点的情况，其次分析 $\omega$ 变化的趋势，绘出相应的幅相曲线。



**例.** 绘制如下开环传递函数的幅相曲线

$$G_{\text{开}}(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (T_1, T_2, K \text{ 均大于 } 0)$$

解：开环频率特性为  $G_{\text{开}}(j\omega) = K \frac{1}{j\omega T_1 + 1} \times \frac{1}{j\omega T_2 + 1}$

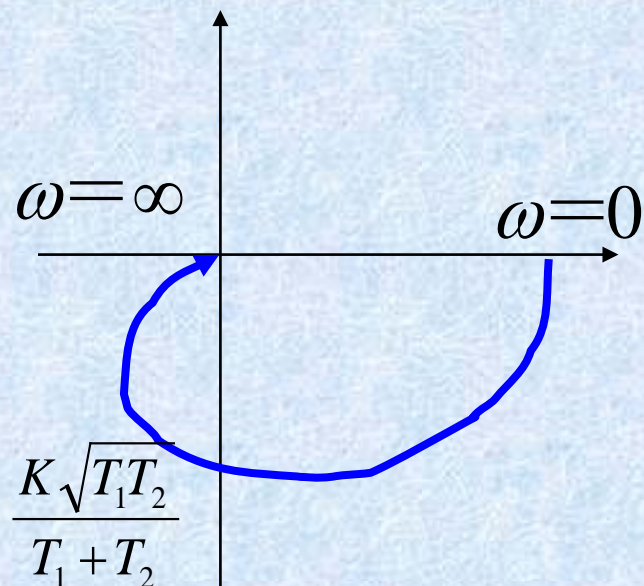
幅频特性和相频特性分别为

$$|G_{\text{开}}(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1} \sqrt{\omega^2 T_2^2 + 1}}$$

$$\angle G_{\text{开}}(j\omega) = -\arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$$

当  $\omega=0$  时， $|G_{\text{开}}(j0)| = K$ ， $\angle G_{\text{开}}(j0) = 0^\circ$

当  $\omega=\infty$  时， $|G_{\text{开}}(j\infty)| = 0$ ， $\angle G_{\text{开}}(j\infty) = -180^\circ$



曲线与虚轴相交时，相角为90度

$$-\arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 = -90^0$$

$$\arctg \frac{\omega T_1 + \omega T_2}{1 - \omega^2 T_1 T_2} = 90^0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad \Rightarrow \quad |G_{\text{开}}(j\omega)| = \frac{K\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}$$

➤ 几个频率特性相乘，对数幅、相曲线相加

$$G_1(j\omega)G_2(j\omega) = |G_1(j\omega)|e^{j\phi_1(\omega)} \cdot |G_2(j\omega)|e^{j\phi_2(\omega)} = |G_1||G_2|e^{j[\phi_1+\phi_2]}$$

$$20\lg|G_1G_2| = 20\lg|G_1| + 20\lg|G_2| \quad \angle G_1G_2 = \phi_1 + \phi_2$$

若系统增加一个积分环节（1型系统）

则 
$$G_{\text{开}}(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$|G_{\text{开}}(j\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2T_1^2 + 1}\sqrt{\omega^2T_2^2 + 1}}$$

$$\angle G_{\text{开}}(j\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$$

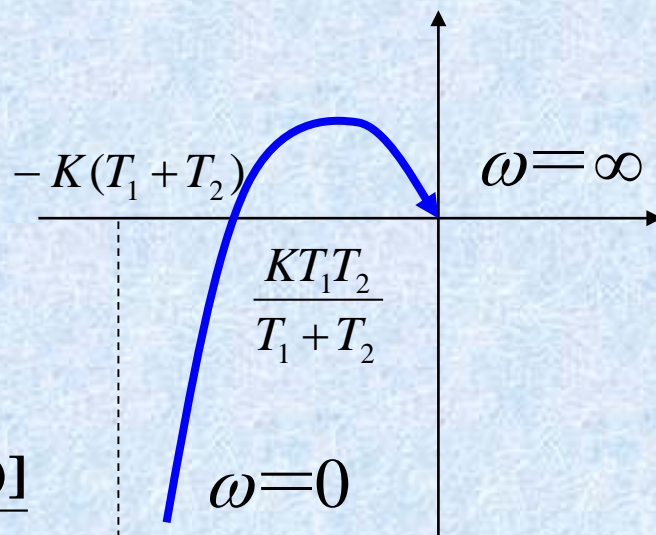
$$\text{当 } \omega=0 \text{ 时, } |G_{\text{开}}(j0)| = \infty, \quad \angle G_{\text{开}}(j0) = -90^\circ$$

$$\text{当 } \omega=\infty \text{ 时, } |G_{\text{开}}(j\infty)| = 0, \quad \angle G_{\text{开}}(j\infty) = -270^\circ$$

幅相曲线如图所示

为求曲线范围和其与实轴的交点将频率特性写成实部和虚部的形式:

$$G_{\text{开}}(j\omega) = \frac{K[-(T_1 + T_2)\omega + j(-1 + T_1T_2\omega^2)]}{\omega(1 + \omega^2T_1^2)(1 + \omega^2T_2^2)}$$



因此在起点,  $\omega=0$ , 可得到

$$\text{Re}[G_{\text{开}}(j\omega)] = -K(T_1 + T_2) \quad \text{Im}[G_{\text{开}}(j\omega)] = -\infty$$

求曲线和实轴的交点 (对系统的稳定性很重要)

$$\begin{aligned} \text{令 } \text{Im}[G_{\text{开}}(j\omega)] = 0 &\Rightarrow \omega_x = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}} \\ &\Rightarrow \text{Re}[G_{\text{开}}(j\omega)] = \frac{KT_1T_2}{T_1 + T_2} \end{aligned}$$

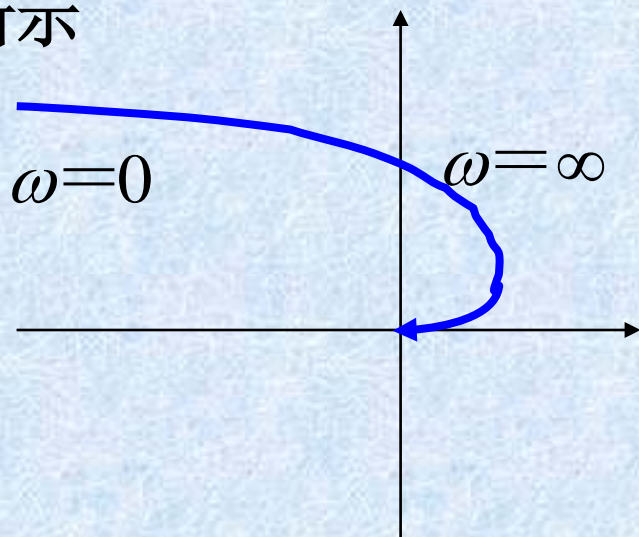
若系统再增加一个积分环节（2型系统）

$$\text{那么 } G_{\text{开}}(j\omega) = K \frac{1}{(j\omega)^2} \times \frac{1}{j\omega T_1 + 1} \times \frac{1}{j\omega T_2 + 1}$$

当  $\omega=0$  时,  $|G_{\text{开}}(j0)| = \infty$ ,  $\angle G_{\text{开}}(j0) = -180^\circ$

当  $\omega=\infty$  时,  $|G_{\text{开}}(j\infty)| = 0$ ,  $\angle G_{\text{开}}(j\infty) = -360^\circ$

幅相曲线如图所示





综上所述，对于开环传递函数只含有左半平面的零极点的系统，其幅相曲线的起点和终点满足以下规律：

### 1) 起点

- 若系统不含有积分环节，起点为 $(K, j0)$ 。
- 若系统含有积分环节，曲线起点为无穷远处，相角为 $\nu \times (-90^\circ)$ ，其中 $\nu$ 积分环节个数。

### 2) 终点

- 开环传函分母的阶数 $n$ 大于分子的阶数 $m$ 时，即 $n > m$ 时，终点在原点，进入角度为 $(n-m) \times (-90^\circ)$
- $n=m$  时，终点在正实轴上某点，坐标和各参数有关。

- 绘制对数频率特性图

- 叠加法：将各典型环节的图叠加。

$$\text{设 } G(s) = G_1(s) \times G_2(s) \times \cdots \times G_n(s)$$

由前述，可得

$$G(j\omega) = |G_1(j\omega)|e^{j\phi_1(\omega)} \times \cdots \times |G_n(j\omega)|e^{j\phi_n(\omega)} = |G_1| \cdots |G_n|e^{j[\phi_1 + \cdots + \phi_n]}$$

$$20\lg|G| = 20\lg|G_1 \cdots G_n| = 20\lg|G_1| + \cdots + 20\lg|G_n|$$

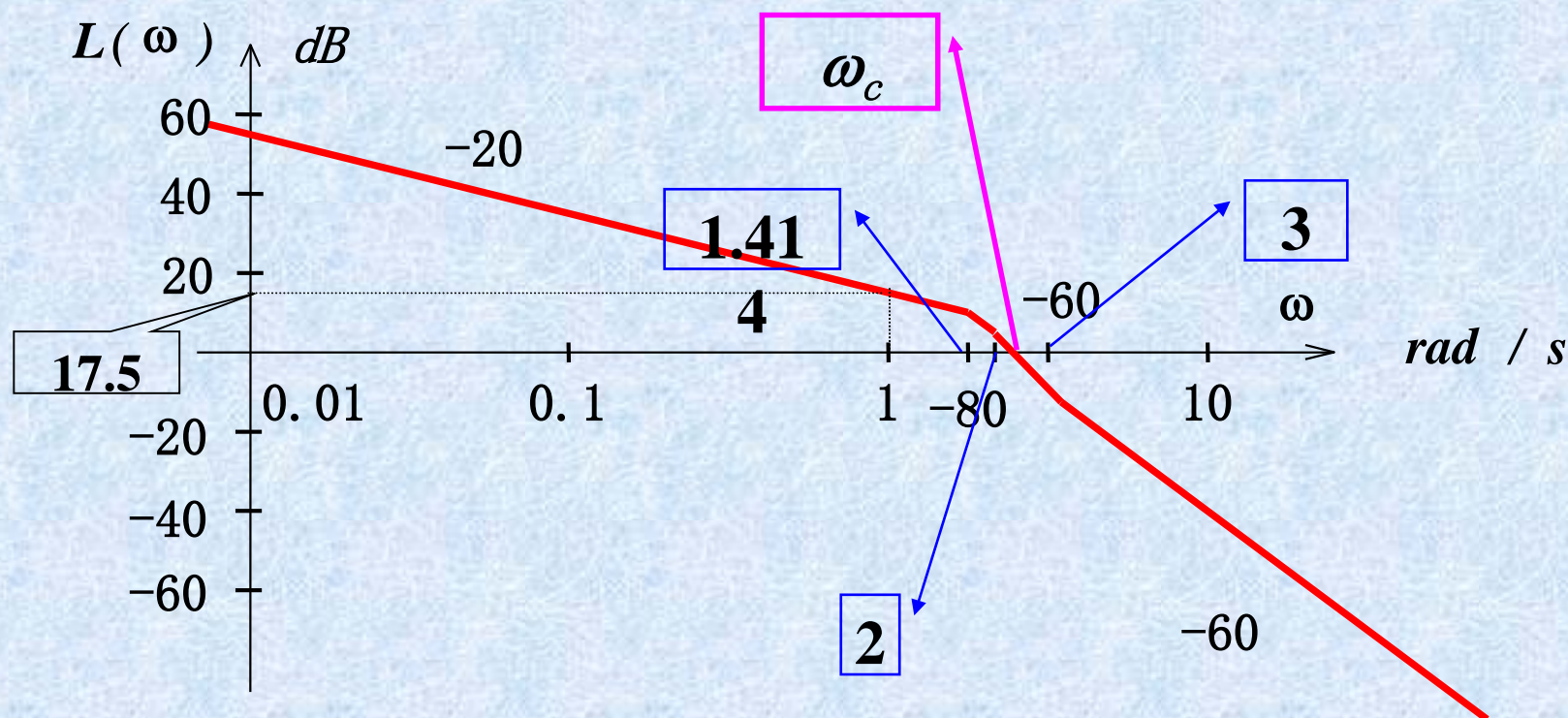
$$\angle G = \phi_1 + \cdots + \phi_n$$

因此一般系统的对数频率特性图可由典型环节叠加。



## ■ 什么是剪切频率？

开环幅频特性曲线（折线）过0分贝的频率。也叫剪切频率或穿越频率。记为 $\omega_c$ 。



## ■ 剪切频率求法

- 1) 作图法——作精确的幅频特性图来求得
- 2) 算法通过比例关系求得

$$20\lg k = 20\lg 7.5 = 17.5$$

$$a) \quad \omega \text{ 从 } 1 \rightarrow 1.414 \quad \text{下降了 } 20\lg \frac{1.414}{1} = 3.0\text{dB}$$

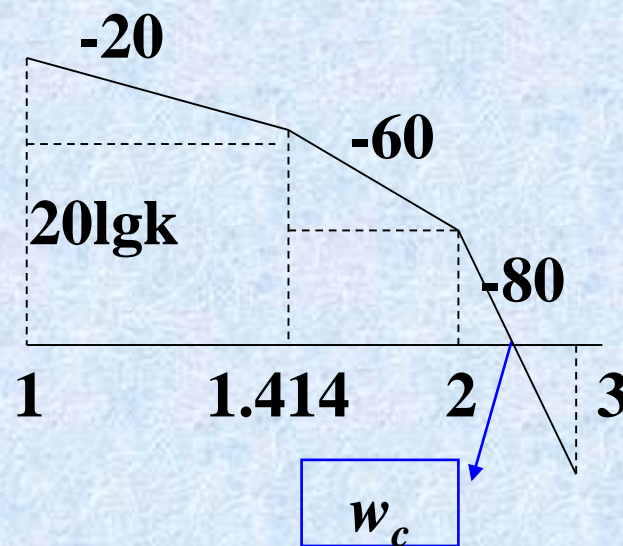
$$b) \quad \omega \text{ 从 } 1.414 \rightarrow 2 \quad \text{下降了 } 60\lg \frac{2}{1.414} = 9.0\text{dB}$$

$$c) \quad \omega \text{ 从 } 2 \rightarrow 3 \quad \text{下降了 } 80\lg \frac{3}{2} = 14.1\text{dB}$$

可以断定 $\omega_c$ 在2和3之间

$$\text{因此 } 20\lg k = 20\lg \frac{1.414}{1} + 60\lg \frac{2}{1.414} + 80\lg \frac{\omega_c}{2}$$

$$\Rightarrow \omega_c = 2.34$$



## 例 绘制幅相曲线和对数频率特性图

$$G(s) = \frac{100(0.5s + 1)}{s(10s + 1)(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{100(j0.5\omega + 1)}{j\omega(j10\omega + 1)(j0.1\omega + 1)(j0.01\omega + 1)}$$

1) 讨论幅相曲线大致形状：

当  $\omega$  从  $0 \rightarrow \infty$ , 则  $|G(j\omega)|$  从  $\infty \rightarrow 0$

$\angle G(j\omega)$  从  $-\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{3}{2}\pi$

-1点位置如图所示，

当  $\angle G(j\omega) = -180^\circ$  时,  $|G(j\omega)|$  小于1

## 2) 对数频率特性图

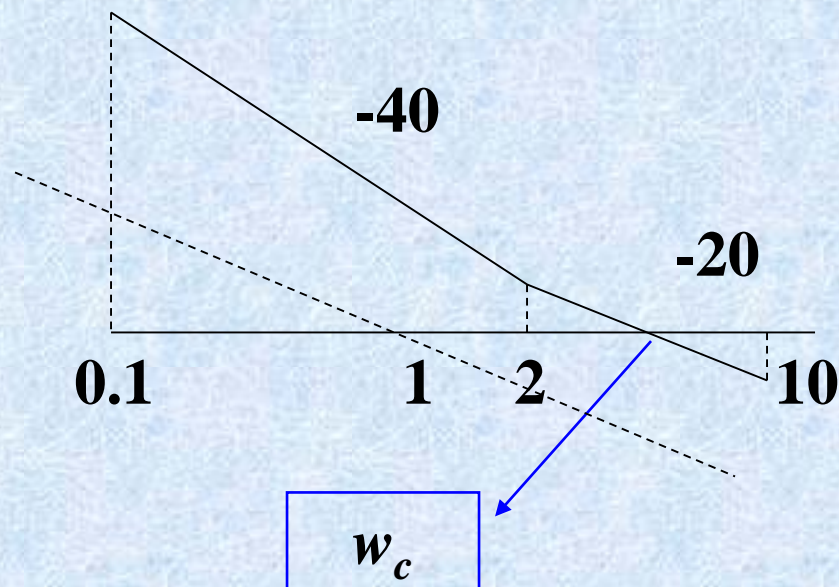
相频特性:

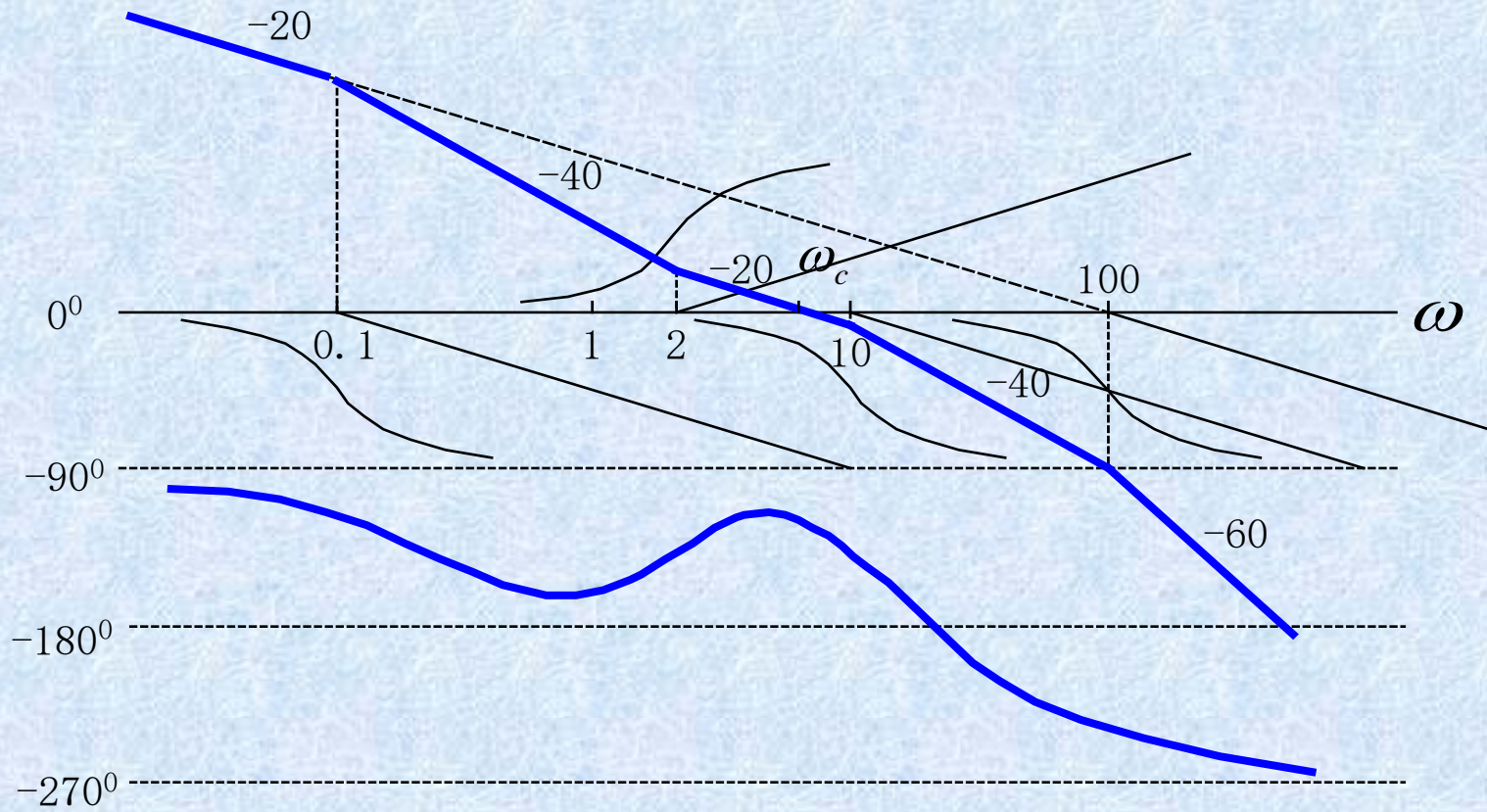
$$\theta(\omega) = -90^\circ - \arg \operatorname{tg} 10\omega - \arg \operatorname{tg} 0.1\omega \\ - \arg \operatorname{tg} 0.01\omega + \arg \operatorname{tg} 0.5\omega$$

见下页图

计算剪切频率

$$\begin{aligned} & 20\lg 100 + 20\lg \frac{1}{0.1} \\ &= 40\lg \frac{2}{0.1} + 20\lg \frac{\omega_c}{2} \\ &\Rightarrow \omega_c = 5 \end{aligned}$$







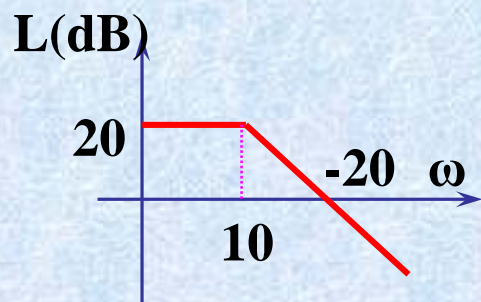
## ➤ 最小相角系统和非最小相角系统的区别

最小相角(相位)系统的零点、极点均在s平面的左半平面，在s平面的右半平面有零点或极点的系统是非最小相角系统。

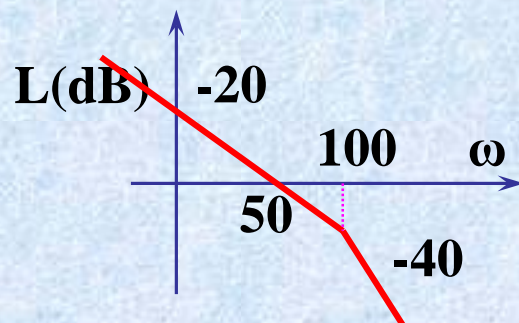
例如有两个传递函数： $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ ， $G(s) = \frac{1}{Ts-1}$

幅频特性相同，但对数相频曲线却不相同。

最小相角系统的幅频特性和相频特性一一对应，只要根据其对数幅频曲线就能写出系统的传递函数。如：



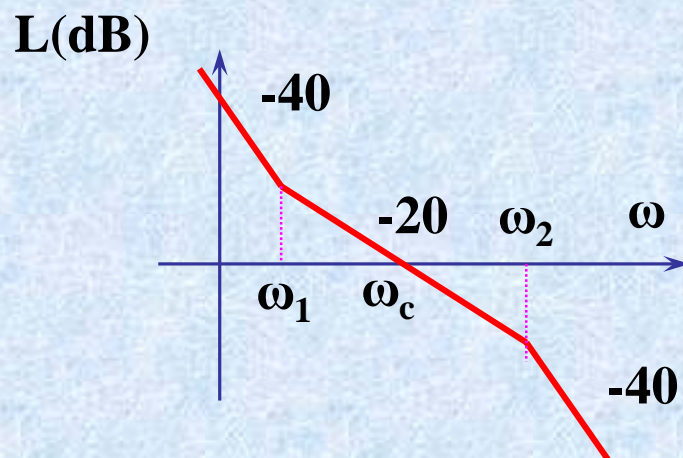
$$G(s) = \frac{10}{(1 + 0.1s)}$$



$$G(s) = \frac{K}{s(1 + 0.01s)} \quad K = 50$$

## ➤ 最小相角系统和非最小相角系统的区别

最小相角(相位)系统的零点、极点均在s平面的左半闭平面，在s平面的右半平面有零点或极点的系统是非最小相角系统。



$$G(s) = \frac{K(1 + \frac{s}{\omega_1})}{s^2(1 + \frac{s}{\omega_2})}$$

$$K^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\omega_1 \omega_c}, K = \omega_1 \omega_c$$



# 奈氏稳定判据

1932年，美国Bell实验室的奈奎斯特提出了这样一种方法。这种方法是**以系统的开环幅相频率特性曲线判别系统的稳定性**，称为**奈奎斯特稳定判据**。

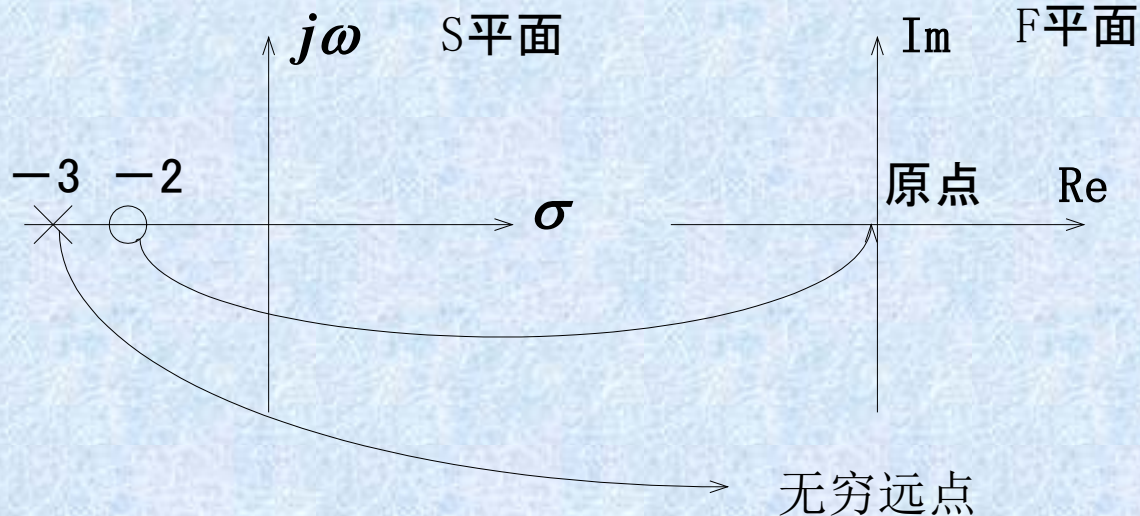
奈奎斯特 (Nyquist, 简称奈氏) 稳定判据

- 根据**开环频率特性**对闭环系统的稳定性进行判断。
- **作图分析**，计算量小，信息量大。
- 不但判稳定，也能给出**不稳定根的个数**和**稳定裕量**。

## 数学基础

### - 复变函数映射概念

例: 
$$F(s) = \frac{s+2}{s+3}$$



若在 $S$ 平面上, 任取一封闭轨迹  $\Gamma_s$ , 且使其不通过 $F(s)$ 的奇点, 则在 $F$ 平面上就有一封闭轨迹  $\Gamma_F$  与之对应。

- 柯西幅角原理

对于复变函数

$$F(s) = \frac{k(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

在s平面上封闭曲线C 域内共有P个极点和Z个零点，且 封闭曲线C不穿过F(s)的任一个极点和零点。

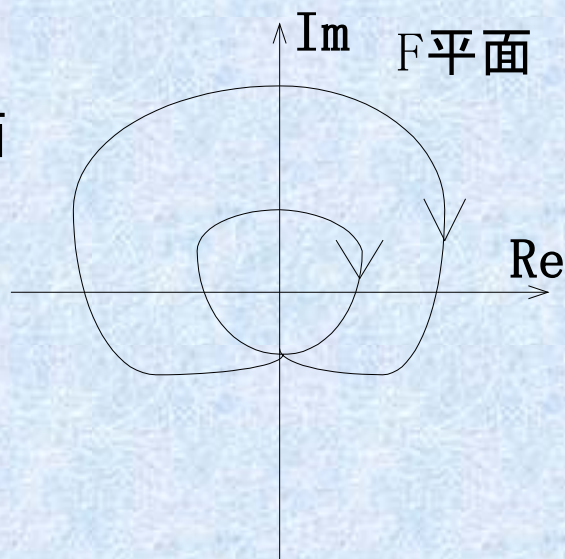
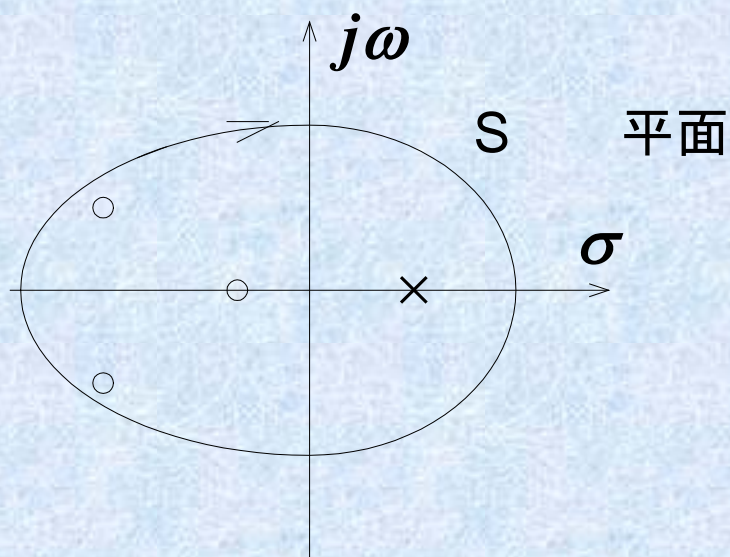
当s顺时针沿 封闭曲线C变化一周时，函数F(s)在F平面上的轨迹将按逆时针包围原点  $N = P - Z$  次。

(零点个数考虑重根数， $N > 0$  逆时针， $N < 0$  顺时针。)

即幅角原理的表达式为:

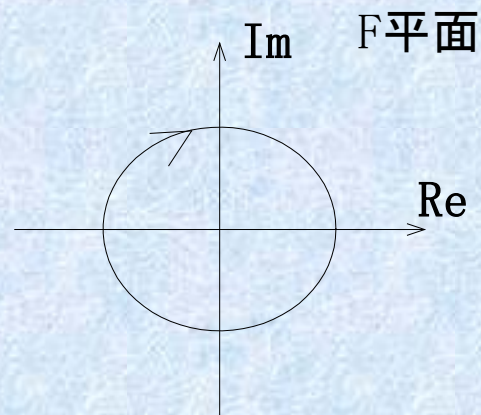
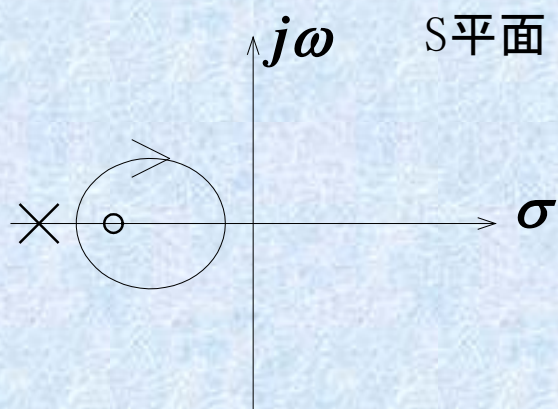
$$N=P-Z$$

其中 $N$ 为  $\Gamma_F$  曲线按**逆时针**绕原点的圈数,  $P$ 为  $\Gamma_s$  内包含的 $F(s)$ 的极点数,  $Z$ 为  $\Gamma_s$  内包含的 $F(s)$ 的零点数。

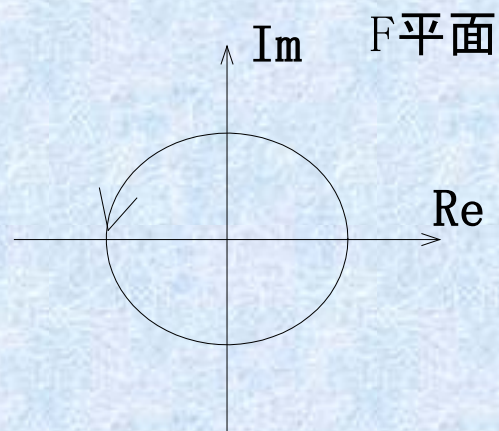
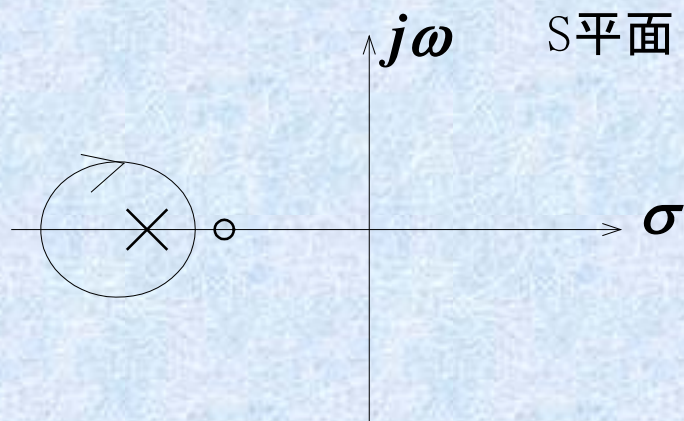


$$N=1-3=-2$$

✧  $N=0-1=-1$



✧  $N=1-0=1$



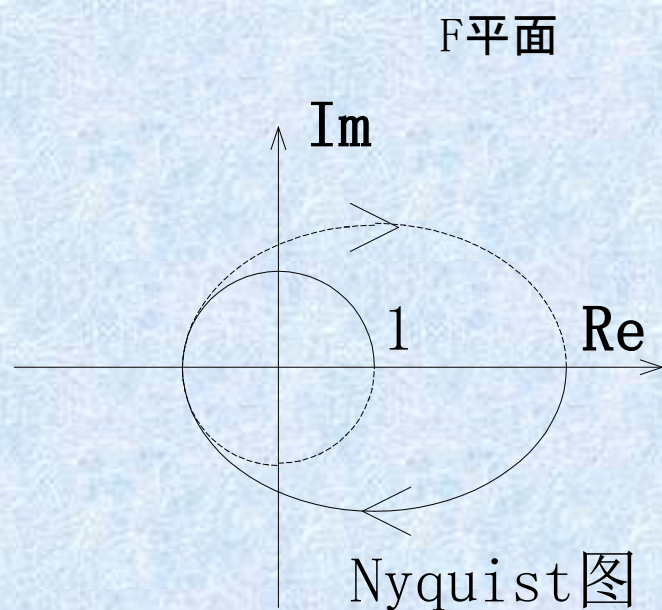
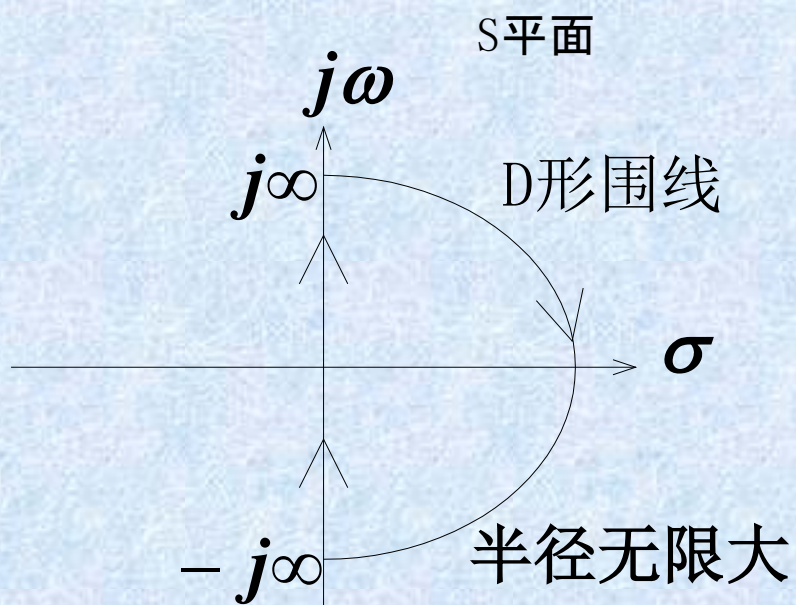


# 奈氏稳定判据

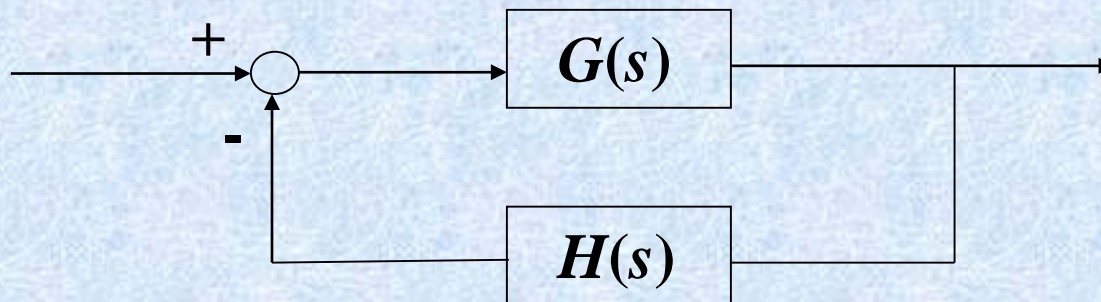
- 利用柯西复角原理判断稳定的思路：
  - 使封闭曲线与频率特性相联系
  - 使 $F(s)$ 与系统闭环传递函数相联系
  - 封闭曲线域为右半平面（或左半平面）

## D形围线和Nyquist图:

沿虚轴顺时针包围右半平面的闭曲线称为D形围线。







开环传递函数  $G_0(s) = G(s)H(s) = \frac{N_0(s)}{D_0(s)}$

闭环传递函数  $G_C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$

闭环传递函数分母(辅助函数)

$$F(s) = 1 + G_0(s) = 1 + \frac{N_0(s)}{D_0(s)} = \frac{D_0(s) + N_0(s)}{D_0(s)} = \frac{D_C(s)}{D_0(s)}$$

$D_C(s)$  闭环特征多项式;  $D_0(s)$  开环特征多项式

闭环传递函数分母(辅助函数)

$$F(s) = 1 + G_0(s) = 1 + \frac{N_0(s)}{D_0(s)} = \frac{D_0(s) + N_0(s)}{D_0(s)} = \frac{D_C(s)}{D_0(s)}$$

$D_C(s)$  闭环特征多项式

$D_0(s)$  开环特征多项式

如果辅助函数  $F(s)$  的零点都具有负的实部，即都位于S平面左半部，系统就是稳定的，否则系统便不稳定。

$F(s)$  三个特点：

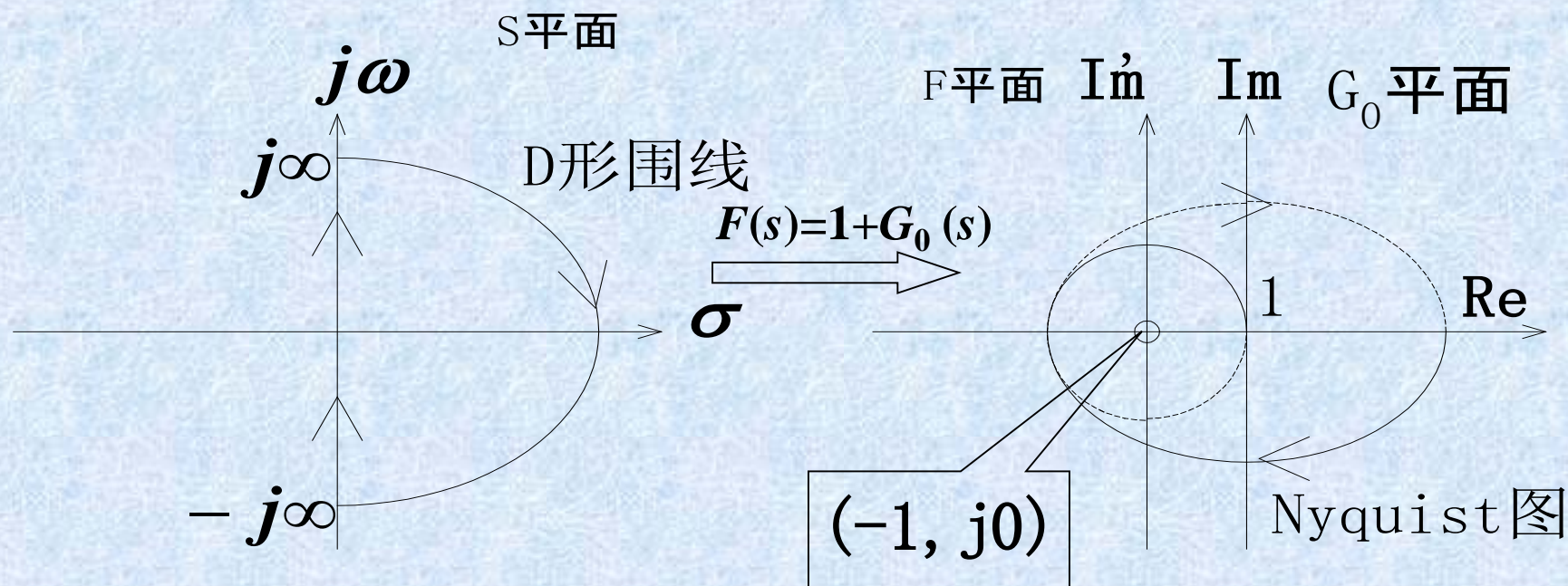
1. 零、极点分别为闭、开环特征根；
2. 零、极点个数相等（分子分母阶数相同）；

对于稳定的最小相角系统， $\omega$ 从 $0 \rightarrow \infty$ 时 $F(s)$ 应不包围原点。

3. 与 $G(s)H(s)$  相差为1。

- 已知  $F(s)=1+G_0(s)$ ， $s$  平面上的D形围线在F平面上映射的有向闭曲线称为在F平面的奈奎斯特图。

$F(s)$  平面上的原点即  $G_0(s)$  平面上的  $(-1, j0)$  点



- 根据柯西复角原理，对于复变函数 $F(s)=1+G_0(s)$ ，当 $s$ 平面上顺时针沿D形围线连续变化一周时，则在 $F$ 平面上和 $G_0(s)$ 平面上的奈奎斯特图逆时针包围原点和 $(-1, j0)$ 点 $N$ 次。

$$N = P - Z$$

$D_0(s)=0$ 的根， $G_0(s)$ 在  
右半平面的极点，  
开环极点

$D_c(s)=0$ 的根，系统特征  
方程在右半平面的特征  
根

注意： 顺时针转  $N<0$ ； 逆时针转  $N>0$ 。

**P**: 在右半平面开环特征根数；

**Z**: 在右半平面闭环特征根数；

**N**: 在 $[G_0]$ 平面， $\omega$ 从 $-\infty \rightarrow \infty$ ，幅相曲线绕 $(-1, j0)$ 点逆时针转过的圈数。



应用奈氏稳定判据判别系统稳定性，需要绘制或者由实验得到奈氏曲线，并确定奈氏曲线绕  $G0$  平面的  $(-1, j0)$  点的圈数  $N$ ，在右半  $S$  平面的开环极点数  $P$  以及在右半  $S$  平面的闭环极点数  $Z=P-N$ 。

- 1) 确定  $P$ ：开环传递函数在右半  $S$  平面的极点数  $P$  是容易看出的。对于最小相位系统， $P = 0$ 。

2) 确定 $N$ 的方法:为了确定 $N$ ,将奈氏曲线从 $G_0$ 平面的下半部穿过负实轴的 $(-1, -\infty)$ 段,到 $G_0$ 平面的上半部1次,定义为1次**负穿越**;

反之,奈氏曲线从 $G_0$ 的上半部穿过负实轴的 $(-1, -\infty)$ 段,到平面 $G_0$ 的下半部1次,定义为1次**正穿越**,

如图4.7所示。

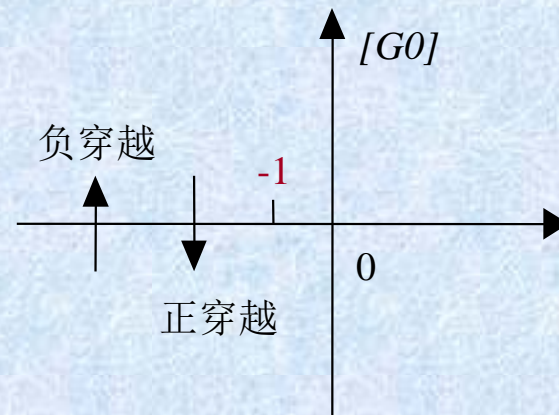


图4.7 正, 负穿越



若奈氏曲线正穿越  $N_+$  次，负穿越  $N_-$  次，则奈氏曲线绕  $G_0$  平面的  $(-1, j0)$  点的圈数为：

$$N = N_+ - N_-$$

3) 奈氏曲线的画法：因为奈氏曲线的精确形状，对于  $N$  值的确定并不重要，所以，只要根据一些特征画出奈氏曲线的大致形状即可。事实上，要在全部范围内精确画出奈氏曲线也是不可能的，因为显然不可能画无穷大的坐标图。

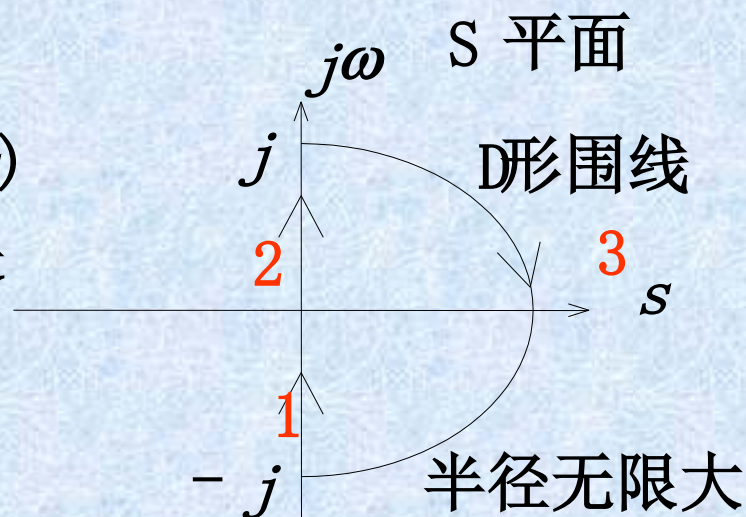
- 开环频率特性 $G_0(j\omega)$ 和奈奎斯特图

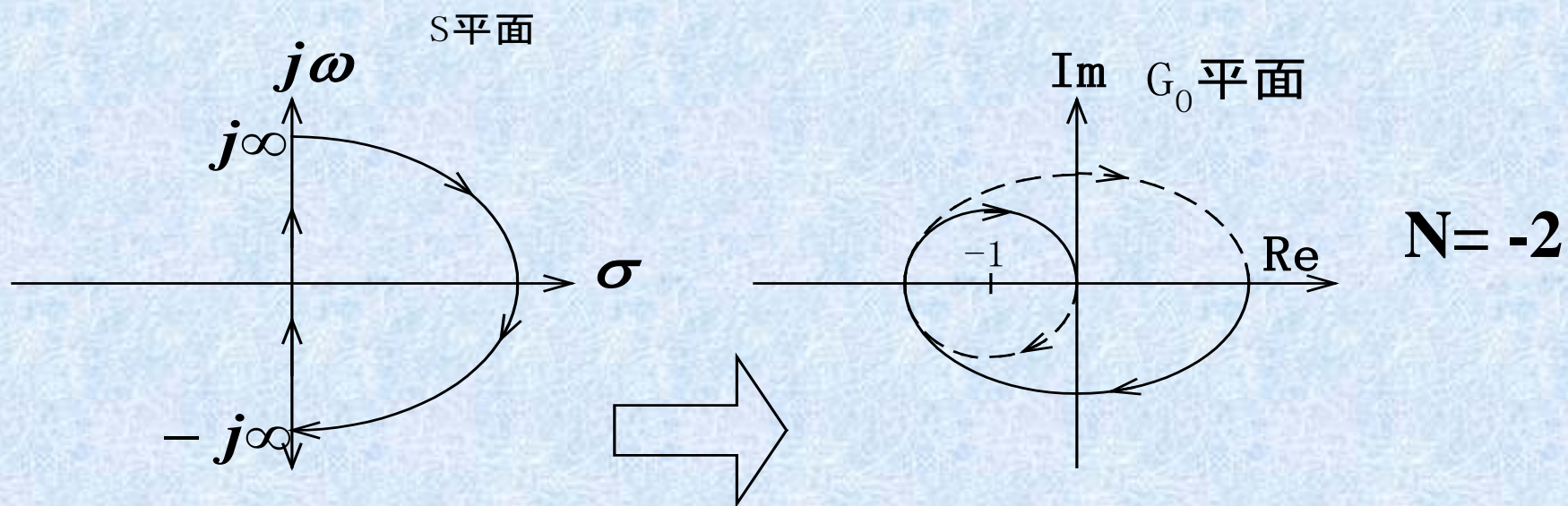
开环传递函数 $G_0(s)$ ，令 $s = j\omega$ ，即开环频率特性 $G_0(j\omega)$

当 $\omega$ 由 $0 \rightarrow \infty$   $|G_0(j\omega)|$  幅频特性

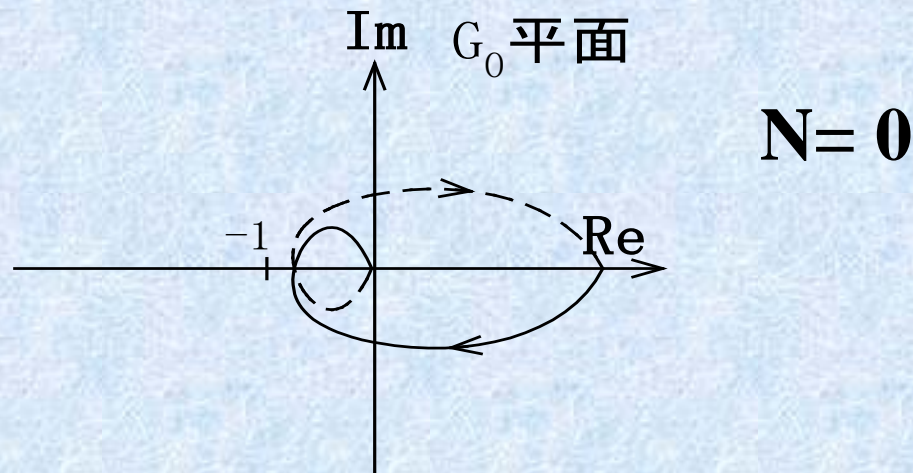
(负频部分无物理意义)  $\angle G_0(j\omega)$  相频特性

D形围线（分为3段）在 $G_0(s)$ 平面上的映射就是系统在 $G_0(s)$ 平面上的奈奎斯特图，也就是 $\omega$ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 时系统的开环幅相频率特性曲线。





- 注意域的映射关系



➤ Nyquist稳定判据(在 $G_0(s)$ 平面上) :

必须使得 $Z=0$  ( $Z$ 为不稳定闭环特征根的个数)。

1. 若系统开环稳定, 则闭环系统稳定的条件是Nyquist图不包围 $(-1, j0)$ 点。

$$(N = P - Z = 0 - 0 = 0)$$

2. 闭环系统稳定的充要条件是  $N = P$

$$(N = P - Z = P \quad \text{所以} \quad Z = 0)$$

3. 如果Nyquist图经过 $(-1, j0)$ , 则系统临界稳定。

4. 如果Nyquist图的 $\omega$ 的变化范围为0到 $+\infty$ ,

$$\text{那么 } Z = P - 2N$$

推论: 若Nyquist图顺时针包围 $(-1, j0)$ 点, 则系统一定不稳定。

$$(N = P - Z, \quad \text{若 } N < 0, P \text{ 不会为负值, 则必有 } Z \geq 1)$$



**例** 已知开环传递函数  
判断系统稳定性

$$G_0(j\omega) = \frac{k}{(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)}$$

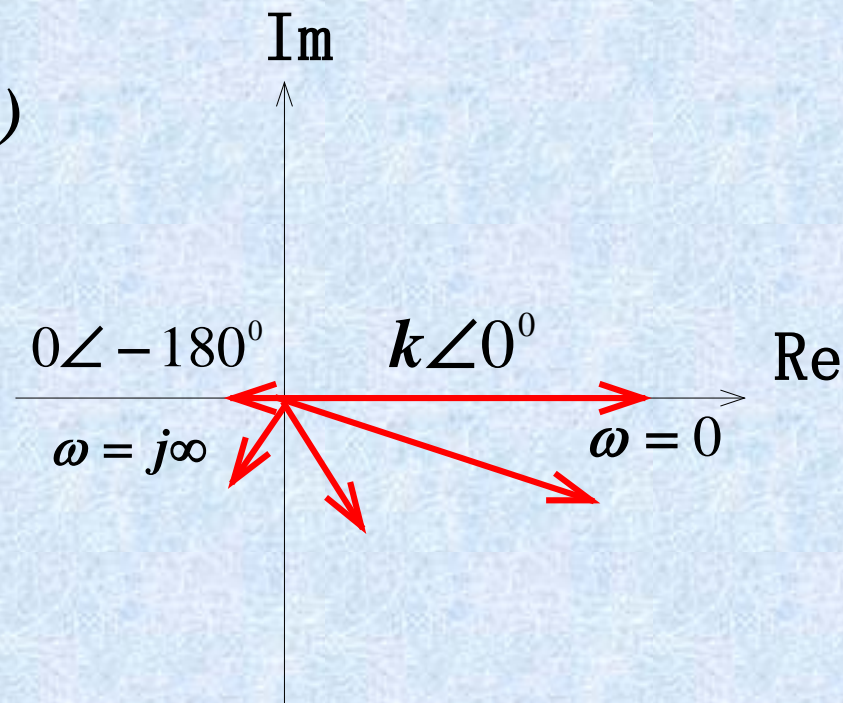
Nyquist图画法(示意图)

$$G_0(j\omega) = |G_0(j\omega)| \angle G_0(j\omega)$$

(1) 特殊点

$$\omega = 0 \quad G_0(j0) = k \angle 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad G_0(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$



(2) 趋势:  $\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$

$|G(j\omega)|$        $k \rightarrow 0$       单调递减

$\angle G(j\omega)$        $0^\circ \rightarrow -180^\circ$  单调递减

Nyquist判据 (已知 $N$ ,  $P$ 求 $Z$ )

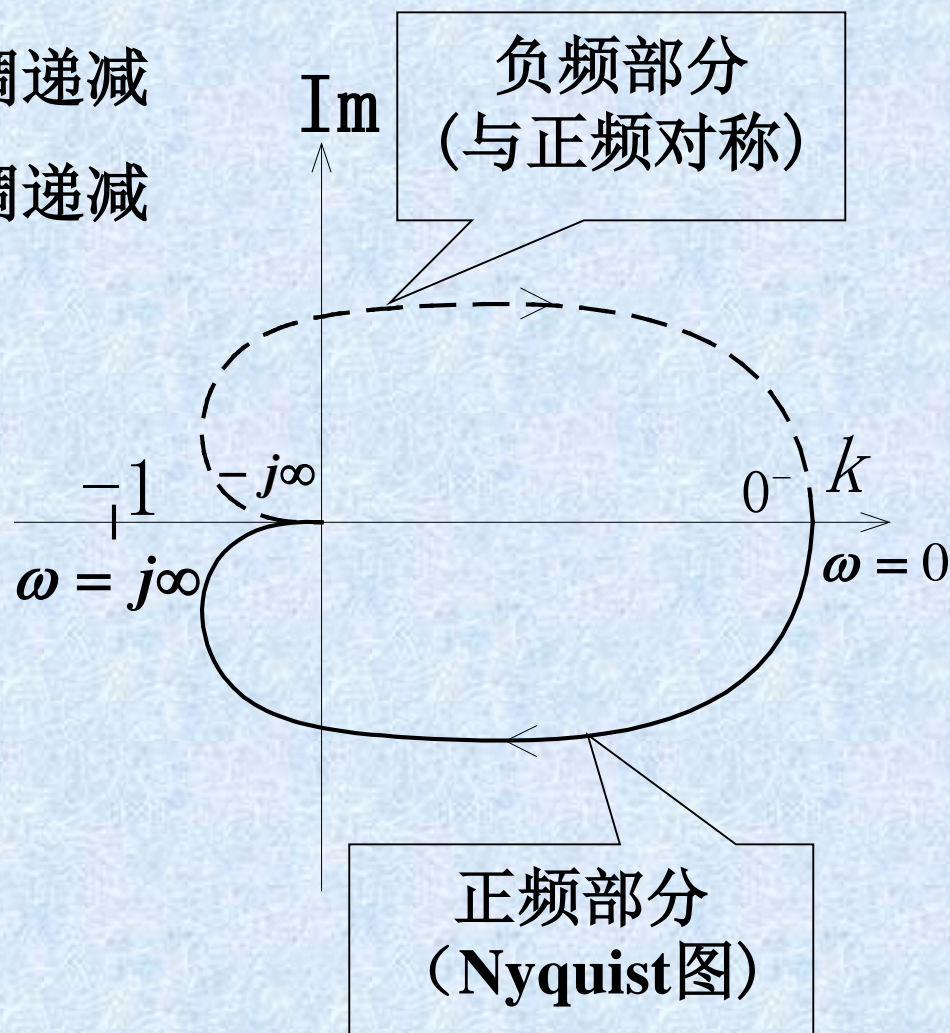
$P = 0$  (由 $G_0(s)$ 表达式)

$N = 0$  (由Nyquist图)

因为  $N = P - Z$ ,

所以  $Z = 0$ ,

故系统稳定。





## 例

### 画Nyquist图:

(2)

与实轴有交点，为-7.9

(分母有理化, 按虚实部讨论)

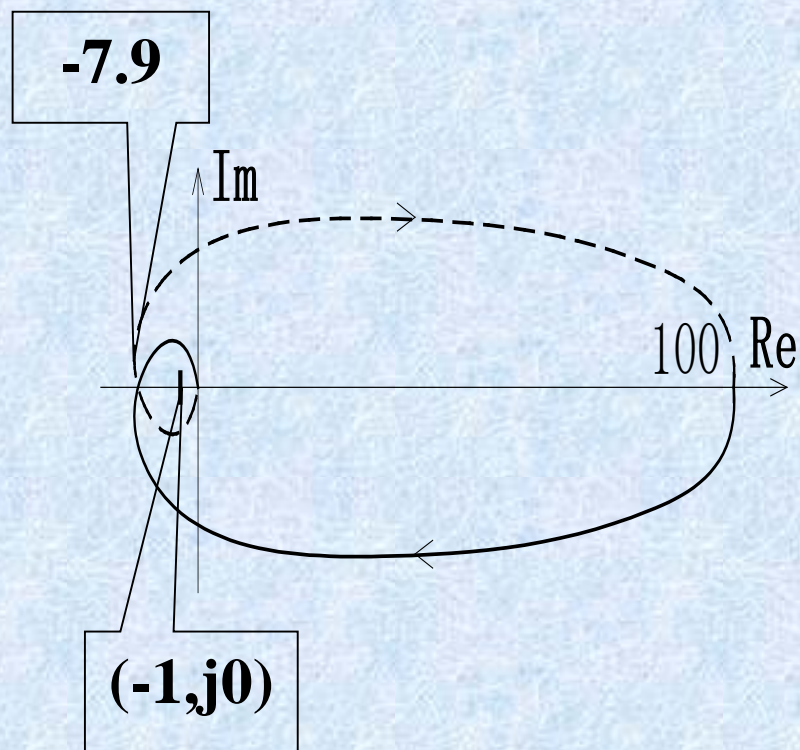
Nyquist判据:

$N = -2$ ,  $P = 0$ ,  $N = P - Z$ , 故  $Z = 2$ 。

因此,  $k=100$  时, 闭环系统有两个极点在右半平面, 系统不稳定。

本系统是否稳定主要取决于奈氏曲线和实轴的交点是否小于 $-1$ 。

经计算可得, 交点与 $k$ 相关,  $k$ 越大, 交点的坐标离虚轴越远。



所以

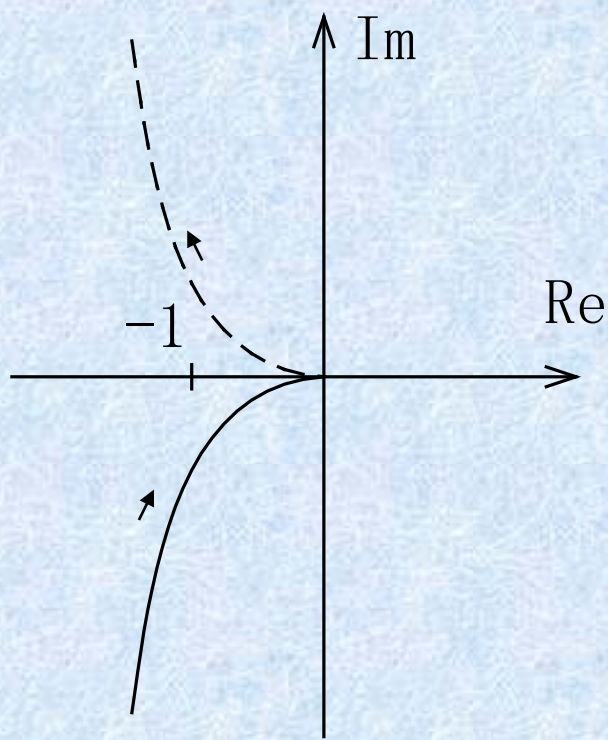
$k \uparrow$	不稳定
$k \downarrow$	可能稳定

## ►积分环节下的奈氏稳定判据

例

$$G_0(s) = \frac{k}{s(s+1)}$$

积分环节个数  $\nu=1$



$$(1) \omega = 0 \quad G_0(s) = \infty \angle -90^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad G_0(s) = 0 \angle -180^\circ$$

$$(2) \omega \text{ 从 } 0 \rightarrow \infty$$

$$|G_0(s)| \text{ 从 } \infty \rightarrow 0$$

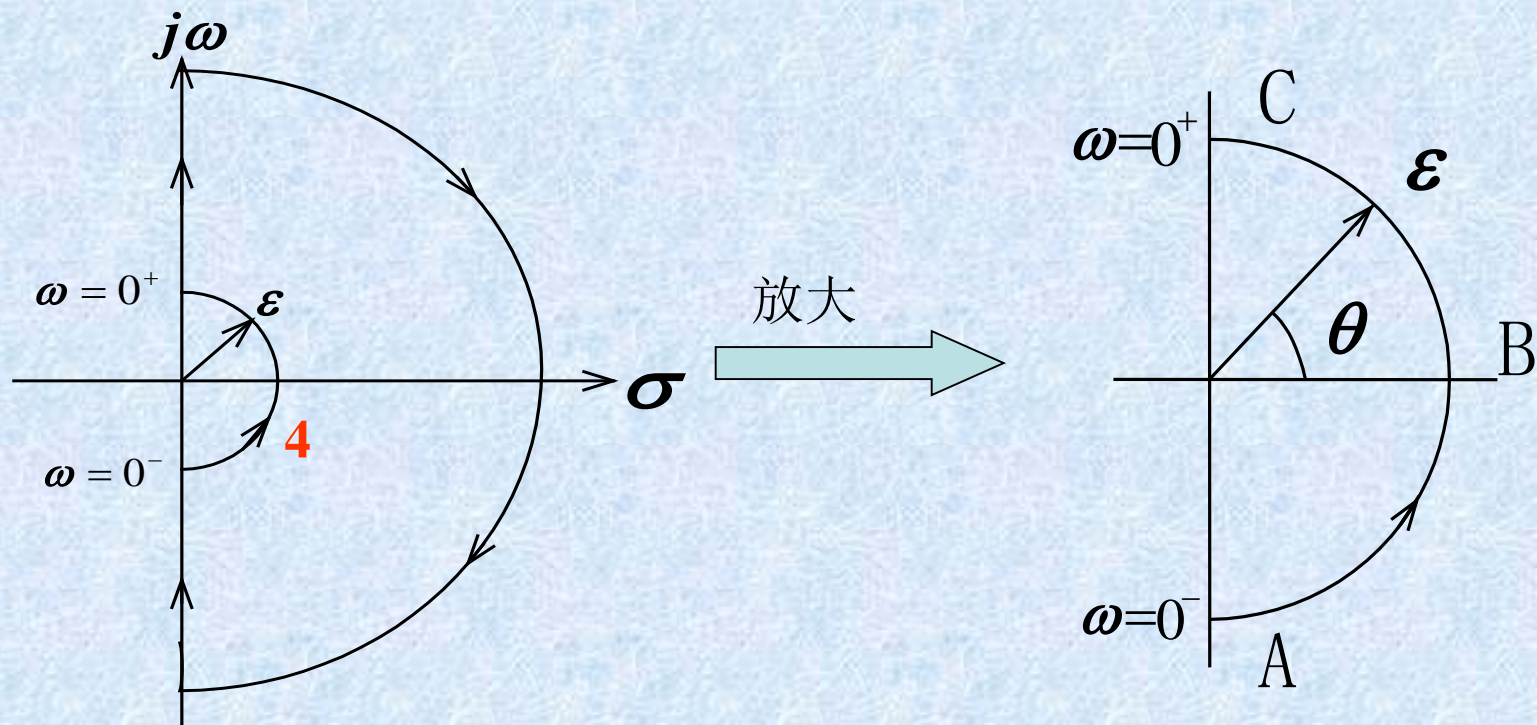
$$\angle G_0(s) \text{ 从 } -90^\circ \rightarrow -180^\circ$$

单调变化

问题：  $N=?$

由于 $\Gamma_s$  不能通过 $F(s)$ 的奇点，所以改造D形围线，增加**第4部分**，即以原点为圆心，无穷小为半径的半圆绕过虚轴上的极点 $(0, 0)$ 。

这样就把 $s=0$ 的极点归到左半平面



在原点附近令  $s = \varepsilon e^{j\theta}$

当  $\theta$  从  $-\frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  时

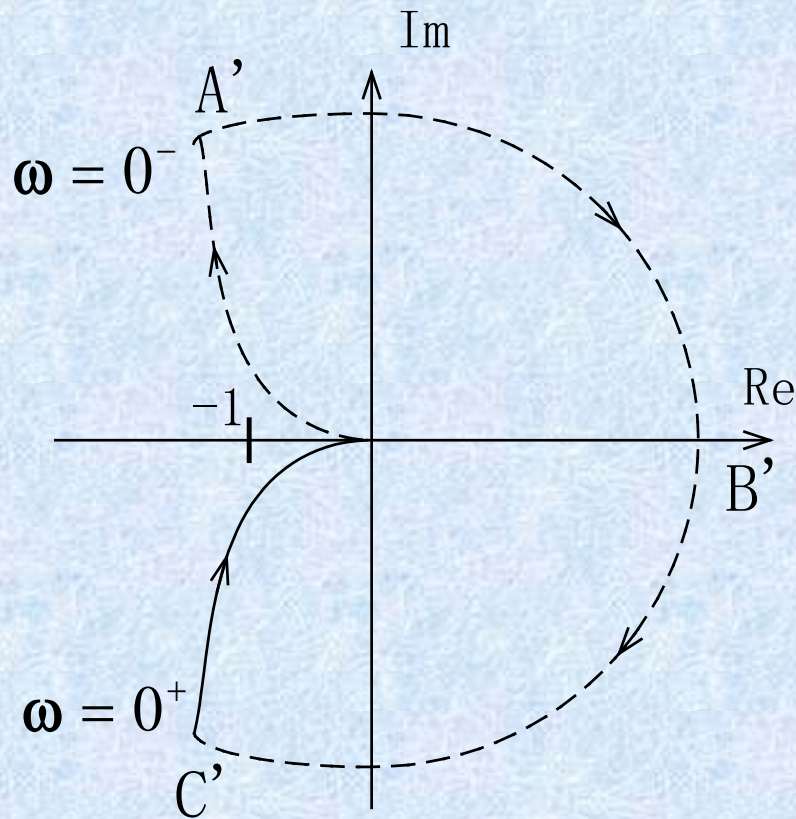
$$G_0(\varepsilon e^{j\theta}) \approx \frac{k}{\varepsilon e^{j\theta}} \approx \frac{k}{\varepsilon} e^{-j\theta} \begin{cases} |G_0(\varepsilon e^{j\theta})| \rightarrow \infty \\ \angle G_0(\varepsilon e^{j\theta}) \quad \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

<b>A</b>	$s = 0^-$	$\theta = -\frac{\pi}{2}$	$\frac{k}{\varepsilon} e^{-j(-\frac{\pi}{2})} = \infty \angle \frac{\pi}{2}$	<b>A'</b>
----------	-----------	---------------------------	--	-----------

<b>B</b>	$s = \varepsilon$	$\theta = 0$	$\frac{k}{\varepsilon} e^{-j0} = \infty \angle 0$	<b>B'</b>
----------	-------------------	--------------	---	-----------

<b>C</b>	$s = 0^+$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\frac{k}{\varepsilon} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \infty \angle -\frac{\pi}{2}$	<b>C'</b>
----------	-----------	--------------------------	--	-----------





则上述的无穷小圆弧4映射为从 $0^-$ 到 $0^+$ 顺时针旋转的无穷大圆弧，绕行的角度为 $\pi$ 。

$$N = 0, P = 0$$

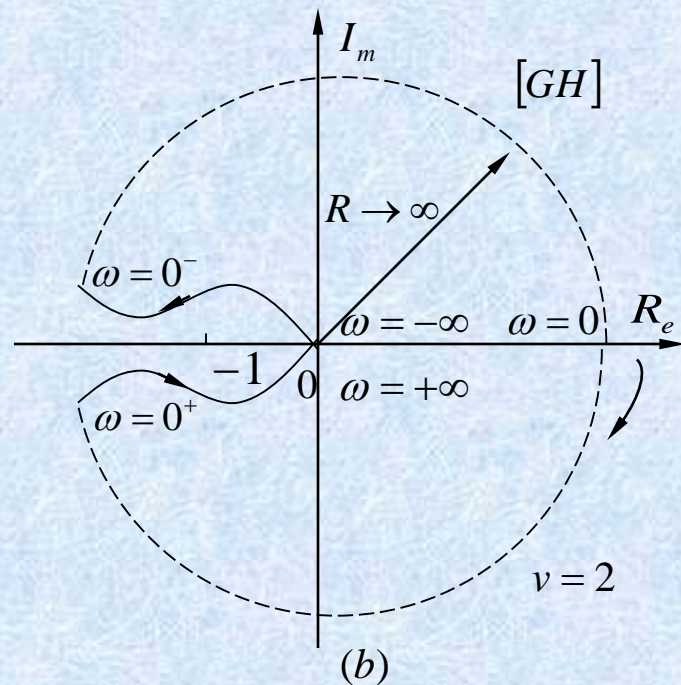
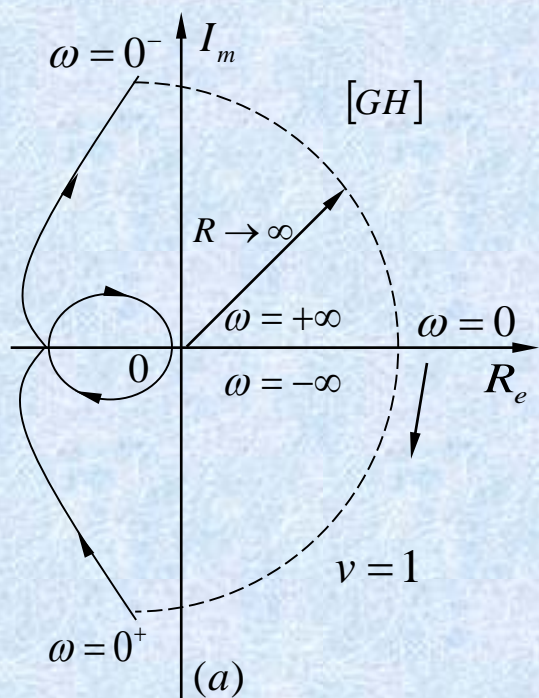
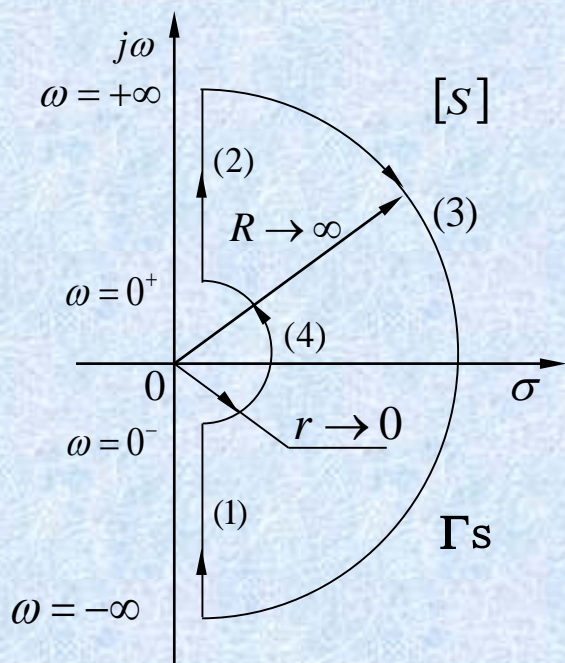
$$\text{所以 } Z = 0$$

系统稳定

依次类推，当 $\nu > 1$ 时，4部分将映射为绕行角度为 $\nu\pi$ 的无穷大圆弧



$\Gamma_s$  的第 (4) 部分无穷小半圆弧在 GH 平面上的映射为**顺时针旋转的无穷大圆弧**，旋转的弧度为  $v\pi$  弧度。图4-9 (a)、(b) 分别表示当  $v=1$ 和 $v=2$ 时系统的奈氏曲线，其中虚线部分是 $\Gamma_s$  的无穷小半圆弧在GH平面上的映射。



虚轴上有开环极点时的奈氏轨迹

$v \neq 0$  时的奈氏曲线

小结：积分环节数  $\nu = 1$  在无穷远处顺时针绕行  $\pi$   
 $\nu = 2$  在无穷远处顺时针绕行  $2\pi$   
 $\nu = n$  在无穷远处顺时针绕行  $n\pi$

Nyquist判据： 已知 开环极点数  $P$  意味必须已知系  
 积分环节数  $r$  统开环传递函数

Nyquist图绕(-1,j0)点  $N$   
 求 闭环极点数  $Z$

应用奈氏判据分析系统稳定性时，可能会遇到下列三种情况：

- (i) 当系统开环传递函数  $G(s)H(s)$  的全部极点都位于S平面左半部时 ( $P=0$ )，如果系统的奈氏曲线  $\Gamma_{GH}$  不包围GH平面的  $(-1, j0)$  点 ( $N=0$ )，则闭环系统是稳定的 ( $Z=P-N=0$ )，否则是不稳定的；
- (ii) 当系统开环传递函数  $G(s)H(s)$  有  $p$  个位于S平面右半部的极点时，如果系统的奈氏曲线  $\Gamma_{GH}$  逆时针包围  $(-1, j0)$  点的周数等于位于S平面右半部的开环极点数 ( $N=P$ )，则闭环系统是稳定的 ( $Z=P-N=0$ )，否则是不稳定的；
- (iii) 如果系统的奈氏曲线  $\Gamma_{GH}$  顺时针包围  $(-1, j0)$  点 ( $N<0$ )，则闭环系统不稳定 ( $Z=P-N>0$ )。
- (iv) 当  $\Gamma_{GH}$  曲线恰好通过GH平面的  $(-1, j0)$  点 (注意不是包围)，此时如果系统无位于S平面右半部的开环极点，则系统处于临界稳定状态。

综上，奈氏曲线  $\Gamma_{GH}$  是否包围GH平面的  $(-1, j0)$  点是判别系统是否稳定的重要依据。

# 相对稳定性

- 相对稳定性——稳定裕度
- 求稳定裕度: 解析法, 奈氏曲线
- 增加稳定裕度的方法

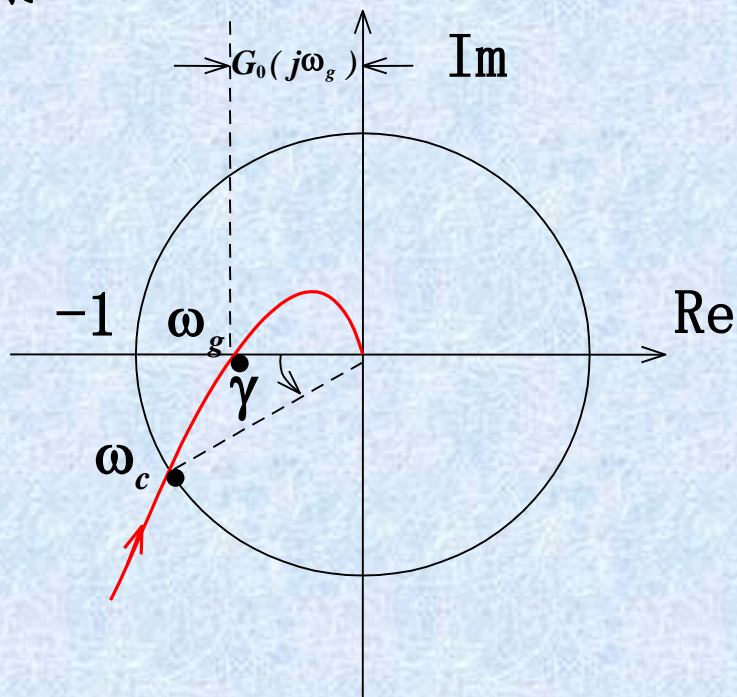
## 相对稳定性——稳定裕度

**Routh**判据和**Nyquist**判据给出系统绝对稳定的信息，但稳定程度如何，离不稳定边缘还有多远？这是工程上最关心的。由此引出稳定裕度

相对稳定性——稳定裕度 { 幅值裕度  
相角裕度

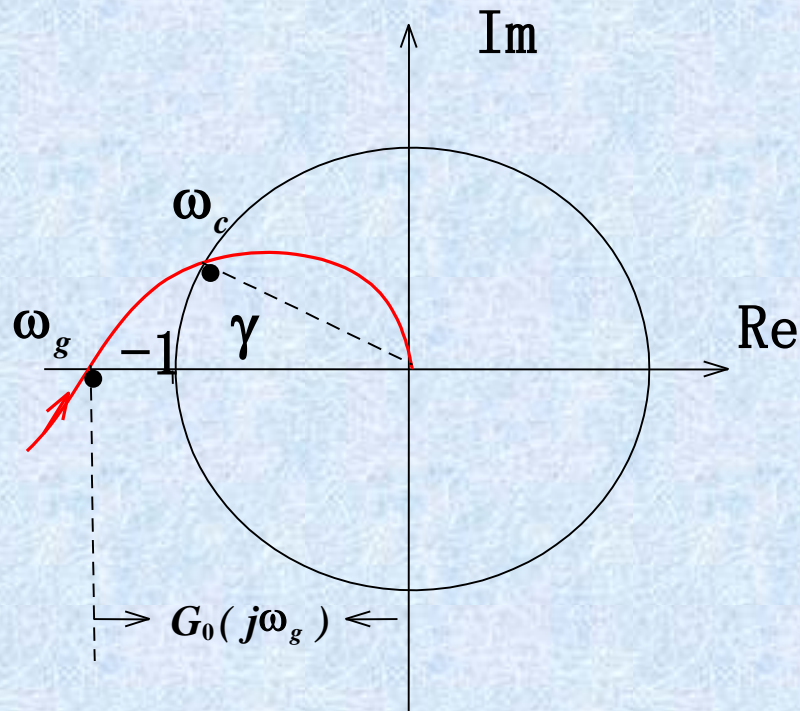


◆ 对于奈氏曲线，在GH平面上，可以用奈氏曲线与 $(-1, j0)$ 的靠近程度来表征系统的相对稳定性。离 $(-1, j0)$ 越近，稳定程度越低。



幅值穿越频率

$$\omega_c : |G_0(j\omega_c)| = 1$$



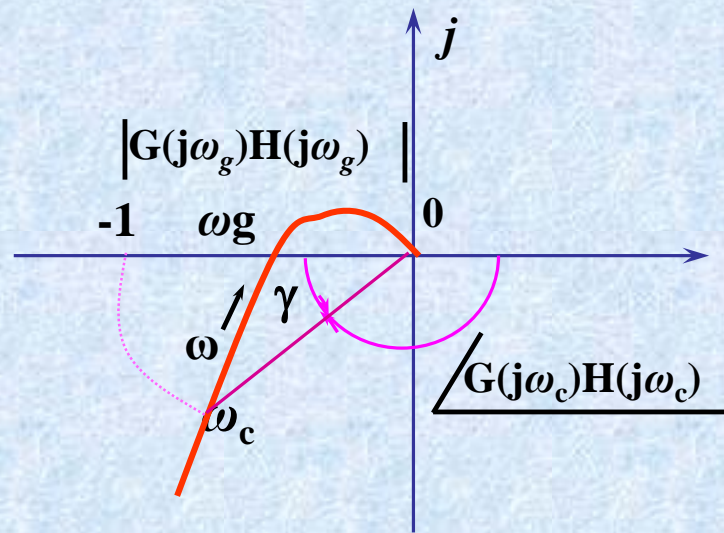
相位穿越频率

$$\omega_g : \Phi(j\omega_g) = -180^\circ$$

$$1. K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$$

$$\text{or } K'_g = -20 \lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$$

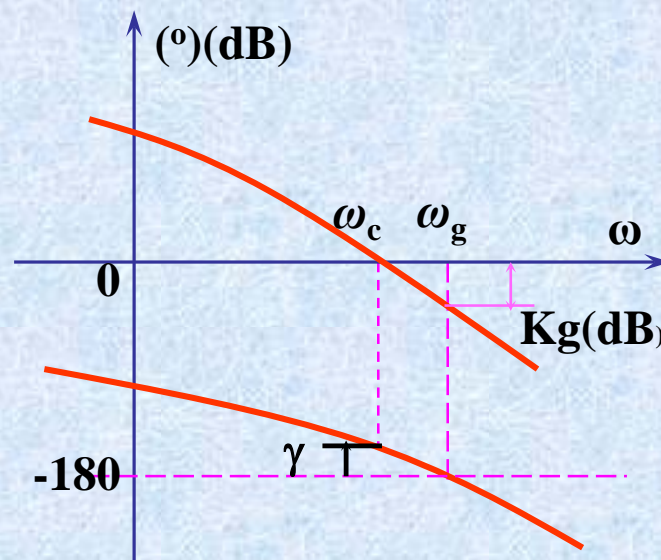
- 其中， $\omega_g$ 为相位穿越频率。其定义的含义：如果系统的开环传递系数增大到原来的 $K_g$ 倍，则系统处于临界稳定状态。



$$2. \gamma = \angle G_0(j\omega_c)H(j\omega_c) - (-180^\circ)$$

- 其中， $\omega_c$ 为幅值穿越频率。其定义的含义：如果系统对频率为截止频率的信号的相角滞后再增大 $\gamma$ 度，则系统处于临界稳定状态。

- 系统稳定，则  $K_g > 1$ 、 $\gamma > 0$ 。





为负值

对于最小相位系统（开环传函不含右半s平面零极点的系统）：

相角裕量  $\gamma = 180^\circ + \Phi(\omega_c) = 180^\circ + \angle G_o(j\omega_c)$

$\gamma > 0$                       系统稳定

$\gamma < 0$                       系统不稳定

$\gamma = 0$                       系统临界稳定

幅值裕量  $K_g = \frac{1}{|G_o(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$

$K_g > 1$                       系统稳定

$K_g < 1$                       系统不稳定

$K_g = 1$                       系统临界稳定

要综合两者考虑稳定性和相对稳定性，不能只考虑一个指标。

## ➤求稳定裕度

### 1) 解析法

由前述相角裕度和幅值裕度的定义式来求。

例 
$$G(s)H(s) = \frac{40}{s(s^2 + 2s + 25)}$$

解：系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{40}{j\omega(25 - \omega^2 + j2\omega)}$$

所以

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \times \frac{40}{\sqrt{(25 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ - \arctg \frac{2\omega}{25 - \omega^2}$$

由前述定义

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \omega_c = 1.82$$

$$\Rightarrow \gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = 90^\circ - \arctg \frac{2 \times 1.82}{25 - 1.82^2} = 80.5^\circ$$

$$\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) = -180^\circ \quad \Rightarrow \omega_g = 5$$

$$\Rightarrow K_g = 20 \lg \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|} = 20 \lg 1.25 = 1.94 \text{ dB}$$

## 2) 幅相曲线法（极坐标图法）

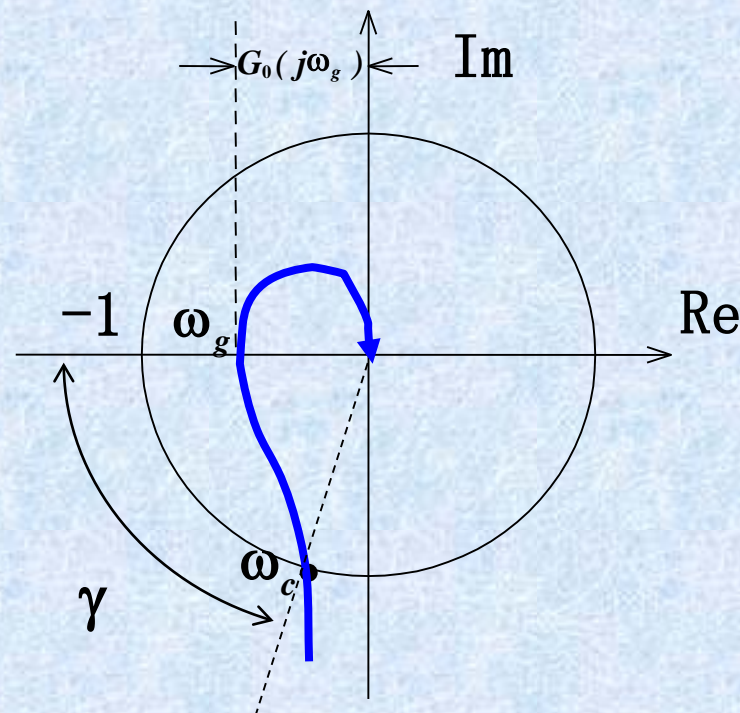
画极坐标图，画单位圆。按照右图得到相角裕度 $\gamma$ 和 $|G_0(j\omega_g)|$ ，然后根据  $K_g = 20\lg(1/|G_0(j\omega_g)|)$  得到幅值裕度。

**例** 用幅相曲线法作图如右所示，得到

$$\gamma = 80^\circ$$

$$|G_0(j\omega_g)| = 0.8 \Rightarrow K_g = 20\lg(1/0.8) = 1.94$$

注意：要精确画图

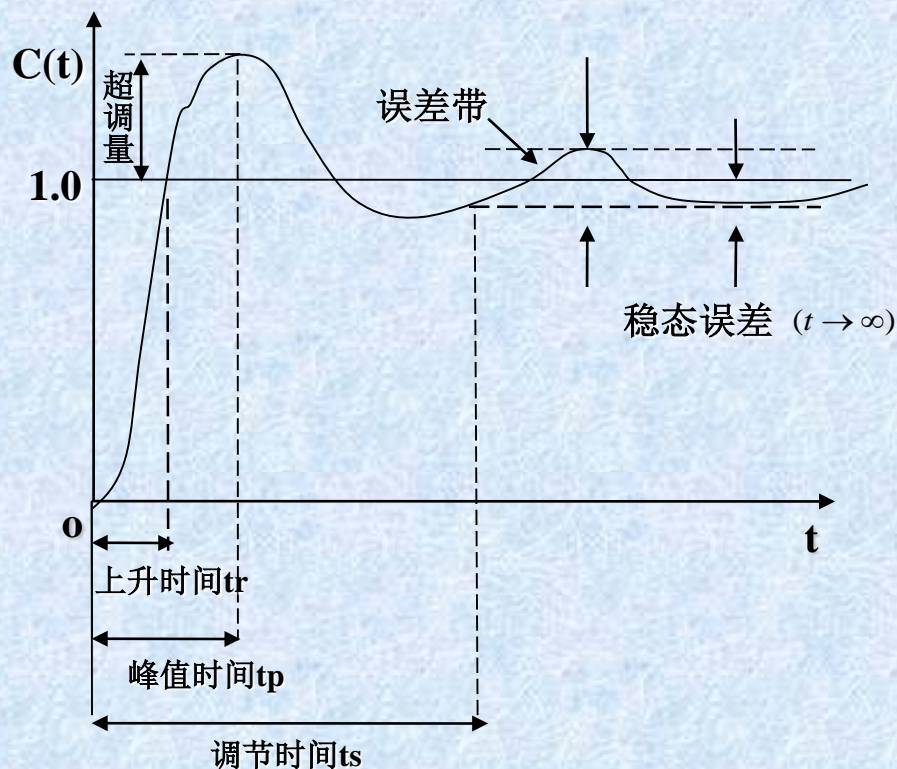




# 频域响应分析

在频域中对系统进行分析时，除了稳定性分析外，还要对系统的动态性能进行分析。

频域性能指标有：幅值穿越频率，相位穿越频率，相角裕度，幅值裕度，谐振频率，谐振峰值，系统带宽和带宽频率等。



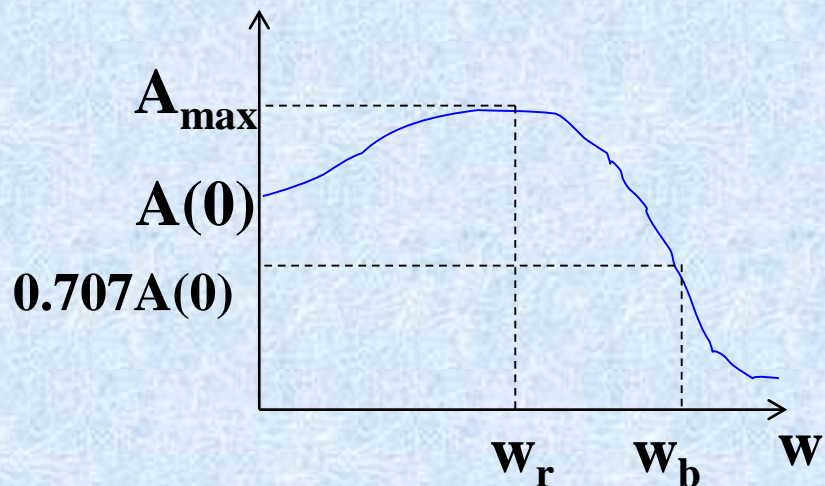
控制系统性能指标

$$G_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \Rightarrow G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

## ✧ 闭环频率性能指标

- ✧ 零频值  $A(0)$ ,  $A_{\max}$
- ✧ 谐振频率  $\omega_r$  和 谐振峰值  $M_r$
- ✧ 带宽频率  $\omega_b$ ,

$$A(\omega_b) = 0.707A(0)$$



## ✧ 频域指标和时域指标的关系

- ✧ 谐振峰值和系统超调量的关系，对于二阶系统

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \left( \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M_r^2}}}{2}} \quad (M_r \geq 1)$$



$$\text{由 } \sigma_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad \text{得到 } \sigma_p = e^{-\pi \sqrt{\frac{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}{M_r + \sqrt{M_r^2 - 1}}}} \times 100\%$$

可知 $M_r$ 在1.2~1.5时,  $\sigma_p=20\%\sim30\%$ , 系统将获得满意的过渡过程。

### ◆谐振频率及系统带宽与时域指标的关系

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad t_s = \frac{1}{\zeta \omega_n} \ln \frac{\pi}{0.05 \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_r t_p = \pi \sqrt{\frac{1 - 2\zeta^2}{1 - \zeta^2}} \quad \omega_r t_s = \frac{1}{\zeta} \sqrt{1 - 2\zeta^2} \ln \frac{\pi}{0.05 \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

对于给定的阻尼比, 二阶系统的谐振频率 $\omega_r$ 和 $t_p$ 、 $t_s$ 成反比。

同理，二阶系统带宽频率可由下式求出

$$\left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \right|_{\omega=\omega_b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_b = \omega_n \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$$

$$\Rightarrow \omega_b t_p = \pi \sqrt{\frac{(1-2\zeta^2) + \sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_b t_s = \frac{1}{\zeta} \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}} \ln \frac{1}{0.05\sqrt{1-\zeta^2}}$$

同样，对于给定的阻尼比，二阶系统的带宽频率 $\omega_b$ 和 $t_p$ 、 $t_s$ 成反比。一般来说，频带宽的系统有利于提高响应速度，但同时又容易引入高频噪声，应均衡考虑

## ◆相角裕度和阻尼比的关系

由开环频率特性  $G_o(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega)}$

和剪切频率定义  $|G_o(j\omega_c)| = 1$

得到  $(\frac{\omega_c}{\omega_n})^2 = \sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n} = \arctg \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c} = \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}}$$

在  $\zeta \leq 0.7$  时，它们之间近似为  $\zeta = 0.01\gamma$

当  $\gamma = 30^\circ \sim 60^\circ$ ， $\zeta = 0.3 \sim 0.6$

## ✦ 高低频段特性与动态性能的关系

低频段主要影响静态特性，如稳态误差

高频段要衰减得快些，抑制噪声