线性二次最优控制

December 27, 2017

定理 1 (时变系统有限时间最优调节器) 考虑如下的最优化问题

$$\min_{u(\cdot)} J[u(\cdot)] = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

s.t.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \\ x(t_0) = x_0 \\ u(\cdot) \in U^0_{[t_0,t_f]} \end{cases} \tag{1}$$

其中 容许控制集合 $U^0_{[t_0,t_f]} = \{u(\cdot)|u(t) \in \mathbb{R}^m,\ u(\cdot)$ 是 $[t_0,t_f]$上的分段连续函数 $\}$. $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$都是$[t_0,t_f]$上的分段连续函数. F是半正定矩阵, $Q(t)$半正定, $R(t)$正定。 则$u^*(t)$是最优控制的充分必要条件是

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t;t_f,F)x(t), \tag{2}$$

其中$P(t;t_f,F)$是如下微分Ricatti方程终值问题的唯一非负定解。

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t) \\ P(t_f) = F \end{cases} \tag{3}$$

当$u(t)$取为最优控制$u^*(t)$时，目标函数达到最小值

$$J^*[u^*(\cdot)] = J^*(x(t_0),t_0,t_f,F) = \frac{1}{2}x_0^T P(t_0;t_f,F)x_0 \tag{4}$$

最优轨线是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t;t_f,F)]x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5}$$

的解。

时变系统无限时间最优调节器。 考虑如下的最优化问题

$$\min_{u(\cdot)} J[u(\cdot)] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

s.t.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \\ x(t_0) = x_0 \\ u(\cdot) \in U^0_{[t_0,\infty)} \end{cases} \tag{6}$$

其中 容许控制集合 $U^0_{[t_0,\infty)} = \{u(\cdot)|u(t) \in \mathbb{R}^m,\ u(\cdot)$ 是 $[t_0,\infty)$上的分段连续函数, 且使得 $J[u(\cdot)] < \infty\}$. $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$都是$[t_0,\infty)$上的分段连续函数. $Q(t)$半正定, $R(t)$正定。

为此先考虑如下的时变系统有限时间最优调节器问题：

$$\min_{u(\cdot)} J_{t_f}[u(\cdot)] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

s.t.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \\ x(t_0) = x_0 \\ u(\cdot) \in U^0_{[t_0,t_f]} \end{cases} \tag{7}$$

其中 容许控制集合 $U^0_{[t_0,t_f]} = \{u(\cdot)|u(t) \in \mathbb{R}^m,\ u(\cdot)$ 是 $[t_0,t_f]$上的分段连续函数 $\}$. $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$都是$[t_0,t_f]$上的分段连续函数. $Q(t)$半正定, $R(t)$正定。 则根据定理1，最优控制

$$u^*_{t_f}(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t;t_f,O)x(t), \tag{8}$$

其中$P(t;t_f,O)$是如下微分Ricatti方程终值问题的唯一非负定解。

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t) \\ P(t_f) = O \end{cases} \tag{9}$$

目标函数的最小值

$$J^*_{t_f}(x(t_0),t_0,t_f) = \frac{1}{2}x_0^T P(t_0;t_f,O)x_0 \tag{10}$$

最优轨线是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t;t_f,O)]x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{11}$$

的解。

引理 1: 假设线性时变系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \tag{12}$$

对任给的$t \geq 0$, 是t时刻能控的。设$P(t;t_f,O)$是如下微分Ricatti方程终值问题的唯一非负定解。

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t) \\ P(t_f) = O \end{cases} \tag{13}$$

则$\lim_{t_f\to\infty} P(t;t_f,O)$的极限存在。记$\overline{P}(t) = \lim_{t_f\to\infty} P(t;t_f,O)$, $\overline{P}(t)$ 满足

$$\frac{d\overline{P}(t)}{dt} = -\overline{P}(t)A(t) - A^T(t)\overline{P}(t) + \overline{P}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\overline{P}(t) - Q(t) \tag{14}$$

证明：对任意给定的$\tau \geq 0$,任意给定的n维非零向量$x(\tau)$, 先证明

1) $\sup_{t_f\geq 0} x^T(\tau)P(\tau;t_f,O)x(\tau) < \infty$.

因为时变线性系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \tag{15}$$

对任给的$t \geq 0$, 是t时刻能控的, 因此对上述任意给定的$\tau \geq 0$ 和 $x(\tau)$，存在 $t_1 \geq \tau$ 和$\widetilde{u}(t)$, $t \in [\tau, t_1]$, 使得 $x(t_1) = 0$。令

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} \widetilde{u}(t), t \in [\tau, t_1] \\ 0, t \in (t_1, \infty) \end{cases} \tag{16}$$

由定理1可知

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}x^T(\tau)P(\tau;t_f,O)x(\tau) \\ = \;& J^*_{t_f}(x(\tau),\tau,t_f) \\ = \;& \min_{u(\cdot)}\left[\frac{1}{2}\int_\tau^{t_f}[x^TQ(t)x + u^TR(t)u]dt\right] \\ \leq \;& \frac{1}{2}\int_\tau^{t_f}[x^TQ(t)x + \overline{u}^TR(t)\overline{u}]dt \\ \leq \;& \frac{1}{2}\int_\tau^{\infty}[x^TQ(t)x + \overline{u}^TR(t)\overline{u}]dt \\ = \;& \frac{1}{2}\int_\tau^{t_1}[x^TQ(t)x + \widetilde{u}^TR(t)\widetilde{u}]dt \end{aligned} \tag{17}$$

因此$\sup_{t_f\geq 0} x^T(\tau)P(\tau;t_f,O)x(\tau) \leq \int_\tau^{t_1}[x^TQ(t)x + \widetilde{u}^TR(t)\widetilde{u}]dt < \infty$.

2) 再证明对任给的 $t_{f2} \geq t_{f1} \geq \tau$, $\frac{1}{2}x^T(\tau)P(\tau;t_{f1},O)x(\tau) \leq \frac{1}{2}x^T(\tau)P(\tau;t_{f2},O)x(\tau)$

设在区间$[\tau, t_{f1}]$的最优控制为$u_1^*(t)$, 对应的最优轨线为$x_1^*(t)$; 区间$[\tau, t_{f2}]$的最优控制为$u_2^*(t)$, 对应的最优轨线为$x_2^*(t)$.那么

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}x^T(\tau)P(\tau;t_{f1},O)x(\tau) \\
= & \frac{1}{2}\int_\tau^{t_{f1}}[(x_1^*)^TQ(t)x_1^* + (u_1^*)^TR(t)u_1^*]dt \\
= & \min_{u(\cdot)}\left[\frac{1}{2}\int_\tau^{t_{f1}}[x^TQ(t)x + u^TR(t)u]dt\right] \\
\le & \frac{1}{2}\int_\tau^{t_{f1}}[(x_2^*)^TQ(t)x_2^* + (u_2^*)^TR(t)u_2^*]dt \\
\le & \frac{1}{2}\int_\tau^{t_{f2}}[(x_2^*)^TQ(t)x_2^* + (u_2^*)^TR(t)u_2^*]dt \\
= & \frac{1}{2}x^T(\tau)P(\tau;t_{f2},O)x(\tau)
\end{aligned} \tag{18}$$

由 1), 2)可知，对任意给定的$\tau \ge 0$,任意给定的n维非零向量$x(\tau)$, 有 $\lim_{t_f\to\infty} x^T(\tau)P(\tau;t_f,O)x(\tau)$存在。分别取$x(\tau)$ 为特殊的向量，如只有第i, 第j个分量为1, 其余为0， 此时$x^T(\tau)P(\tau;t_f,O)x(\tau) = P_{ij}(\tau;t_f,O)$即矩阵$P(\tau;t_f,O)$第$i$行，第$j$列的元素。 从而可知 对任意给定的$\tau \ge 0$, $\lim_{t_f\to\infty} P(\tau;t_f,O)$存在。 即$\overline{P}(t) = \lim_{t_f\to\infty} P(t;t_f,O)$存在。

对任意的 $0 \le t \le t_1$, 由微分方程解的唯一性可知$P(t;t_f,O) = P(t;t_1,P(t_1;t_f,O))$, 因此

$$\overline{P}(t) = \lim_{t_f\to\infty} P(t;t_f,O) = \lim_{t_f\to\infty} P(t;t_1,P(t_1;t_f,O)) \tag{19}$$

再由微分方程解对终值条件的连续依懒性可知

$$\lim_{t_f\to\infty} P(t;t_1,P(t_1;t_f,O)) = P(t;t_1,\lim_{t_f\to\infty} P(t_1;t_f,O)) = P(t;t_1,\overline{P}(t_1)) \tag{20}$$

因此

$$\overline{P}(t) = P(t;t_1,\overline{P}(t_1)) \tag{21}$$

即 $\overline{P}(t)$ 满足

$$\frac{d\overline{P}(t)}{dt} = -\overline{P}(t)A(t) - A^T(t)\overline{P}(t) + \overline{P}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\overline{P}(t) - Q(t) \tag{22}$$

引理证毕。

定理 2 (时变系统无限时间最优调节器) 对任给的$\tau \ge 0$, 考虑如下的最优化问题

$$\min_{u(\cdot)} J[u(\cdot)] = \frac{1}{2}\int_\tau^\infty [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

s.t.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \\ x(\tau) = x_0 \\ u(\cdot) \in U^0_{[\tau,\infty)} \end{cases} \tag{23}$$

其中 容许控制集合 $U^0_{[\tau,\infty)} = \{u(\cdot)|u(t) \in \mathbb{R}^m,\ u(\cdot)$ 是 $[\tau,\infty)$上的分段连续函数, 且使得$J[u(\cdot)] < \infty\}$. $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$都是$[0,\infty)$上的分段连续函数. $Q(t)$半正定, $R(t)$正定。线性时变系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \tag{24}$$

对任给的$t \geq 0$, 是t时刻能控的。

则$u^*(t)$是最优控制的充分必要条件是

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\overline{P}(t)x(t), \tag{25}$$

其中$\overline{P}(t) = \lim_{t_f\to\infty} P(t;t_f,O)$, $P(t;t_f,O)$是如下微分Ricatti方程终值问题的唯一非负定解。

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t) \\ P(t_f) = O \end{cases} \tag{26}$$

当$u(t)$取为最优控制$u^*(t)$时，目标函数达到最小值

$$J^*[u^*(\cdot)] = J^*(x(\tau),\tau) = \frac{1}{2}x_0^T\overline{P}(\tau)x_0 \tag{27}$$

最优轨线是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\overline{P}(t)]x(t) \\ x(\tau) = x_0 \end{cases} \tag{28}$$

的解。

引理 2 设(A,B)能控，R正定，Q半正定。 设$P(t;t_f,O)$是如下微分Ricatti方程终值问题的唯一非负定解。

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = -P(t)A - A^TP(t) + P(t)BR^{-1}B^TP(t) - Q \\ P(t_f) = O \end{cases} \tag{29}$$

则极限矩阵$\overline{P}(t) = \lim_{t_f\to\infty} P(t;t_f,O)$为一常值非负定矩阵，记为$\overline{P}$, 且满足代数Ricatti方程

$$\overline{P}A + A^T\overline{P} - \overline{P}BR^{-1}B^T\overline{P} + Q = O \tag{30}$$

证明： 对任给的$\tau_2 > \tau_1 \geq 0$ 和n维向量 x_0, 考虑如下两个初始时刻不同，但状态初值相同的定常系统无限时间最优调节器问题

问题 1：

$$\min_{u(\cdot)} J_1[u_1(\cdot)] = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\infty}[x_1^T(t)Qx_1(t) + u_1^T(t)Ru_1(t)]dt$$

s.t.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = Ax_1 + Bu_1 \\ x_1(\tau_1) = x_0 \\ u_1(\cdot) \in U^0_{[\tau_1,\infty)} \end{cases} \tag{31}$$

其中 容许控制集合 $U^0_{[\tau_1,\infty)} = \{u(\cdot)|u(t) \in \mathbb{R}^m,\ u_1(\cdot)$ 是 $[\tau_1,\infty)$上的分段连续函数, 且使得 $J[u_1(\cdot)] < \infty\}$.

问题 2：

$$\min_{u(\cdot)} J_2[u_2(\cdot)] = \frac{1}{2}\int_{\tau_2}^{\infty}[x_2^T(t)Qx_2(t) + u_2^T(t)Ru_2(t)]dt$$

s.t.

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = Ax_2 + Bu_2 \\ x_2(\tau_2) = x_0 \\ u_2(\cdot) \in U^0_{[\tau_2,\infty)} \end{cases} \tag{32}$$

其中 容许控制集合 $U^0_{[\tau_2,\infty)} = \{u(\cdot)|u(t) \in \mathbb{R}^m,\ u_2(\cdot)$ 是 $[\tau_2,\infty)$上的分段连续函数, 且使得 $J[u_2(\cdot)] < \infty\}$.

Q半正定, R正定。(A,B)完全能控。

由定常系统的时间平移性质可知，若$u_1^*(t)$是问题1的最优控制，$u_2^*(t)$是问题2的最优控制,则 $u_2^*(t) = u_1^*(t-(\tau_2-\tau_1))$, 且两个问题的最优指标值$J_1^* = J_2^*$. 由定理2可知$J_1^* = \frac{1}{2}x_0^T\overline{P}(\tau_1)x_0$, $J_2^* = \frac{1}{2}x_0^T\overline{P}(\tau_2)x_0$. 由$x_0$的任意性，可知 $\overline{P}(\tau_1) = \overline{P}(\tau_2)$， 再由$\tau_2$, τ_1的任意性可知 $\overline{P}(t) \equiv \overline{P}$. 再由引理1 注意到

$$\frac{d\overline{P}(t)}{dt} = -\overline{P}(t)A - A^T\overline{P}(t) + \overline{P}(t)BR^{-1}B^T\overline{P}(t) - Q \tag{33}$$

可知

$$\overline{P}A + A^T\overline{P} - \overline{P}BR^{-1}B^T\overline{P} + Q = O \tag{34}$$

定理 3 (定常系统无限时间最优调节器) 对任给的$t_0 \geq 0$, 考虑如下的最优化问题

$$\min_{u(\cdot)} J[u(\cdot)] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

s.t.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0 \\ u(\cdot) \in U^0_{[t_0,\infty)} \end{cases} \tag{35}$$

其中 容许控制集合 $U^0_{[t_0,\infty)}=\{u(\cdot)|u(t)\in\mathbb{R}^m,\ u(\cdot)$ 是 $[t_0,\infty)$上的分段连续函数, 且使得 $J[u(\cdot)]<\infty\}$. Q半正定, R正定。(A,B)完全能控。

则$u^*(t)$是最优控制的充分必要条件是

$$u^*(t)=-R^{-1}B^T\overline{P}x(t), \tag{36}$$

其中$\overline{P}$是如下代数Ricatti方程的唯一非负定解。

$$\overline{P}A+A^T\overline{P}-\overline{P}BR^{-1}B^T\overline{P}+Q=O \tag{37}$$

当$u(t)$取为最优控制$u^*(t)$时，目标函数达到最小值

$$J^*[u^*(\cdot)]=J^*(x(t_0))=\frac{1}{2}x_0^T\overline{P}x_0 \tag{38}$$

最优轨线是初值问题

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=[A-BR^{-1}B^T\overline{P}]x(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \tag{39}$$

的解。

引理 3 若 (A,B)完全能控, (C,A)完全能观测。 则如下代数Ricatti方程

$$\overline{P}A+A^T\overline{P}-\overline{P}BR^{-1}B^T\overline{P}+C^TC=O \tag{40}$$

存在唯一的正定解$\overline{P}$.

定理 4 (定常系统无限时间最优调节器闭环渐近稳定性) 对任给的$t_0\geq 0$, 考虑如下的最优化问题

$$\min_{u(\cdot)} J[u(\cdot)]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)C^TCx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt$$

s.t.

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=Ax+Bu\\ x(t_0)=x_0\\ u(\cdot)\in U^0_{[t_0,\infty)}\end{cases} \tag{41}$$

其中 容许控制集合 $U^0_{[t_0,\infty)}=\{u(\cdot)|u(t)\in\mathbb{R}^m,\ u(\cdot)$ 是 $[t_0,\infty)$上的分段连续函数, 且使得 $J[u(\cdot)]<\infty\}$. R正定。(A,B)完全能控, (C,A)完全能观测。

则$u^*(t)$是最优控制的充分必要条件是

$$u^*(t)=-R^{-1}B^T\overline{P}x(t), \tag{42}$$

其中$\overline{P}$是如下代数Ricatti方程的唯一正定解。

$$\overline{P}A + A^T\overline{P} - \overline{P}BR^{-1}B^T\overline{P} + C^TC = O \tag{43}$$

当$u(t)$取为最优控制$u^*(t)$时，目标函数达到最小值

$$J^*[u^*(\cdot)] = J^*(x(t_0)) = \frac{1}{2}x_0^T\overline{P}x_0 \tag{44}$$

最优轨线是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [A - BR^{-1}B^T\overline{P}]x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{45}$$

的解, 其中$A - BR^{-1}B^T\overline{P}$的特征根都具有负实部。