

现代控制理论


李 韬

tli@math.ecnu.edu.cn; sixumuzi@163.com

个人主页: <http://faculty.ecnu.edu.cn/s/3601/main.jsp>

华东师范大学数学科学学院

2019年4月-2019年6月



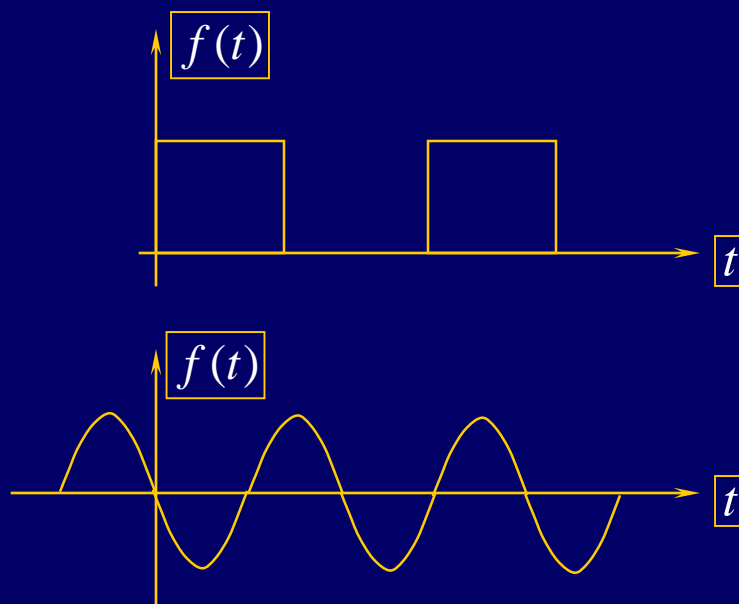
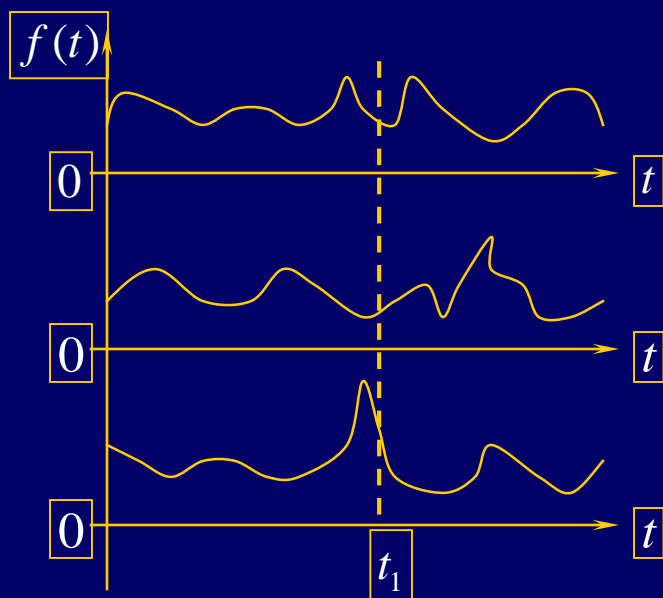
第二章

信号与系统模型

信号的分类

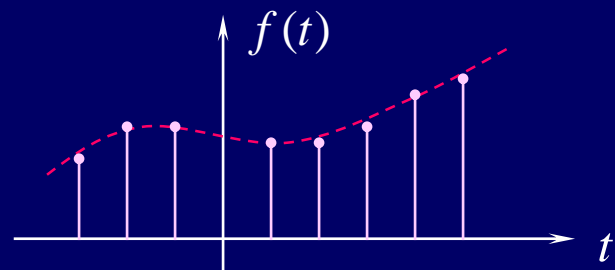
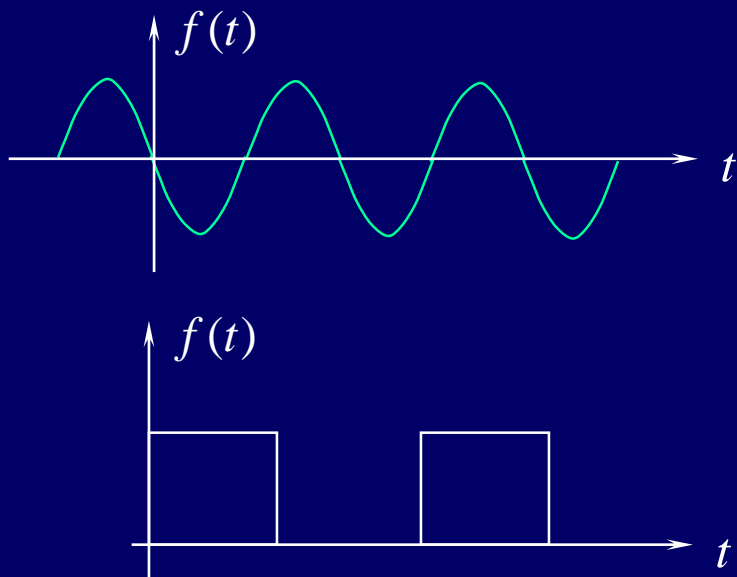
确定信号和随机信号

- 确定信号：可以用确定时间函数表示的信号。
- 随机信号：信号不能用确切的函数描述，在任意时刻的取值都具有不确定性，只可能知道它的统计特性。



连续信号和离散信号

- 连续时间信号：在连续的时间范围内 ($-\infty < t < \infty$) 有定义的信号称为连续时间信号。幅值连续的连续时间信号也常称为模拟信号。
- 离散时间信号：仅在一些离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号。幅值离散的离散时间信号也常称为数字信号。



通常取等间隔 T ，离散信号可表示为 $f(kT)$ ，简写为 $f(k)$ ，这种等间隔的离散信号也常称为序列。其中 k 称为序号。

$$f(k) = \{ \dots, 0, 1, 2, -1.5, 2, 0, 1, 0, \dots \}$$

↑

$$k=0$$

通常将对应某序号 m 的序列值称为第 m 个样点的“样值”。

周期信号和非周期信号

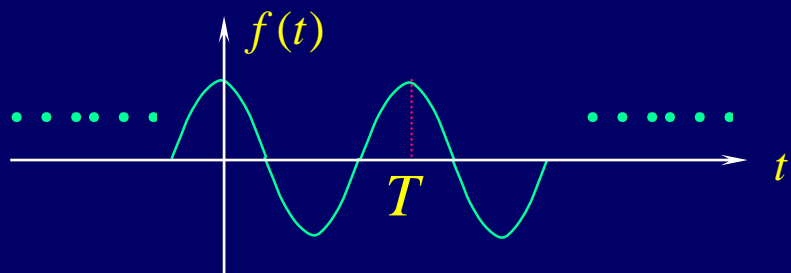
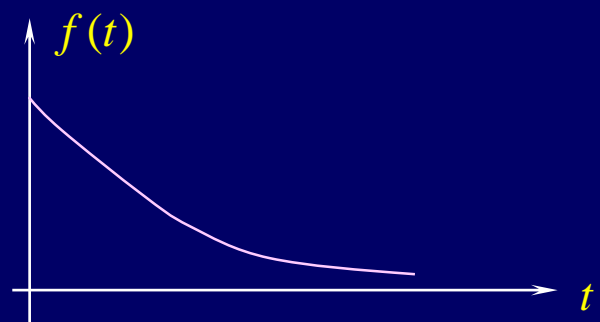
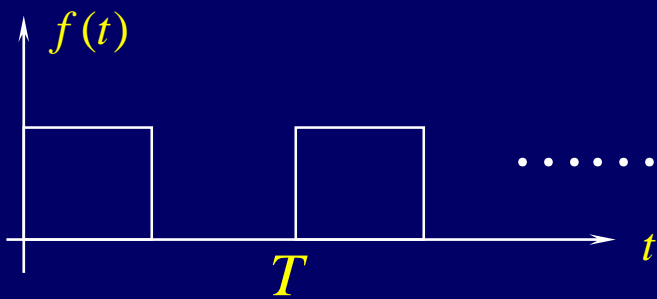
- 周期信号：每隔一定时间 T ，按相同规律重复变化的信号。

连续周期信号 $f(t)$ 满足 $f(t) = f(t + mT)$ ，

离散周期信号 $f(k)$ 满足 $f(k) = f(k + mN)$ ，

满足上述关系的最小 T (或整数 N) 称为该信号的周期。

- 非周期信号：不具有周期性的信号称为非周期信号。



集中参数信号和分布参数信号

➤ 集中参数信号：信号强度随时间一个维度变化

➤ 语音信号：声压随时间变化的函数

➤ 分布参数信号：信号强度随时间和空间多个维度变化

➤ 黑白图像：每个像素的灰度随时间和二维平面坐标变化

➤ 彩色图像：每个像素的RGB随时间和二维平面坐标变化

➤ 气象观测：温度、气压、风速等

典型外作用

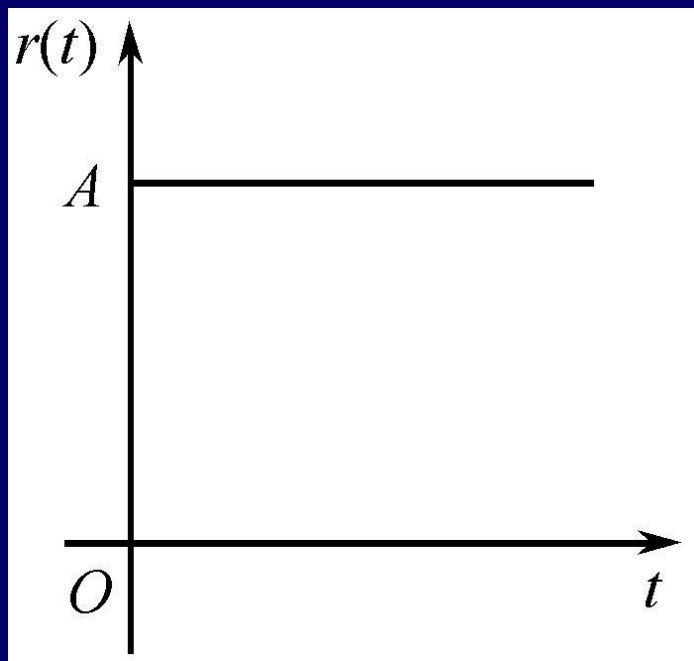
实际系统的输入信号往往是比较复杂的,而系统的输出响应又与输入信号类型有关。因此,在研究自动控制系统的响应时,往往选择一些典型输入信号,并且以最不利的信号作为系统的输入信号,分析系统在此输入信号下所得到的输出响应是否满足要求,估计系统在比较复杂信号作用下的性能指标。

1. 阶跃函数

它的数学表达式为:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t \geq 0 \end{cases}$$

它表示一个在 $t=0$ 时刻出现的，幅值为 A 的阶跃变化函数，如图所示。在实际系统中，如负载突然增大或减小、电源电压突然跳动、流量阀突然开大或关小、飞机遇到的常值阵风扰动等均可以近似看成阶跃函数的形式。



$A=1$ 的函数称为单位阶跃函数，记作 $1(t)$ 。因此，幅值为 A 的阶跃函数也可表示为：

$$r(t) = A \cdot 1(t)$$

出现在 $t = t_0$ 时刻的阶跃函数，表示为：

$$r(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ A & t \geq t_0 \end{cases}$$

利用阶跃信号表示矩形脉冲
阶跃信号的单边特性
利用阶跃信号表示符号函数

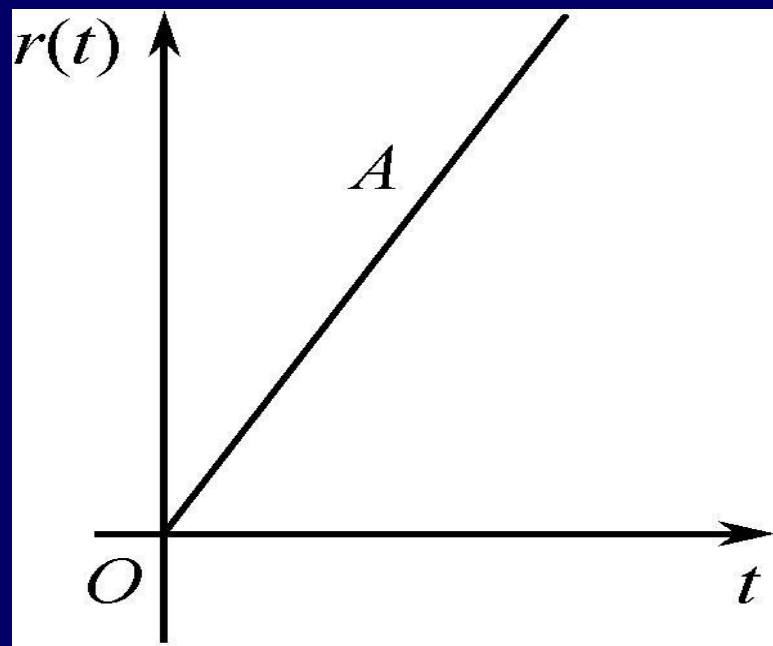
2. 斜坡函数（等速度函数）


它的数学表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ At & t \geq 0 \end{cases}$$

斜坡函数从 $t = 0$ 时刻开始，随时间以恒定速度增加。如图所示。 $A=1$ 时斜坡函数称作单位斜坡函数。

斜坡函数等于阶跃函数对时间的积分，反之，阶跃函数等于斜坡函数对时间的导数。





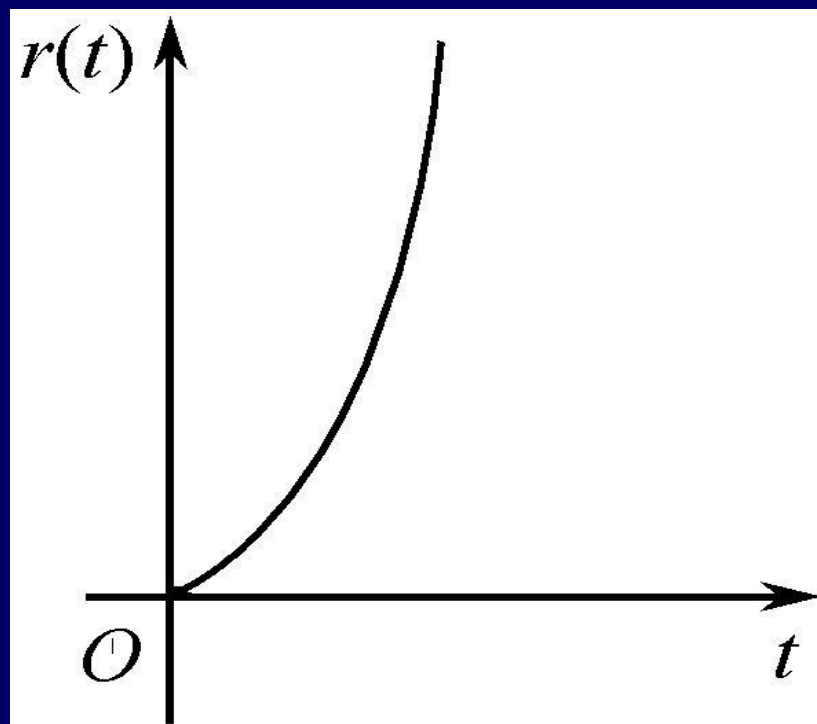
随动系统：雷达-高射炮防空系统，当雷达跟踪的目标以恒定速率飞行


3. 抛物线函数（等加速度函数）

它的数学表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}At^2 & t \geq 0 \end{cases}$$

当 $A=1$ 时，称为单位抛物线函数。抛物线函数是斜坡函数对时间的积分。





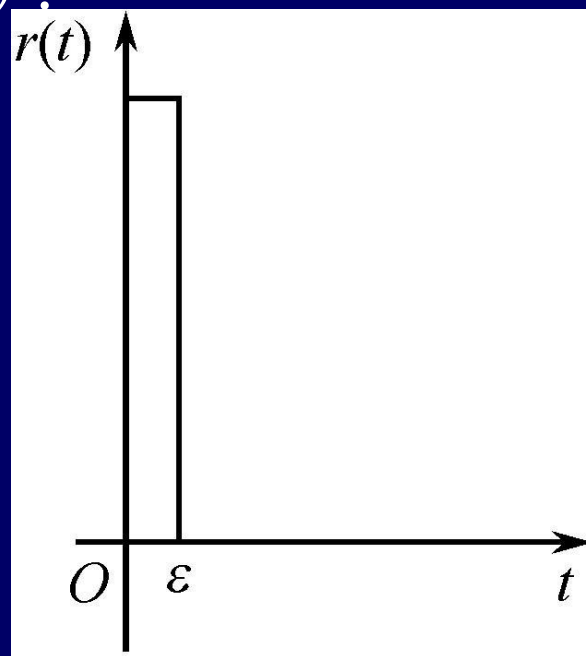
4: 脉冲函数：也称为冲激信号(函数)，某些物理现象需要用在一个时间极短，但幅值极大的函数模型来描述。如力学中瞬间作用的冲击力、数字通信中的抽样脉冲等。

强度为 A 的脉冲函数可表示为 $A\delta(t)$

$\delta(t-t_0)$ 表示在时刻 $t=t_0$ 出现的单位脉冲函数，即(狄拉克Dirac)：

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1$$

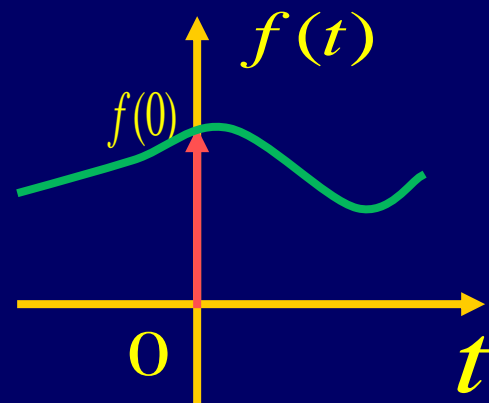


脉冲函数形式上是阶跃函数的导数

δ 函数筛选特性性质

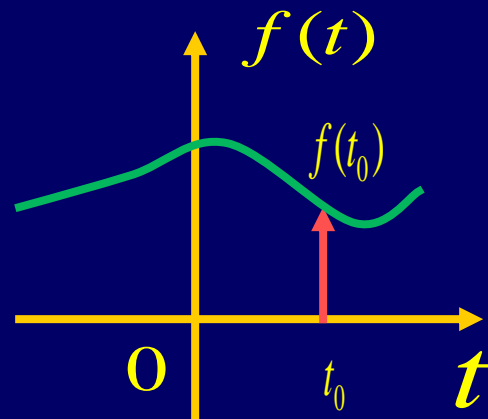
单位冲激信号 $\delta(t)$ 与一个在 $t=0$ 点连续（且处处有限）的信号 $f(t)$ 相乘，则其乘积仅在 $t=0$ 处得到 $f(0)\delta(t)$ ，其余各点之乘积均为零。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(0) dt \\ &= f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = f(0)\end{aligned}$$

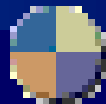


对于延迟 t_0 的单位冲激信号有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t_0) dt = f(t_0)\end{aligned}$$



δ 函数的三种定义



1. 一系列强度固定窄脉冲当脉宽趋于0时的极限（数学上不严格）
2. 狄拉克函数（数学上不严格）
3. 广义函数定义（筛选性质）（张恭庆，林源渠，《泛函分析讲义》，第三章。

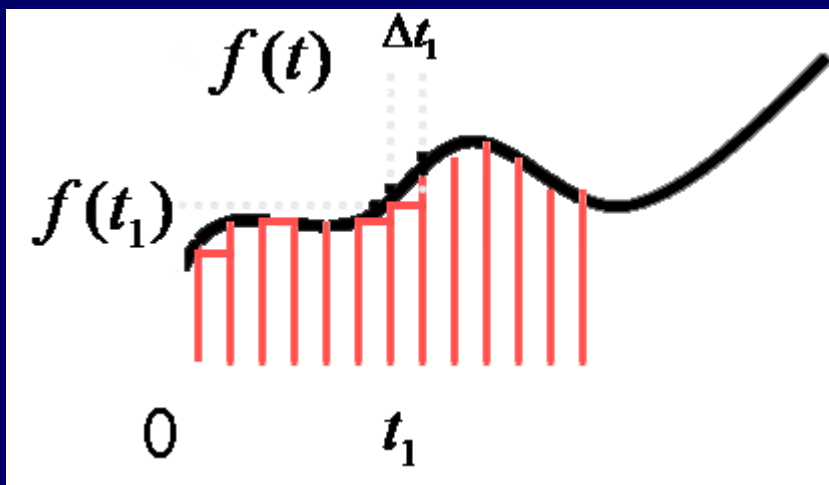
4: 正弦函数:

$$f(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$$

A 为振幅; $\omega=2\pi f$ 为角频率; φ 为初始相位
如舰船的消摆系统、稳定平台的随动系统
可以看作在正弦函数的波浪下工作

信号的脉冲分解

其中 $f(\tau)$ 为窄脉冲分量 $\xrightarrow{\text{组合极限}}$ 冲激信号的叠加



$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau$$



$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

信号的正交分解 Hilbert空间理论

用正交函数集来表示一个信号，组成信号的分量就是相互正交的。

即：正交函数分量： $f(t) \xrightarrow{\text{分解为}} f(t)$ 由正交函数集表示

其中正交函数集各分量相互正交

如矩形脉冲 $\xrightarrow{\text{分解}}$ 各次谐波的正弦与余弦表示
傅里叶逆变换：

$$\text{傅里叶逆变换： } f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{傅里叶变换： } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$



非正弦函数的正交函数集：

Legendre 勒让德多项式

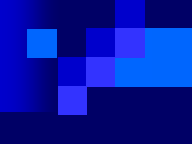
1923 美国数学家J. L. Walsh 提出 (Walsh) 沃尔什函数集：CDMA通信


1910年匈牙利数学家A. Haar 哈尔函数集

1922年德国数学家 H. Rademacher 拉德马赫函数集

系统模型

- 模型是描述系统的手段，是对系统特定行为的**本质部分信息**简缩成有用的描述形式，是分析系统和预报、控制系统和决策的基础。
- 模型的具体形式
 - ✓ “直觉”模型：司机驾驶
 - ✓ 物理模拟模型：风洞（物理仿真）
 - ✓ 计算机模拟模型：软件仿真
 - ✓ 数学模型
 - ✓ 非解析模型：数据图表、曲线
 - ✓ 解析模型：代数方程、微分方程、差分方程

- 
- 矛盾的对立统一法则是唯物辩证法的最根本法则，宇宙中的任何系统都是按照对立统一法则在不断发展变化，函数就是自变量和因变量这两个互相对立又互相联系的对立统一，是系统发展变化过程的抽象和定量描述系统的工具。
 - 在很多科学、技术和实际工程问题中，很难找到因变量与自变量（可能不止一个）之间的直接联系，而只能在其变化过程中找到自变量和因变量的关系式

- 
- 实际系统到底哪些部分是本质的，哪些部分是非本质的，这取决于所研究的问题和建模的成本。
 - 对实际系统来说，模型就是按照使用目的对系统所做的一种近似描述
 - 系统模型的精确性和复杂性是一对矛盾

模型的分类

- 静态系统模型与动态系统模型

- 动态系统模型描述系统处于过渡过程或整个运行时期内各状态变量间的关系，状态变量一般是时间的函数，反映了客观现实世界运动过程的量与量之间的关系。
- 静态系统模型是动态系统模型在稳态时的表现，或者说静态系统模型是用来描述系统处于稳态时各状态变量间的关系，状态变量不再是时间的函数。
- 动态系统和静态系统是相对概念

静态系统模型

- 通常用代数方程、代数等式和不等式描述
- 柯布-道格拉斯 (Cobb-Douglas) 生产函数模型

$$Y = AL^{\alpha_1} K^{\alpha_2}, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$$

其中 Y 是产值, L 是劳动力, K 是资本。

静态系统模型

- 在一定时间和变化范围内，系统变量可以近似看作常量

- 匀速直线运动位移公式

$$S = vt$$

- 化学反应速度系数

$$k = \alpha e^{-\frac{E}{RT}}$$

静态系统模型

- 系统变量的瞬时关系，此时称为无记忆模型或零阶模型

$$F = ma$$

- 动态系统的零阶近似
- 动态系统经过长时间运行，达到稳态时的情况
- 动态系统处于均衡状态
- 表示系统运行的平均效果

隐函数与微分方程

如果函数未知，但知道变量与函数的代数关系式，便组成代数方程，通过求解代数方程解出未知函数

隐函数用来描述静态系统

如果知道自变量、未知函数及函数的导数组成的关系式，得到的便是微分方程，通过求解微分方程求出未知函数

微分方程用来描述动态系统

隐函数存在定理

代数方程

$$F(x, y) = 0$$

在什么条件下确定一个隐函数？

隐函数存在定理

设 $F(x, y)$ 满足下面的条件:

(i) 在区域 $D: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 上

$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ 连续

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

则有以下结果:

(i) 在点 (x_0, y_0) 的某一领域内, $F(x, y) = 0$ 唯一确定一个函数 $y = f(x)$, 且 $y_0 = f(x_0)$, 即, 函数 $y = f(x)$ 定义在点 x_0 的某个领域 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 内, $0 < \eta \leq a$, 它满足方程 $F(x, f(x)) = 0$, 且 $y_0 = f(x_0)$.

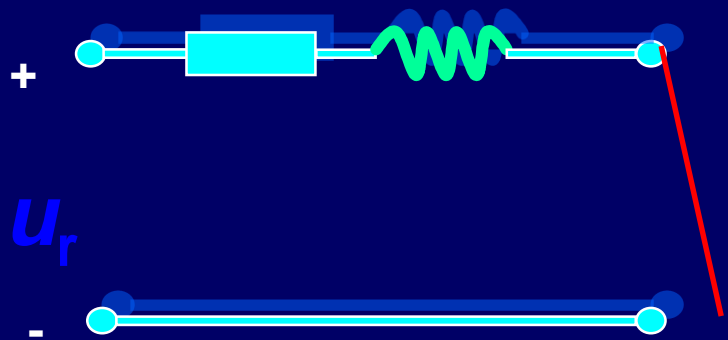
(ii) $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 内连续

(iii) $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 内有连续的导数, 且

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$$

动态系统模型：零状态响应

- 通常用微分(差分)方程、微分(差分)不等式描述



$$u_r - L \frac{dI}{dt} - RI = 0,$$

其中电流 $I(t)$ 是自变量 t 的函数,
在方程中是未知函数

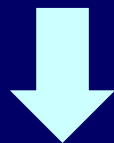
当开关刚合上, 即 $t=0$ 时, $I(0)=0$,
称为方程的初始条件

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{u_r}{L}, I(0) = 0$$

稳态方程

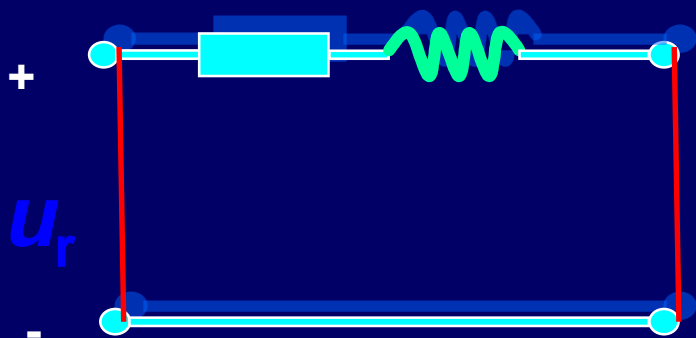
- 系统达到稳态时

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{u_r}{L} \Rightarrow 0 = -\frac{R}{L}I + \frac{u_r}{L}$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{u_r}{R}$$

动态系统模型：零输入响应



当 $t = t_0$ 时有 $I(t_0) = I_0$,
而电源突然短路,
即 $u_r = 0$, 且保持不变,

此时方程变为

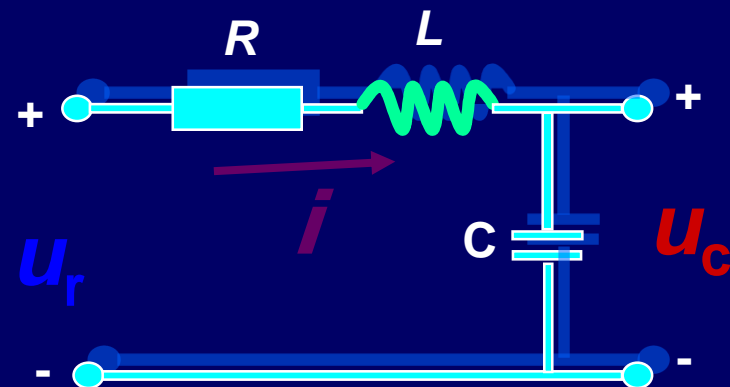
$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0 \\ I(t_0) = I_0 \end{cases}$$

$$\text{达到稳态时 } \frac{R}{L} I = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$$

二阶动态系统

RLC电路

微分方程中只能留下输入、输出变量，及系统常数



$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = u_r(t)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$



$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

RLC电路是二阶常系数线性微分方程。

机械位移系统

$$F(t) - F_1(t) - F_2(t) = ma(t)$$

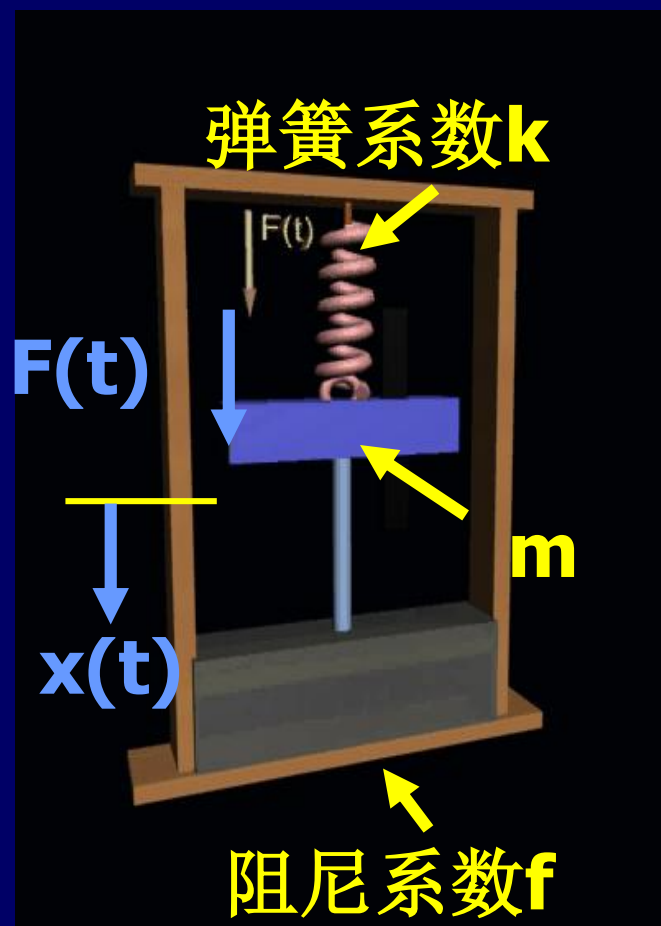
中间变量关系式:

$$F_2(t) = kx(t)$$

$$\begin{cases} F_1(t) = f \frac{dx(t)}{dt} \\ a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \end{cases}$$

消除中间变量得:

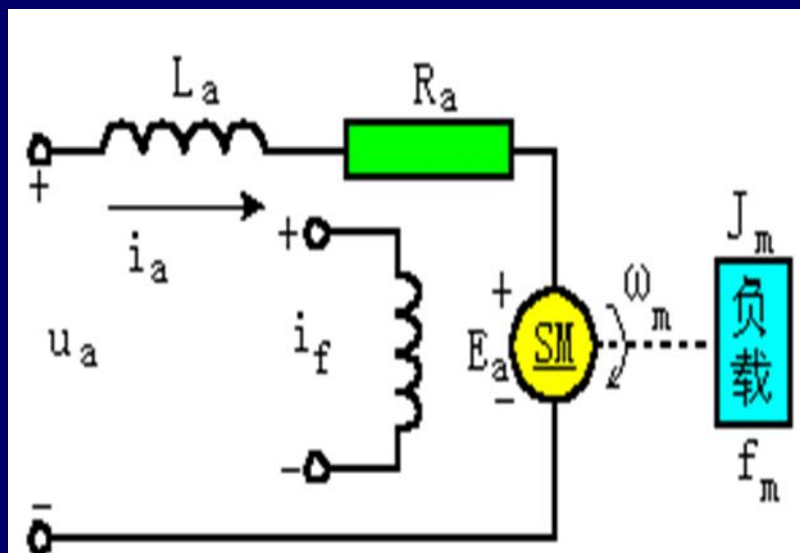
$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$$



- 微分方程的阶数成为系统的阶数
- 静态系统和动态系统是相对概念
- 相对于高层大系统运行的时间尺度，低层子系统的反应速度非常快（时间常数小，过渡过程较短），能很快达到稳态，则可以用稳态模型来近似低层子系统
 - 控制系统中的某些传感和执行器件

电枢控制直流电机模型

电枢控制直流电机将输入的电能转化为机械能，由输入的电枢电压 $u_a(t)$ 在电枢回路中产生电枢电流，再由电流 $i_a(t)$ 与励磁磁通相互作用产生电磁转矩 $M_m(t)$ ，拖动负载运动。



直流电机的运动方程由三部分组成。

第一部分：电枢回路电压平衡方程

$$u_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_a(t)$$

其中 $E_a(t)$ 是电枢电势，与电机转速 $\omega_m(t)$ 成正比

$E_a(t) = C_e \omega_m(t)$ ， C_e 是电势系数。

第二部分：电磁转矩方程

$$M_m(t) = C_m i_a(t)$$

其中 $M_m(t)$ 是电枢电流产生的电磁转矩，

C_m 是电动机的转矩系数

第三部分：电动机轴上的转矩平衡方程

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} + f_m \omega_m(t) = M_m(t) - M_c(t)$$

其中 f_m 是电动机和负载折合到电动机轴上的粘性摩擦系数； J_m 是电动机和负载折合到电动机轴上的转动惯量； $M_c(t)$ 是折合到电动机轴上的总负载转矩。

将 $u_a(t)$ 看作控制输入， $\omega_m(t)$ 看作输出，消去中间变量 $i_a(t)$, $E_a(t)$ 和 $M_m(t)$, 得到

$$\begin{aligned} L_a J_m \frac{d^2 \omega_m(t)}{dt^2} + (L_a f_m + R_a J_m) \frac{d\omega_m(t)}{dt} + (R_a f_m + C_m C_e) \omega_m(t) \\ = C_m u_a(t) - L_a \frac{dM_c(t)}{dt} - R_a M_c(t) \end{aligned}$$

在工程应用中，由于电枢电路电感很小，通常忽略不计，此时模型简化为

$$T_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_m(t) = K_m u_a(t) - K_c M_c(t)$$

其中 $T_m = \frac{R_a J_m}{R_a f_m + C_m C_e}$ 是电机机电时间常数；

$$K_m = \frac{C_m}{R_a f_m + C_m C_e}, K_c = \frac{R_a}{R_a f_m + C_m C_e}$$

如果电枢电阻 R_a 和电动机的转动惯量 J_m 都很小
可以忽略不计，还可以进一步转化为

$$C_e \omega_m(t) = u_a(t)$$

$$L_a J_m \frac{d^2 \omega_m(t)}{dt^2} + (L_a f_m + R_a J_m) \frac{d\omega_m(t)}{dt} + (R_a f_m + C_m C_e) \omega_m(t)$$

$$= C_m u_a(t) - L_a \frac{dM_c(t)}{dt} - R_a M_c(t)$$



$$T_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_m(t) = K_m u_a(t) - K_c M_c(t)$$



$$C_e \omega_m(t) = u_a(t)$$

静态凯恩斯模型

- 考虑国民收入的分配模型

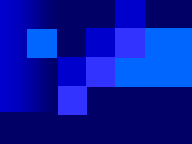
$$Y = C + I + G$$

其中 Y 是国民收入（生产总值减去折旧）， C 是民间消费， I 是民间投资， G 是政府支出。

假设消费与国民收入有线性关系

$$C = b_0 + b_1 Y$$

则由这两式可以解出


$$\begin{cases} Y = \frac{b_0}{1-b_1} + \frac{I}{1-b_1} + \frac{G}{1-b_1} \\ C = \frac{b_0}{1-b_1} + \frac{b_1 I}{1-b_1} + \frac{b_1 G}{1-b_1} \end{cases}$$

动态凯恩斯模型

- 动态凯恩斯模型是将各个变量考虑为时间的函数，以 $Y(k)$, $C(k)$, $I(k)$, $G(k)$ 分别表示第 k 周期的国民收入、消费、投资和政府支出，那么第 k 周期的消费依赖于前一个周期的国民收入，上面的静态关系应该改写为

$$\begin{cases} Y(k) = C(k) + I(k) + G(k) \\ C(k) = b_0 + b_1 Y(k-1) \end{cases}$$

动态凯恩斯模型

将 $C(k)$ 代入第一个方程中得到

$$Y(k) = b_0 + b_1 Y(k-1) + I(k) + G(k)$$

是关于 $Y(k)$ 的一阶差分方程。

动态凯恩斯模型

将 $C(k)$ 代入第一个方程中得到

$$Y(k) = b_0 + b_1 Y(k-1) + I(k) + G(k)$$

是关于 $Y(k)$ 的一阶差分方程。

动态凯恩斯模型-乘子加模型

如果假设消费正比于前期的国民收入

$$C(k) = \gamma Y(k-1), 0 < \gamma < 1$$

γ 称为动态乘子，并且投资与消费的改变量成正比

$$I(k) = \alpha [C(k) - C(k-1)], \alpha > 0$$

α 称为加速乘子



那么

$$I(k) = \alpha[\gamma Y(k-1) - \gamma Y(k-2)]$$

上式代入

$$Y(k) = C(k) + I(k) + G(k)$$

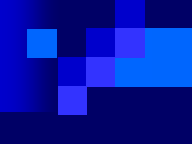
得到

$$Y(k) = (1 + \alpha)\gamma Y(k-1) - \alpha\gamma Y(k-2) + G(k)$$

是一个二阶差分方程，称为乘子加速模型。

模型的分类

- 连续时间动态系统与离散时间动态系统
 - 若系统的输入、输出和内部状态都为连续时间信号，则称为连续时间动态系统，通常用微分方程描述
 - 很多实际的物理过程
 - 若系统的输入、输出和内部状态为离散时间信号，通常用差分方程描述
 - 电子计算机系统
 - 实际物理系统的采样
 - 经济管理系统
- 混杂系统 Hybrid system

- 
- 连续时间系统和离散时间系统是相对概念，依赖于看待问题的时间尺度。
 - 经济控制系统

因果系统与非因果系统

激励引起的响应不会出现在激励之前的系统，称为因果系统
即对因果系统，当 $t < t_0$ ， $f(t) = 0$ 时，有 $t < t_0$ ， $yf(t) = 0$ 。
如：下列系统均为因果系统： $yf(t) = 3f(t - 1)$ 而下列系统
为非因果系统：

(1) $yf(t) = 2f(t+1)$ ， 因为，令 $t=1$ 时，有 $yf(1)=2f(2)$

(2) $yf(t) = f(2t)$ ， 因为，若 $f(t)=0$ ， $t < t_0$ ， 有 $yf(t)=f(2t)=0$ ， $t < 0.5t_0$ 。

也就是说，如果响应 $r(t)$ 并不依赖于将来的激励[如 $e(t+1)$]，那么系统就是因果的。

模型的分类

- 集中参数动态系统与分布参数动态系统
 - 集中参数系统，系统的原件和参数不随空间变化，用常微分方程描述
 - 系统中含有分布参数原件和参数，如电力传输线，分布参数系统用偏微分方程描述
- 实际物理系统严格来讲都是分布参数系统，集中参数系统是分布参数系统的近似，依赖于看待问题的空间尺度和系统的实际工作条件
 - 空调控制室温
 - 电路中的电阻，电容和电感

模型的分类

- 线性模型与非线性模型
- 如果模型的输出关于输入线性，称为系统线性；如果模型的输出关于参数空间线性，称为关于参数线性

$$y(k) = a + bu(k) + cu^2(k)$$

- 线性系统和非线性系统是相对概念

线性系统的叠加原理

如果 $\{y_1(k), k \geq 0\}$ 和 $\{y_2(k), k \geq 0\}$ 分别是激励信号 $\{u_1(k), k \geq 0\}$ 和 $\{u_2(k), k \geq 0\}$ 的输出响应, 则 $\{y_1(k)+y_2(k), k \geq 0\}$ 是激励信号 $\{u_1(k)+u_2(k), k \geq 0\}$ 的输出响应。

非线性系统

热电偶的输出电压 E 与热电偶冷热两端之间的温差 ΔT 之间的关系为

$$E = \alpha \Delta T + \frac{1}{2} \beta (\Delta T)^2$$

模型的分类

- 如果模型经过适当的数学变换或处理，可将本来是非线性的模型转变为线性模型，那么原来的模型就是本质线性的，否则是本质非线性的。

$$\ln Y = \ln A + \alpha_1 \ln L + \alpha_2 \ln K$$

增长率问题

假设 $x(t)$ 为时刻 t 该类生物的数量,

令 $b(t)$ 为每单位时间每单位种群该类生物增加的数量,
即瞬时出生率;

$d(t)$ 为瞬时死亡率,

即时刻 t 每单位时间每单位种群该类生物减少的数量,
因此在 $[t, t + \Delta(t)]$ 中, 该类生物种群的改变量为

$$x(t + \Delta(t)) - x(t) = \int_t^{t+\Delta t} [b(s) - d(s)]x(s)ds$$

记 $\mu(t) = b(t) - d(t)$, 称为该类生物种群数量的纯增长率
则

$$\frac{dx}{dt} = \mu(t)x$$



在很多情况下, μ 往往还与种群数量 x 有关, 即
 $\mu=\mu(t, x)$, 当 $\mu(t, x)$ 为已知函数时, 则

$$\frac{dx}{dt} = x\mu(t, x)$$

称为纯增长率问题的微分方程模型

- 马尔萨斯 (Malthus) 人口模型：英国人口统计学家马尔萨斯在担任牧师期间，查看了当地教堂100多年的人口出生统计资料，发现人口出生率是一个常数，1798年发表了《人口原理》一书，其中提出了Malthus人口模型：基本假设：在人口自然增长的过程中，净相对增长率（单位时间内人口的净增长数与人口总数之比）是常数，记为 r （生命系数）。

在 t 到 $t + \Delta t$ 这段时间内人口数量 $N(t)$ 的增长量为

$$N(t + \Delta t) - N(t) = rN(t)\Delta t$$

于是 $N(t)$ 满足微分方程

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

- 当人口总数不大，资源充裕时，人口总数指数增长是可能的，但当人口总数非常大时，环境所提供的条件只能供养一定数量的人口，所以Malthus模型在人口总数 $N(t)$ 很大时是不合理的。

荷兰生物学家Verhulst引入常数 N_m (环境最大容量) 表示自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数，并假设净相对增长率为

$$r \left(1 - \frac{N(t)}{N_m} \right)$$

按此假设，人口增长的方程应为

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{N_m} \right) N$$



对于某种耐用商品(如彩电、冰箱等)的销售量 $x(t)$ 也可以用logistic方程来描述,

即该商品的销售速度 $\frac{dx}{dt}$ 与销售量 x 和消费者

持有该种商品的饱和程度 $a - x$ 的乘积 $x(a - x)$ 成正比, 即

$$\frac{dx}{dt} = kx(a - x),$$

其中 $k > 0$ 为比例常数,

a 为消费者可能购买该种商品的最大数量
(饱和水平)

传染病传播问题

假设传染病传播期间地区总人数不变，为常数 n ，
在 t 时刻的健康人数为 $y(t)$ ，染病人数为 $x(t)$ ，因此有
 $x(t) + y(t) = n$

假设开始时染病人数为 x_0 ，

设单位时间内平均一个病人能传染的人数与当时的
健康人数成正比，比例常数为 k ，于是

$$\frac{dx(t)}{dt} = ky(t)x(t), x(0) = x_0$$



因此

$$\frac{dx}{dt} = kx(n-x), x(0) = x_0$$

称为SI模型,

即易感染者 (Susceptible) 和已感染者 (Infective) 模型

对无免疫的传染病如痢疾、伤风等, 病人治愈后会再次感染,
设单位时间治愈率为 μ , 则SI 模型修正为

$$\frac{dx}{dt} = kx(n-x) - \mu x, x(0) = x_0$$

称为SIS模型

对有很强免疫性的传染病如天花、流感等，病人治愈后不会再被感染。

设时刻 t 的愈后免疫人数为 $r(t)$,称为移出者（Removed），假设治愈率 l 为常数,

即 $\frac{dr(t)}{dt} = lx(t)$, 此时有 $x(t) + y(t) + r(t) = n$

因此

$\frac{dx(t)}{dt} = kxy(t)x(t) - \frac{dr(t)}{dt}$, 由上面三式消去 $r(t)$ 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kxy - lx, x(0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = -kxy, y(0) = n - x_0 \end{cases}$$

称为SIR模型

经典力学模型

弹簧上的物体运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - n \frac{dx}{dt} + mg$$

其中 n 为空气的阻尼系数,

且物体的空气阻力与物体的运动速度成正比,

g 为重力加速度

令 $y = x - \frac{mg}{k}$, 则
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n' \frac{dy}{dt} + k' y = 0$$

其中 $n' = \frac{n}{m}, k' = \frac{k}{m}$

若忽略掉由速度引起的空气阻力, 则

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k' y = 0$$
称为简谐方程

一般来说，弹簧的弹力并不与它的变形成正比，而是位移 y 的一个非线性函数 $g(y)$ ，于是简谐方程变为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + g(y) = 0$$

称为自由振动方程

同样，若阻尼系数 n' 不仅不为零，还与位移 y 有关，即 $n' = f(y)$ ，则运动方程变为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + f(y) \frac{dy}{dt} + g(y) = 0$$

即所谓的*Lienard*(勒让德) 方程



它的一个特殊情形就是van der Pol （范德波）方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

其中 $\mu > 0$ 是参数。这个方程是荷兰人van der Pol从无线电技术中提出的。

在一根长度为 l 的可略去质量且不可伸长的线上挂着一个质量为 m 的质点 M ，在重力作用下，在过摆动线固定点 O ，垂直于地面的平面上沿圆周运动。记 φ 为摆动线与垂线的夹角，定义逆时针方向为正。作用在 M 上的重力在圆周运动的法向分力为 $mg \cos \varphi$ ，它与摆线的张力大小相等，方向相反，重力在圆周运动的切向分力为 $mg \sin \varphi$ ，总是指向 $\varphi=0$

$$M \text{ 沿圆周的切向速度 } v = l \frac{d\varphi}{dt}$$

忽略空气阻力，根据牛顿第二定律得

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \varphi$$

即

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

显然是一个自由振动方程。当摆动角很小时(微小振动)，

注意到 $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$ ，因此 $\sin \varphi$ 可以用 φ 来近似

从而得到摆动角很小时的线性近似方程

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

如果我们假设摆是在一个粘性介质中摆动，那么沿着摆的运动方向就存在一个与速度 v 成比例的阻力，如果阻力系数是 μ ，则摆的运动方程变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

当要确定摆的一个特定运动时，应该给出摆的初始状态：

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=t_0} = \omega_0$$

模型的分类

- 定常动态系统与时变动态系统
- 系统的参数不随时间改变，则称为定常系统或时不变系统，用定常微分方程描述。特别地，一个不含外部输入的（齐次）定常微分方程也称为自治（驻定）的。

$$\frac{dy}{dt} = f(y(t)), y \in D \subseteq R^n$$

- 时不变特性：在同样的起始状态之下，系统的响应与激励施加于系统的时刻无关

模型的分类

- 时不变特性：在同样的起始状态之下，系统的响应与激励施加于系统的时刻无关

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y(t), e(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

记解为 $r_1(t)$

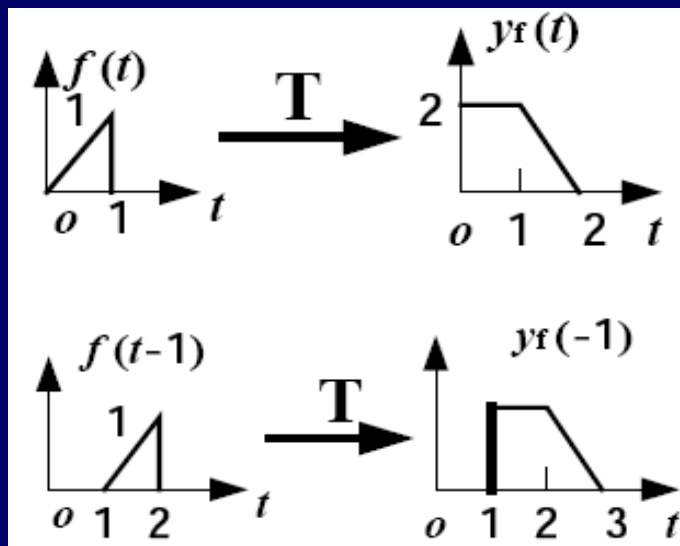


$$r_2(t) = r_1(t - \tau), t \geq \tau$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y(t), e(t - \tau)) \\ y(\tau) = y_0 \end{cases}$$

记解为 $r_2(t)$

- 定常系统是时变系统的近似。当系统参数的变化速度远远小于状态的变化速度，在考察问题的时间范围内，参数可以近似为时不变的。



模型的分类

- 确定性模型与随机模型
 - 确定性模型所描述的系统，当系统的初始状态确定后，系统的输出也是唯一确定的。
 - 随机模型所描述的系统，即使系统初始状态确定了，系统的输出仍然不是确定的
 - 随机模型与确定性模型是相对概念

随机系统模型

考虑一个控制电机角加速度的控制系统，角位置的导数是角速度。
简化的电机模型为

$$\begin{cases} \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \\ \frac{d\omega(t)}{dt} = u(t) + \xi(t) \end{cases}$$

其中加速度噪声 $\xi(t)$ 由加速度的一些不确定性、电机轴偏心以及负载干扰作用等因素构成。

若量测的是电机角位置，则

$y(t) = \theta(t) + v(t)$, $v(t)$ 是量测噪声

令 $x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$, 则系统可以写为一阶微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = [1, 0]x(t) + v(t) \end{cases}$$

状态方程
$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta(t)}{dt} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi(t) \end{bmatrix}$$

也可以写成一个高阶微分方程

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = u(t) + \xi(t)$$

模型的建立：白箱方法（机理模型）

- 从物理、力学等已确定的自然规律出发，考虑其主要因素，忽略次要因素，提炼出状态变量，包括自变量和因变量（未知函数），然后应用相应的规律和实际情况，构造出相应的代数方程或微分方程

模型的建立：灰箱方法（机理+数据）

- 根据已发现的数据，通过分析数据的相互关系加上合理的逻辑推理，寻找出相关规律建立相应的模型（可能含有未知参数），例如人口增长的Malthus模型和logistic模型，再通过数据辨识参数，最后通过新数据来验证模型的有效性。


- 马尔萨斯 (Malthus) 人口模型：英国人口统计学家马尔萨斯在担任牧师期间，查看了当地教堂100多年的人口出生统计资料，发现人口出生率是一个常数，1778年发表了《人口原理》一书，其中提出了Malthus人口模型：基本假设：在人口自然增长的过程中，净相对增长率（单位时间内人口的净增长数与人口总数之比）是常数，记为 r （生命系数）。

在 t 到 $t + \Delta t$ 这段时间内人口数量 $N(t)$ 的增长量为

$$N(t + \Delta t) - N(t) = rN(t)\Delta t$$

于是 $N(t)$ 满足微分方程

$$\frac{dN}{dt} = rN$$



作业：给定一组数据 $N(t_0), N(t_1), N(t_2), \dots, N(t_m)$,
如何确定模型参数 r ? 试给出一个确定模型参数 r 的算法,
并给出算法可以确定 r 的条件。

- 当人口总数不大，资源充裕时，人口总数指数增长是可能的，但当人口总数非常大时，环境所提供的条件只能供养一定数量的人口，所以Malthus模型在人口总数 $N(t)$ 很大时是不合理的。

荷兰生物学家Verhulst引入常数 N_m (环境最大容量) 表示自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数，并假设净相对增长率为

$$r \left(1 - \frac{N(t)}{N_m} \right)$$

按此假设，人口增长的方程应为

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{N_m} \right) N$$

- 完全无关、机理上完全不同的模型可以由相同类型的微分方程来描述，例如
 - RL电路模型和Malthus人口增长模型
 - RLC电路模型与弹簧阻尼机械位移系统
- 可以基于类比的思想，用一种系统模拟另外一种机理完全不同的系统，例如用电路来模拟某些力学系统或机械系统

模型的分类

- 有输入（控制、决策）变量的模型和无输入（控制、决策）变量的模型

受迫振动模型

考虑摆在粘性介质中做微小振动，如果沿着摆的运动方向恒有一个外力 $F(t)$ 作用于它，这时摆的运动称为强迫微小振动，其方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \varphi = \frac{1}{ml} F(t)$$

有输入（控制、决策）变量的模型

- 有优化指标的模型和无优化指标的模型

- 静态最优化：条件极值、线性规划、非线性规划
- 动态最优化：最优控制（动态规划）

条件极值(非线性规划)

$$\begin{cases} \min_{X \in D} f(X) \\ D = \{X = [x_1, \dots, x_n] \mid h_i(X) = 0, i = 1, 2, \dots, m; g_j(X) \geq 0, j = 1, 2, \dots, l\} \end{cases}$$

最优控制示例

● 飞行器最省燃料着陆问题：

将飞行器简化成一个内部带控制器的物体 M ，其质量为1。常重力加速度 g 垂直向下作用到 M 的质心上，控制器可提供一作用于 M 质心上的使其垂直上升或下降的加速度 $u(t)$ ，记 x 为 M 的质心距地面的高度，地面上为正，地面下为负。加速度 $u(t)$ 向上为正，向下为负。由牛顿第二定律直接得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = u(t) - g$$

设初始位置为 $x(t_0) = x_1^0$ ，初始速度 $\dot{x}(t_0) = x_2^0$

飞行器的燃料消耗率与作用力绝对值成正比。
于是该问题可以叙述为寻找控制 $u(t)$,
使得存在终端时刻 t_f , 满足

$x(t_f) = 0, \dot{x}(t_f) = 0, x(t) \geq 0, t \in [t_0, t_f)$, 且总燃料消耗

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \text{ 最小}$$

作业

- 师生之间的学习过程，本质上是一个使系统误差趋于最小化的过程，试借助一般反馈控制系统的框图模型，构造学习过程的反馈模型，画出系统框图，并确定该系统中的各个模块。

控制系统的时域模型

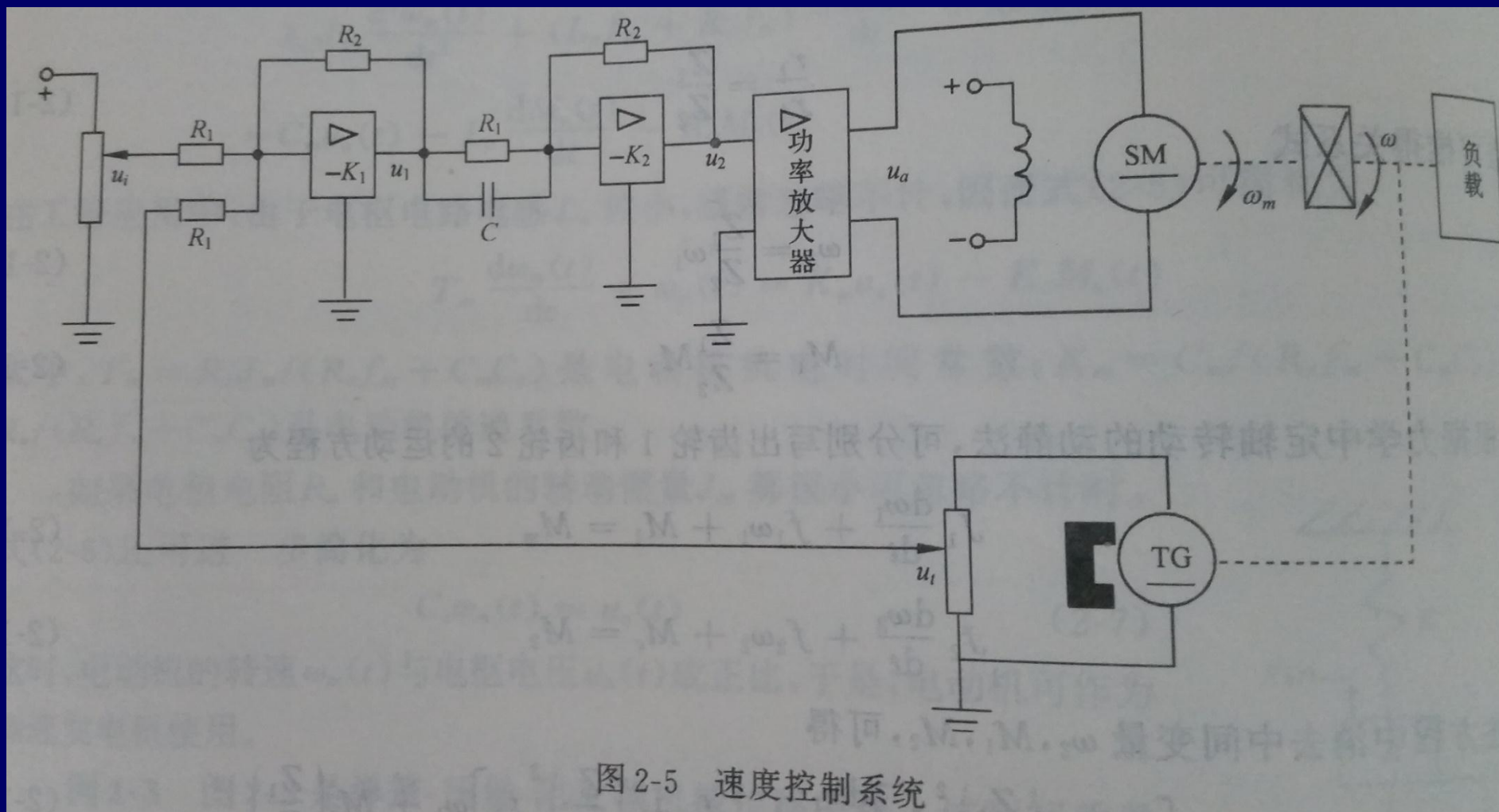


图 2-5 速度控制系统

运算放大器I:

$$u_1 = K_1(u_i - u_t)$$

$$K_1 = R_2 / R_1$$

运算放大器II(RC校正网络):

$$u_2 = K_2 \left(\tau \frac{du_1}{dt} + u_1 \right)$$

$$K_2 = R_2 / R_1$$

$$\tau = R_1 C$$

功率放大器:

$$u_a = K_3 u_2$$

$$K_1 = R_2 / R_1$$

直流电动机:

$$T_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_m(t) = K_m u_a(t) - K_c M_c(t)$$

其中 T_m , K_m , K_c 及 M_c 均是考虑齿轮系和负载后, 折算到电动机轴上的等效值。

齿轮系:

$$\omega = \frac{1}{\lambda} \omega_m$$

测速发电机:

$$u_t = K_t \omega$$

联立，消去中间变量 u_t, u_1, u_2, u_a 及 ω_m ，得到

$$\overline{T}_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \overline{K}_g \frac{du_i(t)}{dt} + K_g u_i(t) - \overline{K}_c M_c(t)$$

其中，

$$\overline{T}_m = \frac{\lambda T_m + K_1 K_2 K_3 K_m K_t \tau}{\lambda + K_1 K_2 K_3 K_m K_t}$$

$$\overline{K}_g = \frac{K_1 K_2 K_3 K_m \tau}{\lambda + K_1 K_2 K_3 K_m K_t}$$

$$K_g = \frac{K_1 K_2 K_3 K_m}{\lambda + K_1 K_2 K_3 K_m K_t}$$

$$\overline{K}_c = \frac{K_c}{\lambda + K_1 K_2 K_3 K_m K_t}$$

基本步骤

- 由系统原理图画出生成系统方块图
- 分别写出各个原件的微分方程
- 消去中间变量得到描述系统输出量与输入量关系的微分方程
 - 信号传递的单向性：前一个原件的输出是后一个原件的输入，一级一级单向传递
 - 后级原件对前级原件的负载效应

一般的，一个连续时间SISO线性定常系统可以表示

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) =$$

$$b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

$$n \geq m$$

用算子符号表示微分方程

如果将微分和积分运算用如下算子符号表示:

$$p = \frac{d}{dt}, \frac{1}{p} = \int_{-\infty}^t () d\tau$$

则高阶时域模型可以表示为

$$a_0 p^n y(t) + a_1 p^{n-1} y(t) + \dots a_n y(t) = b_0 p^m u(t) + b_1 p^{m-1} u(t) + \dots + b_m u(t)$$

或简化为

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) u(t)$$

若记

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$$

$$N(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m$$

分别表示两个算子多项式，则有

$$D(p)[y(t)] = N(p)[u(t)]$$

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ 称为系统的传输算子}$$

动态系统的状态空间模型

- 系统的状态是指系统的一组变量，只要知道系统的当前取值情况如输入信号和描述系统动态特性的方程，就能确定系统未来的状态和输出，而与系统过去的状态和输入无关。
- 系统在 t 时刻的状态是系统在 t 时刻具有的最少量的一组完备信息量或数据，他和自 t 时刻的输入一起唯一决定所有 t 时刻以后的全部系统行为。
- 系统的状态体现了历史输入信息
- 系统状态变量的选择不是唯一的

机械位移系统（汽车减震装置）

选择阻尼器的位置 $x(t)$

和速度 $v(t)$ 作为状态变量

则

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

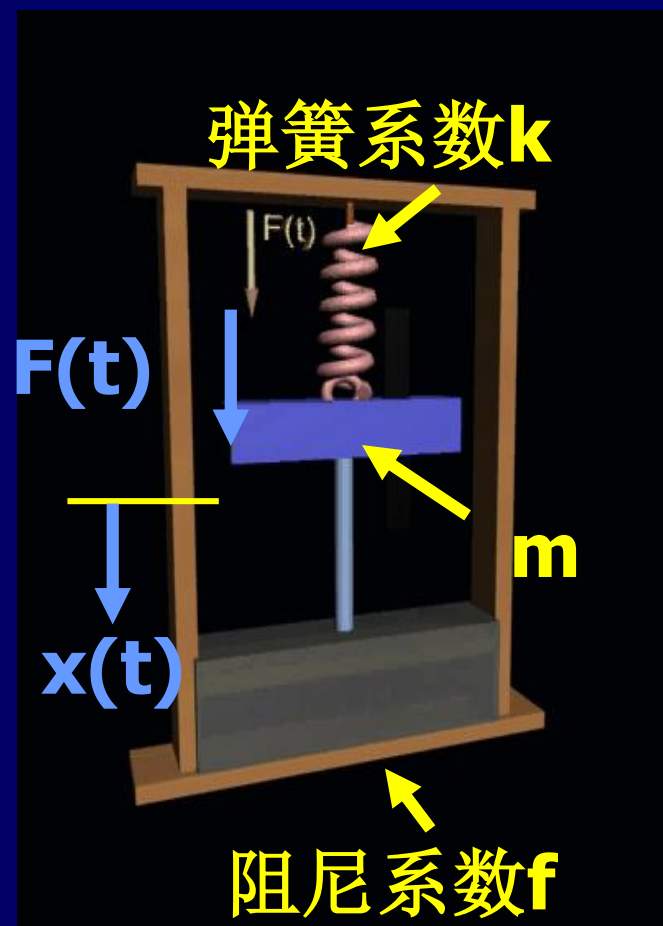
$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(t) - kx(t) - fv(t), \text{因此}$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = v(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{f}{m}v(t) + \frac{1}{m}F(t) \end{cases}$$

阻尼器的位置可以量测： $y(t) = x(t)$

初始位置 $x(t_0)$, $v(t_0)$ 给定



RLC电路

选取电流和电容电压作为状态变量

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \left[\int_0^t i(\tau) d\tau + C_0 \right] + Ri(t) = u_r(t)$$

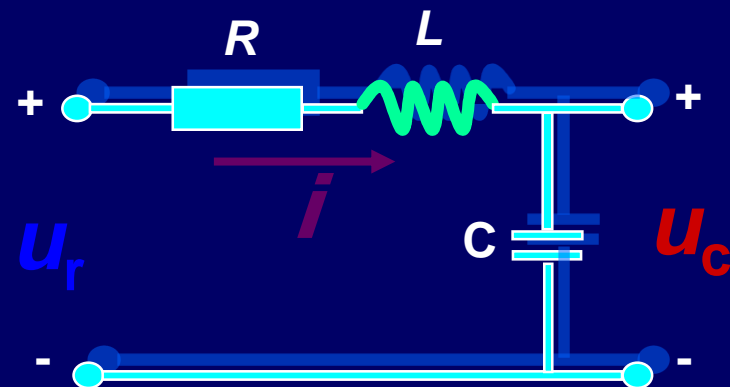
$$u_c(t) = \frac{1}{C} \left[\int_0^t i(\tau) d\tau + C_0 \right]$$



$$\begin{cases} \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{L} u_c(t) - \frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} u_r(t) \end{cases}$$

$$y(t) = u_c(t)$$

初始 $u_c(t_0), i(t_0)$ 给定



线性微分方程组的向量形式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

其中 $a_{ij}(t), i, j = 1, 2, \dots, n$ 和

$f_l(t), l = 1, 2, \dots, n$ 是 (a, b) 上的连续函数

我们引进如下记号

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$



从而可将一阶线性微分方程组写成向量形式

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t)$$

更一般的，一个时变非线性集中参数的确定性控制系统可以写成

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^r$$

$$f(\cdot, \cdot, \cdot) : R^n \times R^m \times R \rightarrow R^n$$

$$h(\cdot, \cdot) : R^n \times R^m \times R \rightarrow R^r$$

一个时变线性系统可以表示为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^r$$

若 $u(t)$ 为已知的时间的函数，试写出此柯西问题的解的形式。

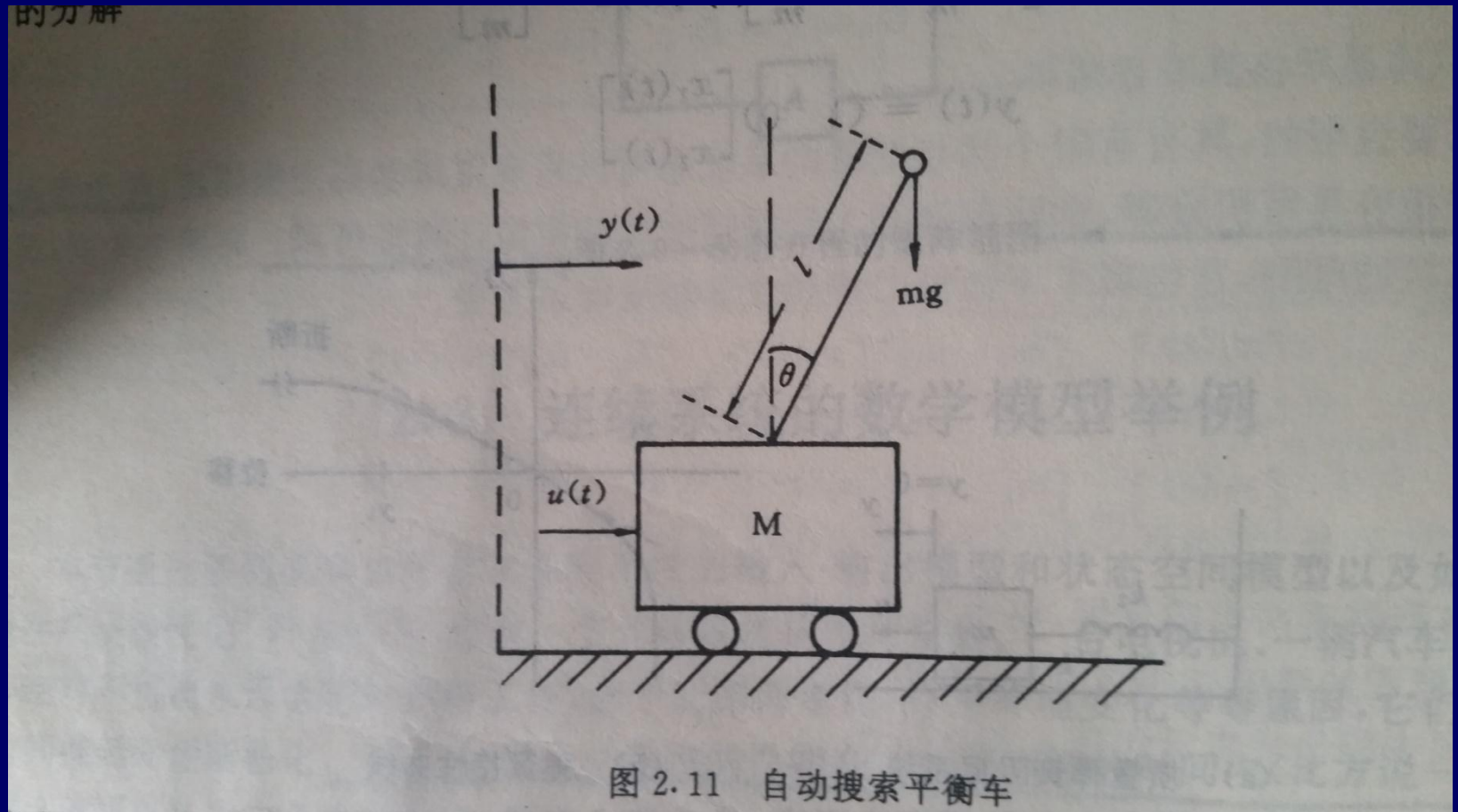
一个时不变线性系统可以表示为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^r$$

若 $u(t)$ 为已知的时间的函数，试写出此柯西问题的解的解析表达式。

自动搜索平衡车状态空间模型



- 用小车及车上的倒立摆模拟控制火箭垂直起飞的装置。外力 $u(t)$ 的目的是使摆保持与车身垂直。火箭起飞阶段必须保持与地面垂直，待到到达指定速度和高度后才开始转弯。
- 若火箭在起飞阶段受侧风干扰，火箭轴线偏离铅垂线一个小角度，在重力作用下偏离的角度会越来越大最终导致发射失败。
- 为防止失败，在火箭轴线刚偏离垂直位置时，应启动发动机产生横向力校正火箭位置使其与地面垂直。

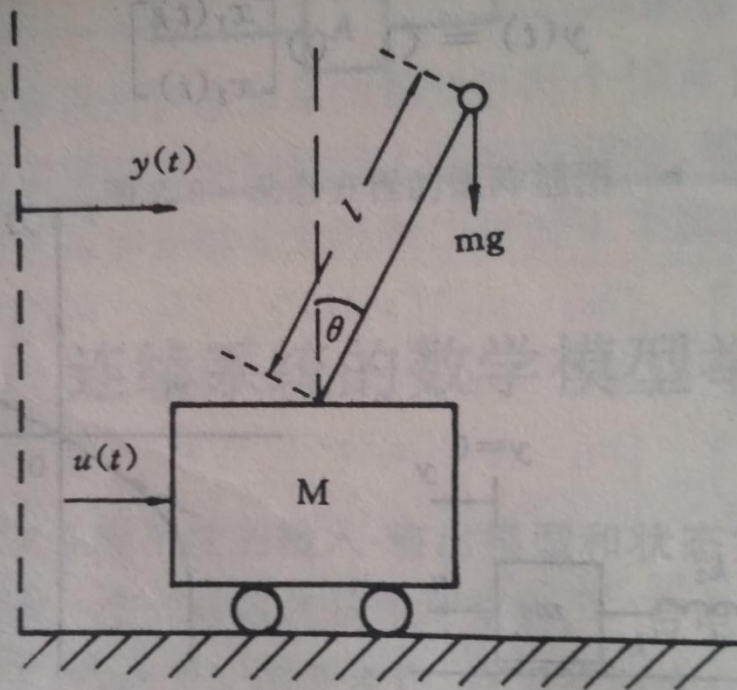


图 2.11 自动搜索平衡车

设车与摆只在平面内运动，并忽略杆的质量、电机本身的惯性、摩擦、风力等因素，设摆球的质量为 m ，车质量为 M ，摆长为 l

令 $H(t)$ 和 $V(t)$ 分别是小车通过铰链作用于杆也就是作用于摆球的水平分力和垂直分力，因此杆通过铰链作用于车的反作用力为 $-H(t)$ 和 $-V(t)$ 。应用牛顿定律得到

1. 小车水平方向

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = u(t) - H(t)$$

2. 摆水平方向

$$\begin{aligned} H(t) &= m \frac{d^2 (y + l \sin \theta)}{dt^2} \\ &= m \frac{d^2 y}{dt^2} + ml \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - ml \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

3. 摆垂直方向

$$\begin{aligned} V(t) - mg &= m \frac{d^2(l \cos \theta)}{dt^2} \\ &= -ml \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - ml \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

4. 力的分解

$$\frac{H(t)}{V(t)} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

把2代入1得

$$(M + m) \frac{d^2 y}{dt^2} + ml \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - ml \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = u(t)$$

把2、3代入4得

$$\frac{\frac{d^2 y}{dt^2} + l \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - l \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}{g - l \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - l \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

该系统的目的在于控制摆与地面垂直，可以认为

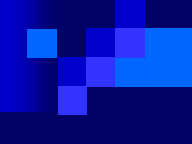
$\theta(t), \frac{d\theta(t)}{dt}$ 都接近于零，在此假设下，取

$\sin \theta(t) \approx \theta(t), \cos \theta(t) \approx 1$, 同时略去比 $\theta(t), \frac{d\theta(t)}{dt}$ 更高阶的

无穷小量，如 $\theta^2(t), \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2, \theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}, \theta(t)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$ 等，

经过如此线性化得到

$$\begin{cases} (M+m)\frac{d^2y}{dt^2} + ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = u(t) \\ \frac{d^2y}{dt^2} + l\frac{d^2\theta}{dt^2} - g\theta = 0 \end{cases}$$


$$\text{令 } x_1 = y, x_2 = \frac{dy}{dt}, x_3 = \theta, x_4 = \frac{d\theta}{dt}$$

因此

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{mg}{M}x_3 + \frac{1}{M}u \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = \frac{(M+m)g}{Ml}x_3 - \frac{1}{Ml}u \end{cases}$$

向量形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = [1, 0, 0, 0]x(t) \end{cases}$$

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix}$$

作业

- 系统的状态变量选择既然不是唯一的，那么两组不同的状态变量间应该满足什么关系？试举例说明。

非线性系统的线性化

- 所有的物理原件都是非线性的，只是在特定的工作范围内呈现线性特性。
 - 弹簧的刚度与形变有关，其弹性系数是位移的函数
 - 电阻、电容和电感的参数值与流经它们的电流有关，而非常数
 - 电动机本身存在摩擦、死区等非线性因素
- “小信号”模型：自动控制系统通常处于平衡状态工作，这时被控量与给定值保持一致，这时控制系统也不进行工作，一旦被控量偏离给定值产生偏差，控制系统开始工作以减小偏差，因此控制系统被控量的偏差一般不会很大，只是“小偏差”

$$g(x): R^n \rightarrow R$$

$$g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + (\nabla_x g(x))^T|_{x_0} \Delta x + \frac{1}{2!} \Delta x^T \frac{d^2 g(x)}{dx^2} |_{x_0} \Delta x + o(\|\Delta x\|^2)$$

$$\nabla_x g(x) = \left[\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right]^T$$

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

一次近似表达或增量近似式为

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) \approx (\nabla_x g(x))^T \big|_{x_0} \Delta x$$

一般的，假设一个非线性系统的动态方程为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

假设在额定的输入 $u^*(t)$ 激励下产生的额定状态和输出响应分别为 $x^*(t)$ 和 $y^*(t)$,即

$$\begin{cases} \frac{dx^*(t)}{dt} = f(x^*(t), u^*(t), t) \\ y^*(t) = h(x^*(t), u^*(t), t) \end{cases}$$

当输入有增量 $\Delta u(t)$ 时, 相应的状态和输出为

$$x(t) = x^*(t) + \Delta x(t),$$

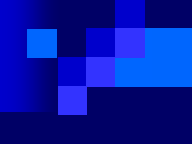
$$y(t) = y^*(t) + \Delta y(t), \text{ 满足}$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x^*(t) + \Delta x(t), u^*(t) + \Delta u(t), t) \\ y(t) = h(x^*(t) + \Delta x(t), u^*(t) + \Delta u(t), t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x(t)}{dt} = f(x^*(t) + \Delta x(t), u^*(t) + \Delta u(t), t) - f(x^*(t), u^*(t), t) \\ \Delta y(t) = h(x^*(t) + \Delta x(t), u^*(t) + \Delta u(t), t) - h(x^*(t), u^*(t), t) \end{cases}$$

从而得到一阶近似系统

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x(t)}{dt} = J_x^f \big|_{x^*(t), u^*(t)} \Delta x(t) + J_u^f \big|_{x^*(t), u^*(t)} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) = J_x^h \big|_{x^*(t), u^*(t)} \Delta x(t) + J_u^h \big|_{x^*(t), u^*(t)} \Delta u(t) \end{cases}$$



$$J_x^f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$J_u^f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

$$J_x^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial h_r}{\partial x_1} & \frac{\partial h_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{r \times n}$$

$$J_u^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial u_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial h_r}{\partial u_1} & \frac{\partial h_r}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{r \times m}$$

控制系统的复频域模型

Laplace 变换

若对 $f: R \rightarrow R$, 积分

$\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ 对于一些复数 s 存在, 则称

$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换,

若存在 $M > 0, \sigma_0 > 0$, 使得 $|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$, 则

$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ 时存在, σ_0 称为

收敛横坐标。此时

$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, c > \sigma_0$ 称为 Laplace 反变换

拉普拉斯变换的历史

- 英国工程师赫维赛德 (O. Heaviside, 1850-1925) 发明了“运算法”（算子法）解决电工程计算中的一些基本问题，但缺乏严密的数学论证。
- 后来在法国数学家 P. S. Laplace (1749-1825) 的著作中为运算法找到了可靠的数学依据，重新给与严格的数学定义，取名为拉普拉斯变换。
- 在相当长的时期内，人们几乎无法将电路理论和拉普拉斯变换分开讨论。

表 4-1 一些常用函数的拉氏变换

序 号	$f(t)$ ($t > 0$)	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1	冲激 $\delta(t)$	1
2	阶跃 $u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4	t^n (n 是正整数)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
8	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
9	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
10	$t^n e^{-at}$ (n 是正整数)	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
11	$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
12	$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
13	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
14	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

表 4-2 拉氏变换性质(定理)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s), \mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$$

2-1-1

序 号	名 称	结 论
1	线性(叠加)	$\mathcal{L}[K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)] = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s)$
2	对 t 微分	$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0)$
3	对 t 积分	$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{\tau} f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$
4	延时(时域平移)	$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-s t_0} F(s)$

序 号	名 称	
5	s 域平移	$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}] = F(s+a)$
6	尺度变换	$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
7	初 值	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
8	终 值	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
9	卷 积	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
10	相 乘	$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(p)F_2(s-p)dp = \mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)]$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

用Laplace 变换求解SISO系统

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) =$$

$$b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

$$n \geq m$$

$$y(0_-) = y_0, y'(0_-) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0_-) = y_0^{(n-1)},$$

$$u(0_-) = 0, u'(0_-) = 0, \dots, u^{(n-1)}(0) = 0$$

$$a_0 [s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} y'_0 - \dots - s y_0^{(n-2)} - y_0^{(n-1)}]$$

$$+ a_1 [s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y_0 - \dots - y_0^{(n-2)}] + \dots + a_{n-1} [s Y(s) - y_0] + a_n Y(s)$$

$$= (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) U(s)$$

用Laplace 变换求解SISO系统

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) =$$

$$b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

$$n \geq m$$

$$y(0_-) = y_0, y'(0_-) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0_-) = y_0^{(n-1)},$$

$$u(0_-) = 0, u'(0_-) = 0, \dots, u^{(n-1)}(0) = 0$$

$$a_0 [s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} y'_0 - \dots - s y_0^{(n-2)} - y_0^{(n-1)}]$$

$$+ a_1 [s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y_0 - \dots - y_0^{(n-2)}] + \dots + a_{n-1} [s Y(s) - y_0] + a_n Y(s)$$

$$= (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) U(s)$$

即

$$\begin{aligned} & (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots a_{n-1} s + a_n) Y(s) \\ &= (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) U(s) + (a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots a_{n-1}) y_0 \\ &+ (a_0 s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \dots a_{n-2}) y_0' + \dots + a_0 y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

或者

$$D(s)Y(s) = N(s)U(s) + I(s)$$

因此

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} U(s) + \frac{1}{D(s)} I(s)$$

通过对 $\frac{N(s)}{D(s)} U(s) + \frac{1}{D(s)} I(s)$ 作 *Laplacian* 反变换即可得到响应 $y(t)$

SISO线性定常系统的传递函数

设一个连续时间SISO线性定常系统表示为

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) =$$
$$b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

其传递函数 $G(s)$ 定义为零初始条件下
输出信号的Laplace变换与输入信号的
Laplace变换之比

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$K^* = \frac{b_0}{a_0}$ 称为高频增益或根轨迹增益

若不含 $p_j = 0$ 极点

$$G(s) = \frac{b_m (\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\xi\tau_2 s + 1) \dots (\tau_i s + 1)}{a_n (T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi\tau_2 s + 1) \dots (T_j s + 1)}$$

$$K = \frac{b_m}{a_n} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_i)} \text{ 称为直流增益、稳态增益或低频增益}$$

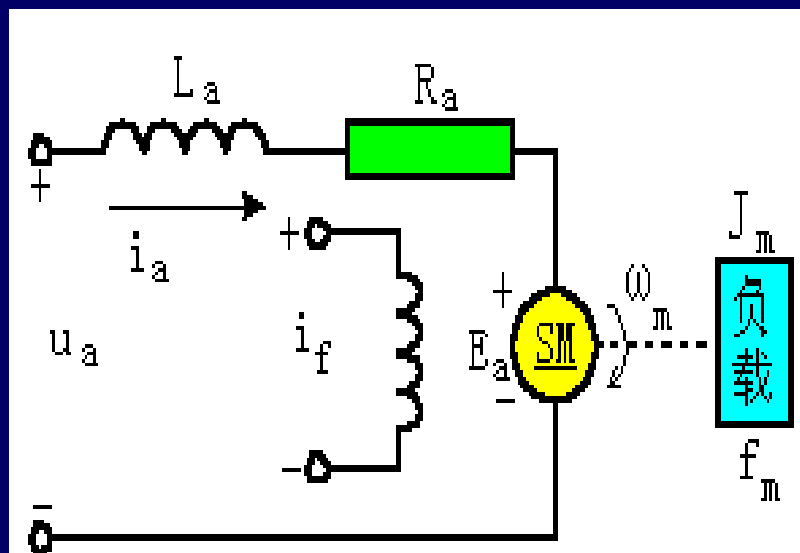
若含 $p_j = 0$ 极点

$$G(s) = \frac{K (\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\xi\tau_2 s + 1) \dots (\tau_i s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi\tau_2 s + 1) \dots (T_j s + 1)}, K \text{ 称为增益}$$

分别求电枢控制直流电机

$$L_a J_m \frac{d^2 \omega_m(t)}{dt^2} + (L_a f_m + R_a J_m) \frac{d\omega_m(t)}{dt} + (R_a f_m + C_m C_e) \omega_m(t) \\ = C_m u_a(t) - L_a \frac{dM_c(t)}{dt} - R_a M_c(t)$$

$u_a(t)$ 到 $\omega_m(t)$ 和 $M_c(t)$ 到 $\omega_m(t)$ 的传递函数



MIMO线性定常系统的 传递函数矩阵

一个时不变线性系统可以表示为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^r$ 。假设 $x(0) = 0$, 对上式两边做拉氏变换得

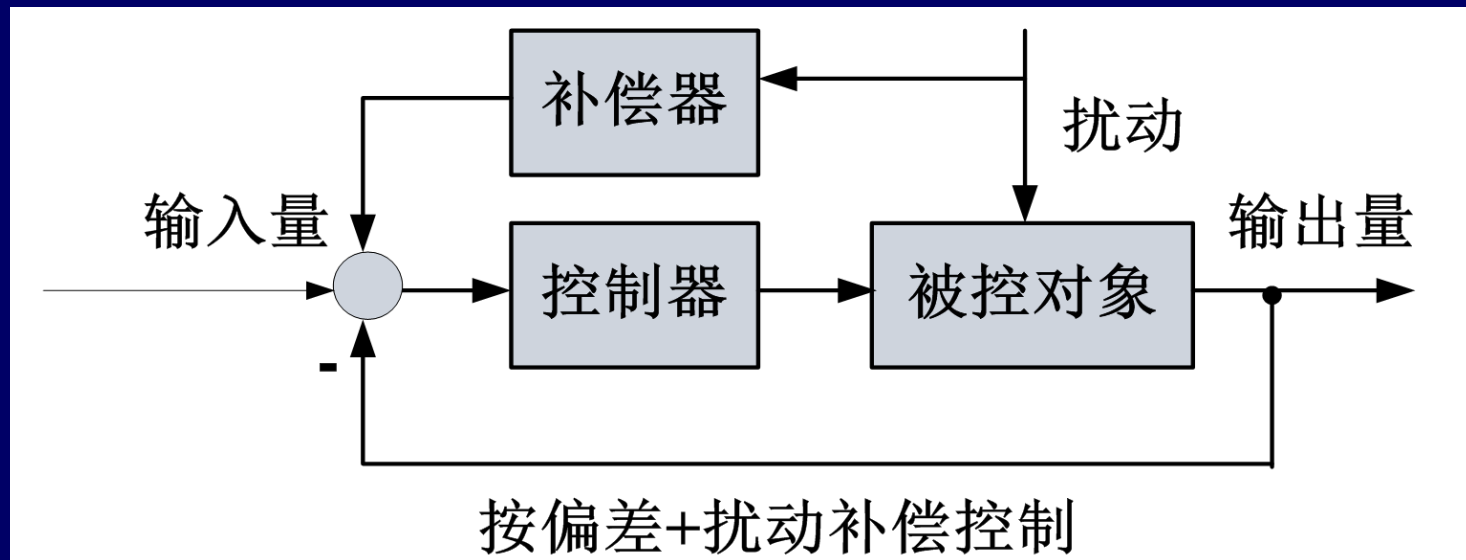
$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \text{得到}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D]U(s)$$

$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$ 为系统 (D, C, A, B) 的传递函数矩阵。

控制系统的结构图

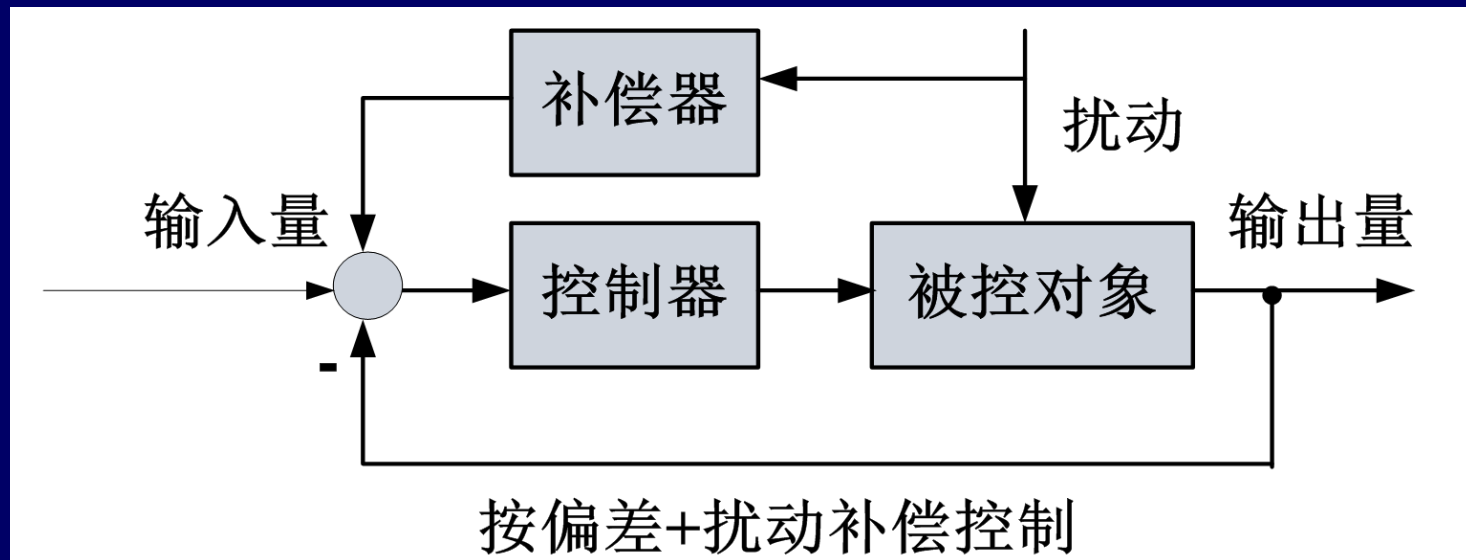


➤控制系统的结构图是描述系统元部件（子系统）之间信号传递关系的数学图形。由多个对信号进行单向运算的方框和一些信号流线组成。

四种基本单元

- 信号线：带有箭头的直线，箭头表示信号的流向，通常在直线旁标记信号的时间函数或象函数。
 - 引出点（测量点）：引出点表示信号引出或测量的位置，从同一位置引出的信号在数值和性质方面完全相同。
 - 比较点（综合点）：比较点表示对两个或两个以上的信号进行加减运算。“+”表示相加，“-”表示相减。
 - 方框（环节）：表示对信号进行数学变换，对线性定常环节，通常写入元部件或系统的传递函数，这时方框的输出变量等于输入变量和传递函数的乘积。
- 结构图是原理图和数学方程的结合。
 - 结构图中的环节与实际系统的元部件并非一一对应。
 - 利用结构图可以方便的求出闭环系统的传递函数。

闭环系统的传递函数



试分别求出从输入量和扰动量到输出量的传递函数，其中加性扰动作用在被控对象输入端。

1. 改写为结构图形式。
2. 写出每个环节的传递函数。
3. 求出闭环传递函数。

离散时间系统的状态空间模型

- 工程采样控制系统：被控对象的输入输出信号随时间连续变化，但采用数字传感器、数字控制器。
- 经济统计、计划、管理和调控一般以年、季、月、日等为时间计量单位。

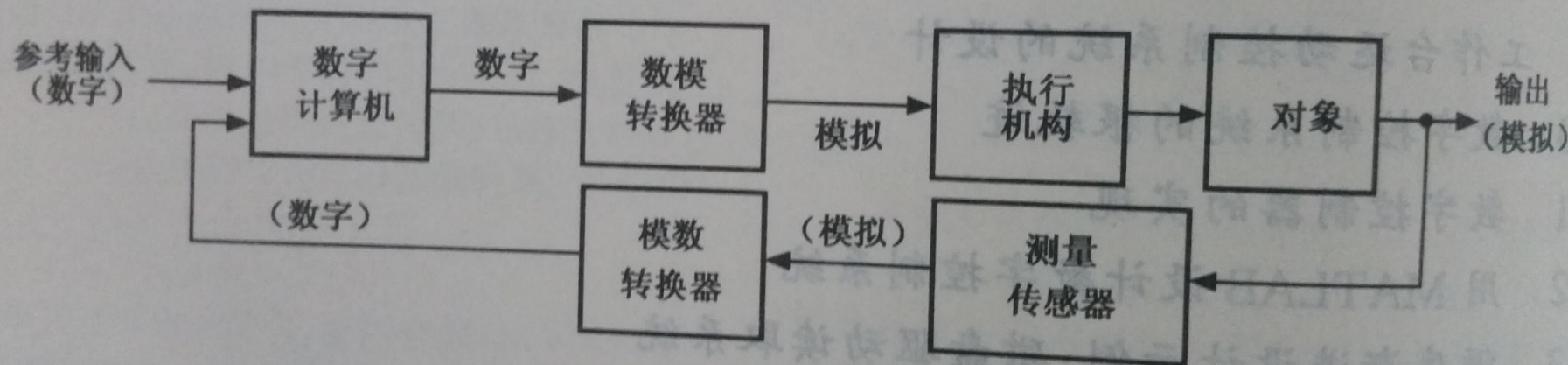


图 13.1 计算机控制系统(包括信号转换器)框图,图中标明了数字或模拟信号

宏观经济模型-静态凯恩斯模型

著名经济学家凯恩斯(*Keynes*)建立了如下的宏观经济模型

$$\begin{cases} Y = C + I \\ C = a + bY, a \geq 0, 0 < b < 1 \end{cases}$$

其中, Y 为国民收入, C 为总消费水平, I 为总投资水平, a 为基本消费水平, b 为边际消费倾向。将消费函数代入平衡条件可得

$$Y = \frac{1}{1-b} I + \frac{1}{1-b} a$$

萨缪尔森乘数加速模型

1970年诺贝尔经济学奖获得者萨缪尔森(Samuelson)对凯恩斯宏观经济模型进行了三点改进:

1. 将总消费、总投资中的公共消费、公共投资区分出来, 作为新的经济总量即政府购买(支出), 引入平衡条件。
2. 将现期个人消费改为上期国民收入的函数, 而不是现期收入的函数。
3. 增加了投资函数, 假定现期个人投资由消费增量来决定。

$$\begin{cases} Y_t = C_t + I_t + G_t \\ C_t = a + bY_{t-1} \\ I_t = q + k(C_t - C_{t-1}) \end{cases}$$

其中, Y_t 为 t 期国民收入, C_t 为 t 期个人消费总额, I_t 为 t 期个人投资总额, G_t 为 t 期政府购买支出。

a 为基本消费水平, b 为边际消费倾向, k 为投资加速数。

萨缪尔森乘数加速模型

若令 $x_1(t) = C_t, x_2(t) = I_t$

$u(t) = G_t$ --- 控制（输入）变量

$y(t) = Y_t$ --- 输出变量，则可得如下状态空间模型

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} b & b \\ k(b-1) & kb \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b \\ kb \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) = [1, 1] x(t) + u(t) \end{cases}$$

其中 $w(t) = [a, q]^T$



$$Y_t - (1+k)bY_{t-1} + kbY_{t-2} = G_t + a + q$$

定义 z^{-1} 为后移算子则可以写为算子形式:

$$[1 - (1+k)bz^{-1} + kbz^{-2}]Y_t = G_t + a + q$$

对离散时间系统，状态方程的一般形式为

$$x((k+1)T_s) = f(x(kT_s), u(kT_s), k)$$

T_s 为采样周期，有时省略。

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases}$$

称为离散时间线性系统

连续时间控制系统的动态响应

对连续时间线性系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases}$$

若初始状态 $x(t_0)$ 给定, 则

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$\Phi(t, t_0)$ 称为状态转移矩阵, 他是下列矩阵微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases} \frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0), \\ \Phi(t_0, t_0) = I_n, \end{cases}$$

离散时间控制系统的动态响应

对离散时间线性系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k), \end{cases}$$

定义 $\Phi(k, k_0) = \prod_{j=k_0}^{k-1} A(j)$ 为系统的状态转移矩阵

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1)B(j)u(j)$$

$$y(k) = C(k)\Phi(k, k_0)x(k_0) + C(k) \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1)B(j)u(j) + D(k)u(k)$$

连续时间系统的采样化

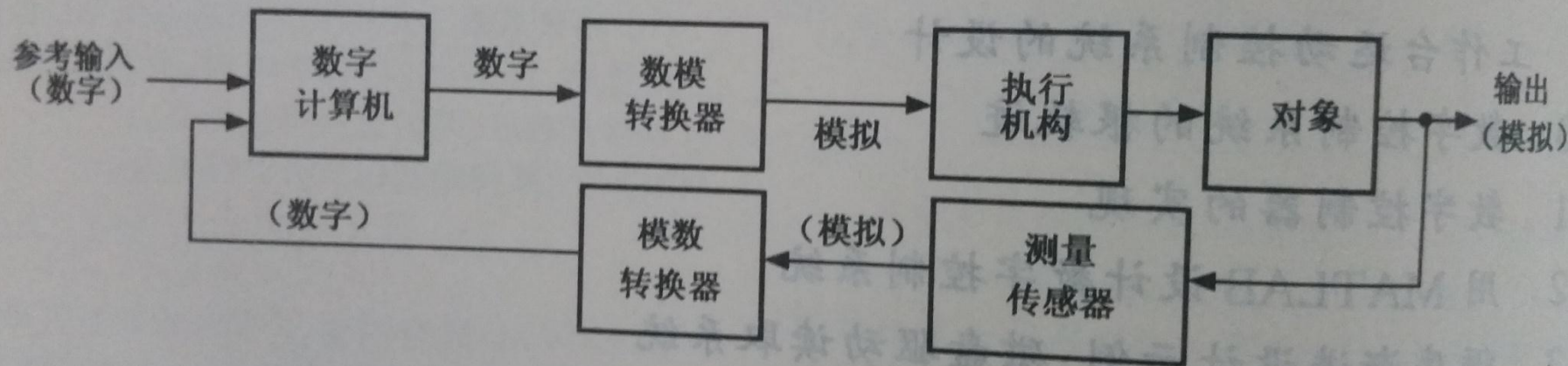


图 13.1 计算机控制系统(包括信号转换器)框图,图中标明了数字或模拟信号

设计算机控制系统的采样周期为 T , 那么在第 k 个采样周期 $u(t)$ 取常值。即在时间区间 $[kT, (k+1)T)$ 上, $u(t) = u(kT)$. 记 $u(k) = u(kT)$, $x(k) = x(kT)$, 则

$$x(k+1) = \Phi((k+1)T, kT)x(k) + \left[\int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau)B(\tau)d\tau \right] u(k)$$

$$\text{令 } F(k) = \Phi((k+1)T, kT), G(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau)B(\tau)d\tau$$

连续时间线性定常 系统的采样化

$$x(k+1) = \Phi((k+1)T, kT)x(k) + \left[\int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau)B(\tau)d\tau \right] u(k)$$

$$\text{令 } F(k) = \Phi((k+1)T, kT), G(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau)B(\tau)d\tau$$

$$F(k) = e^{A[(k+1)T - kT]} = e^{AT}$$

$$G(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T - \tau]} d\tau B, \text{ 令 } \tau' = (k+1)T - \tau, \text{ 则 } d\tau = -d\tau'$$

$$G(k) = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B$$

作业

- 什么是传递函数的极点？什么叫系统极点？系统的微分方程是否由其传递函数唯一确定？
- 如何计算Laplace反变换？传递函数的Laplace反变换的物理意义是什么？
- 如何计算 $(sI - A)^{-1}$ 的Laplace反变换，其物理意义是什么？