现代控制理论

李　韬

tli@math.ecnu.edu.cn；sixumuzi@163.com

个人主页：http://faculty.ecnu.edu.cn/s/3601/main.jspy

华东师范大学数学科学学院

2019年4月-2019年6月

第三章
控制系统的性质分析
3.1 动态系统平衡解的稳定性

研究稳定性的意义

- 控制系统在实际运行过程中总会受到各种内外扰动而偏离原来的平衡状态。
- 如果系统的平衡状态不稳定，则扰动消失后系统也无法回复到原先的平衡状态，甚至状态出现发散。

全局稳定与局部稳定

- 如果系统受到扰动作用偏离了原平衡状态，无论扰动引起的初始偏差有多大，当扰动消失后，系统都能够以足够的精确度恢复到原平衡状态，则称为全局稳定的平衡状态，所有平衡状态都稳定的系统称为大范围稳定系统。
- 如果只有当扰动引起的初始偏差小于某个范围时，系统才能在取消扰动后恢复到平衡状态，否则不能恢复到原平衡状态，则称为局部稳定的平衡状态，或局部稳定系统。

初值问题

考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = g(t, x), x \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

其中$g(t,x)$在包含$(t_0, x_0) = (t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$的某区域$R = \left\{(t, x) : |t - t_0| \le a, \|x - x_0\| \le b\right\}$连续

解的存在唯一性

如果$g(t,x)$在$R=\{(t,x):|t-t_0|\le a, \|x-x_0\|\le b\}$上关于$x$满足$Lipschitz$条件，即存在常数$L>0$,使得

$\|g(t,x_1)\text{-}g(t,x_2)\|\le L\|x_1-x_2\|, \forall (t,x_1),(t,x_2)\in R$

则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=g(t,x), x\in\mathbb{R}^n \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

在$[t_0-h, t_0+h]$上存在唯一解$x=\varphi(t;t_0,x_0)$满足$\varphi(t_0;t_0,x_0)=x_0$，其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}, M=\max_{(t,x)\in R}\|g(t,x)\|$$

解的延拓

如果$g(t,x)$在开区域G上关于x 满足局部$Lipschitz$ 条件，即对于G上任意一点(t_0,x_0)，存在包含(t_0,x_0) 的闭域R，使得$g(t,x)$在R上关于x满足$Lipschitz$条件：

$$\|g(t,x_1)\text{-}g(t,x_2)\| \le L(R)\|x_1-x_2\|, \forall (t,x_1),(t,x_2)\in R$$

则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = g(t,x), x\in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

的解$x=\varphi(t;t_0,x_0)((t_0,x_0)\in G)$可以延拓，或者延拓到$t\to\infty$，或者$(t,\varphi(t;t_0,x_0))$任意接近$G$ 的边界。

Lyapunov解的稳定性

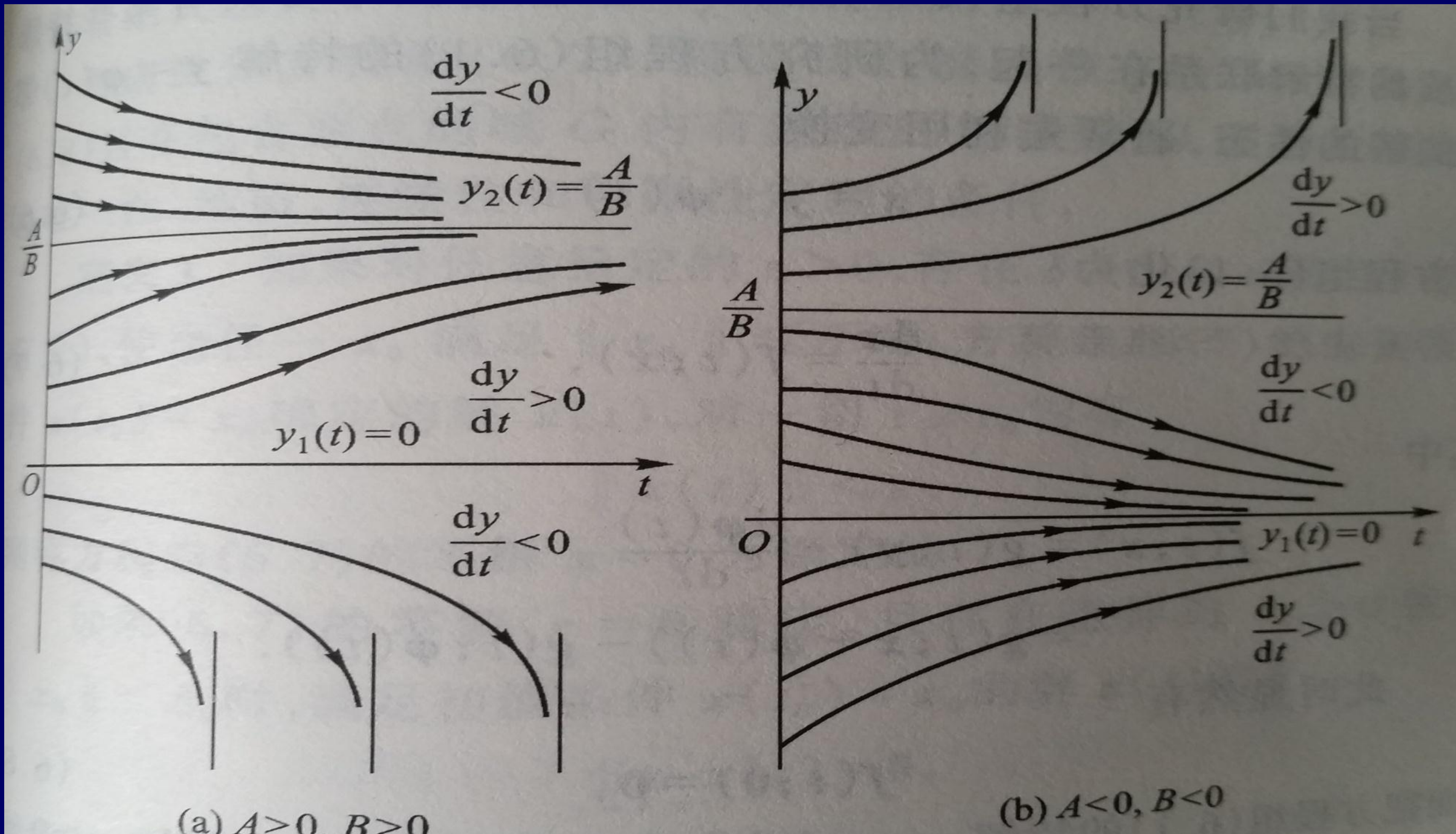
举例:考虑一阶非线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay - By^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

其中A, B为常数，且$AB > 0,$

其解为

$$y(t) = \begin{cases} y(t) \equiv 0, y_0 = 0 \\ y(t) \equiv \dfrac{A}{B}, y_0 = \dfrac{A}{B} \\ y(t) = \dfrac{A}{B + \left(\dfrac{A}{y_0} - B\right)e^{-At}}, y_0 \neq 0, y_0 \neq \dfrac{A}{B} \end{cases}$$


y
$\frac{dy}{dt}<0$
$y_2(t)=\frac{A}{B}$
$\frac{A}{B}$
$\frac{dy}{dt}>0$
$y_1(t)=0$
O
t
$\frac{dy}{dt}<0$
(a) $A>0,\ B>0$
y
$\frac{dy}{dt}>0$
$y_2(t)=\frac{A}{B}$
$\frac{A}{B}$
$\frac{dy}{dt}<0$
O
$y_1(t)=0$
t
$\frac{dy}{dt}>0$
(b) $A<0,\ B<0$

- 初值的设计和测定不可避免地受到干扰
- 系统受到扰动消失后恢复到平衡状态的能力，不稳定的平衡解不能作为设计的依据

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), x \in R^n$$

的某个特解$x = \varphi(t)$的稳定性，通常用变换

$y = x - \varphi(t)$, 从而将方程组化为

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), y \in R^n, \text{其中}$$

$$f(t, y) = g(t, x) - \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

$$= g(t, y + \varphi(t)) - g(t, \varphi(t))$$

此时显然有$f(t, 0) = 0$

从而将$x = \varphi(t)$变为$y = 0$

不失一般性，我们总是考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

的零解$x = 0$的稳定性。

其中$f(t, x)$满足$f(t, 0) = 0$，且在包含原点的域G内有连续的偏导数。

如何在不具体解出微分方程的情况下判断微分方程解的稳定性？

Lyapunov稳定性定义

稳定性：如果对任意给定的$\varepsilon > 0$,存在

$\delta(\varepsilon, t_0) > 0$,使得当任意$x_0$满足$\|x_0\| \le \delta$时，

初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

的解$x(t)$满足$\sup_{t \ge t_0} \|x(t)\| \le \varepsilon$,则称微分方程组

$\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$的零解$x = 0$是稳定的。

Lyapunov渐近稳定性

如果微分方程组

$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$的零解$x=0$稳定，且存在

$\delta_0>0$，使得当$\|x_0\|<\delta_0$时，满足初值条件

$x(t_0)=x_0$的解$x(t)$均有

$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$

则称零解是渐近稳定的。

稳定域与全局渐近稳定

如果微分方程组

$\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$的零解$x = 0$渐近稳定，且存在

域D_0，使得当$x_0 \in D_0$时，满足初值条件

$x(t_0) = x_0$的解$x(t)$均有

$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

则D_0称为渐近稳定域或吸引域。若$D_0 = R^n$，

则称零解$x = 0$为全局渐近稳定或简称全局稳定。

Lyapunov不稳定性

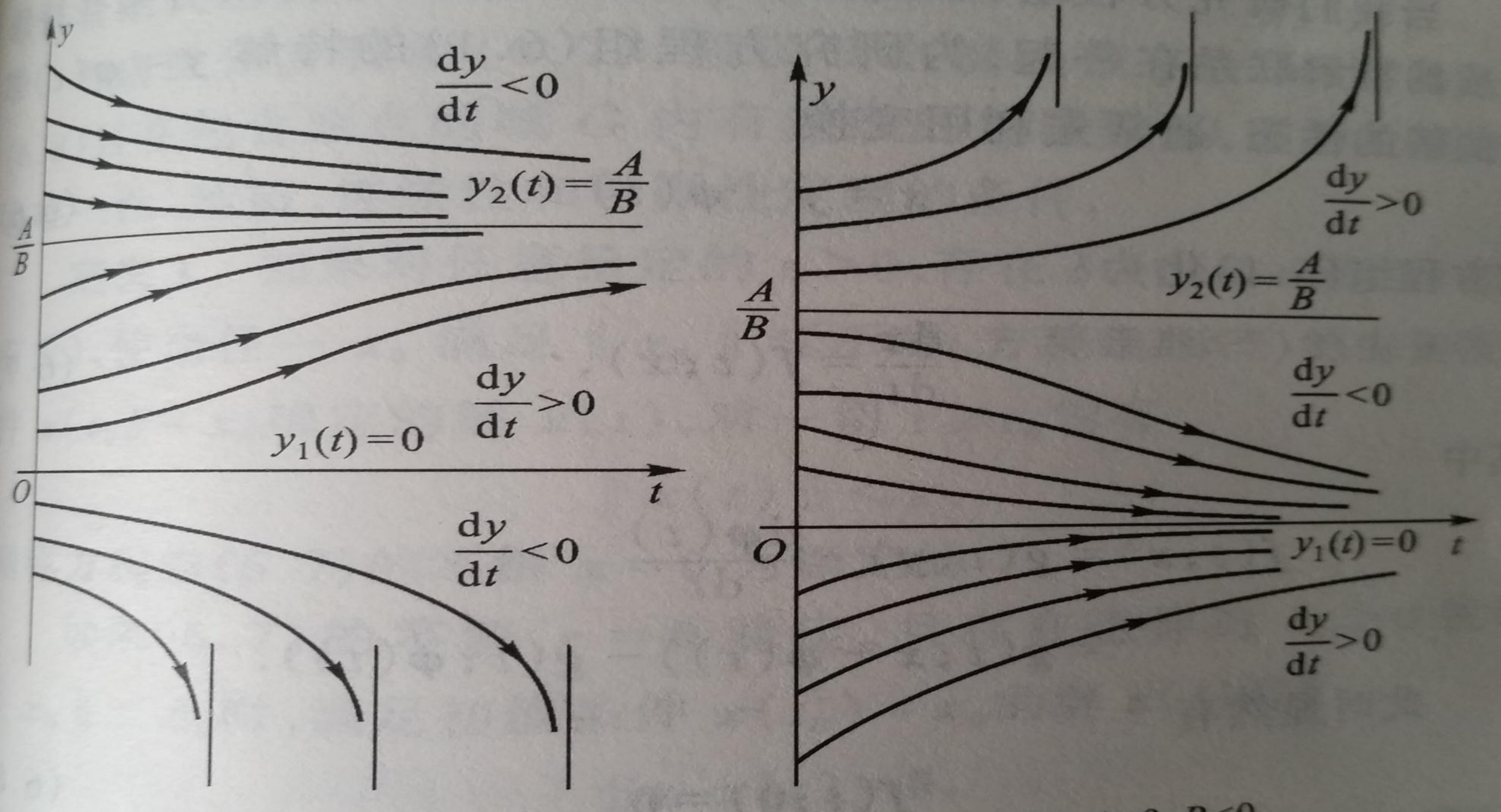
微分方程组$\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$的零解$x=0$

称为不稳定，如果对某个给定的$\varepsilon>0$,

无论δ多么小，总存在一个x_0,满足

$\|x_0\|\le\delta$,使得由初始条件$x(t_0)=x_0$所确定

的解$x(t)$,至少存在某个时刻$t_1>t_0$,使得$\|x(t_1)\|>\varepsilon$



y
$\frac{dy}{dt}<0$
$y_2(t)=\frac{A}{B}$
$\frac{A}{B}$
$\frac{dy}{dt}>0$
$y_1(t)=0$
O
t
$\frac{dy}{dt}<0$
y
$\frac{dy}{dt}>0$
$y_2(t)=\frac{A}{B}$
$\frac{A}{B}$
$\frac{dy}{dt}<0$
O
$y_1(t)=0$
t
$\frac{dy}{dt}>0$

(a) $A>0,\ B>0$ (b) $A<0,\ B<0$

线性自治系统零解的稳定性

考虑一阶线性自治微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

其任一解都可以表示为

$$\sum_{m=0}^{l_i} c_{im} t^m e^{\lambda_i t}, 1 \le i \le n$$

的线性组合。

其中λ_i是特征方程$\det(A-\lambda I)=0$的根。

l_i由λ_i对应的若当块决定。

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \lambda_i & 1 & & & \\ & & \lambda_i & & & \\ & & & \lambda_i & 1 & \\ & & & & \lambda_i & \\ & & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$ 代数重数为6，几何重数为3

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \lambda_i & \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$$ 代数重数为3，几何重数为3

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$$ 代数重数为3，几何重数为1

若一阶线性自治微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

特征方程 $\det(A - \lambda I) = 0$ 的根

都具有负实部，则微分方程组的

零解是全局渐近稳定的。

若存在正实部的特征根，则零解不稳定。

若没有正实部的特征根，存在零实部的根，则

当零实部的根不存在对应维数大于1的

若当块时，零解稳定，但不渐近稳定，此时称为临界稳定。

当零实部的根存在对应维数大于1的

若当块时，零解不稳定。

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \lambda_i & 1 & & & \\ & & \lambda_i & & & \\ & & & \lambda_i & 1 & \\ & & & & \lambda_i & \\ & & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$ 代数重数为6，几何重数为3

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \lambda_i & \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$$ 代数重数为3，几何重数为3

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$$ 代数重数为3，几何重数为1

如何判断$\det(A-\lambda I)=0$的特征根都具有负实部?

赫尔维茨判据（Hurwitz）判据

设给定常系数的n次代数方程

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\lambda^{n-2}+a_n=0,\quad a_0>0$$

令

$$\Delta_1=a_1,\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ldots\ldots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

其中$a_i = 0, i > n$

则该方程的根都具有负实部的充要条件是

$\Delta_i > 0$

SISO线性定常系统的运动稳定性

考虑一个SISO LTI系统

$$a_0\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=$$

$$b_0\frac{d^m u(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{du(t)}{dt}+b_m u(t)$$

其运动稳定性定义为:

假设系统满足零初始条件:

$$y(0_-)=0, y^{'}(0_-)=0, \ldots, y^{(n-1)}(0_-)=0,$$

$$u(0\_)=0, u^{'}(0\_)=0, \ldots, u^{(n-1)}(0)=0$$

假设$u(t)=\delta(t)$，即在零时刻受到理想单位脉冲作用，

若单位脉冲响应满足

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=0,$$

则称该线性系统是渐近稳定的。

SISO LTI系统渐近稳定的充分必要条件是系统的特征方程

$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n\text{-}1} s + a_n = 0$的根都具有负实部。

线性IS-LM模型的稳定性分析

- I:Investment
- S:Saving
- L:Liquidity preference:流动性偏好
- M: Money supply

宏观经济学中的IS-LM模型

$$\begin{cases} Y = E(Y-T, r) + G: \text{商品市场供需平衡时，产出与利率的关系：IS曲线} \\ M/P = L(Y, r)\text{：货币市场供需平衡时，产出与利率的关系：LM曲线} \end{cases}$$

其中

Y为产出（国民收入），r为利率，

T为税收

G为政府支出

$E = C$（消费）$+ I$（投资），为个人总需求

M：货币供给

P：价格水平

L：货币需求

商品和货币市场通常处于供需非平衡状态，

但两个市场均有一定的自我调节能力，

凯恩斯主义动态调节方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = \alpha\left[E(Y-T,r)+G-Y\right] \triangleq f(Y,r) \\ \dfrac{dr}{dt} = \beta\left[L(Y,r)-(M/P)\right] \triangleq g(Y,r) \end{cases}$$

线性情形：

$$\begin{cases} C = C_0 + c(Y-T+TR), 0<c<1 \\ T = \tau Y, 0<\tau<1 \\ I = I_0 + aY - br, 0<a<1, 0<a+c<1, b>0 \\ L = L_0 + kY - hr, k>0, h>0 \end{cases}$$

TR为转移支付，c为边际消费倾向，τ为边际税率，

a为边际投资倾向

因此，凯恩斯主义动态调节方程可化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{dY}{dt} = \alpha\left[(d-1)Y - br + C_0 + I_0 + cTR + G\right] \\
\dfrac{dr}{dt} = \beta\left[kY - hr + L_0 - \dfrac{M}{P}\right]
\end{cases}
$$

其平衡解为

$$
\begin{cases}
Y^* = \dfrac{h[C_0 + I_0 + cTR + G] + b\left[\dfrac{M}{P} - L_0\right]}{(1-d)h + kb} \\
r^* = \dfrac{k[C_0 + I_0 + cTR + G] - (1-d)\left[\dfrac{M}{P} - L_0\right]}{(1-d)h + kb}
\end{cases}
$$

$$d = a + c(1-\tau)$$

令$\Delta Y = Y - Y^*, \Delta r = r - r^*$,则

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta Y}{dt} = \alpha\left[(d-1)\Delta Y - b\Delta r\right] \\ \dfrac{d\Delta r}{dt} = \beta\left[k\Delta Y - h\Delta r\right] \end{cases}$$

其特征方程为

$$s^2 + [\alpha(1-d) + \beta h]s + \alpha\beta[(1-d)h + bk] = 0$$

其根为

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{\alpha(d-1) - \beta h \pm \sqrt{[\alpha(1-d) + \beta h]^2 - 4\alpha\beta[(1-d)h + bk]}\right\}$$

都具有负实部，因此该平衡解全局渐近稳定。

非线性自治系统的稳定性-线性近似法（Lyapunov间接法）

考虑$\dfrac{dx}{dt} = f(x(t)), x \in R^n$

其中$f(\bullet): R^n \to R^n, f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

$$f(x(t)) = f(0) + \frac{D(f(x))}{D(x)}\Big|_{x=0} x(t)$$

$$+\left[f(x(t)) - f(0) - \frac{D(f(x))}{D(x)}\Big|_{x=0} x(t) \right]$$

$$= \frac{D(f(x))}{D(x)}\Big|_{x=0} x(t) + \xi(x(t))$$

$$A = \frac{D(f(x))}{D(x)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

将方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t))$$

写成线性近似部分+非线性扰动形式:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D(f(x))}{D(x)}\Big|_{x=0} x(t) + \xi(x(t))$$

其中$\xi(\cdot)$: $R^n \to R^n, \xi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,且

$$\|\xi(x)\| = o\left(\|x\|\right), \|x\| \to 0$$

定理:若$\frac{D(f(x))}{D(x)}\Big|_{x=0}$没有零实部的特征根，则微分方程组

$\frac{dx}{dt}=f((x(t))$零解的稳定性与其线性近似方程组

$\frac{dx}{dt}=\frac{D(f(x))}{D(x)}\Big|_{x=0}x(t)$的零解稳定性一致。

即若

$$\det\left(\frac{D(f(x))}{D(x)}\Big|_{x=0}-\lambda I\right)=0$$的根都具有负实部，

则

$$\frac{dx}{dt}=f(x(t))$$的零解渐近稳定；当

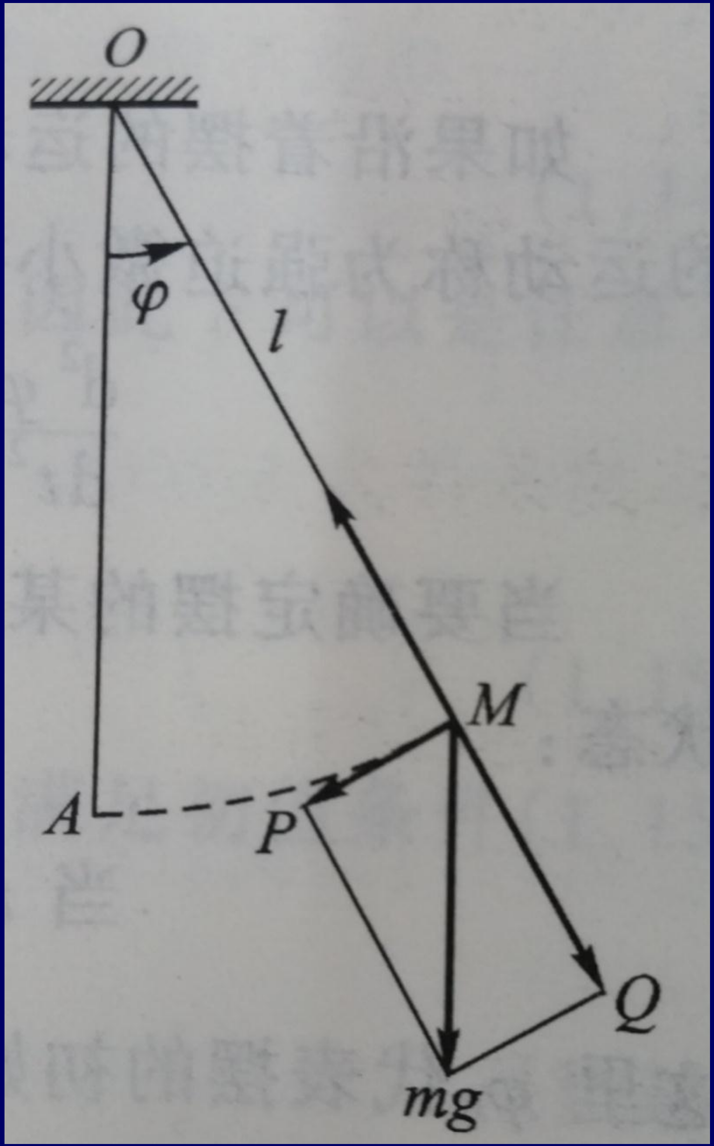
$$\det\left(\frac{D(f(x))}{D(x)}\Big|_{x=0}-\lambda I\right)=0$$的具有带正实部的根，

则$\dfrac{dx}{dt}=f(x(t))$的零解不稳定。

若$\det\left(\frac{D(f(x))}{D(x)}\Big|_{x=0}-\lambda I\right)=0$具有零实部的根，且不具有正实部的根，则

$\frac{dx}{dt}=f(x(t))$的零解的稳定性不能由其线性近似方程

$\frac{dx}{dt}=\frac{D(f(x))}{D(x)}\Big|_{x=0}x(t)$决定。这种情形称为临界情形，需要中心流形理论解决。


O
φ
l
M
A
P
Q
mg

考虑一个阻尼振动系统

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

令$x_1=\varphi, x_2=\dfrac{d\varphi}{dt}$,记$x=[x_1,x_2]^T$

则以上二阶微分方程化为

$$\frac{dx}{dt}=f(x(t)), f(x)=\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2 \\ -\dfrac{g}{l}\sin x_1-\dfrac{\mu}{m}x_2 \end{bmatrix}$$

显然$f(0)=0$

$$\frac{D(f(x))}{D(x)}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & -\frac{\mu}{m}\end{bmatrix},\frac{D(f(x))}{D(x)}\Big|_{x=0}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{l} & -\frac{\mu}{m}\end{bmatrix}$$

所以原方程可写为

$$\begin{bmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dx_2}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{l} & -\frac{\mu}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -\frac{g}{l}(\sin x_1-x_1)\end{bmatrix}$$

其线性部分的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{\mu}{m}\lambda+\frac{g}{l}=0,$$ 其根

为 $$\lambda_{1,2}=-\frac{\mu}{2m}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2-\frac{4g}{l}}$$

所以系统的零解是渐近稳定的。

考虑无阻尼数学摆振动:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin\varphi \end{cases}$$

可写为

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\varphi}{dt} \\ \dfrac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{g}{l}(\sin\varphi(t) - \varphi(t)) \end{bmatrix}$$

其线性近似方程为临界情形，不能按线性近似法判断零解的稳定性。

非线性自治系统的稳定性-Lyapunov直接法

由$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin\varphi \end{cases}$ 可得$\omega d\omega = -\dfrac{g}{l}\sin\varphi d\varphi$

两边做积分得$\dfrac{1}{2}\omega^2 + \dfrac{g}{l}\left(1\text{-}\cos\varphi\right) = c$

我们取函数

$$V(\varphi,\omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{l}\left(1\text{-}\cos\varphi\right)$$

沿着微分方程的解$\varphi=\varphi(t),\omega=\omega(t)$对

$V(\varphi,\omega)$取导数，即

$$\frac{dV(\varphi(t),\omega(t))}{dt}$$

$$=\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=\varphi(t),y=\omega(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{x=\varphi(t),y=\omega(t)}\frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$=\frac{g}{l}\omega(t)\sin\varphi(t)-\frac{g}{l}\omega(t)\sin\varphi(t)\equiv 0$$

即$\dfrac{dV(\varphi(\tau),\omega(\tau))}{d\tau}=0$

对上式两边从t_0到t积分，得到

$$V(\varphi(t),\omega(t))=V(\varphi(t_0),\omega(t_0))$$

从几何图形上看

$$V(\varphi,\omega)=V(\varphi(t_0),\omega(t_0))$$

是相平面$O\varphi\omega$上的一条闭曲线，微分方程的解$\varphi=\varphi(t),\omega=\omega(t)$在这条曲线上。

当$(\varphi(t_0),\omega(t_0))$足够接近原点(0, 0)时，$V(\varphi(t_0),\omega(t_0))$也足够接近于0，此时曲线$V(\varphi,\omega)=V(\varphi(t_0),\omega(t_0))$是足够接近原点的闭曲线，这说明无阻尼数学摆方程的零解是稳定的，但不是渐近稳定的。

Lyapunov直接法

通过构造一个特殊的函数$V(x, y)$, 利用

$V(x, y)$通过微分方程组的全导数$\dfrac{dV(x(t), y(t))}{dt}$的性质,

而不是通过求解微分方程组或者线性近似微分方程组

来判断其零解的稳定性，称为Lyapunov直接法。

具有这样性质的函数称为Lyapunov（能量）函数

Lyapunov直接法又称为Lyapunov第二方法

Lyapunov间接法又称为Lyapunov第一方法

考虑非线性自治微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

$f(\bullet): G \to R^n, G$是R^n中包含原点的闭域

$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，显然$x(t) \equiv 0$是方程的一个特解。

$f(\bullet)$在G内有连续的偏导数，因而

方程组由初始条件$x(t_0) = x_0 \in G$确定的解在

G内存在且唯一。

设$V(x)$为在域$H \subseteq G$上定义的一个实连续函数，$V(0)=0$，如果在此域内恒有$V(x) \geq 0$，则称函数V为常正的。如果对一切$x \neq 0$都有$V(x) > 0$，则称函数V为定正的，如果函数-V是定正的(常正）的，则称V为定负（或常负）的。

若$V(x)$关于所有变元的偏导数存在且连续，以方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x)$$

的解代入，然后对t求导数

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i=\left\langle\frac{\partial V}{\partial x},f(x)\right\rangle=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T f(x)$$

这样求得的导数称为函数V通过微分方程的全导数。

二次型函数$V(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$

当$a>0$且$4ac-b^2>0$时是定正的；而当$a<0$且$4ac-b^2>0$时是定负的。

若A是正定矩阵，则二次型函数$V(x)=x^T Ax$是定正的。

若A是半正定矩阵，则二次型函数$V(x)=x^T Ax$是常正的

稳定性定理：如果对微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

可以找到一个定正函数$V(x)$，其通过

微分方程组的全导数$\dfrac{dV}{dt}$为常负函数，则

方程组的零解是稳定的。

如果有定正函数$V(x)$，其全导数$\dfrac{dV}{dt}$为定负

函数，则方程组的零解是渐近稳定的。

证明：稳定性：

不防假设存在常数$H>0$, 使得$V(x)$, $f(x), \dfrac{\partial V(x)}{\partial x}$

均在域$\left\{x: \|x\| \le H\right\}$上有定义。

对任给的$\varepsilon < H$，由$V(x)$连续性和定正性可知，必定存在

$l = \inf_{\left\{x:\varepsilon \le \|x\| \le H\right\}} V(x) > 0$

又由$V(0)=0$及$V(x)$的连续性可知存在$\delta < \varepsilon$, 使得

$V(x) < l, \forall x \in \left\{x: \|x\| \le \delta\right\}$

所以要证明零解稳定，只需证明对这样的δ，只要$\|x_0\| \le \delta$,

则以x_0为初始向量的解$x(t)$, 对一切$t \ge t_0$, 都有

$\|x(t)\| < \varepsilon$

由于$\|x_0\| \le \delta < \varepsilon$,由解对$t$的连续性，至少存在某个区间

$[t_0, T)$,使得$\|x(t)\| < \varepsilon, t \in [t_0, T)$,如果$T \ne \infty$,则必定存在$t^* > t_0$

使得$\|x(t)\| < \varepsilon, t \in [t_0, t^*)$,且$\|x(t^*)\| = \varepsilon$,注意到

当$x \in \left\{x : \|x\| \le H\right\}$时，有$\dfrac{dV}{dt} \le 0$。

当$t \in [t_0, t^*]$,积分曲线$\|x(t)\| \le \varepsilon$,所以$x(t) \in \left\{x : \|x\| \le H\right\}$，因此

当$t \in [t_0, t^*]$时，始终有$\dfrac{dV}{dt} \le 0$，两边从t_0到t^*积分得

$$V(x(t^*)) - V(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t^*} \frac{dV(x(t))}{dt} dt \le 0,\text{因此}$$

$$V(x(t^*)) \le V(x(t_0)) < l$$

但根据l的定义：$l=\inf_{\{x:\varepsilon\le\|x\|\le H\}}V(x)$，必然有

$$\|x(t^*)\|<\varepsilon$$

这与$\|x(t^*)\|=\varepsilon$矛盾，因此$x(t)$对一切$t\ge t_0$，都有

$$\|x(t)\|<\varepsilon$$

即方程组的零解稳定。

渐近稳定性：

根据刚才的证明，当$\frac{dV}{dt}$定负时，显然零解是稳定的

现在取稳定性证明中的δ作为δ_0，即取$\delta_0=\delta$，因而当

$\|x_0\| \le \delta_0$时，$\|x(t)\| < \varepsilon < H$对一切$t \ge t_0$都成立。为了

证明$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$，首先证明$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0.$

不妨假设对一切$t \ge t_0$，都有$x(t) \ne 0(why?)$

由于$\frac{dV}{dt}$是定负函数，$0 < \|x(t)\| < \varepsilon < H$对一切$t \ge t_0$都成立，因此

$V(x(t))$对t是严格单调递减的，注意到$V(x(t)) > 0$，故存在极限

$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = c.$

如果$c \neq 0$,则对任何$t \geq t_0$,有

$V(x(t)) > c$

又因为V连续，$V(0)=0$,故存在$\lambda > 0$,

使得对于任何$t \geq t_0$，都有

$\|x(t)\| > \lambda$

因为$\dfrac{dV}{dt}$定负，且在闭域$\{x:\lambda \leq \|x\| \leq H\}$上连续,

因此$m = \max_{\{x:\lambda \leq \|x\| \leq H\}} \dfrac{dV}{dt} < 0$,注意到对任何$t \geq t_0$，解

$x(t) \in \{x:\lambda \leq \|x\| \leq H\}$,有

$$V(x(t)) - V(x_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{dV(x(t))}{dt} dt \leq m(t - t_0),$$

即$V(x(t)) \leq V(x_0) + m(t - t_0) \to -\infty$,与$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = c > 0$矛盾

故$c = 0$

现在进一步证明由

$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$可以推出

$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$

若$\|x(t)\|$不趋于0，由于$x(t)$有界，故存在某一序列

$\{t_k, k = 1, 2, \ldots\}$和非零向量$x^*$, 使得

$\lim_{k\to\infty} \|x(t_k)\| = \|x^*\| \neq 0$, 根据V函数的连续性和定正性有

$\lim_{k\to\infty} V(x(t_k)) = V(x^*) \neq 0$, 这与$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$矛盾，因此

$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$, 即零解渐近稳定。

渐近稳定性定理：如果对微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

可以找到一个定正函数$V(x)$，其通过

微分方程组的全导数$\frac{dV}{dt}(x)$为常负函数，但

使全导数$\frac{dV}{dt}(x)=0$的点x的集合中除零解$x=0$之外

并不包含方程组的整条正半轨线，则方程组的零解

是渐近稳定的。

不稳定性定理：如果对微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

可以找到一个 连续函数$V(x)$和非负常数μ，

$V(0)=0, V(x)$通过微分方程组的全导数

$$\frac{dV}{dt} = \mu V + W(x),$$

且当$\mu=0$时,W为定正函数，而当$\mu>0$时,

W为常正函数；又在$x=0$的任意小邻域内都存在

x_0,使得$V(x_0)>0$,那么方程组的零解是不稳定的。

证明：　由定理条件可知，对任意的$\delta \in (0,1)$，

总存在x_0，使得$\|x_0\| \le \delta$，且$V(x_0) > 0$.下面证明以

x_0为初值的解$x(t)$必然满足

$\sup_{t\ge 0}\|x(t)\| > 1$，采用反证法。

若$\sup_{t\ge 0}\|x(t)\| \le 1$，从而

$\sup_{t\ge 0} V(x(t)) \le \sup_{x\in[0,1]} V(x) < \infty$。

另一方面，当$\mu > 0$时，有

$\frac{dV}{dt} - \mu V \ge 0$，两边同乘$e^{-\mu(t-t_0)}$得

$\frac{d}{dt}(V(t)e^{-\mu(t-t_0)}) \ge 0$，从而可得

$$V(x(t))e^{-\mu(t-t_0)} \ge V(x_0)$$

即$V(x(t)) \geq V(x_0)e^{\mu(t-t_0)}$

这与$\sup_{t\geq 0} V(x(t)) < \infty$矛盾。

当μ=0时，由W的定正性有

$V(x(t))$-$V(x_0) = \int_{t_0}^{t} W(x(t))dt \geq 0$,同样得到

$V(x(t)) \geq V(x_0) > 0$

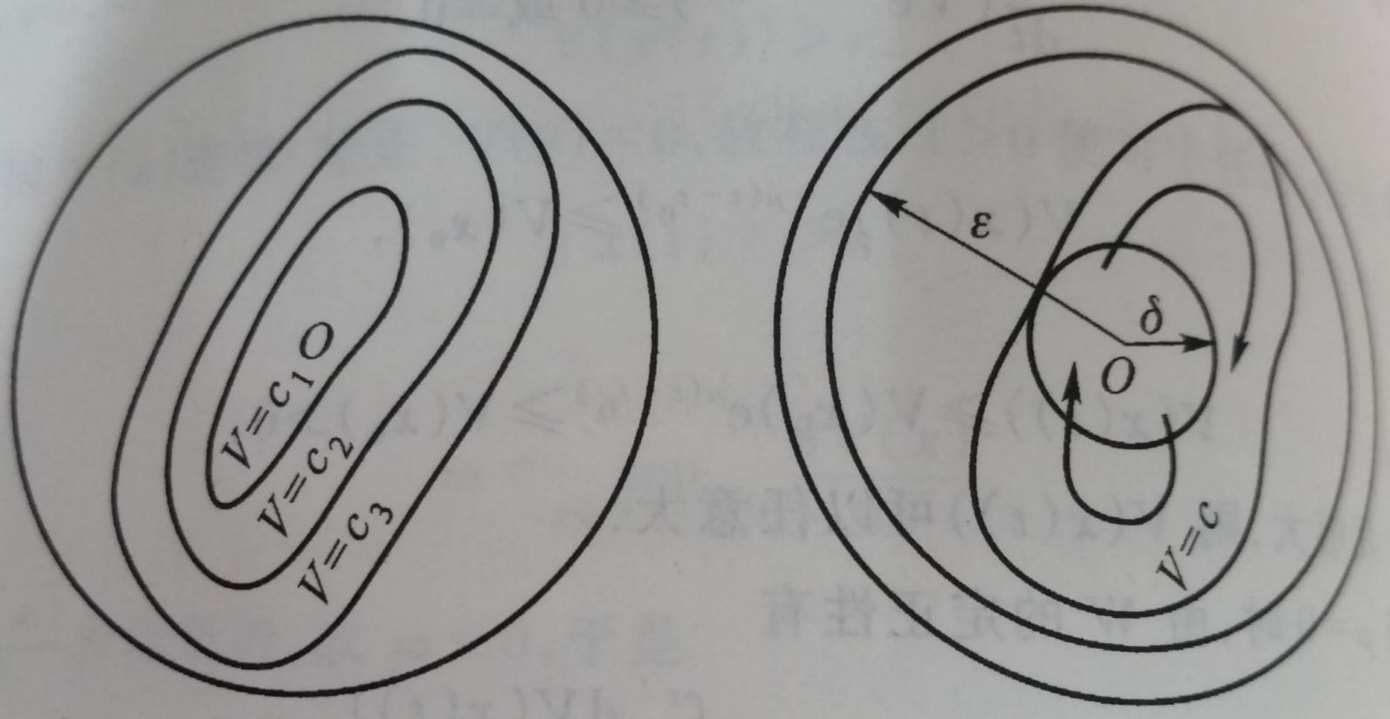
又因为$V(x)$连续，$V(0)=0$,所以必存在$\lambda > 0$,

使得$\inf_{t\geq t_0} \|x(t)\| \geq \lambda$.由于$W(x)$是定正函数，于是

存在正数$m = \inf_{\lambda \leq \|x\| \leq H} W(x)$,这样便有

$$V(x(t)) - V(x_0) = \int_{t_0}^{t} W(x(t))dt \geq m(t-t_0)$$

这同样与$\sup_{t\geq 0} V(x(t)) < \infty$矛盾。



(a) $V=c$ 闭曲线族($c_1<c_2<c_3$)　　(b) 稳定性态与 V 函数的关系

图(6.3)　稳定性几何解释

若A渐近稳定，则对任给的对称矩阵Q

$A^T P + PA = -Q$有唯一解

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

若A的特征根都不满足$\lambda_i + \lambda_j = 0$,则对

任给的对称矩阵Q

$A^T P + PA = -Q$有唯一对称矩阵解P。

线性定常系统的李雅普诺夫直接法

连续时间线性定常系统 $\frac{dx}{dt} = Ax$

渐近稳定的充要条件是对任意给定的正定矩阵Q，矩阵方程

$A^T P + PA = -Q$有唯一的正定矩阵解P。

$A^T P + PA = -Q$称为李雅普诺夫方程。

对离散时间线性定常系统$x(k+1)=Ax(k)$渐近稳定的充要条件是A的谱半径小于1.

如果A的所有特征值的模都小于等于1，并且模为1的特征值是A的最小多项式的单根，则系统稳定，但不渐近稳定。

如果有模等于1的特征值是A的最小多项式的重根，则系统是不稳定的。

离散时间线性定常系统$x(k+1)=Ax(k)$渐近稳定的充要条件是对任意给定的正定矩阵Q, 矩阵方程

$$A^T PA - P = Q$$

存在唯一正定解P。