第九章

资本资产定价模型

资本资产定价模型(CAPM)

是一项均衡模型(equilibrium model)，也是所有现代金融理论的奠基石。

CAPM解决了所有的人按照组合理论投资下，资产的收益与风险的问题。

CAPM 理论包括两个部分：资本市场线（CML）和证券市场线（SML）。

在简单假设基础上，逐渐衍化为使用复杂假设。

贡献者

- 马可维茨（ Harry M . Markowitz, 1952 ）
- 夏普（ William Sharpe, 1964 William Sharpe, 1964 William Sharpe, 1964 William Sharpe, 1964 William Sharpe, 1964 ）
- 林特尔（ John Lintner, 1965 John Lintner, 1965 John Lintner, 1965 ）
- 特里诺（ Jack Treynor,1962 Jack Treynor,1962 ）
- 莫辛（ Jan Mossin,1966 ）

假设
SIMPLIFYING ASSUMPTIONS

假设1：在一期时间模型里，投资者以期望回报率和标准差作为评价证券组合好坏的标准，所有投资者都是价格接受者。

假设2：所有的投资者都是非满足的。

假设3：所有的投资者都是风险厌恶者。

假设4：每种证券都是无限可分的，即，投资者可以购买到他想要的一份证券的任何一部分。

假设
SIMPLIFYING ASSUMPTIONS

假设5：无税收和交易成本。

假设6：投资者可以以无风险利率无限制的借和贷

假设7：所有投资者的投资周期相同。

假设8：对于所有投资者而言，无风险利率是相同的。

假设9：对于所有投资者而言，信息可以无偿自由地获得。

假设10：投资者有相同的预期，即，他们对证券回报率的期望、方差、以及相互之间的协方差的判断是一致的。

分离定理

每个投资者的切点证券组合T相同。

- 每个人对证券的期望回报率、方差、相互之间的协方差以及无风险利率的估计是一致的，所以，每个投资者的线性有效集相同。
- 为了获得风险和回报的最优组合，每个投资者以无风险利率借或者贷，再把所有的资金按相同的比例投资到风险资产上。

由于所有投资者有相同的有效集，他们选择不同的证券组合的原因在于他们有不同的无差异曲线，因此，不同的投资者由于对风险和回报的偏好不同，将从同一个有效集上选择不同的证券组合。尽管所选的证券组合不同，但每个投资者选择的风险资产的组合比例是一样的，即，均为切点证券组合T。

这一特性称为分离定理：我们不需要知道投资者对风险和回报的偏好，就能够确定其风险资产的最优组合。

分离定理-举例

考虑A、B、C三种证券，市场的无风险利率为4%，我们证明了切点证券组合T由A、B、C三种证券按0.12，0.19，0.69的比例组成。如果假设1-10成立，则，第一个投资者把一半的资金投资在无风险资产上，把另一半投资在T上，而第二个投资者以无风险利率借到相当于他一半初始财富的资金，再把所有的资金投资在T上。这两个投资者投资在A、B、C三种证券上的比例分别为：

- 第一个投资者：0.06:0.095:0.345
- 第二个投资者：0.18:0.285:1.035
- 三种证券的相对比例相同:0.12:0.19:0.69。

分离定理对组合选择的启示

若市场是有效的，由分离定理，资产组合选择问题可以分为两个独立的工作，即资本配置决策（Capital allocation decision）和资产配置（Asset allocation decision）。

资本配置决策：考虑资金在无风险资产和风险组合之间的分配。

资产配置决策：在众多的风险证券中选择适当的风险资产构成资产组合。

由分离定理，基金公司可以不必考虑投资者偏好的情况下，确定最优的风险组合。

CAPM均衡结果
RESULTING EQUILIBRIUM

1. 所有的投资者都持有相同的风险资产组合—市场投资组合。
2. 市场投资组合包括了所有的股票，而且每种股票在市场投资组合中所占的比例等于这只股票的市场价值占所有股票市场价值的比例。

$$w_i = \frac{\text{第}i\text{种证券的市场价值}}{\text{所有风险证券的市场价值}} = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} = \frac{P_i N_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i N_i}$$

证券市场均衡

市场均衡

– 货币市场均衡：借、贷量相等，从而，所有个体的初始财富的和等于所有风险证券的市场总价值。

– 资本市场均衡：每种证券的供给等于需求。

均衡的定义

– 一个风险资产回报率向量$\bar{r} = (\overline{r_1}, \overline{r_2}, \dots \overline{r_N})^T$和无风险利率$r_f$（相应地，风险资产价格向量$\bar{p} = (\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots \overline{p_N})^T$和无风险债券价格$p_f$）称为均衡回报率（相应地，均衡价格），如果它们使得对资金的借贷量相等且对所有风险资产的供给等于需求。

举例

假设资本市场只有三种风险证券A、B、C。各自价格为1元、2元、3元，各自股数为750股、750股、250股。

总市值=3000元

市场证券组合为

$w_M = (w_A, w_B, w_C) = (0.25, 0.5, 0.25)$

举例

假设证券市场中只有三个投资者1、2、3，他们各自的财富为500元、1000元、1500元。假设切点证券组合为T

$$w_T = (w_A, w_B, w_C) = (0.5, 0.25, 0.25)$$

投资者的投资为

Investor	Riskless	A	B	C
1	100	200	100	100
2	200	400	200	200
3	-300	900	450	450
Total	0	1500	750	750

市场是否均衡？

举例

若切点证券组合为

$w_T = (w_A, w_B, w_C) = (0.25, 0.5, 0.25)$

投资者的投资为

Investor	Riskless	A	B	C
1	100	100	200	100
2	200	200	400	200
3	-300	400	900	450
Total	0	750	1500	750

市场是否均衡？

均衡市场的性质

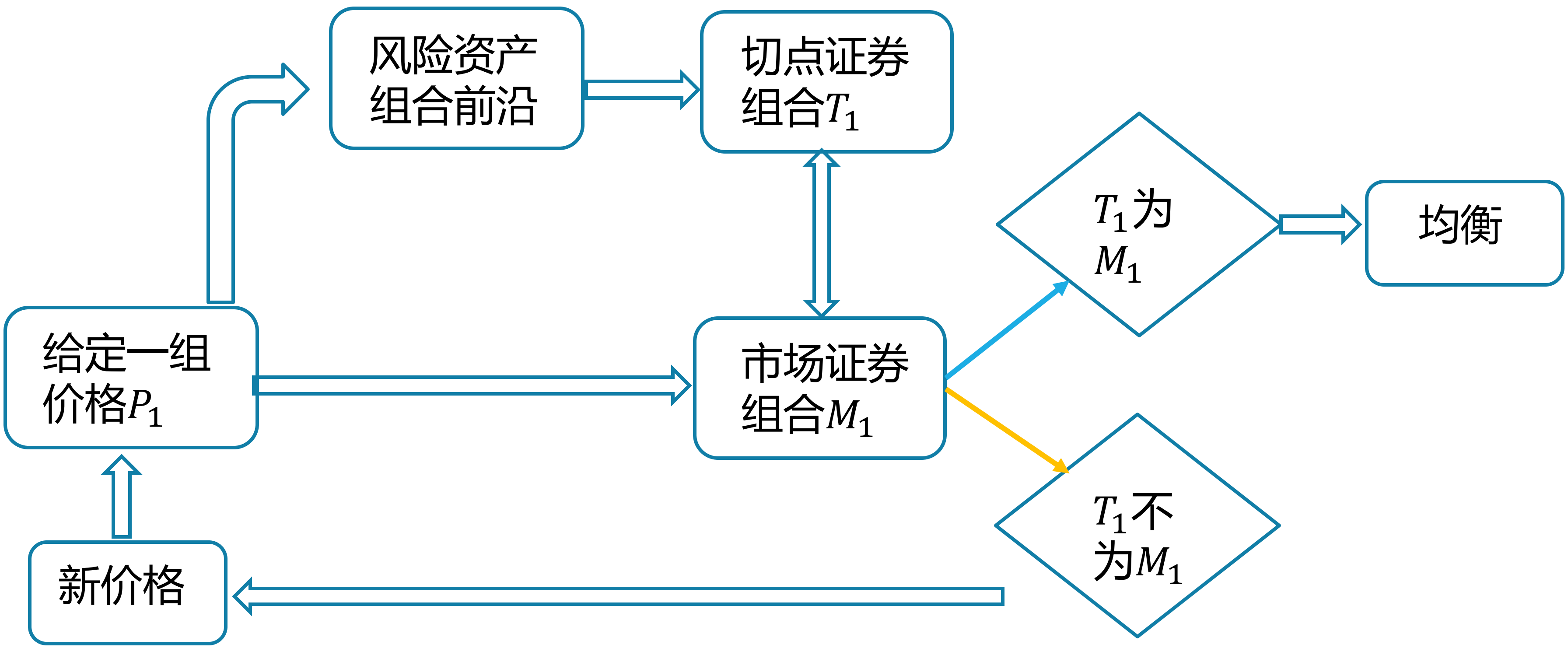
市场证券组合的权重等于切点证券组合权重

$$v_i=\frac{P_iN_i}{\sum_{i=1}^n P_iN_i}=\frac{\sum_{j=1}^n w_{ij}W_j}{\sum_{j=1}^n W_j}=\frac{w_i\sum_{j=1}^n W_j}{\sum_{j=1}^n W_j}=w_i$$

在均衡时，每一种证券在切点证券组合T的构成中都占有非零的比例。

–这一特性是分离定理的结果。从分离定理，每一个投资者所选择的证券组合中的风险证券的组成是一样的，他们都选择T作为证券组合中的风险证券组成部分。如果每个投资者都购买T，但是T并不包括每一种风险证券，则没有哪一个人会购买T中不包含的风险证券，从而，这些证券的价格会下降，导致其期望回报率上升，而这又会刺激投资者对这些证券的需求。这种调整一直持续到切点证券组合T中包含每一种风险证券。

市场达到均衡的流程图



均衡的条件

所有的投资者都持有相同的风险资产组合—市场资产组合。

市场资产组合包括了所有的股票，而且每种股票在市场资产组合中所占的比例等于这只股票的市场价值占所有股票市场价值的比例。

市场风险溢价取决于所有市场参与者的平均风险厌恶程度。

单个证券的风险溢价是它与市场协方差的函数。

图 9.1 有效边界和资本市场线

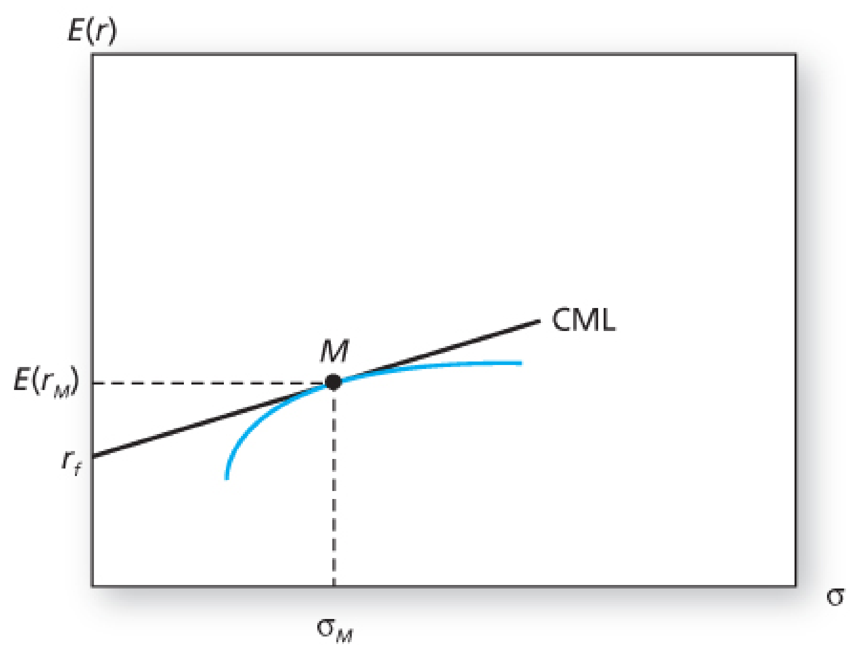


Figure 9.1 The efficient frontier and the capital market line

市场组合的风险溢价

市场投资组合的风险溢价与市场风险和投资者的风险厌恶程度成比例:

$$E(r_M) - r_f = \overline{A}\sigma_M^2$$

where σ_M^2 is the variance of the market portolio and

$\overline{A}$ is the average degree of risk aversion across investors

单个证券的收益和风险

单个证券的风险溢价取决于单个资产对市场投资组合风险的贡献程度。

单个证券的风险溢价是市场投资组合的各个资产收益协方差的函数。

Portfolio Weights	w_1	w_2	. . .	w_{GE}	. . .	w_n
w_1	$\text{Cov}(R_1, R_1)$	$\text{Cov}(R_1, R_2)$	. . .	$\text{Cov}(R_1, R_{GE})$	. . .	$\text{Cov}(R_1, R_n)$
w_2	$\text{Cov}(R_2, R_1)$	$\text{Cov}(R_2, R_2)$	. . .	$\text{Cov}(R_2, R_{GE})$	. . .	$\text{Cov}(R_2, R_n)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
w_{GE}	$\text{Cov}(R_{GE}, R_1)$	$\text{Cov}(R_{GE}, R_2)$	. . .	$\text{Cov}(R_{GE}, R_{GE})$	. . .	$\text{Cov}(R_{GE}, R_n)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
w_n	$\text{Cov}(R_n, R_1)$	$\text{Cov}(R_n, R_2)$	. . .	$\text{Cov}(R_n, R_{GE})$	. . .	$\text{Cov}(R_n, R_n)$

通用电气的例子

通用电气公司股票与市场投资组合的协方差:

$$Cov(r_{GE}, r_M) = Cov\left(r_{GE}, \sum_{k=1}^{n} w_k r_k\right) = \sum_{k=1}^{n} w_k Cov(r_k, r_{GE})$$

通用电气公司股票对市场组合风险的贡献:

$$w_{GE} \sum_{k=1}^{n} w_k Cov(r_{GE}, r_M)$$

因此，投资通用电气公司股票的回报—收益比率可以表达为:

$$\frac{\text{通用电气对市场风险溢价的贡献}}{\text{通用电气对方差的贡献}} = \frac{w_{GE}[E(r_{GE}) - r_f]}{w_{GE} Cov(r_{GE}, r_M)} = \frac{[E(r_{GE}) - r_f]}{Cov(r_{GE}, r_M)}$$

通用电气公司的例子

投资于市场组合的回报—风险比率:

$$\frac{\text{市场风险溢价}\ (market\ risk\ premium)}{\text{市场方差}(market\ variance)} = \frac{[E(r_M) - r_f]}{\sigma_M^2}$$

均衡时通用电气公司股票的回报—风险比率应该与市场组合的相等:

$$\frac{E(r_{GE}) - r_f}{Cov(r_{GE}, r_M)} = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2}$$

通用电气公司的例子

通用电气公司的合理风险溢价：

$$E(r_{GE})-r_f=\frac{COV(r_{GE},r_M)}{\sigma^2{}_M}\left[E(r_M)-r_f\right]$$

变换一下，我们可以得到：

$$E(r_{GE})=r_f+\beta_{GE}\left[E(r_M)-r_f\right]$$

期望收益—贝塔关系

CAPM 对所有的资产组合都有效，因为:

$$E(r_P) = \sum_k w_k E(r_k) \text{ and}$$

$$\beta_{\mathrm{P}} = \sum_k w_k \beta_k$$

这一结果对市场组合本身也有效:

$$E(r_M) = r_f + \beta_M \left[E(r_M) - r_f \right]$$

图 9.2 证券市场线

- 合理的收益率Fair return
- 投资绩效评估的基准收益率；
- 资本预算决策中的要求收益率
- 证券市场线Security Market Line(SML): 期望收益率-beta关系
- 证券特征线Security Characteristic Line(SCL): 期望收益率-市场风险溢价关系

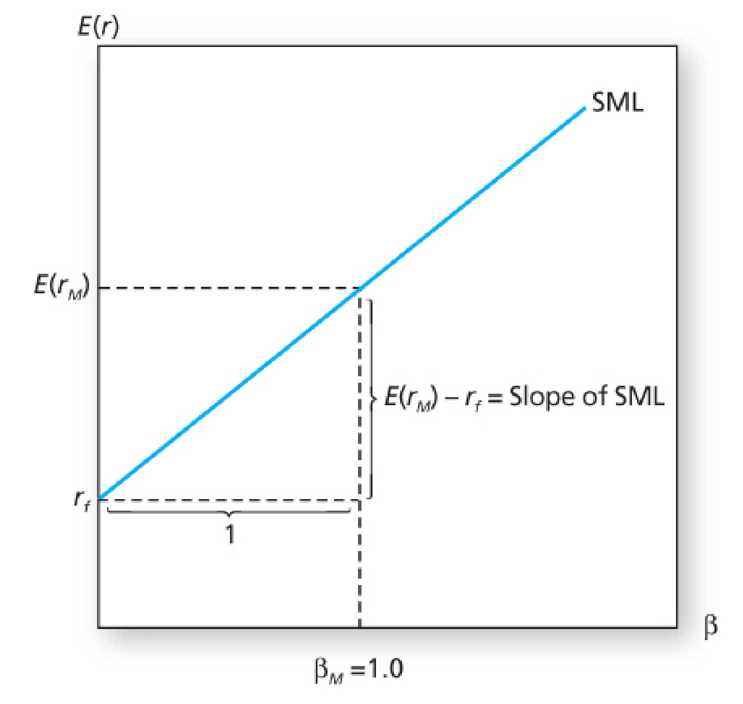


Figure 9.2 The security market line

图9.3 证券市场线和一只α值为正的股票

Alpha: 投资者期望收益率与合理收益率 fair return (CAPM给出的期望收益率)之差

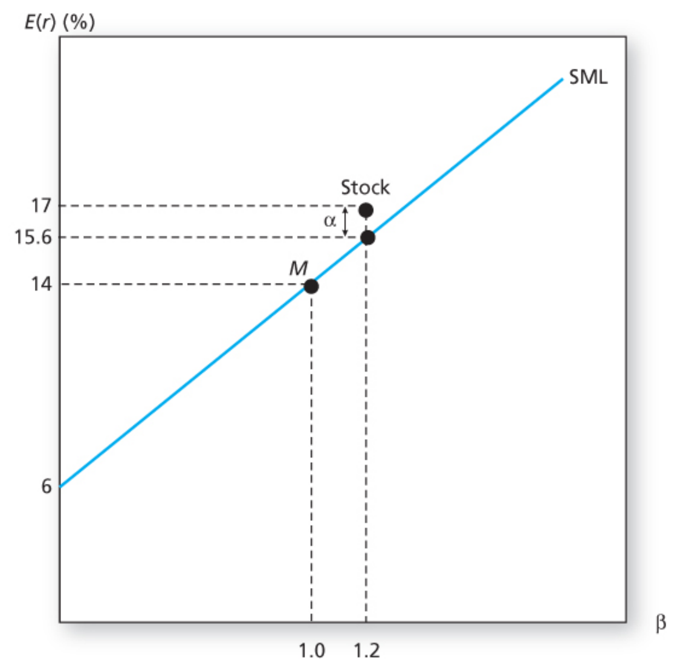


Figure 9.3 The SML and a positive-alpha stock

资本资产定价模型是可检验的吗？
IS THE CAPM TESTABLE?

测试CAPM的两个主要推论?

1.测试市场组合是切点组合，处于均值方差有效前沿上。但是构造一个市值加权的市场组合是不可行的.

2.测试CAPM得到的期望收益-Beta关系。但是期望收益无法直接被观测到

- 在现实中，我们只能使用指数模型Index model（用市场指数代替理想化的市场组合），并用历史的收益率realized return去测试指数模型下的期望收益-Beta关系.

指数模型和历史收益率

指数模型：

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$$

指数模型中的beta系数相当于CAPM期望收益Beta关系中的beta

由CAPM得出，所有证券的alpha必须为0. 在现实中，很多公司的历史样本alphas (回归中的截距)以及单个公司在不同历史时期的历史样本alphas是以0为中心的.

资本资产定价模型符合实际吗?
IS THE CAPM PRACTICAL?

理论上, α 必须为0. 不通过证券分析, 可以得到一个个体资产的合理的风险溢价，它与市场的风险溢价（市场指数作为市场组合的代理）成正比.

实际中理论的均衡是可以被逼近的，但不一定都是能达到的

- Alphas都会趋向于0，但是过程可能有延误，这样证券分析师才有动力持续的进行证券分析，发现偏离0的alpha，并通过投资组合使得该alpha加快趋向于0.

关于 CAPM的实证检验

统计检验存在偏差(市场组合代理，统计方法偏差(from OLS to ARCH)).

实证检验不支持CAPM

- 低beta证券会有正的alphas，高beta证券会有负的alphas

但是CAPM被认为是解释风险资产收益率的最可得的模型，也是得到广泛接受并被实际应用的模型, 因为

- CAPM进行系统性风险和个体风险的分解在逻辑上是有说服力的
- CAPM关于市场组合是有效的论断或多或少是正确的—打败市场是很困难的

单选题 1分

Setting

Q1. 以下哪个陈述是正确的

A. 零beta股票的期望收益为零。

B. CAPM模型预示着投资者持有高波动率股票需要高收益率

C. 通过75%投资于无风险资产，剩余资金投资于市场组合，你可以构建一个beta为0.75的投资组合

A A

C C

B B

D None of the above

Submit

Q1 SOLUTION

A. Stocks with a beta of zero offer an expected rate of return of zero.

- False. Beta = 0 implies $E(r) = r_f$.

B. The CAPM implies that investors require a higher return to hold highly volatile securities.

- Investors require a higher return for bearing more systematic risk (a higher beta) not total volatility σ.

C. You can construct a portfolio with a beta of 0.75 by investing 0.75 of the budget in T-bills and the remainder in the market portfolio

- No. Invest 0.75 in the market portfolio ($\beta = 1$) and remainder in T-bills.
    - $\beta_P = (0.75 \times 1) + (0.25 \times 0) = 0.75$

单选题 1分

Setting

Q2. 如果CAPM成立，以下哪种情况是可能的？分别考虑每种情况

Situation A

Portfolio	E(Return)	Beta
ABC	20%	1.4
XYZ	25%	1.2

Situation B

Portfolio	E(Return)	Standard Deviation
ABC	30%	35%
XYZ	40%	25%

A A only

C A&B

B B only

D Neither

Submit

Q2 SOLUTION

Situation A

Portfolio	E(Return)	Beta
ABC	20%	1.4
XYZ	25%	1.2

Situation B

Portfolio	E(Return)	Standard Deviation
ABC	30%	35%
XYZ	40%	25%

Situation A: Not possible. Portfolio ABC has a higher beta than Portfolio XYZ, but the expected return for Portfolio ABC is lower.

Situation B. Possible.
Portfolio ABC's lower expected rate of return can be paired with a higher standard deviation, as long as Portfolio ABC's beta is lower than that of Portfolio XYZ.

单选题 1分

Setting

Q3.如果CAPM成立，以下哪种情况是可能的？分别考虑每种情况

Situation A

Portfolio	E(Return)	Std Dev.
Risk-free	10%	0%
Market	18%	24%
A	16%	12%

Situation B

Portfolio	E(Return)	Std Dev.
Risk-free	10%	0%
Market	18%	24%
A	20%	22%

A A only

B B only

C A&B

D Neither

Submit

Q3 SOLUTION

Situation A

Portfolio	E(Return)	Std Dev.
Risk-free	10%	0%
Market	18%	24%
A	16%	12%

Situation B

Portfolio	E(Return)	Std Dev.
Risk-free	10%	0%
Market	18%	24%
A	20%	22%

Situation A not possible:

Sharpe(M)=(.18-.10)/.24=0.33

Sharpe(A) =(.16-.10)/.12=0.5.

Portfolio A has a better Sharpe ratio than the market.

Situation B not possible:

Since $E(r_A) > E(r_M)$, β_A>1. Thus, $\sigma_A > \sigma_M$.

CAPM模型在公司金融中的应用举例

资本预算(capital budgeting)决策中的应用：建立一个项目的最低资本回报率(hurdle rate)

从可比上市企业数据中获得β，e.g. $\beta=1.4$

计算最低资本回报率

- e.g., $r_f = 5\%$, $E(r_M)=13\%$
- So: $E(r_{project}) = 0.05 + 1.4\ (0.13-0.05) = 16.2\%$
- 项目情况:
  - 期初投资Investment=$5,000
  - 期望盈利Expected payoffs: 第三年$5,000, 第七年$5,000
  - *净现值Net Present Value Calculation* (NPV): Adjusting the time value of money analysis for the risk of the cash flows.
  - $NPV = -5{,}000 + 5{,}000/1.162^3 + 5000/1.162^7 = -65.28$

对企业而言，从企业自身看，它要选择NPV最大的项目。

对投资企业的投资者看，投资者希望购买该公司股票后，能使得其有效边界尽可能向左方延伸——有效组合。

二者的统一就是基于CAPM的项目评估

–投资项目NPV最大——公司收益最大——成为有效组合——CAPM（CML）

一致性定理：公司采用CAPM来作为项目评估的目标与投资者采用CAPM进行组合选择的目标是一致的。

资本资产定价模型的扩展形式
ZERO BETA MODEL

Merton和Roll分别提出了有效边界资产组合的一系列有趣特点，其中两个是：

1. 两种有效边界上的投资结合而成的任何资产组合都在其本身的有效边界上
2. 有效边界上的任一资产组合，除去最小方差组合，都在有效边界下半部分存在一个与其不相关的“伴随”资产组合。由于这些“伴随”资产组合不想关，这些伴随资产组合叫作有效组合的零β投资组合 (zero-beta portfolio)。如果我们选择市场组合M和它的零β伴随资产组合Z,

$$E(r_i) - E(r_Z) = [E(\mathrm{R}_M) - E(R_Z)]\frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}$$

$$= \beta_i[E(r_M) - E(r_Z)]$$

零β模型 (Black (1972))

资本资产定价模型的扩展形式

Heaton and Lucas(2000), 考虑非交易资产

Mayers(1972), 考虑工资收入

Merton(1973), 多期模型, ICAPM

- 考虑真实利率和通货膨胀变化的影响

Breeden(1979)，基于消费的CAPM

- 投资者必须合理分配用于当期消费和支撑未来投资的财富

流动性与资本资产定价模型
LIQUIDITY AND CAPM

流动性: 资产以公平的市场价值卖出的速度及难易程度。

非流动性折价: 可以通过一个公平市场的价值折扣部分来衡量，买方为了是资产尽快出售，必须接受这种溢价。

- 衡量：部分买卖差价
- 交易成本越高，非流动性折价就越大。

图 9.5 非流动性与平均收益的关系

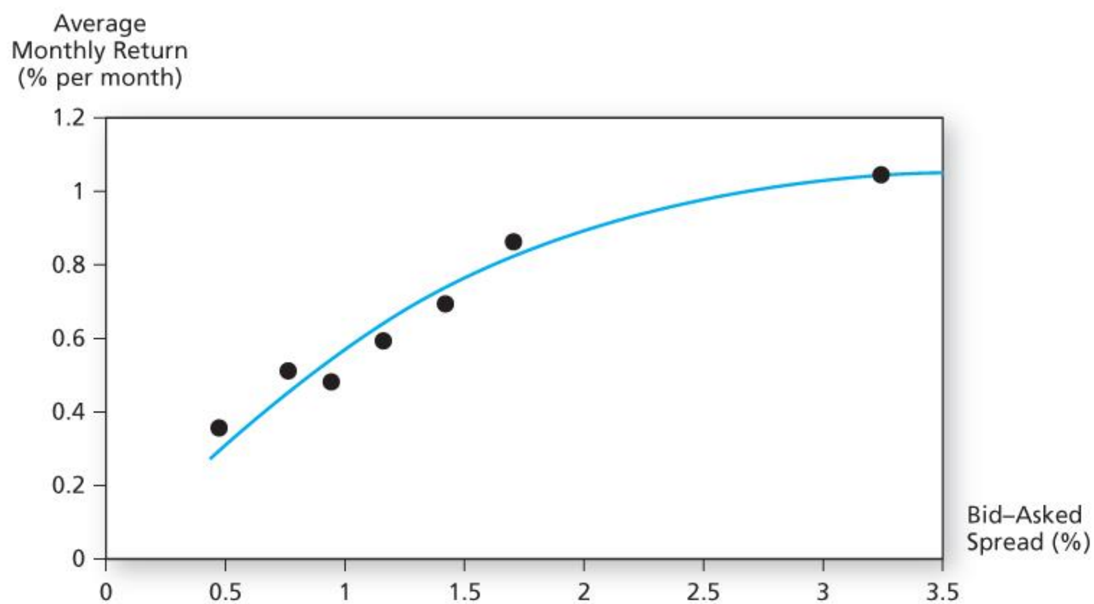


Figure 9.5 The relationship between illiquidity and average returns

Source: Derived from Yakov Amihud and Haim Mendelson, "Asset Pricing and the Bid–Ask Spread," *Journal of Financial Economics* 17 (1986), pp. 223–49.

流动性风险

在金融危机中,流动性危机非线性加速,流动性像突然蒸发掉了

当一只股票的流动性下降时，其他股票的流动性也趋于降低:流动性风险易传染.

投资者要求对他们的流动性风险敞口进行补偿。

- 流动性β, 增加流动性因子
- Pastor and Stambaugh(2003) or Acharya and Pedersen(2005)

总结

CAPM模型及其假设

CAPM模型和单指数模型

CAPM符合实际吗

CAPM的扩展形式

流动性与CAPM