

Biological Mathematics

Cindy Hu

2019/1/8

鱼为什么锯齿形游动？

假设 1 鱼在游动过程中质量保持不变

假设 2 鱼在游动过程中体积保持不变

假设 3 鱼在游动过程中浮力保持不变

记鱼在水中所受重力和浮力差为 W

1) 鱼从 A 向 C 游 $\vec{F}_1 = \vec{G}_1 + W \sin \beta$

2) 鱼从 C 向 B 游 $\vec{G}_2 = \vec{F}_2 + W \sin \alpha$

取

$$P_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{CA} + \vec{F}_2 \cdot \vec{BC} = \vec{F}_1 \frac{h}{\sin \beta} \quad (1)$$

$$P_1 = (\vec{G}_1 + W \sin \beta) \cdot \frac{h}{\sin \beta} = \frac{\vec{G}_1 h}{\sin \beta} + Wh \quad (2)$$

3) 考虑鱼直线游动时只要克服水平阻力 $G_3 = G_1$

一般来说 $G_1 = G_3 = 3G_2$, $G_2 = W \sin \alpha$

4) 鱼从 A 到 B 水平游动过程中所做的功 P_2

$$P_2 = G_3 \cdot (h \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + h \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}) \quad (3)$$

5)

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_2} &= \frac{\frac{G_1 h}{\sin \beta} + Wh}{G_3 (h \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + h \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha})} \\ &= \frac{3 \sin \alpha + \sin \beta}{3(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)} \\ &= \frac{3 \sin \alpha + \sin \beta}{3 \sin(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

6) 一般来说 $\alpha \approx 11.3^\circ$

$f'(\beta) = 0 \Rightarrow \beta \approx 59.2^\circ$

$f(\beta) = 0.51$

7) 结论：鱼能节省 49% 的能量

8) 一般结论：当 $\alpha = 11.3^\circ$ 时, $k = 3$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}, 0 < f(\beta) < 1$

可见鱼无论选择哪种角度进行锯齿状的游动，总能节省能量，当然，当 $\beta = 59.2^\circ$ 时，节省最多。的确，大多数情况下，鱼就是这样在水中游动的。

1 第一章 引言

生物数学是一门介于生物学与数学之间的边缘学科，它用数学方法研究和解决生物学问题，并对与生物有关的数学方法进行理论研究。

一、发展简史

1. 统计数学

静止、定量的方法对食物进行简单描述。

2. 20 世纪 20 年代后，生物物理学的渗透开始分析生命现象的复杂过程，并探索其规律性，引入微分方程模型。

3. 20 世纪 40 年代末，计算机的加入大大加速了生物数学发展的进程。

4. 20 世纪 90 年代，生物数学的发展进入了与信息处理相结合的时代，具体体现在以下四点：

- (1) 高性能微机的普及和使用
- (2) 多媒体技术的产生
- (3) 计算机软件技术的提高
- (4) 计算机网络技术的推广和使用

生物数学是数学与生命科学、生物学、农学、医学和公共卫生等学科互相渗透形成的交叉学科，它以数学方法和技巧研究和解决上述应用领域的具体实际问题，并对相关的数学方法进行理论研究。其主要方法是将所关心的生物学对象数量化，并用数量关系描述这些生物过程。

$$y = f(t), t \in I \quad \text{演化} \quad \overrightarrow{y(t)} = \overrightarrow{f(\overrightarrow{y}, t)}$$
$$\overrightarrow{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \quad \overrightarrow{y(t)} = \overrightarrow{g(t)}, t \in I$$

生物数学形成四个分支，大致分为以下四大类：

- (1) 生物数学模型
- (2) 复杂的系统生物学
- (3) 生物信息学
- (4) 计算生物学

具体由种群动力学、传染病动力学、病毒动力学、药物动力学、酶动力学和分子生物学模型等。

在生物学中，一个生物学的问题往往被抽象转化成为一个方程或方程组，

它描述了所研究的问题随时间的动态变化过程，所以有时也称为动力学或动力学模型，在不严格的意义下，往往将模型和动力学视为同一含义。

SIR 仓室模型

近年来，生物学与物理、化学、数学等相关学科的交融，特别是借助计算机已开始了分子层面的研究，利用数学模型，研究癌细胞和细菌的增长、血药浓度、细胞周期调节、基因调控等细胞和分子生物学、医药，特别是生命科学中萌发的数学问题，使生物数学获得了一次新的飞跃。

二、生物数学的研究领域和方法

1. 种群动力学和传染病动力学（引入博弈论）

应用领域: (1) 生物资源最优管理

(2) 有害生物的综合治理

(3) 传染病动力学

通过对模型动力学性态的定性定量分析，和数值模拟分析传染病的发展过程，预测疾病发生的状态，揭示其流行规律，分析疾病流行的原因和关键因素，评估各种控制措施的效果，寻求预防和控制的最优策略。

2. 病毒动力学和药物动力学

建立病毒动力学数学模型并进行数学分析，可以了解病毒在人体内的感染、复制、清除的动力学过程，以探索病毒的致病机制，为临床医师制定合理的治疗方案提供依据。

药物动力学与分析化学与传染病的药物治疗等领域密切相关，使得药物动力学模型的方法在细胞和分子生物学模型、传染病模型等领域有广泛的应用。

3. 细胞和分子生物学模型

三、数学模型方法

数学模型是关于部分现实世界为一定目的的而做的抽象和简化的数学结构。它用数学符号、公式、图表等刻画客观世界的数量变化规律。

数学模型主要有解释、判断、预见三大功能，机理分析是建立数学模型的主要方法。建立数学模型没有固定模式，但一般有模型拟合、假设、建立、求解分析、修改和应用几个环节。

建模的一般步骤:

1. 仔细观察，初步确定变量及相互关系。
2. 确定模型类型，提出假设。
3. 初步建模
4. 估计参数
5. 检验修正模型（推倒重来）

本课程主要方法集中在描述数学模型的具体方程和分析该类方程的必要数学技巧。

建模示例一. 椅子能在不平的地面上放稳吗？

有四条腿的椅子，正方形，往往不能一次放稳，只能由三条腿着地，需旋转调整 n 此方可使四只脚放稳着地。

对椅子和地面作必要的假设

（一）椅子四条腿一样长，椅子的脚与地面接触的地方视为一点，四脚连线视为正方形。

（二）地面高度使连续变化的，沿任何方向都不会出现间断。（光滑曲面）

（三）在任何位置四个脚总是同时着地。

记 A,C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$,

B,D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta), 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

由假设 $f(\theta), g(\theta) \in C[0, \frac{\pi}{2}], f(\theta) \geq 0, g(\theta) \geq 0$

由假设（三）， $f(\theta), g(\theta)$ 必有一个为 0，不妨设

$$f(\theta) > 0, g(0) = 0$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 0, g(\frac{\pi}{2}) > 0$$

已知 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对 $\forall \theta, f(\theta), g(\theta) = 0$ ，且 $g(0) = 0, f(0) > 0, g(\frac{\pi}{2}) > 0, f(\frac{\pi}{2}) = 0$,

求证：存在 θ_0 ，使得 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$

证明：令 $k(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$

1. $h(\theta) \subseteq C[0, \frac{\pi}{2}]$

2. $h(0) \cdot h(\frac{\pi}{2}) = (f(0) - g(0))(f(\frac{\pi}{2}) - g(\frac{\pi}{2})) < 0$

$$\begin{aligned} &\exists \theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 使得 } h(\theta_0) = 0 \\ &\Rightarrow g(\theta_0) = f(\theta_0) = 0 \end{aligned}$$

2 第二章 单一种群生态模型

1. Malthus 人口模型

$N(t)$: t 时刻种群数量 (或密度)

r : 自然增长率

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{N'(t)}{N(t)} = r \quad (4)$$

$$N'(t) = rN(t), N(t_0) = N_0$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{r(t-t_0)}$$

则, 当 $r > 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$; 当 $r < 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$

典型案例:

美国 1790 至 1860 年, $r=0.031$

2. Logistics 人口模型

K : 环境容纳量 $K = \max\{N(t)\}$

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}), N(t_0) = N_0 \quad (5)$$

通过伯努利方程进行分离变量

$$r dt = \frac{K dN}{N(K - N)} = (\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N}) dN$$

对两边求积分, c 为常数

$$rt + c = \ln N - \ln(K - N)$$

当 $t = t_0$ 时, 等式依旧成立

$$rt_0 + c = \ln N_0 - \ln(K - N_0)$$

两式相减, 可得

$$\begin{aligned} r(t - t_0) &= (\ln N - \ln N_0) - (\ln(K - N) - \ln(K - N_0)) \\ &= \ln\left(\frac{N}{N_0} \cdot \frac{K - N_0}{K - N}\right) \end{aligned}$$

由此可解得通解为:

$$N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-r(t-t_0)}}$$

(1) $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K, r > 0$, 极限为环境容纳量。

(2) $N'(t) = \frac{r}{K}N(K - N) > 0$ 求导数大于零, 因此 $N(t)$ 单调递增。

(3) $N''(t) = \frac{r}{K}[K - 2N] = 0$, 极值点为 $N = \frac{K}{2}$

(4) $\max N'(t) = \frac{r}{K} \cdot \frac{K}{2} \cdot \frac{K}{2} = \frac{rK}{4}$

确定参数 r, K 的两种方法:

(1) 四点法

$$r(t - t_0) = \ln\left(\frac{N}{N_0} \frac{K - N_0}{K - N}\right)$$

t_0, t_1, t_2, t_3 满足

$$t_3 - t_2 = t_1 - t_0$$

记 $A = N(t_0), B = N(t_1), C = N(t_2), D = N(t_3)$

$$r(t_1 - t_0) = \ln\left(\frac{B}{A} \frac{K - A}{K - B}\right)$$

$$r(t_3 - t_2) = \ln\left(\frac{D}{C} \frac{K - C}{K - D}\right)$$

$$\frac{B}{A} \frac{K - A}{K - B} = \frac{D}{C} \frac{K - C}{K - D}$$

$K = 0$ 舍去, 即可得

$$\Rightarrow K = \frac{AD(B + C) - BC(A + D)}{AD - BC}$$

(2) 三点法

假设 $t_0, t_1, t_3, B = C$

$$\Rightarrow K = \frac{B(2AD - B(A + D))}{AD - B^2}$$

$$rt + c = \ln \frac{N(t)}{K - N(t)} = y(t)$$

使用最小二乘法，确定参数 c, r

令 $f(r, c) = \sum_{k=0}^m (rt_i + c - y_i)^2 \rightarrow \min$

$$f_r(r, c) = 2 \sum_{k=0}^m t_i (rt_i + c - y_i) = 0$$

$$f_c(r, c) = 2 \sum_{k=0}^m (rt_i + c - y_i) = 0$$

$$\Rightarrow r \left(\sum_{i=0}^m t_i^2 \right) + c \left(\sum_{k=0}^m t_i \right) = \sum_{k=0}^m t_i y_i$$

$$r \left(\sum_{i=0}^m t_i \right) + (m+1)c = \sum_{i=0}^m y_i$$

3. 崔启武模型

$$\frac{dN}{Ndt} = r \frac{1 - \frac{N}{K}}{1 - \frac{N}{D}} \quad (6)$$

两边求积分

$$\begin{aligned} rdt &= \left(1 - \frac{N}{D}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{N}{K}\right)N} \\ &= \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N} - \frac{K}{D} \frac{1}{K-N} dN\right) \end{aligned}$$

$$rt + c = \ln N - \ln(K - N) + \frac{K}{D} \ln(K - N)$$

$$rt_0 + c = \ln N_0 - \ln(K - N_0) + \frac{K}{D} \ln(K - N_0)$$

$$r(t - t_0) = \ln \frac{N}{N_0} - \ln \frac{K - N}{K - N_0} + \frac{K}{D} \ln \frac{K - N}{K - N_0}$$

(1) 若 D 充分大, $\frac{K}{D} = 0, r(t - t_0) = \ln \frac{N}{N_0} - \ln \frac{K - N}{K - N_0}$

(2) $\frac{K}{D} \approx 1, r(t - t_0) = \ln \frac{N}{N_0}$

(3) $K \leq R < +\infty$, 资源丰富 $\rightarrow K$

3 第三章 多种群数学模型（二种群）

1. 食饵-捕食者模型

$x(t)$: t 时刻食饵数量; $y(t)$: t 时刻捕食者数量

$$x'(t) = r\alpha(t) - ax(t)y(t)$$

r — 食饵单独生存时增长率, a — 捕食者掠取食饵的能力

$$y'(t) = -dy(t) + bx(t)y(t)$$

d — 捕食者独立生存的死亡率, b — 食饵供养捕食者的能力

进行定性分析（求平衡点（常值解），判别其类型（结点、焦点、鞍点、中心），刻画平衡点渐进点趋向/远离它，稳定解/周期解）

(1) 求平衡点

$$\begin{cases} rx - axy = 0 \\ -dy + bxy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(r - ay) = 0 \\ y(bx - d) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow P_1(0, 0), x_1 = 0, y_1 = 0; P_0(\frac{d}{b}, \frac{r}{a}), x_0 = \frac{d}{b}, y_0 = \frac{r}{a}$$

(2) 确定平衡点类型

一般求解步骤: $\begin{cases} x'(t) = P(x, y) \\ y'(t) = Q(x, y) \end{cases}$ 而 (x_0, y_0) 是平衡点

$$P(x_0, y_0) = 0$$

$$\Rightarrow x' = P(x_0, y_0) + P_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$$

$$Q(x_0, y_0) = 0$$

$$\Rightarrow y' = Q(x_0, y_0) + Q_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$$

联立, 可得

$$\begin{cases} x' = P_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ y' = Q_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases}$$

$$\text{记} \begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}$$

代入, 则有
$$\begin{cases} u' = P_x u - P_y v \\ v' = Q_x u + Q_y v \end{cases}$$

特征方程

$$\begin{vmatrix} P_x(x_0, y_0) - \lambda & P_y(x_0, y_0) \\ Q_x(x_0, y_0) & Q_y(x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0))\lambda - P_y(x_0, y_0)Q_x(x_0, y_0) + P_x(x_0, y_0)Q_y(x_0, y_0) = 0$$

当平衡点 P_1 为 $(0, 0)$ 时, 判断平衡点的类型:

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ g(0, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + R_1(x, y) \\ y' = g(0, 0) + g_x(0, 0)x + g_y(0, 0)y + R_2(x, y) \end{cases}$$

它的一次线性近似方程组为

$$\begin{cases} x' = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ y' = g_x(0, 0)x + g_y(0, 0)y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} f_x(0, 0) - \lambda & f_y(0, 0) \\ g_x(0, 0) & g_y(0, 0) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$f(x, y) = rx - axy \quad f_x = r - ay \quad f_y = -ax \quad (7)$$

$$g(x, y) = -dy + bxy \quad g_x = by \quad g_y = -d + bx \quad (8)$$

确定方程平衡点类型

$$\begin{vmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & -d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = r > 0 \quad \lambda_2 = -d < 0$$

则 P_1 为鞍点, 不稳定

当平衡点 P_2 为 $(\frac{d}{b}, \frac{r}{a})$ 时, 判断平衡点的类型:

$$f_x(P_2) = 0 \quad f_y(P_2) = -\frac{ad}{b}$$

$$g_x(P_2) = \frac{b}{a}r \quad g_y(P_2) = 0$$

它的特征方程是：

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{ad}{b} \\ \frac{b}{a}r & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得该方程的特征根为

$$\lambda = \pm\sqrt{dri}$$

由食饵捕食者模型的定义方程式，两者相除，可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-d + bx)y}{(r - ay)x}$$

两边求积分

$$\int \frac{r - ay}{y} dy = \int \frac{-d + bx}{x} dx$$

$$\ln(x^d y^r) = bx + ay$$

$$x^d y^r = e^{bx} e^{ay} c$$

$$(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c \quad (9)$$

像平面上一簇积分曲线，也称为一个首次积分

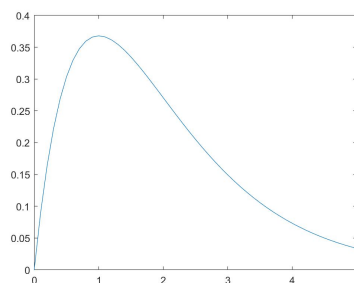
往证 (9) 为 $x - y$ 平面上（相平面）封闭曲线

记 $f(x) = x^d e^{-bx}$ $g(y) = y^r e^{-ay}$

$$f(0) = 0, f(+\infty) = 0, \quad x_{max} = \frac{d}{b}$$

$$g(0) = 0, g(+\infty) = 0, \quad y_{max} = \frac{r}{a}$$

$$f_m = f(x_m), g_m = g(y_m)$$



1. 若 $c > f(x_m)g(y_m)$ 时，则无相轨线

2. 若 $c = f_m g_m$ 时, $x = x_m, y = y_m, P(x_m, y_m) = (\frac{d}{b}, \frac{r}{a})$ 像平面上一点

3. 若 $c < f_m g_m$ 时,

设 $c = p g_m \quad f(x) = p < f_m$,

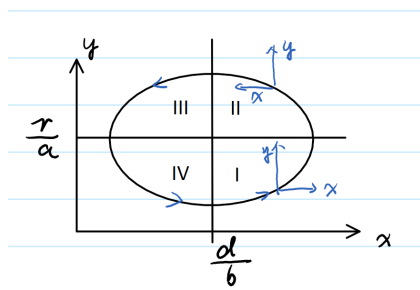
对 $\forall x \in (x_1, x_2), \quad \exists f(x_1) = f(x_2) = p$,

s.t $f(x)g(y) = p g_m, \quad f(x) > p, g(y) < g_m$

$\exists y_1 < y_n < y_2$, 有 $g(y_1) = g(y_2) = q$

则 x 是 $[x_1, x_2]$ 中任意点, 所以 (9) 为封闭曲线。

所以 P_2 是中心, 其周围任一条轨线是封闭曲线, 进而方程在 P_2 附近都是周期解。



$x(t), y(t)$ 是以 T 为周期的周期函数, 定义平均量

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

$$\frac{y'}{y} = -d + bx \Rightarrow \frac{y'}{yb} + \frac{d}{b} = x$$

代入, 可得

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{y'}{y} + \frac{d}{b} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{b} \ln y(t) \Big|_0^T + \frac{1}{T} \frac{d}{b} T \\ &= \frac{d}{b} \end{aligned}$$

又由

$$\frac{x'}{x} = r - ay \Rightarrow \frac{x'}{xa} = \frac{r}{a} - y$$

代入，可得

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{r}{a} - \frac{x'}{xa} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{r}{a} T - \frac{1}{T} \frac{1}{a} \ln x(t) \Big|_0^T \\ &= \frac{r}{a}\end{aligned}$$

分析 I,II,III,IV 的阶段:

- I. 小鱼和大鱼相遇可能性少，数量上升
- II. 大鱼吃小鱼，大鱼数量上升，小鱼数量下降
- III. 小鱼数量少，大鱼食物减少，小鱼, 大鱼数量下降
- IV. 大鱼减少，天敌减少，有利于小鱼生长，小鱼数量上升

2. 有捕捞的食饵-捕食者模型

$$\begin{cases} x' = rx - axy - px = (r-p)x - axy \\ y' = -dy + bxy - py = -(d+p)y + bxy \end{cases} \quad p \geq 0$$

当捕捞业下降 (p 减少), 捕食者数量增加

$$\bar{x}_1 = \frac{d+p}{b} \quad \bar{y}_1 = \frac{r-p}{a}$$

喷洒农药后, 虫害更加猖狂

$$\begin{aligned} x'(t) &= rx(1 - \frac{x(t)}{k}) = rx - \frac{r}{k}x^2 \\ &\triangleq ax - bx^2 \end{aligned}$$

(另一种解释: 自身数量对其数量增长的制约)

对模型的进一步研究:

1. 正平衡点是否存在? 如果存在, 是否稳定?

(1) 求平衡点 $P(x^*, y^*)$

$$\begin{aligned} rx - axy + c_1x^2 &= 0 & -dy + bxy + c_2y &= 0 \\ \begin{cases} x(r - ay + c_1x) = 0 \\ y(-d + bx + c_2y) = 0 \end{cases} & \begin{cases} r - ay^* + c_1x^* = 0 \\ -d + bx^* + c_2y^* = 0 \end{cases} & (*) \\ P_1(0, 0) & P_2(0, \frac{d}{c_2}) & P_3(-\frac{r}{c_1}, 0) & P_4(\frac{ad - c_2r}{ab + c_1c_2}, \frac{rb + c_1d}{ab + c_1c_2}) \end{aligned}$$

要求 $x, y > 0$

$$\begin{aligned} (*) & \begin{cases} c_1x^* - ay^* = -r \\ bx^* + c_2y^* = d \end{cases} \\ l_1 &: \frac{x^*}{\frac{-r}{c_1}} + \frac{y^*}{\frac{r}{a}} = 1 \\ l_2 &: \frac{x^*}{\frac{d}{b}} + \frac{y^*}{\frac{d}{c_2}} = 1 \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x(r - ay + c_1x) \\g(x, y) &= y(-d + bx + c_2y)\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= r - ay + c_1x + c_1x & f_y &= -ax \\g_x &= by & g_y &= -d + bx + c_2y + c_2y\end{aligned}$$

特征方程为:

$$\begin{vmatrix} f_x(p) - \lambda & f_y(p) \\ g_x(p) & g_y(p) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

对平衡点 $P_1(0, 0)$, $\lambda_1 = r > 0$, $\lambda_2 = -d < 0$

$$\begin{aligned}f_x(P_4) &= c_1x^* & f_y(P_4) &= -ax^* \\g_x(P_4) &= by^* & g_y(P_4) &= c_2y^*\end{aligned}$$

特征方程为:

$$\begin{vmatrix} c_1x^* - \lambda & -ax^* \\ by^* & c_2y^* - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (c_1x^* + c_2y^*)\lambda + (ab + c_1c_2)x^*y^* = 0$$

$$\vec{X}' = f(\vec{X}) \quad \vec{f}(\vec{0}) = 0$$

V 函数为

$$\begin{aligned}V(\vec{x}), \vec{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\V(\vec{0}) &= 0, |\vec{x}| < h\end{aligned}$$

1. $V(\vec{x}) > 0$, 定正

2. (全导数) $\frac{d}{dt}V(\vec{x}) < 0$, 定负, \Rightarrow 平衡点为渐进稳定的

$$\text{令 } \begin{cases} \xi = x - x^* \\ \eta = y - y^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = (\xi + x^*)(c_1\xi - a\eta) \\ \frac{d\eta}{dt} = (\eta + y^*)(b\xi + c_2\eta) \end{cases}$$

构造 V 函数

$$V(\xi, \eta) = b\xi - bx^* \ln\left(\frac{\xi + x^*}{x^*}\right) + a\eta - ay^* \ln\left(\frac{\eta + y^*}{y^*}\right)$$

满足 $V(0, 0) = 0, \forall \xi \neq 0, \eta \neq 0, V(\xi, \eta) > 0$

记 $F(\xi) = b\xi - bx^* \ln\left(\frac{\xi + x^*}{x^*}\right)$

$G(\eta) = a\eta - ay^* \ln\left(\frac{\eta + y^*}{y^*}\right)$

$$V(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

$$F'(\xi) = b\left(1 - \frac{x^*}{\xi + x^*}\right), \quad F'(0) = 0$$

$$F''(\xi) = \frac{bx^*}{(\xi + x^*)^2}, \quad F''(0) > 0$$

$$\lim_{\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty} V(\xi, \eta) = +\infty$$

$$\frac{dV(\xi, \eta)}{dt} = c_1 b \xi^2 + c_2 a \eta^2$$

$a, b > 0$

(1) $c_1 > 0, c_2 > 0, \frac{dV}{dt}(\xi, \eta) > 0$, 定正. $P(0, 0)$ 不稳定

(2) $c_1 < 0, c_2 < 0, \frac{dV}{dt}(\xi, \eta) < 0$, 定负. $P(0, 0)$ 渐近稳定

(3) $c_1 c_2 < 0$, 需进一步讨论

$$\begin{cases} x' = x(r - ay) - \varepsilon f(x, y) \\ y' = y(-d + bx) - \varepsilon g(x, y) \end{cases} \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

$$\begin{cases} x'_i = x_i(r_i - a_i y_i) - \varepsilon f_i(x_{i-1}, y_{i-1}, x_{i+1}, y_{i+1}) \\ y'_i = y_i(-d_i + b_i x_i) - \varepsilon g_i(x_{i-1}, y_{i-1}, x_{i+1}, y_{i+1}) \end{cases}$$

4 第四章 多种群模型

多种群模型是研究在同一环境中两种或以上的生物种群数量的变化规律，并且多模型的建立取决于相互作用的种群之间的关系。

中性正向作用按其程度可以分为三种：(1) 偏利共生,(2) 原始协作,(3) 互利共生;

负向作用:(1) 竞争,(2) 捕食,(3) 寄生,(4) 偏害.

(1) **竞争**强调的是生活在一起的两种生物由于在生态系统中的生态位重叠发生争夺生态资源而进行斗争的现象.

比如: 同种间的两只雄狮

(2) **捕食**强调了两种生物生活在一起，一种生物以另一种生物为食的现象.

比如: 青草—野兔—狐狸—狼

(3) **共生**强调的是两种生物生活在一起，互惠互利，若彼此分开，一方或双方无法生活.

比如: 地衣，真菌和苔藓植物; 人和肚子里的大肠杆菌; 白蚁和鞭毛虫.

(4) **寄生**也是两种生物生活在一起，但一方受益，另一方受害. 受益的一方称为寄生生物，受害的一方称为宿主. 寄生的情况分两类，一类是一种生物寄居在另一种生物的体内；另一类是一种生物寄居在另一种生物的体表.

比如: 蛔虫，猪肉绦虫和血吸虫寄生在动物的体内，虱和蚤寄生在动物的体表.

种群的竞争数学模型

竞争排斥原理：具有相同需要的两个不同的生物种群，不能永久地生活在同一环境中。一方终究要取代另一方，即一个生态位只能被一种生物所占据，这种现象被称为竞争排斥原理。

设 $N_1(t), N_2(t)$ 表示两个种群在 t 时刻的数量，

假设两个种群在独立生存条件下，其增长方式都符合 Logistic 方式增长：

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 (1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1}) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 (1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2}) \end{cases}$$

其中 $r_1, K_1, r_2, K_2, b_{12}, b_{21}$ 均为正常数， r_1, r_2 为两种群的内禀增长率， K_1, K_2 分别为环境容纳量。

当两个种群发生竞争关系时， b_{12} 表示种群 2 对种群 1 的影响； b_{21} 表示种群 1 对种群 2 的影响。一般来说 $b_{12} \neq b_{21}$

研究目的：当 n 充分大时，种群 n_1, n_2 稳定在什么值附近。（即找出平衡点）
记

$$u_1 = \frac{N_1}{K_1}, u_2 = \frac{N_2}{K_2}, \tau = r_1 t$$
$$\rho = \frac{r_2}{r_1}, \alpha = b_{12} \frac{K_2}{K_1}, \beta = b_{21} \frac{K_1}{K_2}$$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{d\tau} = u_1(1 - u_1 - \alpha u_2) = f_1(u_1, u_2) \\ \frac{du_2}{d\tau} = \rho u_2(1 - \beta u_1 - u_2) = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

1. 讨论平衡点

$$f_1(u_1, u_2) = f_2(u_1, u_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - u_1 - \alpha u_2 = 0 \\ 1 - \beta u_1 - u_2 = 0 \end{cases}$$

则平衡点为：

$$P_1(0, 0), P_2(0, 1), P_3(1, 0), P^*(u_1^*, u_2^*)$$

其中

$$u_1^* = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}, u_2^* = \frac{1 - \beta}{1 - \alpha\beta}, u_1^* > 0, u_2^* > 0$$

对内部平衡点,

$$(1)\alpha > 1, \beta > 1$$

$$(2)\alpha < 1, \beta < 1$$

2. 判别平衡点的类型

特征方程 $\det(Df(P) - \lambda E) = 0$

$$Df = \begin{pmatrix} f_{1u_1} & f_{1u_2} \\ f_{2u_1} & f_{2u_2} \end{pmatrix}$$

$$f_{1u_1} = (1 - u_1 - \alpha u_2) - u_1, f_{1u_2} = -\alpha u_1,$$

$$f_{2u_1} = -\rho\beta u_2, f_{2u_2} = \rho(1 - \beta u_1 - u_2) - \rho u_2$$

对 $P_0(0,0)$,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & \rho - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = \rho > 0$, 不稳定结点;

对 $P_1(1,0)$,

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -\alpha \\ 0 & \rho(1 - \beta)\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = \rho(1 - \beta)$$

若 $\beta > 1, P$ 为稳定结点; 若 $\beta < 1$, 不稳定;

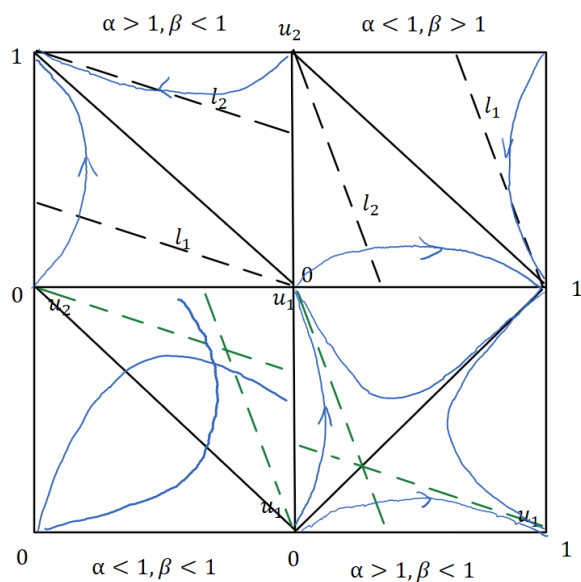
对 $P_2(0,1)$, $\lambda_1 = -\rho < 0, \lambda_2 = 1 - \alpha$

若 $\alpha > 1, P$ 为稳定结点; 若 $\beta < 1$, 不稳定鞍点;

$$\text{对 } P^*(u_1^*, u_2^*), Df(P^*) = (1 - \alpha\beta) \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha(\alpha - 1) \\ \rho\beta(\beta - 1) & \rho(\beta - 1) \end{pmatrix}$$

当 $\alpha < 1, \beta < 1, P^*$ 是稳定的

$$\lambda_{1,2} = [2(1 - \alpha\beta)^{-1}]^{\frac{1}{2}} \left\{ (\beta - 1) + \rho(\beta - 1) \pm [((\alpha - 1) + \rho(\beta - 1))^2 - 4\rho(1 - \alpha\beta)(\alpha - 1)(\beta - 1)]^{\frac{1}{2}} \right\}$$



Lotka-Volterra 食饵-捕食数学模型

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = rN_1 - aN_1N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -dN_2 + bN_1N_2 \end{cases}$$

具有功能反应的捕食和被捕食模型

当食饵种群数量比较小的时候，假设一个捕食者在单位时间内，吃掉 bN_1 食饵是合理的，但是当食饵种群数量很大时，这个假设就不合理了，因为一个捕食者在单位时间内不可能吃掉任意多的食饵，所以有必要对模型进行修正。为此，提出了具有功能反应的捕食和被捕食模型。

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(r_1 - a_1N_1) - \varphi(N_1)N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -N_2(r_2 + b_2N_2) + k\varphi(N_1)N_2 \end{cases}$$

三类功能反应函数 $\varphi(x)$

第一类功能反应函数 (Holling I 型): 适用于藻类、细胞和低等生物

$$\varphi(x) = \begin{cases} b_1 x & (0 < x < x_n) \\ b_1 x_n & (x \geq x_n) \end{cases}$$

第二类功能反应函数 (Holling II 型): 适用于无脊椎动物

$$\varphi(x) = \frac{bx}{1+cx}$$

第三类功能反应函数 (Holling III 型): 适用于脊椎动物

$$\varphi(x) = \frac{b_1 x^2}{1+cx^2}$$

注: 以上三类函数都是有界函数

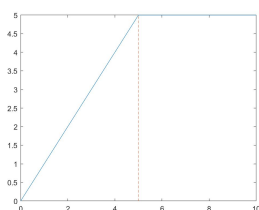


图 1: Holling I 型

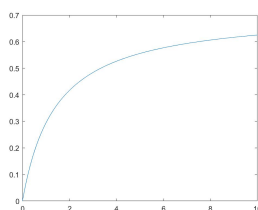


图 2: Holling II 型

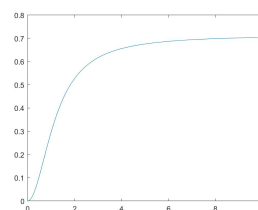


图 3: Holling III 型

具有第一类功能反应函数的食饵-捕食者模型

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(2 - N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(-4 + N_2) \end{cases} \quad (0 \leq N_1 \leq 10) \quad \begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = 2N_1 - 10N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = 6N_2 \end{cases} \quad (N_1 > 10)$$

平衡点 (0,0), (4,2)

$$N'_1 = f(N_1, N_2)$$

$$N'_2 = g(N_1, N_2)$$

$$\begin{vmatrix} f'_{N_1} - \lambda & f'_{N_2} \\ g'_{N_1} & g'_{N_2} - \lambda \end{vmatrix}_{(4,2)} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 8 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}i$$

一次线性近似方程组特征根实部 = 0 无法确定

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{N_1(2 - N_2)}{N_2(-4 + N_1)}$$

$$\int \frac{-4 + N_1}{N_1} dN_1 = \int \frac{2 - N_2}{N_2} dN_2$$

$$\ln N_1^{-4} + N_1 = \ln N_2^2 - N_2 + c$$

作出一族封闭的曲线

$$N_1 > 10$$

$$N_2(t) = c_2 e^{6t}$$

$$N_1' = 2N_1 - 10c_2 e^{6t}$$

齐次方程 $N_1' = 2N_1$ 通解 $N_1 = c_1 e^{2t}$, $y' = p(x)y + q(x)$

设 $\tilde{N}_1(t) = A e^{6t}$

$$6A e^{6t} = 2A e^{6t} - 10c_2 e^{6t}, \quad 4A = -10c_2, A = -\frac{5}{2}c_2$$

$$\tilde{N}_1(t) = -\frac{5}{2}c_2 e^{6t}$$

$$\text{通解} \begin{cases} N_1(t) = c_1 e^{2t} - \frac{5}{2}c_2 e^{6t} = e^{2t} [c_1 - \frac{5}{2}c_2 e^{4t}] \\ N_2(t) = c_2 e^{6t} \end{cases} (N_1 > 10)$$

$$N_1(t)' > 0, N_1(t) \uparrow N_1(t) > 5N_2(t)$$

$$N_1(t)' < 0, N_1(t) \downarrow N_1(t) < 5N_2(t)$$

具有第二类功能反应函数的食饵捕食者模型

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1[r(1 - \frac{N_1}{K_1}) - \frac{kN_2}{N_1 + D}] \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2[s(1 - \frac{hN_2}{N_1})] \end{cases} \quad (\text{其中 } r, k, K, D, s, h \text{ 是常数})$$

令 $u(t) = \frac{N_1(t)}{K_1}, v(t) = \frac{hN_2(t)}{k}, a = \frac{k}{hr}, b = \frac{s}{r}, d = \frac{D}{K}, \tau = rt$, 则方程可变为

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1 - u) - \frac{auv}{u + d} = f(u, v) \\ \frac{dv}{d\tau} = bv(1 - \frac{v}{u}) = g(u, v) \end{cases}$$

一阶线性近似方程组特征根实部不等于零 \Rightarrow 与原方程组稳定性相同.

$$\begin{cases} f(u^*, v^*) = 0 \\ g(u^*, v^*) = 0 \end{cases} \quad \text{存在正平衡点.}$$

$$u^{*2} + (a + d - 1)u^* - d = 0, v^* = u^*$$

$$\begin{vmatrix} f_u - \lambda & f'_v \\ g_u & g'_v - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} u^*[\frac{au^*}{(u^*+d)^2} - 1] - \lambda & \frac{-au^*}{u^*+d} \\ b & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (tr A)\lambda + det A = 0$$

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{pmatrix}_{(u^*, v^*)}$$

需要 $Re\lambda_{1,2} < 0, tr A < 0, det A > 0$

种群的互利共生模型 N_1, N_2

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 + a_1 N_1 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 + a_2 N_1 N_2 \end{cases}$$

因为当 t 趋向于无穷的时候，两个种群的数量都趋向于无穷，在实际情况中是不可能的。

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 (1 - \frac{N_1}{K_1} + b_{12} \frac{N_2}{K_1}) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 (1 - \frac{N_2}{K_2} + b_{21} \frac{N_1}{K_2}) \end{cases}$$

引入坐标变换，

$$u_1 = \frac{N_1}{K_1}, u_2 = \frac{N_2}{K_2}, \tau = r_1 t, \rho = \frac{r_2}{r_1}, a = b_{12} \frac{K_2}{K_1}, d = b_{21} \frac{K_1}{K_2}$$

得到，

$$\begin{cases} u'_1 = u_1(1 - u_1 + au_2) = f_1(u_1, u_2) \\ u'_2 = \rho u_2(1 - u_2 + du_1) = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

求平衡点

$$P_1(0, 0), P_2(1, 0), P_3(0, 1), P_4(\frac{1+a}{\delta}, \frac{1+d}{\delta}), \delta = 1 - b_{12}b_{21}$$

条件 $1 - b_{12}b_{21} > 0$, 则，

$$u_1^* = \frac{1+a}{1-b_{12}b_{21}} > 1, u_2^* = \frac{1+d}{1-b_{12}b_{21}} > 1$$

P_1 是不稳定结点， P_2, P_3 都是鞍点 (鞍点都是不稳定的)， P_4 是稳定结点
结论

$$u_1^* = \frac{N_1^*}{K_1}, u_2^* = \frac{N_2^*}{K_2} \Rightarrow N_1^* > K_1, N_2^* > K_2$$

模型推广与食物链系统

*: 对前四种模型都可行

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i F_i(N_1, N_2, \dots, N_n), i = 1, 2, \dots, n$$

传染病的数学模型

基本原理：仓室模型

SIR 模型

S(t) 易感者：表示在 t 时刻未染病但有可能被感染的人数

I(t) 染病者：表示在 t 时刻已被感染成病人，而且具有传染力的人数

R(t) 移出者：表示在 t 已从染病者类移出的人数

$$\boxed{S(t)} \xrightarrow{\beta} \boxed{I(t)} \xrightarrow{\gamma} \boxed{R(t)}$$

基本假设：

1. 不考虑人口的出生、死亡、流动等种群的动力因素, 则

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

2. 一个病人一旦与易感者接触，就必然具有一定的传染力。新增的病人人数为 $\beta S(t)I(t)$, β 为传染率

3. 假设从染病者类中移出的人数和病人的人数成正比 $\gamma I(t)$, γ 为移出率.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

记

$$S(0) = S_0 > 0, I_0 = I_0 > 0, R(0) = R^0$$

$$S' < 0, S(t) \downarrow$$

记 $\rho = \frac{\gamma}{\beta}$ 则

$$I' = \beta IS - \gamma I = I(\beta S - \gamma) = \beta I(S - \frac{\gamma}{\beta}) = \beta I(S - \rho)$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_0$, 求平衡点

$$\begin{cases} -\beta IS = 0 \\ \beta I(S - \rho) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = 0 \\ S = \rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dS} &= \frac{\beta IS - \gamma I}{-\rho IS} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S} = -1 + \frac{\rho}{S} \\ \int_{I_0}^I dI &= \int_{I_0}^I (-1 + \frac{\rho}{S}) dS, I(t) - I_0 = S_0 - S(t) + \rho \ln \frac{S(t)}{S_0} \\ I(t) &= I_0 + S_0 - S(t) + \rho \ln \frac{S(t)}{S_0} = N - S(t) + \rho \ln \frac{S(t)}{S_0} \end{aligned}$$

记阈值 $R_0 = \frac{S_0}{\rho} = \frac{\beta}{\gamma} S_0$

$$R_0 > 1, S_0 > \rho, R_0 < 1, S_0 < \rho$$

当 $R_0 > 1$ 的时候, 染病者人数首先增加到最大值, 然后逐渐减少而消亡。

结论: 疾病流行。

当 $R_0 < 1$ 的时候, 染病者人数单调下降趋于零。结论: 疾病不流行。

$\frac{1}{\gamma}$ 为平均移出事件, 或平均患病期

总结: 要减少疾病的流行, 必须减少 R_0 , 使得 $R_0 < 1$

可以通过下面的手段来实现:

1. 加强治疗, 缩短染病期
2. 采取强有力的杀菌措施, 以减小传染率 β
3. 加强隔离, 减少与患病者的接触。
4. 接种疫苗, 使得易感者成为免疫者, 直接进入 R 类人群

$$R = \frac{S}{\rho}$$

记 p 为接种疫苗成功率, p 满足 $0 < p \leq 1$,

$$S_0 - pS_0 = S_0(1 - p) = \hat{S}$$

$$\hat{R} = \frac{\hat{S}}{\rho} = \frac{S_0(1-p)}{\rho} = \frac{S_0}{\rho}(1-p) < 1 = R(1-\rho) < 1, p > 1 - \frac{1}{R_0}$$

对 R_0 进行估计, 设 (S_0, I_0) 为初值

$$I_0 + S_0 = N_0$$

$$I - I_0 = -(S - S_0) + \rho \ln \frac{S}{S_0}$$

$$I(+\infty) = 0, S(+\infty) = S_\infty$$

$$I(+\infty) - I_0 = -S(+\infty) + S_0 + \rho \ln \frac{S(+\infty)}{S_0}$$

$$S_\infty = N + \rho \ln \left(\frac{S_\infty}{S_0} \right)$$

设 $f(x) = N - x + \rho \ln \frac{x}{S_0} = 0, 0 < x < +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 + \rho \frac{1}{x}, 0 < x < \rho$$

$f(x)$ 增加在 $(0, \rho)$ 中方程 $S_\infty = N + \rho \ln \frac{S_\infty}{S_0}$ 有一个正根 S_∞^* 可得

$$\rho = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{N - S_\infty}{\ln S_0 - \ln S_\infty}$$

因此 S_0, S_∞ 可通过血清检查确定

$$\rho \Rightarrow R_0 = \frac{S_0}{\rho}$$

要求 I_{max}

$$I_{max} = N - \rho + \rho \ln \frac{\rho}{S_0}$$

实例：1666 年 5 月中旬，在英格兰 sheffield 的附近的村庄突然遭到鼠疫的侵袭，最初，染病者人数为 7 人，易感者人数为 254 人，鼠疫结束以后，村庄最后剩下的人数是 83 人。

$$N = 254 + 7 = 261$$

$$\rho = \frac{N - S_{\infty}}{N} = 153$$

$$R = 1.66$$

$$I_{max} = 31$$

从实际观察可见，患病时间为 11 天。

$$\gamma = 1/11$$

β 亦可知

SIS 数学模型

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta IS + \gamma I \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta IS - \gamma I \\ I(t) + S(t) = N \end{cases}$$

$$S'(t) = -I\beta(S - \frac{\gamma}{\beta}) = -(N - S)\beta(S - \rho) = -\beta(S - N)(S - \rho) = f(x)$$

$$f(s) = 0, S_1 = N, S_2 = \rho$$

$$f(s) = f(s_0) + f'(s)(s - s_0) + O((s - s_0)^2)$$

$$S'(t) = f'_s(s_0)(s - s_0), y' = f'_y(s_0)y$$

$$f(s) = \rho(S - N)(S - \rho), f'_s(s) = \beta[(S - \rho)(S - N)]$$

$$f'_s(N) = \beta(N - \rho), f'_s(\rho) = \beta(\rho - N)$$

二阶平衡点 (方程的常数解):

鞍点结点焦点的图像和判别

一阶方程平衡点的判别.