现代控制导论

李 韬

tli@math.ecnu.edu.cn；sixumuzi@163.com

个人主页：http://faculty.ecnu.edu.cn/s/3601/main.jspy

华东师范大学数学科学学院

2019年4月-2019年6月

第五章
最优控制系统

目标函数含有贴现因子时的最大值原理

考虑如下的最优化问题：

$$
\begin{cases}
\min_u J[u(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_f} e^{-\rho t} L(x,u,t)dt \\
s.t. \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,u,t) \\ x(t_0) = x_0 \\ u(t) \in U \subseteq R^m \end{cases}
\end{cases}
$$

其中$\rho \geq 0$位贴现因子（通货膨胀率）

若$u^*(t)$与$x^*(t)$是上述最优化问题的最优控制和最优状态，则存在协状态向量$\lambda(t) \in R^n$，使得$u^*(t)$，$x^*(t)$，$\lambda(t)$，一起满足如下必要条件

(1) 正则方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x^*, u^*, t) \\ \dfrac{d\lambda}{dt} = \rho\lambda(t) - \dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

其中现值哈密顿函数$H = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$

(2)极值条件

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t), t) = \min_{u\in U} H(x^*(t), \lambda(t), u, t)$$

无限时域目标函数含有贴现因子时的最大值原理

考虑如下的最优化问题：

$$
\begin{cases}
\min_u J[u(\bullet)] = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho t} L(x,u,t)dt \\
s.t. \begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = f(x,u,t) \\
x(t_0) = x_0 \\
u(t) \in U \subseteq R^m
\end{cases}
\end{cases}
$$

其中$\rho \geq 0$位贴现因子（通货膨胀率）

若$u^*(t)$与$x^*(t)$是上述最优化问题的最优控制和最优状态，则存在协状态向量$\lambda(t) \in R^n$，使得$u^*(t)$，$x^*(t)$，$\lambda(t)$，一起满足如下必要条件

⑴ 正则方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x^*, u^*, t) \\ \dfrac{d\lambda}{dt} = \rho\lambda(t) - \dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

其中现值哈密顿函数$H = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$

(2)极值条件

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t), t) = \min_{u \in U} H(x^*(t), \lambda(t), u, t)$$

(3)终端条件

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_i(t) x_i(t) e^{-\rho t} = 0, i = 1, 2, \ldots, n,$$

$\lambda_i(t)$和$x_i(t)$分别为协状态向量$\lambda(t)$和状态向量$x(t)$的n个分量。

线性二次最优控制问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

目标函数为

$$J[u(\bullet)] = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

式中$A(t), B(t), Q(t), R(t)$连续或分段连续

F和$Q(t)$均为对称半正定矩阵，$R(t)$是对称正定矩阵，求$u(\bullet)$使$J[u(\bullet)]$极小。

定理1，$u^*(t)$是最优控制的充分必要条件

是$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t;t_f,F)x(t)$

其中$P(t;t_f,F)$是如下矩阵Ricatti方程的终值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dP(t)}{dt} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t) \\ P(t_f) = F \end{cases}$$

的解，$P(t;t_f,F)$是对称半正定矩阵，并且当$Q(t)$ 正定时，

$P(t;t_f,F)$ 也正定。目标函数的最小值为

$J^*(x(t_0),t_0) = \dfrac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0;t_f,F)x(t_0)$。最优轨线是初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t,t_f)]x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

的解。

时变系统无穷时间最优调节器

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

目标函数为

$$J[u(\bullet)] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

式中$A(t), B(t), Q(t), R(t)$在$[t_0, \infty)$连续或分段连续

$Q(t)$均为对称半正定矩阵，$R(t)$是对称正定矩阵.

容许控制集合为

$U_{[t_0,\infty)} = \{u(\bullet) \mid u(\bullet)$为$[t_0, \infty)$上的分段连续向量值函数,

$u(t) \in R^m$, 且使$J[u(\bullet)] < \infty\}$

求$u(\bullet)$使$J[u(\bullet)]$极小。

并非所有的时变系统无穷时间最优调节问题都存在最优调节器。

设

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\left\| x(t) \right\|^2 + \left\| u(t) \right\|^2 \right] dt$$

易知该控制系统的解为

$$x_1(t)=e^t$$

$$x_2(t)=\int_0^t e^{t-\tau}u(\tau)d\tau$$

将上式代入性能指标中得

$$J[u(\bullet)]=\frac{1}{2}\int_0^\infty\{e^{2t}+u^2(t)+[\int_0^t e^{t-\tau}u(\tau)d\tau]^2\}dt$$

显然，即使取$u(t)\equiv 0$, 亦有

$$J[u(t)\equiv 0]=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{2t}dt=\infty$$

从$J[u(\bullet)]$得表达式可知对任意得容许控制$u(\bullet)$，均有

$$J[u(\bullet)]\geq J[u(t)\equiv 0]=\infty$$

由于无法比较其性能指标的大小而使该问题的最优调节器不存在。

由于目标函数

$$J[u(\bullet)]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

可以表达为

$$J[u(\bullet)]=\lim_{t_f\to\infty}\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

因此可以将求时变系统无穷时间最优调节器视为求如下时变系统有限时间最优调节器的一个极限过程。

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+B(t)u(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

目标函数为

$$J_{t_f}(u)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

上述时变系统有限时间最优调节器的最优解为

$u_{t_f}^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t;t_f,O)x(t)$, 其中

$P(t;t_f,O)$是如下Ricatti微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{dP(t)}{dt} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t) \\ P(t_f) = O \end{cases}$$

的唯一非负定解。

引理1：假设线性时变系统$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+B(t)u(t)$

对任给的$t\in[0,\infty)$,都是t能控的，即存在$t_1>t$,使得

$$W(t,t_1)=\int_t^{t_1}\Phi(t_1,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_1,\tau)d\tau>0,$$

其中$\Phi(t,\tau)$是系统的状态转移矩阵，即对应$A(t)$ 的基本解阵。

设$P(t;t_f,O)$是如下Ricatti微分方程

$$\begin{cases}\frac{dP(t)}{dt}=-P(t)A(t)-A^T(t)P(t)+P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)-Q(t)\\ P(t_f)=O\end{cases}$$

的唯一非负定解，则$\lim_{t_f\to\infty}P(t;t_f,O)$存在。记$\overline{P}(t)=\lim_{t_f\to\infty}P(t;t_f,O)$,

$\overline{P}(t)$满足

$$\frac{d\overline{P}(t)}{dt}=-\overline{P}(t)A(t)-A^T(t)\overline{P}(t)+\overline{P}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\overline{P}(t)-Q(t)$$

设$P(t;t_f,O)$是如下Ricatti微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{dP(t)}{dt}=-P(t)A(t)-A^T(t)P(t)+P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)-Q(t)\\ P(t_f)=O\end{cases}$$

的唯一非负定解,$\overline{P}(t)=\lim_{t_f\to\infty}P(t;t_f,O)$。对任给的$t_0\geq 0$,

$\frac{1}{2}x_0^T\overline{P}(t_0)x_0$是以$(t_0,x_0)$为初始条件的时变系统无穷时间最优调节器的最优性能指标，且最优调节器为

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)\overline{P}(t)x(t),t\in[t_0,\infty)$$

定理2：　设对任给的$t\in[t_0,\infty)$, 线性时变系统

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$

都是t能控的，则时变系统无穷时间最优调节器的最优解存在且唯一，其最优调节器为

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)\bar{P}(t)x(t),\text{其中}\bar{P}(t)=\lim_{t_f\to\infty}P(t;t_f,O),$$

$P(t;t_f,O)$是如下Ricatti微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{dP(t)}{dt}=-P(t)A(t)-A^T(t)P(t)+P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)-Q(t)\\ P(t_f)=O\end{cases}$$

的唯一非负定解。

且$\bar{P}(t)$满足

$$\frac{d\bar{P}(t)}{dt}=-\bar{P}(t)A(t)-A^T(t)\bar{P}(t)+\bar{P}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\bar{P}(t)-Q(t)$$

引理2：设(A,B)能控，R为正定矩阵，Q为半正定矩阵。

设$P(t;t_f,O)$是如下Ricatti微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{dP(t)}{dt} = -P(t)A - A^T(t)P(t) + P(t)BR^{-1}B^TP(t) - Q \\ P(t_f) = O \end{cases}$$

的唯一非负定解，则$\bar{P}(t) = \lim_{t_f \to \infty} P(t;t_f,O) \equiv P$为一常值矩阵，

且满足

$$PA - A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = O$$

定常系统无穷时间最优调节器

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

目标函数为

$$J[u(\bullet)] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

Q为对称半正定矩阵，R是对称正定矩阵.

容许控制集合为

$U_{[t_0,\infty)} = \{u(\bullet) \mid u(\bullet)$为$[t_0,\infty)$上的分段连续向量值函数，

$u(t) \in R^m$，且使$J[u(\bullet)] < \infty\}$

求u使$J[u(\bullet)]$极小。

定理3： 若(A,B)完全能控，则定常系统无穷时间最优调节器的最优解存在且唯一，其最优调节器为

$u^*(t)=-R^{-1}B^T\bar{P}x(t)$, 其中$\bar{P}$是如下代数Ricatti微分方程

$$\bar{P}A+A^T\bar{P}-\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}+Q=O$$

的唯一非负定解。

当$u(t)$取为最优控制$u^*(t)$时，目标函数达到极小值

$$J^*[u^*(\bullet)]=J^*[x(t_0)]=\frac{1}{2}x_0^T\bar{P}x_0$$

最优轨线是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=[A-BR^{-1}B^TP]x(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

的解。