第十章

套利定价理论和风险收益

多因素模型

单因素模型

资产收益的不确定性有两个来源:

- 宏观经济因素
- 公司特有因素

可能的宏观经济因素

- 国内生产总值增长
- 利率

单因素模型的方程式

$$r_i = E(r_i) + \beta_i F + e_i$$

r_i = 资产收益

β_i= 因素敏感度、因子载荷、因子贝塔

F = 宏观经济因素的扰动项--偏离期望值的离差

(F 值可以是正的或负的，但必须是零期望值。)

e_i = 公司特有的扰动项(零期望值)

如果在任何时期宏观经济因素都为0，则证券收益=先前期望收益值E(r_i)加上公司特有事件引起的随机变量

单因素模型—举例

假定前式中宏观经济因素F反应所处的经济周期，由未预期到的GDP变化的百分比来衡量，如果普遍认为今年的GDP将会增长3%，而实际仅增加2%，则F值为-1%,代表实际增长与预期增长有-1%的离差。

给定股票β值为1.2，则预期的落空将造成股票收益率比之前预期的收益率低1.2%。这一未预期到的宏观变化和公司特有扰动项一起决定股票收益对于初始期望值的偏离。

多因素模型

- 因素模型将收益分为系统和公司两个层面是很有说服力的，但将系统性风险限定为由单因素造成的就不那么有说服力了。
- 使用多个因素来解释证券收益。
  - 例如：国内生产总值、预期通货膨胀、利率。
  - 使用多元回归来估计每个因素的贝塔值或因子载荷。

多因素模型的方程式

$$r_i = E(r_i) + \beta_{iGDP} GDP + \beta_{iIR} IR + e_i$$

r_i = 证券i的收益

β_{GDP} = 对GDP的因素敏感度

β_{IR} = 对利率的因素敏感度

e_i = 公司特有的扰动项

套利定价理论

多因素模型仅仅对证券收益的影响因素进行描述，并未回答E(r)来源。因此需要一个证券收益的理论模型—套利定价理论(arbitrate pricing theory, APT)。

APT有Steven A. Ross在1976年提出。

三个假设

1. 因素模型能描述证券收益
2. 市场上有足够多的证券来分散非系统性风险
3. 完善的市场不允许任何套利机会存在

套利定价理论

当不需要投资就可以赚取无风险利润时，就存在套利机会。

由于没有投资，投资者可以建立大量头寸，以获取巨额利润。

一价定律：如果两项资产在所有的经济性方面均相同，那它们应该具有相同的市场价格。

在一个无风险套利投资组合中，不管其风险厌恶程度和财富水平如何，投资者都愿意持有一个无限的头寸。

在有效市场中，可以获利的套利机会会很快消失。

套利机会举例

If all of these stocks cost $8 today, the payoffs are shown below. Is there an arbitrage opportunity?

Stock	Recession	Normal	Boom
A	12	7	15
B	8	13	5
C	9	9	9

Position	Recession	Normal	Boom
(A+B) / 2	($12+$8)/2=$10	($7+$13)/2=$10	($15+$5)/2=$10
C	$9	$9	$9

Arbitrage opportunity: Buy 1/2 share of A and 1/2 share of B, short 1 share of C, $0 initial investment, sure gain of $1 in the future

套利定价理论和充分分散的投资组合

单因素市场中一个由n只股票构成的投资组合P的风险收益率

$$r_P = E\ (r_P) + \beta_P F + e_P$$

$$F = \text{其他因素}$$

其中$\beta_\mathrm{P} = \sum w_i \beta_i$; $E(r_P) = \sum w_i E(r_i)$

投资组合风险

$$\sigma_\mathrm{P}^2 = \beta_P^2 \sigma_F^2 + \sigma^2(e_P)$$

$$\sigma^2(e_P) = \text{variance of} \left(\sum w_i e_i \right) = \sum w_i^2 \sigma^2(e_i)$$

对一个充分分散的投资组合（well-diversified potfolio），e_P

- 随着组合中资产数量的增加，e_p接近于0。
- 它们相关联的权重下降。
- 充分分散的投资组合定义：按照各自比例w_i分散投资于数量足够大的证券，从而降低非系统方差$\sigma^2(e_P)$，从而使之忽略不计

图 10.1 作为系统性风险函数的收益

对于充分分散的投资组合：$r_P = E(r_P) + \beta_P F$

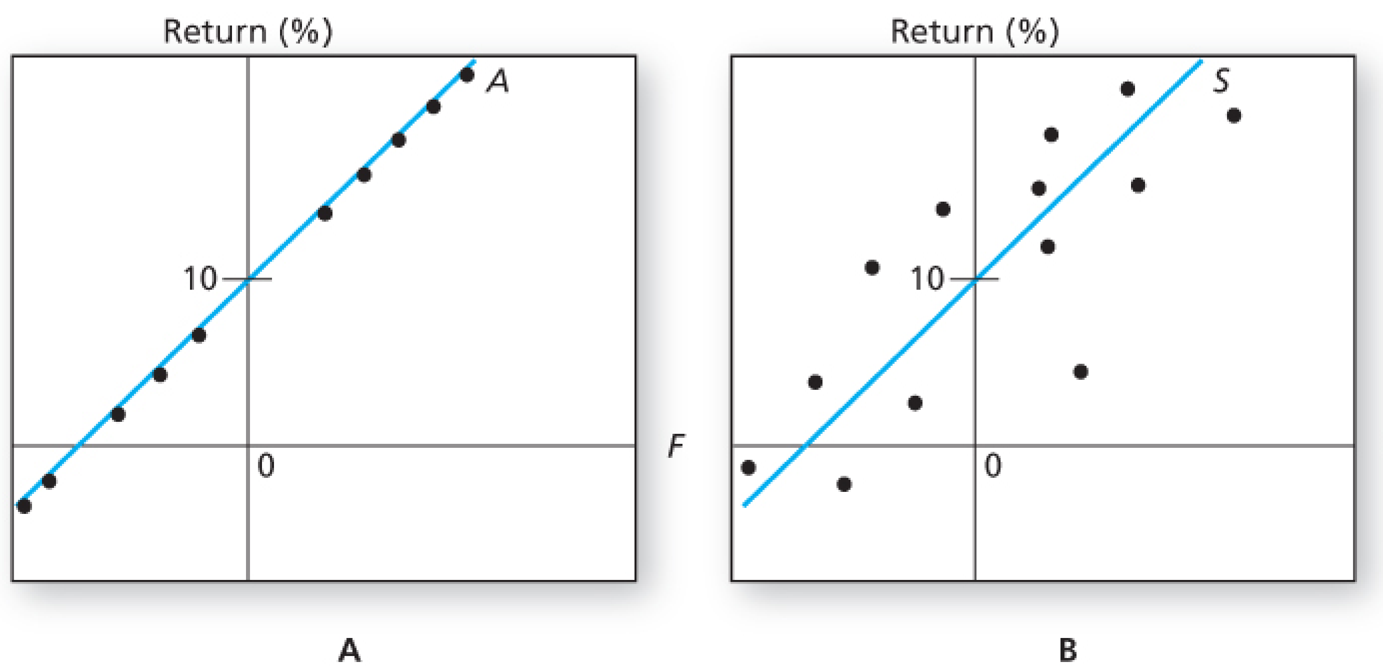

Figure 10.1 Returns as a function of the systematic factor.
Panel A, Well-diversified portfolio *A*. ***Panel B,*** Single stock (*S*).

实施套利

假设一个单因子市场，M为市场因子。则一个充分分散的组合P的超额收益满足

$$\mathrm{R}_P = \alpha_P + \beta_P R_M$$
$$E(R_P) = \alpha_P + \beta_P E(R_M)$$

假设组合P有一个正α。我们同时也可从宏观分析中估计得到M的风险溢价。

可以消除P的风险：使用P和M构建一个零β组合Z，其中P和M所占权重分别为w_P和w_M =1- w_P

$$\beta_Z = w_P\beta_P + (1- w_P)\beta_M = 0$$
$$\beta_M = 1$$
$$w_P = \frac{1}{1-\beta_P}; w_\mathrm{M} = \frac{-\beta_P}{1-\beta_P}$$

组合Z是无风险的，它的α是

$$\alpha_Z = w_P\alpha_P + (1- w_P)\alpha_\mathrm{M} = w_P\alpha_P$$

实施套利

Z的风险为0，若Z的风险溢价不为0，你将可以获得套利利润

因为Z的β为0，则Z的风险溢价就是α，所以

$$E(R_Z) = \alpha_Z = w_P\alpha_P = \frac{1}{1-\beta_P}\alpha_P$$

可从一个零和投资的套利组合中知道：如果$\beta_P < 1$且Z的风险溢价为正（$r_Z > r_f$），则应以无风险借款并投资于Z

随着套利者通过大量交易来追逐这些策略，会推动股价变动直至套利机会消失($E(R_Z)$=0)。

$E(R_Z)$=0意味着对任意充分分散化的组合P有

$$E(R_P) = \beta_P E(R_M)$$

图10.2作为系统性风险函数的收益：出现了套利机会

如果以100万美元卖空B并同时买进100万美元的A,可以获取2万美元的无风险收益

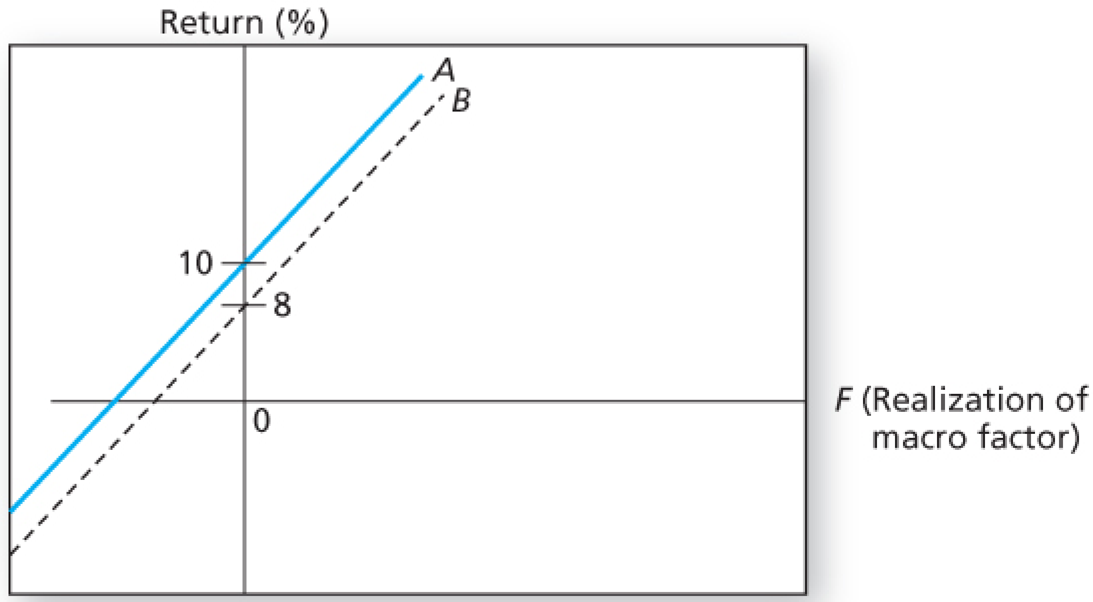

Figure 10.2 Returns as a function of the systematic factor: an arbitrage opportunity

图 10.3 一个套利机会

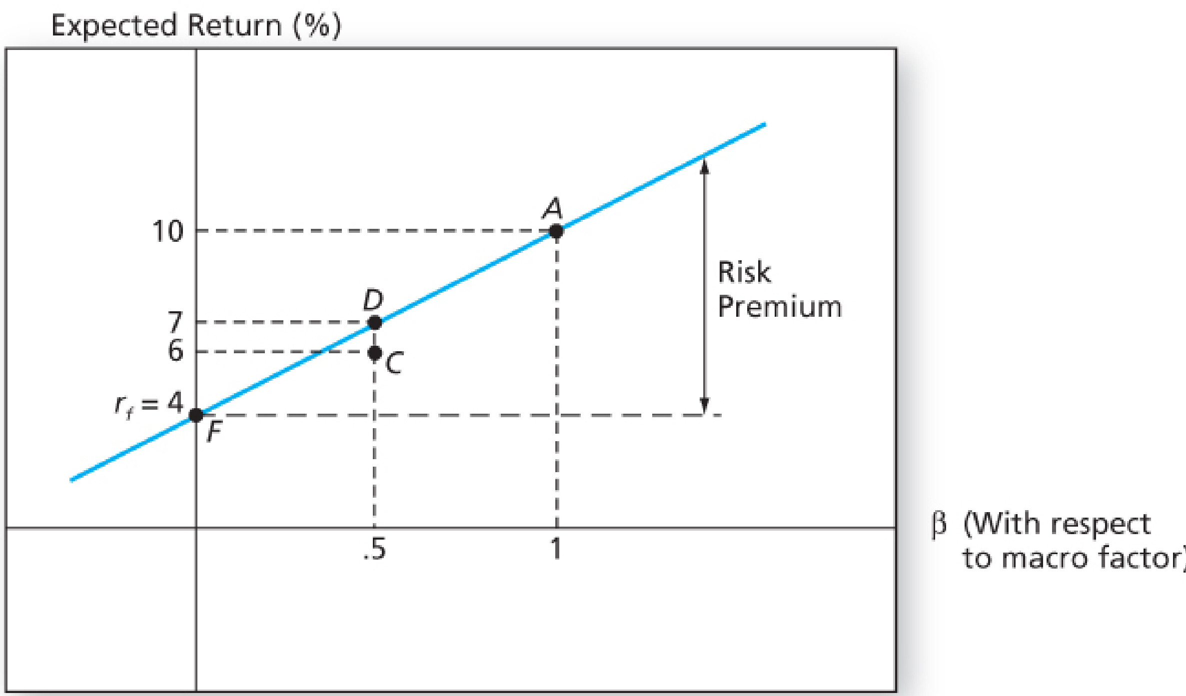

Figure 10.3 An arbitrage opportunity

实施套利—举例

假设R_f = 6%，系统性因素为S，充分分散的投资组合P的beta为 1.3，alpha为2%。另一个充分分散的投资组合Q的beta为0.9， alpha为1%.

存在套利机会吗?

实施套利—举例

Step 1: 用P和Q构建一个与第三种证券β相等的新组合（第三种证券为无风险资产，β =0）

$$\begin{cases} w_P\beta_P + w_Q\beta_Q = 0 \\ w_P + w_Q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_P = -2.25 \\ w_Q = 3.25 \end{cases}$$

Step 2: 计算新组合的α

$$\alpha_{NEW} = w_P\alpha_P + w_Q\alpha_Q = -2.25 * 2 + 3.25 * 1 = -1.25\%$$

所以新的无风险组合alpha为-1.25%. 期望收益为：$\mathrm{E}(r_{NEW}) = r_f + \alpha_{NEW} = 4.75\%.$

实施套利—举例

Step 3: 套利组合

因为新组合beta为零，期望收益低于无风险资产，那么套利组合将买入无风险资产，卖空新组合，可获1.25%的无风险收益。

Example: A complete portfolio

$$\begin{cases} short\ \$100\ of\ the\ New\ portfolio & \begin{cases} long\ \$225\ of\ P \\ short\ \$325\ of\ Q \end{cases} \\ long\ \$100\ in\ the\ risk-free\ asset \end{cases}$$

Your initial costs is 0 and final payoff is $1.25 for sure.

Arbitrage trading will drive up the prices of P and the risk-free asset, and drive down the price of Q. Mispricing should disappear quickly if market is efficient.

图 10.4 证券市场线

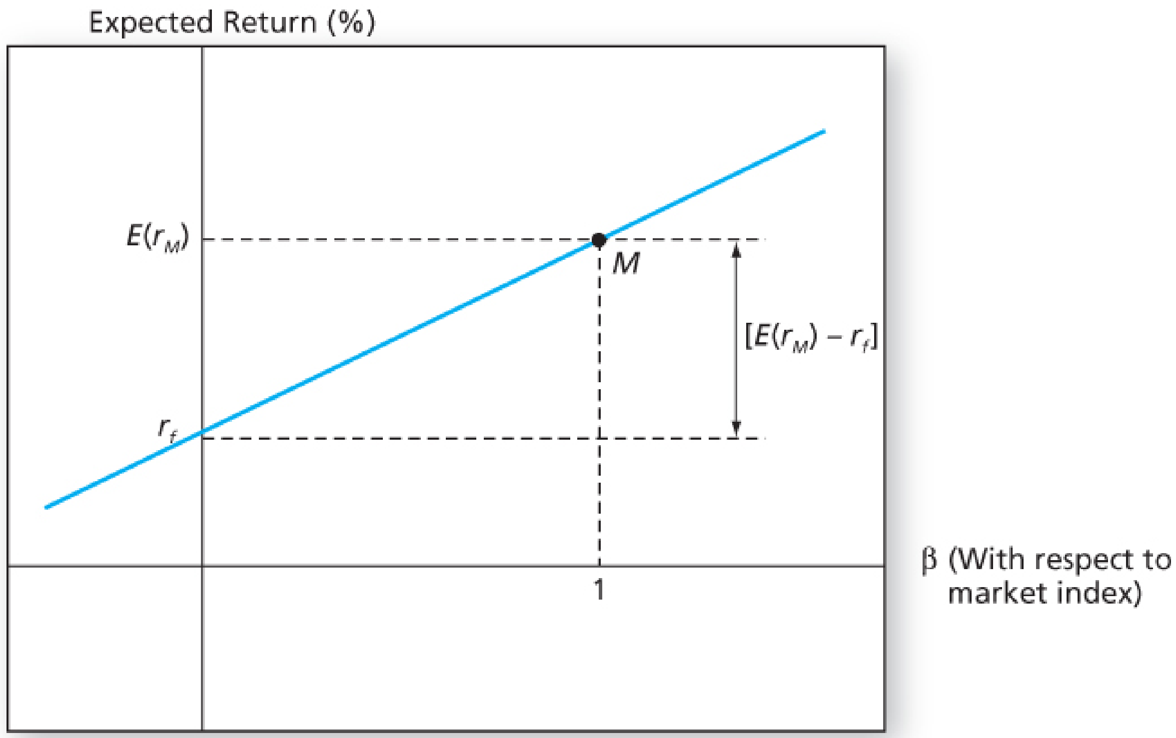

Figure 10.4 The security market line

套利定价理论模型

套利定价理论APT适用于多元投资组合，在单个股票中并不需要。

在没有基于证券市场线的情况下，在一些单个资产中使用套利定价理论有可能错误定价，

套利定价理论可以扩展为多因素的套利理论模型。

APT VS. CAPM

CAPM认为，当均衡关系被打破时，投资者在一定程度上改变他们的投资组合，这取决于它们的风险厌恶程度。这些有限的投资组合的加总将产生大量的买卖行为，从而重建均衡价格。

APT认为，当套利机会存在时，每个投资者都愿意尽可能多的持有头寸，因此不需要很多投资者就会给价格带来压力使价格恢复平衡。

APT得出的价格的意义要大于CAPM所得到的结论

套利定价理论（APT）和资本资产定价模型（CAPM）

APT

平衡意味着没有套利机会。

即便是很少的投资者注意到套利机会，APT 也会很快恢复平衡。

真正的市场投资组合可以得出期望收益–贝塔关系。

CAPM

模型建立在假设存在一个内生的不可观测的市场组合上。

依赖于均值方差的有效性。许多小投资者的行动迫使CAPM再次均衡。

CAPM 描述了所有资产的均衡。

多因素套利定价理论

使用不止一个系统因素。

需要形成纯因子组合(factor portfolio)。

- 一个充分分散的组合，对其中一个因素的β是1，对其他任何因素的β为0. 即追踪投资组合。

影响因素是什么?

- 影响整体宏观经济表现的因素
- 公司特有因素是什么?

两因素模型

$$r_i = E(r_i) + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + e_i$$

多因素套利定价理论同单因素定价理论相似。

跟踪多因素的纯因子组合:

- 只有一个因素时β =1
- 含有所有因素时β =0

纯因子组合的收益跟踪某些特殊的宏观经济风险来源的演变，而与其他的风险来源无关。

我们在哪里寻找风险?

- 需要最重要的风险因素
  - Chen, Roll, 和 Ross 使用工业产量、预期通货膨胀、未预期通货膨胀、长期公司债券相对于长期政府债券的超额收益、长期政府债券相对于国库券的超额收益。
  - 法玛和弗伦奇使用公司特征来代表系统性风险。

法玛-弗伦奇三因素模型

SMB = 小减大(公司规模)

HML = 高减低(账面-市值比)

公司特征与实际系统风险（实际上并不知晓）有联系吗?

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_{iM} R_{Mt} + \beta_{iSMB} SMB_t + \beta_{iHML} HML_t + e_{it}$$

多因素模型视频