第八章

指数模型

本章概览

单指数模型利弊

单指数模型

单指数模型的估计

组合构造与单指数模型

为什么?

马科维茨模型有两个缺陷

所需估计参数的庞大数量：假设你的证券分析师要分析50 只股票，这意味着输人数据如下:

- n = 50 个期望收益的估计值
- n = 50 个方差的估计值
- $(n^2 - n)/2$ = 1,225 个协方差的估计值
- $[2n+ (n^2 - n)/2]$ = 1,325 总共1325 个估计值

估计误差：马科维茨模型无法提供证券风险溢价的预测方法，而这又是构造有效边界所必需的

基本思想

一个*偶然的观察*：在相同的经济力量推动下，股票收益率往往一起变化。

基于这种观察，我们可以通过一个简单的模型模拟收益的产生过程。

正式化基本思想：收益率产生过程

总是可以将资产i的收益率与一个共同的潜在经济因素线性表示出来（通常选择为股票指数）

指数模型: 概述

指数模型是统计模型，用于估计特定证券或投资组合的风险的两个组成部分。

- 将资产的实际回报与系统性风险和公司特有风险这两部分联系起来.

优点

- 实用性：有效减少所需输入数据数量，简化了协方差和相关系数的估计
- 方便：证券分析专业化

单指数模型SINGLE-INDEX MODEL, SIM

$$R_i(t)=\alpha_i+\beta_i R_M(t)+e_i(t)$$

R_i = 超额收益= $r_i - r_f$

$R_M = r_M - r_f$，市场超额收益

β_i =敏感性系数，是证券i对市场波动的敏感度, $\beta_i = \frac{Cov(R_i,R_M)}{Var(R_M)}$, β_i 表示证券i的系统性风险

$\beta_i(r_m - r_f)$由于整体市场的波动带来的收益部分

α_i = 市场超额收益$r_M - r_f$为零(市场中性)时的股票i的期望收益率。一般为0

e_i =残值, 与这个证券（公司特有）相关的非预期事件形成的非预期收益成分

$E(e_i)$=0，在单指数模型中，我们假设$Cov[e_i, e_j] = 0$

一般将标准普尔500 这类股票指数的收益率视为共同宏观经济因素的有效代理指标， $R_M = R_{SP500}$

- 需要选择一个指数，以使e_i和e_j确实对任何两个资产都不相关
- 其价格和收益率易于观察。我们有足够的历史数据来估计系统性风险。

理解BETA

β 是证券收益对系统或市场因素的敏感度。

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$$

- **β > 1** 表示对市场的敏感度高于市场平均水平的股票。
- **β < 1**表示对市场的敏感度低于市场平均水平的股票.
- **β = 1**根据定义，市场组合R_M的β为1.

视频回顾

单指数模型

- 期望收益- β关系：$E(R_i)=\alpha_i+\beta_i E(R_M)$

- 个股方差 = $\sigma_i^2=\beta_i^2\sigma_M^2+\sigma^2(e_i)$

- 两股协方差= $\mathrm{Cov}(r_i,r_j)=\beta_i\beta_j\sigma_M^2$

- 相关系数 = $\mathrm{Corr}(r_i,r_j)=\dfrac{\beta_i\beta_j\sigma_M^2}{\sigma_i\sigma_j}=\dfrac{\beta_i\sigma_M^2\beta_j\sigma_M^2}{\sigma_i\sigma_M\sigma_j\sigma_M}$

$$=\mathrm{Corr}(r_i,r_M)\times\mathrm{Corr}(r_j,r_M)$$

基于SIM的资产系统性与非系统性风险

1. 风险溢价, $E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_M)$包括两部分

- 非市场溢价: α_i
- 系统性风险溢价: $\beta_i E(R_M)$

总风险溢价 = α + (β × 市场风险溢价)

2. 类似的，方差, $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma^2(e_i)$ 也包括两部分

- 公司特有风险: $\sigma^2(e_i)$
- 系统性风险: $\beta_i^2 \sigma_M^2$

总风险 = 系统性风险+公司特定风险

基于SIM的资产系统性与非系统性风险

3. 证券i与证券j的协方差，$\mathrm{Cov}\left(r_i, r_j\right) = \beta_i \beta_j \sigma_M^2$

协方差 = β的乘积×市场指数风险

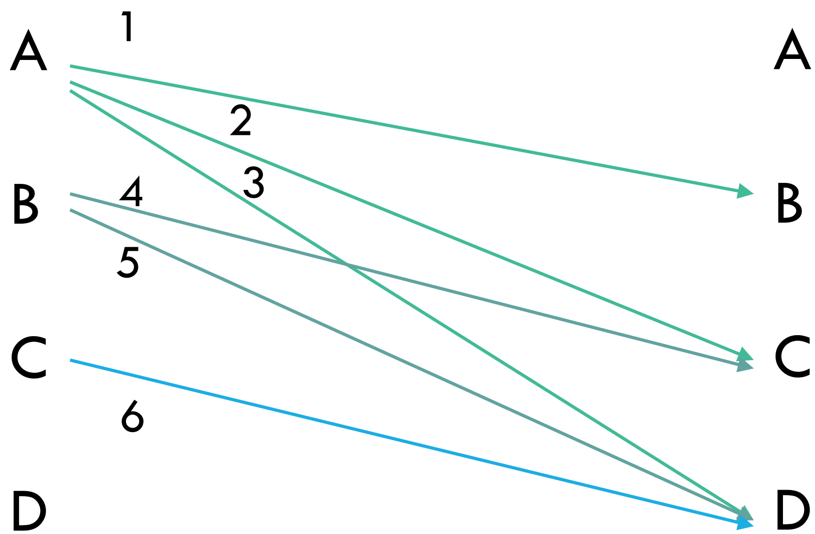
仅与系统性风险来源有关

4. 证券i与证券j的相关系数

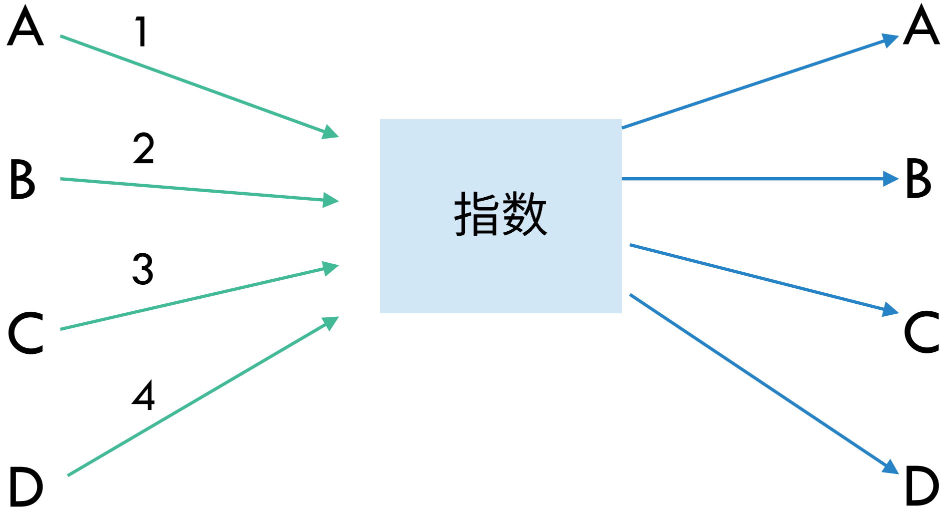
$$\mathrm{Corr}(r_i, r_M) \times \mathrm{Corr}(r_j, r_M)$$

相关系数 = 与市场之间的相关系数之积

资产直接配对



通过指数模型配对



单选题 1分

设置

Q1. 根据单指数模型，一对证券之间的协方差

A 受到市场指数收益率所代表的单一共同因素影响

B 与特定行业事件有关

C 通常为正.

D 非常难计算.

E A 和 C

提交

Q2.以下数据描绘了一个由三只股票组成的金融市场，满足单指数模型.

股票	市值(美元)	β	平均超额收益率	标准差
A	$3,000	1.0	10%	40%
B	$1,940	0.2	2%	30%
C	$1,360	1.7	17%	50%

市场指数组合的标准差为25% ，请问:

a.市场指数投资组合的平均超额收益率为多少?

b. 股票A与股票B间的协方差是多少?

c. 股票B与指数之间的协方差是多少?

d. 将股票B的方差分解为市场和公司两部分

单指数模型为什么有用?

SIM提供了最简单的工具来量化决定资产回报的因素

- 过于简化: SIM假设不同资产的相关结构取决于单一因素 （但实践中可能需要更多因素）

SIM通过减少对Markowitz投资组合选择模型的必要输入，帮助我们获得资产配置的最优投资组合（切线投资组合P）

单指数模型需要估计的参数

	Symbol
1. The stock's expected return if the market is neutral, that is, if the market's excess return, $r_M - r_f$, is zero	α_i
2. The component of return due to movements in the overall market; β_i is the security's responsiveness to market movements	$\beta_i(r_M - r_f)$
3. The unexpected component of return due to unexpected events that are relevant only to this security (firm specific)	e_i
4. The variance attributable to the uncertainty of the common macroeconomic factor	$\beta_i^2\ \sigma_M^2$
5. The variance attributable to firm-specific uncertainty	$\sigma^2(e_i)$

n α_i

n β_i, 1 R_M

n e_i

1 σ_M^2

单指数模型：3n+2 parameters for n securities

马科维茨模型：$2n+(n^2-n)/2$

指数模型和分散化

包含n只股票的投资组合P的超额收益为

$$R_P = \alpha_P + \beta_P R_M + e_P$$

组合方差

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma^2(e_P)$$

等权重组合的方差，其公司部分是：

$$\sigma^2(e_P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2(e_i) = \frac{1}{n}\overline{\sigma}^2(e)$$

当n变大时, $\sigma^2(e_p)$ 趋于零，公司层面的风险会被消除。

图 8.1 单因素经济中BETA系数为B$_P$等权重组合方差

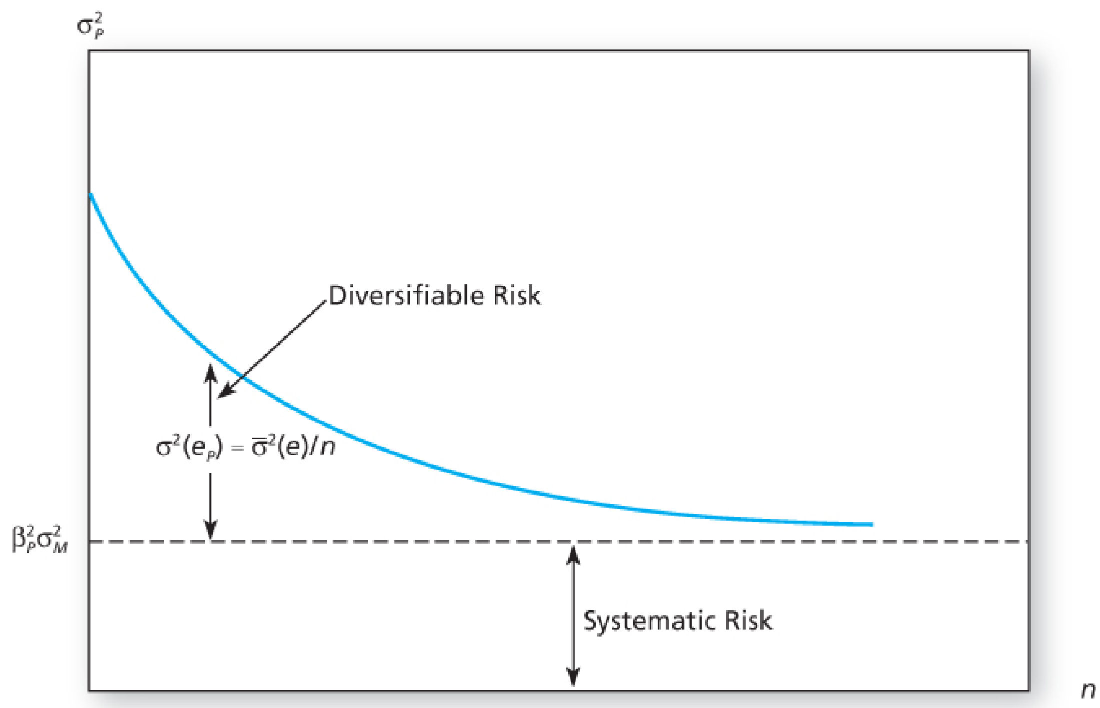


Figure 8.1 The variance of an equally weighted portfolio with risk coefficient β_P in the single-factor economy

Q3 下表是两只股票的估计.

股票	期望收益	Beta	公司特定标准差
A	13%	0.8	30%
B	18%	1.2	40%

市场指数标准差为22%， 无风险利率为8%.

a. 股票 A 和 B 的标准差是多少?

b. 假设我们建立一个权重如下的投资组合:

股票 A: .30

股票B: .45

短期国债: .25

计算组合的期望收益、标准差、β 和非系统性标准差.

Q3 SUGGESTED SOLUTION

a. 股票 A 和 B 的标准差 $\sigma_i = [\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma^2(e_i)]^{1/2}$

$$\sigma_A = (0.8^2 \times .22^2 + .30^2)^{1/2} = 34.78\%$$

$$\sigma_B = (1.2^2 \times .22^2 + .40^2)^{1/2} = 47.93\%$$

b.组合的期望收益是每个证券预期收益的加权平均值

$$E(r_P) = w_A \times E(r_A) + w_B \times E(r_B) + w_f \times r_f$$

$$E(r_P) = (0.30 \times 13\%) + (0.45 \times 18\%) + (0.25 \times 8\%) = 14\%$$

组合的β是每个证券β的加权平均值

$$\beta_P = w_A \times \beta_A + w_B \times \beta_B + w_f \times \beta_f$$

$$\beta_P = (0.30 \times 0.8) + (0.45 \times 1.2) + (0.25 \times 0.0) = 0.78$$

Q3 SUGGESTED SOLUTION

c. 组合方差 $\sigma_P^2 = \beta_P^2\sigma_M^2 + \sigma^2(e_P)$

其中 $\beta_P^2\sigma_M^2$为系统性成分， $\sigma^2(e_P)$为非系统性成分，由于残差（e_i）是不相关的，所以非系统性方差是

$$\sigma^2(e_P) = w_A^2 \times \sigma^2(e_A) + w_B^2 \times \sigma^2(e_B) + w_f^2 \times \sigma^2(e_f)$$

$$= (0.30^2 \times .30^2) + (0.45^2 \times .40^2) + (0.25^2 \times 0) = 0.0405$$

$$\sigma(e_P) = (0.0405)^{1/2} = 20.12\%$$

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2\sigma_M^2 + \sigma^2(e_P)$$

d. 组合方差

$$\sigma_P^2 = (0.78^2 \times .22^2) + 0.0405 = 0.0699$$

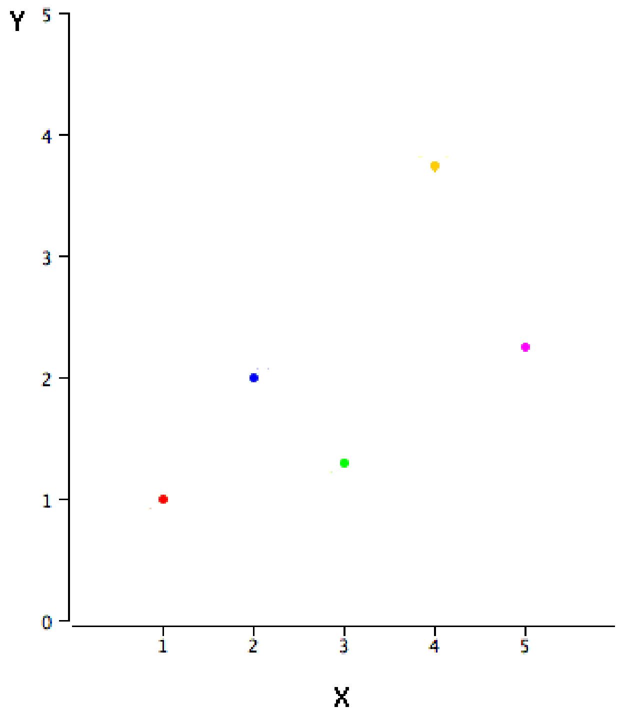
$$\sigma_P = 26.45\%$$

估计单指数模型

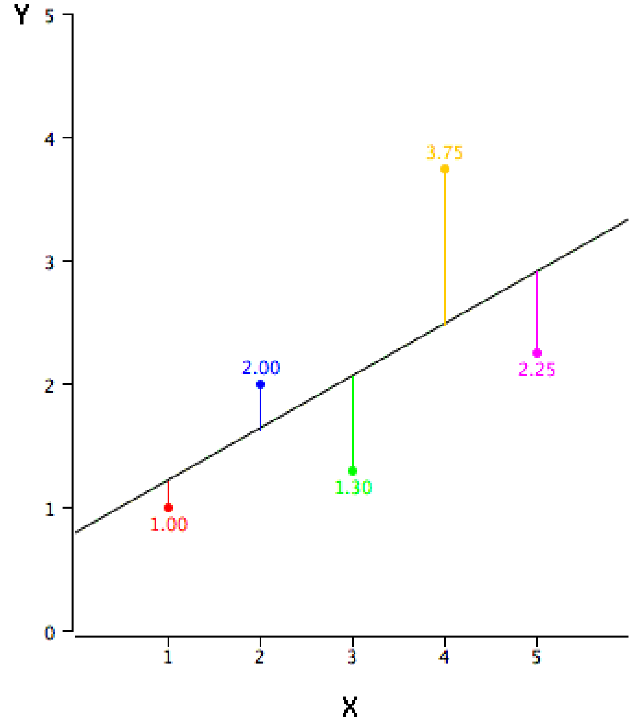
线性回归预测法

X	Y
1.00	1.00
2.00	2.00
3.00	1.30
4.00	3.75
5.00	2.25

示例数据



示例数据的散点分布图



黑实线表示拟合出的**回归线**，彩色点表示实际观测值，彩色垂直线段表示预测误差

线性回归

- 最小二乘法
- 最常用的目标函数是最小误差平方和

X	Y	Y'	Y-Y'	$(Y-Y')^2$
1.00	1.00	1.210	-0.210	0.044
2.00	2.00	1.635	0.365	0.133
3.00	1.30	2.060	-0.760	0.578
4.00	3.75	2.485	1.265	1.600
5.00	2.25	2.910	-0.660	0.436

回归方程:

Y' = bX + A

其中 Y' 是预测值, b 是斜率, A 是截距

斜率b可通过下式计算:

b=cov(X,Y)/ σ_X^2

$A = \bar{Y} - b\bar{X}$

一个综合案例

市场指数如何驱动个股如惠普公司(HP)的收益?

步骤

- 收集HP和标普500超额收益率的历史数据
  - 一般用5年的月度数据，每个时间序列有60个观测值
- 线性回归： R_{HP} 为因变量， R_{SP500}为自变量
- 回归方程为 $R_{HP}(t) = \alpha_{HP} + \beta_{HP} R_{SP500}(t) + e_{HP}(t)$
- 其中α_{HP} (“alpha”) 是截距
- β_{HP} (“beta”)是斜率
- e_{HP}是回归残差

这条拟合的回归线叫做惠普的证券特征线 (security characteristic line, SCL)

图 8.2 S&P 500 和 HP的超额收益

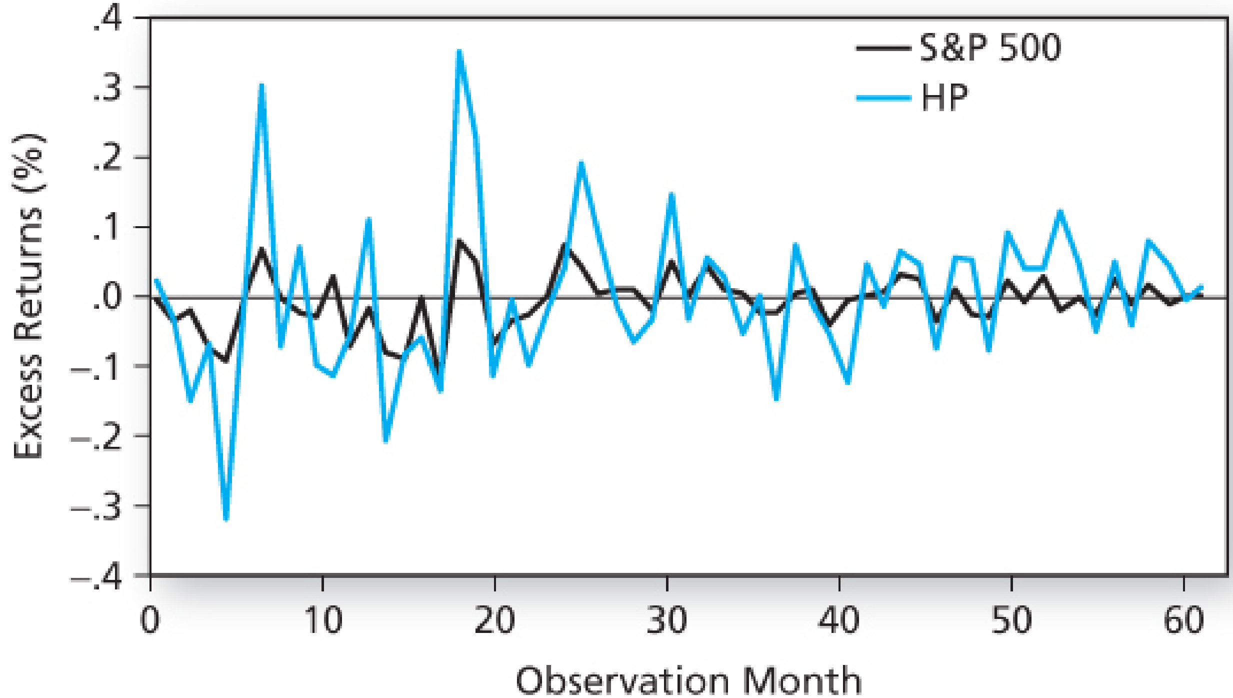


Figure 8.2 Excess returns on HP and S&P 500

图8.3 HP和S&P 500的散点分布图，惠普的证券特征线

$$R_{HP}(t)=\alpha_{HP}+\beta_{HP}R_{S\&P500}(t)+e_{HP}(t)$$

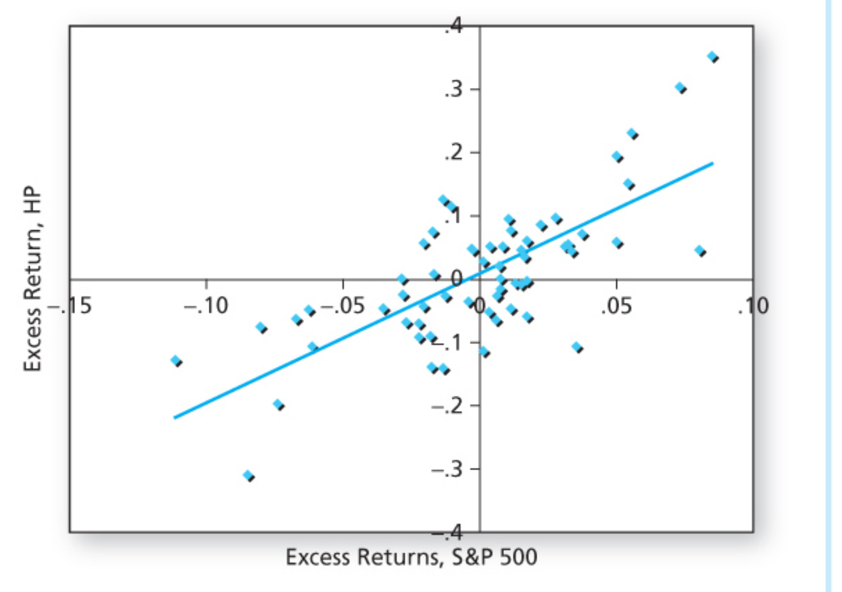
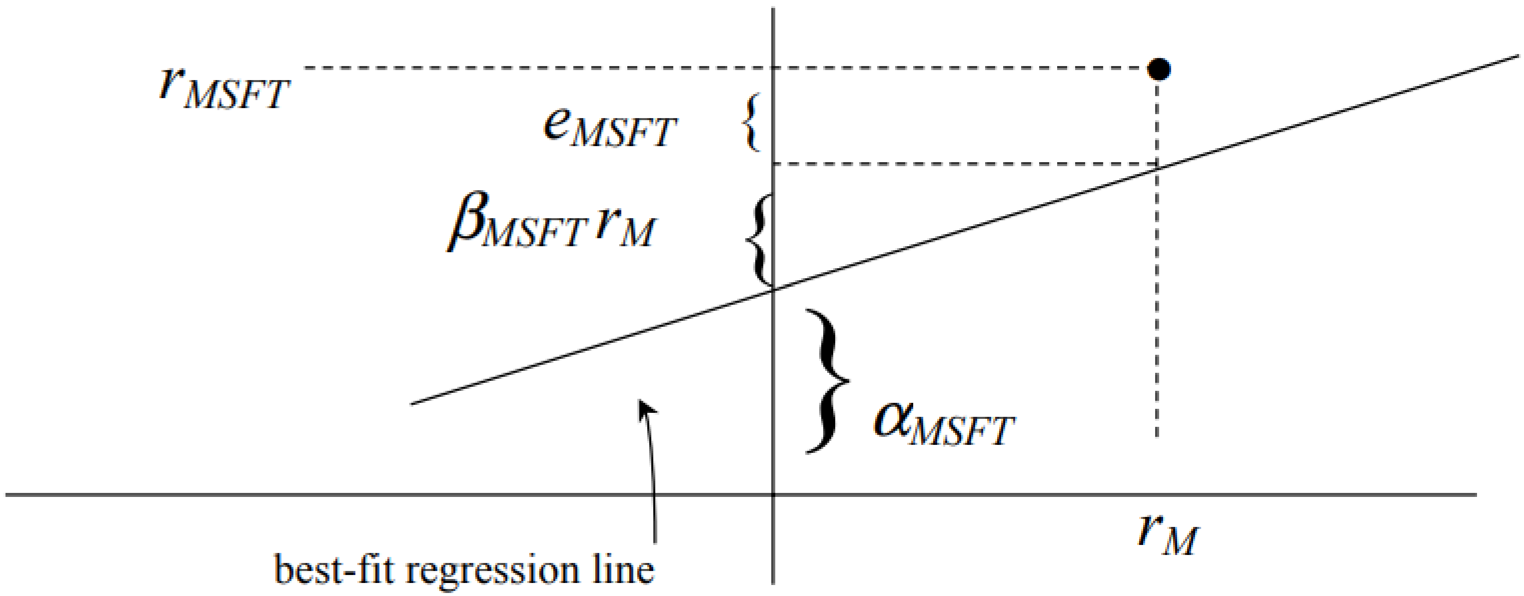


Figure 8.3 Scatter diagram of HP, the S&P 500, and the security characteristic line (SCL) for HP



r_{MSFT}
e_{MSFT}
$\beta_{MSFT}\, r_M$
α_{MSFT}
r_M
best-fit regression line

表8.1 EXCEL 输出：HP证券特征线的回归统计

Regression Statistics	
Multiple R	.7238
R-square	.5239
Adjusted R-square	.5157
Standard error	.0767
Observations	60

$$R^2 = \frac{SSRegression}{SSTotal}$$

ANOVA

$Sum\ of\ squares$ $Mean\ squares$

	df	SS		MS
Regression	1	$\sum(Y' - \bar{Y})^2$	.3752	.3752
Residual	58	$\sum(Y - Y')^2$	.3410	.0059
Total	59	$\sum(Y - \bar{Y})^2$	.7162	

	Coefficients	Standard Error	*t-Stat*	*p-Value*
Intercept	0.0086	.0099	0.8719	.3868
S&P 500	2.0348	.2547	7.9888	.0000

表8.3的解释

惠普（HP）和标准普尔500（ S&P 500）的相关性高达 0.7238。

此模型可以解释惠普方差的52%左右-R^2。

惠普的α是0.86%每月（年化后达10.32%），但在统计上不显著。

惠普的β系数是2.0348, 但 95% 的置信区间是 1.43 ~2.53.

图8.4 组合资产的超额收益

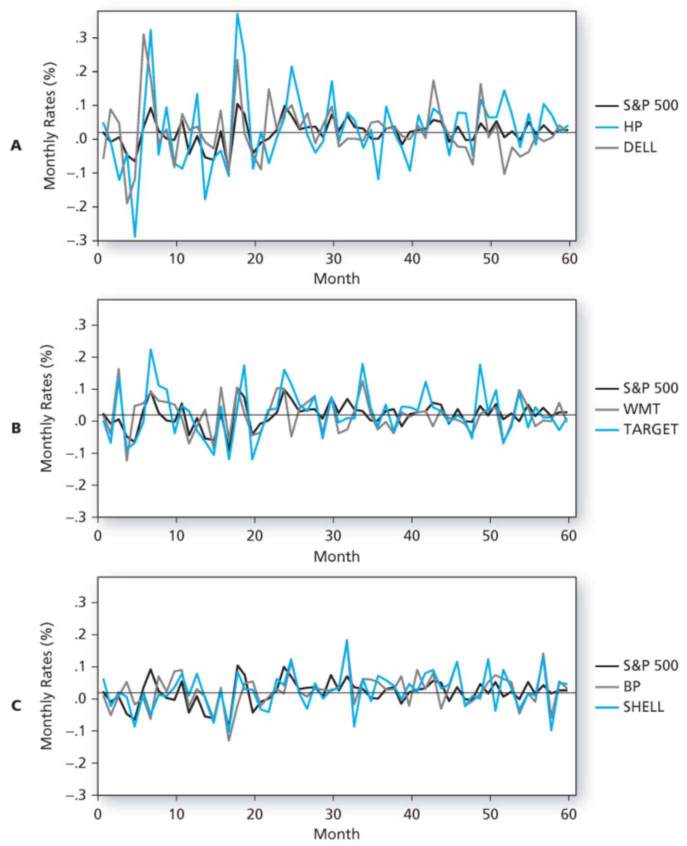
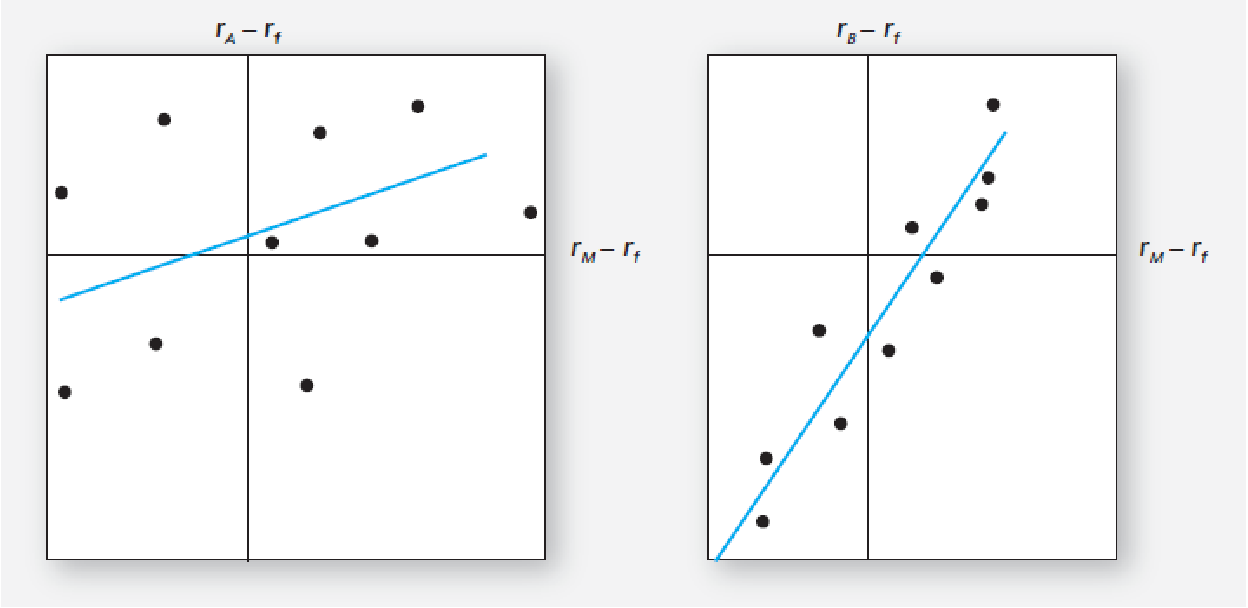


Figure 8.4 Excess returns on portfolio assets

Q4. 考虑图中股票A和B的回归线



1. 哪只股票的公司特定风险更高?
2. 哪只股票的系统性风险更高?
3. 哪只股票的R^2更高?
4. 哪只股票的α更高?
5. 哪只股票和市场的相关性更高?

α和证券分析

1. 宏观经济分析，用于估计市场指数的风险和风险溢价。 R_M, σ_M
2. 统计分析，用于估计β系数和残差的方差$\sigma^2(e_i)$.
3. 用市场指数风险溢价和证券β系数的估计值来建立证券的期望收益，这不需要相关的证券分析。以市场驱动的期望收益作为一个基准
4. 使用证券分析来发展个人关于证券特有期望收益α的预测。α 值反映了证券分析中发现的私人信息带来的增量风险溢价

α的更多讨论

是决定一个证券是否有投资吸引力的核心变量

alpha >0: 被低估. 增持

alpha <0: 被高估. 卖空

单指数模型的输入数据

标准普尔500的风险溢价, R_M

标准普尔500的标准差估计值, σ_M

n 套如下估计

- β系数估计值
- 个股残差的方差
- 证券的α值

单指数模型的最优风险组合

最大化夏普比率

- 期望收益, 标准差, 夏普比率:

$$E(R_P) = \alpha_P + E(R_M)\beta_P = \sum_{i=1}^{n+1} w_i\alpha_i + E(R_M)\sum_{i=1}^{n+1} w_i\beta_i$$

$$\sigma_P = \left[\beta_P^2\sigma_M^2 + \sigma^2(e_P)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sigma_M^2\left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i\beta_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2\sigma^2(e_i)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$S_P = \frac{E(R_P)}{\sigma_P}$$

指数模型比全协方差模型差吗?

- 原理上马科维茨模型更好，但是:
  - 运用全协方差矩阵需要估计数以千计的风险值。
  - 太多的估计误差积累对投资组合的影响可能使其实际上劣于单指数模型推导出来的投资组合。
  - 单指数模型的实际好处是分解了宏观分析和证券分析。

图 8.5 指数模型与全协方差模型的有效边界

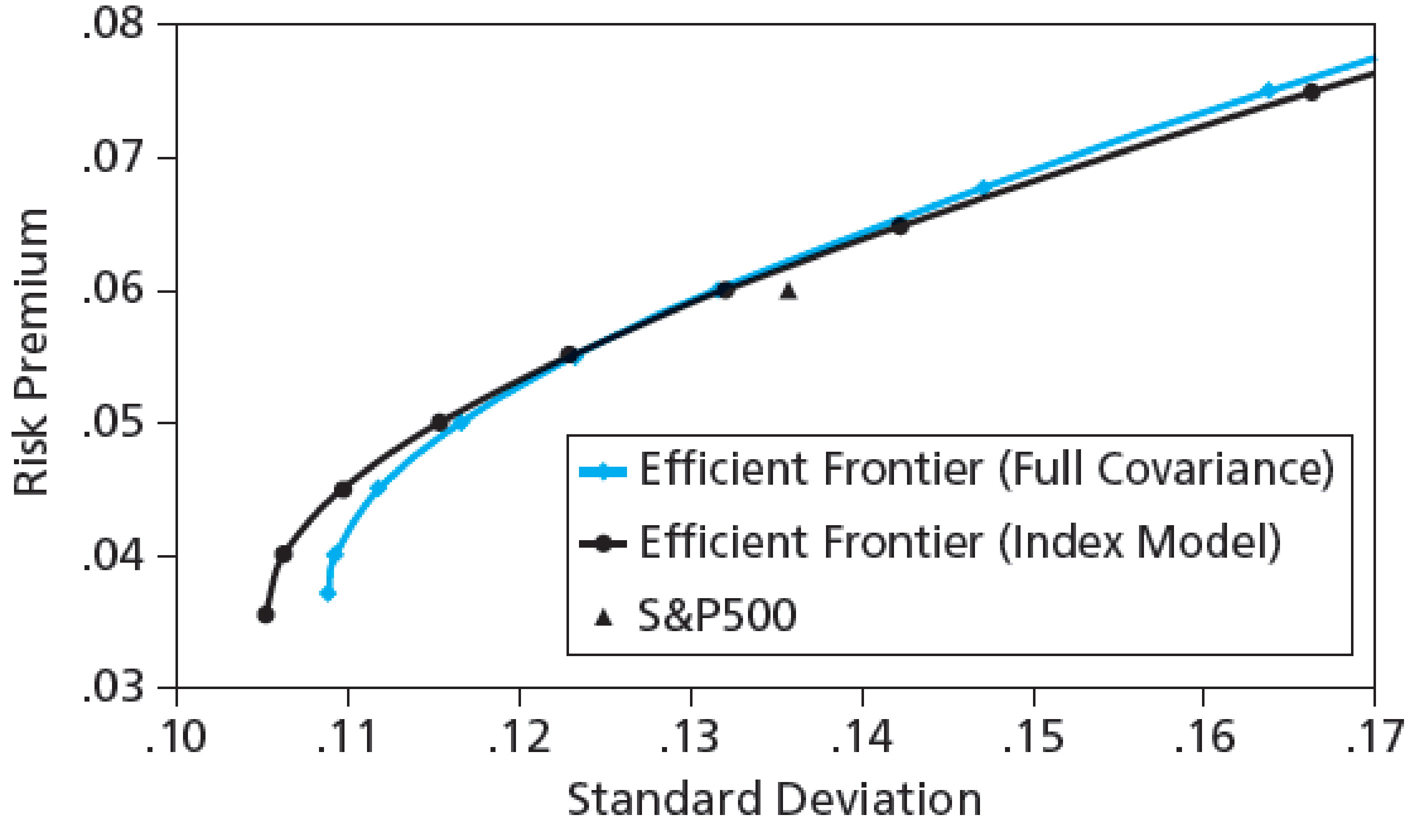


表8.2 指数模型和全协方差模型的对比

Table 8.2

Comparison of portfolios from the single-index and full-covariance models

	Global Minimum Variance Portfolio		Optimal Portfolio	
	Full-Covariance Model	Index Model	Full-Covariance Model	Index Model
Mean	.0371	.0354	.0677	.0649
SD	.1089	.1052	.1471	.1423
Sharpe ratio	.3409	.3370	.4605	.4558
Portfolio Weights				
S&P 500	.88	.83	.75	.83
HP	−.11	−.17	.10	.07
DELL	−.01	−.05	−.04	−.06
WMT	.23	.14	−.03	−.05
TARGET	−.18	−.08	.10	.06
BP	.22	.20	.25	.13
SHELL	−.02	.12	−.12	.03

BETA 指引：行业指数模型

使用最近60个月的价格β。

使用标准普尔500指数作为市场组合的代理。

忽略股息计算总回报。

不使用超额收益来估计指数模型： $r = a + br_m + e^*$

而不是： $r - r_f = \alpha + \beta(r_M - r_f) + e = r_f + \alpha + \beta(r_M - r_f) + e$

$$= \alpha + r_f(1 - \beta) + \beta r_M + e$$

两式有相同的自变量和残差，因此回归斜率相同，只是截距不同

$$a = \alpha + r_f(1 - \beta)$$

Ticker Symbol	Security Name	BETA	ALPHA	RSQ	Residual Std Dev	Std Error Beta	Standard Error Alpha	Adjusted Beta
AMZN	Amazon.com	2.25	0.006	0.238	0.1208	0.5254	0.0156	1.84
F	Ford	1.64	−0.012	0.183	0.1041	0.4525	0.0135	1.43
NEM	Newmont Mining Corp.	0.44	0.002	0.023	0.0853	0.3709	0.0110	0.62
INTC	Intel Corporation	1.60	−0.010	0.369	0.0627	0.2728	0.0081	1.40
MSFT	Microsoft Corporation	0.87	0.001	0.172	0.0569	0.2477	0.0074	0.91
DELL	Dell Inc.	1.36	−0.014	0.241	0.0723	0.3143	0.0094	1.24
BA	Boeing Co.	1.42	0.004	0.402	0.0517	0.2250	0.0067	1.28
MCD	McDonald's Corp.	0.92	0.016	0.312	0.0409	0.1777	0.0053	0.95
PFE	Pfizer Inc.	0.65	−0.006	0.131	0.0504	0.2191	0.0065	0.77
DD	DuPont	0.97	−0.002	0.311	0.0434	0.1887	0.0056	0.98
DIS	Walt Disney Co.	0.91	0.005	0.278	0.0440	0.1913	0.0057	0.94
XOM	ExxonMobil Corp.	0.87	0.011	0.216	0.0497	0.2159	0.0064	0.91
IBM	IBM Corp.	0.88	0.004	0.248	0.0459	0.1997	0.0059	0.92
WMT	Walmart	0.06	0.002	0.002	0.0446	0.1941	0.0058	0.38
HNZ	HJ Heinz Co.	0.43	0.009	0.110	0.0368	0.1599	0.0048	0.62
LTD	Limited Brands Inc.	1.30	0.001	0.216	0.0741	0.3223	0.0096	1.20
ED	Consolidated Edison Inc.	0.15	0.004	0.101	0.0347	0.1509	0.0045	0.43
GE	General Electric Co.	0.65	−0.002	0.173	0.0425	0.1850	0.0055	0.77
	MEAN	0.97	0.001	0.207	0.0589	0.2563	0.0076	0.98
	STD DEVIATION	0.56	0.008	0.109	0.0239	0.1039	0.0031	0.37

Table 8.3

Market sensitivity statistics: Regressions of total stock returns on total S&P 500 returns over 60 months, 2004–2008

Source: Compiled from CRSP (University of Chicago) database.

$$\alpha + r_f(1 - \beta)$$

BETA指引：行业指数模型

所有证券的平均β值是1。 因此，我们最好的预测就是其β值等于1.

当公司变得越来越传统，其值越趋向于1。

$$调整\beta = \frac{2}{3}样本\beta + \frac{1}{3}\ (1)$$

预测BETA

一个简单的方法是收集不同期β数据，估计回归方程

$$当前的\beta = a + b(历史\beta)$$

得到a和b的估计值，用该公式预测未来值

$$预测的\beta = a + b(当前的\beta)$$

或者

$$当前的\beta = a + b_1(历史\beta) + b_2(公司规模) + b_3(负债比率)$$

罗森伯格和盖伊（1976）

- 收入变量
- 现金流变量
- 每股收益增长率
- 市值
- 股息收益
- 资产负债比率

表8.4 行业B和调整因素

Industry	Beta	Adjustment Factor
Agriculture	0.99	−.140
Drugs and medicine	1.14	−.099
Telephone	0.75	−.288
Energy utilities	0.60	−.237
Gold	0.36	−.827
Construction	1.27	.062
Air transport	1.80	.348
Trucking	1.31	.098
Consumer durables	1.44	.132

Table 8.4

Industry betas and adjustment factors

具有正调整因子的行业总是对经济更为敏感。 企业的商业风险较高，所以beta更高。

CRITICAL THINKING 1

Is it right to say that a well-diversified portfolio must be on the efficient frontier?

No. It is right to say that a portfolio on the efficient Frontier is well diversified. But it is a logical fallacy (improper transposition) to assume the inverse.

A well-diversified portfolio does not have to be on the efficient frontier. Take a Gold ETF for an example. It contains no idiosyncratic risk but it doesn't necessarily have the highest expected return per given level of risk.