金 融 工 程 学

第2章 无套利定价原理

开课单位：金融工程课程组

主讲：吴冲锋,周春阳

上海交通大学
安泰经济与管理学院

1. 什么是套利?

- **商业贸易中的”套利”行为?**

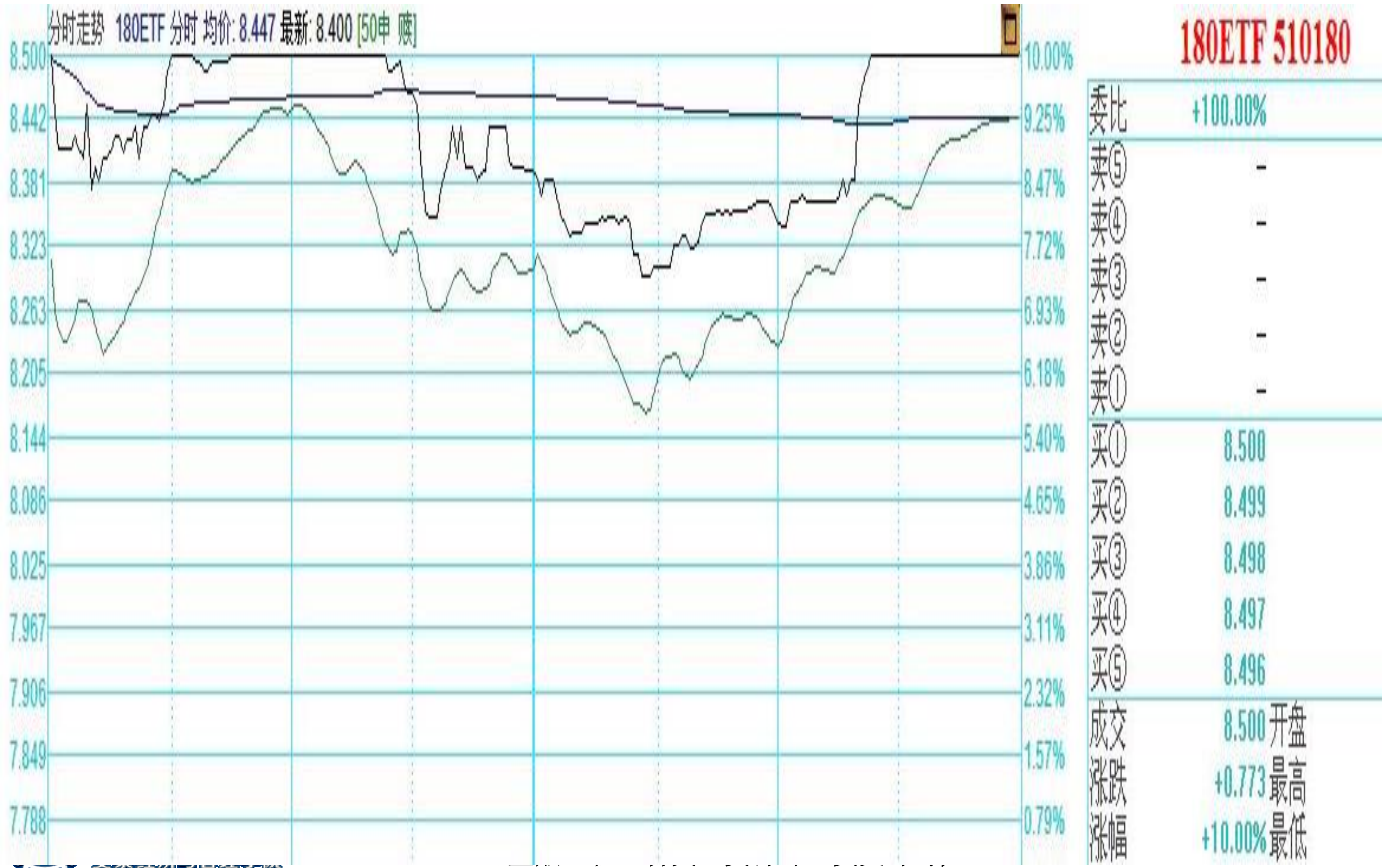
例如1：一个贸易公司在与生产商甲签订一笔买进10吨铜合同的同时，与需求商 乙 签订一笔卖出10吨铜合同：即贸易公司与生产商甲约定以55,000元/吨的价格从甲那里买进10吨铜，同时与需求商乙约定把这买进的10吨铜以57,000元/吨的价格卖给乙，并且交货时间相同。这样，1吨铜赚取差价2,000元/吨。

这是套利行为吗?

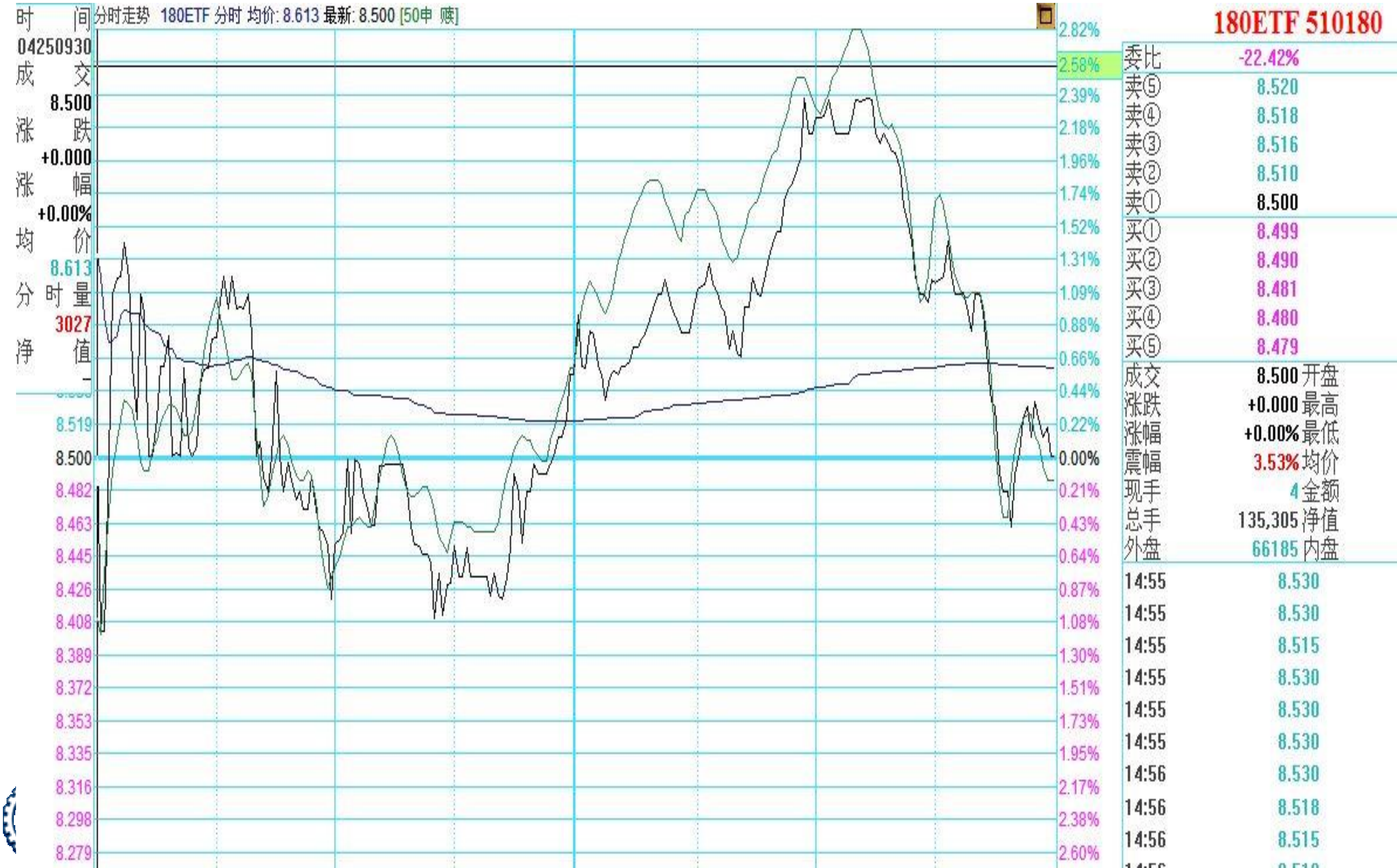
金融市场中的套利行为

- 金融市场的独特性使得影响套利的这些条件大大地减弱。
- （1）专业化交易市场
- （2）电子化、无形化、数字化
- （3）卖空机制可能大大增加了套利的便利
- （4）在时间和空间上的多样性也使得套利更为便捷

4月24日ETF180套利



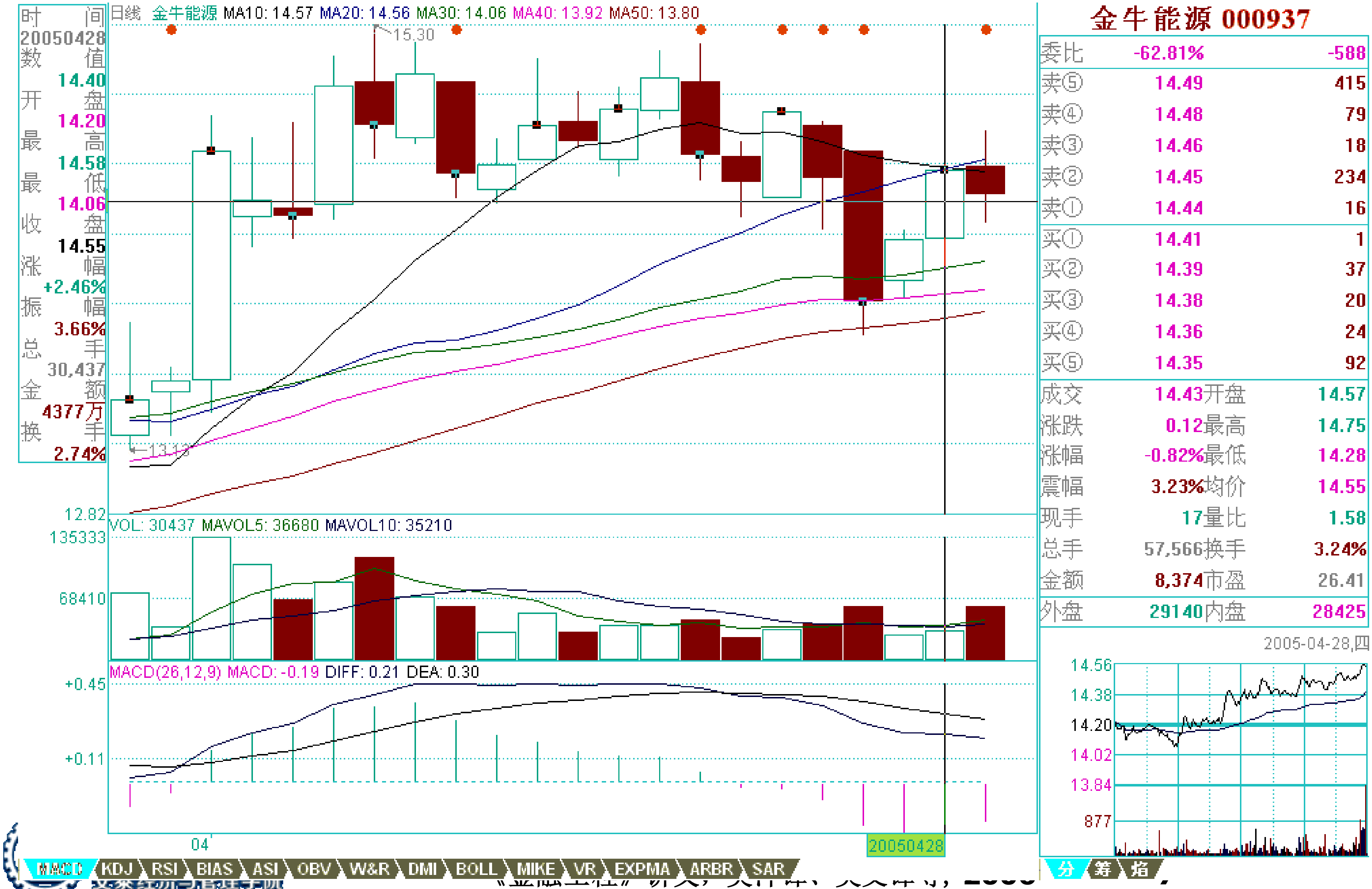
4月25日ETF180套利?



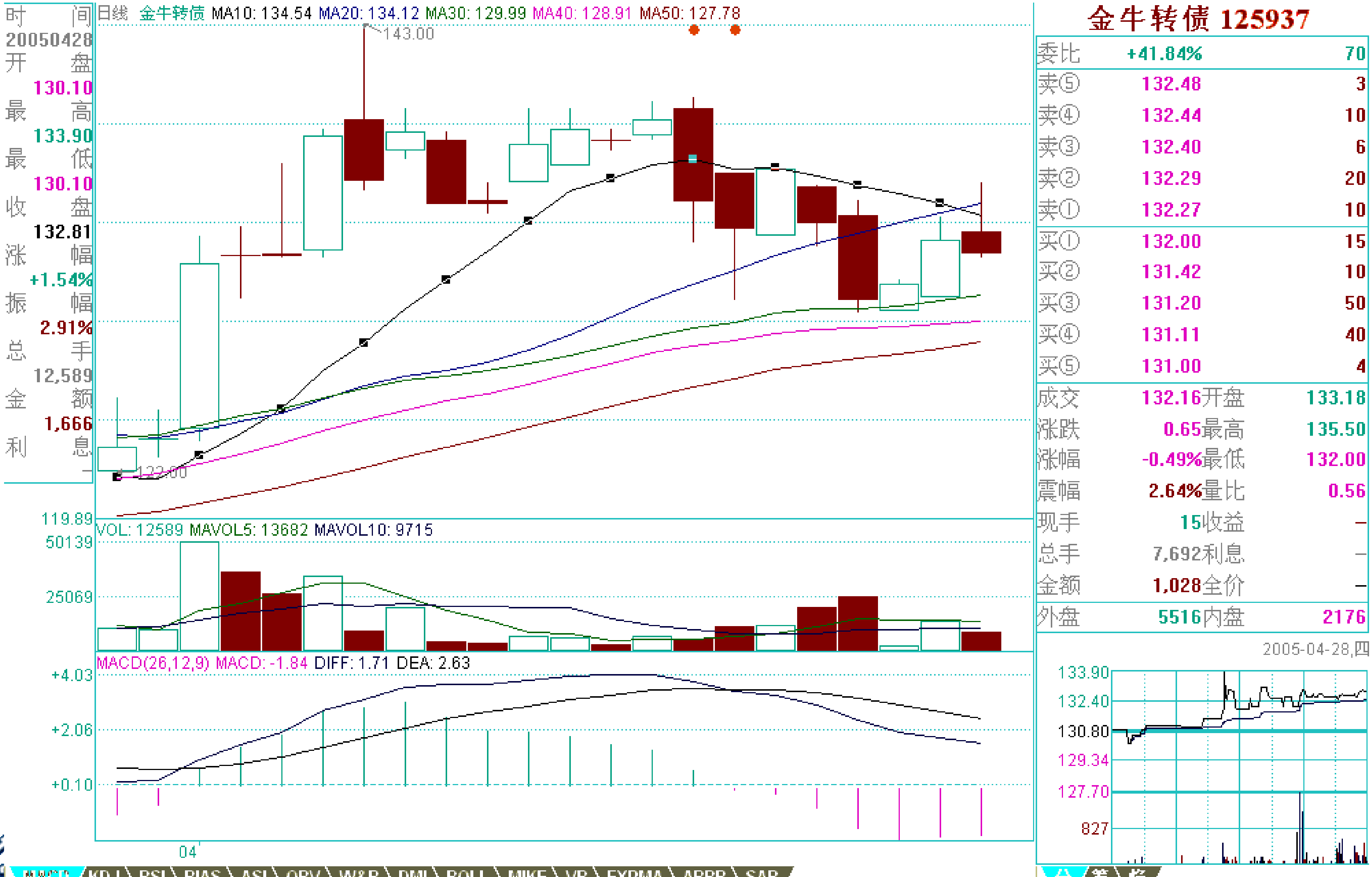
换股中的套利 2007.11.29

- 包头铝业 50.73
- 中国铝业 38.90
- 换股比例 1:1.48
- 38.90X1.48=57.57
- 2007年10月15日创下60.60元最高价到2008年10月29日创下5.90元最低价,合并停牌日12月20日.

金牛能源与转债之间套利的例子



转股价10.81元，100元转9.2507股,134.6元



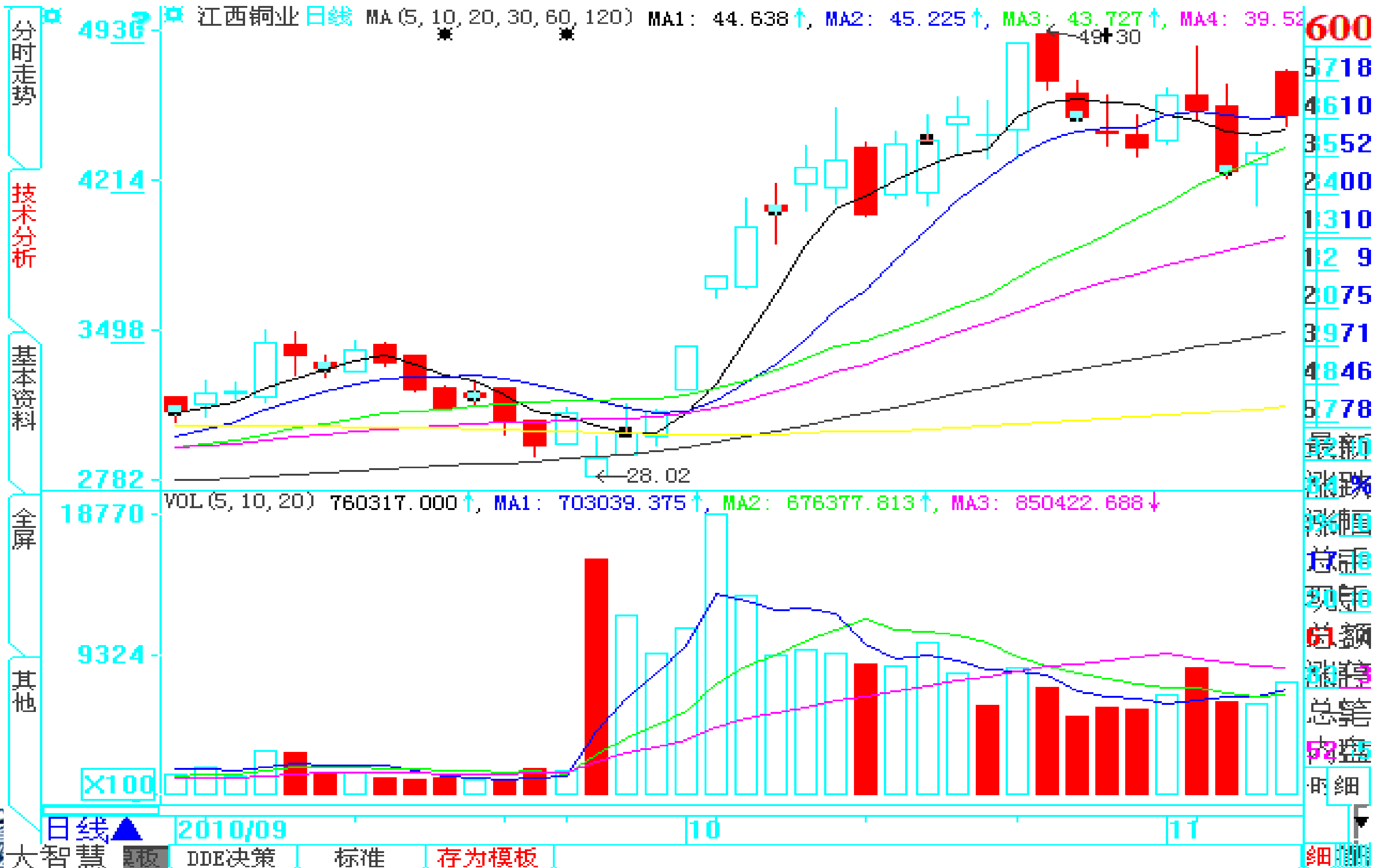
江西铜业权证中的套利问题?

- 2010年4月21日
- 权证价为4.198
- 股票价为35.78
- 执行价为15.4
- 执行比例4:1
- 15.4+4.198*4=32.192(不考虑时间价值)
- 35.78-32.192=3.588(不考虑融券成本)
- 3.588/16.792=21%

江西铜业权证中的套利问题?(续)

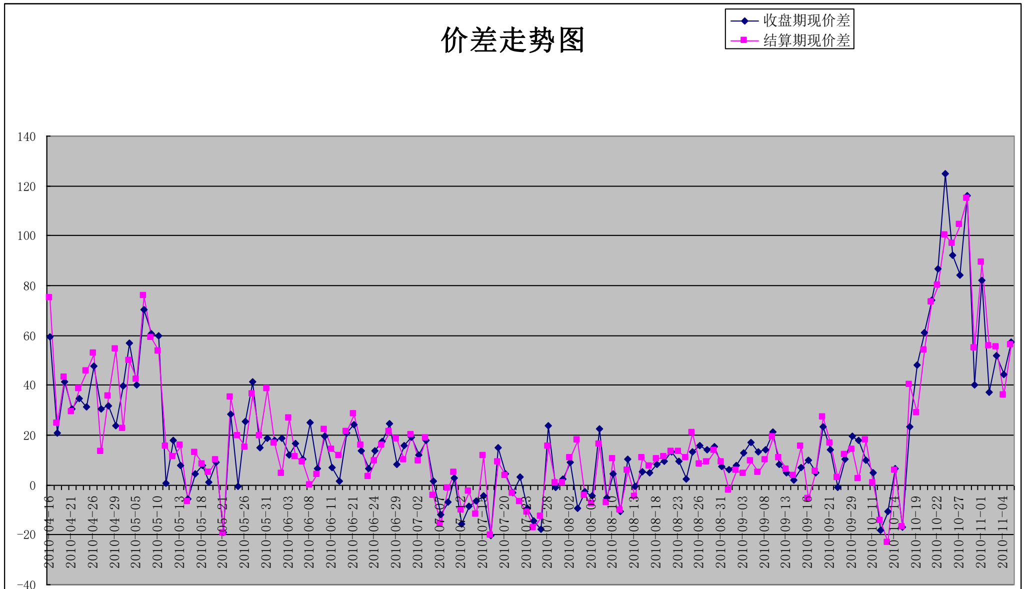
- 2010年9月21日
- 权证价为2.776
- 股票价为29.49
- 执行价为15.33
- 15.33+2.776*4=26.434(不考虑时间价值)
- 29.49-26.43=3.06
- 3.06/4/2.776=27%

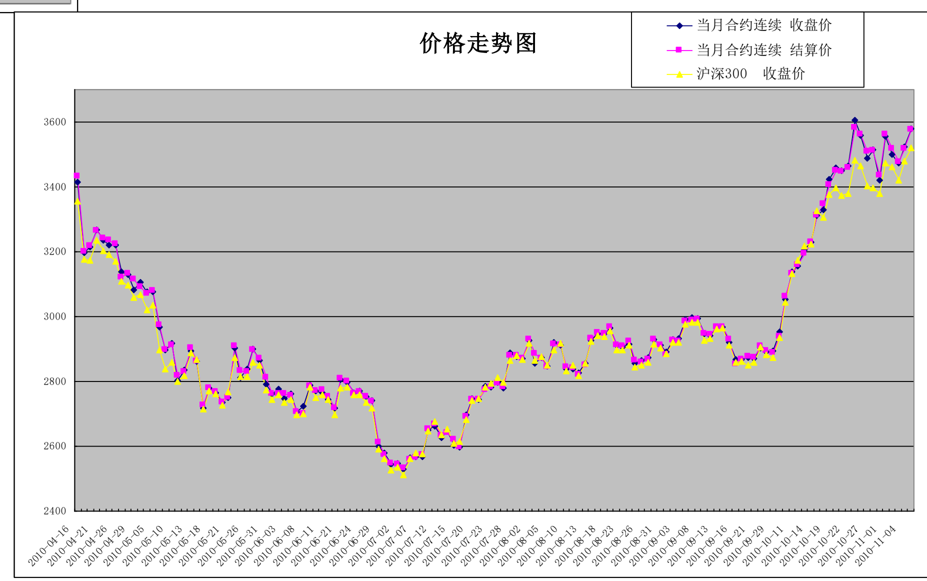
江西铜业 2010.09.03-11.05



2010.4.16-11.05

沪深300即期期货指数-现货指数





无风险套利的定义

- 在金融理论中，套利指一个能产生无风险盈利的交易策略。这种套利是指纯粹的无风险套利。但在实际市场中，套利一般指的是一个预期能产生很低风险的盈利策略，即可能会承担一定的低风险。

无套利定价原理

- 金融市场上实施套利行为变得非常的方便和快速。这种套利的便捷性也使得金融市场的套利机会的存在总是暂时的，因为一旦有套利机会，投资者就会很快实施套利而使得市场又回到无套利机会的均衡中。
- 因此，无套利均衡被用于对金融产品进行定价。金融产品在市场的合理价格是这个价格使得市场不存在无风险套利机会，这就是“无风险套利定价”原理或者简称为“无套利定价”原理。
- 什么情况下市场不存在套利机会呢？我们先看一下无风险套利机会存在的等价条件：

无风险套利机会存在的等价条件

- （1）存在两个不同的资产组合，它们的未来损益（payoff）相同，但它们的成本却不同；在这里，可以简单把损益理解成是现金流。如果现金流是确定的，则相同的损益指相同的现金流。如果现金流是不确定的，即未来存在多种可能性（或者说存在多种状态），则相同的损益指在相同状态下现金流是一样的。

- （2）存在两个相同成本的资产组合，但是第一个组合在所有的可能状态下的损益都不低于第二个组合，而且至少存在一种状态，在此状态下第一个组合的损益要大于第二个组合的损益。
- （3）一个组合其构建的成本为零，但在所有可能状态下，这个组合的损益都不小于零，而且至少存在一种状态，在此状态下这个组合的损益要大于零。

无套利机会的等价性推论

- 不存在交易成本条件下
- （1）同损益同价格：如果两种证券具有相同的损益，则这两种证券具有相同的价格。
- （2）静态组合复制定价：如果一个资产组合的损益等同于一个证券，那么这个资产组合的价格等于证券的价格。这个资产组合称为证券的“复制组合”（replicating portfolio）。

• （3）动态组合复制定价：如果一个自融资（self-financing）交易策略最后具有和一个证券相同的损益，那么这个证券的价格等于自融资交易策略的成本。这称为动态套期保值策略（dynamic hedging strategy）。所谓自融资交易策略简单地说，就是交易策略所产生的资产组合的价值变化完全是由于交易的盈亏引起的，而不是另外增加现金投入或现金取出。一个最简单的例子就是购买并持有(buy and hold)策略。

确定状态下无套利定价原理的应用

- 1、同损益同价格 （例子2）
- 假设两个零息票债券A和B，两者都是在1年后的同一天到期，其面值为100元（到期时都获得100元现金流，即到期时具有相同的损益）。如果债券A的当前价格为98元，并假设不考虑交易成本和违约情况。
- 问题：（1）债券B的当前价格应该为多少呢？
- （2）如果债券B的当前价格只有97.5元，问是否存在套利机会？如果有，如何套利？

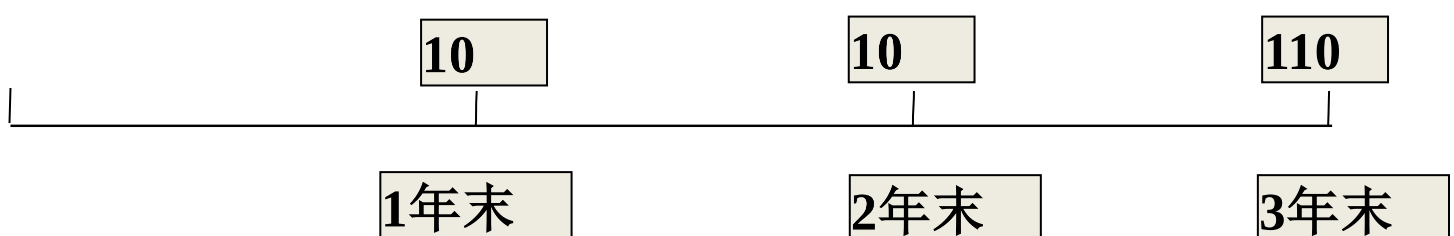
上海交通大学 安泰经济与管理学院

- （1）按照无套利定价原理，债券B与债券A具有一样的损益（现金流），所以债券B的合理价格也应该为98元。
- （2）当债券B的价格为97.5元时，说明债券B的价值被市场低估了。那么债券B与债券A之间存在套利机会。
- 实现套利的方法很简单，买进价值低估的资产-债券B，卖出价值高估的资产-债券A。所以，套利的策略就是：卖空债券A，获得98元，用其中的97.5元买进债券B，这样套利的盈利为0.5元。因为，在1年后到期日，债券B的面值刚好用于支付卖空债券A的面值。

2、静态组合复制定价（例子3）

- 假设3种零息票的债券面值都为100元，它们的当前市场价格分别为：
- ① 1年后到期的零息票债券的当前价格为97元；
- ② 2年后到期的零息票债券的当前价格为94元；
- ③ 3年后到期的零息票债券的当前价格为90元；
- 并假设不考虑交易成本和违约。
- 问题：（1）如果息票率为10%，1年支付1次利息的三年后到期的债券A的当前价格应该为多少？
- （2）如果息票率为10%，1年支付1次利息的三年后到期的债券A的当前价格为120元，问是否存在套利机会？如果有，如何套利？

- 对于第一个问题，我们只要按照无套利定价原理的推论（2），去构造一个“复制组合”就可以了。先看一个息票率为10％，1年支付1次利息的三年后到期的债券的损益情况。面值为100元，息票率为10％，所以在第1年末、第2年末和第3年末的利息为100×10％＝10元，在第3年末另外还支付本金面值100元。如图所示：

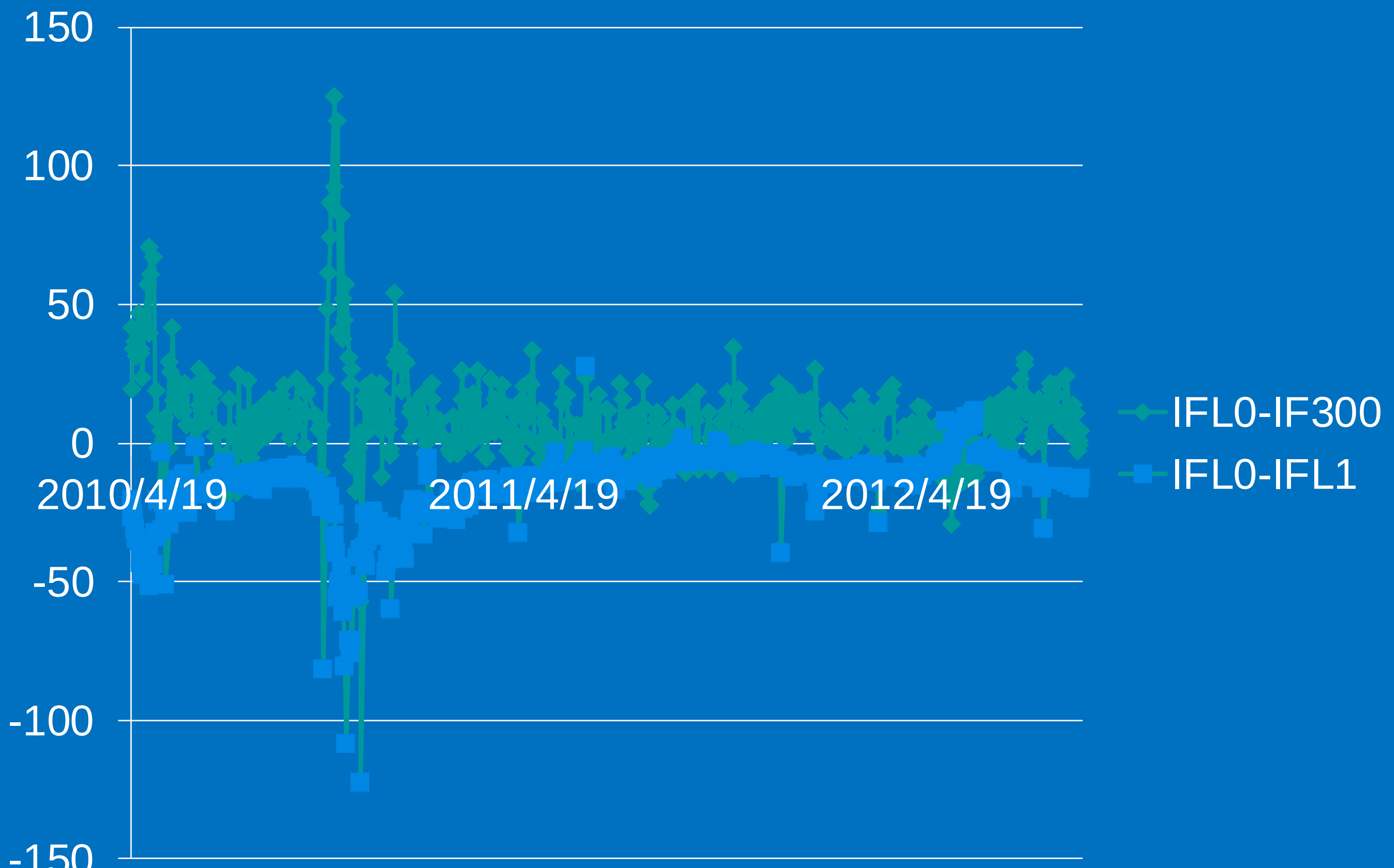


- 构造相同损益的复制组合为：
- （1）购买0.1张的1年后到期的零息票债券，其损益刚好为100×0.1＝10元；
- （2）购买0.1张的2年后到期的零息票债券，其损益刚好为100×0.1＝10元；
- （3）购买1.1张的3年后到期的零息票债券，其损益刚好为100×1.1＝110元；
- 所以上面的复制组合的损益就与图所示的损益一样，因此根据无套利定价原理的推论（2），具有相同损益情况下证券的价格就是复制组合的价格，所以息票率为10％，1年支付1次利息的三年后到期的债券的当前价格应该为：
- 0.1×97＋0.1×94＋1.1×90＝118.1

- 对于第二个问题，其原理与例子2类似，债券A的当前价格为120元，大于应该价格118.1元，因此根据无套利定价原理，存在套利机会。当前市场价格为120元，而无套利定价的价格为118.1元，所以市场高估了这个债券的价值，则应该卖出这个债券，然后买进复制组合。即基本的套利策略为：
- （1）卖出1张息票率为10％，1年支付1次利息的三年后到期的债券A；
- （2）买进0.1张的1年后到期的零息票债券；
- （3）买进0.1张的2年后到期的零息票债券；
- （4）买进1.1张的3年后到期的零息票债券；

跨期套利

- 价差=远期-近期
- 正向套利，是指同一时间内以某一低价格买入近期合约或现货，以某一高价格卖出远期合约。（预期价差减小）
- 反向套利，在同一时间内以某一低价格买入远期合约，以某一高价格卖出近期合约或现货。（预期价差增加）


150
100
50
0
-50
-100
-150
2010/4/19
2011/4/19
2012/4/19
IFL0-IF300
IFL0-IFL1

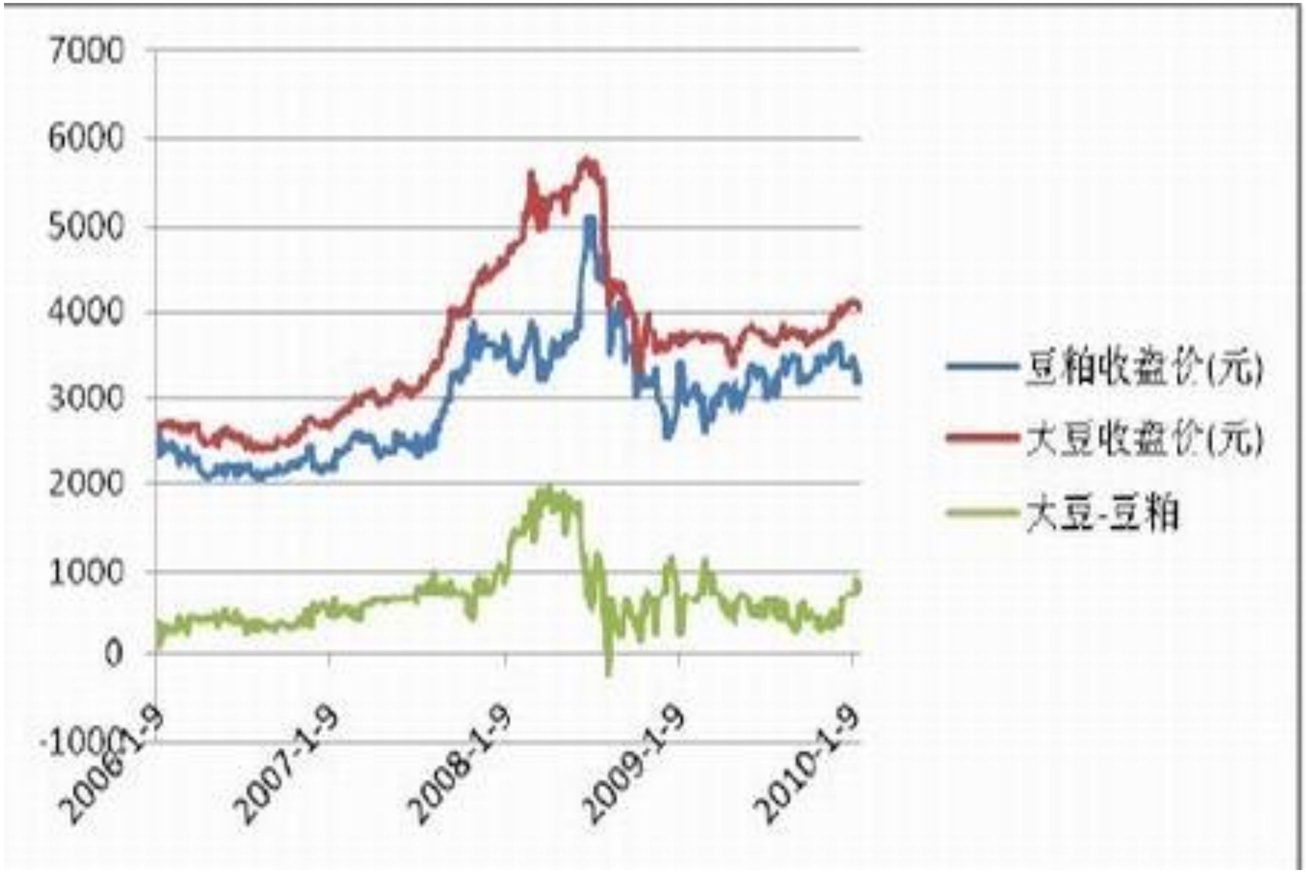
期现套利：如何构建现货指数？

- 自己构建股票组合跟踪现货指数。
- 目前沪深两市有两只跟踪沪深300 指数的ETF：华泰柏瑞沪深300ETF和嘉实沪深300ETF。

跨品种套利

- 替代品：豆油和棕榈油

上下游：大豆和豆油



7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
-1000
2006-1-9
2007-1-9
2008-1-9
2009-1-9
2010-1-9
豆粕收盘价(元)
大豆收盘价(元)
大豆-豆粕

产品链

- 压榨价差(Crash spread):
  – 大豆->豆油+豆粕
- 裂解价差(Crack Spread):
  – 原油->无铅汽油+燃料油

3、动态组合复制定价（例子4）

- 假设从现在开始1年后到期的零息票债券的价格为98元。从1年后开始，在2年后到期的零息票债券的价格也为98元。并且假设不考虑交易成本和违约情况。
- 问题：（1）从现在开始2年后到期的零息票债券的价格为多少呢？
- （2）如果现在开始2年后到期的零息票债券价格为97元，问是否存在套利机会？如果有，如何套利？

- 与例子3不同的是，在这个例子中我们不能简单地在当前时刻就构造好一个复制组合，而必须进行动态地交易来构造复制组合。我们要运用无套利定价原理的第三个推论。现在看一下如何进行动态地构造套利组合呢?

(1) 从现在开始1年后到期的债券$Z_{0\times1}$

损益:100

价格:98

第1年末

(2) 1年后开始2年后到期的债券$Z_{1\times2}$

损益:100

价格:98

第2年末

(3) 从现在开始2年后到期的债券$Z_{0\times2}$

损益:100

价格:?

第2年末

- 按照无套利定价原理的第三个推论，自融资交易策略的损益等同于一个证券的损益时，这个证券的价格就等于自融资交易策略的成本。这个自融资交易策略就是：
- （1）先在当前购买0.98份的债券$Z_{0\times 1}$；
- （2）在第1年末0.98份债券$Z_{0\times 1}$到期，获得0.98×100＝98元；
- （3）在第1年末再用获得的98元去购买1份债券$Z_{1\times 2}$；
- 这个自融资交易策略的成本为：
- 98×0.98＝96.04

交易策略	现金流		
	当前	第1年末	第2年末
(1)购买0.98份$Z_{0\times1}$	$-98\times0.98 = -96.04$	$0.98\times100 =98$	
(2)在第1年末购买1份$Z_{1\times2}$		-98	100
合计：	-96.04	0	100

如果现在开始2年后到期的零息票债券价格为97元，则存在套利机会。如何套利呢？

- 按照我们前面的思路，市场高估了现在开始2年后到期的零息票债券价值，则考虑卖空它，并利用自融资交易策略进行套利。构造的套利策略如下：

- （1）卖空1份$Z_{0\times2}$债券，获得97元，所承担的义务是在2年后支付100元；
- （2）在获得的97元中取出96.04元，购买0.98份$Z_{0\times1}$；
- （3）购买的1年期零息票债券到期，在第一年末获得98元；
- （4）再在第1年末用获得的98元购买1份第2年末到期的1年期零息票债券；
- （5）在第2年末，零息票债券到期获得100元，用于支付步骤（1）卖空1份$Z_{0\times2}$债券的100元；

套利策略获得盈利为：97 － 96.04＝ 0.96元。

具体的现金流情况。

交易策略	现金流		
	当 前	第1年末	第2年末
(1)卖空1份$Z_{0\times 2}$	97		-100
(2)购买0.98份$Z_{0\times 1}$	-0.98×98 =-96.04	0.98×100 = 98	
(3)在第1年末购买1份$Z_{1\times 2}$		-98	100
合计：	97-96.04 = 0.96	0	0

存在交易成本时的无套利定价原理

- 当存在这些交易成本时，上面的无套利定价原理的几个推论就可能不再适用了。因为存在交易成本，那么所构造的套利策略也就不一定能盈利。因为，通过套利策略获得的盈利可能还不够支付交易成本。所以，无套利定价原理这时候就不能给出金融产品的确切价格，但可以给出一个产品的价格区间，或者说价格的上限和下限。

例子5

- 假设两个零息票债券A和B，两者都是在1年后的同一天到期，其面值为100元（到期时都获得100元现金流，即到期时具有相同的损益）。假设购买债券不需要费用和不考虑违约情况。但是假设卖空1份债券需要支付1元的费用，并且出售债券也需要支付1元的费用。如果债券A的当前价格为98元。
- 问题：（1）债券B的当前价格应该为多少呢？
- （2）如果债券B的当前价格只有97.5元，是否存在套利机会？如果有，如何套利呢？

案例 6

- 假设两个零息票债券A和B，两者都是在1年后的同一天到期，其面值为100元（到期时都获得100元现金流，即到期时具有相同的损益）。假设不考虑违约情况。但是假设卖空1份债券需要支付1元的费用，出售债券也需要支付1元的费用，买入1份债券需要0.5元费用。如果债券A的当前价格为98元。
- 问题：（1）债券B的当前价格应该为多少呢？
- （2）如果债券B的当前价格只有97.5元，是否存在套利机会？如果有，如何套利呢？

- 存在交易成本时的价格区间为：先不考虑交易成本，根据无套利定价原理计算出理论价格，然后再根据此价格减去最小总交易成本确定为下限价格，此价格加上最小总交易成本为上限价格

不确定状态下无套利定价原理的例子

- 在上一节的债券案例中，未来的损益（现金流）都是在当前就确定的，但实际市场中很多产品的未来损益是不确定的，要根据未来的事件而确定。比如，一个股票看涨期权，当到期日股票价格大于执行价格时，这个期权可获得正的损益，为到期日股票价格减去执行价格；但是，如果到期日股票价格小于等于执行价格，则这个期权到期日损益为零，即没有价值。因此，期权的损益是不确定的，它依赖于未来的股票价格。下面讨论这种未来损益不确定情况下的无套利定价原理。

1、同损益同价格（例子7）

- 假设有一风险证券A，当前的市场价格为100元，1年后的市场价格会出现两种可能的状态：在状态1时证券A价格上升至105元，在状态2时证券A价格下跌至95元。同样，也有一证券B，它在1年后的损益为，在状态1时上升至105，在状态2时下跌至95元。另外，假设不考虑交易成本。
- 问题：（1）证券B的合理价格为多少呢？
- （2）如果B的价格为99元，是否存在套利？如果有，如何套利？

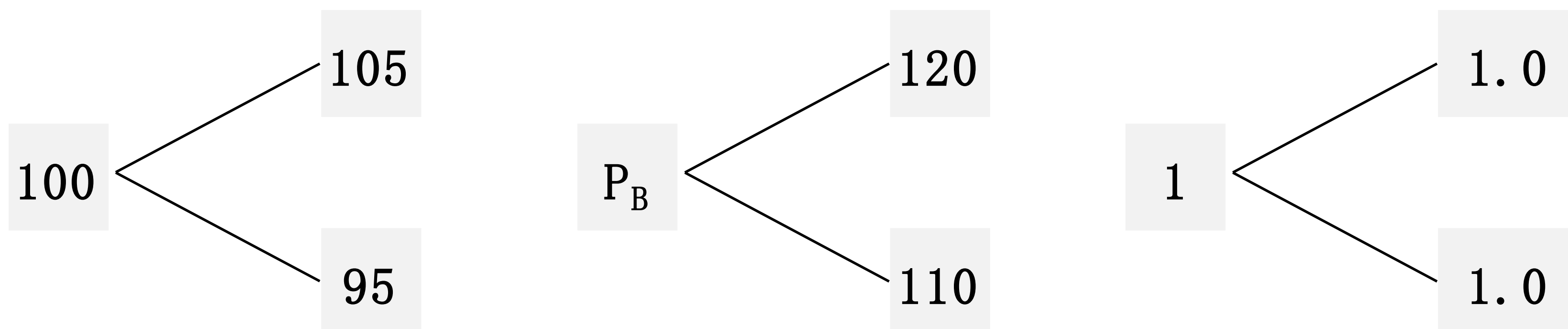
- 案例7与前面几个案例的不同地方在于，前面案例中的资产为债券，其未来的损益为确定的，即在某一时间时只有一种状态，以概率100%发生。但本案例中的资产为风险证券，其未来的损益出现两种可能，可能上涨，也可能下跌，即未来的状态不确定。但根据无套利定价原理，只要两种证券的损益完全一样，那么它们的价格也会一样。所以，证券B的合理价格也应该为100元。

- 因为证券B的价格为99元，因此存在套利机会。只要卖空证券A，买进证券B，就可实现套利1元。

2、静态组合复制定价（案例8）

- 假设有一风险证券A，当前的市场价格为100元，1年后的市场有两种状态，在状态1时证券A价格上升至105元，在状态2时证券A价格下跌至95元。同样，也有一证券B，它在1年后的损益为，状态1时上升至120元，状态2时下跌至110元。另外，假设借贷资金的年利率为0，不考虑交易成本。
- 问题：（1）证券B的合理价格为多少呢？
- （2）如果证券B的现在价格为111元，是否存在套利？如果有，如何套利？

案例8中证券B的损益与证券A不同，两个证券的损益状态如图4所示。现在考虑如何利用证券A和无风险债券来构建一个与证券B损益相同的组合



风险证券A　　风险证券B　　资金借贷

- 构建一个组合：x份证券A和y份的借贷（y大于零为借出钱，y小于零为借入钱）。要使得组合的损益与B的损益完全相同，则：

$$x\begin{bmatrix}105\\95\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1.0\\1.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}120\\110\end{bmatrix}$$

- 解得：x＝1，y＝ 15。因此，买人1份证券A，再借出现金15份的组合的损益与证券B的损益完全相同，所以证券B的价格等于组合的价格：即
- 1×100＋15×1＝115元

当证券B的现在价格为111元，存在套利机会

构造一个套利策略：买进证券B，再卖空上面的等损益组合，1份证券A和15份现金。所以整个套利组合为：买进证券B，卖空证券A，借入资金15。买进证券B的成本为111元，卖空证券A可得到100元，借入资金15所以还剩下4，这部分实际上就是套利策略的盈利。因为期末的现金流为0。这个组合的期初和期末现金流可见表2-3。

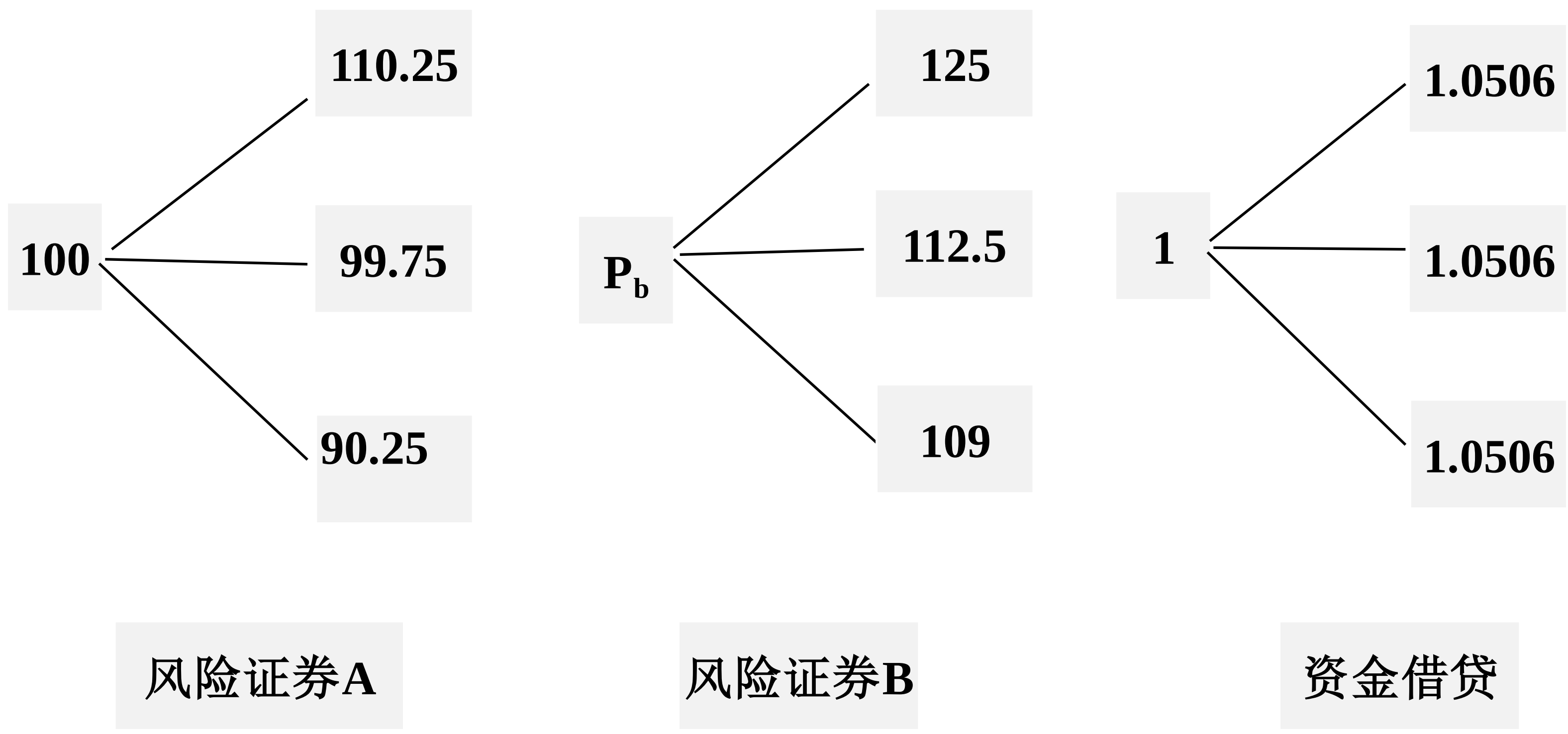
•

	期初时刻的现金流	期末时刻的现金流	
		第一种状态	第二种状态
(1)买进B	-111	120	110
(2)卖空A	100	-105	-95
(3)借入资金15	15	-15	-15
合计	4	0	0

3、动态组合复制定价（案例9）

把案例8中的市场未来状态，从两种状态扩展到3种状态。风险证券A在1年后的未来损益为，状态1时110.25，状态2时99.75，状态3时90.25。同样，也有一证券B，它在1年后三种状态下的未来损益分别为125，112.5和109如图2-5。另外，假设借贷资金的年利率为5.06％，半年利率为2.5%，不考虑交易成本。

- 问题：（1）B的合理价格为多少呢？
- （2）如果B的价格为111元，是否存在套利？如果有，如何套利？


100
110.25
99.75
90.25
P_b
125
112.5
109
1
1.0506
1.0506
1.0506
风险证券A
风险证券B
资金借贷

$$110.25x + 1.0506y = 125$$

$$99.75x + 1.0506y = 112.5$$

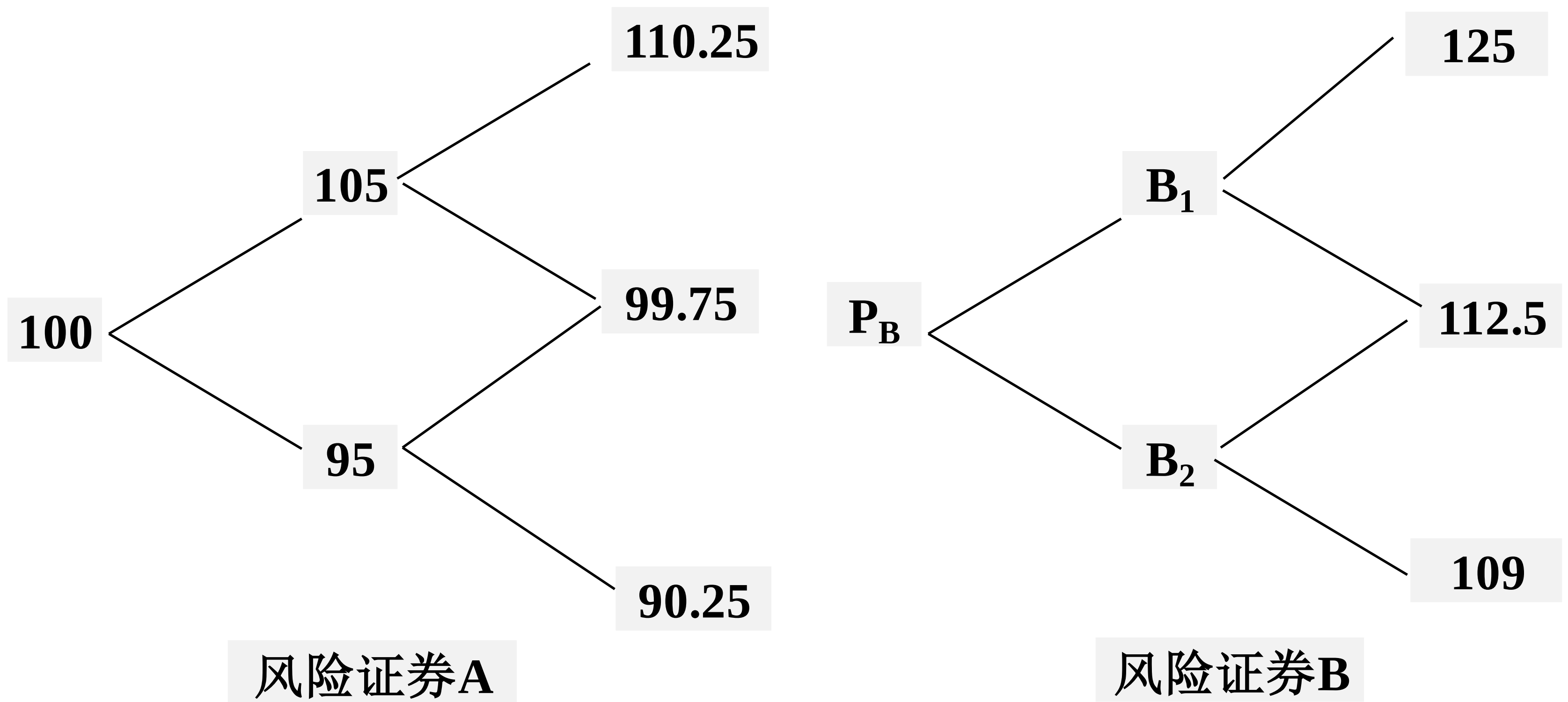
$$90.25x + 1.0506y = 109$$

而上述方程却无解。为什么呢？因为当损益存在三种状态时，仅仅依靠两种证券的组合是无法复制出任意一种三状态的证券的。这在金融学中称为“不完全市场”。

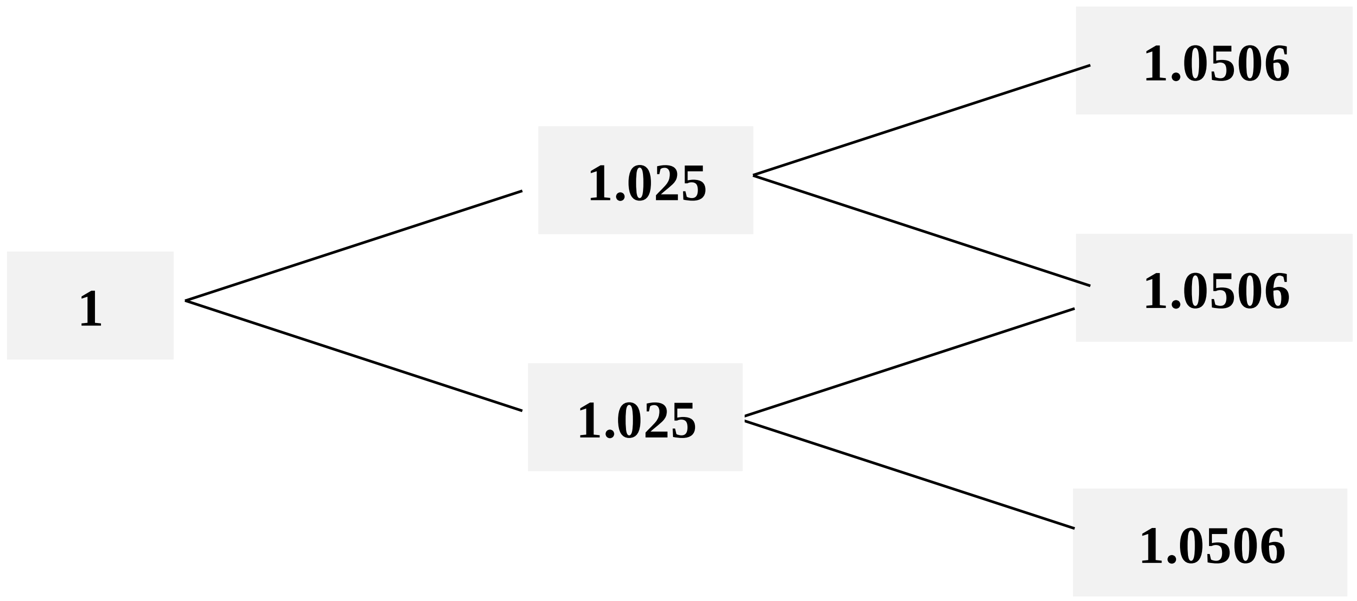
- **Arrow**和**Debreu**证明在某些条件下，随着时间而调整组合的动态组合策略可复制出市场中不存在的证券。

- 如何才能通过证券A和资金借贷的动态组合复制出证券B。所谓动态指的是变化，所以我们把1年的持有期拆成两个半年，这样在半年后就可调整组合。假设证券A在半年后的损益为两种状态，分别为105元和95元。但证券B在半年后两种状态下的损益值事先不知道。证券A和B的损益如图2-6所示，而资金借贷的损益如图2-7所示。

证券A和B的两期三状态损益图



无风险借贷



构造组合：（1）1份的证券A；（2）持有（出借）现金13.56。如果持有这个组合到1年后而不在中期进行调整，则1年后的损益与B是不同的。

$$1\times\begin{bmatrix}110.25\\99.75\\90.25\end{bmatrix}+13.56\times\begin{bmatrix}1.0506\\1.0506\\1.0506\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}124.5\\114\\104.5\end{bmatrix}$$

（1）证券A的损益为105时：

如果再买进0.19份的证券A，需要现金19.95元（0.19×105＝19.95），持有（出借）的现金13.56，加上利息变为：13.56×1.025＝13.90。此时，证券A的份数变为：1＋0.19＝1.19份，现金变为：13.90－19.95＝－6.05，即还需要借入现金6.05元。所以，经过这样的组合调整后，在半年后持有的组合为：1.19份证券A和借入现金6.05。则在1年后此组合损益状态为：

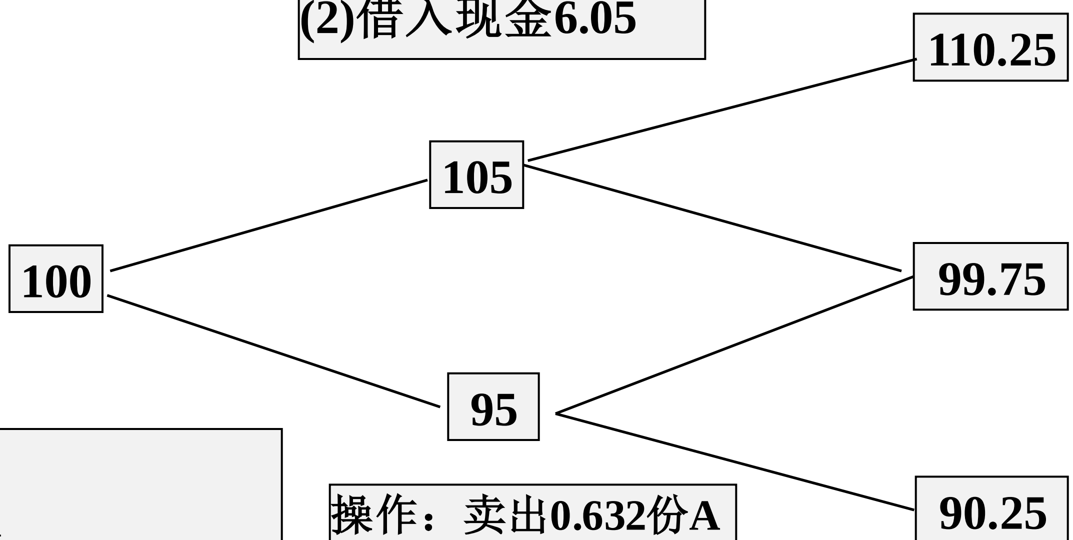
$$1.19\times\begin{bmatrix}110.25\\99.75\end{bmatrix}-6.05\times\begin{bmatrix}1.025\\1.025\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}125\\112.5\end{bmatrix}$$

（2）证券A的损益为95时：如果卖出0.632份的证券A，得到0.632×95＝60.04元，另外持有（出借）的现金13.56，加上利息变为：13.56×1.025＝13.90。此时，证券A剩下1－0.632＝0.368份，现金变为13.90＋60.04＝73.94。所以，在半年后组合经过调整后变为：0.368份证券A和现金73.94（可以出借）。则在1年后的此组合损益状态为：

$$0.368\times\begin{bmatrix}99.75\\90.25\end{bmatrix}+73.94\times\begin{bmatrix}1.025\\1.025\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}112.5\\109\end{bmatrix}$$

动态组合复制过程示意图

操作：买进0.19份A
组合为:
(1)持有1.19份A
(2)借入现金6.05



组合的损益为:

125

112.5

109

原始组合:
(1)持有1份A
(2)持有现金13.56（借出）

操作：卖出0.632份A
组合为:
(1)持有0.368份A
(2)持有现金73.94

- 因此，当市场有三种状态，而仅有证券A和资金借贷无法静态复制B时，通过在持有期中期根据证券A的损益变化进行动态调整组合来复制证券B。由无套利定价原理的推论（3），我们可得到证券B的合理价格为：
  - 1×100＋13.56＝113.56
- 对于第二问，同样可根据市场价格与理论价格之间的大小来构造套利组合。当市场价格为111元，小于理论价格113.56时，则可卖空证券A得到100元，借入现金13.56元，其中111元用于购买B，这样净剩下2.56元为套利盈利。

- 如何进行动态复制呢？或者说，案例9中的开始组合策略1份证券A和持有现金13.56元是如何得到的呢？在中期又是如何根据证券A的损益变化来动态调整呢？动态复制策略实际上是多期的静态复制策略，只要从后往前应用静态复制策略即得动态策略。

（1）证券在中期价格为105时：

$$x\begin{bmatrix}110.25\\99.75\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1.0506\\1.0506\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}125\\112.5\end{bmatrix}$$

x＝1.19，y＝－5.90。

- 根据无套利定价原理，求得证券B此时的价格为：
- B1＝1.19×105－5.90×1.025＝118.90

证券A在中期价格为105时：

105 → 110.25 / 99.75

风险证券A

B_1 → 125 / 112.5

风险证券B

1.025 → 1.0506 / 1.0506

资金借贷

证券A在中期价格为95时：

95 → 99.75 / 90.25

风险证券A

B_2 → 112.5 / 109

风险证券B

1.025 → 1.0506 / 1.0506

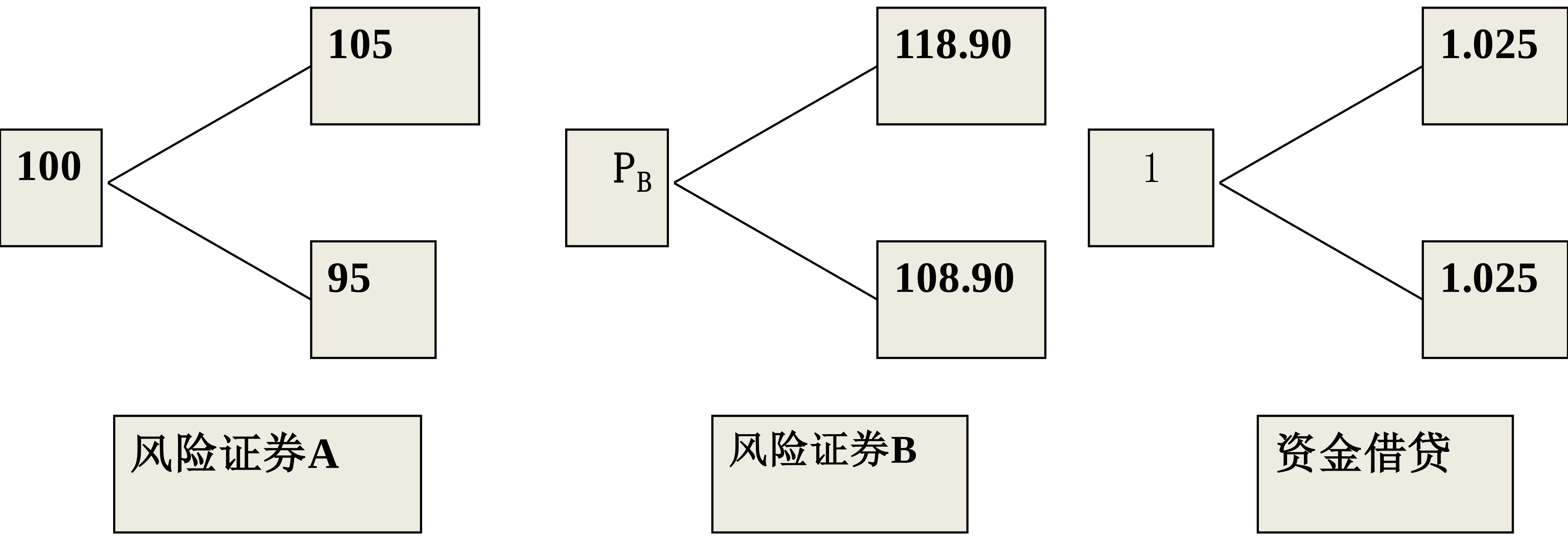
资金借贷

$$x\begin{bmatrix}99.75\\90.25\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1.0506\\1.0506\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}112.5\\109\end{bmatrix}$$

解得：x＝0.368，y＝72.14，也与图2-8相吻合。同样，可求得证券B在此时的价格为：

$$B_2=0.368\times 95+72.14\times 1.025=108.90$$

第二步：根据第一步得到的B_1和B_2继续应用静态组合复制方法计算：



$$x\begin{bmatrix}105\\95\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1.025\\1.025\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}118.90\\108.90\end{bmatrix}$$

解得：x＝1，y＝13.56，也与图2-8相吻合。所以，可求得证券B的价格为：

$P_B＝1×100＋13.56×1＝113.56$

无套利定价原理的一般理论

- 不确定状态下的无套利定价原理的最简单模型——Arrow-Debreu模型

- 1、市场环境假设
- 假设市场中有N个证券，$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N$。投资者一开始持有这些证券的组合，而后在持有期结束后获得这些组合的损益。假设仅有两个投资时刻，开始时刻0和结束时刻1。投资者可持有这些证券及它们的组合的多头（买进）或空头（卖出），持有多头相当于在结束时刻获得证券的损益，而持有空头则相当于在结束时刻要付出证券的损益。

- 假设第i种证券在初始0时刻的价格为p_i，则N种证券的价格向量为：

$$P=(p_{1,}p_{2,}\ldots p_N)^T$$

- 它们在未来1时刻的损益有M种可能状态，第i种证券在第j种状态下的损益为d_{ij}，则这些证券的损益矩阵为：

D＝（d_{ij}），i=1～N，j=1～M

- D的第j列$D_{.j}$表示1时刻时处于第j种状态下1个单位的N种证券的损益向量。假设损益矩阵D的值对于投资者是已知的，但是投资者无法提前知道在1时刻这些证券处于M种状态中的哪一种状态，当然在同一时刻这些证券都是处于同一种状态下。

- 证券组合用向量 θ 表示：
- $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N)$
- 其中 θ_i 表示持有的第i种证券的数量，当投资者持有第i种证券的多头时，$\theta_i > 0$；否则 $\theta_i < 0$ 时，它表示持有第i种证券的空头（持有空头相当于先借入证券，而在期末时买入证券归还，所有持有空头在期末时必须付出证券的损益）。

再假设市场是无摩擦的，即不考虑交易费用，税收等。投资者可拥有任意单位的证券，即 θ_i可以不是整数，为一实数。

- 证券组合 θ在初始0时刻的价格则为：

$$\theta \bullet P = \sum_{i=1}^{N} \theta_i p_i \qquad (2\text{-}1)$$

- 这个组合在第j种状态下的损益则为：

$$\theta \bullet D_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{N} \theta_i d_{ij} \qquad (2\text{-}2)$$

2、套利组合的定义

一个证券组合 θ 定义为套利组合，如果它满足：

$$\begin{cases} \theta \bullet P = 0, & \\ \theta \bullet D_{.j} \geq 0, & \text{对于所有的 } 1 \leq j \leq M \\ \theta \bullet D_{.j} > 0, & \text{存在某些 } j \end{cases}$$

或者满足以下条件：

$$\begin{cases} \theta \bullet P < 0, & \\ \theta \bullet D_{.j} \geq 0, & \text{对于所有的 } 1 \leq j \leq M \end{cases}$$

3、无套利组合等价定理

- 定理1：市场不存在套利组合的等价条件是：
- 存在一个正向量 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_M)^T$，

使得，

$$P = D \cdot \pi$$

即

$$p_i = \sum_{j=1}^{M} d_{ij}\pi_j, \qquad \text{对所有的 } 1 \le i \le N$$

例如

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \pi = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}^T$$

$$P = \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T$$

$$\theta = (-1, 4),$$

$$\theta * P = -0.5$$

$$\theta * D = (2, 7) > (0, 0)$$

Arrow-Debreu模型的经济含义

- 1、状态价格
- Arrow-Debreu的无套利组合等价定理说明，如果市场不存在套利组合，则资产的当前价格与未来损益之间要满足一定的条件。这个条件是存在一个对应于M个状态的向量，一般称之为状态价格（state-prices）。

- 状态价格的具体含义。假设市场另外存在M种资产，s_{N+1}, s_{N+2}, …, s_{N+M}。这M种资产的未来损益为，只在一种状态下为1，其余状态下都是零。即对于资产s_{N+j}，它的未来损益只是在第j种状态为1，其余状态为0。这M种资产就构成了“基本资产”，由它们生成的组合的未来损益可以表示任意一种资产的未来损益。比如，

上海交通大学 安泰经济与管理学院

对于资产 s_1，它的未来损益为：($d_{11}, d_{12}, \cdots, d_{1M}$)，则由$d_{11}$个 s_{N+1}，d_{12}个s_{N+2}，…，d_{1M} 个 s_{N+M}构成的资产组合 v_1 的未来损益就与 s_1 的未来损益一样。如果市场不存在套利机会，则资产 s_1 的价格应该等于由基本资产构成的组合的价格。假设 M 个基本资产的价格分别为：u_1，u_2，…，u_M，则上述组合的价格v_1为：

$$v_1 = \sum_{j=1}^{M} d_{1j} u_j$$

- 而根据式（2-5），资产s_1的价格p_1为：
- $$p_1 = \sum_{j=1}^{M} d_{1j}\pi_j \qquad （2-15）$$
- 两者相等，所以：
- $$\sum_{j=1}^{M} d_{1j}u_j = \sum_{j=1}^{M} d_{1j}\pi_j \qquad （2-16）$$
- 因此，我们可以令：
- $u_j = \pi_j,$ 对所有的$1 \le j \le M$

- 式（2-17）表明, $\pi=(\pi_{1,}\pi_{2,}\ldots\ldots\pi_3)^{\mathrm{T}}$ 实际上是基本资产的价格向量，即每种状态下单位未来损益的资产价格，所以称之为状态价格。如果我们能够得到状态价格，则任意一种资产的价格都是状态价格的线性函数，都可以由状态价格计算得到。

2、风险中性概率

如果把状态价格归一化，

即让M个分量的和变为1：

$$\hat{\pi}_j = \frac{\pi_j}{\sum_{j=1}^{M} \pi_j}$$

- 如果存在一个资产，它在未来的损益是确定的，都是1，即在每一种状态下都是1，那么根据式（2-5），这个资产的价格就是：$\sum_{j=1}^{M}\pi_j$ 。假设这种资产就是我们平常所说的无风险债券，或者现金借贷：则

$$p=\sum_{j=1}^{M}\pi_j\equiv 1/\left(1+r\right)$$

$$p_i = \sum_{j=1}^{M} d_{ij}\pi_j = \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{M} d_{ij}\hat{\pi}_j$$

$$= \frac{1}{1+r} E\left(d_{ij}\right)$$

- 推论：如果市场不存在套利组合，而且假设无风险借贷的利率为r，则存在一个概率测度使得任意一个资产的价格等于其未来可能损益（现金流）的期望值以无风险借贷利率贴现的贴现值。

风险中性概率与实际中各个状态发生的概率之间有什么关系呢？记为未来第j种状态发生的概率，即统计意义上的概率。我们说风险中性概率和实际统计概率两者可能

会不相同。因为这跟投资者的风险偏好有关系

$$p_i = \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{M} d_{ij}\hat{\pi}_j = \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{M} d_{ij}\left(\frac{\hat{\pi}_j}{q_j}\right)q_j$$

例如

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}^T$$

$$q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.4 & 1.4 \end{bmatrix}^T$$

3、完全市场与不完全市场

- 在前面案例9中，我们曾指出两种资产无法静态复制出三状态的任意一种资产，这跟市场的完全性有关。下面我们给完全市场下个定义：

- 定义：一个具有 N 种资产，M 种损益状态的市场，如果对于任意一个未来损益向量 $d=(d_1, d_2, \ldots, d_M)$，都存在一个 N 种资产的组合($\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N$)，其未来损益等于（$d_1, d_2, \ldots, d_M$），则我们称市场是完全的。

- 市场完全性的定义是要求如下的线性方程存在解：

$$\theta \cdot D = d$$

- 即：$\sum_{i=1}^{N} d_{ij}\theta_j = d_j,$ 对于所有的$1 \le j \le M$
- （2-23）
- 根据线性代数的知识，方程（2-23）有解的条件是未来损益矩阵 D 的秩等于 M ，即矩阵 D 的 M 个列向量可生成整个空间 R^M 。

- 市场完全性是一个很强的假设，但它大大简化了金融产品的定价。因为只要知道一种金融产品的未来损益，那么在市场完全性假设下，就可由市场中已有的资产构造（复制）出相同损益的组合来。而在无套利组合假设下，该金融产品的价格就由已有的资产完全确定。

- 定理2：在市场不存在套利组合的假设下，市场是完全的充要条件是只有唯一的一组状态价格满足式（2-5），即状态价格唯一或者风险中性概率唯一。

Arrow-Debreu模型的简单应用案例

- 1、两状态（二项式）模型
- 假设市场的未来损益只有两种状态，**M＝2**，而且只存在两种资产，一种是无风险借贷，其借贷利率为*r*，另外一种是资产**s**，当前的价格为*p*。假设资产**s**在未来的损益为：状态**1**时为$p_u = p \times u$，状态**2**时为$p_d = p \times d$，其中u和d表示价格变化的倍数，假设$u > d$。如果市场不存在套利组合，则存在一个风险中性概率，使得：

$$p = \frac{1}{1+r}(\hat{\pi}_1 pu + \hat{\pi}_2 pd)$$

$$\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 = 1,$$

$$\hat{\pi}_1 u + \hat{\pi}_2 d = 1 + r$$

存在解的充要条件是：

$$d < 1 + r < u$$

$$\hat{\pi}_1 = \frac{1+r-d}{u-d}$$

$$\hat{\pi}_2 = \frac{u-1-r}{u-d}$$

谢　谢！