金 融 工 程 学

第10章 期权的基本概念和定价分析

开课单位：金融工程课程组

主讲：吴冲锋教授等

上海交通大学

安泰经济与管理学院

案例：国有股权的退出

法国政府对一个化工公司实施国有股权退出改革时遇到困难。为保持公司员工工作的积极性，决定出售一部分股权给员工。

但员工对这一持股计划非常冷淡，在政府决定对员工提供10%的折扣后，仍仅有20% 的员工愿意购买公司的股票。

这无疑使该化工公司的管理层对员工未来的努力程度和人力资源状况深表忧虑，而政府又不愿提供更多的折扣来吸引员工购股。

如何解决这个两难问题

银行家信托公司的建议：

- 由化工公司出面保证员工持有的股票能在4年内获得25%的收益率，
- 其股权所代表的表决权不受影响
- 员工可以获得未来股票二级市场上价格上涨所带来的资本利得的2/3，另外1/3作为该化工公司所提供保证收益率的补偿

一石多鸟的结果：

- 员工：不影响股票表决权，还可以获得最低收益保证
- 公司：只要较低收益就解决了公司的激励问题和信息问题
- 如二级市场价格上涨，公司可以获得员工持股部分1/3的溢价
- 如二级市场境况不好，则不需要承担价格下降的风险

信孚银行方案

- 信孚银行负责向员工安排购股资金
- 银行按1：9给予贷款
- 至少持股5年，5年后如果股价下跌到原购股价以下，信孚银行保证将以原价购入，如果上涨2/3归持股人，1/3归信孚银行所有。

- 信孚银行以员工的股票作抵押，向银行申请贷款。信孚银行保证5年后如果股价下跌，补偿跌价部分。

期权给我们带来了什么？

期权是解决信息不对称的一种有效方法

信孚银行如何规避风险？

- 信孚银行卖出“合成股票”来规避风险，它的价值与原股票价格挂钩（相当于指数）。
- 这样与原股票无关。但达到规避风险目的。

差价合约(CFD)

- CFD(Contracts For Difference) 一种允许投资者在不实际持有金融产品的情况下，获得金融产品买卖差价的衍生工具。
- 客户的目的是赚取这个金融产品未来走势完成的价格和当前价格的价差。而不是真的想要拥有这种金融产品。

好处

- 可以双向交易：既买入做多或卖出做空。
- 杠杆：1%-10%的保证金
- 费用低：因不涉及所有权，所以不需要缴纳印花税，交割费等。
- 没有到期日：只要投资者的帐户余额足以满足保证金浮动要求并足以支付融资利息，投资人可以无限期的持有。

中国案例—股票期权激励

- 上市公司治理中的管理层激励问题
- 实行股权期权激励计划
- 伊利股份、青岛海尔、海信电器等公司都实施了股权激励计划

海信电器的股票期权激励方案

- 2009年4月25日公告
- 本股票期权激励计划采取分期实施的方式，股票来源为公司向激励对象定向发行的普通股。
- 本股票期权激励计划所涉及的标的股票总数累计不超过公司股本总额的10%
  - 本计划首次实施时拟授予激励对象的股票期权涉及的标的股票数量不超过491万股，占公司总股本的0.99%。

- 本股票期权激励计划首次实施时的行权价格为5.72元/股。
- 首期授予的股票期权有效期
  - 自首期股票期权授权日起的5 年，限制期为2年，激励对象在授权日之后的第3 年开始分3 年匀速行权，每年可行权数量分别为授予期权总量的33%、33%与34%。

激励对象范围

- 公司董事
  - 除独立董事以及由海信集团有限公司以外的人员担任的外部董事
- 公司高级管理人员
  - 包括总经理、副总经理、财务总监、董事会秘书以及根据章程规定应为高级管理人员的其他人员
- 公司及公司子公司中层管理人员
- 经公司董事会薪酬与考核委员会认定的营销骨干、技术骨干和管理骨干。

- 首次实施时授予股票期权的业绩条件
  - 公司2007 年度相比2006 年度，净利润增长率不低于20%（包括20%），且不低于公司前三年的平均增长率以及行业前三年的平均增长率；净资产收益率不低于7%，且不低于行业平均水平
- 行权条件
  - 首次计划有效期内公司每年平均的净利润增长率不低于14%（包括14%），且不低于行业的平均增长率；净资产收益率不低于8%，且不低于行业平均水平。

什么是期权？

- 一种特殊的合约协议，它赋予持有人在某给定日期或该日期之前的任何时间以固定价格购进或售出一种资产的权利。
- 期权的买方：
  – 只有权利而没有义务
- 期权的卖方：
  – 有绝对的义务。

- 生活中的期权
  - 圣经中雅各布同拉结之间的爱情故事
  - 商家的三包政策就是一种看跌期权
  - 保底基金
  - 还有什么？

- 你在草原上遇到一位美丽善良的姑娘，你想娶她为妻。她的父亲说，如果你为他工作7年，他就把女儿嫁给你。可是，你有你的顾虑：如果她变丑了，变得性情暴躁，或者爱上别人了呢?于是。你同意用7年的劳动，换得娶走这个姑娘的权利，但是不承担一定娶她的义务。换句话说，你花了一笔权利金(7年劳动)，得到在一定时间内有效的权利(7年后娶她)，但不承担任何义务(也可以不娶)，这就是期权。这个故事来自《圣经·创世记》，是关于雅各布同拉结之间的爱情和婚姻。

定金和订金

- 在商品房交易中，所说的订金与定金在法律上是有明显区别的。定金是一个规范的法律概念，是合同当事人为确保合同的履行而自愿约定的一种担保形式。商品房交易中，买家履行合同后，定金应当抵作价款或者收回；若买家不履行合同，无权要求返还定金，开发商不履行合同的，应双倍返还定金。

- 订金并非一个规范的法律概念，实际上它具有预付款的性质，是当事人的一种支付手段，并不具备担保性质。商品房交易中，如买家不履行合同义务，并不表示他丧失了请求返还订金的权利；反之，若开发商不履行义务亦不须双倍返还订金，但这并不意味着合同违约方无须承担违约责任。

- 值得一提的是，签订正式的房屋预售契约之前，买卖双方签订的有关认购书(或称意向书)并不是房屋买卖契约，不具备房屋预售契约的法律效力，只是一份广义的合同。若认购书中有定金条款，则若购房者在签订认购书后反悔，开发商有权没收购房者的定金；若开发商违约，不与购房者签订正式的预售合同，则购房者有权要求开发商双倍返还定金。如果认购书中约定的只是订金，那么就不具备定金的法律后果了。

看涨期权和看跌期权

- 看涨期权(call)：
  - 期权持有人拥有的是买进资产的权利
  - 希望基础资产价格上涨
- 看跌期权(put)：
  - 期权持有人拥有的是卖出资产的权利
  - 希望基础资产价格下跌

欧式期权和美式期权

- 期权的执行（exercise）：
  - 期权买方要求卖方以固定的价格卖出或买进一定数量的资产的行为
  - 执行价格：协议中的固定价格
- 欧式期权：
  - 只允许在规定的到期日执行期权
- 美式期权：
  - 允许在规定的到期日或到期日之前执行

- 百慕大期权
  - 在期权的有效期内的几个特定日执行
  - 万科的认沽权证：到期日为2006年9月4日

    行权日：2006年8月29日-2006年9月4日
- 亚式期权
  - 到期日执行（欧式）
  - 是否执行的条件为一段时间内的股价平均值

亚式期权

- 其到期日的收益依赖于标的资产有效期至少一段时间内的平均价格
- 平均价格亚式期权
  - 收益为执行价格与标的资产在有效期内的平均价格之差
- 平均执行价格期权
  - 收益为标的资产到期日价格与有效期内平均价格之差

期权的种类

- 股票及股票指数期权
- 外汇期权和外汇期货期权
- 利率期权和利率期货期权
- 商品期货期权
- 波动率，经济事件，气候
- 实物期权

芝加哥期权交易所S&P 500指数期权

报价单位	点
交易单位（合约乘子）	$100/点
期权样式	欧式
执行价格	初始执行价格由交易所列出，但如果S&P 500指数达到执行价格的最高或最低价时，交易所将增加新的执行价格。
最小变动价位	当期权在3.00点以下交易时，最小变动价位为0.05点（即0.05*$100 ＝ $5.00）；如果期权超过3.00点时，最小变动单位为0.10点（$10.00）。
合约月份	3个近期月份，再加上3个连续的季度月份（季度月份指三月、六月、九月和十二月）

最后到期日	合约交割月份的第三个周五后的周六
最后结算日	到期日之前的最后一个营业日（通常是周五）
最后交易日	最后结算日之前的一个营业日（通常是周四）
最后结算价	结算的S&P 500指数用各成份股票的最后结算日的开盘第一笔卖出报价计算，最后结算日不开盘时，则用结算日前的最后一笔卖出报价计算。
交易时间	上午8:30-下午3:15

最后交易日的交易时间	同上
合约结算价值	最后结算价×合约乘子
结算方法	现金结算
头寸限制	没有限制。但每个会员持有的合约数超过100,000时，必须向市场监管处报告。

上证50ETF期权合约基本条款

合约标的	上证50交易型开放式指数证券投资基金（“50ETF”）
合约类型	认购期权和认沽期权
合约单位	10000份
合约到期月份	当月、下月及随后两个季月
行权价格	5个（1个平值合约、2个虚值合约、2个实值合约）
行权价格间距	3元或以下为0.05元，3元至5元（含）为0.1元，5元至10元（含）为0.25元，10元至20元（含）为0.5元，20元至50元（含）为1元，50元至100元（含）为2.5元，100元以上为5元
行权方式	到期日行权（欧式）

交割方式	实物交割（业务规则另有规定的除外）
到期日	到期月份的第四个星期三（遇法定节假日顺延）
行权日	同合约到期日，行权指令提交时间为9:15-9:25，9:30-11:30，13:00-15:30
交收日	行权日次一交易日
交易时间	上午9:15-9:25，9:30-11:30（9:15-9:25为开盘集合竞价时间） 下午13:00-15:00（14:57-15:00为收盘集合竞价时间）
委托类型	普通限价委托、市价剩余转限价委托、市价剩余撤销委托、全额即时限价委托、全额即时市价委托以及业务规则规定的其他委托类型

买卖类型	买入开仓、买入平仓、卖出开仓、卖出平仓、备兑开仓、备兑平仓以及业务规则规定的其他买卖类型
最小报价单位	0.0001元
申报单位	1张或其整数倍
涨跌幅限制	认购期权最大涨幅＝max｛合约标的前收盘价×0.5%，min [（2×合约标的前收盘价－行权价格），合约标的前收盘价]×10％｝ 认购期权最大跌幅＝合约标的前收盘价×10％ 认沽期权最大涨幅＝max｛行权价格×0.5%，min [（2×行权价格－合约标的前收盘价），合约标的前收盘价]×10％｝ 认沽期权最大跌幅＝合约标的前收盘价×10％

熔断机制	连续竞价期间，期权合约盘中交易价格较最近参考价格涨跌幅度达到或者超过50%且价格涨跌绝对值达到或者超过5个最小报价单位时，期权合约进入3分钟的集合竞价交易阶段
开仓保证金最低标准	认购期权义务仓开仓保证金＝[合约前结算价+Max（12%×合约标的前收盘价-认购期权虚值，7%×合约标的前收盘价）] ×合约单位 认沽期权义务仓开仓保证金＝Min[合约前结算价+Max（12%×合约标的前收盘价-认沽期权虚值，7%×行权价格），行权价格] ×合约单位
维持保证金最低标准	认购期权义务仓维持保证金＝[合约结算价+Max（12%×合约标的收盘价-认购期权虚值，7%×合约标的收盘价）]×合约单位 认沽期权义务仓维持保证金＝Min[合约结算价 +Max（12%×合标的收盘价-认沽期权虚值，7%×行权价格），行权价格]×合约单位

投资者分级管理

个人投资者	权限	备注
一级交易权限	1. 在持有上证50ETF时，进行相应数量的备兑开仓 2. 在持有上证50ETF时，进行相应数量的认沽期权买入开仓 3. 对所持有的合约进行平仓或者行权	个人投资者申请各级别交易权限，应当在相应的知识测试中达到规定的合格分数，并具备相应的期权模拟交易经历
二级交易权限	1. 一级交易权限对应的交易 2. 买入开仓	
三级交易权限	1. 二级交易权限对应的交易 2. 保证金卖出开仓	普通机构投资者、专业机构投资者具有三级交易权限

认股权证(Warrant)

- 定义：
  - 一种允许其持有人在指定的期限内购买或出售相关资产（如股票）的一种权利。
- 分类：
  - 认购权证和认沽权证
  - 公司认股权证和备兑认股权证

- 公司认股权证（Company warrant）
  - 由公司发行，是一种允许其持有人(即投资者)在指定期限内以确定的价格直接向发行公司购买或出售股票的权利。
- 备兑认股权证 (Covered warrant)
  - 也赋予持有人在特定期限内以规定的价格购买或出售股票的权利。但与公司认股权证不同，备兑认股权证一般是由上市公司以外的第三者发行，比如投资银行等。

	公司认购权证	备兑认购权证
发行时间	一般是上市公司在发行公司债券，优先股股票或配售新股之际同时发行	没有限制
认购对象	只能认购发行公司的股票	可认购一组股票；另外，针对一个公司的股票，也可能有多个发行者发行备兑权证，它们的兑换条件也可能不一样
发行目的	筹资	给投资者提供一种投资组合管理的工具
到期兑现	持有者认购股票而兑现	发行者按约定条件向持有者出售规定的股票，也可能是发行者以现金向持有者支付股票认购价和当前市场价之间的差价

10.1 独特性

（1）期货特性：线性

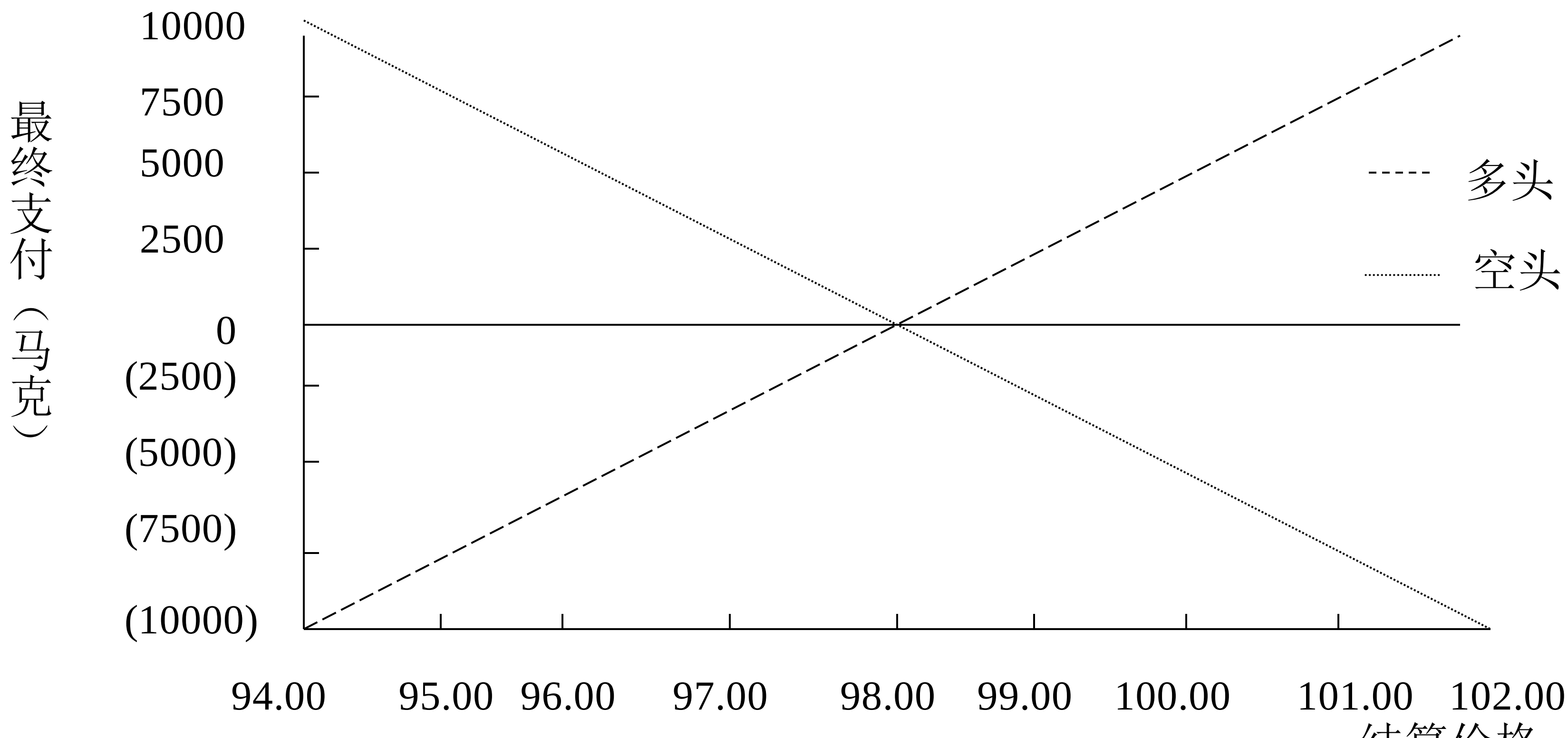


图4-1　债券期货合同双方的交付

（2）期权特性：左右不对称，非线性

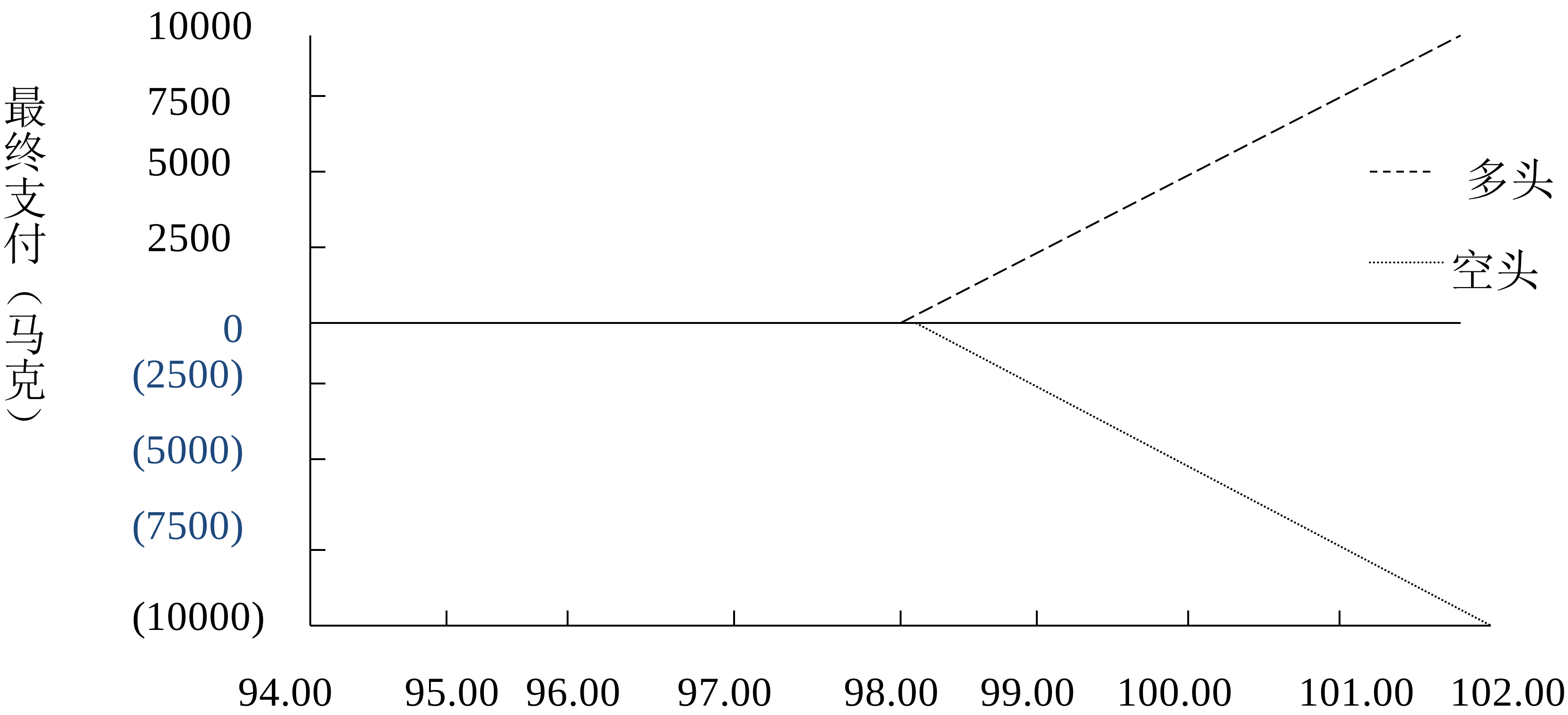


图4-2 国债（期货）期权合同双方的交付

（3）期货与期权的根本区别：

期货同时有权利和义务

期权将权利和义务分离

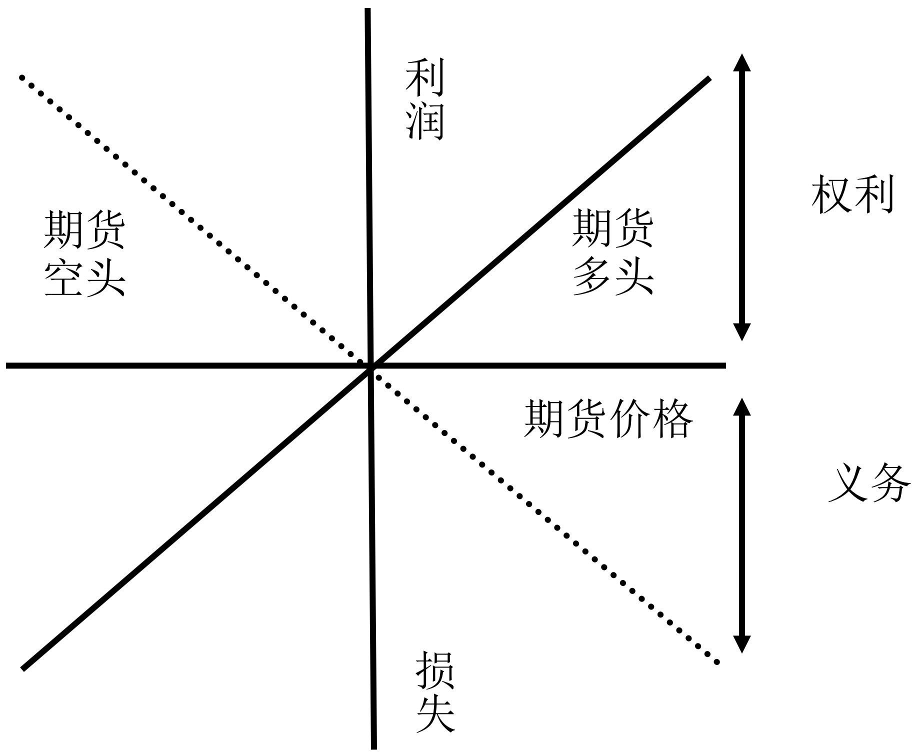


图4-3 期货：权利和义务结合

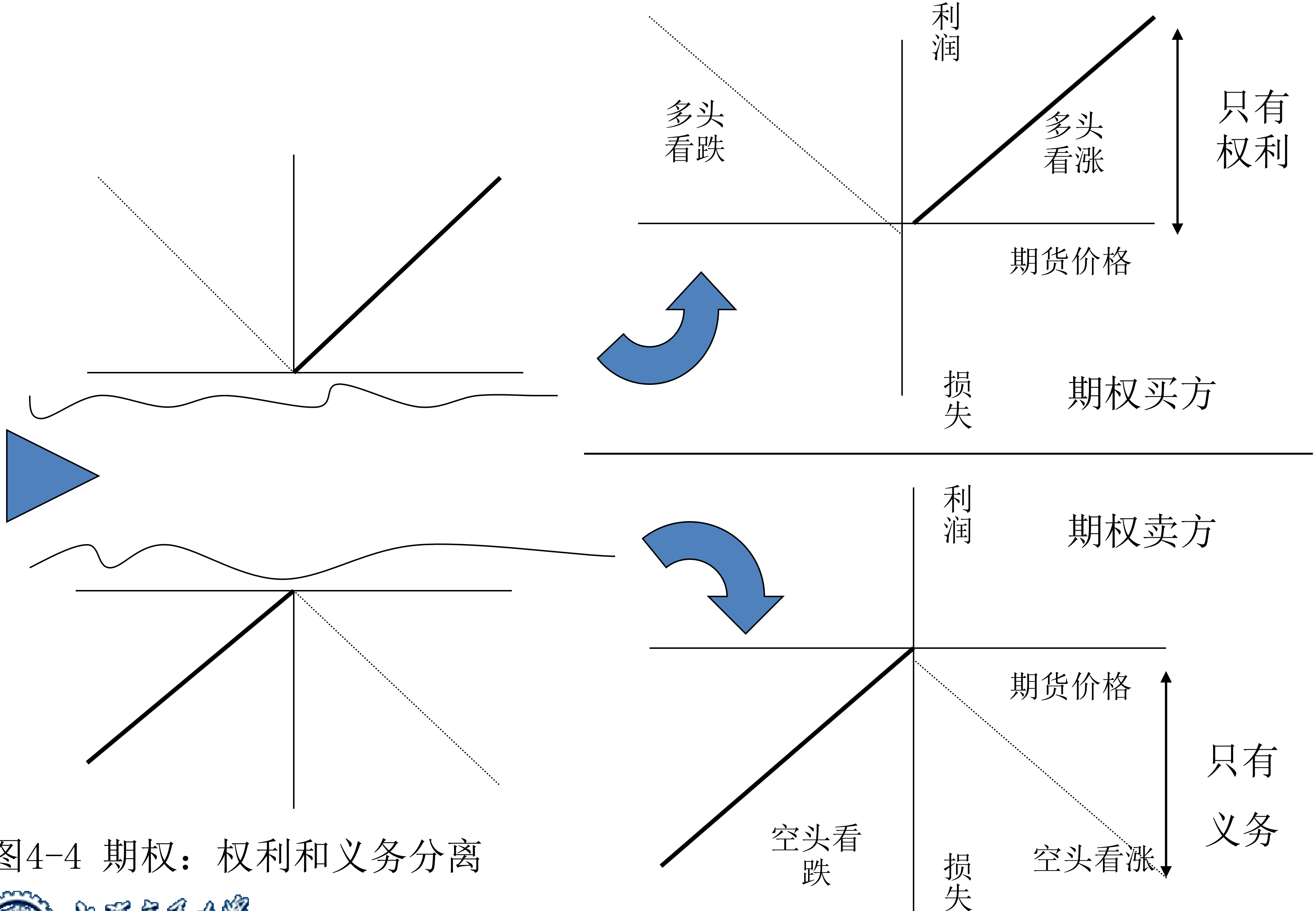


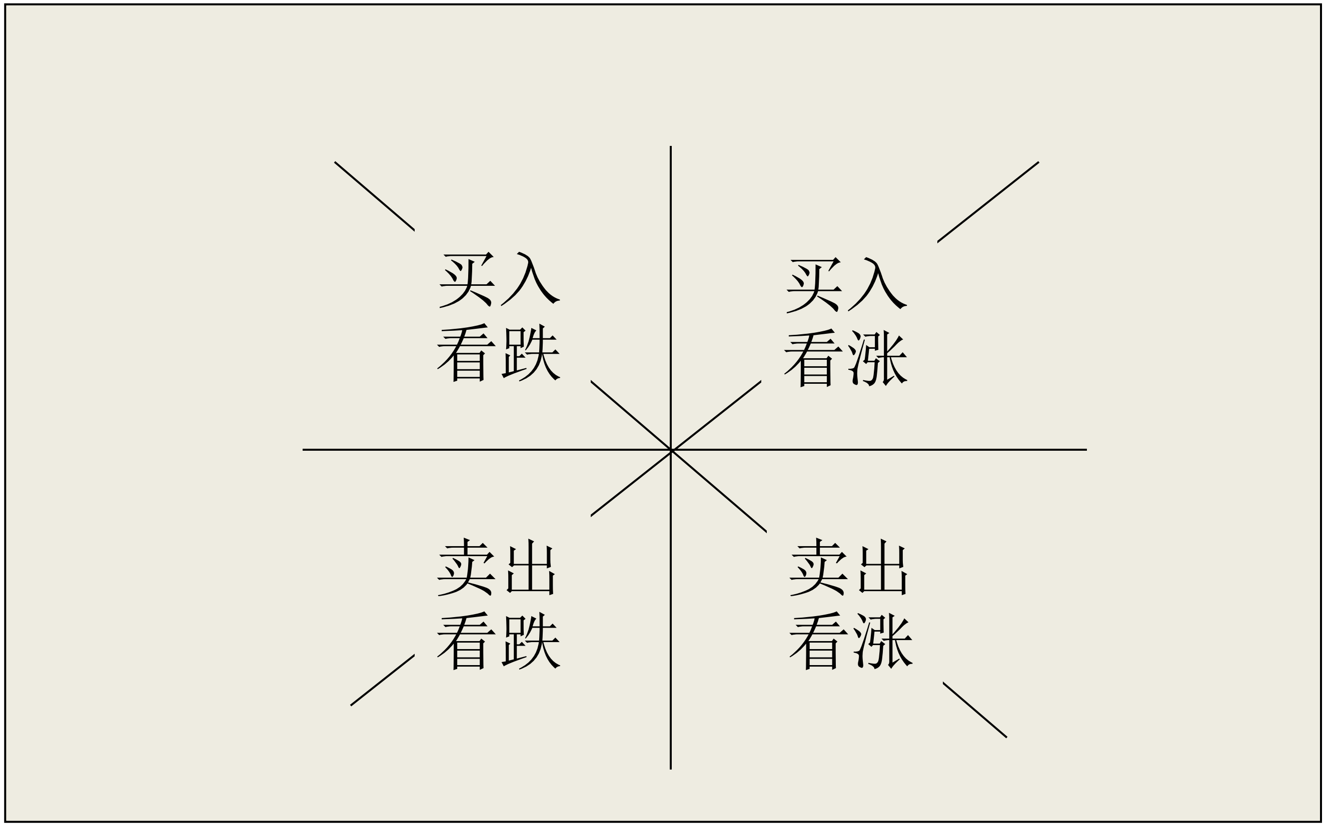
图4-4 期权：权利和义务分离

10.2 基本概念

- 看涨期权和看跌期权
- 持有一份看涨期权是：
  - 买的权利
  - 一定数量的对应资产
  - 一定的价格
  - 在给定日期或者之前执行
- 注意：看涨期权的买方有权利而没有义务

- 持有一份看跌期权是：
  - 卖的权利
  - 一定数量的对应资产
  - 一定的价格
  - 在给定日期或者之前执行
- 注意：看跌期权的买方有权利而没有义务

图4-5 期权的基本交付模式

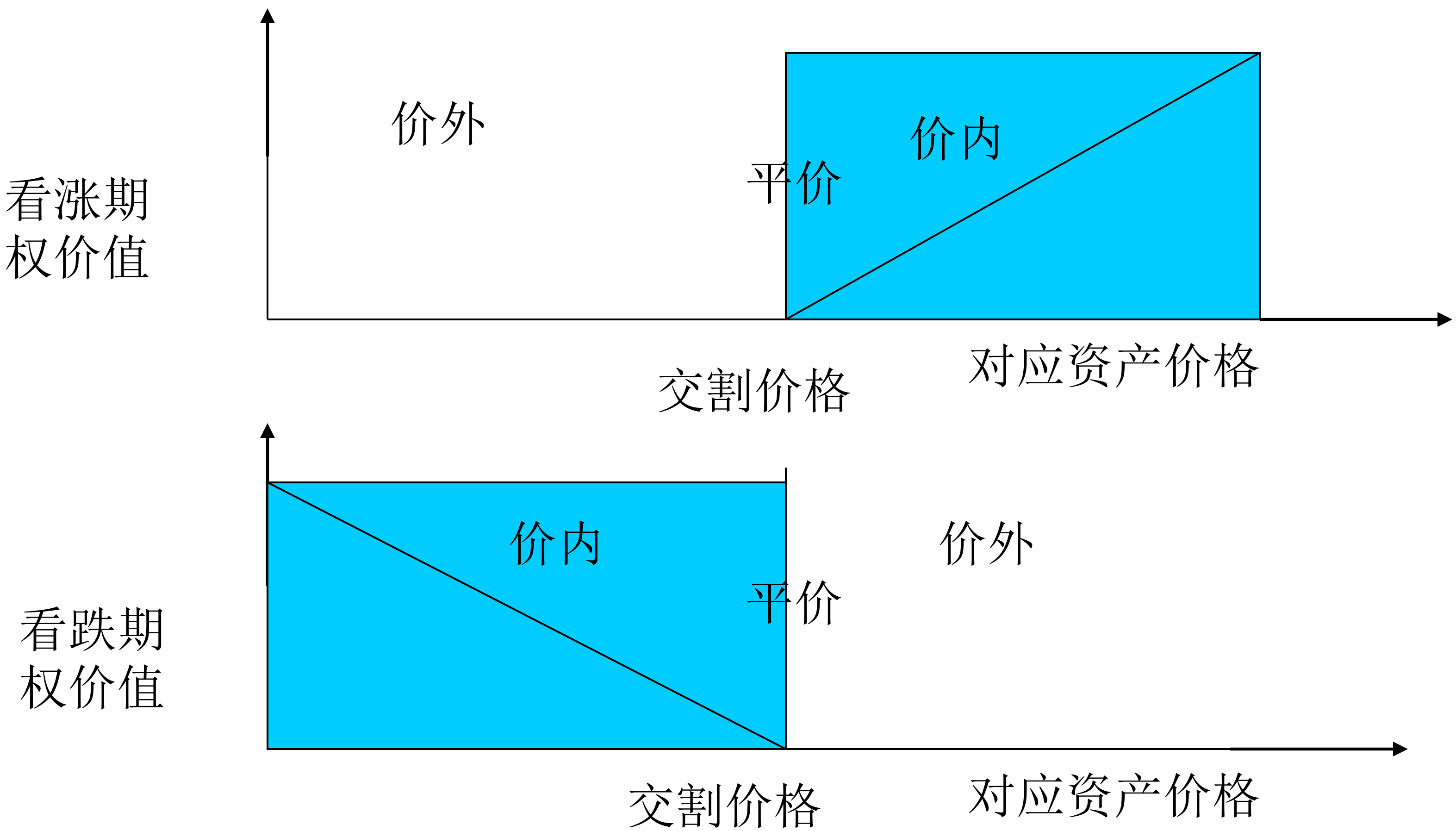


- **欧式**：只能在到期日行使的期权
- **美式**：在到期日前任何一天都可以行使的期权
- **权利金**（期权价格或期权费）：买方为了获得期权支付给卖方的费用
- **交割价格**（执行价格）：行使期权的价格，通常事先确定
- **内在价值**：如果期权立即执行其正的价值
- **时间价值**：权利金超过内在价值的值
- **价内**（折价）：有内在价值
- **价外**（溢价）：没有内在价值
- **平价**：行使价格等于相关资产价格

价内、价外和平价期权

	看涨期权	看跌期权
价内：内在价值>0	$S_t > X$	$S_t < X$
价外：内在价值=0	$S_t < X$	$S_t > X$
平价：内在价值=0	$S_t = X$	$S_t = X$

图4-6 价内、价外和平价期权的关系



10.3　到期日的价值和利润模式

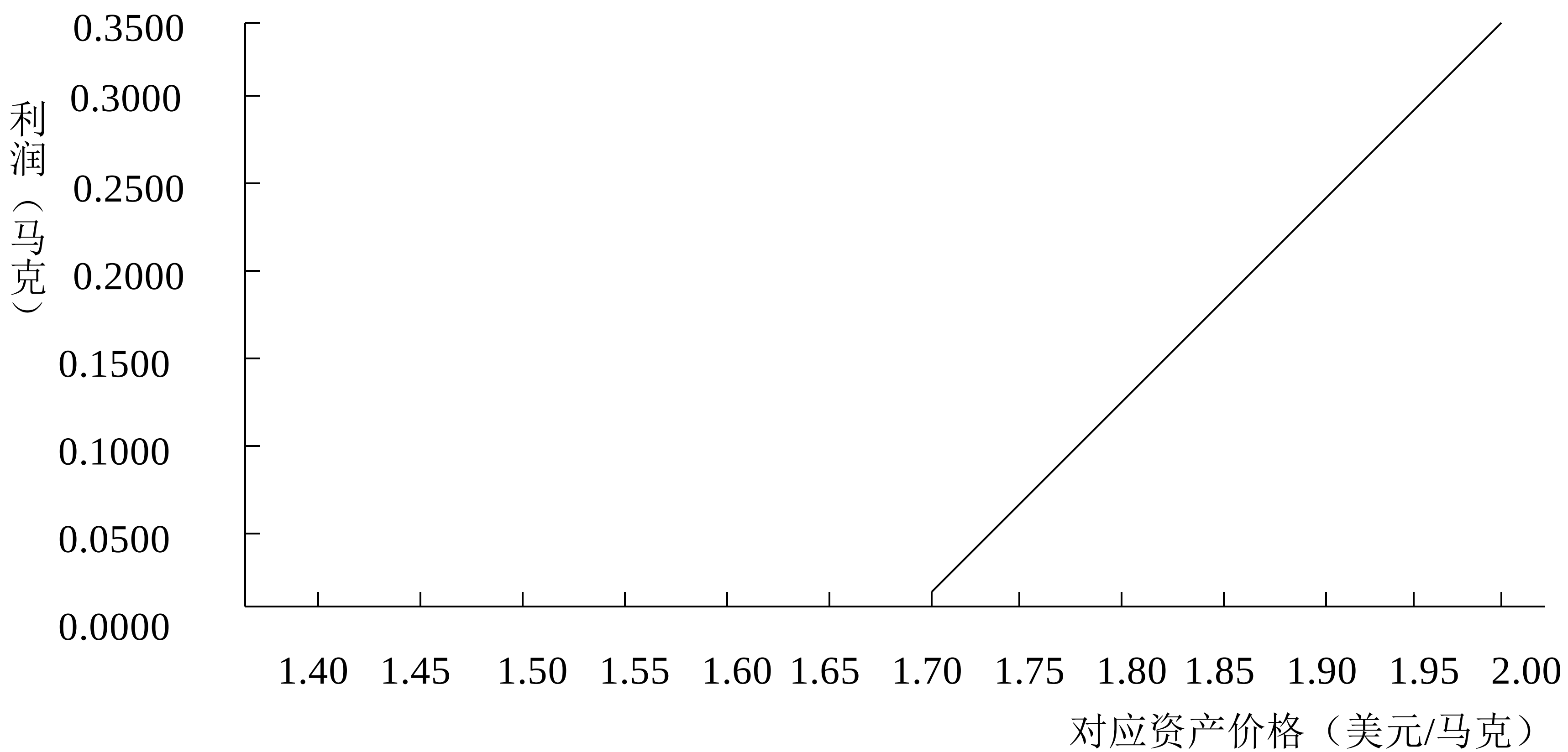
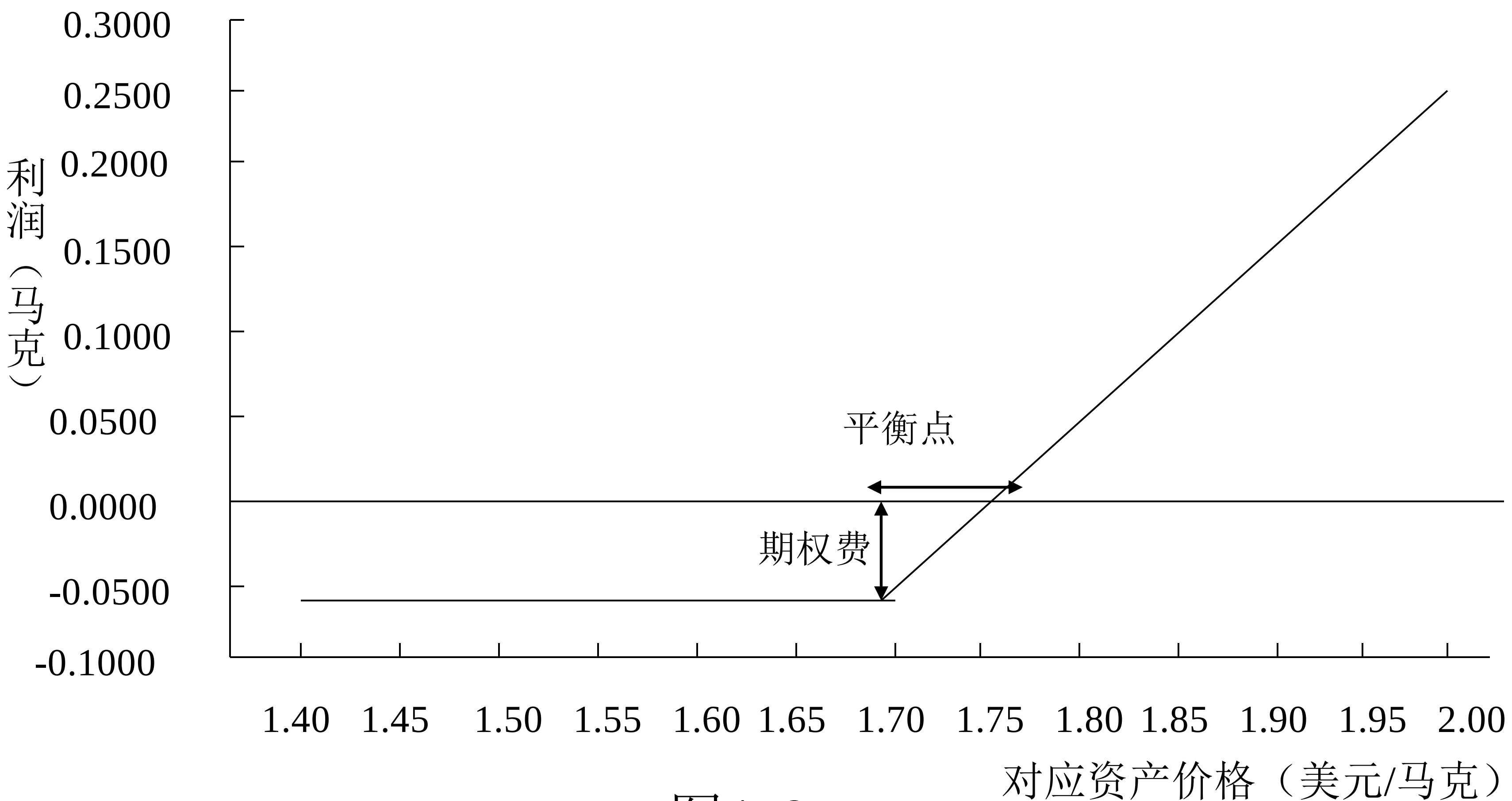


图4-7 美元对马克看涨期权的价值



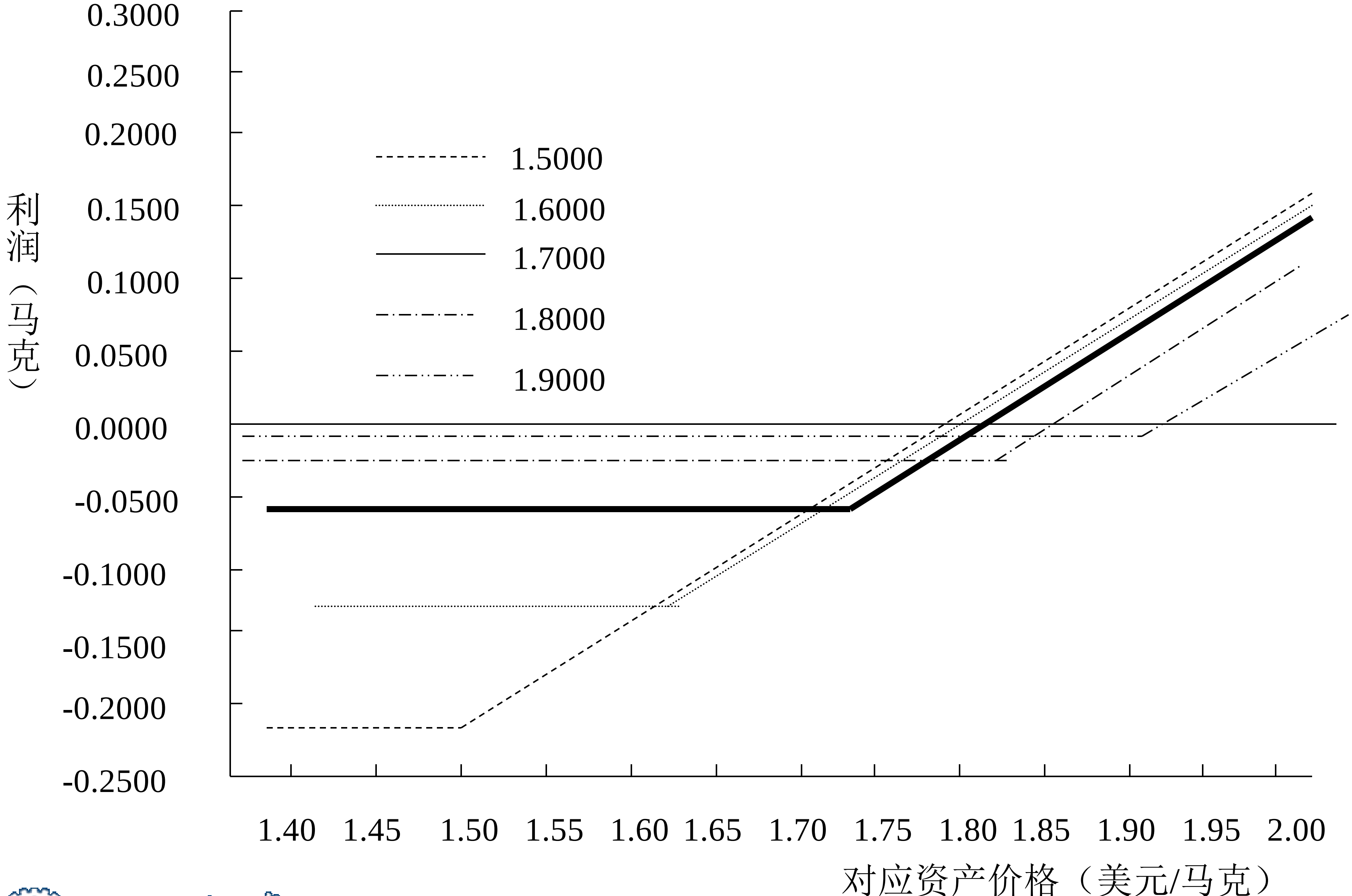
0.3000
0.2500
0.2000
0.1500
0.1000
0.0500
0.0000
-0.0500
-0.1000
利润（马克）
平衡点
期权费
1.40
1.45
1.50
1.55
1.60
1.65
1.70
1.75
1.80
1.85
1.90
1.95
2.00
对应资产价格（美元/马克）

图4-8

表10-1 不同交割价格期权的期权费

	交割价格	期权费
价内	1.5000	0.2200
	1.6000	0.1300
平价	1.7000	0.0600
	1.8000	0.0200
价外	1.9000	0.0100

图4-9 五种美元对马克看涨期权的利润模式



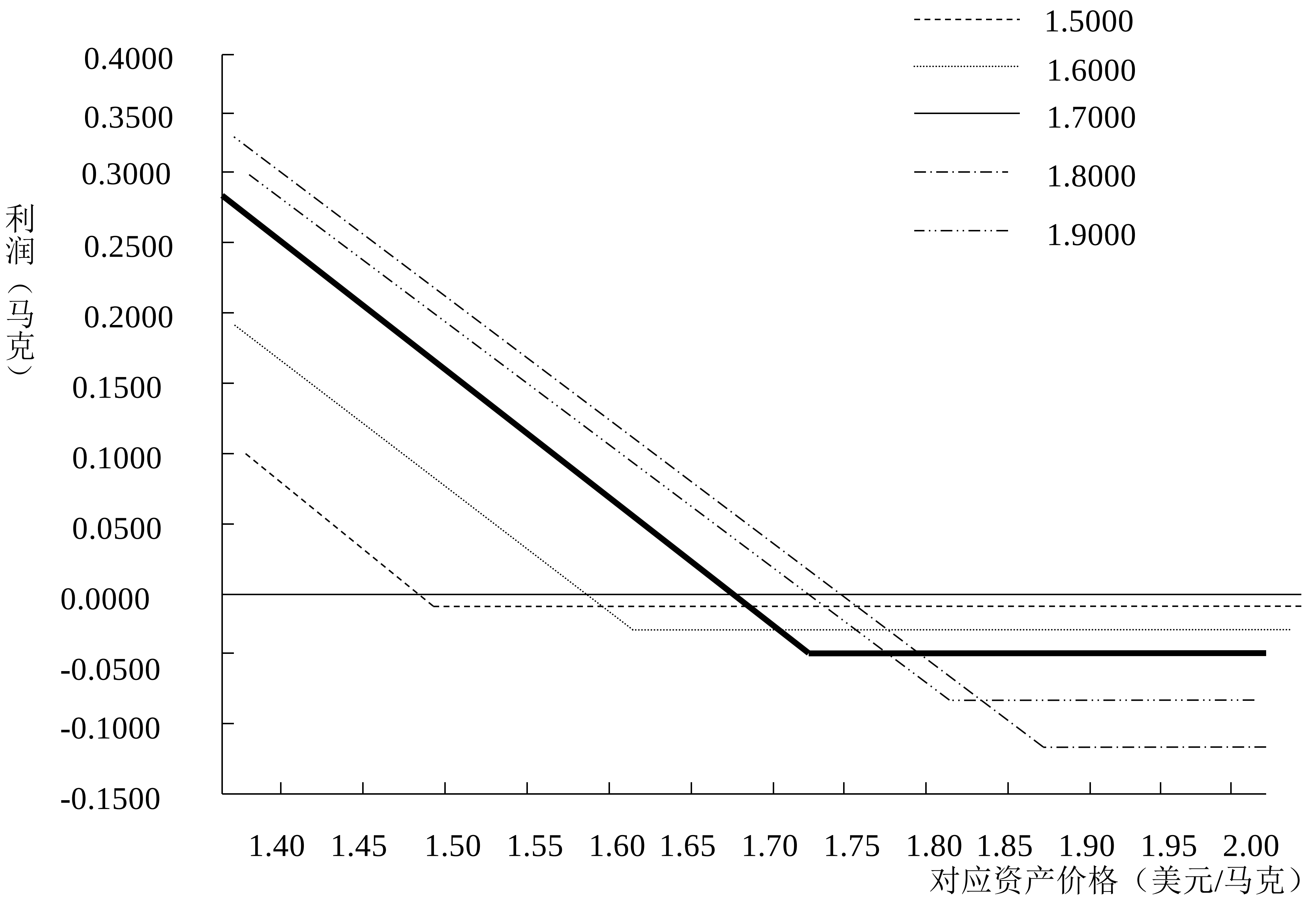


图4-10 美元对马克看跌期权的利润模式

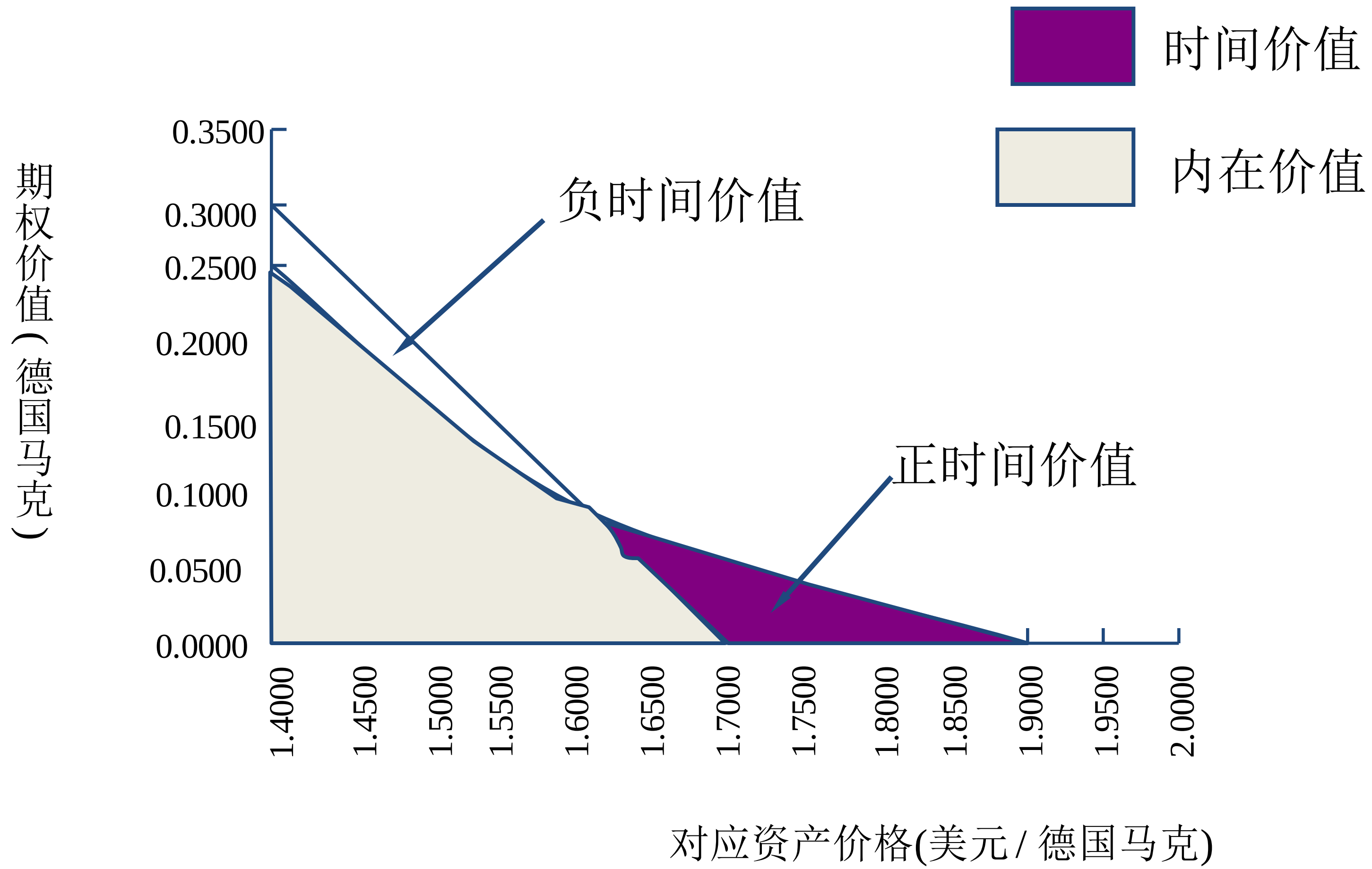


图4-29 看跌期权的内在价值和时间价值

有关时间价值的几点结论

➢平价期权的时间价值比相应的价内期权和价外期权的时间价值大

➢时间价值的第二个组成部分对现金工具价内看涨期权而言为正值，对价内看跌期权为负值

➢对衍生工具期权而言几乎没有什么持有成本，重要的是时间价值的第一个组成部分，其价内期权和价外期权、看涨期权和看跌期权之间存在几乎完美的对称关系

➢期权到期日前定价的艺术和技巧关键是为时间价值定价

股票期权的定价

- 鞅方法
- **PDE**方法
- 二项式定价方法

鞅方法

- 风险中性定价原理
  - 如果市场不存在套利组合，而且假设无风险借贷的利率为r，则存在一个概率测度使得任意一个资产的价格等于其未来可能损益（现金流）的期望值以无风险借贷利率贴现的贴现值。

$$C_0 = e^{-rT} E^Q\left(C_T\right)$$

$$S_0 = e^{-rT} E^Q\left(S_T\right)$$

看涨期权

$$C_T = \max\{S_T - X, 0\}$$

$$C_0 = e^{-rT} E^Q(C_T) = e^{-rT} E^Q\left(\max\{S_T - X, 0\}\right)$$

需要知道 S_T 的分布

（1）收益度量

收益率定义一：$\dfrac{S_{t+1}}{S_t}-1$ 不满足可加性

收益率定义二：$\ln\left(\dfrac{S_{t+1}}{S_t}\right)$ **满足可加性，**即 $\ln\left(\dfrac{S_{t+2}}{S_t}\right)=\ln\left(\dfrac{S_{t+2}}{S_{t+1}}\right)+\ln\left(\dfrac{S_{t+1}}{S_t}\right)$

收益率—价格比的对数 $\ln\left(\dfrac{S_t}{S_0}\right)$ **—满足正态分布** $\ln\left(\dfrac{S_t}{S_0}\right)\sim N(\mu t, \sigma\sqrt{t}$

S_t：时刻 t 的根本资产价格

S_0：时刻 0的根本资产价格

$N(\mu t, \sigma\sqrt{t}$：均值为 μt，标准差为 $\sigma\sqrt{t}$ 的随机正态分布

μ：年收益率

σ：收益率的处标准差

•价格满足对数正态分布：

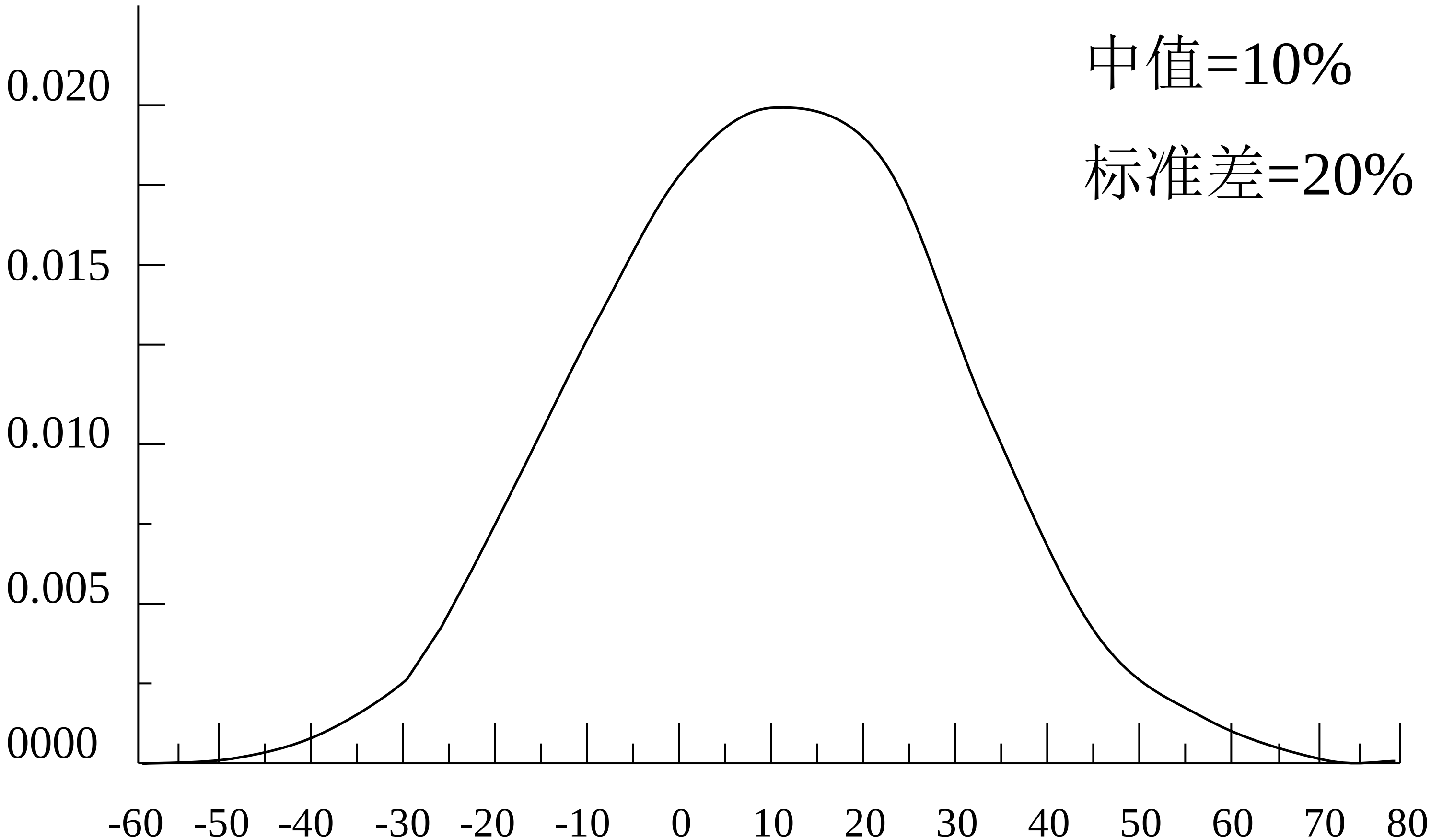


图4-11 收益率的正态分布

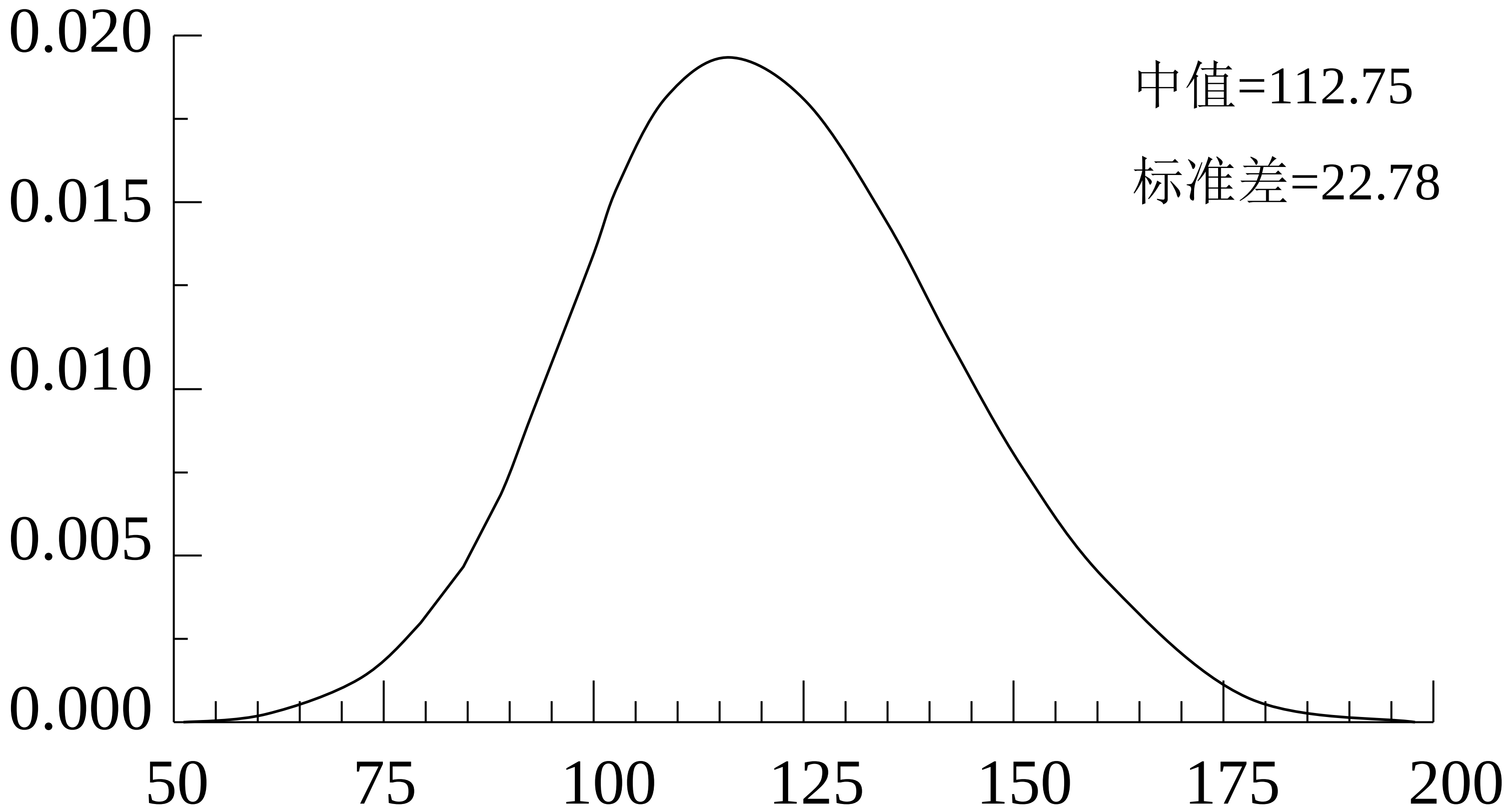


图4-12 价格的对数正态分布

•期望值的对数 > 对数的期望值

即 $$\ln(E[\frac{S_t}{S_0}]) > E[\ln(\frac{S_t}{S_0})]$$

（因为）$$\ln(E[\frac{S_t}{S_0}]) = E[\ln(\frac{S_t}{S_0})] + 0.5Var[\ln(\frac{S_t}{S_0})]$$

算术平均意义上的平均价格为 $$E(S_t) = S_0 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}$$

几何平均意义上的平均价格为 $$e^{E[\ln(S_t)]} = S_0 e^{\mu t}$$

前者大于后者，例如：$S_0 = 100, \quad \mu = 0.1 \quad \sigma = 0.2$

S_1 的算术平均值 $100e^{0.1+0.04/2} = 112.75$

S_1 的几何平均值 $100e^{0.1} = 110.52$

S_T的分布函数

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}} = S_0 e^{rT}$$

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\ln(S_T) \sim N\left(r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$$

布莱克—斯科尔斯模型

$$C_0 = e^{-rT} E^Q\left(\max\left\{S_T - X, 0\right\}\right) = S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln S_0 / X + (r + \sigma^2 / 2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} = \frac{\ln S_0 / X + (r - \sigma^2 / 2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

应用:数字期权(二元期权的定价)

- 在外汇理财产品中：
  - 存入美元，其利率与汇率挂钩
  - 如果国际市场美元/港币汇率大于或等于7.7100，则该计息期的年收益率为3.30%
  - 如果国际市场美元/港币汇率小于7.7100，则该计息期的年收益率为0.50%。

数字期权

- 看涨期权，执行价格为X
- 到期日的损益为：
  - 如果股票价格S_T >= X，则获取收益A（固定值）
  - 如果股票价格S_T <= X，则为0
- 问：这种期权的当前价格多少？

- 按照前面的鞅方法：

$$C_t = e^{-rT}\left[\int_0^X 0\cdot f(s)ds + \int_X^{+\infty} Af(s)ds\right]$$

$$= e^{-r(T-t)}A\int_X^{+\infty} f(s)ds$$

$$= e^{-r(T-t)}A\cdot N(d_2)$$

2、Black-Scholes的无套利定价过程

- 基本思想：
  - 衍生产品与标的资产都受到同样的风险源影响
  - 构造一个它们的组合，消除价格波动风险
  - 变不确定性为确定性

Black-Scholes公式的假设

- 根本资产可以自由买卖
- 根本资产可以卖空
- 在到期前根本资产没有任何红利收入
- 资金的借贷适用相同的无风险利率且为连续复利
- 欧式期权，即在到期前不能执行
- 没有任何税赋、交易成本或保证金
- 根本资产价格是时间的连续函数，不会出现跳动或间断情况
- 根本资产的波动率、利率在契约期间不变

放宽假设后的期权定价公式

- 根本资产买卖有约束
- 根本资产不能卖空
- 在到期前根本资产有收益或红利
- 资金的借贷无风险利率不相同
- 美式期权，即在到期前可以执行
- 有税赋、交易成本或保证金
- 根本资产价格出现突变
- 根本资产的波动率、利率均为随机过程

- 股价满足如下的几何布朗运动：

$$ds = usdt + \sigma Sdw$$

其中： $dw = z\sqrt{dt}$,z 为标准正态分布变量

- 衍生产品与标的资产的风险源都来自于dw
- 所以，构造它们组合的目的就是消除dw

ITO 定理

- 衍生产品的价格为标的资产s和t的函数f(s,t)
- 维纳过程dw连续不可导，利用ITO公式

$$ds = a(s,t)dt + b(s,t)dw$$

- 则：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial s} a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial s} b dw$$

举例 1：$f = Se^{r(T-t)}$

- 假设 s 满足如下的过程：

$$\mathrm{d}s = us\,\mathrm{d}t + \sigma s\,\mathrm{d}w$$

- 考虑远期价格 $F = Se^{r(T-t)}$，其满足的过程为：

$$\frac{\partial F}{\partial s} = e^{r(T-t)}, \frac{\partial F}{\partial t} = -rse^{r(T-t)}, \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0$$

$$\mathrm{d}F = (u-r)F\,\mathrm{d}t + \sigma F\,\mathrm{d}w$$

举例2: f = Ln s

- 假设 s 满足如下的过程：

$$ds = us\,dt + \sigma s\,dw$$

- 如果考虑s的对数，则dLns 满足的运动过程为：

$$d\mathrm{Ln}\,S = \left(u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\,dw$$

- 所以构造这样一个组合：
  - 持有 $\frac{\partial f}{\partial s}$ 份标的资产
  - 卖空 **1** 份衍生产品
  - 则组合的价值为：

$$\prod = -f + \frac{\partial f}{\partial s} s$$

$$d\prod = d(-f + \frac{\partial f}{\partial s}s) = -df + \frac{\partial f}{\partial s}ds$$

$$= (-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2 s^2)dt$$

- 无风险套利原理：

$$d\prod = r\Pi dt$$

- 上面两式联立：

$$-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2 s^2=r(-f+\frac{\partial f}{\partial s}s)$$

- 整理可得：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2 s^2+rs\frac{\partial f}{\partial s}=rf$$

- 利用边界条件，求解偏微分方程：

  t=T时，f(T) = max[s(T)-X, 0]

- 解得B-S定价公式：

$$C = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$$

3、二项式定价方法

- 对于美式看跌期权，亚式期权等奇异期权，B-S公式无法适用
- 对股价的未来走势进行计算机仿真，以确定期权价格
- 简单地假设，每一期的股价变化就两种状态，涨一定百分比，或者跌一定百分比

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & uS \\
S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & dS
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & C_u \\
C \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & C_d
\end{tikzcd}
$$

一期的二项式定价过程

考虑一个例子：

- 假设当前股价S_0＝100, u=1.5, d=0.75
- 一看涨期权，执行价格为125
- 股价一年后到期(一期)，利率为5％

如何构造组合，算出期权价格？

无套利定价原则：

$$\begin{cases} 150x + 1.05y = 25 \\ 75x + 1.05y = 0 \end{cases}$$

- 可解得：
  - **X=1/3，y=-25/1.05**
- 所以期权价值为：

  1/3*100-25/1.05 =9.25

推广到一般情况

- 构造如下组合：
  - (1)卖出一份看涨期权
  - (2)买*h*个单位的根本资产
  - (3)借入金额为B的款项
- 目标：
  - 期末的现金流为0

- 有如下方程：

$$\begin{cases} huS - C_u - BR = 0 \\ hdS - C_d - BR = 0 \\ C - hS + B = 0 \end{cases}$$

其中：**R = 1+r 或e^{it}**

- 通过解得**h**和**B**，然后再求出**c**

- **解得：**

$$h=\frac{C_u-C_d}{S(u-d)} \qquad B=\frac{dC_u-uC_d}{R(u-d)}$$

$$C=\frac{(R-d)C_u+(u-R)C_d}{R(u-d)}$$

- 令：

$$p = \frac{R-d}{u-d}$$

- 可得：

$$C = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & C_u \\ C \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\ & C_d \end{tikzcd}$$

举例：

- S_0＝100, u=1.2, d=0.9， R =1+0.10, X=100
- 则：

  $h = (C_u – C_d)/S/(u\text{-}d)$

  $= (20 – 0)/100/(1.2\text{-}0.9) = 2/3$

  $B = [dC_u - uC_d]/R/(u\text{-}d)$

  $= [0.9*20 –1.2*0]/(1.1)/(1.2\text{-}0.9)=54.54$

  $C = hS – B = 2/3 *100 – 54.54 = 12.12$

从p来看：

$p = (R-d)/(u-d)$

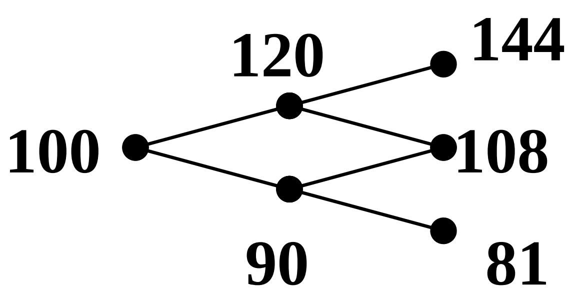
$= (1.1 – 0.9)/(1.2-0.9)=2/3$

$c =[2/3 * 20 + 1/3*0]/(1+0.1)$

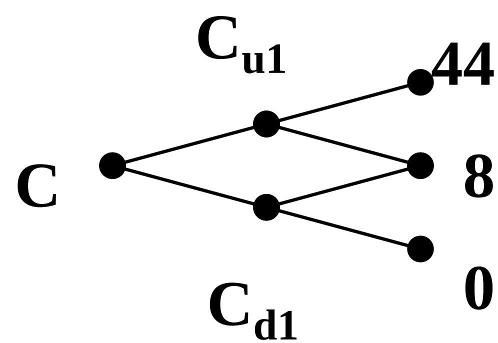
$= 12.12$

从一期扩展到两期

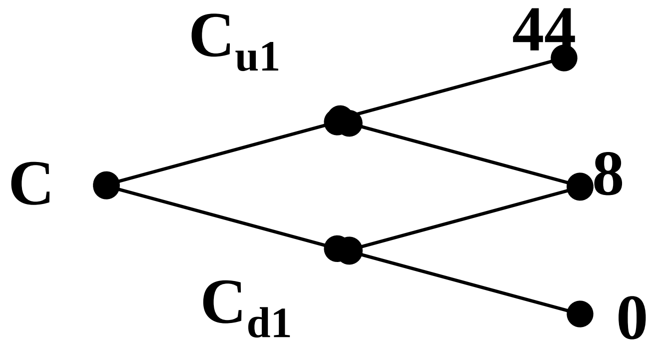
风险资产



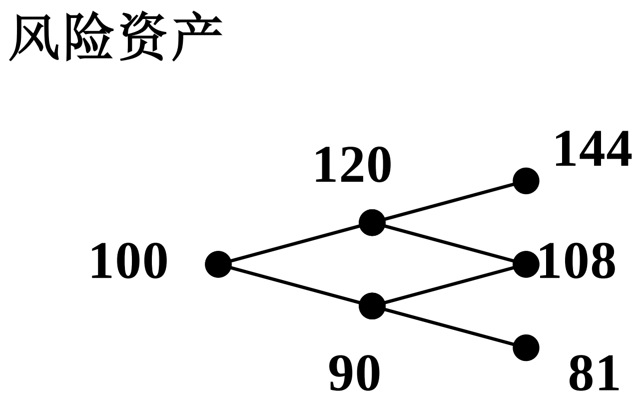
期权

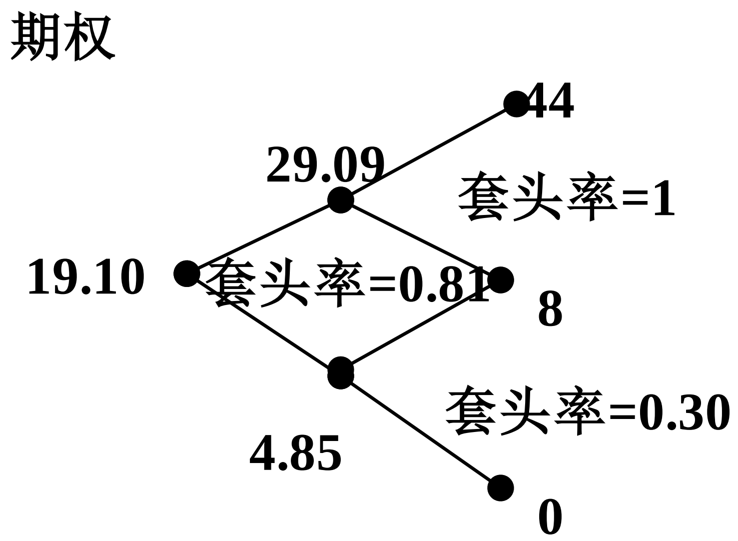


- 分割法：
  - 将两期期权定价问题化解为求C_{u1}和C_{d1}
  - 再求C
- 由一期期权定价方法求C_{u1}和C_{d1}



- $p = 2/3, \ q = 1/3$
- C_{u1}= [44 *2/3 + 1/3*8]/1.1 = 29.09
- C_{d1}= [8 *2/3 + 1/3*0]/1.1 = 4.85
- C = [29.09 *2/3 + 1/3*4.85]/1.1 = 19.10

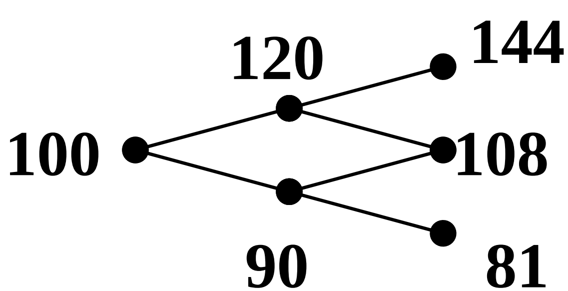

风险资产
120
144
100
108
90
81


期权
44
29.09
套头率=1
19.10
套头率=0.81
8
套头率=0.30
4.85
0

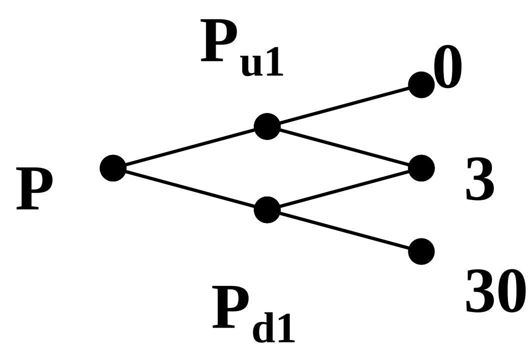
练习：二项式模型对欧式看跌期权定价

- **欧式看跌期权如何定价？**
- **S_0＝100, u=1.2, d=0.9，R =1+0.10, X=111**

风险资产



期权

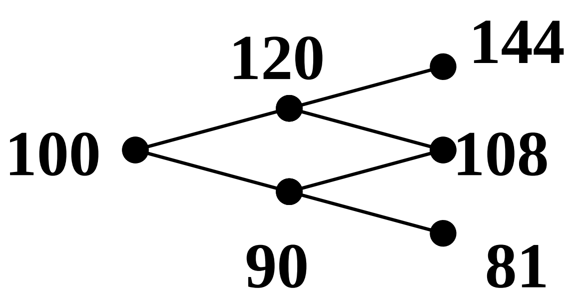


- **$p = 2/3$, $q = 1/3$**
- **$P_1 = (0*2/3 + 3*1/3)/(1+0.1) =$** 0.91
- $P_2 =$ **$(3*2/3 + 30*1/3)/(1+0.1) =$** 10.91
- **$P = (0.91*2/3 + 10.91*1/3)/(1+0.1) = 3.86$**

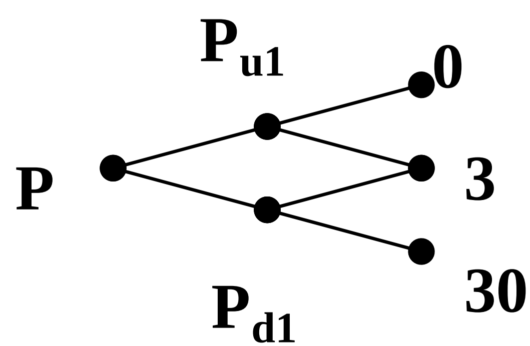
二项式模型对美式看跌期权定价

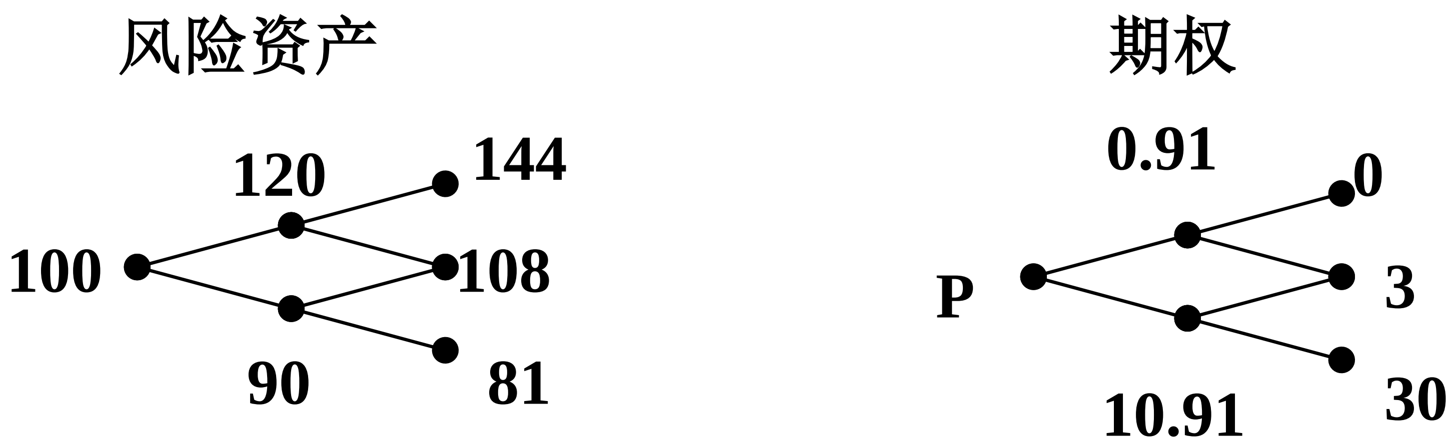
- **美式看跌期权如何定价？**
- $\mathbf{S_0＝100, u=1.2, d=0.9，R=1+0.10, X=111}$

风险资产



期权

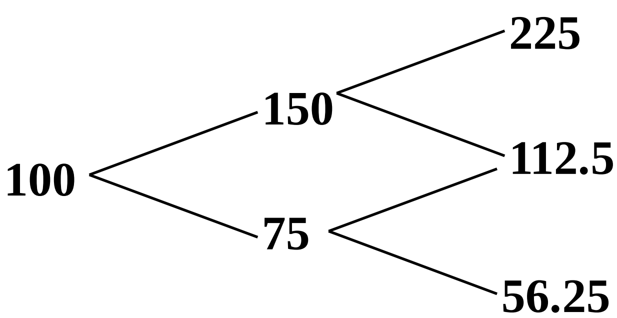




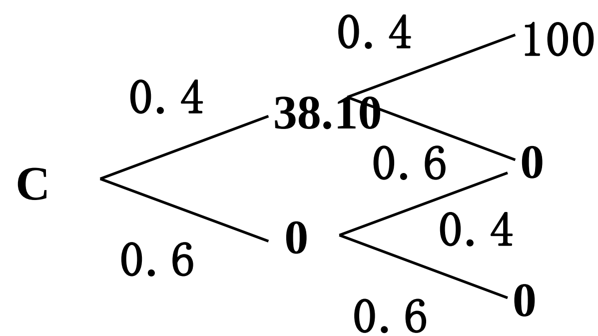
- P = (0.91*2/3 + 21*1/3)/(1+0.1) = 6.92

思考：美式看涨期权呢？

- X=125



股票



看涨期权

扩展到N步的情况

- 一般采用的***u***值和***d***值使二项模型近似于实际中价格的对数正态分布 (Moment matching)
- 一阶矩匹配：$pu+(1-p)d=e^{i\Delta t}$
- 二阶矩匹配：$pu^2+(1-p)d^2=\sigma^2\Delta t+e^{2i\Delta t}$
- 额外约束：$u=\dfrac{1}{d}$

扩展到N步的情况

- 可求得

$$R=e^{i\Delta t},\qquad p=\frac{R-d}{u-d},\qquad u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\qquad d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$\Delta t=t/N$$

- 其中：

  σ 收益率的年标准差

  N：二项式展开阶次

  t：期权持有时间

  r：年利率

例子：

$\sigma = 20\%$， $t = 1$年， $i = 10\%$， $N = 10$

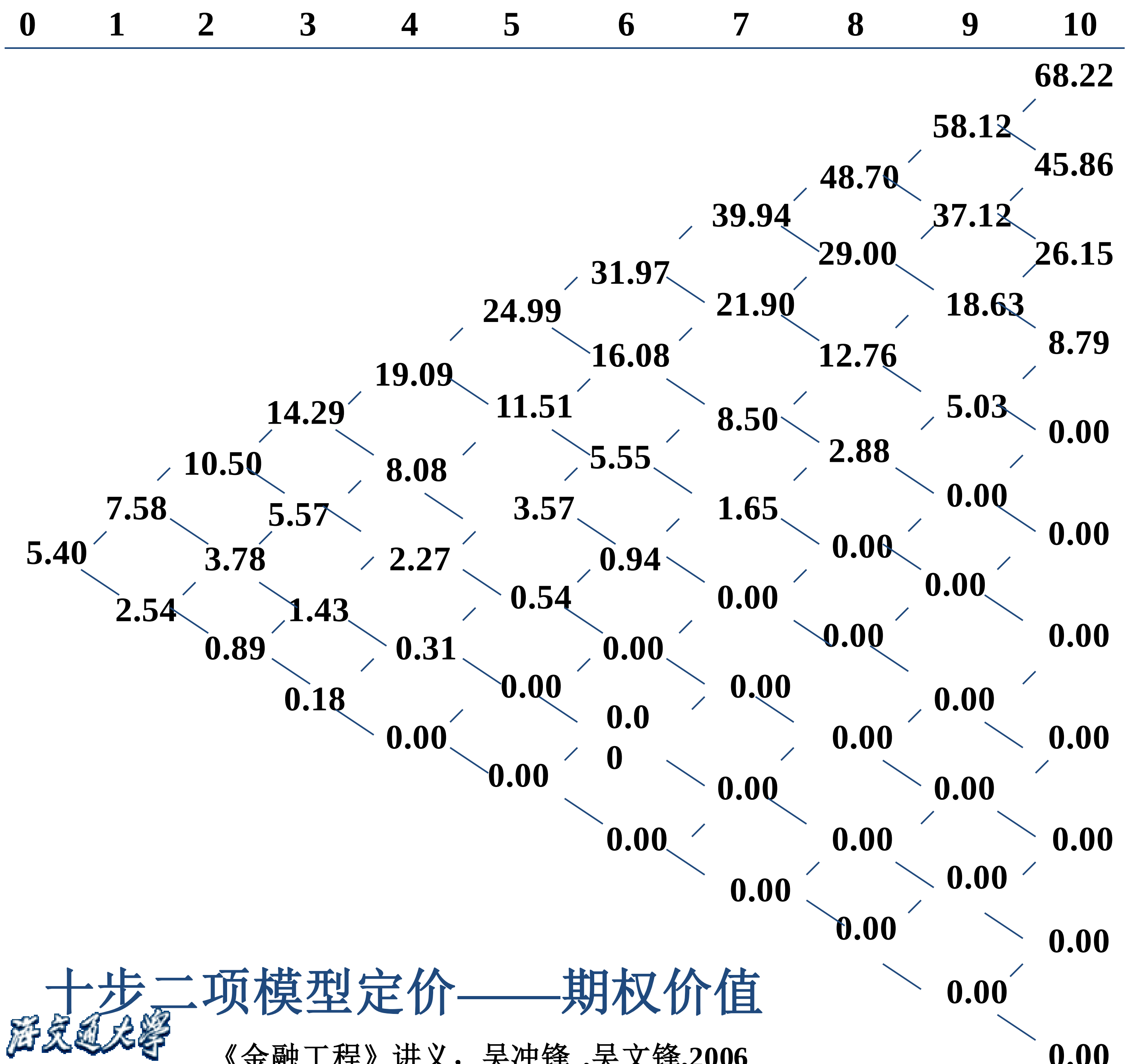
$$u = 1.065288$$

$$d = 0.938713$$

$$R = 1.012072$$

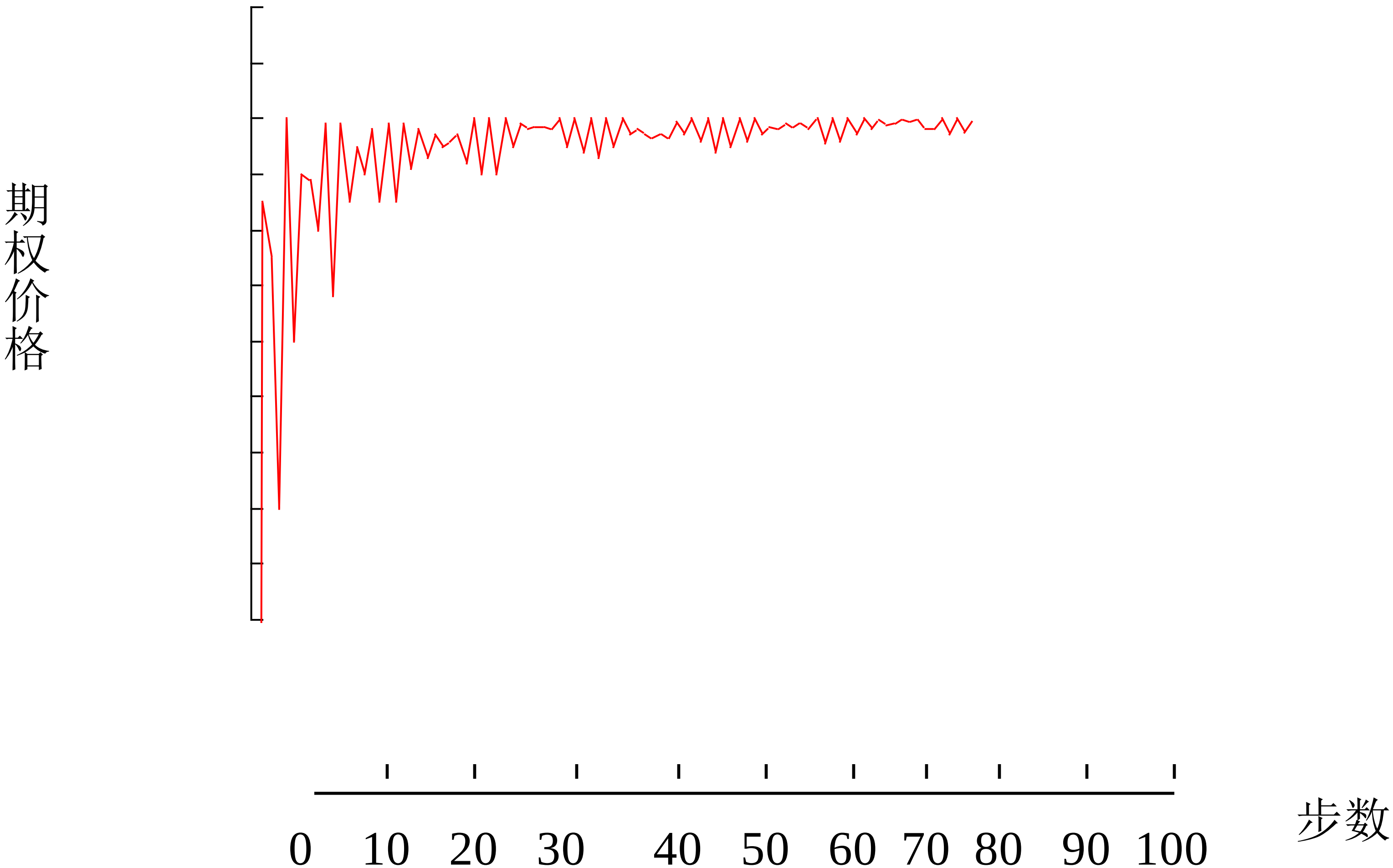
十步二项模型定价—资产价格

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100.00	106.53	113.48	120.89	128.79	137.19	146.15	155.69	165.86	176.69	188.22
	93.87	100.00	106.53	113.48	120.89	128.79	137.19	146.15	155.69	165.86
		88.12	93.87	100.00	106.53	113.48	120.89	128.79	137.19	146.15
			82.72	88.12	93.87	100.00	106.53	113.48	120.89	128.79
				77.65	82.72	88.12	93.87	100.00	106.53	113.48
					72.89	77.65	82.72	88.12	93.87	100.00
						68.42	72.89	77.65	82.72	88.12
							64.23	68.42	72.89	77.65
								60.29	64.23	68.42
									56.60	60.29
										53.13



十步二项模型定价——期权价值

二项式模型的可靠性



隐含波动率

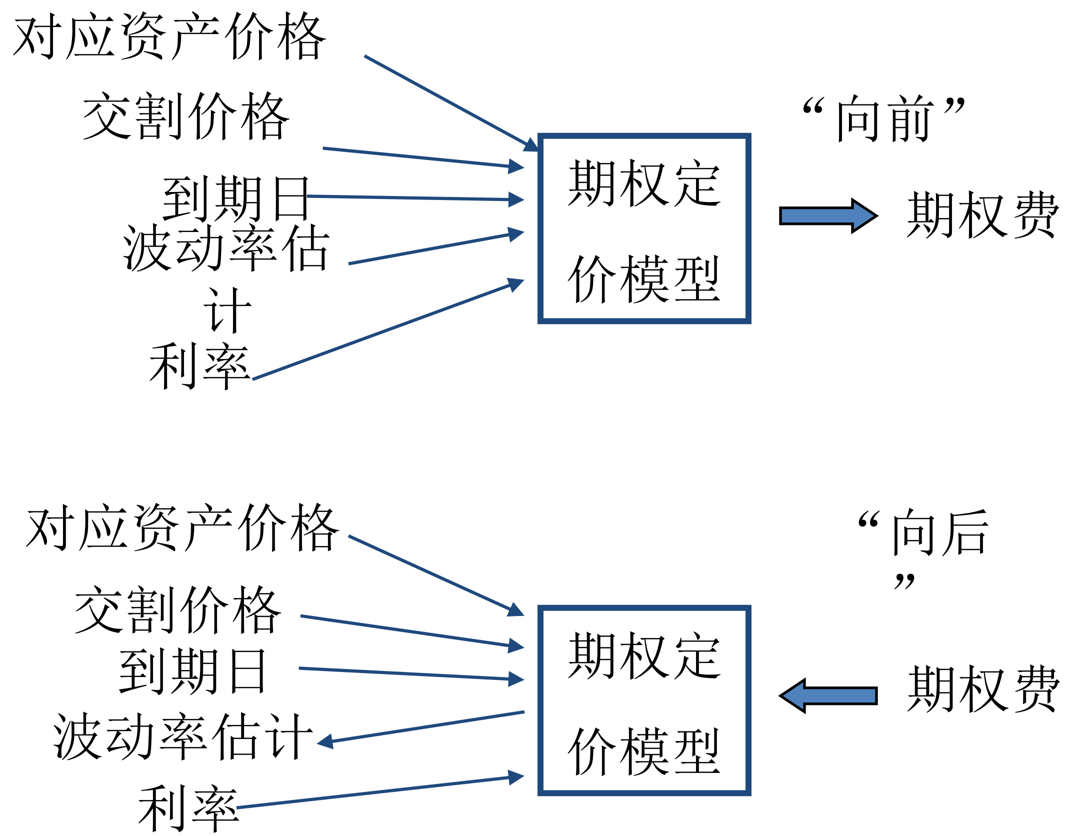


图4-26 通过期权定价模型计算隐含波动率

隐含波动率：

通常来说，期权定价模型通过波动率和其他变量计算期权的价格。

反过来, 模型可以通过期权价格来计算隐含波动率，通过这种方法计算出来的波动率叫作隐含波动率。

10.5 股票期权价格的特征

一、影响期权价格的因素

- 股票价格和执行价格
- 到期期限
- 波动率
- 无风险利率
- 红利

表4-2 一个变量增加而其他变量保持不变对股票期权价格的影响

变量	欧式看涨期权	欧式看跌期权	美式看涨期权	美式看跌期权
股票价格	+	-	+	-
执行价格	-	+	-	+
到期期限	?	?	+	+
波动率	+	+	+	+
无风险利率	+	-	+	-
红利	-	+	-	+

二　假设和符号

- 为分析问题，可以合理地假定不存在套利机会
- 以下字母的含义为：
- S：股票现价
- X：期权执行价格
- T：期权的到期时间
- t:　现在的时间
- S_T：在T时刻股票的价格

- r: 在T时刻到期的无风险利率
- C：一股股票的美式看涨期权的价值
- P：一股股票的美式看跌期权的价值
- c: 一股股票的欧式看涨期权的价值
- p: 一股股票的欧式看跌期权的价值
- σ :股票价格的波动率

三、期权价格的上下限

1　期权价格的上限

股票价格是期权价格的上限:

$$c \leq S \quad \text{和} \quad C \leq S$$

2. 不付红利的欧式看跌期权的下限

- 对于不付红利的欧式看跌期权来说，其价格的下限为：

$$Xe^{-r(T-t)}-S$$

- 假定S=$37， X=$40， r=5%， T-t=0.5
- $Xe^{-r(T-t)} - S$ = $40e^{-0.05*0.5}-37$ = 2.01 或 $2.01
- 如果欧式看跌期权价格$1.00 < $2.01(理论最小值)
- 套利者可借入六个月期的$38.00，购买看跌期权和股票。
- 在六个月末

  套利者将支付$\$38e^{0.05*0.5}$=$38.96。

- 如果股票价格低于$40.00,套利执行期权以$40.00卖出股票，归还所借款项本金和利息，

  其获利为：$40.00-$38.96=$1.04
- 如果股票价格高于$40.00，套利者放弃期权，卖出股票并偿付所借款项本金和利息，甚至可获得更高的利润。
- 例如，如果股票价格为$42.00，则套利者的利润为：$42.00-$38.96=$3.04

考虑下面两个组合：

- 组合C：一个欧式看跌期权加上一股股票
- 组合D：金额为$Xe^{-r(T-t)}$的现金
- 如果$S_T<X$，在T时刻组合C中的期权将被执行，该组合的价值为X。如果$S_T>X$，在T时刻看跌期权到期价值为零，该组合的价值为S_T。因此，组合C在T时刻的价值为：$\max(S_T, X)$

- 假定现金按无风险利率进行投资，则在T时刻组合D的价值为X。
- 因此，在T时刻组合C的价值通常不低于组合D的价值，并且有时组合C的价值会高于组合D的价值。
- 在不存在套利机会时，组合C的现在价值一定高于组合D的现在价值。因此：

$p+S>Xe^{-r(T-t)}$ 或 $p>Xe^{-r(T-t)}-S$

- 由于对于一个看跌期权来说，可能发生的最坏情况是期权到期价值为零
- 所以期权的价值必须为正值，即p>0
- 这意味着：

$$p > \max(Xe^{-r(T-t)} - S, 0)$$ 式（*1）

3. 不付红利的看涨期权的下限

- 不付红利的欧式看涨期权的下限是

$$S - Xe^{-r(T-t)}$$

例

- 考虑一个不付红利的股票的美式看涨期权
- 此时股票价格为\$51时，执行价格为\$50
- 距到期日有六个月，无风险年利率为12％
- 即在本例中，S＝\$51，X=\$50，T-t=0.5，r=0.12。
- 根据 $c > \max(S - Xe^{-r(T-t)}, 0)$
- 该期权价格的下限为 $S-Xe^{-r(T-t)}$

或 $51-50e^{-0.12*0.5}=\$3.91$

2017年06月 (37天) ▼ 标的名称: 50ETF 最新价: 2.373 涨跌: 0.018 幅度: 0.76 成交量: 2710722 持仓量: -- 金额: 64194万

易状态	卖价	买价	涨幅%	涨跌	最新	购<行权价>沽 ↑	最新	涨跌	涨幅%	买价	卖价
闭市	0.2120	0.2113	4.60	0.0093	0.2113	2.1530A	0.0007	-0.0001	-12.50	0.0006	0.0007
闭市	0.1666	0.1665	7.48	0.0116	0.1666	2.2000	0.0006	-0.0002	-25.00	0.0006	0.0008
闭市	0.1644	0.1643	7.39	0.0113	0.1643	2.2020A	0.0008	-0.0002	-20.00	0.0008	0.0009
闭市	0.1171	0.1170	10.37	0.0110	0.1171	2.2500A	0.0013	-0.0005	-27.78	0.0013	0.0015
闭市	0.1174	0.1173	10.56	0.0112	0.1173	2.2500	0.0013	-0.0005	-27.78	0.0013	0.0015
闭市	0.0708	0.0707	16.26	0.0099	0.0708	2.2990A	0.0039	-0.0018	-31.58	0.0037	0.0041
闭市	0.0698	0.0697	15.97	0.0096	0.0697	2.3000	0.0040	-0.0018	-31.03	0.0039	0.0040
闭市	0.0325	0.0324	27.95	0.0071	0.0325	2.3480A	0.0145	-0.0056	-27.86	0.0143	0.0145
闭市	0.0314	0.0312	27.24	0.0067	0.0313	2.3500	0.0150	-0.0055	-26.83	0.0149	0.0150
闭市	0.0118	0.0116	26.09	0.0024	0.0116	2.3970A	0.0425	-0.0094	-18.11	0.0420	0.0427
闭市	0.0110	0.0109	23.86	0.0021	0.0109	2.4000	0.0444	-0.0113	-20.29	0.0444	0.0446
闭市	0.0043	0.0039	23.53	0.0008	0.0042	2.4460A	0.0836	-0.0119	-12.46	0.0834	0.0846
闭市	0.0036	0.0035	9.09	0.0003	0.0036	2.4500	0.0871	-0.0122	-12.29	0.0870	0.0881
闭市	0.0021	0.0020	-5.00	-0.0001	0.0019	2.4950A	0.1310	-0.0111	-7.81	0.1306	0.1313
闭市	0.0019	0.0016	0.00	0.0000	0.0017	2.5000	0.1357	-0.0114	-7.75	0.1358	0.1360
闭市	0.0014	0.0013	0.00	0.0000	0.0013	2.5500	0.1850	-0.0114	-5.80	0.1846	0.1859

四、提前执行：

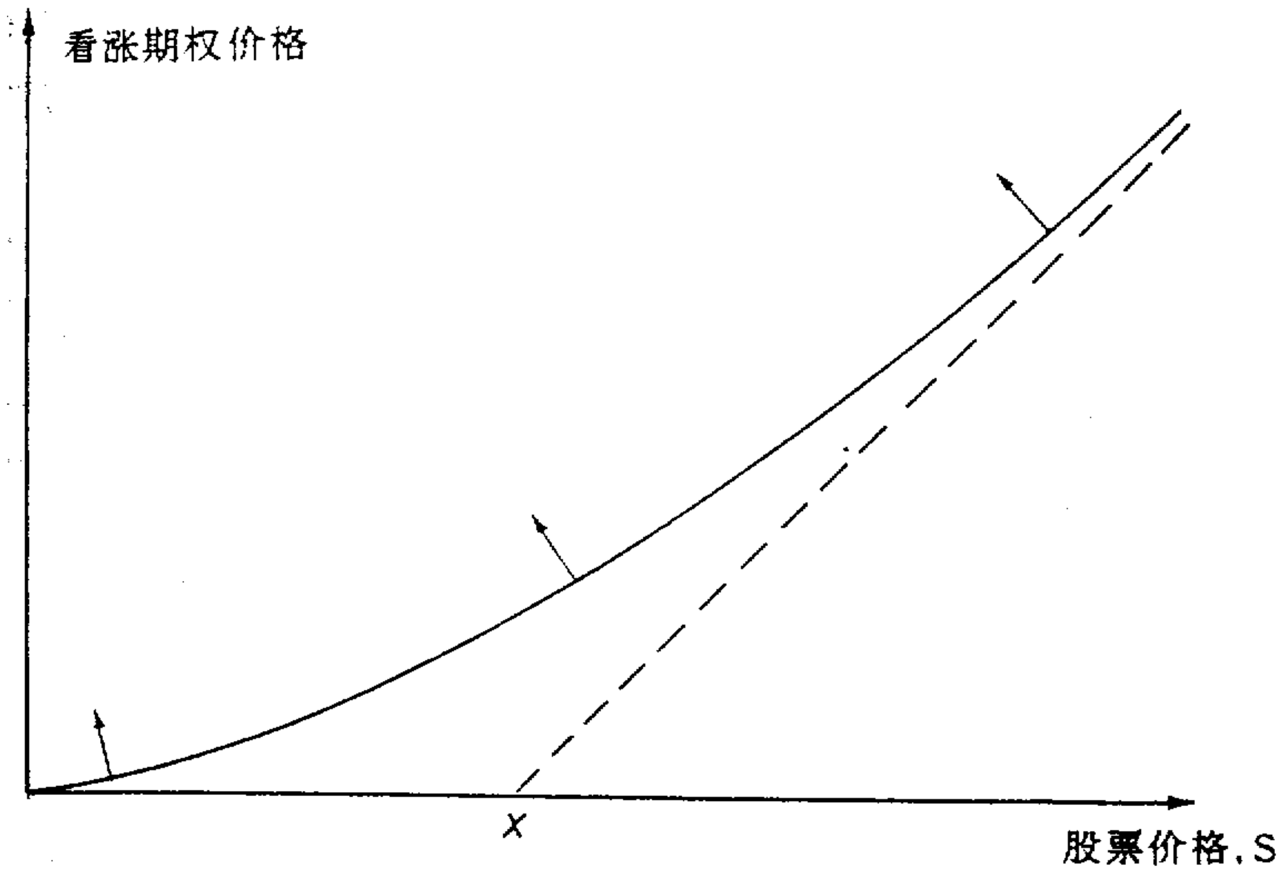
1. 提前执行不付红利的美式看涨期权是不明智的。

- 考虑一个不付红利股票的美式看涨期权，距到期日还有1个月，股票价格为$50，执行价格为$40。期权的实值额很大，期权的持有者可能很想立即执行它。
- 那些确实想持有股票的投资者将会购买该期权。这类投资者是一定存在的。否则股票的现价就不会是$50。$C>S-Xe^{-r(T-t)}$

- 所以C>S-X。
- 如果提前执行是明智的，那么C应该等于S-X。
- 我们的结论是：提前执行是不明智的。

图 4-16

股价为S的不付红利股票的美式或欧式看涨期权的价格变化



2. 提前执行不付红利的看跌期权可能是明智的

- 提前执行不付红利的看跌期权可能是明智的。
- 事实上，在期权有效期内的任一给定的时刻，如果看跌期权的实值额很大，则应提前执行它。

- 考虑一个极端的例子
- 假定执行价格为$10，股票价格接近为0。
- 通过立即执行期权，投资者可立即获利$10
- 如果投资者等待，则执行期权的盈利可能低于$10，但是由于股票价格不可能为负值，所以盈利不会超过$10。
- 另外，现在收到$10比将来收到$10要好。
- 这说明该期权应立即执行。

图 4-17

股价为S的美式看跌期权的价格变化图

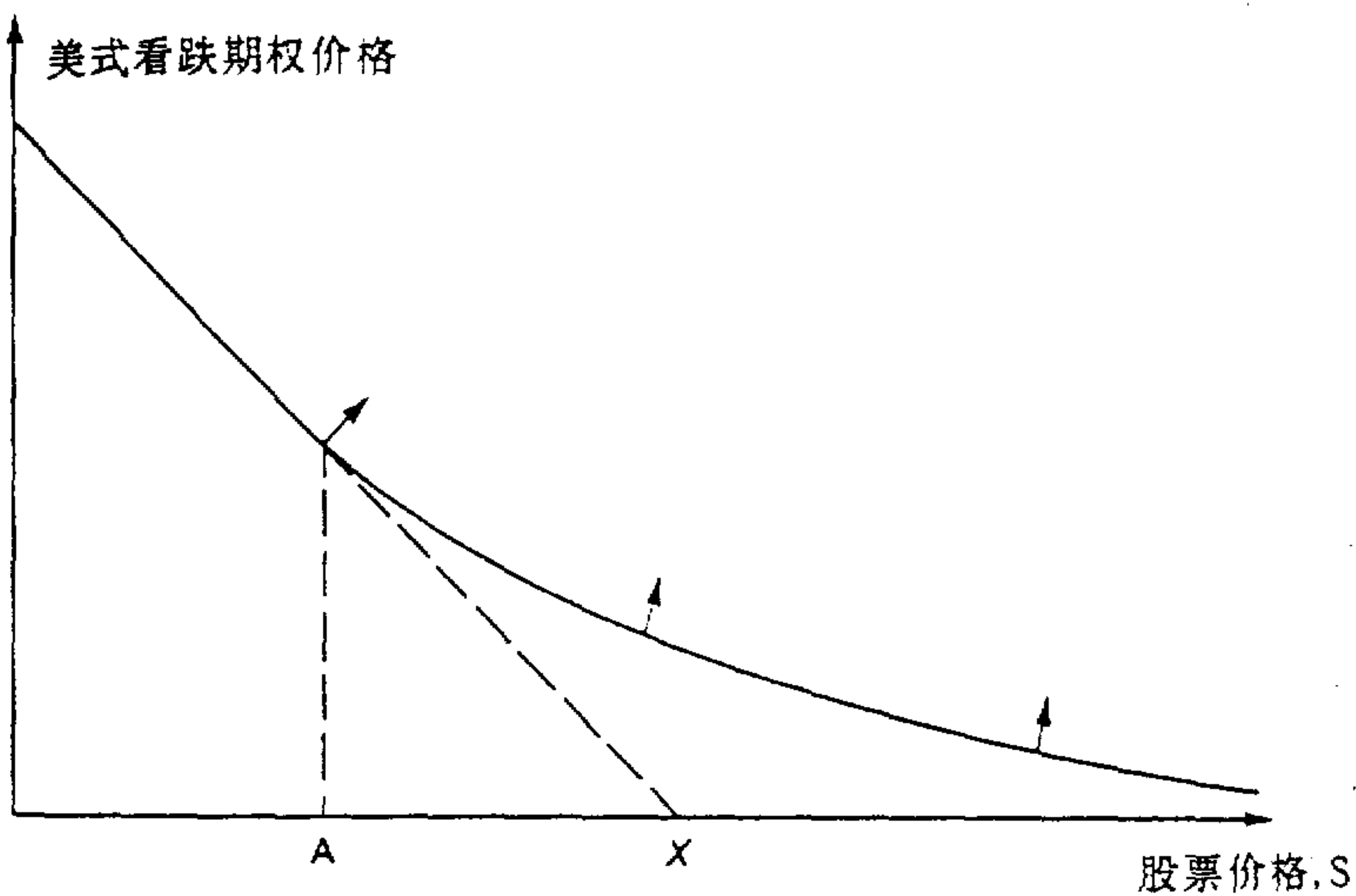
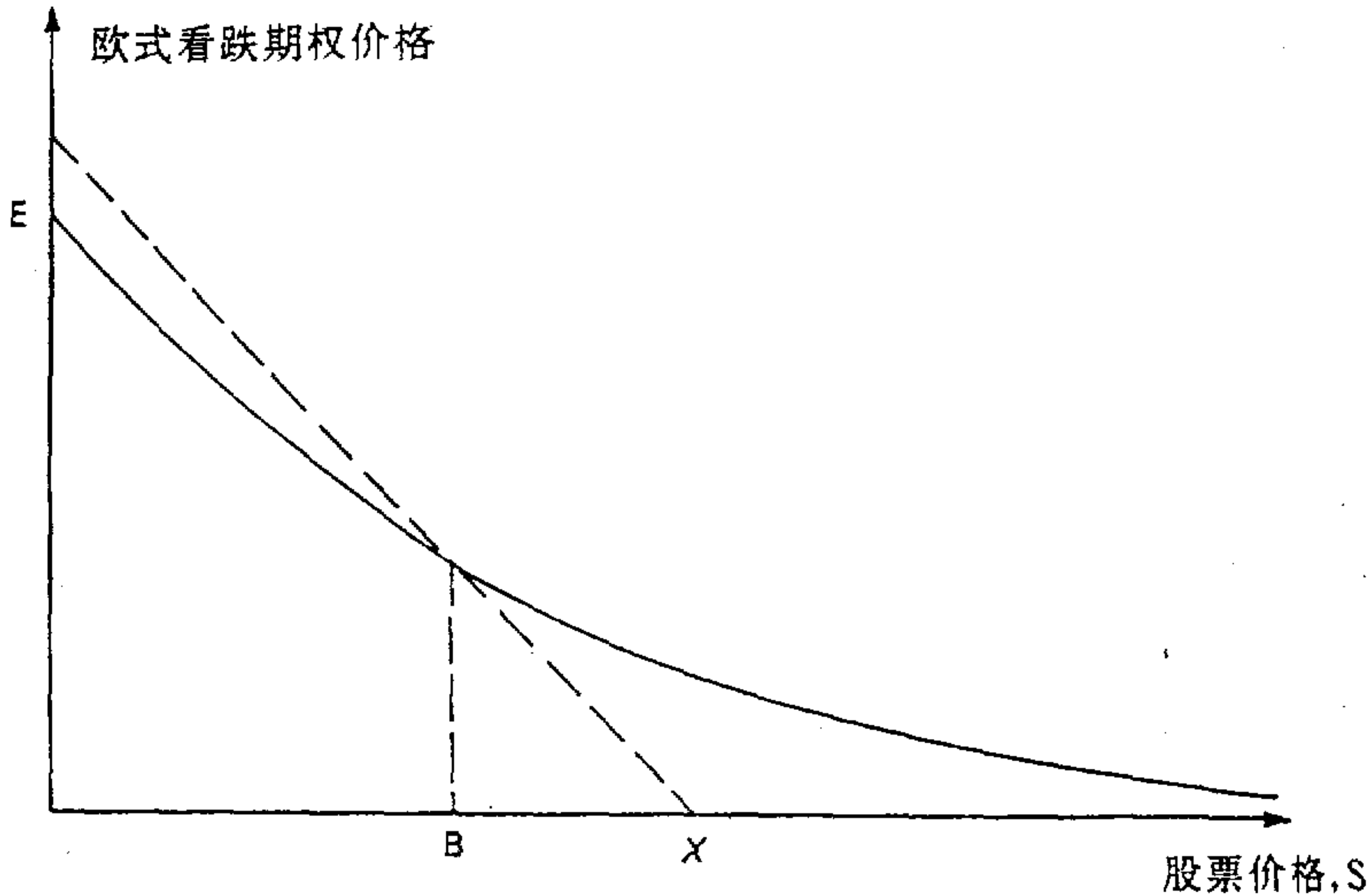


图 4-18

股价为S的欧式看跌期权的价格变化图



四、期权平价定理

期权平价定理给出看涨期权价格和看跌期权价格之间的关系。

假设有以下资产组合：

1.卖出一口call，到期时刻t，履约价格x，期权费c

2.买进一口put，到期时刻t，履约价格x，期权费p

3.买进根本资产，价格S_0

借一笔资金

xe^{-rt} ，r为连续复利的无风险利率

完成上述交易的现金流为 $c-p-S_0+xe^{-rt}$

到期时产生的净现金流总是为0

	$S_t>x$	$S_t<x$
(1)	$-S_t+x$	0
(2)	0	$x-S_t$
(3)	S_t	S_t
(4)	$-x$	$-x$

如果资产组合的最后价值总是为0，最初的价值也是为0，

所以有 $c-p-S_0+xe^{-rt}=0$

或 $p=c-S_0+xe^{-rt}$

美式看涨期权和看跌期权之间的关系

- 看涨与看跌期权之间平价关系仅适用于欧式期权。
- 但也可推导出不付红利股票的美式期权价格之间的某种关系。

$S-X<C-P<S-Xe^{-r(T-t)}$ 式（*2）

例

- 考虑不付红利股票的美式看涨期权，执行价格为$20，到期期限为5个月，期权价格为$1.5。
- 则同一股票相同执行价格和到期期限的欧式看涨期权的价格也是如此。
- 假定股票的现价为$19，无风险年利率为10％。
- 根据$C+Xe^{-r(T-t)}=P+S$，执行价格为$20，到期期限为5个月的欧式看跌期权的价格为：$1.50+20e^{-0.1*0.4167}-19 = \$1.68$

- 根据式（*2）
- $19 - 20 < C - P < 19 - 20e^{-0.1*0.4167}$

  或 $1 > P-C > 0.18$
- 这表明P-C在$1.00和$0.18之间。
- 由于C为$1.50，P必须在$1.68和$2.50之间
- 换句话说，与美式看涨期权执行价格和到期期限相同的美式看跌期权价格的上限和下限分别为$2.50和$1.68。

六、红利的影响

- 用字母D表示在期权有效期内红利的现值
- 为此，人们假定在除息日发放红利。

1. 看涨期权和看跌期权的下限
2. 提前执行
3. 看涨与看跌期权之间的平价关系

1. 看涨期权和看跌期权的下限

$$c > S - D - Xe^{-r(T-t)}$$

$$p > D + Xe^{-r(T-t)} - S$$

2. 提前执行

- 当预期有红利发放时，我们不再肯定美式看涨期权不应提前执行。
- 有时在除息日前，立即执行美式看涨期权是明智的。
- 这是因为发放红利将使股票价格跳跃性下降，使期权的吸引力下降。

3. 看涨与看跌期权之间的平价关系

$$c + D + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$

$$S - D - X < C - P < S - Xe^{-r(T-t)}$$

10.9　　期权的行为

（1）根本资产价格对期权价格的影响——得尔塔（δ）

定义：当对应资产价格变化一个单位时期权费的变化

两种解释：

●得尔塔为**期权费/对应资产价格曲线的斜率**，

●得尔塔等于**以对应资产为期权进行套头时的套头率**。

●不付红利股票的欧式看涨期权：　$\delta = N(d_1)$

●不付红利股票的欧式看跌期权：　$\delta = N(d_1) - 1$

●基于支付红利率为q的股票指数的欧式看涨期权：

$$\delta = e^{-q(T-t)} N(d_1)$$

●基于支付红利率为q股票指数的欧式看跌期权：

$$\delta = e^{-q(T-t)}[N(d_1)-1]$$

●欧式外汇看涨期权：$\delta = e^{-r_f(T-t)}N(d_1)$

式中r_f是外汇无风险利率

●欧式外汇看跌期权：$\delta = e^{-r_f(T-t)}[N(d_1)-1]$

●欧式期货看涨期权：$\delta = e^{-r(T-t)}N(d_1)$

●欧式期货看跌期权：$\delta = e^{-r(T-t)}[N(d_1)-1]$

一个例子

- 某金融机构出售了基于100,000股不付红利股票的欧式看涨期权，获利$300,000。
- 假设在股票市场股票价格是$49
- 执行价格是$50
- 无风险利率是年利率5%
- 股票价格波动率是每年20%
- 距到期时间还有20周
- 股票的期望收益率是每年13%

使用一般的符号，这意味着：

- $S=\$49$, $X=\$50$, $r=0.05$
- $\sigma=0.20$, $T-t=0.3846$, $\mu=0.13$

- 金融机构一般情况下很少出售基于单种股票的看涨期权。
- 但用基于一种股票的看涨期权作为例子便于我们展开讨论，所得结论也适用于其它类型的期权和衍生证券。
- 由Black-Scholes定价模型可知该期权的价格大致为$240,000。
- 这家机构因此以比该期权理论价值高出$60,000的价格出售了该期权，同时面临着如何对冲其暴露头寸的问题。

模拟过程

- 假设保值过程为每周调整一次。
- 在表13.2中， Delta的初始计算值为0.522。意味着在出售看涨期权的同时，必须借进$2,577,800并按$49价格购买52,200股股票。
- 第一周内发生的利息费用为$2,500。
- 到第一周末，股票价格下降到$48(1/8)。
- 这使得Delta值相应减少到0.458，要保持Delta中性，此时应出售6,400股股票。以上操作得到$308,000的现金。

- 在第一周末累计借款余额为2,252,300。
- 在第二周内，股票价格下降到$47(3/8)，Delta值又减小了，如此等等。
- 在期权临近到期时，很明显该期权将被执行，Delta接近1.0。
- 因此，到20周时，套期保值者具有完全的抵补期权头寸。
- 套期保值者持有股票的收入为$5,000,000，因此出售该期权并对冲该期权风险的总计支出为$263,400。

表4-6　Delta对冲的模拟；期权接近于实值期权状态；
对冲成本＝$263,400

周次	股票价格	Delta	购买的股票数	购买股票的成本（以$1000为单位）	累计成本(包括利息，以$1000为单位)	利息成本(以$1000为单位)
0	49	0.522	52,200	2,557.8	2,557.8	2.5
1	$48\frac{1}{8}$	0.458	(6,400)	(308.0)	2,252.3	2.2
2	$47\frac{3}{8}$	0.400	(5,800)	(274.8)	1979.7	1.9
3	$50\frac{1}{4}$	0.596	19,600	984.9	2,966.5	2.9
4	$51\frac{3}{4}$	0.693	9,700	502.0	3,471.3	3.3
5	$53\frac{1}{8}$	0.774	8,100	430.3	3904.9	3.8
6	53	0.771	(300)	(15.9)	3,892.8	3.7

7	$51\frac{7}{8}$	0.706	(6,500)	(337.2)	3559.3	3.4
8	$51\frac{3}{8}$	0.674	(3,200)	(164.4)	3,398.4	3.3
9	53	0.787	11,300	598.9	4,000.5	3.8
10	$49\frac{7}{8}$	0.550	(23,700)	(1,182.0)	2,822.3	2.7
11	$48\frac{1}{2}$	0.413	(13,700)	(664.4)	2,160.6	2.1
12	$49\frac{7}{8}$	0.542	12,900	643.4	2,806.1	2.7
13	$50\frac{3}{8}$	0.591	4,900	246.8	3055.6	2.9
14	$52\frac{1}{8}$	0.768	17,700	922.6	3981.2	3.8
15	$51\frac{7}{8}$	0.759	(900)	(46.7)	3938.3	3.8

16	$52\frac{7}{8}$	0.865	10,600	560.5	4502.6	4.3
17	$54\frac{7}{8}$	0.978	11,300	620.1	5127.0	4.9
18	$54\frac{5}{8}$	0.990	1,200	65.6	5197.5	5.0
19	$55\frac{7}{8}$	1.000	1,000	55.9	5258.3	5.1
20	$57\frac{1}{4}$	1.000	0	0.0	5263.4	

表4-7 Delta对冲的模拟；期权接近于虚值期权状态；对冲成本＝$256,600

周次	股票价格	Delta	购买的股票数	购买股票的成本（以$1000为单位）	累计成本（包括利息，以$1000为单位）	利息成本（以$1000为单位）
0	49	0.522	52,200	2,577.8	2,577.8	2.5
1	49.75	0.568	4,600	228.9	2,789.1	2.7
2	52	0.705	13,700	712.4	3,504.2	3.4
3	50	0.579	(12,600)	(630.0)	2,877.6	2.8
4	48.375	0.459	(12,000)	(580.5)	2,299.8	2.2
5	48.25	0.433	(1,600)	(77.2)	2,224.8	2.1
6	48.75	0.475	3,200	156.0	2,383.0	2.3
7	49.625	0.540	6,500	322.6	2,707.8	2.6
8	48.25	0.420	(12,000)	(579.0)	2,131.4	2.0

9	48.250	0.410	(1,000)	(48.2)	2085.2	2.0
10	51.125	0.658	24,800	1,267.9	3,355.1	3.2
11	51.500	0.692	3,400	175.1	3,533.5	3.4
12	49.875	0.542	(15,000)	(748.1)	2,788.7	2.7
13	49.875	0.538	(400)	(20.0)	2,771.5	2.7
14	48.750	0.400	(13,800)	(672.7)	2,101.4	2.0
15	47.500	0.236	(16,400)	(779.0)	1,324.4	1.3
16	48	0.261	2,500	120.0	1,445.7	1.4
17	46.250	0.062	(19,900)	(920.4)	526.7	0.5
18	48.125	0.183	12,100	582.3	1,109.5	1.1
19	46.625	0.007	(17,600)	(820.6)	290.0	0.3
20	48.125	0.000	(700)	(33.7)	256.6	

- 裸期权头寸策略（ naked position）
- 如果看涨期权被执行，该金融机构不得不以当前的市场价格购买100,000股与该期权头寸对冲，其损失为股票价格超出执行价格部分的100,000倍。
- 例如，若20周末到期时股票价格为$60，金融机构的期权成本为100,000×($60-$50)=$1,000,000，这远远高出先前的期权费收入$300,000。
- 若20周末到期时股票价格低于$50，裸期权头寸策略将运行得很有效。
- 该期权不会被执行，金融机构分文无损，整个交易中金融机构净获利$300,000。

- 抵补期权头寸策略（covered position），所做的就是在出售看涨期权的同时购买100,000股股票。
- 如果到期时该期权被执行，这个策略很有利，但在其余情况下，代价就会很昂贵。
- 例如，如果股票价格降低到$40，该机构在股票头寸上的损失将比$300,000高许多。
- 从看涨期权与看跌期权之间的平价关系，也可以看出出售一个抵补看涨期权头寸风险暴露与出售一个裸看跌期权头寸风险暴露是相同的。

- 所以裸期权头寸和抵补期权头寸这两种策略都不是理想的套期保值方法。

- 若某投资者出售了20份该股票看涨期权合约（20 份股票看涨期权可购买2,000股股票）。
- 投资者的保值头寸保持Delta对冲状态（或Delta中性状态）这是因为随着股票价格的变化和时间的流逝，Delta值也在不断地变化。实际上，这套期保值操作中，需要定期地调整保值头寸，这种调整称为再均衡（rebalancing）。

（2）期权到期时间变化对看涨期权价格的影响——希塔（ θ ）

定义：

当到期日变化一个单位时（通常为一天的长度）期权费的变化

●希塔定义了随着时间一天一天地流逝，期权的时间价值损失了多少，它是衡量时间衰减减的准确指标。

●不付红利股票的欧式看涨期权： $\theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$

●不付红利股票的欧式看跌期权： $\theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rXe^{-r(T-t)}N(-d_2)$

- 基于支付红利率为q的股票指数的欧式看涨期权：
- $$\theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} + qSN(d_1)e^{-q(T-t)} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$$
- 基于支付红利率为q的股票指数的欧式看跌期权：

$$\theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} - qSN(-d_1)e^{-q(T-t)} + rXe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

- 将q换作*rf*，以上两方程式是欧式外汇看涨期权和看跌期权的 θ 公式。
- 将q换作r，S换作F，可得欧式期货期权的 θ 公式。

（3）价格变动率变化对看涨期权的影响——维加（*K*）

- 定义：

当变动率变化一个单位时（通常为1%）期权费的变化。

- 不付红利股票的欧式期权

$$\kappa = S\sqrt{T-t}N'(d_1)$$

- 连续支付红利率为q的股票或股票指数的欧式期权

$$\kappa = S\sqrt{T-t}N'(d_1)e^{-q(T-t)}$$

（4）利率变化对看涨期的影响——罗（ ρ ）

定义：

当利率变化一个单位时（通常为1%）期权费的变化

●不付红利股票的欧式看涨期权：

$$\rho = X(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

● 不支付红利股票的欧式看跌期权：

$$\rho = -X(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

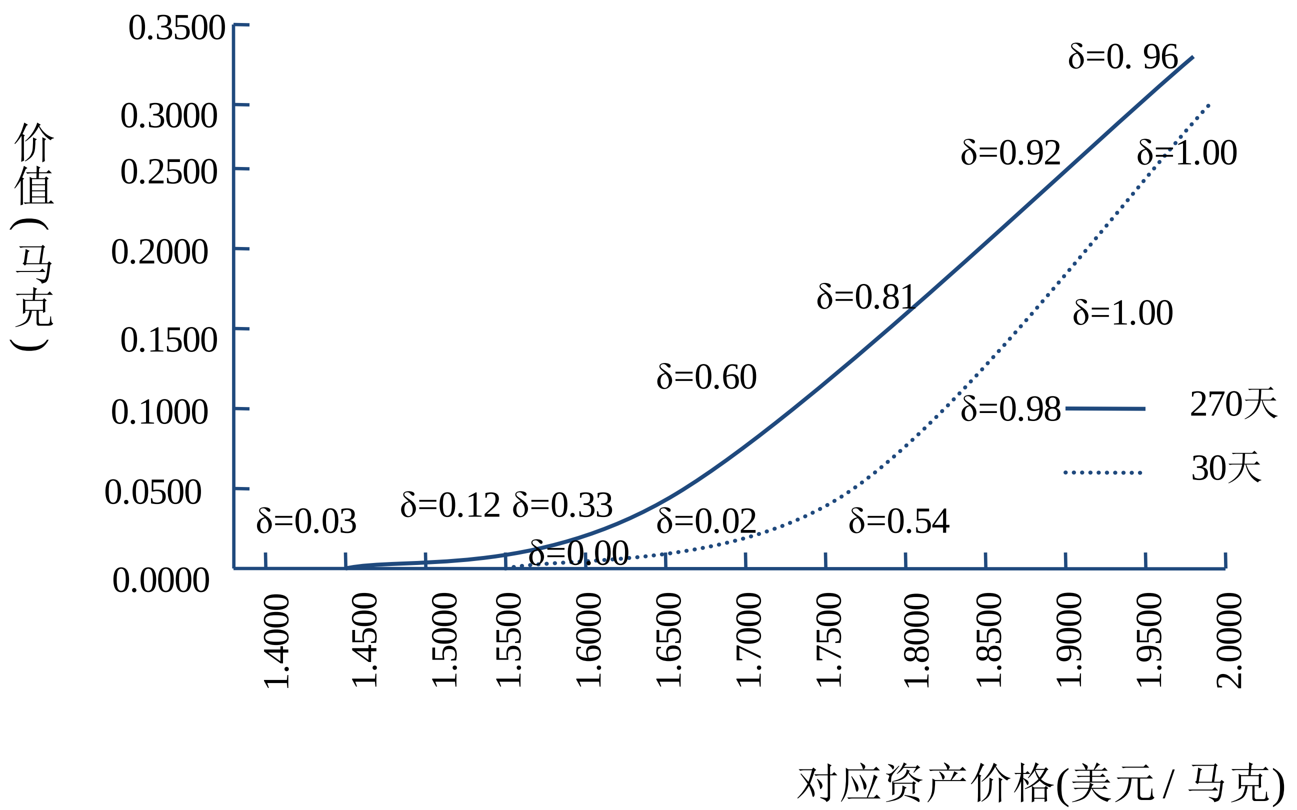


图4-31 显示得尔塔值的利润图

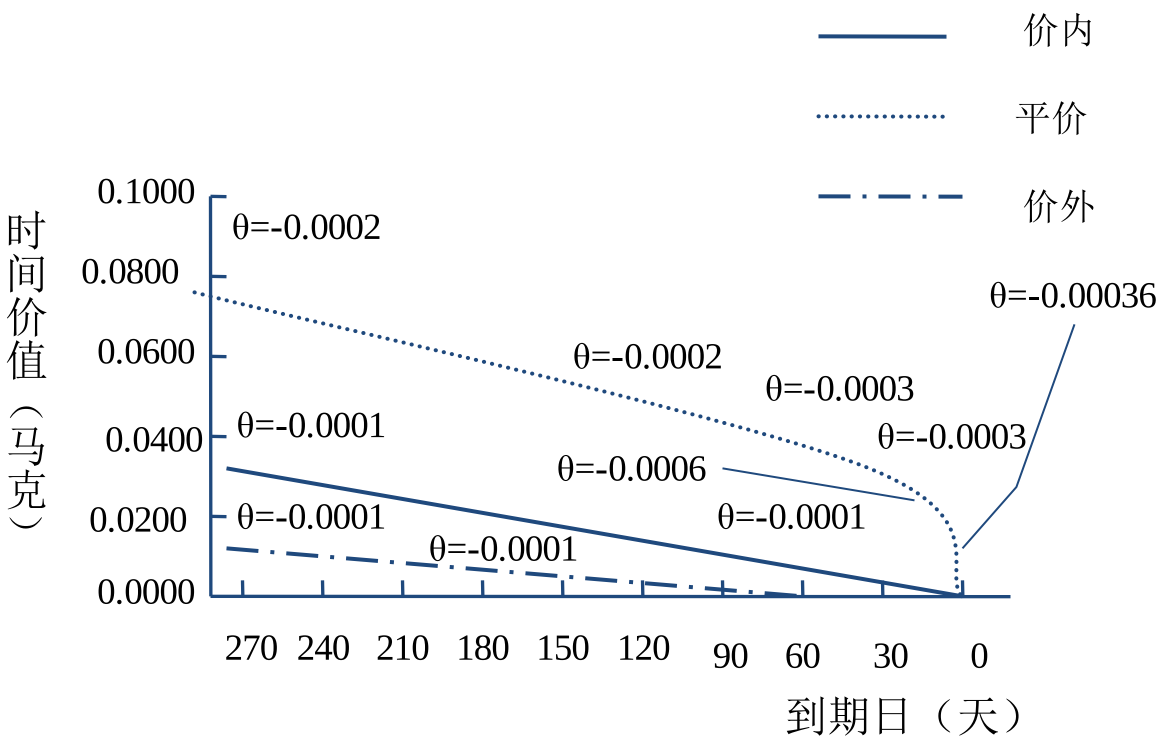


图4-32 时间衰减和希塔

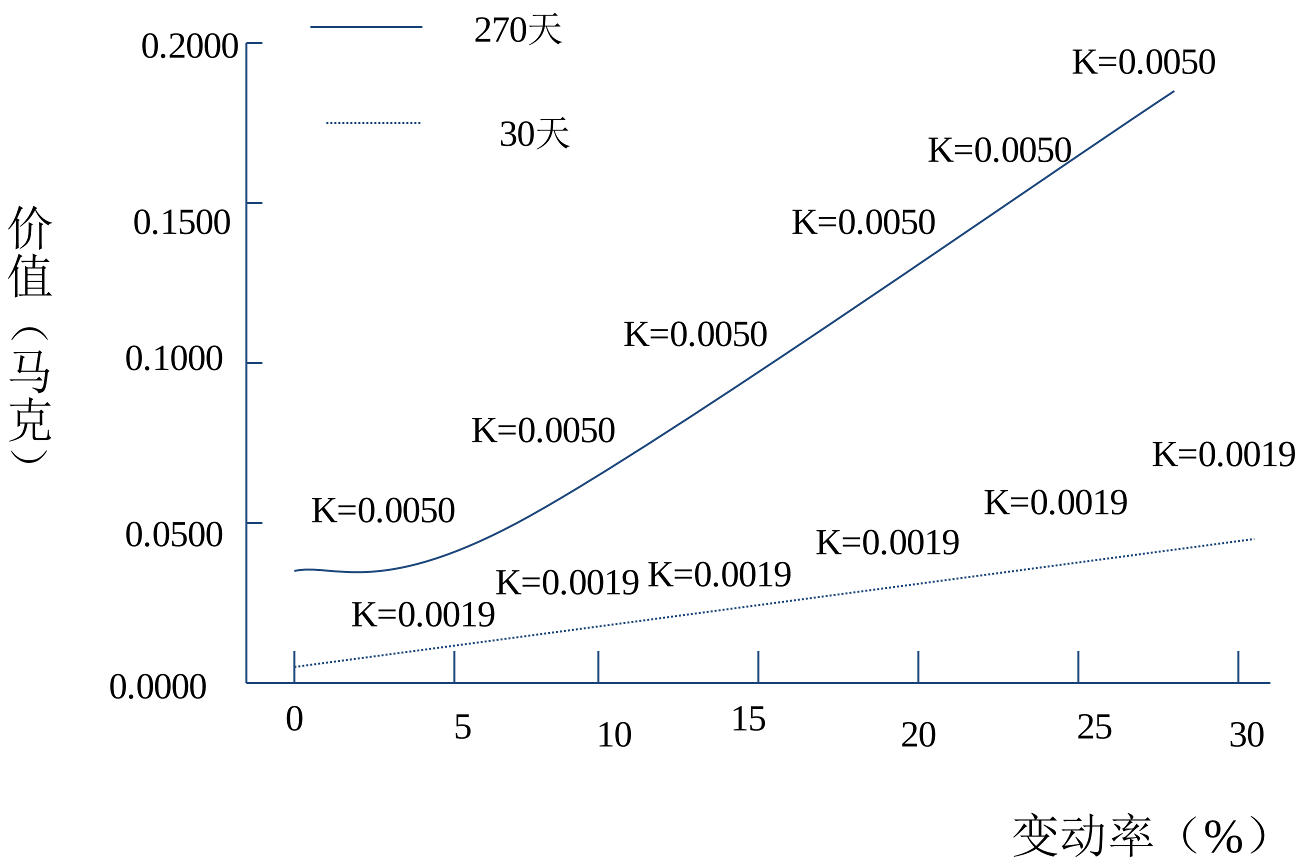


图4-33对于变动率的敏感性——维加

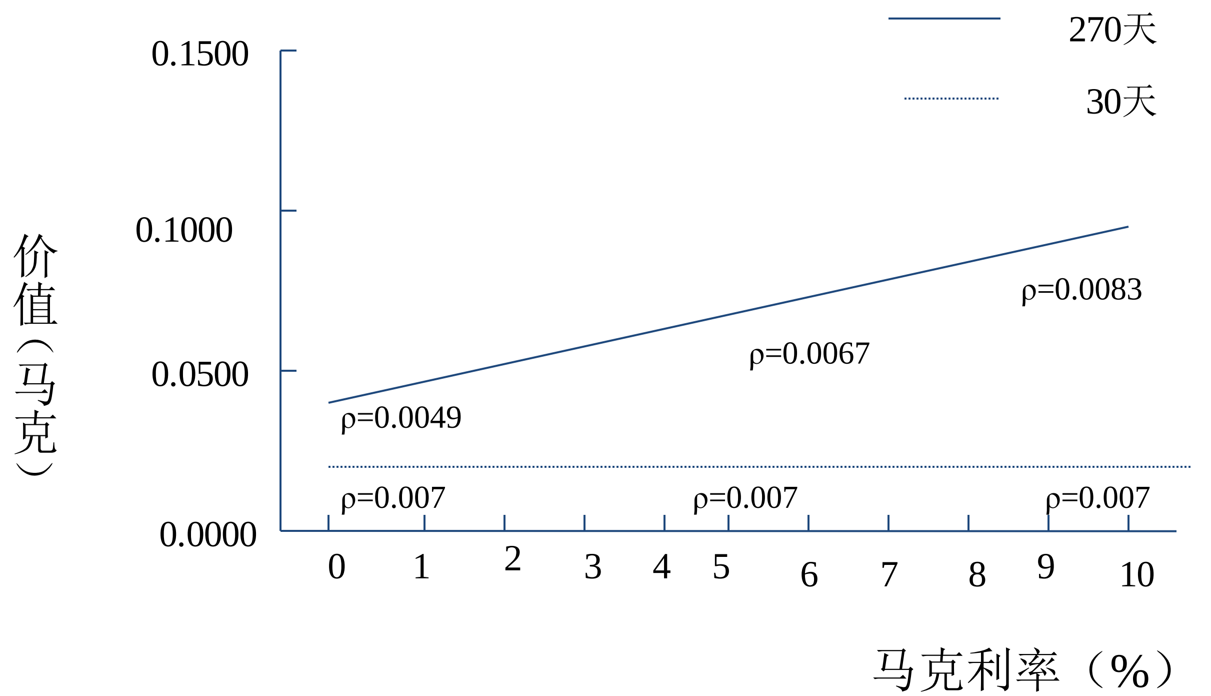


图4-34 对于利率的敏感性——罗

两个经常用到的指标：

（5）λ (伦塔):

当对应资产价格变化一定百分比时期权费变化的百分比

表示的是期权的杠杆率，总是大于1。

（6） γ （伽马）：

对应资产价格变化一个单位时得尔塔的变化

●不付红利股票的欧式看涨期权或看跌期权： $\gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$

●支付连续红利率为q的股票指数的欧式看涨期权或看跌期权：

$$\gamma = \frac{N'(d_1)e^{-q(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

➢当q设定为外汇无风险利率时

上式即为外汇欧式期权的伽马公式

➢当$q = r$，$S = F$时，上式为欧式期货期权的伽马公式

- 假使一个资产组合的 $\delta=0$ ，$\gamma=-3000$ ，有一个看涨期权的 δ 和 γ 分别为0.62和1.50，如何来构造一个 δ 和 γ 中性的组合。

买入2000看涨期权，卖出1240资产。

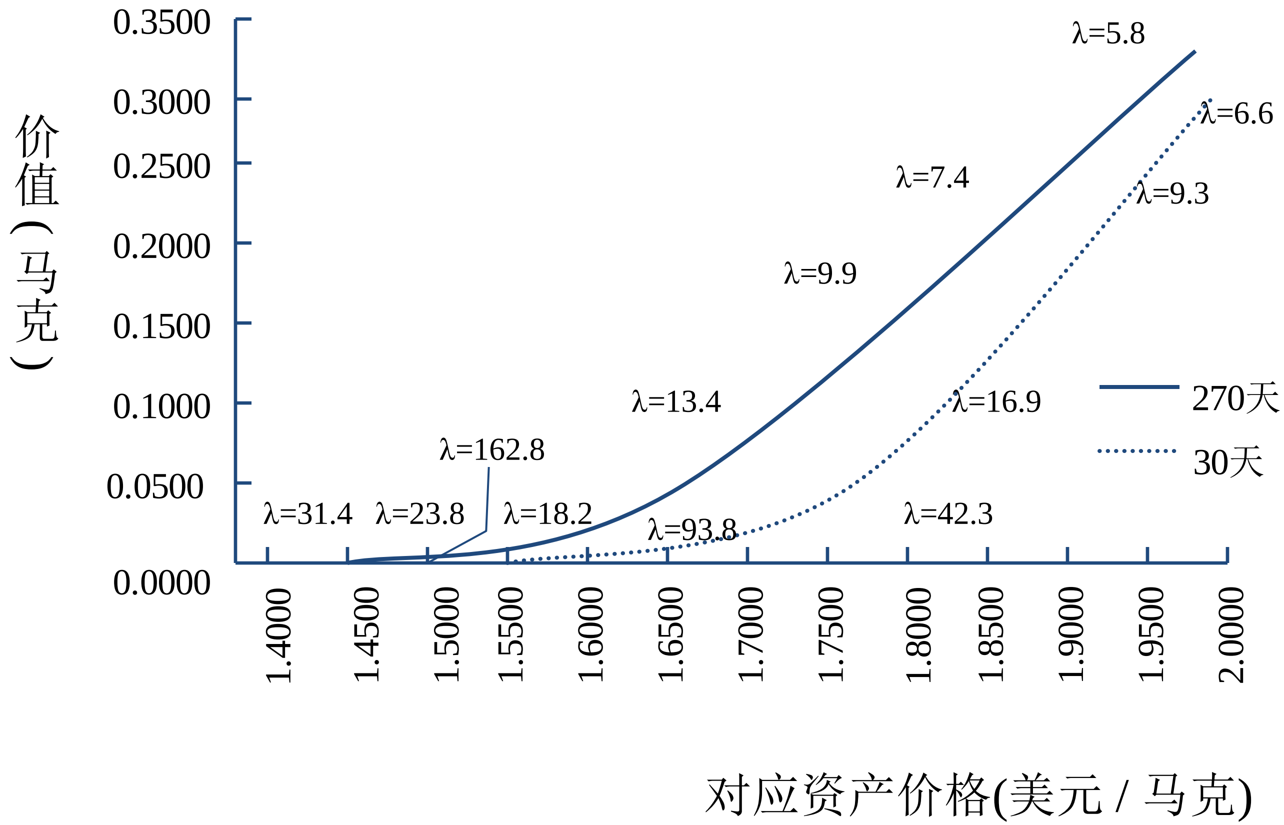


图4-35 期权杠杆率——伦塔

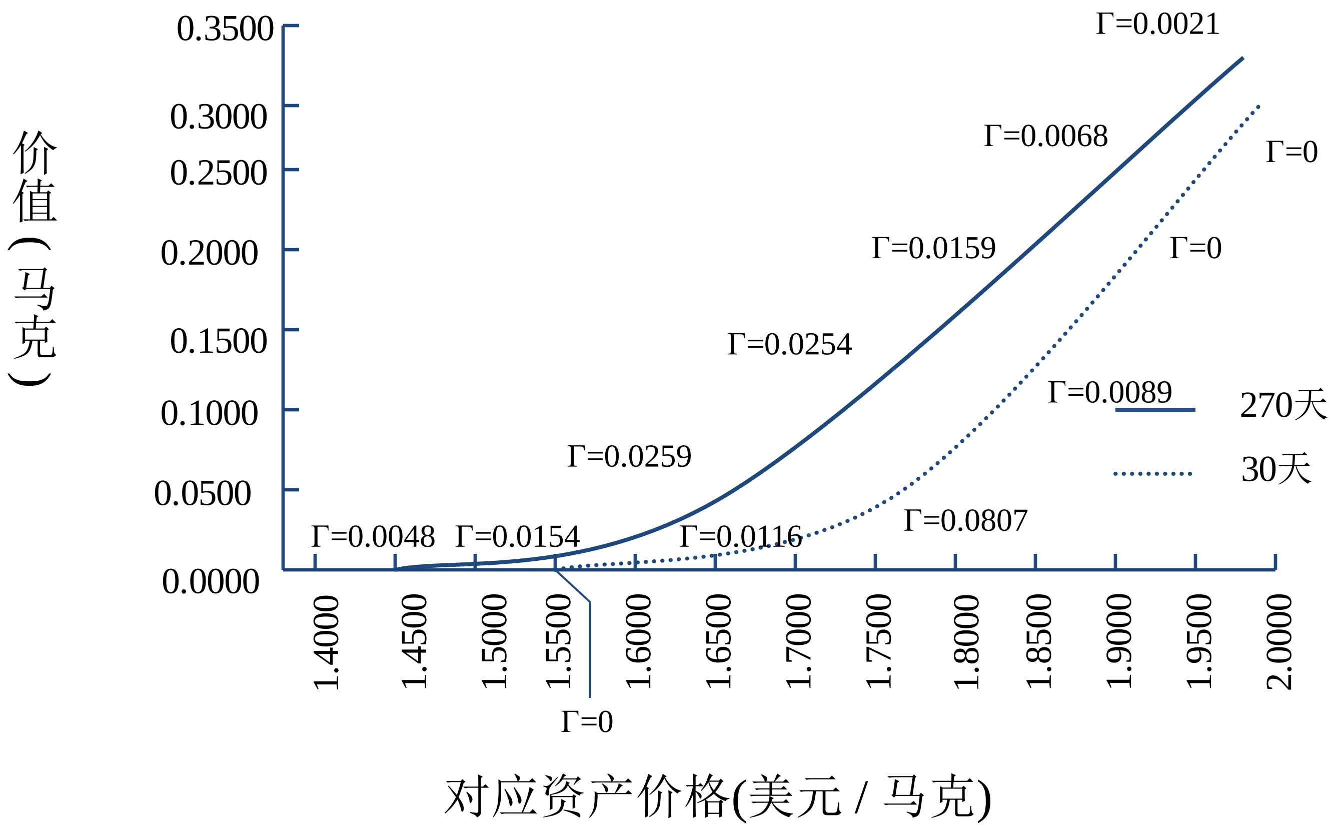


图4-36 得尔塔的敏感性——伽马

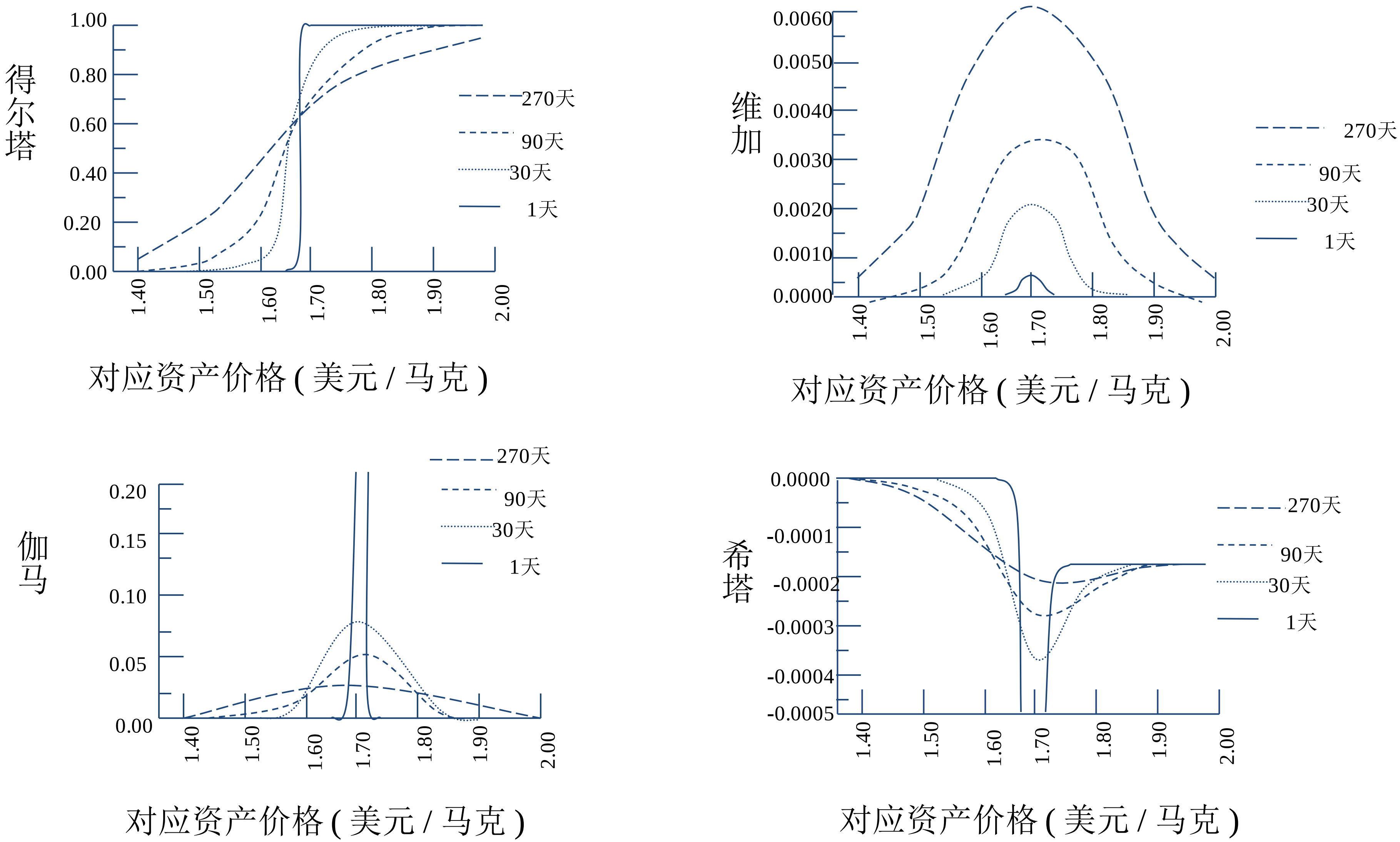


图4-37 得尔塔、伽马、希塔和维加的比较

谢　谢！